



**Уральский  
федеральный  
университет**

имени первого Президента  
России Б.Н.Ельцина

**Высшая школа  
экономики  
и менеджмента**

**А. Г. КРЕМЛЕВ**

# ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ИГР

Учебное пособие



Министерство образования и науки Российской Федерации  
Уральский федеральный университет  
имени первого Президента России Б. Н. Ельцина

А. Г. Кремлев

# Основные понятия теории игр

Рекомендовано  
методическим советом УрФУ  
в качестве учебного пособия для студентов,  
обучающихся по программе бакалавриата  
по направлению подготовки 080100 — Экономика

Екатеринбург  
Издательство Уральского университета  
2016

УДК 519.83(075.8)

ББК 22.18я73

К79

**Рецензенты:**

А. Н. Красовский, д-р физ.-мат. наук, проф., завкафедрой «Информационные технологии и математическое моделирование» Уральского государственного аграрного университета;

С. С. Титов, д-р физ.-мат. наук, проф., завкафедрой прикладной математики и технической графики УралГАХА

Научный редактор — А. М. Тарасьев, д-р физ.-мат. наук, проф., завсектором Института математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН

**Кремлев, А. Г.**

К79      Основные понятия теории игр : учебное пособие / А. Г. Кремлев. — Екатеринбург : Изд-во Урал. ун-та, 2016. — 144 с.

ISBN 978-5-7996-1940-4

Изложены базовые понятия и положения теории игр, типичные модели и применяемые методы решения и анализа антагонистических и бескоалиционных игр. В качестве основных принципов оптимальности рассматриваются оптимальность по Парето и равновесность по Нэшу. Каждый раздел включает теоретические сведения, сопровождающие примеры, контрольные вопросы и задания.

Предназначено студентам, обучающимся по направлению подготовки «Экономика», а также всем, интересующимся теорией игр.

Библиогр.: 32 назв. Рис. 17.

УДК 519.83(075.8)

ББК 22.18я73

ISBN 978-5-7996-1940-4

© Уральский федеральный  
университет, 2016

# Оглавление

---

Предисловие .....	5
1. Общее представление о теории игр.....	11
Предмет теории игр .....	11
Неопределенность в игровых ситуациях .....	13
Применение теории игр .....	14
Классификация игр .....	16
Примеры классических игр двух лиц.....	17
Контрольные вопросы и задания.....	25
2. Формализация бескоалиционных игр .....	28
Нормальная форма игры .....	28
Ситуации равновесия по Нэшу.....	29
Доминирование стратегий .....	31
Оптимальные по Парето ситуации .....	34
Стратегическая эквивалентность игр .....	38
Свойство наилучших ответов игроков.....	43
Контрольные вопросы и задания.....	44
3. Матричные игры.....	47
Определение матричной игры .....	47
Ситуации равновесия в матричной игре .....	49
Смешанные стратегии .....	54
Ситуации равновесия в смешанных стратегиях .....	56
Свойства значения игры.....	60
Контрольные вопросы и задания.....	62

---

4. Решение матричных игр .....	64
Задачи игроков в матричной игре .....	65
Решение матричной игры $2 \times 2$ .....	67
Графический метод решения матричной игры .....	69
Теорема о дополняющей нежесткости (теорема равновесия) .....	77
Решение матричных игр $2 \times n$ и $m \times 2$ .....	80
Теоремы о доминировании строк (столбцов) платежной матрицы .....	86
Контрольные вопросы и задания .....	90
5. Сведение матричной игры к задаче линейного программирования (ЛП) .....	92
Эквивалентные задачи ЛП для игроков .....	92
Общий вид задачи ЛП .....	95
Правила работы с симплекс-таблицей .....	100
Контрольные вопросы и задания .....	107
6. Биматричные игры .....	108
Определение биматричной игры .....	108
Смешанное расширение биматричных игр .....	109
Условия равновесия (в смешанных стратегиях) в биматричной игре $2 \times 2$ .....	111
Поиск ситуаций равновесия в биматричных играх ....	115
Графический метод решения биматричных игр $2 \times n$ и $m \times 2$ .....	124
Свойства равновесных стратегий .....	128
Доминирование смешанных стратегий .....	134
Контрольные вопросы и задания .....	137
Библиографический список .....	139

---

## Предисловие

---

Представляется также необходимым фиксировать не только то, чем занимается, но и то, чем не занимается теория игр в ее современном состоянии, тем более, что на этот счет бытуют самые фантастические представления.

*Н. Н. Воробьев*

**Д**анное пособие посвящено изучению основ теории игр. Теория игр связана с разделом прикладной математики «Исследование операций», в котором занимаются разработкой и применением методов нахождения оптимальных решений (наилучших по тем или иным признакам) на основе математического моделирования в различных областях человеческой деятельности.

Современная экономическая теория характеризуется высоким уровнем формализации, что определяет существенное использование математических методов и моделей. Адекватная математическая модель социально-экономического явления должна отражать присущие ему особенности. Одна из характерных черт всякого социально-экономического явления состоит в различии интересов участвующих в нем сторон (наличии разных точек зрения на само явление и его возможные исходы), в разнообразии действий, которые эти стороны могут осуществлять для достижения своих целей. Такие ситуации, обусловленные множественностью (несовпадением) интересов участников, стремлением как можно больше выиграть у конкурентов (получить наилучший индивидуальный результат), называют конфликтными ситуациями (конфликтами).

Принятие управленческих решений в условиях конфликта требует специального исследования, основанного на использовании методов теории игр. Для таких ситуаций качество и количество имеющейся информации о данной ситуации (объекте управления и внешней среде) определяют, каким образом может быть формализована и решена задача принятия решения.

Формализация конфликтной ситуации в форме игры заключается в описании ее основных элементов, к которым относятся субъекты игры (игроки), множество их стратегий (допустимые альтернативы), способы выбора стратегий, информация, которой обладает каждый игрок при осуществлении такого выбора, выигрыш каждого игрока при каждом наборе выбранных стратегий. Доступная игрокам информация о намерениях других игроков, их возможностях (могут ли они договариваться, действовать сообща против других игроков) может существенно повлиять на принимаемое решение.

Всякая игра регламентирована определенными правилами, указывающими:

- порядок чередования действий (или «ходов») участников;
- правила выполнения каждого хода;
- количественный результат игры (выигрыш, проигрыш), к которому приводит данная совокупность ходов.

Сформулировать реальную конфликтную ситуацию в игровой форме — это значит схематизировать ее так, чтобы ясно были видны возможные способы поведения участников (называемые стратегиями) и численный результат (количественная оценка — платеж), к которому приводит каждая комбинация стратегий участвующих сторон.

Формализованная схема конфликтной ситуации в математической форме представляет ее математическую модель.

Целью теории игр является выработка рекомендаций для разумного поведения игроков в конфликтных ситуациях, т. е. определение оптимальной стратегии каждого из игроков.



Оптимальной стратегией игрока называется такая стратегия, которая при многократном повторении игры обеспечивает данному игроку максимально возможный средний выигрыш (или, что равносильно, минимально возможный средний проигрыш).

При выборе игроком этой стратегии за основу берется предположение, что его противник (или противники) является вполне разумным (мыслящим рационально) и делает все, чтобы помешать ему (игроку) добиться своей цели.

Основной принцип теории игр можно сформулировать следующим образом: выбирай свое поведение так, чтобы оно было рассчитано на наихудший для тебя образ действий противника.

Если игроки (участники некоторой игры) одинаково разумны (действуют рационально), то должно быть найдено некоторое равновесное положение, определяющее равновесный средний выигрыш для каждого игрока. Этот равновесный средний выигрыш, на который вправе рассчитывать каждый игрок, реализуется, если игроки будут вести себя разумно, т. е. придерживаться своих оптимальных стратегий. Следует заметить, что если какой-то игрок будет вести себя неразумно (нерационально) и примет иную, отличную от оптимальной, стратегию, то его выигрыш может уменьшиться (в общем случае не увеличиться по сравнению с равновесным выигрышем).

В современных условиях принятие эффективного управленческого решения невозможно без сочетания творческого мышления субъекта управления, обладающего достаточным уровнем знаний и умений (квалификаций), применения различных моделей и методов (которые способен разработать и внедрить субъект управления), а также современной техники обработки информации (системно достаточной и организованной для выработки решения). Включение дисциплины «Теория игр» в учебный план по направлению «Экономика» имеет целью изучение теоретических основ формирования моделей теории игр, освоение навыков практического поиска (выбора) опти-

мальных стратегий и использования расчетных методов этой дисциплины.

В данном пособии рассматриваются базовые понятия и положения теории игр, типичные модели и применяемые методы решения и анализа антагонистических и бескоалиционных игр. В качестве основных принципов оптимальности рассматриваются оптимальность по Парето и равновесность по Нэшу.

Пособие состоит из шести разделов, каждый из которых включает теоретические сведения, сопровождаемые примерами, контрольными вопросами и заданиями. В разделе 1 дается общее представление о теории игр (предмет и содержание теории игр, виды неопределенностей в игровых ситуациях), приводятся некоторые сведения о применении результатов теории игр, указывается общая классификация игр, рассматриваются примеры классических игр двух лиц («Дилемма заключенного», «Семейный спор», «Орлянка»).

Раздел 2 посвящен формализованному представлению бескоалиционной игры (в нормальной форме), в которой целью каждого игрока является оптимизация индивидуального выигрыша (причем игроки не могут координировать совместно свои стратегии). В этом разделе определяются ситуации равновесия по Нэшу, рассматриваются вопросы доминирования «чистых» стратегий, дается определение оптимальных по Парето ситуаций, приводится геометрическая интерпретация предпочтительности ситуаций, излагаются основные свойства стратегически эквивалентных игр, указывается свойство равновесной по Нэшу ситуации относительно наилучших ответов игроков.

Разделы 3–5 посвящены матричным играм (конечным антагонистическим играм). В разделе 3 вводятся основные понятия матричной игры, указываются формализованные цели игроков, приводятся определение ситуации равновесия в чистых стратегиях (седловая точка матрицы), условия существования ситуаций равновесия, схема нахождения седловых точек, смешанное

-----

Библиографический список включает как источники, которые использовались при написании данного пособия, так и работы, которые позволяют более глубоко рассмотреть суть теоретико-игровой проблемы, понять широту применения результатов и методов (направлений исследований) теории игр. Достаточно обширная библиография по теории игр и сопряженным вопросам приведена в [4].

Для первоначального ознакомления с основными понятиями и методами теории игр можно рекомендовать работы [5–7, 10, 11, 17, 22, 27, 28].

Большинство из представленных в библиографическом списке работ можно найти в электронных информационных ресурсах.

---

# 1. Общее представление о теории игр

---

## Предмет теории игр

---

**П***редметом теории игр* является математический анализ конфликтных ситуаций, формализованное описание которых представлено в виде математической модели, определяющей некоторую *игру*.

*Конфликтная ситуация* — это ситуация, в которой сталкиваются интересы двух (и более) противодействующих сторон, преследующих различные цели (несовпадающие полностью или частично). Эти конфликтующие стороны стремятся предпринять такие действия (выбрать такие решения), чтобы достичь наибольшего для себя в данных условиях успеха. Таким образом, если цели сторон противоположны, то максимизация успеха (выигрыша) одной из сторон будет означать максимизацию проигрыша другой стороны. А если сторон несколько (более двух), то это ведет к уменьшению их возможных выигрышей. Поэтому конфликтующие стороны будут осуществлять поиск наиболее приемлемых для себя решений (причем эта приемлемость должна быть для каждой из сторон).

Если каждая из сторон (в результате собственной оценки текущей ситуации) примет какое-то определенное решение, то последующая реализация принятых решений приведет к конкретному результату — распределению выигрышей сторон. Ре-

шения сторонами могут приниматься независимо друг от друга и не сообщаться заранее другим сторонам конфликта.

Таким образом, каждой из сторон приходится принимать решение в условиях неопределенности поведения противодействующих сторон, т. е. выигрыш каждой стороны зависит от того, как поведут себя другие стороны конфликта. Как оптимизировать принятие (или выбор) правильного решения? Какие требования предъявляются к таким оптимальным решениям? Как найти оптимальные решения?

Теория игр занимается исследованием *математических моделей* конфликтных ситуаций (игр) и их формальным решением, что позволяет:

- смоделировать процесс игры и ее возможные результаты до ее фактического начала;
- по результатам анализа смоделированной игры принять решение о целесообразности участия и оптимальном поведении в реальном конфликте.

Таким образом, теория игр дает математический прогноз конфликта (с учетом степени адекватности используемой модели конфликта).

Итак, *теория игр* — это теория математических моделей принятия решений в условиях неопределенности, когда принимающий решение субъект («игрок») располагает информацией лишь о множестве возможных ситуаций, в одной из которых он в действительности находится, о множестве решений («стратегий»), которые он может принять, и о количественной мере того «выигрыша», который он мог бы получить, выбрав в данной ситуации данную стратегию<sup>1</sup>.

*Содержание теории игр*: установление принципов оптимального поведения в условиях неопределенности, доказательство существования решений, удовлетворяющих этим принципам, указание алгоритмов нахождения решений, их реализация.

---

<sup>1</sup> Воробьев Н. Н. Философская энциклопедия. Т. 5. М., 1970. С. 208.

## Неопределенность в игровых ситуациях

---

*Неопределенность*, с которой мы встречаемся в теории игр, может иметь различное происхождение и содержание.

1. Неопределенность является следствием сознательной деятельности другого лица (лиц), отстаивающего свои интересы.

На принимаемые игроками решения может существенно повлиять доступная им информация о намерениях других игроков (какие они выберут стратегии, одновременно или в какой-то последовательности делают ходы), их возможностях (могут ли они договариваться, действовать сообща против других игроков).

2. Неопределенность вследствие появления случайности в игровой ситуации: сознательные действия игроков (субъектов игровой ситуации), осуществляющих выбор своих стратегий на основе рандомизации множества допустимых альтернатив (частотного или вероятностного распределения исходных или чистых стратегий). Моделирование механизма такого выбора (симуляции случайного процесса) выполняется в форме как физического эксперимента (например, бросание монеты, игрального кубика, использование рулетки и др.) или компьютерным способом (на основе получения псевдослучайных чисел).

Такой способ позволяет расширить множество стратегий, которые игрок может выбрать (по сравнению с множеством исходных стратегий), и имеет смысл при многократном повторении игровой ситуации. Тогда результат игры для игрока определяется как средний выигрыш (за одну игру), вычисляемый по формуле математического ожидания выигрыша, рассматриваемого как случайная величина.

3. Случайность в игровой ситуации как следствие действия так называемой «природы», характеризующей обстоятельствами, не зависящими от субъектов игровой ситуации. К таким обстоятельствам можно отнести условия внешней среды (в которых принимаются решения): состояние погоды, рыночная конъюнктура.

юнктура, выход из строя техники и др. Для таких игровых ситуаций в качестве противной стороны (как игрока 2) выступает «природа». При этом понимается, что поведение «природы» субъекту игровой ситуации (игроку 1) неизвестно, однако она ему сознательно не противодействует. На основании какой-то, например, статистической информации, можно сделать *n* предположений о возможных условиях обстановки (состояний «природы»), которые трактуются как бы стратегиями «природы» — игрока 2. Необходимо найти такую оптимальную стратегию, которая по сравнению с другими является наиболее выгодной. Выбор наилучшего решения в условиях неопределенной обстановки существенно зависит от того, какова степень этой неопределенности (вероятности обстановок), какой используется критерий оценки результата действий игрока 1.

### Применение теории игр

---

Моделями теории игр можно в принципе содержательно описывать весьма разнообразные явления: экономические, правовые и классовые конфликты, взаимодействие человека с природой, биологическую борьбу за существование и т. д. Например, в экономике конфликтные ситуации встречаются часто и имеют многообразный характер (взаимоотношения между поставщиком и потребителем, покупателем и продавцом, банком и клиентом). В этих примерах конфликтная ситуация порождается различием интересов партнеров и стремлением каждого из них принимать решения, которые реализуют поставленные цели в наибольшей степени. При этом каждому приходится считаться не только со своими целями, но и с целями партнера, и учитывать неизвестные заранее решения, которые эти партнеры будут принимать.

Хорошо известны в *экономической* науке классические примеры применения игровых подходов к исследованию проблем



производства и ценообразования в олигополии (олигополия — ситуация на рынке, когда действует небольшое количество продавцов однородной продукции, причем каждая из конкурирующих сторон способна влиять на цену продукции, предлагаемой остальными продавцами, а следовательно, и на их уровень затрат): модели Курно (1838), Бертрана (1883), Эджворта (1897).

Первые математические аспекты и приложения теории игр были изложены в классической книге Джона фон Неймана и Оскара Моргенштерна «Теория игр и экономическое поведение» в 1944 г. Нейман и Моргенштерн занимались играми с нулевой суммой, в которых выигрыш одной стороны равен проигрышу другой. Математическое определение равновесной ситуации предложено американским математиком и экономистом Джоном Нэшем в 1951 г., при котором обе стороны используют соответствующие (оптимальные) стратегии, приводящие к созданию устойчивого равновесия. Игрокам выгодно сохранять это равновесие, так как любое отклонение от такой равновесной стратегии одной из сторон приведет к ухудшению ее положения.

Хорошо известны результаты применения теории игр в *военном деле*, причем можно указать различные направления применения, использующие различные модели. Например, раздел дифференциальных игр, в которых рассматривается управление динамическими объектами (самолетами, ракетами, кораблями и др.) в условиях неопределенности и конфликта: задачи слежения, сближения, наведения, преследования, уклонения; например, при определении оптимальных маневров подводной лодки, преследуемой обнаружившим ее надводным кораблем противника.

Другое направление применения — в области *политологии* (например, модель гонки вооружений на основе классической игры двух лиц — «Дилеммы заключенного»), в межгосударственной политике (участники — конфликтующие государства). На основе теории игр рассматриваются *рационалистические те-*

*ории войны*, предполагающие, что обе стороны в конфликте действуют разумно и исходят из желания получить наибольшую выгоду при наименьших потерях со своей стороны.

## Классификация игр

Формализация игровых ситуаций и поиск методов выбора приемлемых (или оптимальных в некотором смысле) стратегий приводит к выделению отдельных типов игр, группировке их в классы, определению общих средств исследования для выделенных классов. В современной теории игр существует множество классов игр с внутренним делением на подклассы (отдельные группы), для которых получены теоретические основы, определяющие существование оптимальных стратегий (оптимальных опять же в определенном смысле), разработаны алгоритмы поиска этих стратегий.

Различные виды игр можно классифицировать, основываясь на том или ином признаке, характеризующим игру: по *количеству игроков* (игры с двумя участниками — парные игры, игры  $n$  игроков, где  $n > 2$ ); по *количеству стратегий* (конечное или бесконечное число); по *степени информированности игроков* о стратегиях, сделанных ходах и предпочтениях противника (игры с полной/неполной информацией); по *свойствам функций выигрыша* (в зависимости от *вида функции* — матричные, биматричные, непрерывные, выпуклые и др.; в зависимости от *характера выигрышей* — игры с нулевой суммой (антагонистические игры), игры с ненулевой суммой, в которых целевые критерии для игроков различны); по *возможности предварительных переговоров и взаимодействий между игроками в ходе игры* (коалиционные, кооперативные, бескоалиционные игры).

Самое широкое деление игр выполняется на основе понятия координации игроков, участвующих в игре. Это бескоалицион-

ные и коалиционные (кооперативные) игры. *Бескоалиционные игры* — это класс игр, в которых каждый игрок принимает решение независимо от других игроков (изолированно), не участвуя ни в каких переговорах и соглашениях с другими игроками. К бескоалиционным играм относятся статистические игры (игры с «природой»), антагонистические игры (игры с противоположными интересами сторон), игры с непротивоположными интересами (в том числе биматричные игры) и др.

В *коалиционных (кооперативных) играх*, напротив, игроки могут принимать решения по согласованию друг с другом (им разрешается обсуждать перед игрой свои стратегии и договариваться о совместных действиях), они вправе вступать в коалиции. Образовав коалицию, игроки принимают взаимообязывающие соглашения о своих стратегиях. При этом они должны решить вопрос о дележе общего выигрыша между членами коалиции.

### Примеры классических игр двух лиц

---

**Пример 1.1. «Дилемма заключенного».** В совершении преступления подозреваются двое: А и Б. Есть основания полагать, что они действовали по сговору, и полиция, изолировав их друг от друга, предлагает им одну и ту же сделку: если один свидетельствует против другого, а тот хранит молчание, то первый освобождается за помощь следствию, а второй получает максимальный срок лишения свободы (10 лет). Однако иных доказательств их вины у следствия нет. Если оба молчат, их деяние квалифицируется как неоказание помощи следствию, и они приговариваются к 6 месяцам. Если оба свидетельствуют друг против друга, они получают минимальный срок (по 3 года). Каждый подозреваемый выбирает, молчать ему или свидетельствовать против другого. Однако ни один из них не знает точно, что сделает другой. Игру можно представить в виде следующей таблицы.

Альтернативы	<b>Б хранит молчание</b>	<b>Б дает показания</b>
<b>А хранит молчание</b>	Оба получают по полгода тюрьмы	А получает 10 лет, Б освобождается
<b>А дает показания</b>	А освобождается, Б получает 10 лет	Оба получают по 3 года тюрьмы

Будем рассматривать подозреваемых как игроков в данной игре: игрок А и игрок Б. Сформируем таблицу выигрышей игроков, выбрав в качестве их выигрышей величины, противоположные по знаку их возможным срокам заключения. Цель каждого из игроков — минимизация собственного срока заключения (т. е. максимизация выигрыша).

Стратегии игроков		<b>Игрок Б</b>	
		Хранить молчание	Давать показания
<b>Игрок А</b>	Хранить молчание	–0,5; –0,5	–10; 0
	Давать показания	0; –10	–3; –3

Попытаемся определить наилучшие стратегии игроков с позиций некоторых критериев оценки результатов игры. Введем следующие понятия.

1. *Ситуация равновесия* игры (равновесия *по Нэшу*) — пара стратегий игроков, отклонение от которых в одиночку невыгодно ни одному из игроков. Поиск стратегий, образующих ситуацию равновесия, выполняется на основе индивидуального рационального выбора.

2. Ситуация (пара стратегий игроков) является *оптимальной по Парето*, если не существует другой ситуации, которая была бы предпочтительнее этой ситуации для всех игроков (т. е. увеличение выигрыша одного из игроков возможно только за счет уменьшения выигрыша другого).

Отметим *содержательное различие* понятий ситуации равновесия и ситуации, оптимальной по Парето. В ситуации рав-

новесия ни один игрок, действуя в одиночку, не может увеличить своего выигрыша; в оптимальной по Парето ситуации все игроки, действуя совместно, не могут (даже не строго) увеличить выигрыш каждого.

Представим рассуждения каждого из игроков. Если партнер молчит, то лучше свидетельствовать против него (стратегия «давать показания») и выйти на свободу (иначе — полгода тюрьмы). Если же партнер дает показания (свидетельствует против него), то лучше тоже свидетельствовать против партнера (опять стратегия «давать показания»), чтобы получить 3 года (иначе — 10 лет). Итак, стратегия «давать показания» строго *доминирует* над стратегией «хранить молчание», каждый игрок (подозреваемый) приходит к этому выводу. Таким образом, в условиях, когда *каждый* игрок оптимизирует свой собственный выигрыш, не заботясь о выгоде другого игрока, единственное возможное *равновесие* в игре — взаимное свидетельство обоих участников друг против друга — пара стратегий («давать показания», «давать показания»).

В то же время *оптимальной по Парето* ситуацией в данной игре является пара стратегий («хранить молчание», «хранить молчание»), для которой выигрыши игроков равны  $-0,5$  (полгода заключения каждому). С точки зрения *группы* (этих двух подозреваемых) это наилучшее решение, при котором дальнейшее увеличение выигрыша одного из игроков (т. е. уменьшение его срока заключения) возможно только за счет уменьшения выигрыша другого (увеличение его срока заключения). Любое другое решение будет менее выгодным (для группы).

Суть дилеммы проявляется именно в том, что подозреваемые (как игроки), ведя себя по отдельности рационально (с позиции индивидуальной рациональности), вместе (как группа) приходят к нерациональному решению — к выбору стратегий, образующих ситуацию с худшим результатом.

Данный пример представляет собой *бескоалиционную* игру, причем игра парная — два игрока, биматричная, с ненулевой

суммой (сумма выигрышей игроков в каждой ситуации отлична от нуля). Выигрыши каждого игрока задаются соответствующими матрицами:

матрица для игрока А

$$H_A = \begin{pmatrix} -0,5 & -10 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

матрица для игрока Б

$$H_B = \begin{pmatrix} -0,5 & 0 \\ -10 & -3 \end{pmatrix}$$

**Пример 1.2. «Семейный спор».** Рассматривается игра, в которой муж (игрок 1) и жена (игрок 2) могут выбрать одно из двух вечерних развлечений: футбольный матч или театр. Если они имеют разные желания, то остаются дома. Муж предпочитает футбольный матч, а жена — театр. Однако обоим гораздо важнее провести вечер вместе, чем участвовать в развлечении (хотя и предпочтительном) одному. Выигрыш каждого игрока определяется полезностью проведенного вечера и оценивается по шкале от 0 до 4. Соответствующие выигрыши игроков указаны в таблице (сначала указан выигрыш игрока 1, затем — игрока 2).

Стратегии игроков		Жена	
		Футбол	Театр
Муж	Футбол	4; 1	0; 0
	Театр	0; 0	1; 4

Итак, у каждого из игроков по две стратегии: «футбол» (Ф) и «театр» (Т). Цель каждого из игроков — максимизация собственного выигрыша. Однако их интересы не противоположны.

В данной биматричной игре есть две ситуации равновесия по Нэшу: (Ф, Ф) и (Т, Т). Однако выигрыши игроков в этих ситуациях различны, при этом первая ситуация выгодна игроку 1, а вторая — игроку 2. Таким образом, остается нерешенным вопрос: какую из ситуаций равновесия можно принять как устраивающий всех игроков принцип оптимальности?

В игре «семейный спор» обе равновесные ситуации не только равновесны, но и оптимальны по Парето.

Предположим, что игроки не общаются до начала игры, а делают выбор одновременно и независимо друг от друга (как предусмотрено правилами бескоалиционной игры). Проведем рассуждения за игрока 1. Ему выгодно, чтобы реализовалась ситуация (Ф, Ф). Но игроку 2 выгодна ситуация (Т, Т). Поэтому если игрок 1 выберет стратегию «Ф», то игрок 2 может выбрать стратегию «Т», и они оба проиграют: в ситуации (Ф, Т) выигрыши составят (0, 0). Тогда игроку 1 имеет смысл выбрать стратегию «Т», поскольку в ситуации (Т, Т) он получает выигрыш 1 (т. е. больше 0). Но игрок 2 может рассуждать аналогично и выбрать стратегию «Ф», тогда в ситуации (Т, Ф) они оба опять проиграют. Поэтому игрокам выгодно общаться перед началом игры и договариваться о совместном плане действий. Таким образом, приходим к условиям *кооперативной* игры, когда игроки могут принимать решения по согласованию друг с другом.

Основная задача в кооперативной игре состоит в дележе общего выигрыша. Общий выигрыш в данной игре в ситуациях, когда осуществляется одно из двух вечерних развлечений (футбол или театр), равен 5. Естественным было бы разделить этот выигрыш поровну между игроками, т. е. каждому по 2,5. При этом игроки договариваются половину вечеров проводить вместе на футболе, а вторую половину — в театре, т. е. с вероятностью  $1/2$  совместно выбирать каждое развлечение.

Следует заметить, что в случае бескоалиционной игры (при независимом выборе игроками своих стратегий) набор выигрышей (2,5; 2,5) недостижим.

Действительно, обозначим через  $x$  и  $y$  вероятности выбора стратегии «Ф» игроками 1 и 2 соответственно, причем  $0 \leq x \leq 1$ ,  $0 \leq y \leq 1$ , тогда вероятности выбора стратегии «Т» игроками 1 и 2 соответственно равны  $1 - x$  и  $1 - y$ .

Если обозначить  $\xi_1$ ,  $\xi_2$  как случайные величины, определяющие значения выигрышей соответственно игроков 1 и 2 в од-

ной партии (для одного вечера), то средние ожидаемые выигрыши игроков 1 и 2 равны соответственно математическим ожиданиям  $M\xi_1$  и  $M\xi_2$ :

$$\begin{aligned} M\xi_1 &= x \cdot (4y + 0 \cdot (1 - y)) + (1 - x)(0 \cdot y + 1 \cdot (1 - y)) = \\ &= 5xy - x - y + 1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M\xi_2 &= x \cdot (1 \cdot y + 0 \cdot (1 - y)) + (1 - x)(0 \cdot y + 4 \cdot (1 - y)) = \\ &= 5xy - 4x - 4y + 4. \end{aligned}$$

Тогда равенство  $M\xi_1 = M\xi_2$  выполняется при

$$5xy - x - y + 1 = 5xy - 4x - 4y + 4 \Rightarrow x + y = 1.$$

Вычислим

$$M\xi_1|_{x+y=1} = 5x(1-x) \rightarrow \max_{0 \leq x \leq 1}.$$

Максимум достигается при  $x = 1/2$ ,  $y = 1/2$ , и равен  $5/4$  (рис. 1.1).

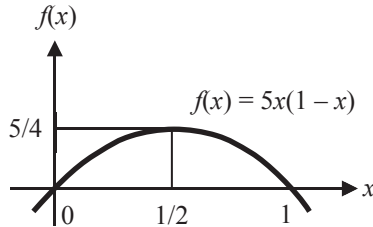


Рис. 1.1. График функции  $f(x) = 5x(1-x)$

Таким образом, в случае бескоалиционной игры (при независимом выборе игроками своих стратегий) набор выигрышей  $(5/4; 5/4)$  определяет оптимальный по Парето результат игры в смешанных стратегиях, т.е. когда игроки выбирают свои чистые (исходные) стратегии с некоторыми вероятностями. В данном случае с вероятностями  $x = 1/2$ ,  $y = 1/2$ .



**Пример 1.3.** Рассмотрим игру «Орлянка», в которой участвуют два игрока. Игрок 1 выбирает сторону монеты («орел» или «решка»), а игрок 2 пытается угадать, какая сторона выбрана. Если он не угадывает, то платит игроку 1 одну денежную единицу, если угадывает — игрок 1 платит ему одну денежную единицу.

Составим таблицу выигрышей игроков (сначала указан выигрыш игрока 1, затем — игрока 2).

Стратегии игроков		Игрок 2	
		Орел	Решка
Игрок 1	Орел	−1, 1	1, −1
	Решка	1, −1	−1, 1

Рассматриваемая игра является *антагонистической* (выигрыш одного игрока равен проигрышу другого) и может быть сведена к матричной игре, которая полностью задается матрицей выигрышей одного из игроков, например, игрока 1. В данном примере имеем игру с матрицей

$$H = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

У каждого из игроков по две стратегии: «орел» и «решка». Цель каждого из игроков — максимизация собственного выигрыша. Легко проверить, что в игре «Орлянка» ситуаций равновесия в чистых (исходных) стратегиях нет.

Если игра повторяется многократно, то игроки могут выбирать свои исходные стратегии с некоторыми вероятностями, такими, чтобы средние ожидаемые выигрыши игроков (т. е. их выигрыши в среднем на одну партию игры) были максимально возможными. Пусть  $x$  и  $y$  — вероятности выбора стратегии «орел» игроками 1 и 2 соответственно,  $0 \leq x \leq 1$ ,  $0 \leq y \leq 1$ . Тогда имеем для случайных величин  $\xi_1$ ,  $\xi_2$ , определяющих значения выигрышей соответственно игроков 1 и 2 в одной партии, следующие средние ожидаемые выигрыши игроков:

$$\begin{aligned}
M\xi_1 &= -xy + x(1-y) + (1-x)y - (1-x)(1-y) = \\
&= -1 + 2(x+y) - 4xy = (2x-1)(1-2y), \\
M\xi_2 &= -M\xi_1.
\end{aligned}$$

Рассмотрим следующий вопрос для игрока 1: среди  $0 \leq x \leq 1$  найти значение  $x^*$  и величину  $v_1^*$ , чтобы выполнялось условие:

$$M\xi_1 \big|_{x^*, y} \geq v_1^* \text{ для } \forall 0 \leq y \leq 1,$$

т. е. при выборе стратегии «орел» игроком 1 с вероятностью  $x^*$  *гарантируется* выигрыш игроку 1 не менее  $v_1^*$ .

Указанное условие можно записать в следующем виде:

$$\min_{0 \leq y \leq 1} M\xi_1 \big|_{x, y} \rightarrow \max_{0 \leq x \leq 1} = v_1^*.$$

В нашем примере имеем

$$\begin{aligned}
\min_{0 \leq y \leq 1} M\xi_1 \big|_{x, y} &= \min_{0 \leq y \leq 1} (2x-1)(1-2y) = \\
&= \begin{cases} 2x-1 & \text{при } 0 \leq x < 1/2; \\ 1-2x & \text{при } 1/2 < x \leq 1; \\ 0, & \text{при } x = 1/2. \end{cases}
\end{aligned}$$

Вид функции  $f(x) = \min_{0 \leq y \leq 1} M\xi_1 \big|_{x, y}$  приведен на рис. 1.2.

Тогда получим  $v_1^* = \max_{0 \leq x \leq 1} f(x) = 0$  при  $x^* = 1/2$ .

Итак, если игрок 1 выбирает свою стратегию «орел» с вероятностью  $x^* = 1/2$  (а также с вероятностью  $1 - x^* = 1/2$  стратегию «решка»), то его гарантированный средний выигрыш равен  $v_1^* = 0$ .

Аналогичный результат игры получим и для игрока 2 при вероятности  $y^* = 1/2$  выбора им стратегии «орел» (или стратегии «решка»).

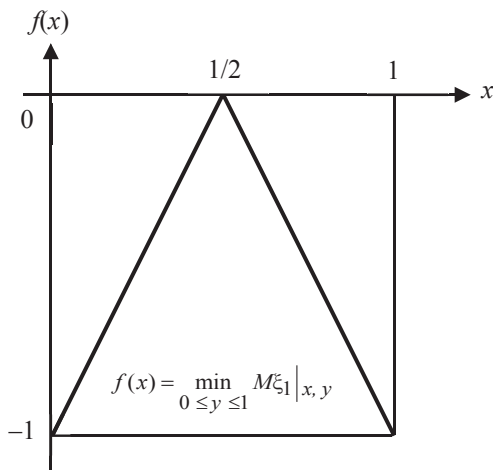


Рис. 1.2. График функции  $f(x) = \min_{0 \leq y \leq 1} M\xi_1 | x, y$

## Контрольные вопросы и задания

---

1. Охарактеризуйте предмет теории игр.
2. Дайте понятие игры (в теории игр).
3. В чем заключается неопределенность в игровых ситуациях?
4. Укажите основные направления применения результатов теории игр.
5. Найдите в информационных электронных ресурсах лауреатов Нобелевской премии, которые в своих исследованиях использовали результаты теории игр.
6. Укажите, по каким признакам классифицируются игры.
7. Являются ли: а) антагонистическая игра бескоалиционной; б) парная игра биматричной; в) матричная игра игрой с нулевой суммой; г) биматричная игра антагонистической?

8. Двое играют в следующую игру. Игрок 1 бросает случайным образом на горизонтальную плоскость игральный кубик, но игроку 2 не сообщает исход бросания. Игрок 2 пытается отгадать, четное выпало число очков или нечетное. Если выпадает четное число очков и игрок 2 угадывает это, то он получает от игрока 1 количество денежных единиц, равное выпавшему числу. Если выпадает нечетное число очков и игрок 2 угадывает это, то игроки ничего не платят друг другу. Если игрок 2 не отгадывает, то он платит игроку 1 в размере выпавшего числа.

Составьте таблицу выигрышей игроков. Вычислите средние ожидаемые выигрыши игроков (на одну игру), если игрок 2: а) всегда называет «четное»; б) с вероятностью  $1/2$  выбирает «четное».

9. Производитель выбирает один из двух видов продукции, которую он может производить в разных условиях внешней обстановки. Получаемый доход от производства зависит от вида продукции и соответствующей обстановки и представлен в следующей таблице.

Таблица доходов	Вид обстановки	
Вид продукции	$B_1$	$B_2$
$A_1$	100	200
$A_2$	150	50

Цель производителя — максимизация дохода.

Определите: а) наиболее выгодный вид производимой продукции, если относительная частота появления обстановок  $B_1$  и  $B_2$  определяется отношением 2:3; б) гарантируемый средний доход производителя, если обстановку выбирает противодействующая сторона с целью минимизации дохода производителя.

10. Предприниматель, осуществляющий ремонт автомашин, определяет, какое выбрать число ремонтных мест в ма-

стерской, чтобы в последующем получить максимальную выручку. При этом имеются следующие данные: выручка с каждой обслуженной машины будет составлять 9 денежных единиц (д. е.); простой (когда машин на обслуживании нет) приведет к убытку 6 д. е.; убыток от невозможности обслужить (нет свободных ремонтных мест) составит 5 д. е. (например, штраф от несвоевременного обслуживания). Ремонтных машиномест может быть 2, 3, 5, 8. Составьте таблицу доходов, если машины будут поступать на ремонт в количестве 1, 2, 3, 4, 5, 8 штук.

Выберите предпочтительный вариант числа ремонтных мест в мастерской при условии максимизации выручки, если относительная частота поступления: 2, 3, 4 автомашин одинаковая; 1 или 8 автомашин каждая в два раза меньше, чем 5 автомашин, и в 4 раза меньше, чем 2 автомашин.

11. В игре «Семейный спор» найдите вероятности выбора стратегий «Ф» и «Т» игроками и соответствующие средние ожидаемые выигрыши, которые при этом гарантируются.
12. Два игрока одновременно и независимо друг от друга выбирают одну из цифр — 1 или 2. В случае совпадения выбранных цифр выигрывает первый игрок, при несовпадении — второй игрок. Выигравший получает от проигравшего сумму в размере выбранной проигравшим цифры, причем если выигрывает второй игрок, то он возвращает первому половину полученной суммы. Определить, как должен действовать первый игрок, чтобы обеспечить себе больший средний выигрыш, чем у второго игрока.

---

## 2. Формализация бескоалиционных игр

---

### Нормальная форма игры

---

Рассмотрим формализованное представление бескоалиционной игры (в нормальной форме), в которой целью каждого игрока является оптимизация индивидуального выигрыша (причем игроки не могут координировать совместно свои стратегии).

**Определение.** Бескоалиционной игрой в *нормальной* (или *стратегической*) форме называется тройка  $\Gamma = \{I, S, H\}$ , где  $I = \{1, 2, \dots, n\}$  — множество всех игроков, которых различаем по номерам;  $S_i$  — множество стратегий, доступных игроку  $i \in I$ ; отдельную стратегию игрока  $i$  обозначим  $s_i \in S_i$ . Иногда для большей определенности будем вводить дополнительные индексы:

$$S_i = \{s_i^{(1)}, s_i^{(2)}, \dots, s_i^{(k)}\},$$

где  $s_i^{(k)}$  —  $k$ -я стратегия  $i$ -го игрока.

Процесс игры состоит в выборе каждым из игроков одной своей стратегии  $s_i \in S_i$ . Таким образом, в результате каждой партии игры складывается набор стратегий  $s = (s_1, s_2, \dots, s_n)$ , называемый *ситуацией*. Множество всех ситуаций  $S = S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n$  является декартовым произведением множеств стратегий всех игроков.

Обозначим  $H_i(s)$  — выигрыш игрока  $i$  в ситуации  $s$ . Функция  $H_i : S \rightarrow R$ , определенная на множестве всех ситуаций  $S$ , называется *функцией выигрыша* игрока  $i$ .

Функция выигрышей игроков  $H(s)$  определена на множестве ситуаций  $S$ :

$$H(s) = (H_1(s), H_2(s), \dots, H_n(s)) : S \rightarrow R^n.$$

Целью каждого игрока является получение наибольшего возможного выигрыша. Но выбор лучшей стратегии одним из игроков (т. е. увеличивающей его возможный выигрыш) может вести к уменьшению выигрышей других игроков. Поэтому каждый из этих игроков также будет применять стратегию, увеличивающую уже его выигрыш, но при этом выигрыши остальных игроков могут уменьшиться и т. д. При этом может не быть такой ситуации  $s^0 = (s_1^0, s_2^0, \dots, s_n^0)$ , где стратегия  $s_i^0$  доставляет максимум игроку  $i$ , т. е.  $H_i(s^0) = \max_{s_i \in S_i} H_i(s)$ . Поэтому требуется определение такой ситуации  $s$ , которая бы удовлетворяла всех игроков.

### Ситуации равновесия по Нэшу

---

Пусть  $s = (s_1, s_2, \dots, s_{i-1}, s_i, s_{i+1}, \dots, s_n)$  — произвольная ситуация в игре, где  $s_i \in S_i$  — некоторая стратегия игрока  $i$ . Рассмотрим новую ситуацию, получившуюся из ситуации  $s$  заменой стратегии  $s_i$  игрока  $i$  на стратегию  $s'_i \in S_i$ , используя следующее обозначение:  $s|_{s'_i} = (s_1, s_2, \dots, s_{i-1}, s'_i, s_{i+1}, \dots, s_n)$ . Очевидно, что  $s|_{s'_i} = s$ , если  $s_i = s'_i$ .

**Определение.** Ситуация  $s$  в игре называется *приемлемой* для игрока  $i$ , если  $H_i(s|_{s'_i}) \leq H_i(s)$  для любых  $s'_i \in S_i$ .

Таким образом, если в некоторой ситуации  $s$  для игрока  $i$  найдется такая стратегия  $s'_i \in S_i$ , что  $H_i(s|_{s'_i}) > H_i(s)$ , то игрок  $i$  в случае складывающейся ситуации  $s|_{s'_i}$  может получить больший выигрыш. В этом смысле ситуация  $s$  для игрока  $i$  будет *неприемлемой*.

**Определение.** Ситуация  $s$  называется *ситуацией равновесия по Нэшу* (или *равновесной по Нэшу ситуацией*), если она приемлема для всех игроков, т. е. для каждого  $i \in I$  выполняется

$$H_i(s|_{s'_i}) \leq H_i(s) \text{ для любых } s'_i \in S_i.$$

Очевидно, что ни один из игроков не заинтересован в отклонении от своей стратегии, приводящей к ситуации равновесия, в одиночку.

**Определение.** *Равновесной стратегией* игрока в бескоалиционной игре называется такая его стратегия, которая входит хотя бы в одну из равновесных ситуаций игры.

Нахождение ситуаций равновесия в бескоалиционной игре определяет *решение игры* и соответствующие *выигрыши* игроков.

Важным в теории игр является следующее предположение о *рациональности* игроков: все игроки действуют *рационально*, т. е. каждый игрок рассматривает доступные ему альтернативы, формирует представления относительно неизвестных параметров (возможных действий других игроков, их ресурсов), имеет четко определенные предпочтения и выбирает свои действия в результате некоторого процесса оптимизации (максимизации своей целевой функции). Более того, существенным является факт *общеизвестности* (общего знания) рациональности игроков, т. е. все игроки не только рациональны, но и знают, что другие игроки рациональны, что все игроки знают о том, что все они рациональны.

**Пример 2.1.** Найти в следующей игре ситуации равновесия (здесь против каждой строки (каждого столбца) указана соответствующая стратегия игрока 1 (игрока 2)):

$$H = \begin{matrix} & \begin{matrix} s_2^{(1)} & s_2^{(2)} & s_2^{(3)} \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} (4, 3) & (5, 1) & (6, 2) \\ (2, 1) & (8, 4) & (3, 6) \\ (3, 0) & (9, 6) & (2, 8) \end{pmatrix} & \begin{matrix} s_1^{(1)} \\ s_1^{(2)} \\ s_1^{(3)} \end{matrix} \end{matrix}.$$



*Решение.* Обозначим через  $s_{ij} = (s_1^{(i)}, s_2^{(j)})$  ситуацию при стратегиях игроков  $s_1^{(i)}$  и  $s_2^{(j)}$  соответственно. Функция выигрышей игроков  $H(s_{ij}) = H(s_1^{(i)}, s_2^{(j)}) = (H_1(s_{ij}), H_2(s_{ij}))$ .

Ситуация  $s_{11} = (s_1^{(1)}, s_2^{(1)})$  приемлема для игрока 1, так как имеем  $H(s_{11}) = H(s_1^{(1)}, s_2^{(1)}) = (4, 3)$ ,

$$H_1(s_{11}) = 4 > H_1(s_{21}) = 2, H_1(s_{11}) = 4 > H_1(s_{31}) = 3.$$

Ситуация  $s_{11}$  также приемлема для игрока 2, поскольку

$$H_2(s_{11}) = 3 > H_2(s_{12}) = 1, H_2(s_{11}) = 3 > H_2(s_{13}) = 2.$$

Таким образом, ситуация  $s_{11} = (s_1^{(1)}, s_2^{(1)})$  приемлема для обоих игроков, т. е. это ситуация равновесия по Нэшу.

Ситуации  $s_{21}, s_{31}$  неприемлемы для обоих игроков.

Также можно проверить, что ситуации  $s_{12}, s_{22}$  неприемлемы для обоих игроков, а ситуация  $s_{32}$  приемлема только для игрока 1. Далее, ситуация  $s_{31}$  приемлема только для игрока 1, а ситуации  $s_{23}, s_{33}$  приемлемы только для игрока 2.

Таким образом, других равновесных ситуаций (в чистых стратегиях) в данной игре нет.

## Доминирование стратегий

---

**Определение.** Стратегия  $s_i \in S_i$  игрока  $i$  в игре  $\Gamma = \{I, S, H\}$  строго доминируема (строго доминируется), если существует другая стратегия  $\bar{s}_i \in S_i$  такая, что

$$H_i(s_1, \dots, s_{i-1}, \bar{s}_i, s_{i+1}, \dots, s_n) > H_i(s_1, \dots, s_{i-1}, s_i, s_{i+1}, \dots, s_n) \quad (2.1)$$

для всех  $s_k \in S_k, k = 1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, n$ .

В этом случае стратегия  $\bar{s}_i \in S_i$  *строго доминирует* стратегию  $s_i \in S_i$ .

Если неравенство (2.1) выполняется нестрого, но хотя бы для одного набора  $(s_1, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_n)$  строго, то стратегия  $s_i$  *слабо доминируется* стратегией  $\bar{s}_i$ .

Рассмотрим игру из примера 2.1. В соответствии с определением доминируемых стратегий следует, что стратегия  $s_2^{(2)}$  *строго доминируема* стратегией  $s_2^{(3)}$ :

$$H_2(s_1, s_2^{(2)}) < H_2(s_1, s_2^{(3)}) \text{ для } \forall s_1 \in S_1,$$

поэтому рациональный игрок 2 не должен играть  $s_2^{(2)}$ .

Игрок 1 (сам рационален и знает, что игрок 2 тоже рационален) понимает, что игрок 2 не будет играть  $s_2^{(2)}$ . Поэтому для него (при исключении стратегии  $s_2^{(2)}$ ) стратегия  $s_1^{(1)}$  будет лучше, чем другие две. Наконец, если игрок 2 знает, что игрок 1 знает, что игрок 2 не будет играть  $s_2^{(2)}$ , и игрок 2 знает, что игрок 1 будет играть  $s_1^{(1)}$ , то игрок 2 должен играть  $s_2^{(1)}$ . В результате приходим к ситуации  $(s_1^{(1)}, s_2^{(1)})$  — *ситуации равновесия по Нэшу*.

Этот процесс — *последовательное удаление строго доминируемых стратегий*. Более наглядно выполнять этот процесс пошагово.

**Шаг 1.** Удаляется стратегия  $s_2^{(2)}$ , так как она строго доминируется стратегией  $s_2^{(3)}$ , т. е. имеем

$$H = \begin{matrix} & \begin{matrix} s_2^{(1)} & s_2^{(3)} \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} (4, 3) \\ (2, 1) \\ (3, 0) \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} (6, 2) \\ (3, 6) \\ (2, 8) \end{pmatrix} \end{matrix} \begin{matrix} s_1^{(1)} \\ s_1^{(2)} \\ s_1^{(3)} \end{matrix}.$$

**Шаг 2.** Удаляется стратегия  $s_1^{(2)}$ , так как она строго доминируется стратегией  $s_1^{(1)}$ , т. е. получим

$$H = \begin{array}{cc} s_2^{(1)} & s_2^{(3)} \\ \left( \begin{array}{cc} (4, 3) & (6, 2) \\ (3, 0) & (2, 8) \end{array} \right) & \begin{array}{l} s_1^{(1)} \\ s_1^{(3)} \end{array} \end{array}.$$

*Шаг 3.* Удаляется стратегия  $s_1^{(3)}$ , так как она строго доминируется стратегией  $s_1^{(1)}$ , т. е. получим

$$H = \begin{array}{cc} s_2^{(1)} & s_2^{(3)} \\ \left( \begin{array}{cc} (4, 3) & (6, 2) \end{array} \right) & s_1^{(1)} \end{array}.$$

*Шаг 4.* Удаляется стратегия  $s_2^{(3)}$ , так как она строго доминируется стратегией  $s_2^{(1)}$ , таким образом, имеем

$$H = \begin{array}{c} s_2^{(1)} \\ \left( \begin{array}{c} (4, 3) \end{array} \right) \end{array} s_1^{(1)}.$$

Итак, остается пара стратегий  $s = (s_1^{(1)}, s_2^{(1)})$  — ситуация равновесия (по Нэшу) с выигрышами игроков  $H(s_{11}) = (4, 3)$ .

*Свойство.* Множество стратегий, выдерживающих такое исключение (оставшихся после удаления) строго доминируемых стратегий, *не зависит* от последовательности (порядка) исключений.

*Замечание.* Для слабо доминируемых стратегий данное свойство может не выполняться. Для примера рассмотрим следующую игру:

$$H = \begin{array}{cc} s_2^{(1)} & s_2^{(2)} \\ \left( \begin{array}{cc} (1, 1) & (0, 0) \\ (1, 1) & (2, 1) \\ (0, 0) & (2, 1) \end{array} \right) & \begin{array}{l} s_1^{(1)} \\ s_1^{(2)} \\ s_1^{(3)} \end{array} \end{array}.$$

Если сначала удаляется стратегия  $s_1^{(1)}$  (слабо доминируется  $s_1^{(2)}$ ), а затем — стратегия  $s_2^{(1)}$  (слабо доминируется  $s_2^{(2)}$ ), то приходим к исходу с выигрышами игроков (2, 1) (игрок 2 выбирает стратегию  $s_2^{(2)}$ ):

$$\begin{array}{c} s_2^{(2)} \\ \left( \begin{array}{c} (2, 1) \\ (2, 1) \end{array} \right) \begin{array}{c} s_1^{(2)} \\ s_1^{(3)} \end{array} \end{array}$$

Если же сначала удаляется стратегия  $s_1^{(3)}$  (слабо доминируется  $s_1^{(2)}$ ), а затем — стратегия  $s_2^{(2)}$  (слабо доминируется  $s_2^{(1)}$ ), то приходим к исходу с выигрышами игроков (1, 1) (игрок 2 выбирает стратегию  $s_2^{(1)}$ ):

$$\begin{array}{c} s_2^{(1)} \\ \left( \begin{array}{c} (1, 1) \\ (1, 1) \end{array} \right) \begin{array}{c} s_1^{(1)} \\ s_1^{(2)} \end{array} \end{array}$$

**Определение.** Стратегия  $s_i \in S_i$  называется *доминирующей*, если она доминирует (хотя бы слабо) все остальные стратегии игрока  $i$ .

*Замечание.* Наличие доминирующей стратегии у игрока приводит к тому, что он будет пользоваться только этой стратегией независимо от выбора других игроков. Тогда его можно исключить из рассмотрения и перейти к редуцированной игре с меньшим числом участников.

## Оптимальные по Парето ситуации

---

**Определение.** В бескоалиционной игре  $\Gamma = \{I, S, H\}$  ситуация  $s^0 = (s_1^0, s_2^0, \dots, s_n^0)$  называется *оптимальной по Парето*, если не существует ситуации  $s = (s_1, s_2, \dots, s_n) \in S$ , для которой имеет место неравенство

$$H_i(s) \geq H_i(s^0) \text{ для } \forall i \in I,$$

причем хотя бы для одного игрока неравенство строгое.

Множество всех ситуаций, оптимальных по Парето, будем обозначать через  $S^p$ .

Содержательно ситуация  $s^0 = (s_1^0, s_2^0, \dots, s_n^0) \in S^p$  означает, что не существует другой ситуации  $s = (s_1, s_2, \dots, s_n) \in S$ , которая была бы предпочтительнее ситуации  $s^0 = (s_1^0, s_2^0, \dots, s_n^0)$  для всех игроков.

Определим понятие *предпочтительности* ситуаций. Пусть ситуации  $s = (s_1, s_2, \dots, s_n) \in S$ ,  $s' = (s'_1, s'_2, \dots, s'_n) \in S$ . Ситуация  $s$  предпочтительнее  $s'$ , если  $H_i(s) \geq H_i(s')$  для всех  $i \in I$ , причем хотя бы для одного игрока неравенство строгое, т.е. имеем  $H(s') \neq H(s)$ .

Рассмотрим геометрическую интерпретацию предпочтительности ситуаций при  $I = \{1, 2\}$ . Тогда функция выигрышей игроков  $H(s) = (H_1(s), H_2(s))$ . Ситуации  $s', s''$  предпочтительнее ситуации  $s$ , если точки  $H(s')$ ,  $H(s'')$ , не совпадающие с точкой  $H(s)$ , попадают в область, образованную сторонами прямого угла с выколотой вершиной  $H(s)$  (рис. 2.1).

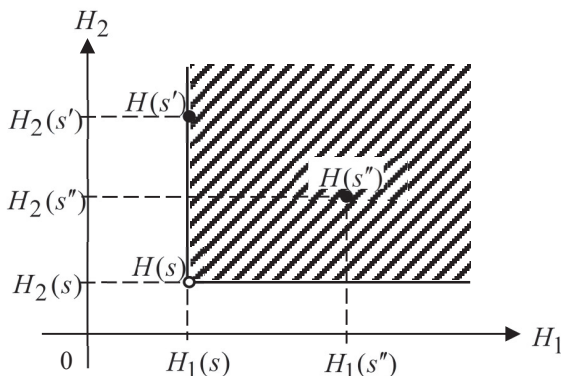


Рис. 2.1. Геометрическая интерпретация предпочтительности ситуаций

*Замечания.* 1. Важная особенность ситуации равновесия по Нэшу заключается в том, что отклонение от нее двух игроков и более может привести к увеличению выигрыша одного из отклонившихся игроков.

2. Если имеет место соглашение между игроками о выборе фиксированной ситуации равновесия, то это удерживает каждого индивидуального игрока от отклонения от нее. В оптимальной по Парето ситуации отклонившийся игрок может в некоторых случаях получить существенно больший выигрыш.

*Свойство оптимальных по Парето ситуаций.* В бескоалиционной игре  $\Gamma = \{I, S, H\}$  для ситуации  $s^0 = (s_1^0, s_2^0, \dots, s_n^0) \in S^p$  существует вектор  $\lambda^T = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) > 0$ , такой, что

$$\lambda^T H(s^0) = \max_{s \in S} \lambda^T H(s) = \max_{s \in S} \sum_{i=1}^n \lambda_i H_i(s),$$

где неравенство  $\lambda^T = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) > 0$  означает  $\lambda_i > 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ ;  $\lambda^T$  — транспонированный вектор  $\lambda$ .

Данное свойство вполне согласуется с интерпретацией оптимальности по Парето через область прямого угла.

Однако для разных ситуаций, оптимальных по Парето, но не сравниваемых по области прямого угла (на рис. 2.1 ситуации  $s'$ ,  $s'' \in S^p$ ), используют дополнительные условия эффективности стратегий (как решений). Например, условие «взвешенной эффективности» для оптимальных по Парето ситуаций  $s \in S^p$ :

$$\bar{\lambda}^T H(s) \rightarrow \max_{s \in S^p}$$

для некоторого фиксированного  $\bar{\lambda} > 0$ .

При  $\bar{\lambda} = (1, \dots, 1)$  имеем условие «взвешенной эффективности» для  $s \in S^p$  в следующем виде: в качестве взвешенной оптимальной по Парето выбирают ситуацию  $s^0 \in S^p$ , доставляющую

$$\max_{s \in S^p} \sum_{i=1}^n H_i(s) = \sum_{i=1}^n H_i(s^0).$$

В примере 2.1, пользуясь геометрической интерпретацией предпочтительности ситуаций, получим (рис. 2.2), что ситуация  $s_{32} = (s_1^{(3)}, s_2^{(2)})$  является *оптимальной по Парето*, причем  $H(s_{32}) = H(s_1^{(3)}, s_2^{(2)}) = (9, 6)$ .

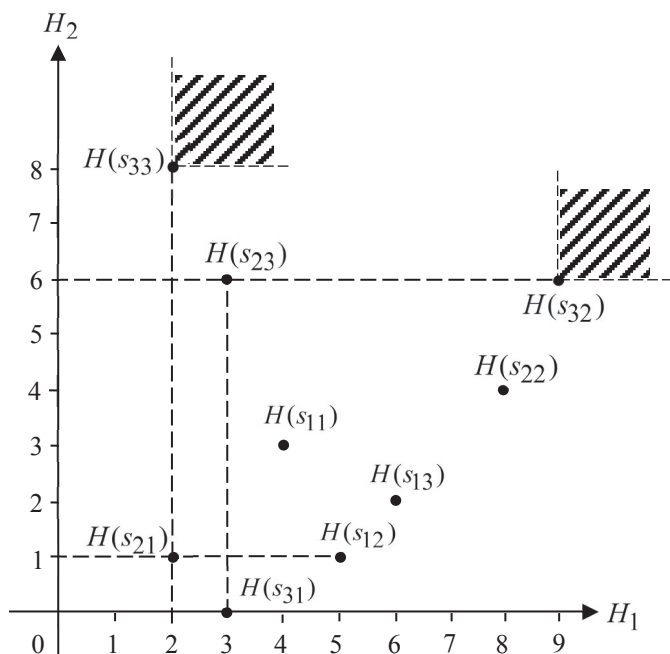


Рис. 2.2. Графическая иллюстрация оптимальных по Парето ситуаций

Также *оптимальной по Парето* является ситуация  $s_{33} = (s_1^{(3)}, s_2^{(3)})$ , причем  $H(s_{33}) = (2, 8)$ , однако (в отличие от ситуации  $s_{32}$ ) не является более предпочтительной по сравнению с равновесной ситуацией  $s_{11} = (s_1^{(1)}, s_2^{(1)})$ .

Проверим условие «взвешенной эффективности» при  $\bar{\lambda} = (1, \dots, 1)$  для полученных оптимальных по Парето ситуаций  $s_{32}, s_{33}$ . Для ситуации  $s_{32} = (s_1^{(3)}, s_2^{(2)})$ :

$$H_1(s_{32}) + H_2(s_{32}) = 9 + 6 = 15;$$

для ситуации  $s_{33} = (s_1^{(3)}, s_2^{(3)})$ :

$$H_1(s_{33}) + H_2(s_{33}) = 2 + 8 = 10;$$

т. е. максимальное значение  $\bar{\lambda}^T H(s)$  достигается для ситуации  $s^0 = s_{32} = (s_1^{(3)}, s_2^{(2)})$ , которая является взвешенной оптимальной по Парето ситуацией (более эффективной по этому условию).

## Стратегическая эквивалентность игр

Разнообразие бескоалиционных игр делает желательным объединение их в такие классы, внутри которых игры обладают одними и теми же свойствами.

Вообще идея классификации состоит в том, что, имея заданное множество  $\gamma$ , мы разбиваем его на классы (подмножества), объединяя его элементы в классы по определенному признаку эквивалентности (который называют *отношением эквивалентности*), причем так, что получающиеся классы попарно не пересекаются и охватывают все элементы множества  $\gamma$ . Если элементы  $a \in \gamma$ ,  $b \in \gamma$ , то запись  $a \sim b$  означает, что элемент  $a$  эквивалентен элементу  $b$ .

Известно, что, чтобы отношение эквивалентности в множестве  $\gamma$  позволяло выполнить классификацию, необходимо и достаточно, чтобы оно обладало свойствами:

- *рефлексивности*:  $a \sim a$ ;
- *симметричности*: если  $a \sim b$ , то  $b \sim a$ ;
- *транзитивности*: если  $a \sim b$  и  $b \sim c$ , то  $a \sim c$ .

Во множестве бескоалиционных игр отношением эквивалентности может служить *стратегическая эквивалентность* игр. Тогда в качестве требуемых классов можно взять классы стра-



тегически эквивалентных игр.

**Определение.** Пусть есть две бескоалиционные игры  $\Gamma'$  и  $\Gamma''$  с одними и теми же множествами игроков и их стратегий, отличающиеся лишь функциями выигрыша:

$$\Gamma' = \{I, S, H'\}, \Gamma'' = \{I, S, H''\},$$

и пусть существуют число  $k > 0$  и для каждого игрока число  $c_i$ ,  $i \in I$ , такие, что в любой ситуации  $s \in S$

$$H'_i(s) = kH''_i(s) + c_i.$$

Тогда игры  $\Gamma'$  и  $\Gamma''$  называются *стратегически эквивалентными*:  $\Gamma' \sim \Gamma''$ .

Проверим справедливость трех определяющих свойств стратегической эквивалентности: рефлексивность, симметричность и транзитивность.

1. *Рефлексивность.* Каждая игра  $\Gamma$  стратегически эквивалентна самой себе:  $\Gamma \sim \Gamma$ .

Действительно, положим  $k = 1$  и  $c_i = 0$ , тогда для всех  $i \in I$  в любой ситуации  $s \in S$  имеем  $H_i(s) = 1 \cdot H_i(s) + 0$ .

2. *Симметричность.* Если  $\Gamma \sim \Gamma'$ , то  $\Gamma' \sim \Gamma$ .

Действительно, пусть  $\Gamma \sim \Gamma'$ , тогда эти игры имеют одни и те же множества игроков и их стратегий, а функции выигрыша связаны следующим образом:

$$H_i(s) = kH'_i(s) + c_i, \text{ где } k > 0, c_i \in R.$$

Отсюда получим:

$$H'_i(s) = (1/k)H_i(s) - (c_i/k) = k'H_i(s) + c'_i,$$

где  $k' = (1/k) > 0$ ,  $c'_i = -(c_i/k)$ , т. е.  $c'_i \in R$ . Тогда  $\Gamma' \sim \Gamma$ .

3. *Транзитивность.* Если  $\Gamma \sim \Gamma'$  и  $\Gamma' \sim \Gamma''$ , то  $\Gamma \sim \Gamma''$ .

Действительно, пусть  $\Gamma \sim \Gamma'$  и  $\Gamma' \sim \Gamma''$ , тогда эти игры  $\Gamma$ ,  $\Gamma'$ ,  $\Gamma''$  имеют одни и те же множества игроков и их стратегий, а функции выигрыша связаны следующим образом:

$$H_i(s) = k'H'_i(s) + c'_i, \quad (2.2)$$

$$H'_i(s) = k''H''_i(s) + c''_i, \quad (2.3)$$

где  $k' > 0$ ,  $k'' > 0$ ,  $c'_i, c''_i \in R$ .

Тогда получим (подставляя (2.3) в (2.2)), что  $H_i(s)$  и  $H''_i(s)$  связаны соотношением:

$$H_i(s) = k'(k''H''_i(s) + c''_i) + c'_i = \underbrace{k'k''}_{k} H''_i(s) + \underbrace{k'c''_i + c'_i}_{c_i} = kH''_i(s) + c_i,$$

где  $k > 0$ ,  $c_i \in R$ . Таким образом,  $\Gamma \sim \Gamma''$ .

Итак, стратегическая эквивалентность действительно обладает всеми свойствами отношения эквивалентности и, значит, разбивает множество бескоалиционных игр на попарно не пересекающиеся классы эквивалентных друг другу игр. Данное обстоятельство позволяет изучать свойства игр одного класса эквивалентности на примере одной игры из этого класса.

Различие между двумя стратегически эквивалентными играми, по сути, состоит лишь в различии фиксированной (постоянной) составляющей  $c_i$  выигрыша игроков и единиц измерения выигрышей, определяемых коэффициентом  $k$ .

Поэтому естественно, что разумное поведение игроков в стратегически эквивалентных играх должно быть одинаковым.

**Теорема 2.1.** Стратегически эквивалентные игры имеют одни и те же ситуации равновесия.

*Доказательство.* Пусть  $\Gamma \sim \Gamma'$ , причем  $s^*$  — ситуация равновесия (по Нэшу) в игре  $\Gamma$ . Докажем, что  $s^*$  — ситуация равновесия в игре  $\Gamma'$ .

Из определения ситуации равновесия  $s^*$  в игре  $\Gamma$  следует, что для всех  $i \in I$  и  $s_i \in S_i$  верно следующее:

$$H_i(s^*|_{s_i}) \leq H_i(s^*). \quad (2.4)$$

Стратегическая эквивалентность  $\Gamma \sim \Gamma'$  означает:

$$H_i(s^*) = kH'_i(s^*) + c_i, \text{ где } k > 0, c_i \in R, \quad (2.5)$$

$$H_i(s^*|_{s_i}) = kH'_i(s^*|_{s_i}) + c_i. \quad (2.6)$$

Тогда, подставляя (2.5) в правую часть (2.4), а (2.6) — в левую часть (2.4), получаем

$$kH'_i(s^*|_{s_i}) + c_i \leq kH'_i(s^*) + c_i,$$

откуда (с учетом  $k > 0$ ) следует

$$H'_i(s^*|_{s_i}) \leq H'_i(s^*)$$

для всех  $i \in I$  и  $s_i \in S_i$ . Это означает равновесность ситуации  $s^*$  в игре  $\Gamma'$ .

**Пример 2.2.** Рассмотрим игру  $\Gamma$  с матрицей выигрышей

$$H = \begin{pmatrix} (2/3, 1/2) & (1/6, 7/6) \\ (7/6, 1/6) & (-1/2, -1/2) \end{pmatrix} \begin{matrix} s_2^{(1)} \\ s_2^{(2)} \end{matrix} \begin{matrix} s_1^{(1)} \\ s_1^{(2)} \end{matrix}.$$

Приведем данную игру к стратегически эквивалентной игре с целочисленными и неотрицательными показателями выигрышей. Выберем  $k = 6$  (общий знаменатель равен 6). Тогда получим матрицу

$$H' = \begin{pmatrix} (4, 3) & (1, 7) \\ (7, 1) & (-3, -3) \end{pmatrix} \begin{matrix} s_2^{(1)} \\ s_2^{(2)} \end{matrix} \begin{matrix} s_1^{(1)} \\ s_1^{(2)} \end{matrix}.$$

Далее примем  $c_1 = c_2 = 3$ . Получим матрицу

$$H'' = \begin{pmatrix} (7, 6) & (4, 10) \\ (10, 4) & (0, 0) \end{pmatrix} \begin{matrix} s_2^{(1)} \\ s_2^{(2)} \end{matrix} \begin{matrix} s_1^{(1)} \\ s_1^{(2)} \end{matrix}.$$

Таким образом, получим стратегически эквивалентную игру  $\Gamma''$  с матрицей выигрышей  $H''$ .

**Определение.** Бескоалиционная игра  $\Gamma = \{I, S, H\}$  называется *игрой с постоянной суммой*, если существует такая  $C = \text{const}$ , что  $\sum_{i \in I} H_i(s) = C$  для любой ситуации  $s \in S$ . Если  $C = 0$ , то такая игра называется *игрой с нулевой суммой*.

**Теорема 2.2.** Всякая бескоалиционная игра с постоянной суммой стратегически эквивалентна некоторой игре с нулевой суммой.

**Доказательство.** Пусть  $\Gamma = \{I, S, H\}$  — игра с постоянной суммой, т. е. для всех ситуаций  $s \in S$  верно  $\sum_{i \in I} H_i(s) = C$ , где  $C = \text{const}$ . Выберем произвольные  $c_i \in R, i \in I$ , для которых  $\sum_{i \in I} c_i = C$ , и рассмотрим игру  $\Gamma' = \{I, S, H'\}$  с функциями выигрышей  $H'_i(s) = H_i(s) - c_i$ .

Очевидно, что  $\Gamma \sim \Gamma'$ , причем  $\Gamma'$  является игрой с нулевой суммой, так как

$$\sum_{i \in I} H'_i(s) = \sum_{i \in I} H_i(s) - \sum_{i \in I} c_i = C - C = 0$$

для всех ситуаций  $s \in S$ .

**Пример 2.3.** В следующей игре найти равновесную по Нэшу ситуацию:

Стратегии	$s_2^{(1)} = v_1$	$s_2^{(2)} = v_2$	$s_2^{(3)} = v_3$
$s_1^{(1)} = u_1$	4, 6	6, 4	3, 7
$s_1^{(2)} = u_2$	4, 6	5, 5	6, 4
$s_1^{(3)} = u_3$	3, 7	2, 8	7, 3

Данная игра является игрой с постоянной суммой, причем

$$H_1(s) + H_2(s) = 10.$$

Тогда она стратегически эквивалентна игре с нулевой суммой  $\Gamma' = \{I, S, H'\}$  (при  $c_1 = 0, c_2 = 10$ ) с функциями выигрышей  $H'_i(s) = H_i(s) - c_i, i = 1, 2; s \in S$ . Тогда  $H'_1(s) = -H'_2(s)$  для всех ситуаций  $s \in S$ , т. е. эта игра является *антагонистической*.

Рассмотрим *наилучшие ответы игроков* на чистые стратегии противника. Обозначим:  $u(v_j)$  — наилучший ответ игрока 1 на стратегию  $s_2^{(j)} = v_j$  игрока 2,  $v(u_i)$  — наилучший ответ игрока 2 на стратегию  $s_1^{(i)} = u_i$  игрока 1. Составим таблицу ответов.

Игрок 1		Игрок 2	
Наилучшие ответы	Максимальный выигрыш	Наилучшие ответы	Максимальный выигрыш
$u(v_1) = u_1 = u_2$	4	$v(u_1) = v_3$	7
$u(v_2) = u_1$	6	$v(u_2) = v_1$	6
$u(v_3) = u_3$	7	$v(u_3) = v_2$	8

Тогда пара *взаимных* наилучших ответов есть *ситуация равновесия по Нэшу*. В данном случае имеем единственную ситуацию равновесия (в чистых стратегиях)  $s_{21} = (u_2, v_1)$ , доставляющую выигрыши (4, 6).

### Свойство наилучших ответов игроков

---

Пусть задана бескоалиционная игра  $n$  лиц  $\Gamma = \{I, S, H\}$ .

Обозначим через  $s_{-i} = (s_1, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_n)$  — набор стратегий всех игроков в игре  $\Gamma$ , кроме  $i$ -го игрока.

**Определение.** *Наилучшим ответом* игрока  $i$  на стратегии остальных игроков  $s_{-i}$  в игре  $\Gamma = \{I, S, H\}$  называется множество стратегий

$$BR_i(s_{-i}) = \{ \bar{s}_i \in S_i \mid \max_{s_i \in S_i} H_i(s_i, s_{-i}) = H_i(\bar{s}_i, s_{-i}) \},$$

где  $H_i(s_i, s_{-i}) \equiv H_i(s_1, s_2, \dots, s_{i-1}, s_i, s_{i+1}, \dots, s_n)$ .

Если игрок  $i$  выбирает стратегию  $\bar{s}_i \in BR_i(s_{-i})$ , то никакое отклонение от нее (при фиксированных стратегиях остальных

игроков) не сможет дать ему больший выигрыш. Стратегия  $\bar{s}_i \in BR_i(s_{-i})$  обязательно входит в приемлемую для игрока  $i$  ситуацию, так как  $H_i(s|_{\bar{s}_i}) \geq H_i(s|_{s_i})$  для любых  $s_i \in S_i$ .

**Свойство.** Ситуация  $\bar{s} = (\bar{s}_1, \dots, \bar{s}_n)$  такая, что  $\bar{s}_i \in BR_i(\bar{s}_{-i})$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , и является *равновесной* по Нэшу.

Таким образом, ни один из игроков в одиночку не может улучшить свой выигрыш по сравнению с результатом равновесной ситуации.

### Контрольные вопросы и задания

1. Запишите формализованное представление бескоалиционной игры в нормальной форме.
2. Дайте определение ситуации равновесия по Нэшу в бескоалиционной игре.
3. Сформулируйте определение оптимальной по Парето ситуации в бескоалиционной игре.
4. Приведите геометрическую интерпретацию предпочтительности ситуаций в бескоалиционной игре.
5. В чем заключается условие «взвешенной эффективности» для оптимальных по Парето ситуаций в бескоалиционной игре?
6. Дайте определение строго (слабо) доминируемой стратегии в бескоалиционной игре.
7. Найдите ситуации равновесия по Нэшу, используя свойства доминируемых стратегий, в следующих бескоалиционных играх с платежной матрицей  $H$ :

$$а) H = \begin{pmatrix} (3, 5) & (2, 6) & (5, 8) \\ (4, 3) & (3, 5) & (6, 4) \\ (3, 6) & (2, 4) & (8, 3) \end{pmatrix};$$

$$\text{б) } H = \begin{pmatrix} (8, 2) & (6, 3) & (4, 8) \\ (3, 5) & (6, 6) & (4, 3) \\ (4, 0) & (7, 1) & (5, 3) \end{pmatrix};$$

$$\text{в) } H = \begin{pmatrix} (2, -1) & (0, 0) & (-1, 4) \\ (6, -4) & (4, -2) & (1, 2) \\ (5, 1) & (1, 2) & (0, 3) \end{pmatrix};$$

$$\text{г) } H = \begin{pmatrix} (1, 0) & (3, 0) & (0, 0) \\ (2, 2) & (2, 1) & (-2, 3) \\ (3, 3) & (3, 2) & (-1, 4) \end{pmatrix}.$$

8. Найдите взвешенную оптимальную по Парето ситуацию с  $\bar{\lambda} = (1, 1)$  в бескоалиционной игре с платежной матрицей  $H$ :

$$H = \begin{pmatrix} (2, 2) & (-2, 3) & (2, 1) \\ (1, 0) & (3, 0) & (0, 0) \\ (3, 3) & (3, 2) & (-1, 4) \end{pmatrix}.$$

9. Найдите взвешенную оптимальную по Парето ситуацию с  $\bar{\lambda} = (1, 1/2)$  в бескоалиционной игре с платежной матрицей  $H$ :

$$H = \begin{pmatrix} (6, 0) & (8, -2) & (3, 4) \\ (2, 2) & (4, 1) & (1, 6) \\ (3, 4) & (7, 3) & (2, 5) \end{pmatrix}.$$

10. Найдите ситуации равновесия по Нэшу и оптимальные по Парето ситуации в следующих бескоалиционных играх с платежной матрицей  $H$ :

$$\text{а) } H = \begin{pmatrix} (-1, 0) & (3, 0) & (2, 1) & (3, -1) \\ (2, 3) & (5, -1) & (0, 2) & (5, 1) \\ (0, 2) & (1, 5) & (1, 3) & (4, 1) \end{pmatrix};$$

$$\text{б) } H = \begin{pmatrix} (3, 2) & (1, 3) & (-1, 0) & (0, 2) \\ (5, 2) & (-1, 3) & (-2, 1) & (-1, 3) \\ (1, 3) & (0, 2) & (1, 4) & (-2, 3) \end{pmatrix}.$$

11. Приведите определение и свойства стратегически эквивалентных бескоалиционных игр.
12. Дайте определение наилучшего ответа игрока на стратегии других игроков в бескоалиционной игре. В чем заключается свойство равновесной по Нэшу ситуации относительно наилучших ответов игроков?



---

## 3. Матричные игры

---

### Определение матричной игры

---

**Определение.** Антагонистические игры, в которых каждый игрок имеет конечное множество стратегий, называются *матричными играми*.

Итак, матричная игра — это конечная игра двух лиц с нулевой суммой (т. е. сумма выигрышей игроков в каждой ситуации равна нулю). Такая игра полностью определяется матрицей

$$H = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & \dots & h_{1n} \\ h_{21} & h_{22} & \dots & h_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{m1} & h_{m2} & \dots & h_{mn} \end{pmatrix},$$

в которой строки соответствуют чистым стратегиям игрока 1, столбцы — чистым стратегиям игрока 2, на их пересечении стоит выигрыш игрока 1 в соответствующей ситуации, т. е. ситуации  $s = (i, j)$  соответствует выигрыш  $H_1(s) \equiv H(i, j) = h_{ij}$ . Тогда

выигрыш игрока 2 равен  $H_2(s) = -H_1(s)$  для всех  $s \in S$ .

Здесь игрок 1 имеет  $m$  стратегий, игрок 2 имеет  $n$  стратегий. Такая игра называется  $m \times n$ -игрой. Матрица  $H$  называется *матрицей игры* или *матрицей выигрышей* (*платежной матрицей*).

Цель игрока 1 — максимизировать свой возможный выигрыш, при этом увеличение его выигрыша ведет к уменьшению

выигрыша игрока 2 (так как игра антагонистическая). Аналогичное можно отметить и для игрока 2: увеличение его выигрыша ведет к уменьшению выигрыша игрока 1. Поэтому при выборе стратегии игрок 1 (разумный игрок, действующий рационально) будет руководствоваться следующими соображениями. При стратегии  $i$  игрока 1 игрок 2 выберет стратегию  $j_*$ , максимизирующую его (игрока 2) выигрыш (тем самым минимизирующую выигрыш игрока 1):

$$h_{ij_*} = \min_j h_{ij}.$$

Тогда *оптимальная* стратегия игрока 1, которая обеспечит ему наибольший из возможных выигрышей  $h_{i j_*}$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , (т. е. при любой стратегии игрока 2), будет состоять в выборе стратегии  $i_*$ , для которой выполняется:

$$h_{i_* j_*} = \max_i h_{i j_*} = \max_i \min_j h_{ij}.$$

Аналогичными соображениями будет руководствоваться игрок 2 при выборе стратегии: обеспечить наибольший возможный выигрыш при любом выборе стратегии игрока 1, т. е. выбрать стратегию, которая обеспечит ему  $\max$  из возможных выигрышей

$$-h_{i_* j}, j = 1, 2, \dots, n, \text{ здесь } h_{i_* j} = \max_i h_{ij},$$

причем для второго игрока выигрыш равен  $-h$ , где  $h$  — выигрыш игрока 1.

Таким образом, оптимальная стратегия игрока 2 будет состоять в выборе стратегии  $j^*$ , для которой выполняется:

$$-h_{i_* j^*} = \max_j (-h_{i_* j}) = \max_j (-\max_i h_{ij}) = -\min_j \max_i h_{ij},$$

отсюда получим:

$$h_{i_* j^*} = \min_j \max_i h_{ij}.$$

**Теорема 3.1.** Для любой матрицы  $H$  справедливо неравенство

$$\max_i \min_j h_{ij} \leq \min_j \max_i h_{ij}.$$

*Доказательство.* Зафиксируем какой-нибудь  $j$ -й столбец, например,  $j = 1$ . Тогда имеем:

$$h_{i1} \leq \max_i h_{i1} \text{ при любом } i = 1, 2, \dots, m.$$

Данное неравенство справедливо и при других  $j = 2, \dots, n$ , и поэтому

$$h_{ij} \leq \max_i h_{ij} \text{ при всех } i \text{ и для любого } j.$$

Взятие минимума по  $j$  от обеих частей не нарушает неравенства, следовательно,

$$\min_j h_{ij} \leq \min_j \max_i h_{ij} \text{ при всех } i.$$

Так как с правой стороны стоит константа и при всех  $i$  левое выражение ограничено этой константой, то имеем:

$$\max_i \min_j h_{ij} \leq \min_j \max_i h_{ij}.$$

### Ситуации равновесия в матричной игре

---

**Определение.** В игре с матрицей  $H$  стратегии, на которых достигаются  $\max_i \min_j h_{ij}$  и  $\min_j \max_i h_{ij}$ , называются соответственно *максиминной* (игрока 1) и *минимаксной* (игрока 2). Величины  $v_* = \max_i \min_j h_{ij}$  и  $v^* = \min_j \max_i h_{ij}$  называются соответственно нижнее и верхнее значения игры.

**Определение.** Для матричной игры с платежной матрицей  $H$  ситуация равновесия по Нэшу  $(s_1^{(i^*)}, s_2^{(j^*)}) \equiv (i^*, j^*)$  определяется неравенствами:

$$h_{ij^*} \leq h_{i^*j^*} \leq h_{i^*j} \quad (3.1)$$

для любых  $i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$ .

Пара  $(i^*, j^*)$ , удовлетворяющая неравенству (3.1), называется *седловой точкой* матрицы  $H$ . В седловой точке элемент матрицы  $h_{i^*j^*}$  является одновременно минимумом в своей строке и максимумом в своем столбце. Седловая точка существует не всегда.

Для матричных игр характерны следующие свойства.

1. Функция выигрыша  $H(i, j) = h_{ij}$  принимает одно и то же значение во всех ситуациях равновесия.

Если ситуация  $(i^*, j^*)$  — ситуация равновесия по Нэшу в матричной игре  $\Gamma$ , то  $v = H(i^*, j^*)$  называется *значением (ценой) игры  $\Gamma$* .

$$2. \max_{1 \leq i \leq m} \min_{1 \leq j \leq n} h_{ij} \leq \min_{1 \leq j \leq n} \max_{1 \leq i \leq m} h_{ij}$$

$$3. v = \max_{1 \leq i \leq m} \min_{1 \leq j \leq n} h_{ij} = \min_{1 \leq j \leq n} \max_{1 \leq i \leq m} h_{ij} = h_{i^*j^*}.$$

4. Если существует седловая точка  $(i^*, j^*)$  платежной матрицы  $H$ , то стратегии  $(s_1^{(i^*)}, s_2^{(j^*)})$  являются *оптимальными* стратегиями игроков в данной игре. Если один из игроков придерживается своей оптимальной стратегии, то для другого игрока не может быть выгодным отклоняться от своей оптимальной стратегии.

**Теорема 3.2.** Для существования в матричной игре седловых точек (ситуаций равновесия) необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$\max_i \min_j h_{ij} = \min_j \max_i h_{ij}. \quad (3.2)$$

*Доказательство.* Поскольку множества стратегий каждого игрока конечны, а значит, экстремумы на них достигаются, то эти минимаксы существуют.

*Необходимость.* Пусть  $s^0 = (i^0, j^0)$  — седловая точка, т. е. удовлетворяет

$$h_{ij^0} \leq h_{i^0j^0} \leq h_{i^0j} \quad (3.3)$$

для любых  $i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$ .

Тогда имеем из правой части неравенства (3.3)

$$h_{i_0 j_0} \leq \min_j h_{i_0 j} \leq \max_i \min_j h_{ij} \stackrel{\Delta}{=} h_{i_* j_*} = v_*.$$

Из левой части неравенства (3.3) следует:

$$h_{i_0 j_0} \geq \max_i h_{i j_0} \geq \min_j \max_i h_{ij} \stackrel{\Delta}{=} h_{i_* j_*} = v_*.$$

Итак, имеем  $v_* \geq v^0 = h_{i_0 j_0} \geq v^*$ . Из теоремы 3.1 следует, что всегда  $v_* \leq v^*$ . Тогда получим  $v_* = v^* = v^0$ .

*Достаточность.* Пусть выполняется (3.2), т. е.  $v_* = v^*$ . Из теоремы 3.1 следует, что для каждой пары  $(i^*, j^*)$ ,  $(i_*, j_*)$

$$v^* = h_{i^* j^*} \geq h_{i_* j^*} \geq h_{i_* j_*} = v_*. \quad (3.4)$$

Поскольку  $v_* = v^*$ , то имеем в (3.4) равенства. Тогда получим:

а)  $h_{i_* j^*} = h_{i_* j^*} \leq h_{i_* j}$  для  $\forall j = 1, \dots, n$ ;

б)  $h_{i^* j^*} = h_{i^* j^*} \geq h_{i^* j}$  для  $\forall i = 1, \dots, m$ .

Таким образом, имеем  $h_{i^* j^*} \leq h_{i_* j^*} \leq h_{i_* j}$ , для любых  $i = 1, 2, \dots, m$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ , т. е.  $(i_*, j^*)$  — седловая точка.

На основании теоремы 3.2 получим следующее свойство седловых точек — *прямоугольность множества седловых точек*. Если  $(i^*, j^*)$  и  $(i^{**}, j^{**})$  — седловые точки платежной матрицы  $H$ , то точки  $(i^*, j^{**})$  и  $(i^{**}, j^*)$  также будут седловыми для матрицы  $H$ . Значения функции выигрыша  $H(i, j) = h_{ij}$  во всех ее седловых точках равны друг другу.

*Схема нахождения седловых точек* матрицы  $H$ .

1. Для каждой стратегии  $i$  игрока 1 (по строкам) находится  $\min_j h_{ij}$ .

2. Среди полученных величин  $\min_j h_{ij}$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , определяется наибольшая, т. е.  $\max_i \min_j h_{ij}$ .

3. Для каждой стратегии  $j$  игрока 2 (по столбцам) находится  $\max_i h_{ij}$ .

4. Среди полученных величин  $\max_i h_{ij}, j = 1, 2, \dots, n$ , определяется наименьшая, т.е.  $\min_j \max_i h_{ij}$ .

$$\begin{array}{c}
 H = \left( \begin{array}{cccc} h_{11} & h_{12} & \dots & h_{1n} \\ h_{21} & h_{22} & \dots & h_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{m1} & h_{m2} & \dots & h_{mn} \end{array} \right) \left. \begin{array}{l} \rightarrow \min_j h_{1j} \\ \rightarrow \min_j h_{2j} \\ \rightarrow \dots \\ \rightarrow \min_j h_{mj} \end{array} \right\} \rightarrow \max_i \min_j h_{ij} \\
 \begin{array}{cccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \max_i h_{i1} & \max_i h_{i2} & \dots & \max_i h_{in} \end{array} \\
 \downarrow \\
 \min_j \max_i h_{ij}
 \end{array}$$

5. Если выполняется равенство

$$\max_i \min_j h_{ij} = \min_j \max_i h_{ij} = h_{i^0 j^0},$$

то существует седловая точка  $s^0 = (i^0, j^0)$ , причем значение игры  $v(H) = v^0 = h_{i^0 j^0}$ .

**Пример 3.1.** Рассмотрим игру с платежной матрицей

$$\begin{array}{c}
 H = \left( \begin{array}{ccc} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 5 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \end{array} \right) \left. \begin{array}{l} \rightarrow -3 \\ \rightarrow 0 \\ \rightarrow 2 \end{array} \right\} \rightarrow \max_i \min_j h_{ij} = 2. \\
 \begin{array}{ccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 5 & 4 \end{array} \\
 \downarrow \\
 \min_j \max_i h_{ij} = 2
 \end{array}$$

Итак, максимин и минимакс равны, следовательно, значение игры  $v(H) = v^0 = 2$ . Существует седловая точка матрицы  $H$  — ситуация  $(i^0, j^0) = (3, 1)$ , образованная третьей стратегией игрока 1 и первой стратегией игрока 2, которые являются *оптимальными* стратегиями игроков в данной игре.

**Замечание.** Хотя выигрыш в ситуации  $(3, 3)$  также равен 2, эта точка не является седловой, так как для игрока 2 данная ситуация приемлема (проигрыш минимален среди проигрышей третьей строки), а для игрока 1 — не приемлема (выигрыш не является максимальным среди выигрышей третьего столбца).

**Пример 3.2.** Задана следующая игра с платежной матрицей:

$$\begin{array}{c}
 H = \left( \begin{array}{cc} 10 & 30 \\ 40 & 20 \end{array} \right) \begin{array}{l} \rightarrow 10 \\ \rightarrow 20 \end{array} \Bigg\} \rightarrow \max_i \min_j h_{ij} = 20. \\
 \downarrow \quad \downarrow \\
 \begin{array}{cc} 40 & 30 \end{array} \\
 \underbrace{\hspace{1.5cm}} \\
 \downarrow \\
 \min_j \max_i h_{ij} = 30
 \end{array}$$

Максимин равен 20 и достигается при  $i = 2$ , а минимакс равен 30 и достигается при  $j = 2$ . Таким образом, игра не имеет ситуации равновесия (в чистых стратегиях). Однако игрок 1 может обеспечить себе гарантированный выигрыш, равный 20, поскольку  $\max_i \min_j h_{ij} = 20$ , а игрок 2 может не дать ему выиграть больше, чем  $\min_j \max_i h_{ij} = 30$  (гарантированный проигрыш игрока 2). Следует заметить, что ни одна из ситуаций не является приемлемой одновременно для обоих игроков.

## Смешанные стратегии

Если в игре с платежной матрицей  $H$  максимин и минимакс не равны друг другу, то по теореме 2 игра с такой матрицей не имеет ситуации равновесия (в чистых стратегиях). В этом случае игрок 1 может обеспечить себе выигрыш

$$\max_i \min_j h_{ij} = v_* \text{ (гарантированный выигрыш),}$$

а игрок 2 может не дать ему выиграть больше, чем

$$\min_j \max_i h_{ij} = v^* \text{ (гарантированный проигрыш).}$$

Разность  $v^* - v_* \geq 0$ , поэтому в условиях повторяющейся игры возникает вопрос о разделе этой величины  $v^* - v_*$  между игроками. Поэтому естественно желание игроков получить дополнительные стратегические возможности для уверенного получения в свою пользу возможно большей доли этой разности.

Оказывается, игрокам целесообразно выбирать свои стратегии случайно, т. е. определять распределение вероятностей на множестве чистых стратегий, а затем предоставлять выбор конкретной чистой стратегии случайному механизму, отвечающему заданному распределению вероятностей.

Выбор игроками своих чистых стратегий с некоторыми наперед заданными вероятностями — это, по существу, один из планов проведения игры и, таким образом, тоже является некоторой стратегией. В отличие от первоначально заданных чистых стратегий, такие стратегии называются *смешанными*.

**Определение.** *Смешанной стратегией* игрока называется распределение вероятностей на множестве его чистых стратегий. Смешанную стратегию игрока можно представить в виде вектора-столбца



$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = (x_1, x_2, \dots, x_m)^T, \quad (3.5)$$

где  $x_i$  — вероятность выбора игроком его  $i$ -й стратегии,  $x_i \geq 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ ;  $\sum_{i=1}^m x_i = 1$ ;  $X^T$  — транспонированный вектор  $X$ .

### Замечания

1. Задание смешанной стратегии игрока состоит в указании тех вероятностей, с которыми выбираются его чистые стратегии.

2. Каждая чистая стратегия может рассматриваться как смешанная стратегия, в которой эта чистая стратегия выбирается с вероятностью 1, а все остальные — с вероятностью 0. Таким образом, все чистые стратегии являются ортами  $e_i$  (векторами единичной длины) в  $m$ -мерном евклидовом пространстве векторов вида  $(1)$ , т. е.  $e_i^T = (0, \dots, 0, \underset{i}{\underset{\uparrow}{1}}, 0, \dots, 0)$ .

3. Множество всех векторов (3.5) (т. е. множество смешанных стратегий игрока) составляет  $(m-1)$ -й симплекс (выпуклый многогранник), натянутый на орты чистых стратегий. Этот симплекс обозначим через  $S_m$ .

*Смешанное расширение матричной игры.* Пусть в игре с  $m \times n$ -матрицей выигрышей  $H$  игроки 1 и 2 независимо друг от друга выбирают свои смешанные стратегии  $X^T = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in S_m$  и  $Y^T = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in S_n$ . Пара  $(X, Y)$  смешанных стратегий игроков в матричной игре называется *ситуацией в смешанных стратегиях* в этой игре.

В условиях ситуации в смешанных стратегиях каждая ситуация  $(i, j)$  в чистых стратегиях реализуется с вероятностью  $x_i y_j$ . Поэтому игрок 1 получает выигрыш  $h_{ij}$  с вероятностью  $x_i y_j$ , а математическое ожидание его выигрыша (как случайной величины  $\xi_1$ ) равно

$$M\xi_1 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n h_{ij} x_i y_j = X^T H Y.$$

**Определение.** Смешанным расширением матричной игры называется антагонистическая игра  $\{S_m, S_n, H\}$ , в которой стратегиями игроков являются их смешанные стратегии в исходной игре, а функция выигрыша игрока 1 определяется как

$$H(X, Y) = M\xi_1 = X^T H Y.$$

**Обозначения.** Матрицу  $H = (h_{ij})_{\substack{i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, n}}$  запишем в виде

$$H = \begin{pmatrix} h^{(1)} \\ h^{(2)} \\ \vdots \\ h^{(m)} \end{pmatrix} = (h_{(1)}, h_{(2)}, \dots, h_{(n)}),$$

где  $h^{(i)}$  —  $i$ -я строка матрицы  $H$ ;  $h_{(j)}$  —  $j$ -й столбец матрицы  $H$ .

Тогда имеем (рассматривая  $h^{(i)}$  как вектор-строку,  $h_{(j)}$  как вектор-столбец)  $h^{(i)} = e_i^T H$ ,  $h_{(j)} = H e_j$ .

Таким образом, можно записать

$$\begin{aligned} H(X, Y) &= X^T H Y = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n h_{ij} x_i y_j = \\ &= \sum_{i=1}^m x_i h^{(i)} Y = \sum_{j=1}^n X^T h_{(j)} y_j. \end{aligned} \quad (3.6)$$

### Ситуации равновесия в смешанных стратегиях

**Определение.** В смешанном расширении матричной игры ситуация  $(X^*, Y^*)$  является *ситуацией равновесия* (седловой точкой функции выигрыша  $H(X, Y) = X^T H Y$ ), если выполняется неравенство

$$H(X, Y^*) \leq H(X^*, Y^*) \leq H(X^*, Y), \forall X \in S_m, \forall Y \in S_n \quad (3.7)$$

или

$$X^T H Y^* \leq X^{*T} H Y^* \leq X^{*T} H Y, \forall X \in S_m, \forall Y \in S_n. \quad (3.8)$$

Число  $v = H(X^*, Y^*) = X^{*T} H Y^*$  является значением игры в смешанном расширении.

**Лемма 3.1** (о переходе к смешанным стратегиям). Пусть  $Y \in S_n$  — произвольная стратегия игрока 2, причем  $\exists a = \text{const}$ :

$$h^{(i)} Y \leq a \text{ для } \forall i = 1, \dots, m. \quad (3.9)$$

Тогда справедливо

$$X^T H Y \leq a \text{ для } \forall X \in S_m. \quad (3.10)$$

*Доказательство.* Пусть  $X \in S_m$  — произвольная смешанная стратегия игрока 1,  $X^T = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ . Умножим каждое из неравенств (3.9) на  $x_i$  (знак неравенства не изменится, так как  $x_i \geq 0$ ) и сложим все полученные неравенства. Получим

$$\sum_{i=1}^m x_i h^{(i)} Y \leq \sum_{i=1}^m x_i a = a \sum_{i=1}^m x_i = a \cdot 1 = a. \quad (3.11)$$

С другой стороны, из (3.6) следует

$$X^T H Y = \sum_{i=1}^m x_i h^{(i)} Y. \quad (3.12)$$

Из (3.11) и (3.12) получим (3.10).

**Следствие.** Переходы к смешанным стратегиям аналогично доказываются в следующих неравенствах:

$$h^{(i)} Y \geq a \text{ для } \forall i = 1, \dots, m \Rightarrow X^T H Y \geq a \text{ для } \forall X \in S_m;$$

$$X^T h_{(j)} \leq a \text{ для } \forall j = 1, \dots, n \Rightarrow X^T H Y \leq a \text{ для } \forall Y \in S_n;$$

$$X^T h_{(j)} \geq a \text{ для } \forall j = 1, \dots, n \Rightarrow X^T H Y \geq a \text{ для } \forall Y \in S_n.$$

**Замечание.** Учитывая  $h^{(i)} = e_i^T H$ , получим из (3.9):

$$e_i^T H Y \leq a \text{ для } \forall i = 1, \dots, m. \quad (3.13)$$

Тогда по лемме 1  $\Rightarrow X^T H Y \leq a$  для  $\forall X \in S_m$ . Таким образом, имеем следующий смысл леммы 1: если  $\exists a = \text{const}$ , для которой выполняется (3.13) для любой чистой стратегии  $e_i$  игрока 1, то аналогичное неравенство выполняется также для любой его смешанной стратегии  $X \in S_m$ .

Указанный смысл имеет место и для игрока 2.

**Теорема 3.3.** Для того чтобы ситуация  $(X^*, Y^*)$  была равновесной, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства

$$h^{(i)} Y^* \leq X^{*T} H Y^* \leq X^{*T} h_{(j)} \quad (3.14)$$

для  $\forall i = 1, \dots, m; \forall j = 1, \dots, n$ .

**Доказательство. Необходимость.** Пусть  $(X^*, Y^*)$  — ситуация равновесия, т. е. имеем (3.8). Тогда эти неравенства справедливы также при  $X = e_i$ ,  $Y = e_j$ , т. е. имеем

$$\underbrace{e_i^T H Y^*}_{h^{(i)}} \leq X^{*T} H Y^* \leq X^{*T} \underbrace{H e_j}_{h_{(j)}}$$

для  $\forall i = 1, \dots, m; \forall j = 1, \dots, n$ , откуда следует (3.14).

**Достаточность.** Пусть имеет место (3.14). Тогда по лемме 1.1 для  $Y = Y^*$  и  $a = X^{*T} H Y^*$  получим:

$$h^{(i)} Y^* \leq a \text{ для } \forall i = 1, \dots, m; X^T H Y^* \leq a \text{ для } \forall X \in S_m.$$

Аналогично для  $X = X^*$  имеем:

$$X^{*T} h_{(j)} \geq a \text{ для } \forall j = 1, \dots, n; X^{*T} H Y \geq a \text{ для } \forall Y \in S_n.$$

Таким образом, имеем  $X^T H Y^* \leq a \leq X^{*T} H Y$ , т. е. выполняется неравенство (3.8), тогда  $(X^*, Y^*)$  — ситуация равновесия в смешанных стратегиях.

**Теорема 3.4.** Если ситуация  $(i^*, j^*)$  в чистых стратегиях является равновесной для матричной игры с матрицей  $H$ , то она является равновесной и для смешанного расширения этой игры.

**Доказательство.** Пусть  $(i^*, j^*)$  — равновесная ситуация в чистых стратегиях, тогда выполняются неравенства

$$h_{ij^*} \leq h_{i^*j^*} \leq h_{i^*j} \text{ для } \forall i = 1, 2, \dots, m, \forall j = 1, 2, \dots, n. \quad (3.15)$$

В смешанных стратегиях имеем:  $X^* = e_{i^*}$ ,  $Y^* = e_{j^*}$ , тогда

$$e_{i^*}^T H e_{j^*} = X^* H Y^* = h_{i^*j^*},$$

$$e_i^T H e_{j^*} = h^{(i)} e_{j^*} = h_{ij^*},$$

$$e_{i^*}^T H e_j = e_{i^*}^T h_{(j)} = h_{i^*j}.$$

Таким образом, неравенства (3.15) можно записать в виде:

$$\underbrace{h^{(i)} e_{j^*}}_{Y^*} \leq \underbrace{e_{i^*}^T H e_{j^*}}_a \leq \underbrace{e_{i^*}^T h_{(j)}}_{X^*}$$

для  $\forall i = 1, 2, \dots, m, \forall j = 1, 2, \dots, n$ .

Отсюда по лемме 1.1 имеем  $X^T H Y^* \leq a \leq X^{*T} H Y$  для любых  $X \in S_m, Y \in S_n$ , т. е. выполняется неравенство (3.8), тогда  $(X^*, Y^*)$  — ситуация равновесия в смешанных стратегиях.

**Теорема 3.5 (фон Нейман).** Пусть  $H$  — произвольная  $m \times n$ -матрица выигрышей игры. Тогда функция выигрыша  $H(X, Y) = X^T H Y$  имеет седловую точку (существует ситуация равновесия в смешанном расширении игры), причем

$$\max_{X \in S_m} \min_{Y \in S_n} X^T H Y = \min_{Y \in S_n} \max_{X \in S_m} X^T H Y. \quad (3.16)$$

Общее значение минимакса и максимина в (3.16) называется *значением матричной игры* с матрицей выигрышей  $H$  (в смешанном расширении) и обозначается  $v(H)$ .

**Замечание.** Представленные в теореме величины  $\max_{X \in S_m} \min_{Y \in S_n} X^T H Y$  и  $\min_{Y \in S_n} \max_{X \in S_m} X^T H Y$  существуют.

Итак, смешанное расширение матричной игры всегда имеет седловую точку (ситуацию равновесия), образованную равновесными смешанными стратегиями игроков, доставляющими значение игры  $v(H)$ . Эти равновесные стратегии игроков называются их *оптимальными стратегиями*.

Значение игры  $v(H)$  называют также *ценой игры*, оптимальные смешанные стратегии  $X^0, Y^0$  игроков удовлетворяют условию (3.16), причем

$$\begin{aligned} \max_{X \in S_m} \min_{Y \in S_n} \underbrace{H(X, Y)}_{X^T H Y} &= \min_{Y \in S_n} \max_{X \in S_m} \underbrace{H(X, Y)}_{X^T H Y} = \\ &= \underbrace{H(X^0, Y^0)}_{X^{0T} H Y^0} = v(H) = v. \end{aligned}$$

По определению седловой точки  $(X^0, Y^0)$  имеем

$$X^T H Y^0 \leq \underbrace{X^{0T} H Y^0}_v \leq X^{0T} H Y \quad \text{для } \forall X \in S_m, \forall Y \in S_n. \quad (3.17)$$

Таким образом, выбор игроком 1 своей оптимальной стратегии дает ему средний выигрыш не меньший, чем значение игры  $v$  при любой стратегии игрока 2. Выбор игроком 2 его оптимальной стратегии дает ему средний проигрыш не больший, чем значение игры  $v$  при любой стратегии игрока 1.

### Свойства значения игры

**Теорема 3.6.** В матричной игре с матрицей выигрышей  $H$

$$v(H) = \max_{X \in S_m} \min_{j=1,2,\dots,n} X^T h_{(j)} = \min_{Y \in S_n} \max_{i=1,2,\dots,m} h^{(i)} Y,$$

причем внешние экстремумы достигаются на оптимальных стратегиях игроков.

Таким образом, имеем для оптимальных стратегий игроков:

$$v(H) = \min_{j=1,2,\dots,n} X^{0T} h_{(j)} = \max_{i=1,2,\dots,m} h^{(i)} Y^0. \quad (3.18)$$

Из теоремы 3.3 (неравенство (3.14)) следует

$$h^{(i)} Y^0 \leq \underbrace{X^{0T} H Y^0}_{v(H)} \leq X^{0T} h_{(j)} \quad (3.19)$$

для  $\forall i = 1, 2, \dots, m; \forall j = 1, 2, \dots, n$ .

**Теорема 3.7.** Для любой матрицы  $H$  выполняются неравенства

$$\max_i \min_j h_{ij} \leq v(H) \leq \min_j \max_i h_{ij}. \quad (3.20)$$

**Теорема 3.8.** Справедливы следующие утверждения.

1. Если игрок 1 имеет чистую оптимальную стратегию  $i_0$ , то

$$v(H) = \max_i \min_j h_{ij} = \min_j h_{i_0 j}.$$

2. Если игрок 2 имеет чистую оптимальную стратегию  $j_0$ , то

$$v(H) = \min_j \max_i h_{ij} = \max_i h_{i j_0}.$$

**Определение.** Спектром смешанной стратегии игрока называется множество всех его чистых стратегий, вероятность применения которых положительна согласно этой стратегии.

Пусть  $X^T = (x_1, x_2, \dots, x_m)$  — смешанная стратегия игрока,  $S(X)$  — ее спектр. Тогда чистая стратегия  $e_i \in S(X)$ , если  $x_i > 0$ .

**Теорема 3.9.** Если чистая стратегия одного из игроков содержится в спектре некоторой его оптимальной стратегии, то средний выигрыш этого игрока в ситуации, образованной данной чистой стратегией и любой оптимальной стратегией другого игрока, равен значению игры.

Таким образом, если  $X^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$  и  $Y^0 = (y_1^0, y_2^0, \dots, y_n^0)$  — оптимальные стратегии игроков, то

$$h^{(i_*)} Y^0 = \sum_{j=1}^n h_{i_* j} y_j^0 = v \text{ для } i_* : x_{i_*}^0 > 0, \quad (3.21)$$

$$X^{0T} h_{(j_*)} = \sum_{i=1}^m h_{ji} x_i^0 = v \text{ для } j_* : y_{j_*}^0 > 0. \quad (3.22)$$

**Теорема 3.10.** В матричной игре с матрицей выигрышей  $H$  множества оптимальных стратегий игроков являются непустыми выпуклыми замкнутыми ограниченными множествами.

### Контрольные вопросы и задания

1. Дайте определение седловой точки платежной матрицы (в матричной игре).
2. Сформулируйте условие существования седловых точек платежной матрицы  $H$ .
3. Выполните поиск седловых точек платежной матрицы  $H$ :

$$\text{а) } H = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 & 7 \\ 8 & 4 & 6 & 1 \\ 7 & 6 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 5 & 6 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } H = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 3 & 7 \\ 4 & 5 & -4 & -2 \\ 5 & 2 & -3 & -4 \end{pmatrix}.$$

4. В чем заключается свойство прямоугольности множества седловых точек платежной матрицы?
5. Что называется смешанным расширением матричной игры?
6. Дайте определение ситуации равновесия в смешанных стратегиях в матричной игре.
7. Сформулируйте лемму о переходе к смешанным стратегиям.
8. Два игрока одновременно и независимо друг от друга выбирают одну из трех цифр: 1, 2 или 3. Если сумма выбранных цифр четная, то выигрывает игрок 1: он получает число очков, равное этой сумме. Если сумма выбранных цифр нечетная, то выигрывает игрок 2 на тех же условиях. Со-



ставьте матрицу выигрышей  $H$  для данной игры, выполните поиск седловых точек этой матрицы.

9. Два игрока одновременно и независимо друг от друга выбирают одну из трех цифр: 1, 2 или 3. Выигрыш каждого игрока равен разности выбранного им числа и числа, выбранного его противником. Составьте матрицу выигрышей  $H$  для данной игры, выполните поиск седловых точек этой матрицы.
10. Является ли седловая точка платежной матрицы  $H$  равновесной ситуацией в смешанном расширении матричной игры? Проверьте ответ для игры с платежной матрицей

$$H = \begin{pmatrix} 60 & 50 \\ 40 & 20 \end{pmatrix}.$$

---

## 4. Решение матричных игр

---

**Р**ешить матричную игру — значит найти оптимальные стратегии игроков (чистые или смешанные) и значение (цену игры), определяющее выигрыши игроков.

**Теорема 4.1 (об аффинных преобразованиях).** Оптимальные стратегии игроков в матричной игре с матрицей  $H$  и в матричной игре с матрицей  $\tilde{H} = kH + C$  совпадают, где число  $k > 0$ ,  $C = (c_{ij})$  — матрица размерности  $m \times n$ ,  $c_{ij} = c$  — const. Значения игр связаны равенством:

$$v(\tilde{H}) = kv(H) + c.$$

*Доказательство.* Пусть  $X^0, Y^0$  — оптимальные смешанные стратегии игроков, доставляющие значение игры  $v(H)$  (в игре с матрицей  $H$ ). По определению седловой точки  $(X^0, Y^0)$  имеем

$$X^T H Y^0 \leq \underbrace{X^{0T} H Y^0}_{v(H)} \leq X^{0T} H Y \quad (4.1)$$

для  $\forall X \in S_m, \forall Y \in S_n$ .

Для матрицы  $\tilde{H}$  имеем для  $\forall X \in S_m, \forall Y \in S_n$

$$\begin{aligned} X^T \tilde{H} Y &= X^T (kH + C) Y = kX^T H Y + X^T C Y = \\ &= kX^T H Y + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_i y_j = kX^T H Y + c \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_i y_j = \\ &= kX^T H Y + c \underbrace{\sum_{i=1}^m x_i}_{=1} \underbrace{\sum_{j=1}^n y_j}_{=1} = kX^T H Y + c. \end{aligned}$$

Тогда из (4.1) получим (прибавляя число  $c$  ко всем частям неравенства) для  $\forall X \in S_m, \forall Y \in S_n$

$$kX^T HY^0 + c \leq \underbrace{X^{0T} HY^0}_{v(H)} + c \leq kX^{0T} HY + c \Rightarrow$$

$$X^T \tilde{H} Y^0 \leq \underbrace{X^{0T} \tilde{H} Y^0}_{v(\tilde{H})} \leq X^{0T} \tilde{H} Y.$$

т. е.  $X^0, Y^0$  — оптимальные смешанные стратегии игроков, доставляющие значение игры  $v(\tilde{H})$  (в игре с матрицей  $\tilde{H}$ ), при этом имеем равенство  $v(\tilde{H}) = kv(H) + c$ .

*Замечание.* Матричные игры  $\Gamma(H) = \{S_m, S_n, H\}$  и  $\Gamma(\tilde{H}) = \{S_m, S_n, \tilde{H}\}$  стратегически эквивалентны.

### Задачи игроков в матричной игре

---

На основании теоремы 3.6 в матричной игре с матрицей  $H$  имеем для оптимальных стратегий игроков  $X^0, Y^0$ :

$$h^{(i)} Y^0 \leq \underbrace{X^{0T} H Y^0}_{v(H)} \leq X^{0T} h_{(j)} \quad (4.2)$$

для  $\forall i = 1, 2, \dots, m; \forall j = 1, 2, \dots, n$ .

Тогда данная игровая задача для игроков сводится к следующим задачам игроков (*аналитическая форма записи*).

*Задача для игрока 1.* Среди стратегий  $X \in S_m$  требуется найти такую оптимальную стратегию  $X^0$ , удовлетворяющую неравенству

$$X^T h_{(j)} \geq v \text{ для } \forall j = 1, 2, \dots, n, \quad (4.3)$$

причем  $v$  — наибольшее из всех возможных, для которых существует хотя бы одна стратегия  $X$ , удовлетворяющая (4.3). Наибольшее  $v$  соответствует значению  $v(H)$ .

Данную задачу можно записать в следующем виде: имеем обозначения:  $X^T = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ ,  $Y^T = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ ,  $h^{(i)}$  —  $i$ -я строка матрицы  $H$ ;  $h_{(j)}$  —  $j$ -й столбец матрицы  $H$ .

*Задача для игрока 1.* Среди чисел  $x_1, x_2, \dots, x_m$ , удовлетворяющих неравенствам

$$\sum_{i=1}^m h_{ij} x_i \geq v \text{ для } \forall j = 1, 2, \dots, n, \quad (4.4)$$

$$\sum_{i=1}^m x_i = 1, x_i \geq 0 \text{ } \forall i = 1, 2, \dots, m, \quad (4.5)$$

найти такие  $x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0$ , доставляющие  $\max v$ .

Набор  $X^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$  определяет оптимальную стратегию игрока 1 в данной матричной игре.

*Задача для игрока 2.* Среди стратегий  $Y \in S_n$  требуется найти такую оптимальную стратегию  $Y^0$ , удовлетворяющую неравенству

$$h^{(i)} Y \leq v \text{ для } \forall i = 1, 2, \dots, m, \quad (4.6)$$

причем  $v$  — наименьшее из всех возможных, для которых существует хотя бы одна стратегия  $Y$ , удовлетворяющая (4.6). Наименьшее  $v$  соответствует значению  $v(H)$ .

Данную задачу также можно записать в следующем виде: среди чисел  $y_1, y_2, \dots, y_n$ , удовлетворяющих неравенствам

$$\sum_{j=1}^n h_{ij} y_j \leq v \text{ для } \forall i = 1, 2, \dots, m, \quad (4.7)$$

$$\sum_{j=1}^n y_j = 1, y_j \geq 0 \text{ } \forall j = 1, 2, \dots, n, \quad (4.8)$$

найти такие  $y_1^0, y_2^0, \dots, y_n^0$ , доставляющие  $\min v$ .

Набор  $Y^0 = (y_1^0, y_2^0, \dots, y_n^0)$  определяет оптимальную стратегию игрока 2 в данной матричной игре. Значение игры  $v(H) = X^{0T} H Y^0$ .

**Определение.** Чистая стратегия  $i$  игрока 1 называется *существенной* (или *активной*) стратегией, если существует оптимальная стратегия  $X^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$  этого игрока, для которой  $x_i^0 > 0$ .

Аналогично определяется существенная стратегия игрока 2.

## Решение матричной игры 2×2

---

Рассмотрим матричную игру 2×2 с матрицей  $H = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix}$ .

Предположим, что у матрицы  $H$  нет седловой точки. Следовательно, решение должно быть в смешанных стратегиях.

*Задача для игрока 1.* Среди чисел  $x_1, x_2$ , удовлетворяющих неравенствам

$$\begin{cases} h_{11}x_1 + h_{21}x_2 \geq v, \\ h_{12}x_1 + h_{22}x_2 \geq v, \end{cases} \quad (4.9)$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_1 + x_2 = 1, \quad (4.10)$$

найти такие  $x_1^0, x_2^0$ , доставляющие  $\max v$ .

Набор  $X^0 = (x_1^0, x_2^0)$  определяет оптимальную стратегию игрока 1 в данной матричной игре. При этом значение игры есть  $v(H) = \max v$ .

В игре 2×2 обе чистые стратегии игроков являются существенными (в противном случае игра имела бы седловую точку в чистых стратегиях). В задаче для игрока 1 это означает, что  $x_1 > 0, x_2 > 0$ . Тогда на основании теоремы 3.6 можно показать, что в (4.9) имеем оба равенства для оптимальных стратегий:

$$\begin{cases} h_{11}x_1 + h_{21}x_2 = v, \\ h_{12}x_1 + h_{22}x_2 = v. \end{cases} \quad (4.11)$$

Действительно, предположим, что одно из равенств (4.11) не выполняется, например, первое, тогда по теореме 3.6 имеем

$$h_{11}x_1 + h_{21}x_2 > v. \quad (4.12)$$

Если  $Y^0 = (y_1^0, y_2^0)$  — оптимальная стратегия игрока 2, причем  $y_1^0 > 0, y_2^0 > 0, y_1^0 + y_2^0 = 1$ , то умножим второе равенство в (4.11) на  $y_1^0$ , а неравенство (4.12) — на  $y_2^0$  и сложим. Получим

$$(h_{12}x_1 + h_{22}x_2)y_1^0 + (h_{11}x_1 + h_{21}x_2)y_2^0 > \underbrace{v y_1^0 + v y_2^0}_{v(y_1^0 + y_2^0) = v} = v,$$

причем в левой части имеем  $\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 h_{ij}x_i y_j^0 = H(X, Y^0) = v(H)$  при

$X = X^0$ , в правой части —  $v = v(H)$ . Тогда следует, что  $v(H) > v(H)$  — противоречие. Таким образом, имеем систему равенств (4.11) для поиска оптимальной стратегии игрока 1 и цены игры  $v(H)$ .

Решая систему (4.11), получим

$$v^0 = \frac{\Delta}{h_{11} + h_{22} - h_{12} - h_{21}}, \quad (4.13)$$

$$x_1^0 = \frac{h_{22} - h_{21}}{h_{11} + h_{22} - h_{12} - h_{21}}, \quad x_2^0 = 1 - x_1^0 = \frac{h_{11} - h_{12}}{h_{11} + h_{22} - h_{12} - h_{21}}, \quad (4.14)$$

причем  $\Delta = h_{11}h_{22} - h_{12}h_{21} \neq 0$ .

Действительно, запишем систему (4.11) в следующем виде:  $X^T H = (v \quad v)$ . Поскольку  $X^T = (v; \quad v)H^{-1}$ , где матрица

$$H^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} h_{22} & -h_{12} \\ -h_{21} & h_{11} \end{pmatrix},$$

то получим

$$X^T = \frac{v}{\Delta} (h_{22} - h_{21}; \quad h_{11} - h_{12}). \quad (4.15)$$

Учитывая  $x_1 + x_2 = 1$ , находим

$$\frac{v}{\Delta} (h_{22} - h_{21} + h_{11} - h_{12}) = 1 \Rightarrow v^0 = \frac{\Delta}{h_{11} + h_{22} - h_{12} - h_{21}}. \quad (4.16)$$

Тогда из (4.15) и (4.16) получим (4.14). Значение игры  $v(H) = v^0$ .

Теперь рассмотрим *задачу для игрока 2*. Среди чисел  $y_1, y_2$ , удовлетворяющих неравенствам

$$\begin{cases} h_{11}y_1 + h_{12}y_2 \leq v, \\ h_{21}y_1 + h_{22}y_2 \leq v, \end{cases} \quad (4.17)$$

$$y_1 \geq 0, \quad y_2 \geq 0, \quad y_1 + y_2 = 1, \quad (4.18)$$

найти такие  $y_1^0, y_2^0$ , доставляющие  $\min v$ .

Поскольку чистые стратегии игроков являются существенными, то  $y_1 > 0, y_2 > 0$ , причем для поиска оптимальной стратегии игрока 2 имеем систему равенств (аналогично системе (4.11) для игрока 1):

$$\begin{cases} h_{11}y_1 + h_{12}y_2 = v, \\ h_{21}y_1 + h_{22}y_2 = v. \end{cases} \quad (4.19)$$

Решая систему (4.19), получим

$$y_1^0 = \frac{h_{22} - h_{12}}{h_{11} + h_{22} - h_{12} - h_{21}}, \quad y_2^0 = \frac{h_{11} - h_{21}}{h_{11} + h_{22} - h_{12} - h_{21}}. \quad (4.20)$$

## Графический метод решения матричной игры

---

Рассмотрим матричную игру  $2 \times 2$  с матрицей  $H$ .

Начнем с *задачи для игрока 2*: среди чисел  $y_1, y_2$ , удовлетворяющих неравенствам (4.17), (4.18), найти такие  $y_1^0, y_2^0$ , доставляющие  $\min v$ .

Пусть игрок 2 выбирает свою стратегию  $j = 1$  с вероятностью  $y_1 = y$  и стратегию  $j = 2$  с вероятностью  $y_2 = 1 - y$ . Если при этом игрок 1 выбирает свою стратегию  $i = 1$ , то математическое ожидание проигрыша для игрока 2 будет равно

$$M\xi_2 = v_2^{(1)} = h_{11}y + h_{12}(1 - y).$$

Если игрок 1 выбирает свою стратегию  $i = 2$ , то соответственно

$$M\xi_2 = v_2^{(2)} = h_{21}y + h_{22}(1 - y).$$

На графике (рис. 4.1) имеем в области  $y \in [0, 1]$  отрезки прямых  $B_1B'_1$  и  $B_2B'_2$ , которые соответствуют чистым стратегиям игрока 1. При данном  $y$  на рис. 4.1 показаны две точки  $B_1(y)$  и  $B_2(y)$  (на этих отрезках), соответствующие значениям проигрыша  $v_2^{(1)}$  и  $v_2^{(2)}$ , которые игрок 2 может получить, если игрок 1 применяет свои чистые стратегии. Промежуточные значения  $v_2$ , соответствующие точкам из отрезка  $B_1(y)B_2(y)$ , получаются, если игрок 1 применяет смешанные стратегии.

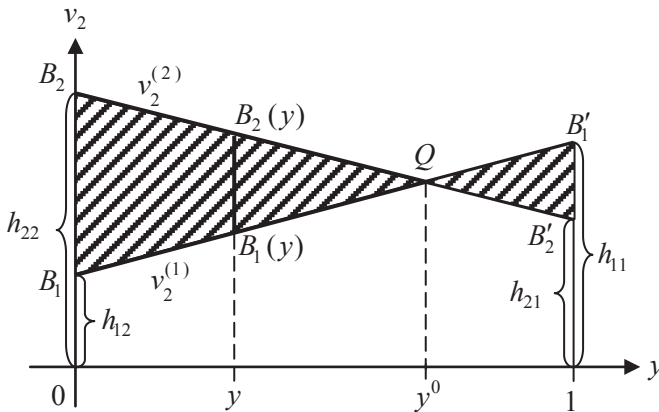


Рис. 4.1. Графическая иллюстрация решения задачи для игрока 2 в матричной игре  $2 \times 2$



Таким образом, множествам ситуаций в смешанных стратегиях соответствует множество точек между отрезками прямых  $B_1B'_1$  и  $B_2B'_2$  (эта область на рис. 4.1 заштрихована).

Ломаная линия  $B_2QB'_1$  представляет наибольший проигрыш игрока 2 при различных выборах  $y$ , т. е. соответствует  $\max_i v_2^{(i)}$ .

Игрок 2 выбирает  $y$  так, чтобы достичь низшей точки  $Q$  (получить минимум проигрыша, т. е.  $\min_{0 \leq y \leq 1} \max_i v_2^{(i)}$ ). Итак, получим

$$y_1^0 = y^0, \quad y_2^0 = 1 - y^0, \quad v(H) = v_2(y^0) = v^0.$$

Поскольку для точки  $Q(y^0, v^0)$  имеем равенство

$$h_{11}y^0 + h_{12}(1 - y^0) = h_{21}y^0 + h_{22}(1 - y^0),$$

то получим следующие формулы

$$y^0 = \frac{h_{22} - h_{12}}{h_{11} + h_{22} - h_{12} - h_{21}}, \quad v^0 = \frac{\Delta}{h_{11} + h_{22} - h_{12} - h_{21}},$$

совпадающие при  $y_1^0 = y^0$ ,  $y_2^0 = 1 - y^0$  с формулами (4.20), (4.16) аналитического решения в задаче для игрока 2.

*Задача для игрока 1.* Среди чисел  $x_1$ ,  $x_2$ , удовлетворяющих неравенствам (4.9) и (4.10), найти  $x_1^0$ ,  $x_2^0$ , доставляющие  $\max x$ .

Пусть игрок 1 выбирает свою стратегию  $i = 1$  с вероятностью  $x_1 = x$  и стратегию  $i = 2$  с вероятностью  $x_2 = 1 - x$ . Если при этом игрок 2 выбирает свою стратегию  $j = 1$ , то математическое ожидание выигрыша для игрока 1 будет равно

$$M\xi_1 = v_1^{(1)} = h_{11}x + h_{12}(1 - x).$$

Если игрок 2 выбирает свою стратегию  $j = 2$ , то соответственно

$$M\xi_1 = v_1^{(2)} = h_{21}x + h_{22}(1 - x).$$

На графике (рис. 4.2) имеем в области  $x \in [0, 1]$  отрезки прямых  $A_1A'_1$  и  $A_2A'_2$ , которые соответствуют чистым стратегиям игрока 2.

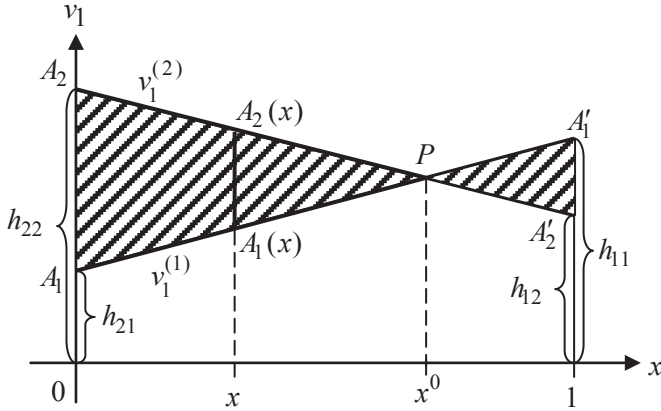


Рис. 4.2. Графическая иллюстрация решения задачи для игрока 1 в матричной игре  $2 \times 2$

Ситуациям в смешанных стратегиях соответствует множество точек между этими отрезками прямых. Ломаная линия  $A_1PA_2'$  представляет наименьший выигрыш игрока 1 при различных выборах  $x$ , т. е. соответствует  $\min_j v_1^{(j)}$ . Игрок 1 выбирает  $x$  так, чтобы достичь наивысшей точки  $P$  (получить максимум выигрыша из возможного, т. е.  $\max_{0 \leq x \leq 1} \min_j v_1^{(j)}$ ).

Итак, получим  $x_1^0 = x^0$ ,  $x_2^0 = 1 - x^0$ ,  $v^0 = v_1(x^0)$ .

Поскольку для точки  $P(x^0, v^0)$  имеем равенство

$$h_{11}x^0 + h_{21}(1 - x^0) = h_{12}x^0 + h_{22}(1 - x^0),$$

то получим следующие формулы

$$x^0 = \frac{h_{22} - h_{21}}{h_{11} + h_{22} - h_{12} - h_{21}}, \quad v^0 = \frac{\Delta}{h_{11} + h_{22} - h_{12} - h_{21}},$$

совпадающие при  $x_1^0 = x^0$ ,  $x_2^0 = 1 - x^0$  с формулами (4.13), (4.14) аналитического решения в задаче для игрока 1.

**Пример 4.1.** Найти решение игры со следующей платежной матрицей

$$H = \begin{pmatrix} 10 & 30 \\ 40 & 20 \end{pmatrix}.$$

**Решение.** 1. Данная игра не имеет ситуации равновесия в чистых стратегиях, причем

$$v_* = \max_i \min_j h_{ij} = 10 < v^* = 30 = \min_j \max_i h_{ij}.$$

Таким образом,  $10 \leq v(H) \leq 30$ .

2. *Задача для игрока 1.* Сначала рассмотрим *аналитическое* решение. В соответствии с формулами (4.13), (4.14) получим:

$$\Delta = 10 \cdot 20 - 40 \cdot 30 = -1000 \neq 0, \quad v^0 = \frac{-1000}{10 + 20 - 30 - 40} = \frac{-1000}{-40} = 25,$$

$$x_1^0 = \frac{20 - 40}{-40} = \frac{-20}{-40} = 0,5, \quad x_2^0 = \frac{10 - 30}{-40} = \frac{-20}{-40} = 0,5.$$

Таким образом, имеем оптимальную стратегию игрока 1

$$X^0 = (0,5; 0,5).$$

Построим также *графическое* решение данной игры (рис. 4.3).

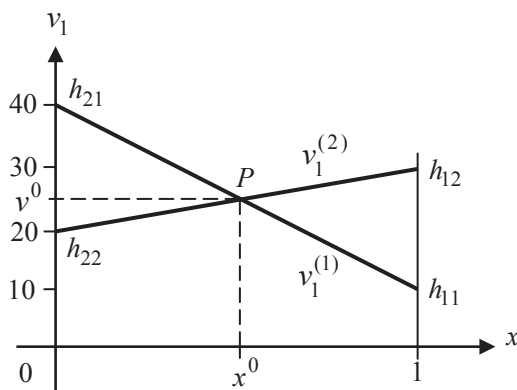


Рис. 4.3. Графическое решение задачи для игрока 1

Для точки  $P(x^0, v^0)$  получим из равенства  $v_1^{(1)} = v_1^{(2)}$ :

$$10x + 40(1 - x) = 30x + 20(1 - x) \Rightarrow x = 1/2,$$

т. е.  $x^0 = 0,5$ ;  $v^0 = v_1(x^0) = 25$ . Отсюда имеем

$$x_1^0 = x^0 = 0,5, \quad x_2^0 = 1 - x^0 = 1 - 0,5 = 0,5, \quad v(H) = v^0 = 25.$$

3. *Задача для игрока 2.* В соответствии с формулами (4.20) получим *аналитическое* решение:

$$y_1^0 = \frac{20 - 30}{-40} = \frac{-10}{-40} = 0,25,$$

$$y_2^0 = \frac{10 - 40}{-40} = \frac{-30}{-40} = 0,75.$$

Таким образом, имеем оптимальную стратегию игрока 2:

$$Y^0 = (0,25; 0,75)$$

Построим теперь графическое решение данной игры (рис. 4.4).

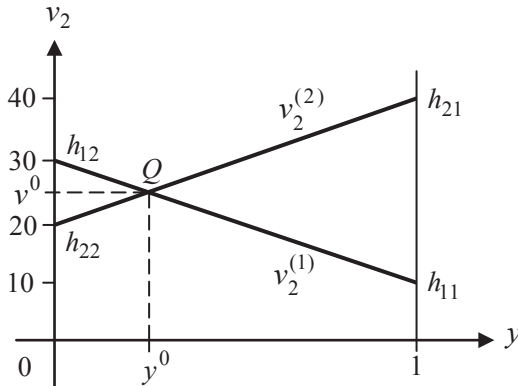


Рис. 4.4. Графическое решение задачи для игрока 2

Для точки  $Q(y^0, v^0)$  получим из равенства  $v_2^{(1)} = v_2^{(2)}$ :

$$10y + 30(1 - y) = 40y + 20(1 - y) \Rightarrow y = 1/4,$$

т. е.  $y^0 = 0,25$ ,  $v^0 = v_2(y^0) = 25$ . Отсюда находим

$$y_1^0 = y^0 = 0,25, \quad y_2^0 = 1 - y^0 = 1 - 0,25 = 0,75, \quad v(H) = v^0 = 25.$$

**Пример 4.2.** Найти решение игры со следующей платежной матрицей

$$H = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

**Решение.** 1. Данная игра имеет седловую точку (ситуацию равновесия) в чистых стратегиях:

$$v_* = \max_i \min_j h_{ij} = 3 = v^* = 3 = \min_j \max_i h_{ij}.$$

Таким образом,  $v(H) = 3$ . При этом имеем

$$X^0 = (0, 1), Y^0 = (0, 1).$$

2. Применим графический метод решения.

**Задача для игрока I.** В соответствии с методом имеем

$$v_1^{(1)} = 2x + 4(1 - x) = -2x + 4,$$

$$v_1^{(2)} = 3x + 3(1 - x) = 3.$$

Требуется найти максимум выигрыша из возможного (рис. 4.5):

$$\max_{0 \leq x \leq 1} \min_j v_1^{(j)} = v^0 = v_1(x^0).$$

Здесь ломаная  $A_2PA_1'$  представляет наименьший выигрыш игрока 1 при различных выборах  $0 \leq x \leq 1$ . Максимум ломаной будет на участке  $A_2P$ , т. е. решение для игрока 1 будет неоднозначным. Вычислим координаты точки  $P(x^*, v^0)$ .

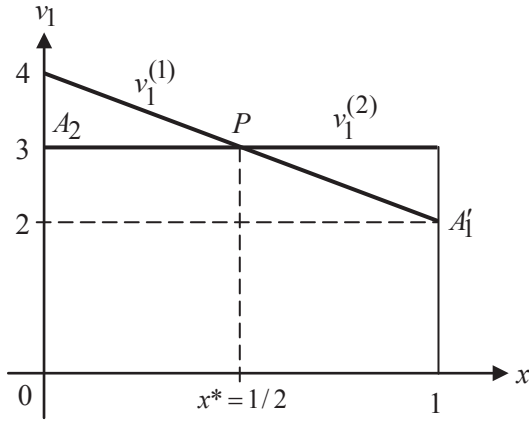


Рис. 4.5. Графическое решение задачи для игрока 1

Получим из равенства  $v_1^{(1)} = v_1^{(2)}$ :

$$-2x + 4 = 3 \Rightarrow x = 1/2,$$

т. е.  $x^* = 1/2$ ,  $v^0 = v_1(x^0) = 3$ .

Итак, имеем множество оптимальных стратегий игрока 1

$$X^0 = (x^0, 1 - x^0), \quad x^0 \in [0, 1/2],$$

значение игры  $v(H) = v^0 = 3$ .

*Задача для игрока 2.* В соответствии с методом имеем (рис. 4.6):

$$v_2^{(1)} = 2y + 3(1 - y) = -y + 3,$$

$$v_2^{(2)} = 4y + 3(1 - y) = y + 3.$$

Тогда получим следующие координаты точки  $Q(y^0, v^0)$ :

$$y^0 = 0, \quad v^0 = 3,$$

определяющей  $\min_{0 \leq y \leq 1} \max_i v_2^{(i)} = v^0 = v_2(y^0)$ .

Итак, имеем оптимальную стратегию игрока 2:  $Y^0 = (0, 1)$ .

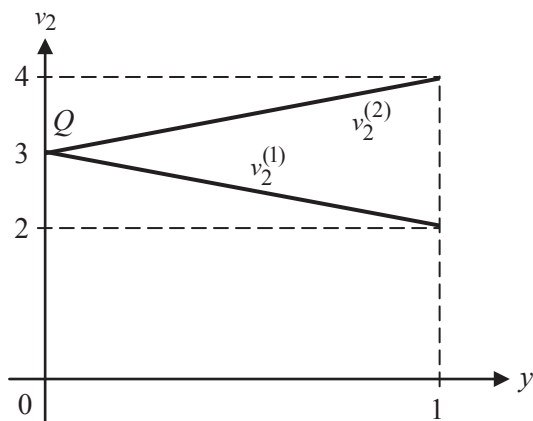


Рис. 4.6. Графическое решение задачи для игрока 2

## Теорема о дополняющей нежесткости (теорема равновесия)

---

Рассмотрим важную теорему для матричной игры  $m \times n$ , позволяющую упрощать нахождение решения игры на основании знания активных стратегий игроков.

**Теорема 4.2.** Пусть  $X^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$  и  $Y^0 = (y_1^0, y_2^0, \dots, y_n^0)$  — оптимальные стратегии в игре  $m \times n$  с платежной матрицей  $H$ ,  $v(H)$  — значение игры. Тогда для любой чистой стратегии  $i$  игрока 1 такой, что  $h^{(i)} Y^0 < v(H)$ , имеет место равенство  $x_i^0 = 0$ ; а для любой чистой стратегии  $j$  игрока 2 такой, что  $X^{0T} h_{(j)} > v(H)$ , имеет место равенство  $y_j^0 = 0$ .

Обратно, если  $x_i^0 > 0$ , то  $h^{(i)} Y^0 = v(H)$ , а если  $y_j^0 > 0$ , то  $X^{0T} h_{(j)} = v(H)$ .

*Доказательство от противного.* Допустим, что для некоторой чистой стратегии  $i_0$  игрока 1 выполнено неравенство

$h^{(i_0)}Y^0 < v(H)$  и при этом  $x_{i_0}^0 > 0$ . Умножим это неравенство на  $x_{i_0}^0$ , получим

$$h^{(i_0)}Y^0 x_{i_0}^0 < v(H) x_{i_0}^0. \quad (4.21)$$

Из неравенства (4.2) имеем для любых  $i = 1, 2, \dots, m$

$$h^{(i)}Y^0 \leq v(H). \quad (4.22)$$

Умножим неравенство (4.22) на  $x_i^0$  и просуммируем по  $i$  от 1 до  $m$ , кроме  $i = i_0$ , получим

$$\sum_{\substack{i=1, \\ i \neq i_0}}^m h^{(i)}Y^0 x_i^0 \leq \sum_{\substack{i=1, \\ i \neq i_0}}^m v(H) x_i^0. \quad (4.23)$$

Складывая неравенства (4.21) и (4.23), получим

$$\underbrace{\sum_{i=1}^m h^{(i)}Y^0 x_i^0}_{=X^{0T}HY^0=v(H)} < \sum_{i=1}^m v(H) x_i^0 = v(H) \underbrace{\sum_{i=1}^m x_i^0}_{=1} = v(H), \quad (4.24)$$

т. е. имеем  $v(H) < v(H)$  — противоречие.

Аналогично доказывается вторая часть теоремы.

*Замечание.* Из определения существенной (активной) стратегии и доказанной теоремы следует, что для каждой существенной стратегии  $i$  игрока 1 и любой оптимальной стратегии  $Y^0$  игрока 2 в игре с платежной матрицей  $H$  выполняется равенство  $h^{(i)}Y^0 = v(H)$ .

Аналогично для каждой активной стратегии  $j$  игрока 2 и любой оптимальной стратегии  $X^0$  игрока 1 в игре с платежной матрицей  $H$  выполняется равенство  $X^{0T}h_{(j)} = v(H)$ .

**Пример 4.3.** Рассмотрим игру с платежной матрицей

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$



1. Данная игра не имеет ситуации равновесия в чистых стратегиях, причем

$$v_* = \max_i \min_j h_{ij} = 1 \neq v^* = 2 = \min_j \max_i h_{ij},$$

$$1 \leq v(H) \leq 2.$$

2. Будем искать оптимальные стратегии игроков  $X^0 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0)$  и  $Y^0 = (y_1^0, y_2^0, y_3^0)$  в предположении, что они являются вполне смешанными, т. е. в их спектры входят все чистые стратегии игроков (все стратегии активные). Таким образом, в задачах для игроков вместо неравенств (4.3) и (4.6) имеем равенства.

Прежде всего, в соответствии с теоремой об аффинных преобразованиях, рассмотрим стратегически эквивалентную игру с матрицей  $\tilde{H} = kH + C$  более простого вида, для которой выберем  $k = 1$ ,  $C = (c_{ij})$ ,  $c_{ij} = -1$ . Тогда значения игр связаны равенством  $v(\tilde{H}) = v(H) - 1$ .

Матрица  $\tilde{H}$  имеет вид

$$\tilde{H} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Составим задачи игроков в игре с матрицей  $\tilde{H}$ .

*Задача для игрока 1.* Найти такие  $x_i > 0$ ,  $i = 1, 2, 3$  и величину  $v$ , удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{cases} x_2 + x_3 = v, \\ 2x_1 + x_2 = v, \\ 3x_1 + 4x_3 = v, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$$

Решая систему уравнений, получим из первых трех уравнений (исключив  $v$ ):  $x_3 = 2x_1$ ,  $x_2 = 9x_1$ . Подставим найденное далее в четвертое уравнение:

$$x_1 + 9x_1 + 2x_1 = 1 \Rightarrow x_1^0 = 1/12, \quad x_2^0 = 3/4, \quad x_3^0 = 1/6;$$

$$v(\tilde{H}) = v = 11/12.$$

Тогда значение исходной игры  $v(H) = v(\tilde{H}) + 1 = 23/12$ . Оптимальная стратегия игрока 1 есть  $X^0 = (1/12, 3/4, 1/6)$ , и, таким образом, является вполне смешанной (это соответствует сделанному предположению).

*Задача для игрока 2.* Найти такие  $y_j > 0, j = 1, 2, 3$ , и величину  $v$ , удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{cases} 2y_2 + 3y_3 = v, \\ y_1 + y_2 = v, \\ y_1 + 4y_3 = v, \\ y_1 + y_2 + y_3 = 1. \end{cases}$$

Аналогично решая систему уравнений, получим из первых трех уравнений (исключив  $v$ ):  $y_1 = 7y_3, y_2 = 4y_3$ . Подставим найденное в четвертое уравнение:

$$7y_3 + 4y_3 + y_3 = 1 \Rightarrow y_1^0 = 7/12, \quad y_2^0 = 1/3, \quad y_3^0 = 1/12;$$

$$v(\tilde{H}) = v = 11/12 \Rightarrow v(H) = v(\tilde{H}) + 1 = 23/12.$$

Оптимальная стратегия игрока 2 есть  $Y^0 = (7/12, 1/3, 1/12)$  и также является вполне смешанной. Таким образом, сделанное предположение оправдалось.

## Решение матричных игр $2 \times n$ и $m \times 2$

Перейдем к применению графического метода для решения игр, если число чистых стратегий хотя бы одного из игроков равно 2.

**Пример 4.4.** Рассмотрим игру с матрицей выигрышей

$$H = \begin{pmatrix} 11 & 3 & 8 \\ 1 & 10 & 9 \end{pmatrix}.$$

**Решение.** 1. Данная игра не имеет ситуации равновесия в чистых стратегиях, причем

$$v_* = \max_i \min_j h_{ij} = 3 \neq v^* = 9 = \min_j \max_i h_{ij},$$

$$3 \leq v(H) \leq 9.$$

2. Игрок 1 имеет две чистые стратегии, следовательно, число переменных равно 2:  $x_1, x_2$ . Поэтому применим графический метод решения задачи для игрока 1.

Пусть игрок 1 выбирает свою стратегию  $i = 1$  с вероятностью  $x_1 = x$  и стратегию  $i = 2$  с вероятностью  $x_2 = 1 - x$ . Тогда математическое ожидание выигрыша для игрока 1 будет равно

$$M\xi_1 = v_1^{(1)} = 11x + (1 - x) = 10x + 1$$

при выборе игроком 2 своей стратегии  $j = 1$ ;

$$M\xi_1 = v_1^{(2)} = 3x + 10(1 - x) = -7x + 10$$

при выборе игроком 2 своей стратегии  $j = 2$ ;

$$M\xi_1 = v_1^{(3)} = 8x + 9(1 - x) = -x + 9$$

при выборе игроком 2 своей стратегии  $j = 3$ .

Ломаная линия  $A_1PA'_2$  представляет наименьший выигрыш игрока 1 при различных выборах  $0 \leq x \leq 1$  (соответствует  $\min_j v_1^{(j)}$ ).

При этом отрезок прямой  $v_1^{(3)}$  расположен строго выше этой ломаной (гарантированного выигрыша игрока 1). Это означает, что игрок 2 заведомо не будет выбирать свою стратегию 3.

Игрок 1 выбирает  $x$  так, чтобы достичь наивысшей точки  $P$  (получить максимум выигрыша, т. е.  $\max_{0 \leq x \leq 1} \min_j v_1^{(j)}$ ). Точка  $P$  —

точка пересечения прямых  $v_1^{(1)}$  и  $v_1^{(2)}$ , т.е. стратегии  $j = 1$  и  $j = 2$  игрока 2 являются активными (рис. 4.7).

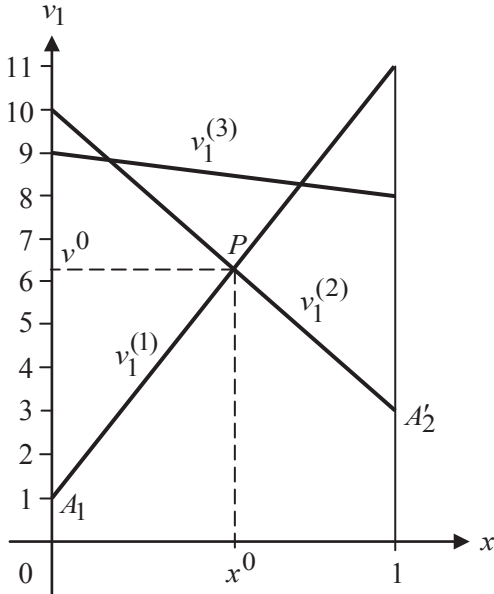


Рис. 4.7. Графическое решение задачи для игрока 1

Для точки  $P(x^0, v^0)$  получим из равенства  $v_1^{(1)} = v_1^{(2)}$ :

$$10x + 1 = -7x + 10 \Rightarrow x = 9/17,$$

т.е.  $x^0 = 9/17$ ;  $v^0 = v_1(x^0) = 107/17$ . Отсюда имеем

$$x_1^0 = x^0 = 9/17, \quad x_2^0 = 1 - x^0 = 8/17, \quad v(H) = v^0 = 107/17.$$

Итак, имеем оптимальную стратегию игрока 1:

$$X^0 = (9/17; 8/17).$$

3. Рассмотрим задачу для игрока 2. Среди чисел  $y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0, y_1 + y_2 + y_3 = 1$ , удовлетворяющих неравенствам

$$11y_1 + 3y_2 + 8y_3 \leq v,$$

$$y_1 + 10y_2 + 9y_3 \leq v,$$

найти такие  $y_1^0, y_2^0, y_3^0$ , доставляющие  $\min v$ .

Поскольку стратегии  $y_1, y_2$  активные,  $y_3$  — неактивная, то  $y_3^0 = 0, y_1^0 > 0, y_2^0 > 0$ , причем по теореме 4.2 имеем равенства

$$\begin{cases} 11y_1 + 3y_2 = v, \\ y_1 + 10y_2 = v, \end{cases}$$

при условии  $y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_1 + y_2 = 1$ .

Тогда получим  $y_1^0 = 7/17, y_2^0 = 10/17, v(H) = v^0 = 107/17$ .

Итак, имеем оптимальную смешанную стратегию игрока 2:

$$Y^0 = (7/17, 10/17, 0).$$

**Пример 4.5.** Рассмотрим игру с платежной матрицей

$$H = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 8 \\ 8 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

**Решение.** 1. Данная игра не имеет ситуации равновесия в чистых стратегиях, причем

$$v_* = \max_i \min_j h_{ij} = 4 \neq v^* = 5 = \min_j \max_i h_{ij},$$

$$4 \leq v(H) \leq 5.$$

2. Игрок 1 имеет две чистые стратегии, следовательно, число переменных равно 2:  $x_1, x_2$ . Поэтому применим графический метод решения задачи для игрока 1. В соответствии с методом имеем (рис. 4.8):

$$v_1^{(1)} = 3x + 8(1 - x) = -5x + 8,$$

$$v_1^{(2)} = 5x + 5(1 - x) = 5,$$

$$v_1^{(3)} = 8x + 4(1 - x) = 4x + 4.$$

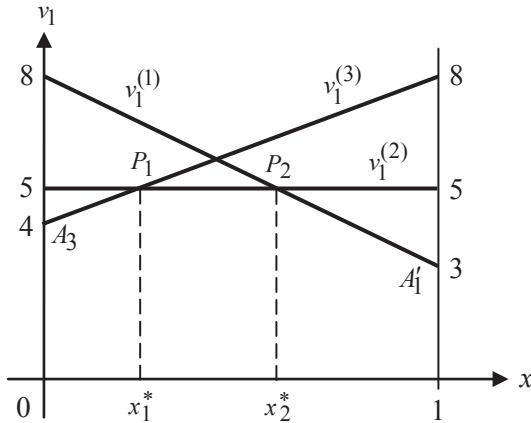


Рис. 4.8. Графическое решение задачи для игрока 1

Требуется найти максимум выигрыша из возможного:  
 $\max_{0 \leq x \leq 1} \min_j v_1^{(j)} = v^0 = v_1(x^0).$

Здесь ломаная  $A_3P_1P_2A_1'$  представляет наименьший выигрыш игрока 1 при различных выборах  $0 \leq x \leq 1$ . Максимум ломаной будет на участке  $P_1P_2$ , т. е. решение для игрока 1 будет неоднозначным. Вычислим координаты точек  $P_1(x_1^*, v^0)$ ,  $P_2(x_2^*, v^0)$ . Получим  $x_1^* = 0,25$ ,  $x_2^* = 0,6$ ,  $v^0 = v_1^{(2)} = 5$ , причем стратегия  $j = 2$  игрока 2 активная.

Итак, имеем множество оптимальных стратегий игрока 1:

$$X^0 = (x^0, 1 - x^0), \quad x^0 \in [0,25; 0,6],$$

значение игры  $v(H) = v^0 = 5$ .

3. Рассмотрим задачу для игрока 2. Поскольку активная стратегия игрока 2 — это  $j = 2$ , то  $y_1 = 0$ ,  $y_2 > 0$ ,  $y_3 = 0$ . Тогда оптимальная стратегия  $Y^0 = (0, 1, 0)$ . Проверим это. Имеем

$$\begin{cases} 3y_1 + 5y_2 + 8y_3 \leq v = v^0 = 5, \\ 8y_1 + 5y_2 + 4y_3 \leq v = v^0 = 5, \\ y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0, y_1 + y_2 + y_3 = 1. \end{cases}$$

Подставим в первые два неравенства  $y_3 = 1 - y_1 - y_2$ , получим (с учетом  $y_3 = 1 - y_1 - y_2 \geq 0$ ) систему неравенств

$$\begin{cases} 5y_1 + 3y_2 \geq 3, \\ 4y_1 + y_2 \leq 1, \\ y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, \\ 1 - y_1 - y_2 \geq 0. \end{cases}$$

Единственное решение этой системы —  $y_1^0 = 0, y_2^0 = 1$ .

На рис. 4.3 ему соответствует точка  $M(0, 1)$ .

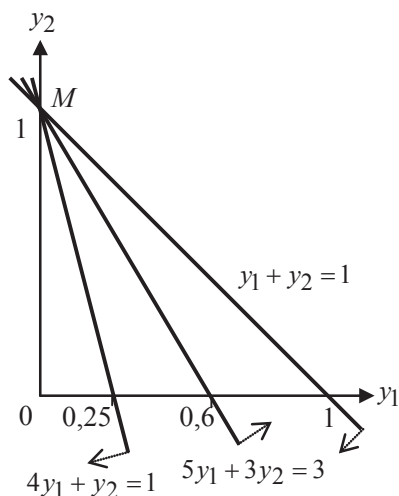


Рис. 4.9. Графическое решение системы неравенств

Таким образом, действительно оптимальная стратегия игрока 2 — это  $Y^0 = (0, 1, 0)$ . Значение игры  $v(H) = 5$ .

### Теоремы о доминировании строк (столбцов) платежной матрицы

Рассмотрим условия, при которых можно понизить размерность платежной матрицы игры и упростить процесс поиска оптимальных стратегий, используя усеченную платежную матрицу.

**Теорема 4.3.** Если для  $k$ -го столбца  $h_{(k)}$  матрицы  $H$  выполняется условие

$$h_{(k)} > \sum_{r=1}^s \lambda_r h_{(j_r)}, \quad \sum_{r=1}^s \lambda_r = 1, \quad \lambda_r > 0, \quad r = 1, 2, \dots, s, \quad (4.25)$$

где  $j_1, j_2, \dots, j_s$  — номера некоторых столбцов (отличных от  $k$ -го) матрицы  $H$ , то этот столбец несущественен (для игрока 2) и при исследовании оптимальных стратегий его можно исключить.

Данное условие означает, что  $k$ -й столбец  $h_{(k)}$  матрицы  $H$  доминируется некоторой выпуклой комбинацией других столбцов (является доминируемой).

**Доказательство.** Пусть  $X^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$  — оптимальная стратегия игрока 1 в матричной игре с матрицей  $H$ , тогда все  $x_i^0 \geq 0$ , но хотя бы одно положительно. Умножим равенство (4.25) на  $X^{0\tau}$ :

$$X^{0\tau} h_{(k)} > X^{0\tau} \sum_{r=1}^s \lambda_r h_{(j_r)} = \sum_{r=1}^s \lambda_r X^{0\tau} h_{(j_r)}. \quad (4.26)$$

Поскольку  $X^{0\tau} h_{(j)} \geq v(H)$  для любых  $j = 1, 2, \dots, n$ , то правая часть (4.26) преобразуется к виду

$$\sum_{r=1}^s \lambda_r X^{0\tau} h_{(j_r)} \geq v(H) \underbrace{\sum_{r=1}^s \lambda_r}_{=1} = v(H).$$



Таким образом, получим  $X^{0T} h_{(k)} > v(H)$ , т. е. при стратегии  $j = k$  игрок 2 проигрывает больше  $v(H)$ , оптимальное значение игры не достигается. Следовательно, этот столбец можно исключить при исследовании на оптимальность.

Аналогичное утверждение можно доказать для игрока 1.

**Теорема 4.4.** Если для  $k$ -й строки  $h^{(k)}$  матрицы  $H$  выполняется условие

$$h^{(k)} < \sum_{r=1}^s \lambda_r h^{(j_r)}, \sum_{r=1}^s \lambda_r = 1, \lambda_r > 0, r = 1, 2, \dots, s, \quad (4.27)$$

где  $j_1, j_2, \dots, j_s$  — номера некоторых строк (отличных от  $k$ -й) матрицы  $H$ , то эта строка несущественна (для игрока 1), и при исследовании оптимальных стратегий ее можно исключить.

Данное условие означает, что  $k$ -я строка  $h^{(k)}$  матрицы  $H$  доминируется некоторой выпуклой комбинацией других строк.

*Замечание.* Из (4.25) следует при  $s = 1$ , что столбец  $h_{(k)}$  матрицы  $H$  (чистая стратегия  $k$  игрока 2) доминируется столбцом  $h_{(r)}$  (чистой стратегией  $r$ ), если  $h_{(k)} > h_{(r)}$ , т. е. выполняются следующие неравенства:

$$h_{ik} > h_{ir} \text{ для } \forall i = 1, 2, \dots, m.$$

Аналогично для игрока 1, из (4.27) следует, что строка  $h^{(k)}$  матрицы  $H$  (чистая стратегия  $k$  игрока 1) доминируется строкой  $h^{(r)}$  (чистой стратегией  $r$ ), если  $h^{(k)} > h^{(r)}$ , т. е. выполняются следующие неравенства

$$h_{kj} > h_{rj} \text{ для } \forall j = 1, 2, \dots, n.$$

Никакая оптимальная стратегия не является доминируемой, поэтому игроки не должны использовать доминируемые стратегии.

**Пример 4.6.** Рассмотрим игру с платежной матрицей

$$H = \begin{pmatrix} 10 & 4 & 8 & 5 \\ 2 & 8 & 6 & 9 \\ 4 & 6 & 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

*Решение.* 1. Данная игра не имеет ситуации равновесия в чистых стратегиях, причем

$$\begin{aligned} v_* = \max_i \min_j h_{ij} = 4 \neq v^* = 8 = \min_j \max_i h_{ij}, \\ 4 \leq v(H) \leq 8. \end{aligned}$$

2. Проверим условия доминирования.

2.1. Найти  $0 < \lambda < 1$ , для которого  $h^{(3)} < \lambda h^{(1)} + (1 - \lambda)h^{(2)}$ , т. е. строка  $h^{(3)}$  доминируется выпуклой комбинацией первых двух строк  $h^{(1)}$  и  $h^{(2)}$ . Последнее неравенство запишем поэлементно:

$$4 < 10\lambda + 2(1 - \lambda), \Rightarrow 2 < 8\lambda \Rightarrow \lambda > 1/4,$$

$$6 < 4\lambda + 8(1 - \lambda), \Rightarrow -2 < -4\lambda \Rightarrow \lambda < 1/2,$$

$$6 < 8\lambda + 6(1 - \lambda), \Rightarrow 0 < 2\lambda \Rightarrow \lambda > 0,$$

$$2 < 5\lambda + 9(1 - \lambda), \Rightarrow -7 < -4\lambda \Rightarrow \lambda < 7/4.$$

Тогда получим  $1/4 < \lambda < 1/2$ . Таким образом, строка  $h^{(3)}$  доминируема, ее можно вычеркнуть, при этом  $x_3^0 = 0$ . Получим новую матрицу

$$H' = \begin{pmatrix} 10 & 4 & 8 & 5 \\ 2 & 8 & 6 & 9 \end{pmatrix}.$$

2.2. В матрице  $H'$  имеем  $h_{(4)} > h_{(2)}$ , т. е.  $h_{(4)}$  — доминируемый столбец, его можно вычеркнуть, при этом  $y_4^0 = 0$ . Получим новую матрицу

$$H'' = \begin{pmatrix} 10 & 4 & 8 \\ 2 & 8 & 6 \end{pmatrix}.$$

2.3. Найти  $0 < \lambda < 1$ , для которого  $h_{(3)} > \lambda h_{(1)} + (1 - \lambda)h_{(2)}$ :

$$\begin{cases} 8 > 10\lambda + 4(1 - \lambda), \Rightarrow 4 > 6\lambda \Rightarrow \lambda < 2/3, \\ 6 > 2\lambda + 8(1 - \lambda), \Rightarrow -2 > -6\lambda \Rightarrow \lambda > 1/3, \end{cases}$$

откуда получим  $1/3 < \lambda < 2/3$ , т.е.  $h_{(3)}$  — доминируемый столбец, его можно вычеркнуть, при этом  $y_3^0 = 0$ . Получим новую матрицу

$$H''' = \begin{pmatrix} 10 & 4 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}.$$

3. Поиск оптимальных смешанных стратегий.

*Задача для игрока 1.* В соответствии с методом имеем

$$v_1^{(1)} = 10x + 2(1 - x) = 8x + 2,$$

$$v_1^{(2)} = 4x + 8(1 - x) = -4x + 8.$$

Из  $v_1^{(1)} = v_1^{(2)}$  получим решение  $x^0 = 1/2$ ,  $v^0 = v_1(x^0) = 6$ .

Итак, имеем оптимальную стратегию игрока 1 (с учетом  $x_3^0 = 0$ ):  $X^0 = (1/2, 1/2, 0)$ . Значение игры  $v(H) = v^0 = 6$ .

*Задача для игрока 2.* В соответствии с методом имеем

$$v_2^{(1)} = 10y + 4(1 - y) = 6y + 4,$$

$$v_2^{(2)} = 2y + 8(1 - y) = -6y + 8.$$

Из  $v_2^{(1)} = v_2^{(2)}$  получим решение  $y^0 = 1/3$ ,  $v^0 = v_2(y^0) = 6$ .

Таким образом, имеем оптимальную стратегию игрока 2 (с учетом  $y_3^0 = 0$ ,  $y_4^0 = 0$ ):  $Y^0 = (1/3, 2/3, 0, 0)$ . Значение игры  $v(H) = v^0 = 6$ .

## Контрольные вопросы и задания

1. Запишите задачи игроков в матричной игре.
2. Определите аналитическое решение матричной игры  $2 \times 2$ .
3. В чем заключается графический метод решения матричной игры  $2 \times 2$ ?
4. Сформулируйте условия доминирования столбцов (строк) платежной матрицы.
5. Какое практическое значение имеет теорема о дополняющей нежесткости (теорема равновесия)?
6. Играют двое. У первого игрока есть монеты достоинством в 2 рубля и 5 рублей. Одну из них (по своему выбору) он зажимает в кулаке, а второй игрок пытается угадать, что это за монета. Если тот угадывает, то получает монету, а если нет, то платит первому игроку  $m$  копеек. Найти наибольшее целое  $m$ , при котором игра выгодна второму игроку.
7. Играют двое. Игрок А записывает одно из двух чисел: 1 или 2. Игрок В — одно из трех чисел: 1, 2 или 3. Каждый игрок независимо друг от друга записывает выбранное число. Если оба числа одинаковой четности, то игрок А выигрывает. Если четность записанных чисел не совпадает, то выигрывает игрок В. Проигравший платит выигравшему сумму этих чисел.  
Составьте платежную матрицу игры. Найдите равновесные стратегии игроков и значение игры.
8. Найдите решение следующих матричных игр:

$$\text{а) } H = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 2 & -3 \\ -3 & 1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } H = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix};$$

$$\text{в) } H = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 & 5 \\ 1 & 2 & 7 & 3 \\ 5 & 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}; \text{ г) } H = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 & -5 \\ -5 & -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

9. Имеют ли матрицы  $A$  и  $B$  седловые точки:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ b & 0 \end{pmatrix}.$$

При каких значениях  $a$  и  $b$  в игре с матрицей  $A + B$  существует вполне смешанное равновесие?

10. Проверьте, являются ли стратегии  $X$ ,  $Y$  оптимальными в игре с матрицей  $H$ :

$$\text{а) } X = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}, H = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\text{б) } X = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/6 \\ 5/6 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}, H = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

---

## 5. Сведение матричной игры к задаче линейного программирования (ЛП)

---

### Эквивалентные задачи ЛП для игроков

---

Пусть рассматривается матричная игра  $m \times n$  с матрицей  $H$ , причем будем считать, что все  $h_{ij} > 0, i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$ . Это всегда можно сделать в силу теоремы об аффинных преобразованиях. Тогда значение игры  $v(H) > 0$ .

Рассмотрим задачу для игрока 2. Среди стратегий  $Q = (q_1, q_2, \dots, q_n) \in S_n$ , удовлетворяющих неравенствам

$$\sum_{j=1}^n h_{ij} q_j \leq v \text{ для } \forall i = 1, 2, \dots, m, \quad (5.1)$$

$$\sum_{j=1}^n q_j = 1, q_j \geq 0 \text{ для } \forall j = 1, 2, \dots, n, \quad (5.2)$$

требуется найти оптимальную стратегию  $Q^0 = (q_1^0, q_2^0, \dots, q_n^0)$ , доставляющую  $\min v$ .

Пусть переменные  $y_j = q_j / v$ , тогда  $q_j = v y_j, j = 1, 2, \dots, n$ . Сделаем замену переменных в (5.1), (5.2):

$$\sum_{j=1}^n h_{ij} q_j = v \sum_{j=1}^n h_{ij} y_j \leq v \Rightarrow \sum_{j=1}^n h_{ij} y_j \leq 1 \text{ для } \forall i = 1, 2, \dots, m;$$

причем для  $v > 0$  имеем  $y_j \geq 0$  для  $\forall j = 1, 2, \dots, n$ ;

$$\sum_{j=1}^n q_j = \sum_{j=1}^n v y_j = 1 \Rightarrow \sum_{j=1}^n y_j = 1/v,$$

при этом вместо  $\min v$  можно рассматривать  $\max (1/v)$ .

Таким образом, имеем следующую эквивалентную задачу для игрока 2.

Среди  $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ , удовлетворяющих неравенствам

$$\sum_{j=1}^n h_{ij} y_j \leq 1 \text{ для } \forall i = 1, 2, \dots, m; \quad (5.3)$$

$$y_j \geq 0 \text{ для } \forall j = 1, 2, \dots, n; \quad (5.4)$$

найти  $Y^0 = (y_1^0, y_2^0, \dots, y_n^0)$ , доставляющих

$$\sum_{j=1}^n y_j \rightarrow \max. \quad (5.5)$$

Это задача *линейного программирования* с целевой функцией (5.5). Если  $Y^0 = (y_1^0, y_2^0, \dots, y_n^0)$  — решение этой задачи, то получим

$$\sum_{j=1}^n y_j^0 = f^0 \Rightarrow v(H) = 1/f^0 = v^0; \quad (5.6)$$

$$q_j^0 = v^0 y_j^0 = y_j^0 / f^0 \text{ для } j = 1, 2, \dots, n, \quad (5.7)$$

где  $Q^0 = (q_1^0, q_2^0, \dots, q_n^0)$  — оптимальная стратегия игрока 2.

Аналогично получим эквивалентную задачу для игрока 1 в виде задачи ЛП.

Среди стратегий  $P = (p_1, p_2, \dots, p_m) \in S_m$ , удовлетворяющих неравенствам

$$\sum_{i=1}^m h_{ij} p_i \geq v \text{ для } \forall j = 1, 2, \dots, n, \quad (5.8)$$

$$\sum_{i=1}^m p_i = 1, p_i \geq 0 \text{ для } \forall i = 1, 2, \dots, m, \quad (5.9)$$

требуется найти оптимальную стратегию  $P^0 = (p_1^0, p_2^0, \dots, p_m^0)$ , доставляющую  $\max v$ .

Пусть переменная  $x_i = p_i / v$ , тогда  $p_i = vx_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ . Сделаем замену переменных в (5.8), (5.9):

$$\sum_{i=1}^m h_{ij} p_i = v \sum_{i=1}^m h_{ij} x_i \geq v \Rightarrow \sum_{i=1}^m h_{ij} x_i \geq 1 \text{ для } \forall j = 1, 2, \dots, n;$$

причем для  $v > 0$  имеем  $x_i \geq 0$  для  $\forall i = 1, 2, \dots, m$ ;

$$\sum_{i=1}^m p_i = v \sum_{i=1}^m x_i = 1 \Rightarrow \sum_{i=1}^m x_i = 1 / v,$$

при этом вместо  $\max v$  можно рассматривать  $\min (1/v)$ .

Таким образом, имеем следующую эквивалентную задачу для игрока 1. Среди  $X = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ , удовлетворяющих неравенствам

$$\sum_{i=1}^m h_{ij} x_i \geq 1 \text{ для } \forall j = 1, 2, \dots, n; \quad (5.10)$$

$$x_i \geq 0 \text{ для } \forall i = 1, 2, \dots, m; \quad (5.11)$$

найти  $X^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ , доставляющих

$$\sum_{i=1}^m x_i \rightarrow \min. \quad (5.12)$$

Если  $X^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$  — решение этой задачи ЛП с целевой функцией (5.12), то получим

$$\sum_{i=1}^m x_i^0 = g^0 \Rightarrow v(H) = 1 / g^0 = v^0; \quad (5.13)$$

$$p_i^0 = v^0 x_i^0 = x_i^0 / g^0 \text{ для } i = 1, 2, \dots, m, \quad (5.14)$$

где  $P^0 = (p_1^0, p_2^0, \dots, p_m^0)$  — оптимальная стратегия игрока 1.



## Общий вид задачи ЛП

Рассматривается задача оптимизации целевой функции  $f(y)$  на допустимом множестве  $S \subset R^n$ , причем функция  $f(y)$  и система ограничений, определяющих множество  $S$ , линейны относительно переменных  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ :

$$f(y_1, y_2, \dots, y_n) = c_0 + c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n \rightarrow \max \quad (5.15)$$

при ограничениях

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1n}y_n \leq b_1, \\ \dots \\ a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + \dots + a_{mn}y_n \leq b_m, \\ y_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n. \end{cases} \quad (5.16)$$

Данную задачу можно записать в *матрично-векторной* форме:

$$\begin{aligned} f(y) &= c_0 + (c, y) \rightarrow \max, \\ y &\in S = \{y \in R^n : Ay \leq b, y \geq 0\}, \end{aligned}$$

где обозначены

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \dots \\ c_n \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Неравенство для векторов  $a \geq b$  означает:

$$a_j \geq b_j \text{ для } \forall j = 1, 2, \dots, n.$$

*Двойственной задачей* к задаче ЛП вида (5.15), (5.16) называется следующая задача:

$$f^*(x_1, x_2, \dots, x_m) = c_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + \dots + b_m x_m \rightarrow \min \quad (5.17)$$

при ограничениях

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \dots + a_{m1}x_m \geq c_1, \\ \dots \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \dots + a_{mn}x_m \geq c_n, \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, m. \end{cases} \quad (5.18)$$

Данную задачу также можно записать в *матрично-векторной* форме, где  $x^T = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ :

$$f^*(x) = c_0 + (b, x) \rightarrow \min, \\ x \in T = \{x \in R^m : A^T x \geq c, x \geq 0\},$$

*Замечание.* Задачи (5.15), (5.16) и (5.17), (5.18) образуют пару взаимно двойственных задач.

*Свойство (принцип двойственности).* Если одна из двойственных задач (5.15), (5.16) или (5.17), (5.18) имеет решение, то и другая задача также имеет решение, и при этом для величин  $f_{\max} = \max_{y \in S} f(y)$  и  $f_{\min}^* = \min_{x \in T} f^*(x)$  справедливо равенство

$$f_{\max} = f_{\min}^*. \quad (5.19)$$

*Замечание.* Задачи игроков (5.3)–(5.5) и (5.10)–(5.12) образуют пару *взаимно двойственных задач*.

Действительно, задачи (5.15), (5.16) и (5.17), (5.18) переходят соответственно в задачи игроков (5.3)–(5.5) и (5.10)–(5.12) при  $c_0 = 0$ ,  $c^T = (1 \dots 1)$ ,  $b^T = (1 \dots 1)$ ,  $A = H$ .

**Пример 5.1.** Найти решение игры с платежной матрицей

$$H = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 3 \\ -4 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

*Решение.* В соответствии с теоремой об аффинных преобразованиях рассмотрим стратегически эквивалентную игру с матрицей

$$\tilde{H} = \begin{pmatrix} 11 & 3 & 8 \\ 1 & 10 & 9 \end{pmatrix},$$

при этом все элементы новой матрицы  $\tilde{H}$  положительны. Тогда значения игр связаны равенством:  $v(\tilde{H}) = v(H) + 5$ .

1. Запишем задачу для игрока 1 в форме задачи ЛП.

*Задача для игрока 1.* Среди чисел  $x_1, x_2$ , удовлетворяющих неравенствам

$$\begin{cases} 11x_1 + x_2 \geq 1, \\ 3x_1 + 10x_2 \geq 1, \\ 8x_1 + 9x_2 \geq 1, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \end{cases}$$

найти такие  $x_1^0, x_2^0$ , доставляющие  $f^* = x_1 + x_2 \rightarrow \min$ .

Решим данную задачу ЛП геометрическим способом. Допустимое множество  $T$ , определяемое системой ограничений

$$T = \{x = (x_1, x_2) \in R^2: \tilde{H}x \geq c, x \geq 0\}, \text{ где } c^T = (1, 1, 1), b^T = (1, 1),$$

представлено на рис. 5.1 заштрихованной многоугольной неограниченной областью. Линии уровня целевой функции  $x_1 + x_2 = \alpha$ ,  $\alpha = \text{const}$ , здесь прямые линии, перпендикулярные вектору-антиградиенту  $-\nabla f^* = (-1, -1)$ . При параллельном смещении линии уровня вдоль направления антиградиента величина  $\alpha$  уменьшается. Тогда значение  $f_{\min}^* = \min_{x \in T} f^*(x)$  достигается в точке  $A(x_1^0, x_2^0)$  — точке пересечения линий

$$\begin{cases} 11x_1 + x_2 = 1, \\ 3x_1 + 10x_2 = 1. \end{cases}$$

Таким образом, координаты точки  $A$  определяют решение данной задачи ЛП:  $x_1^0 = 9/107, x_2^0 = 8/107; f_{\min}^* = 17/107$ .

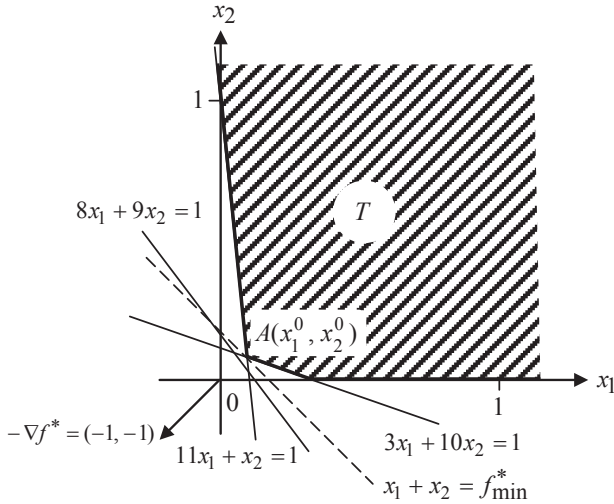


Рис. 5.1. Геометрический способ решения задачи ЛП

Тогда оптимальная стратегия  $P^0 = (p_1^0, p_2^0)$  игрока 1 находится из соотношений:

$$p_i^0 = v^0 x_i^0 = x_i^0 / g^0 \text{ для } i = 1, 2;$$

$$x_1^0 + x_2^0 = g^0 = \frac{9}{107} + \frac{8}{107} = \frac{17}{107} \Rightarrow v(\tilde{H}) = 1/g^0 = v^0 = \frac{107}{17}.$$

Отсюда имеем

$$p_1^0 = \frac{107}{17} \cdot \frac{9}{107} = \frac{9}{17}, p_2^0 = \frac{107}{17} \cdot \frac{8}{107} = \frac{8}{17} \Rightarrow P^0 = (9/17, 8/17).$$

Тогда получим

$$v(H) = v(\tilde{H}) - 5 = \frac{107}{17} - 5 = \frac{22}{107}.$$

2. Запишем двойственную задачу — задачу для игрока 2.

Среди чисел  $y_1, y_2, y_3$ , удовлетворяющих неравенствам

$$\begin{cases} 11y_1 + 3y_2 + 8y_3 \leq 1, \\ y_1 + 10y_2 + 9y_3 \leq 1, \\ y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0, \end{cases}$$

найти такие  $y_1^0, y_2^0, y_3^0$ , доставляющие

$$y_1 + y_2 + y_3 \rightarrow \max.$$

Для решения указанной задачи используем принцип двойственности. Имеем  $f_{\max} = f_{\min}^* = 17/107$ . Тогда получим следующую систему:

$$\begin{cases} y_1 + y_2 + y_3 = 17/107, \Rightarrow y_3 = 17/107 - y_1 - y_2 \geq 0, \\ 11y_1 + 3y_2 + 8(17/107 - y_1 - y_2) \leq 1, \Rightarrow 3y_1 - 5y_2 \leq -29/107, \\ y_1 + 10y_2 + 9(17/107 - y_1 - y_2) \leq 1, \Rightarrow -8y_1 + y_2 \leq -46/107, \\ y_1 \geq 0, y_2 \geq 0. \end{cases}$$

Решим данную систему геометрическим способом (рис. 5.2). Получим единственное решение  $y_1^0 = 7/107, y_2^0 = 10/107, y_3^0 = 0$ , которому соответствует на рис. 5.2 точка  $A(7/107, 10/107)$ .

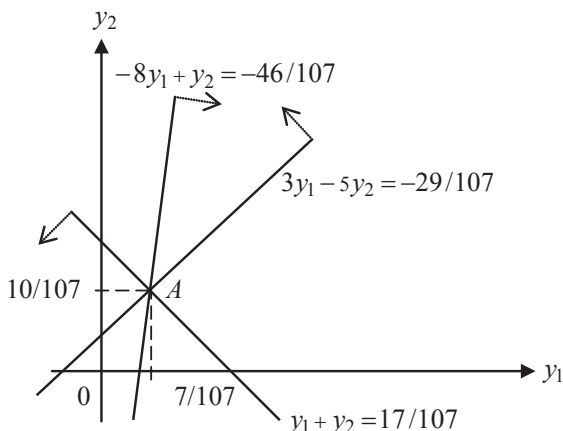


Рис. 5.2. Графическое решение системы неравенств

Оптимальная стратегия  $Q^0 = (q_1^0, q_2^0, q_3^0)$  игрока 2 находится из соотношений:

$$q_j^0 = v^0 y_j^0 = y_j^0 / f^0 \text{ для } j=1, 2, 3,$$

$$y_1^0 + y_2^0 + y_3^0 = f^0 = \frac{7}{107} + \frac{10}{107} + 0 = \frac{17}{107} \Rightarrow v(\tilde{H}) = 1/f^0 = v^0 = \frac{107}{17}.$$

Тогда имеем

$$q_1^0 = \frac{107}{17} \cdot \frac{7}{107} = \frac{7}{17}, q_2^0 = \frac{10}{17}, q_3^0 = 0 \Rightarrow Q^0 = (7/17, 10/17, 0).$$

### Правила работы с симплекс-таблицей

---

Алгоритм получения оптимального решения в задаче ЛП (в канонической форме) представлен в *симплекс-методе* и реализуется с помощью симплекс-таблиц. Рассмотрим последовательность операций (действий), выполняемых в рамках данного метода.

1. Привести задачу ЛП к *канонической* форме:

$$f(x) = (c, x) \rightarrow \min$$

$$x \in X = \{x \in R^n: Ax = b, x \geq 0\},$$

или в развернутом виде

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n \rightarrow \min$$

при ограничениях

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m, \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n. \end{cases} \quad (5.20)$$

### 2.1. Проверить совместность системы (5.20).

2.3. Выбрать свободные переменные (пронумеруем их следующим образом):  $x_1, x_2, \dots, x_k$ .

2.4. Выразить базисные переменные  $x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n$  через свободные (записав в указанной форме):

[illegible]

2.5. Выразить целевую функцию  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  через свободные переменные (записав в указанной форме):

$$f = \gamma_0 - (\gamma_1 x_1 + \dots + \gamma_k x_k). \quad (5.22)$$

2.6. Проверить допустимость базисного решения:

$$x_1 = x_2 = \dots = x_k = 0, x_{k+1} = \beta_1, x_{k+2} = \beta_2, \dots, x_n = \beta_r.$$

3. Заполнить начальную симплекс-таблицу (табл. 1), взяв соответствующие коэффициенты в (5.21), (5.22).

*Таблица 1*

### Симплекс-таблица. Шаг 1

Таблица 1-го шага			Свободные переменные				
			$x_1$	...	$x_s$	...	$x_k$
	$f$	$\gamma_0$	$\gamma_1$	...	$\gamma_s$	...	$\gamma_k$
Базисные переменные	$x_{k+1}$	$\beta_1$	$\alpha_{11}$	...	$\alpha_{1s}$	...	$\alpha_{1k}$
	...	...	...	...	...	...	...
	$x_{k+j}$	$\beta_j$	$\alpha_{j1}$	...	$\alpha_{js}$	...	$\alpha_{jk}$
	...	...	...	...	...	...	...
	$x_r$	$\beta_r$	$\alpha_{r1}$	...	$\alpha_{rs}$	...	$\alpha_{rk}$

4. Выбрать генеральный (ведущий) элемент  $\alpha_{js}$ .

4.1. Найти в строке коэффициентов  $\gamma_i$  какой-либо положительный коэффициент (кроме  $\gamma_0$ ). Пусть это  $\gamma_s > 0$ . Тогда столбец с переменной  $x_s$  — *ведущий*.

4.2. Если все  $\gamma_i \leq 0$ , то указанное в таблице базисное решение — *оптимальное*; причем  $f_{\min} = \gamma_0$ . Таким образом, процесс получения оптимального решения закончен.

4.3. Составить отношения  $\beta_i/\alpha_{is}$  для тех  $i$ -х строк, для которых  $\alpha_{is} > 0$  (при этом  $\alpha_{is}$  берутся из ведущего столбца).

4.4. Выбрать среди этих отношений  $\beta_j/\alpha_{js} \rightarrow \min$ .

Тогда строка с наименьшим отношением — *ведущая*. Элемент, стоящий на пересечении ведущих строки и столбца, — *генеральный (ведущий)*. Пусть это есть  $\alpha_{js}$ .

5. Перейти к следующей симплекс-таблице.

5.1. В текущей таблице найти величину  $\lambda = 1/\alpha_{js}$  и внести ее в нижнюю часть ячейки с элементом  $\alpha_{js}$ .

5.2. Умножить на  $\lambda$  все элементы ведущей строки (кроме  $\alpha_{js}$ ) и внести полученные произведения в нижние части соответствующих ячеек этой строки.

5.3. Умножить на  $-\lambda$  все элементы ведущего столбца (кроме  $\alpha_{js}$ ) и внести полученные произведения в нижние части соответствующих ячеек этого столбца.

5.4. В остальных ячейках в нижние части внести произведение коэффициента из верхней части соответствующей ячейки ведущей строки и записанного значения из нижней части соответствующей ячейки ведущего столбца. В следующей таблице (табл. 2) представлена полностью заполненная симплекс-таблица 1-го шага.

5.5. Составить макет новой таблицы — таблицы 2-го шага (табл. 3). В этой таблице по генеральному элементу  $\alpha_{js}$  выполнить *замещение* свободной переменной  $x_s$ , переместив ее в базисные, на переменную  $x_{k+j}$ , переместив ее в свободные.



Таблица 2

## Заполненная симплекс-таблица. Шаг 1

Таблица 1-го шага			Свободные переменные				
			$x_1$	...	$x_s$	...	$x_k$
	$f$	$\gamma_0 - \lambda\beta_j\gamma_s$	$\gamma_1 - \lambda\alpha_{j1}\gamma_s$	...	$\gamma_s - \lambda\gamma_s$	...	$\gamma_k - \lambda\alpha_{jk}\gamma_s$
Базисные переменные	$x_{k+1}$	$\beta_1 - \lambda\beta_j\alpha_{1s}$	$\alpha_{11} - \lambda\alpha_{j1}\alpha_{1s}$	...	$\alpha_{1s} - \lambda\alpha_{js}$	...	$\alpha_{1k} - \lambda\alpha_{jk}\alpha_{1s}$
	...	...	...	...	...	...	...
	$x_{k+j}$	$\beta_j$ $\lambda\beta_j$	$\alpha_{j1}$ $\lambda\alpha_{j1}$	...	$\alpha_{js}$ $\lambda$	...	$\alpha_{jk}$ $\lambda\alpha_{jk}$
	...	...	...	...	...	...	...
	$x_n$	$\beta_r - \lambda\beta_j\alpha_{rs}$	$\alpha_{r1} - \lambda\alpha_{j1}\alpha_{rs}$	...	$\alpha_{rs} - \lambda\alpha_{js}$	...	$\alpha_{rk} - \lambda\alpha_{jk}\alpha_{rs}$

Таблица 3

## Симплекс-таблица. Шаг 2

Таблица 2-го шага			Свободные переменные				
			$x_1$	...	$x_{k+j}$	...	$x_k$
	$f$	$\gamma_0 - \beta_j\gamma_s$	$\gamma_1 - \lambda\alpha_{j1}\gamma_s$	...	$-\lambda\gamma_s$	...	$\gamma_k - \lambda\alpha_{jk}\gamma_s$
Базисные переменные	$x_{k+1}$	$\beta_1 - \lambda\beta_j\alpha_{1s}$	$\alpha_{11} - \lambda\alpha_{j1}\alpha_{1s}$	...	$-\lambda\alpha_{1s}$	...	$\alpha_{1k} - \lambda\alpha_{jk}\alpha_{1s}$
	...	...	...	...	...	...	...
	$x_s$	$\lambda\beta_j$	$\lambda\alpha_{j1}$	...	$\lambda$	...	$\lambda\alpha_{jk}$
	...	...	...	...	...	...	...
	$x_n$	$\beta_r - \lambda\beta_j\alpha_{rs}$	$\alpha_{r1} - \lambda\alpha_{j1}\alpha_{rs}$	...	$-\lambda\alpha_{rs}$	...	$\alpha_{rk} - \lambda\alpha_{jk}\alpha_{rs}$

5.6. Заполнить в новой таблице верхние части  $j$ -й строки, поместив в них нижние части соответствующих ячеек  $j$ -й строки прежней таблицы.

5.7. Заполнить в новой таблице верхние части  $s$ -го столбца, поместив в них нижние части соответствующих ячеек  $s$ -го столбца прежней таблицы.

5.8. Заполнить верхние части остальных ячеек новой таблицы, поместив в них число, равное сумме чисел из верхней и нижней частей ячеек прежней таблицы.

6. Переход к пункту 4.

**Пример 5.2.** Найти решение задачи для игрока 2, представленной в форме задачи линейного программирования, в матричной игре из примера 5.1.

**Решение.** Эквивалентная задача ЛП для игрока 2 имеет следующий вид: среди чисел  $y_1, y_2, y_3$ , удовлетворяющих неравенствам

$$\begin{cases} 11y_1 + 3y_2 + 8y_3 \leq 1, \\ y_1 + 10y_2 + 9y_3 \leq 1, \\ y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0, \end{cases}$$

найти такие  $y_1^0, y_2^0, y_3^0$ , доставляющие

$$f = y_1 + y_2 + y_3 \rightarrow \max.$$

1. Приведем задачу ЛП к *канонической* форме. Обозначим новую целевую функцию как  $F = -f$ . Тогда получим:

$$F = -y_1 - y_2 - y_3 \rightarrow \min.$$

Заменим ограничения-неравенства на равенства, вводя дополнительно новые переменные  $y_4 \geq 0, y_5 \geq 0$ :

$$\begin{cases} 11y_1 + 3y_2 + 8y_3 + y_4 = 1, \\ y_1 + 10y_2 + 9y_3 + y_5 = 1, \\ y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0, y_4 \geq 0, y_5 \geq 0. \end{cases} \quad (5.23)$$

2. Найдем начальное допустимое базисное решение.

2.1. Система (5.23) совместна;  $r = \text{rank}(A) = 2$ .

2.2. Число свободных переменных  $k = n - r = 5 - 2 = 3$ .

2.3. Базисные переменные:  $y_4, y_5$ . Свободные переменные:  $y_1, y_2, y_3$ .

2.4. Выразим базисные переменные через свободные:

$$\begin{aligned} y_4 &= 1 - (11y_1 + 3y_2 + 8y_3), \\ y_5 &= 1 - (y_1 + 10y_2 + 9y_3). \end{aligned} \quad (5.24)$$

2.5. Целевая функция уже выражена через свободные переменные:

$$F = -(y_1 + y_2 + y_3) \quad (5.25)$$

2.6. Базисное решение допустимое:

$$y_1 = y_2 = y_3 = 0, y_4 = y_5 = 1.$$

3. Заполним начальную симплекс-таблицу — табл. 4, взяв соответствующие коэффициенты в (5.24), (5.25).

Таблица 4

Симплекс-таблица. Шаг 1

Таблица 1-го шага		$y_1$	$y_2$	$y_3$
$F$	0	1	1	1
$y_4$	1	11	3	8
$y_5$	1	1	10	9

4. Определим генеральный (ведущий) элемент.

4.1. Найдем в строке коэффициентов  $\gamma_i > 0$ . В данном случае  $\gamma_1 = 1$ . Тогда столбец с переменной  $y_1$  — *ведущий*.

4.3. Составим отношения  $\beta_i/\alpha_{is}$  для ведущего столбца (указаны справа от таблицы).

4.4. Выберем среди этих отношений *наименьшее* — это 1/11. Тогда строка с переменной  $y_4$  — *ведущая*.

На пересечении этих столбца и строки — *генеральный элемент*, это 11.

5.1. Тогда величину  $\lambda = 1/11$  внесем в нижнюю часть ячейки с генеральным элементом.

5.2. Умножим на  $\lambda$  элементы ведущей строки и внесем полученные произведения в нижние части ячеек этой строки.

5.3. Умножим на  $-\lambda$  все элементы ведущего столбца и внесем полученные произведения в нижние части ячеек этого столбца.

5.4. В остальных ячейках в нижние части внесем соответствующие произведения  $-\lambda\alpha_{jk}\alpha_{rs}$ . Полностью заполненная симплекс-таблица 1-го шага представлена табл. 5.

Таблица 5

Заполненная симплекс-таблица. Шаг 1

Таблица 1-го шага		$y_1$	$y_2$	$y_3$	$\beta_i/\alpha_{is}$
$F$	0	1	1	1	
	$-1/11$	$-1/11$	$-3/11$	$-8/11$	
$y_4$	1	11	3	8	1/11
	$1/11$	$1/11$	$3/11$	$8/11$	
$y_5$	1	1	10	9	1
	$-1/11$	$-1/11$	$-3/11$	$-8/11$	

5.5. Составим новую симплекс-таблицу — табл. 6. Теперь базисные переменные —  $y_1, y_5$ ; свободные переменные —  $y_4, y_2, y_3$ .

Таблица 6

Заполненная симплекс-таблица. Шаг 2

Таблица 2-го шага		$y_4$	$y_2$	$y_3$	$\beta_i/\alpha_{is}$
$F$	$-1/11$	$-1/11$	$8/11$	$3/11$	
	$-\frac{80}{11 \cdot 107}$	$\frac{8}{11 \cdot 107}$	$-\frac{8}{107}$	$-\frac{8 \cdot 91}{11 \cdot 107}$	
$y_1$	$1/11$	$1/11$	$3/11$	$8/11$	1/3
	$-\frac{30}{11 \cdot 107}$	$\frac{3}{11 \cdot 107}$	$-\frac{3}{107}$	$-\frac{3 \cdot 91}{11 \cdot 107}$	
$y_5$	10/11	$-1/11$	107/11	91/11	10/107
	$\frac{10}{107}$	$-\frac{1}{107}$	$\frac{11}{107}$	$\frac{91}{107}$	

6. В соответствии с алгоритмом симплекс-метода находим генеральный элемент — это 107/11 (на пересечении столбца с  $y_2$  и строки с  $y_5$ ).

Далее переходим к табл. 7. Теперь базисные переменные  $y_1, y_2$ ; свободные переменные  $y_4, y_5, y_3$ .

Поскольку все  $\gamma_i \leq 0$ , то указанное в табл. 7 базисное решение  $y_1 = 7/107, y_2 = 10/107$  — оптимальное;  $F_{\min} = -17/107$ ;  $y_3 = y_4 = y_5 = 0$ . Таким образом, процесс закончен.

Итак, получаем решение задачи ЛП для игрока 2:

$$Y^0 = (y_1^0, y_2^0, y_3^0) = (7/107, 10/107, 0), \quad f_{\max} = -F_{\min} = -17/107.$$

Таблица 7

Итоговая таблица

Таблица 3-го шага		$y_4$	$y_5$	$y_3$
$F$	$-17/107$	$-9/107$	$-8/107$	$-37/107$
$y_1$	$7/107$	$10/107$	$-3/107$	$53/107$
$y_2$	$10/107$	$-1/107$	$11/107$	$91/107$

### Контрольные вопросы и задания

---

1. Запишите эквивалентные задачи для игроков в форме задач линейного программирования.

2. Решите игру двух игроков с платежной матрицей  $H$  методами линейного программирования:

$$\text{а) } H = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 & 5 \\ 1 & 2 & 7 & 3 \\ 5 & 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } H = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ -2 & 6 & -1 \end{pmatrix};$$

$$\text{в) } H = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}; \quad \text{г) } H = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix};$$

$$\text{д) } H = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{е) } H = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

## 6. Биматричные игры

### Определение биматричной игры

Бескоалиционная конечная игра двух игроков, т. е. игра парная, с конечным числом стратегий у каждого игрока называется *биматричной*. Формализованное описание биматричной игры  $\Gamma$  определяется следующим образом:  $\Gamma = \{I, S, H\}$ , где  $I = \{1, 2\}$  — множество игроков;  $S = S_1 \times S_2$  — множество ситуаций, причем  $S_1 = \{s_1^{(1)}, s_1^{(2)}, \dots, s_1^{(m)}\}$ ,  $S_2 = \{s_2^{(1)}, s_2^{(2)}, \dots, s_2^{(n)}\}$  — множества стратегий игрока 1 и 2 соответственно; функция выигрышей игроков  $H = (H_1, H_2): S \rightarrow R^2$ ,  $H_1(s_{ij}) = a_{ij}$ ,  $H_2(s_{ij}) = b_{ij}$  — функции выигрышей игрока 1 и 2 соответственно,  $i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$ ;  $s_{ij} = (s_1^{(i)}, s_2^{(j)})$  — ситуация, образованная стратегией  $s_1^{(i)}$  игрока 1 и стратегией  $s_2^{(j)}$  игрока 2.

Выигрыши игроков можно задать матрицей выигрышей (или платежной матрицей) следующего вида:

$$\begin{matrix} & s_2^{(1)} & \dots & s_2^{(n)} \\ \begin{matrix} s_1^{(1)} \\ \vdots \\ s_1^{(m)} \end{matrix} & \begin{pmatrix} (a_{11}, b_{11}) & \dots & (a_{1n}, b_{1n}) \\ \dots & \dots & \dots \\ (a_{m1}, b_{m1}) & \dots & (a_{mn}, b_{mn}) \end{pmatrix} \end{matrix},$$

здесь против каждой строки (каждого столбца) указана соответствующая стратегия игрока 1 (игрока 2).

Выигрыши каждого игрока также можно задать отдельно соответствующими *платежными* матрицами:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}.$$

**Определение.** Ситуация  $(s_1^{(i*)}, s_2^{(j*)})$  называется *ситуацией равновесия по Нэшу* в биматричной игре  $\Gamma$ , если выполняются неравенства:

$$a_{ij*} \leq a_{i*j*} \text{ для любых } i = 1, 2, \dots, m,$$

$$b_{i*j*} \leq b_{i*j*} \text{ для любых } j = 1, 2, \dots, n.$$

## Смешанное расширение биматричных игр

---

Пусть определена биматричная игра  $\Gamma$  с платежными матрицами игроков  $A$  и  $B$ . Исходно заданные возможные стратегии игроков называются *чистыми* стратегиями. Если игра повторяется многократно, то чистые стратегии можно выбирать с некоторыми вероятностями. Тогда можно определить средний выигрыш (на одну игру) для каждого из игроков.

**Определение.** Пусть  $s_1^{(1)}, s_1^{(2)}, \dots, s_1^{(m)}$  — множество чистых стратегий игрока 1. *Смешанная стратегия*  $\sigma_1$  игрока 1 определяется набором вероятностей  $x_1, x_2, \dots, x_m$ , где с вероятностью  $x_k$  применяется стратегия  $s_1^{(k)}$ , причем  $\sum_{k=1}^m x_k = 1, 0 \leq x_k \leq 1, k = 1, 2, \dots, m$ .

Аналогично, если  $s_2^{(1)}, s_2^{(2)}, \dots, s_2^{(n)}$  — множество чистых стратегий игрока 2, то *смешанная стратегия*  $\sigma_2$  игрока 2 определяется набором вероятностей  $y_1, y_2, \dots, y_n$ , где с вероятностью  $y_k$  применяется стратегия  $s_2^{(k)}$ , причем  $\sum_{k=1}^n y_k = 1, 0 \leq y_k \leq 1, k = 1, 2, \dots, n$ .

Задание смешанных стратегий осуществляется перед началом каждой игры и не меняется до ее конца. Каждая чистая стратегия игрока  $i$  может рассматриваться как его смешанная стратегия, в которой эта чистая стратегия выбирается с вероятностью 1, а все остальные — с вероятностью 0.

Каждый игрок задает свою смешанную стратегию *независимо* друг от друга. Обозначим  $\bar{S}_i = \{\sigma_i\}$  — множество всех смешанных стратегий  $i$ -го игрока,  $i = 1, 2$ . Множества смешанных стратегий игроков — это  $(m - 1)$ -мерный симплекс для игрока 1 и  $(n - 1)$ -мерный симплекс для игрока 2.

Если обозначить  $\xi_1, \xi_2$  — случайные величины, определяющие выигрыши соответственно игроков 1 и 2 в одной партии, то средние ожидаемые выигрыши игроков (т. е. их выигрыши в среднем на одну партию игры при многократном повторении игры) равны соответственно математическим ожиданиям  $M\xi_1, M\xi_2$ .

**Определение.** Набор  $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2)$  смешанных стратегий игроков в игре  $\Gamma$  называется *ситуацией в смешанных стратегиях* в этой игре.

В условиях ситуации  $\sigma$  в смешанных стратегиях каждая ситуация  $s_{ij} = (s_1^{(i)}, s_2^{(j)})$  в чистых стратегиях реализуется с вероятностью  $p_{ij} = x_i \cdot y_j$ , т. е. игрок 1 получает выигрыш  $H_1(s_{ij}) = a_{ij}$ , а игрок 2 — выигрыш  $H_2(s_{ij}) = b_{ij}$  с этой вероятностью  $p_{ij} = x_i \cdot y_j$ , следовательно, математические ожидания их выигрышей равны

$$M\xi_1 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_i a_{ij} y_j = x^T A y, \quad M\xi_2 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_i b_{ij} y_j = x^T B y,$$

где обозначены:  $x^T = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ ,  $y^T = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ .

**Определение.** Смешанным расширением игры  $\Gamma = \{I, S, H\}$  называется игра  $\bar{\Gamma} = \{I, \bar{S}, \bar{H}\}$ , где

$$\bar{S} = \bar{S}_1 \times \bar{S}_2 = \{\sigma = (\sigma_1, \sigma_2) \mid \sigma_1 \in \bar{S}_1, \sigma_2 \in \bar{S}_2\},$$



$$\bar{H} = (\bar{H}_1, \bar{H}_2) : \bar{S} \rightarrow R^2,$$

причем  $\bar{H}(\sigma) = (\bar{H}_1(\sigma), \bar{H}_2(\sigma))$ ,  $\sigma \in \bar{S}$ ,  $\bar{H}_1(\sigma) \equiv M\xi_1$ ,  $\bar{H}_2(\sigma) \equiv M\xi_2$ .

**Определение.** Ситуация равновесия смешанного расширения  $\bar{\Gamma} = \{I, \bar{S}, \bar{H}\}$  игры  $\Gamma = \{I, S, H\}$  называется *ситуацией равновесия игры  $\Gamma$  в смешанных стратегиях*, т. е. ситуация  $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2)$  в смешанных стратегиях игроков в игре  $\Gamma$  называется *ситуацией равновесия*, если для каждого  $i \in I$  выполняется

$$\bar{H}_i(\sigma|_{\sigma'_i}) \leq \bar{H}_i(\sigma) \text{ для любых } \sigma'_i \in \bar{S}_i.$$

**Определение.** *Равновесной стратегией* игрока в бескоалиционной игре называется такая его стратегия, которая входит хотя бы в одну из равновесных ситуаций игры.

**Теорема 6.1 (Нэш).** В каждой бескоалиционной игре  $\Gamma = \{I, S, H\}$  существует хотя бы одна ситуация равновесия в смешанных стратегиях.

### Условия равновесия (в смешанных стратегиях) в биматричной игре 2x2

---

В этом случае каждый игрок имеет по две чистых стратегии. Платежные матрицы игроков имеют вид

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}.$$

Пусть  $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2)$  — ситуация в смешанных стратегиях в этой игре, где смешанные стратегии игроков определяются векторами

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, x_i \geq 0, x_1 + x_2 = 1; y_j \geq 0, y_1 + y_2 = 1. \quad (6.1)$$

Если положить  $x_1 = p$ ,  $y_1 = q$ , где  $0 \leq p \leq 1$ ,  $0 \leq q \leq 1$ , то  $x_2 = 1 - p$ ,  $y_2 = 1 - q$ . Тогда получим смешанные стратегии игроков в следующем виде:  $\sigma_1 = (p, 1 - p)$  — смешанная стратегия игрока 1,  $\sigma_2 = (q, 1 - q)$  — смешанная стратегия игрока 2.

В соответствии с определением смешанного расширения игры выигрыши игроков определяются следующим образом:

$$\bar{H}_1(\sigma) \equiv M\xi_1, \quad \bar{H}_2(\sigma) \equiv M\xi_2,$$

причем для игры  $2 \times 2$  имеем

$$M\xi_1 = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 x_i a_{ij} y_j = x^T A y = (p, 1 - p) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ 1 - q \end{pmatrix},$$

$$M\xi_2 = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 x_i b_{ij} y_j = x^T B y = (p, 1 - p) \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ 1 - q \end{pmatrix}.$$

После необходимых вычислений получим:

$$\begin{aligned} M\xi_1 &= (a_{12} - a_{22})p + (a_{21} - a_{22})q + \\ &+ (a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22})pq + a_{22}, \end{aligned} \quad (6.2)$$

$$\begin{aligned} M\xi_2 &= (b_{12} - b_{22})p + (b_{21} - b_{22})q + \\ &+ (b_{11} - b_{12} - b_{21} + b_{22})pq + b_{22}. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Запишем условия равновесия (по Нэшу). Обозначим *равновесные* смешанные стратегии игроков

$$\sigma_1^0 = x^0 = \begin{pmatrix} p^0 \\ 1 - p^0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2^0 = y^0 = \begin{pmatrix} q^0 \\ 1 - q^0 \end{pmatrix}.$$

Тогда пара стратегий  $\sigma^0 = (\sigma_1^0, \sigma_2^0) = (x^0, y^0)$  определяет ситуацию равновесия, если выполняются неравенства:

$$\begin{cases} M\xi_1|_{x^0, y^0} \geq M\xi_1|_{x, y^0}, \\ M\xi_2|_{x^0, y^0} \geq M\xi_2|_{x^0, y}, \end{cases}$$

для любых допустимых  $x, y$  вида (6.1).

Данную систему запишем следующим образом:

$$\begin{cases} (x^0)^T Ay^0 \geq x^T Ay^0 \text{ для } \forall 0 \leq p \leq 1, \\ (x^0)^T By^0 \geq (x^0)^T By \text{ для } \forall 0 \leq q \leq 1. \end{cases}$$

Отсюда, с учетом (6.2), (6.3), получим следующие выражения, определяющие равновесные смешанные стратегии:

$$\begin{aligned} (p^0 - p)((a_{12} - a_{22}) + q^0(a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22})) &\geq 0 \\ (q^0 - q)((b_{21} - b_{22}) + p^0(b_{11} - b_{12} - b_{21} + b_{22})) &\geq 0 \end{aligned} \quad (6.4)$$

для  $\forall p \in [0, 1], q \in [0, 1]$ .

**Пример 6.1.** Найти ситуации равновесия в биматричной игре  $2 \times 2$  с матрицей выигрышей

$$\begin{aligned} s_2^{(1)} &= +1 & s_2^{(2)} &= -1 \\ s_1^{(1)} &= +1 & \begin{pmatrix} (5, 5) & (2, 8) \\ (8, 2) & (0, 0) \end{pmatrix} \\ s_1^{(2)} &= -1 \end{aligned}$$

**Решение.** 1. Ситуации  $s_{21} = (-1, +1)$  и  $s_{12} = (+1, -1)$  — ситуации равновесия по Нэшу (в чистых стратегиях) в этой игре.

2. Перейдем к смешанным стратегиям игроков:  $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2)$  — ситуация в смешанных стратегиях в этой игре, где смешанные стратегии игроков определяются соответственно

$$\sigma_1 = (p, 1 - p), \sigma_2 = (q, 1 - q).$$

В данной игре платежные матрицы игроков:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда средние выигрыши игроков (6.2) (6.3) имеют вид:

$$M\xi_1 = 8q + 2p - 5pq, M\xi_2 = 8p + 2q - 5pq.$$

В данном примере имеем

$$x^T Ay = (p, 1-p) \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 8 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ 1-q \end{pmatrix} = 8q + 2p - 5pq;$$

$$x^T By = (p, 1-p) \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ 1-q \end{pmatrix} = 8p + 2q - 5pq.$$

3. Запишем условия равновесия, используя систему (6.4):

$$\begin{cases} (p^0 - p)(2 - 5q^0) \geq 0 \text{ для } \forall p \in [0, 1], \\ (q^0 - q)(2 - 5p^0) \geq 0 \text{ для } \forall q \in [0, 1]. \end{cases}$$

Рассмотрим решение данной системы.

$$3.1. \begin{cases} (2 - 5q^0) = 0, \Rightarrow q^0 = 2/5, \\ (2 - 5p^0) = 0, \Rightarrow p^0 = 2/5, \end{cases}$$

т. е. имеем пару равновесных стратегий

$$x^0 = \begin{pmatrix} p^0 \\ 1 - p^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/5 \\ 3/5 \end{pmatrix}, y^0 = \begin{pmatrix} q^0 \\ 1 - q^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/5 \\ 3/5 \end{pmatrix}.$$

$$3.2. \begin{cases} 2 - 5q^0 > 0 \Rightarrow 0 \leq q^0 < 2/5, \\ p^0 - p \geq 0 \text{ для } \forall p \in [0, 1] \Rightarrow p^0 = 1, \\ 2 - 5p^0 < 0 \text{ при } p^0 = 1, \\ q^0 - q \leq 0 \text{ для } \forall q \in [0, 1] \Rightarrow q^0 = 0, \end{cases}$$

т. е. имеем следующую пару равновесных стратегий

$$(x^0)^T = (p^0, 1 - p^0) = (1, 0), (y^0)^T = (q^0, 1 - q^0) = (0, 1).$$

$$3.3. \begin{cases} 2 - 5q^0 < 0 \Rightarrow 2/5 < q^0 \leq 1, \\ p^0 - p \leq 0 \text{ для } \forall p \in [0, 1] \Rightarrow p^0 = 0, \\ 2 - 5p^0 > 0 \text{ при } p^0 = 0, \\ q^0 - q \geq 0 \text{ для } \forall q \in [0, 1] \Rightarrow q^0 = 1, \end{cases}$$

т. е. имеем следующую пару равновесных стратегий

$$(x^0)^T = (p^0, 1 - p^0) = (0, 1), (y^0)^T = (q^0, 1 - q^0) = (1, 0).$$

4. Полученные пары стратегий  $\sigma^0 = (\sigma_1^0 = (1, 0), \sigma_2^0 = (0, 1))$  и  $\sigma^0 = (\sigma_1^0 = (0, 1), \sigma_2^0 = (1, 0))$  представляют ситуации равновесия  $s_{21}$  и  $s_{12}$  (в чистых стратегиях), доставляют выигрыши (2, 8) и (8, 2) соответственно.

Пара стратегий  $\sigma_2^0 = (2/5, 3/5)$  доставляет средние выигрыши  $M\xi_1 = 3,2; M\xi_2 = 3,2$ .

5. Ситуация равновесия (в бескоалиционной игре) не всегда выгодна обоим игрокам одновременно. В данной игре ситуация равновесия  $s_{21} = (-1, +1)$  выгодна игроку 1, а ситуация  $s_{12}$  — игроку 2. Если игрок 2, например, придерживается своей смешанной равновесной стратегии  $\sigma_2^0 = (2/5, 3/5)$ , а игрок 1 выбирает некоторую стратегию  $\sigma_1 = (p, 1 - p)$ , то получим

$$M\xi_1|_{p,q=2/5} = 8q + 2p - 5pq|_{p,q=2/5} = 3,2;$$

$$M\xi_2|_{p,q=2/5} = 8p + 2q - 5pq|_{p,q=2/5} = 6p + 0,8,$$

т. е. игрок 1 может уменьшить выигрыш игрока 2, не уменьшая свой выигрыш. Поэтому равновесную стратегию игрока не следует трактовать как его оптимальную стратегию. Такая трактовка имеет смысл только для набора стратегий игроков, т. е. для ситуаций.

### Поиск ситуаций равновесия в биматричных играх

**Определение.** Носителем (или спектром) смешанной стратегии  $\sigma_i \in \tilde{S}_i$  игрока  $i$  называется множество его чистых стратегий, которые используются в ней с положительной вероятностью:

$$\text{supp}(\sigma_i) = \{s_i^{(k)} \in S_i \mid x_k > 0\},$$

где  $x_k = P(s_i^{(k)})$  — вероятность применения стратегии  $s_i^{(k)}$ .

Обозначим  $\bar{H}_i(s'_i, \sigma_{-i}) \equiv \bar{H}_i(\sigma|_{s'_i})$ , т. е. для  $s'_1 \in S_1, s'_2 \in S_2$ ,

$$\bar{H}_1(s'_1, \sigma_{-i}) \equiv \bar{H}_1(\sigma|_{s'_1}) \equiv \bar{H}_1(s'_1, \sigma_2),$$

$$\bar{H}_2(s'_2, \sigma_{-i}) \equiv \bar{H}_2(\sigma|_{s'_2}) \equiv \bar{H}_2(\sigma_1, s'_2).$$

**Теорема 6.2.** Ситуация  $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2)$  является равновесием по Нэшу в смешанных стратегиях в игре  $\Gamma = \{I, S, H\}$  тогда и только тогда, когда для любого игрока  $i = 1, 2$  выполняются условия

$$\bar{H}_i(s'_i, \sigma_{-i}) = \bar{H}_i(s''_i, \sigma_{-i}) = \bar{H}_i(\sigma) \quad (6.5)$$

для  $\forall s'_i, s''_i \in \text{supp}(\sigma_i)$ ;

$$\bar{H}_i(s'_i, \sigma_{-i}) \geq \bar{H}_i(s_i, \sigma_{-i}) \quad (6.6)$$

для  $\forall s'_i \in \text{supp}(\sigma_i), s_i \notin \text{supp}(\sigma_i)$ .

*Доказательство. Необходимость.* Пусть ситуация  $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2)$  является равновесием по Нэшу в смешанных стратегиях в игре  $\Gamma$ . Тогда по определению имеем  $\bar{H}_i(\sigma) \geq \bar{H}_i(s'_i, \sigma_{-i})$  для любых  $s'_i \in S_i$ , в том числе для  $s'_i \in \text{supp}(\sigma_i)$ , т. е. условие (6.6) выполняется.

Предположим, что условие (6.5) нарушается, т. е. существует  $s'_i \in \text{supp}(\sigma_i)$ , такое, что  $\bar{H}_i(s'_i, \sigma_{-i}) < \bar{H}_i(\sigma)$ . Пусть для определенности  $i = 1$  (игрок 1). Тогда  $s'_1 \in \text{supp}(\sigma_1)$ , причем вероятность  $p' = P(s'_1) > 0$ ,

$$\bar{H}_1(s'_1, \sigma_2) < \bar{H}_1(\sigma), \quad (6.7)$$

для остальных  $s_1 \in S_1$  имеем

$$\bar{H}_1(s_1, \sigma_2) \leq \bar{H}_1(\sigma). \quad (6.8)$$

Умножим (6.7) на  $p' > 0$ :

$$p' \bar{H}_1(s'_1, \sigma_2) < p' \bar{H}_1(\sigma). \quad (6.9)$$

Умножим (6.8) на  $p_k = P(s_1^{(k)}) \geq 0$  для  $s_1 = s_1^{(k)} \in S_1, s_1 \neq s'_1$ ,

$$p_k \bar{H}_1(s_1, \sigma_2) \leq p_k \bar{H}_1(\sigma), \quad (6.10)$$

причем  $\sum_{\{k: s_1^{(k)} \neq s'_1\}} p_k + p' = 1$ .

Просуммируем (6.10) по  $k$ :

$$\sum_{\{k: s_1^{(k)} \neq s'_1\}} p_k \bar{H}_1(s_1^{(k)}, \sigma_2) \leq \underbrace{\sum_{\{k: s_1^{(k)} \neq s'_1\}} p_k}_{1-p'} \bar{H}_1(\sigma). \quad (6.11)$$

Сложим неравенства (6.9) и (6.11), получим

$$\underbrace{\sum_{\{k: s_1^{(k)} \neq s'_1\}} p_k \bar{H}_1(s_1^{(k)}, \sigma_2) + p' \bar{H}_1(s'_1, \sigma_2)}_{\bar{H}_1(\sigma)} < (1-p') \bar{H}_1(\sigma) + p' \bar{H}_1(\sigma) = \bar{H}_1(\sigma),$$

т. е.  $\bar{H}_1(\sigma) < \bar{H}_1(\sigma)$  — противоречие.

Итак, условие (1) справедливо для любых  $s'_i, s''_i \in \text{supp}(\sigma_i)$ .

*Достаточность.* Пусть выполнены условия (6.5) и (6.6), но ситуация  $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2)$  не является равновесием по Нэшу в смешанных стратегиях в игре  $\Gamma$ . Тогда существует игрок  $i$  и стратегия  $\sigma'_i \in \bar{S}_i$  такая, что

$$\bar{H}_i(\sigma'_i, \sigma_{-i}) > \bar{H}_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) \equiv \bar{H}_i(\sigma).$$

Пусть для определенности  $i = 1$ , т. е.

$$\bar{H}_1(\sigma'_1, \sigma_2) > \bar{H}_1(\sigma_1, \sigma_2) \equiv \bar{H}_1(\sigma), \quad (6.12)$$

причем из (6.5) имеем

$$\bar{H}_1(\tilde{A}) = \bar{H}_1(s_1, \sigma_2) \text{ для } \forall s_1 \in \text{supp}(\sigma_1),$$

а из (6.6) имеем

$$\bar{H}_1(s_1, \sigma_2) \geq \bar{H}_1(s'_1, \sigma_2) \text{ для } \forall s'_1 \in S_1.$$

Таким образом, получим из (6.12) с учетом последнего неравенства

$$\bar{H}_1(\sigma'_1, \sigma_2) > \bar{H}_1(s'_1, \sigma_2) \text{ для } \forall s'_1 \in S_1. \quad (6.13)$$

Обозначим  $v' = \bar{H}_1(\sigma'_1, \sigma_2)$ ,  $p' = P(s'_1)$  — вероятности чистых стратегий в смешанной стратегии  $\sigma'_1$ , причем хотя бы для одной чистой стратегии  $s'_1 \in S_1$  будет  $p' = P(s'_1) > 0$ ; кроме того, в соответствии с определением смешанной стратегии имеем  $\sum_{s'_1 \in S_1} P(s'_1) = 1$ .

Умножим неравенство (6.13) на  $p' = P(s'_1)$  и просуммируем по всем  $s'_1 \in S_1$ . Получим

$$\underbrace{\sum_{s'_1 \in S_1} P(s'_1)}_{=1} \underbrace{\bar{H}_1(\sigma'_1, \sigma_2)}_{=v'} > \sum_{s'_1 \in S_1} P(s'_1) \bar{H}_1(s'_1, \sigma_2),$$

причем правая часть неравенства есть  $\bar{H}_1(\sigma'_1, \sigma_2) = v'$ , т. е. имеем  $v' > v'$  — противоречие. Итак, условия (6.5) и (6.6) действительно определяют ситуацию равновесия по Нэшу в смешанных стратегиях в игре  $\Gamma$ .

**Свойство.** Для того чтобы ситуация  $\sigma$  была равновесием по Нэшу в смешанных стратегиях в игре  $\Gamma = \{I, S, H\}$ , необходимо и достаточно, чтобы для каждого игрока  $i \in I$  и любой его чистой стратегии  $s_i \in S_i$  выполнялось  $\bar{H}_i(\sigma|_{s_i}) \leq \bar{H}_i(\sigma)$ .

*Замечания.* 1. В ситуации равновесия игрокам безразлично, какую чистую стратегию, входящую в носитель смешанной равновесной стратегии, использовать.

2. Использование любой чистой стратегии, не входящей в  $\text{supp}(\sigma_i)$ , приводит к тому, что ожидаемый выигрыш  $i$ -го игрока не увеличится.

На основании теоремы 6.2 можно находить равновесия по Нэшу в смешанных стратегиях (если известны носители входящих в него смешанных стратегий).



**Пример 6.2.** Определить равновесия по Нэшу в биматричной игре

$$\begin{matrix} & s_2^{(1)} & s_2^{(2)} \\ s_1^{(1)} & (7, 6) & (3, 5) \\ s_1^{(2)} & (2, 4) & (5, 8) \end{matrix}.$$

*Решение.* 1. Имеем равновесные по Нэшу (в чистых стратегиях) ситуации  $s_{11} = (s_1^{(1)}, s_2^{(1)})$ ,  $s_{22} = (s_1^{(2)}, s_2^{(2)})$ .

2. Найдем равновесия по Нэшу в смешанных стратегиях. Пусть равновесные смешанные стратегии:  $\sigma_1 = (p, 1-p)$  игрока 1,  $\sigma_2 = (q, 1-q)$  игрока 2, причем  $0 < p < 1$ ,  $0 < q < 1$ , т. е. в носители этих смешанных стратегий входят обе чистые стратегии игроков.

Вычислим для игрока 1 ожидаемые выигрыши:

$$\bar{H}_1(s_1^{(1)}, \sigma_2) = 7q + 3(1-q),$$

$$\bar{H}_1(s_1^{(2)}, \sigma_2) = 2q + 5(1-q).$$

Тогда в соответствии с условием (1) теоремы 2 имеем

$$7q + 3(1-q) = 2q + 5(1-q) \Rightarrow 4q + 3 = 5 - 3q \Rightarrow q = 2/7.$$

Аналогично для игрока 2 ожидаемые выигрыши:

$$\bar{H}_2(\sigma_1, s_2^{(1)}) = 6p + 4(1-p),$$

$$\bar{H}_2(\sigma_1, s_2^{(2)}) = 5p + 8(1-p).$$

Тогда в соответствии с условием (6.5) теоремы 6.2 имеем

$$6p + 4(1-p) = 5p + 8(1-p) \Rightarrow 2p + 4 = 8 - 3p \Rightarrow p = 4/5.$$

Итак, имеем смешанные равновесные стратегии

$$\sigma_1 = (4/5, 1/5), \sigma_2 = (2/7, 5/7),$$

которые доставляют средние выигрыши игрокам

$$\bar{H}_1(\sigma) \equiv M\xi_1 = \bar{H}_1(s_1^{(1)}, \sigma_2) = 29 / 7,$$

$$\bar{H}_2(\sigma) \equiv M\xi_2 = \bar{H}_2(\sigma_1, s_2^{(1)}) = 28 / 5.$$

*Замечание.* Если носители равновесных смешанных стратегий неизвестны, то в процессе решения приходится осуществлять перебор различных носителей.

**Пример 6.3.** Определить равновесия по Нэшу в биматричной игре

$$\begin{array}{c} s_2^{(1)} \quad s_2^{(2)} \quad s_2^{(3)} \quad s_2^{(4)} \\ \begin{array}{c} s_1^{(1)} \\ s_1^{(2)} \end{array} \left( \begin{array}{cccc} (3, 0) & (1, 2) & (2, 6) & (6, 8) \\ (5, 7) & (7, 5) & (0, 4) & (4, 1) \end{array} \right).$$

*Решение.* 1. Имеем следующие равновесные по Нэшу (в чистых стратегиях) ситуации  $s_{21} = (s_1^{(2)}, s_2^{(1)})$ ,  $s_{14} = (s_1^{(1)}, s_2^{(4)})$ .

2. Перейдем к поиску равновесия по Нэшу в смешанных стратегиях. Попытаемся найти равновесные смешанные стратегии следующего вида:

- $\sigma_1 = (p, 1-p)$  для игрока 1, причем  $0 < p < 1$ , т. е. в носитель стратегии  $\sigma_1$  входят обе чистые стратегии игроков;
- $\sigma_2 = (q_1, q_2, q_3, q_4)$  для игрока 2, причем  $\sum_{j=1}^4 q_j = 1$ ,  $0 < q_j < 1$ ,  
 $j = 1, 3, 4, q_2 = 0$ .

Действительно, игрок 2 никогда не будет применять стратегию  $s_2^{(2)}$ , так как существует комбинация его чистых стратегий (т. е. смешанная стратегия), строго доминирующая эту стратегию  $s_2^{(2)}$ , например, комбинация его стратегий  $s_2^{(1)}$  и  $s_2^{(3)}$  (столбец 2 платежной матрицы игрока 2 строго доминируется комбинацией столбцов 1 и 3):

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 6 & 8 \\ 7 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Запишем условия для такой комбинации: найти  $0 < \lambda < 1$  такое, что

$$\lambda s_2^{(1)} + (1 - \lambda) s_2^{(3)} > s_2^{(2)},$$

или для столбцов матрицы  $B$ :

$$\begin{cases} \lambda \cdot 0 + (1 - \lambda) \cdot 6 > 2 \Rightarrow \lambda < 2/3 \\ \lambda \cdot 7 + (1 - \lambda) \cdot 4 > 5 \Rightarrow \lambda > 1/6 \end{cases},$$

например, при  $\lambda = 1/2$  имеем

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5,5 \end{pmatrix} > \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Итак, вероятность использования стратегии  $s_2^{(2)}$  равна 0, т. е.  $q_2 = 0$ .

Вычислим для игрока 2 ожидаемые выигрыши:

$$\bar{H}_2(\sigma_1, s_2^{(1)}) = 0 \cdot p + 7(1 - p) = v_2,$$

$$\bar{H}_2(\sigma_1, s_2^{(3)}) = 6p + 4(1 - p) = v_2,$$

$$\bar{H}_2(\sigma_1, s_2^{(4)}) = 8p + (1 - p) = v_2,$$

где обозначено  $v_2 = \bar{H}_2(\sigma)$ .

Данная система несовместна, например, решение первых двух уравнений

$$\begin{cases} 7 - 7p = v_2 \Rightarrow p = 1/3, v_2 = 14/3, \\ 4 + 2p = v_2 \end{cases}$$

не удовлетворяет третьему уравнению.

Итак, равновесной смешанной стратегии игрока 2 с ненулевыми вероятностями стратегий  $q_1, q_3, q_4$  не существует.

3. Будем теперь искать равновесную смешанную стратегию игрока 2 следующего вида:

$$\sigma_2 = (q_1, 0, q_3, 0), \text{ причем } 0 < q_1 < 1, 0 < q_3 < 1, q_1 + q_3 = 1.$$

Вычислим для игрока 2 ожидаемые выигрыши:

$$\bar{H}_2(\sigma_1, s_2^{(1)}) = 0 \cdot p + 7(1 - p) = v_2,$$

$$\bar{H}_2(\sigma_1, s_2^{(3)}) = 6p + 4(1 - p) = v_2.$$

Решение этой системы —  $p = 1/3$ ,  $v_2 = 14/3$ . Таким образом, имеем смешанную стратегию игрока 1, которая может быть равновесной:  $\sigma_1 = (1/3, 2/3)$ . Проверим условие (6.6) на чистых стратегиях  $s_2^{(2)}$ ,  $s_2^{(4)} \notin \text{supp}(\sigma_2)$ :

$$\bar{H}_2(\sigma_1 = (1/3, 2/3), s_2^{(2)}) = \frac{1}{3} \cdot 2 + \frac{2}{3} \cdot 5 = \frac{12}{3} < v_2 = \frac{14}{3},$$

$$\bar{H}_2(\sigma_1 = (1/3, 2/3), s_2^{(4)}) = \frac{1}{3} \cdot 8 + \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{10}{3} < v_2 = \frac{14}{3},$$

т. е. условия выполняются. Следовательно, смешанная стратегия  $\sigma_1 = (1/3, 2/3)$  может быть равновесной.

Вычислим для игрока 1 ожидаемые выигрыши:

$$\bar{H}_1(s_1^{(1)}, \sigma_2) = 3q_1 + 2q_3 = v_1,$$

$$\bar{H}_1(s_1^{(2)}, \sigma_2) = 5q_1 + 0 \cdot q_3 = v_1,$$

где обозначено  $v_1 = \bar{H}_1(\sigma)$ . Учитывая условие  $q_1 + q_3 = 1$ , получим систему трех линейных уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} 3q_1 + 2q_3 = v_1, \\ 5q_1 = v_1, \Rightarrow q_1 = q_3 = 1/2, v_1 = 5/2, \\ q_1 + q_3 = 1, \end{cases}$$

Итак, имеем стратегию  $\sigma_2 = (1/2, 0, 1/2, 0)$ .

Таким образом, найдено смешанное равновесие  $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2)$ , где  $\sigma_1 = (1/3, 2/3)$ ,  $\sigma_2 = (1/2, 0, 1/2, 0)$ , с ожидаемыми выигрышами игроков  $M\xi_1 = v_1 = 5/2$ ,  $M\xi_2 = v_2 = 14/3$ .

4. Далее будем искать равновесную смешанную стратегию игрока 2 с носителем  $\text{supp } p(\sigma_2) = \{s_2^{(1)}, s_2^{(4)}\}$ , т. е. следующего вида:  $\sigma_2 = (q_1, 0, 0, q_4)$ , причем  $0 < q_1 < 1$ ,  $0 < q_4 < 1$ ,  $q_1 + q_4 = 1$ .

Вычислим для игрока 2 ожидаемые выигрыши:

$$\bar{H}_2(\sigma_1, s_2^{(1)}) = 0 \cdot p + 7(1 - p) = v_2,$$

$$\bar{H}_2(\sigma_1, s_2^{(4)}) = 8p + 1 \cdot (1 - p) = v_2.$$

Решение этой системы —  $p = 3/7$ ,  $v_2 = 4$ . Имеем смешанную стратегию игрока 1, которая может быть равновесной:  $\sigma_1 = (3/7, 4/7)$ .

Проверим условие (2) на чистых стратегиях  $s_2^{(2)}, s_2^{(3)} \notin \text{supp}(\sigma_2)$ :

$$\bar{H}_2(\sigma_1 = (3/7, 4/7), s_2^{(2)}) = \frac{3}{7} \cdot 2 + \frac{4}{7} \cdot 5 = \frac{26}{7} > v_2 = 4,$$

$$\bar{H}_2(\sigma_1 = (3/7, 4/7), s_2^{(3)}) = \frac{3}{7} \cdot 6 + \frac{4}{7} \cdot 4 = \frac{34}{7} > v_2 = 4,$$

т. е. условие (6.6) не выполняется. Следовательно, стратегия  $\sigma_1 = (3/7, 4/7)$  не является равновесной.

5. Осталось искать равновесную смешанную стратегию игрока 2 с носителем  $\text{supp}(\sigma_2) = \{s_2^{(3)}, s_2^{(4)}\}$ , т. е. следующего вида:  $\sigma_2 = (0, 0, q_3, q_4)$ , причем  $0 < q_3 < 1$ ,  $0 < q_4 < 1$ ,  $q_3 + q_4 = 1$ .

Вычислим для игрока 2 ожидаемые выигрыши:

$$\bar{H}_2(\sigma_1, s_2^{(3)}) = 6p + 4(1 - p) = v_2,$$

$$\bar{H}_2(\sigma_1, s_2^{(4)}) = 8p + 1 \cdot (1 - p) = v_2.$$

Решение этой системы —  $p = 3/5$ ,  $v_2 = 26/5$ . Имеем смешанную стратегию игрока 1, которая может быть равновесной:  $\sigma_1 = (3/5, 2/5)$ .

Проверим условие (6.6) на чистых стратегиях  $s_2^{(1)}, s_2^{(2)} \notin \text{supp}(\sigma_2)$ :

$$\bar{H}_2(\sigma_1 = (3/5, 2/5), s_2^{(1)}) = \frac{3}{5} \cdot 0 + \frac{2}{5} \cdot 7 = \frac{14}{5} < v_2 = 4,$$

$$\bar{H}_2(\sigma_1 = (3/5, 2/5), s_2^{(2)}) = \frac{3}{5} \cdot 2 + \frac{2}{5} \cdot 5 = \frac{16}{5} < v_2 = 4,$$

т. е. условие (6.6) выполняется. Следовательно, стратегия  $\sigma_1 = (3/7, 4/7)$  может быть равновесной.

Вычислим для игрока 1 ожидаемые выигрыши:

$$\begin{aligned}\bar{H}_1(s_1^{(1)}, \sigma_2) &= 2q_3 + 6q_4 = v_1, \\ \bar{H}_1(s_1^{(2)}, \sigma_2) &= 0 \cdot q_3 + 4q_4 = v_1.\end{aligned}$$

Получим систему трех линейных уравнений с тремя неизвестными:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2q_3 + 6q_4 = v_1, \\ 4q_4 = v_1, \\ q_3 + q_4 = 1, \end{array} \right\} \Rightarrow 2q_3 + 2q_4 = 0 \Rightarrow q_1 = q_3 = 0,$$

т. е. система несовместна. Нет равновесной стратегии игрока 2.

**6. Итоговый результат.** В данной игре имеются три ситуации равновесия по Нэшу: ситуации равновесия в чистых стратегиях  $s_{21} = (s_1^{(2)}, s_2^{(1)})$ ,  $s_{14} = (s_1^{(1)}, s_2^{(4)})$ ; ситуация равновесия в смешанных стратегиях  $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2)$ ,  $\sigma_1 = (1/3, 2/3)$ ,  $\sigma_2 = (1/2, 0, 1/2, 0)$ .

## Графический метод решения биматричных игр $2 \times n$ и $m \times 2$

В играх, в которых один из игроков имеет две стратегии, можно определить все ситуации равновесия с использованием наилучших ответов игроков, выполняя графический анализ ожидаемых выигрышей игроков (на плоскости). Проиллюстрируем данный метод для игры с матрицей выигрышей из примера 6.3, с. 120:

$$\begin{array}{c} s_2^{(1)} \quad s_2^{(2)} \quad s_2^{(3)} \quad s_2^{(4)} \\ s_1^{(1)} \left( \begin{array}{cccc} (3, 0) & (1, 2) & (2, 6) & (6, 8) \end{array} \right) \\ s_1^{(2)} \left( \begin{array}{cccc} (5, 7) & (7, 5) & (0, 4) & (4, 1) \end{array} \right) \end{array}$$

Смешанные стратегии игроков в данной игре имеют вид:

- $\sigma_1 = (p, 1-p)$  игрока 1, где  $0 \leq p \leq 1$ ;
- $\sigma_2 = (q_1, q_2, q_3, q_4)$  игрока 2, причем  $\sum_{j=1}^4 q_j = 1, 0 \leq q_j \leq 1, j = 1, 2, 3, 4$ .

Запишем для игрока 2 ожидаемые выигрыши:

$$\bar{H}_2(\sigma_1, s_2^{(1)}) = 0 \cdot p + 7(1-p) = v_2,$$

$$\bar{H}_2(\sigma_1, s_2^{(2)}) = 2p + 5(1-p) = v_2,$$

$$\bar{H}_2(\sigma_1, s_2^{(3)}) = 6p + 4(1-p) = v_2,$$

$$\bar{H}_2(\sigma_1, s_2^{(4)}) = 8p + (1-p) = v_2,$$

где  $v_2 = \bar{H}_2(\sigma)$ . Изобразим графики этих функций (рис. 6.1).

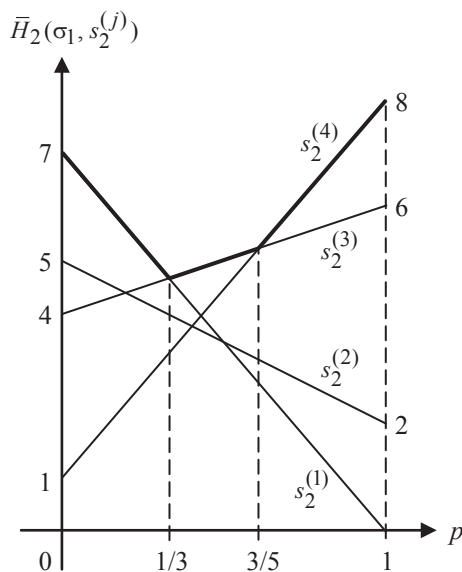


Рис. 6.1. График верхней огибающей выигрышей игрока 2

Верхняя огибающая выигрышей  $\bar{H}_2(\sigma_1, s_2^{(j)}), j = 1, 2, 3, 4$ , выделена на рис. 6.1 жирным, позволяет получить кривую наилучших ответов игрока 2. Следует отметить, что линия функции выигрыша  $\bar{H}_2(\sigma_1, s_2^{(2)})$  ниже этой кривой наилучших ответов игрока 2 при всех  $0 \leq p \leq 1$ , т. е. использование стратегии  $s_2^{(2)}$  дает заведомо худший результат для игрока 2.

Отображение наилучших ответов игрока 2 имеет вид:

$$BR_2(\sigma_1) = \begin{cases} s_2^{(1)}, & 0 \leq p < \frac{1}{3}; \\ (q_1, 0, 1 - q_1, 0), & p = \frac{1}{3}; \\ s_2^{(3)}, & \frac{1}{3} < p < \frac{3}{5}; \\ (0, 0, q_3, 1 - q_3), & p = \frac{3}{5}; \\ s_2^{(4)}, & \frac{3}{5} < p \leq 1. \end{cases}$$

Для нахождения равновесий в данной игре достаточно исследовать наилучшие ответы игрока 1 на стратегии игрока 2, которые входят в  $BR_2(\sigma_1)$ .

1.  $BR_2(\sigma_1|_{0 \leq p < 1/3}) = s_2^{(1)}$ . В этом случае  $BR_1(s_2^{(1)}) = s_1^{(2)}$ , поскольку при стратегии  $s_2^{(1)}$  игрока 2 максимальный выигрыш игрока 1 равен 5, т. е.  $\sigma_1|_{p=0} = (0, 1) = s_1^{(2)}$ . Таким образом, существует (при  $p = 0$ ) общая пара стратегий  $s_{21} = (s_1^{(2)}, s_2^{(1)})$ , которая образует равновесие по Нэшу.

2.  $BR_2(\sigma_1|_{p=1/3}) = \sigma_2 = (q_1, 0, 1 - q_1, 0)$ , т. е. игра сводится к следующей редуцированной игре (подыгре):

$$\begin{array}{cc} & s_2^{(1)} & s_2^{(3)} \\ \begin{array}{c} s_1^{(1)} \\ s_1^{(2)} \end{array} & \begin{pmatrix} (3, 0) & (2, 6) \\ (5, 7) & (0, 4) \end{pmatrix} \end{array}.$$



Найдем  $BR_1(\sigma_2 = (q_1, 0, 1 - q_1, 0))$ . Пусть игрок 1 использует смешанную стратегию  $\sigma_1 = (p, 1 - p)$ . Тогда его ожидаемый выигрыш равен

$$\bar{H}_1(\sigma_1, \sigma_2) = 3pq_1 + 2p(1 - q_1) + 5(1 - p)q_1 = (2 - 4q_1)p + 5q_1.$$

Вычислим максимум по  $p \in [0, 1]$  этой функции. Она линейная по  $p$ , причем в зависимости от коэффициента при  $p$  может быть:

а) возрастающей (при  $q_1 < 1/2$ ), тогда максимум функции достигается при  $p = p_{\max} = 1$ , следовательно,

$$BR_1(\sigma_2 = (q_1, 0, 1 - q_1, 0)|_{q_1 \in [0, 1/2)}) = s_1^{(1)};$$

б) убывающей (при  $q_1 > 1/2$ ), тогда  $p_{\max} = 0$ ,

$$BR_1(\sigma_2 = (q_1, 0, 1 - q_1, 0)|_{q_1 \in (1/2, 1]}) = s_1^{(2)};$$

в) постоянной (при  $q_1 = 1/2$ ), тогда  $p_{\max}$  — любое значение из отрезка  $[0, 1]$ , следовательно,

$$BR_1(\sigma_2 = (q_1, 0, 1 - q_1, 0)|_{q_1 = 1/2}) = \sigma_1 = (p, 1 - p), p \in [0, 1].$$

Таким образом, стратегия  $\sigma_1|_{p=1/3} = (1/3, 2/3)$  является наилучшим ответом на стратегию  $\sigma_2|_{q_1=1/2} = (1/2, 0, 1/2, 0)$  игрока 2. Итак, эта пара стратегий образует равновесие по Нэшу в смешанных стратегиях.

3.  $BR_2(\sigma_1|_{1/3 < p < 3/5}) = s_2^{(3)}$ . В этом случае  $BR_1(s_2^{(3)}) = s_1^{(1)}$ , поскольку при стратегии  $s_2^{(3)}$  игрока 2 максимальный выигрыш игрока 1 равен 2, т.е.  $\sigma_1|_{p=1} = (1, 0) = s_1^{(1)}$ . Таким образом, не существует общей пары стратегий. Следовательно, равновесия в данном случае нет.

4.  $BR_2(\sigma_1|_{p=3/5}) = \sigma_2 = (0, 0, q_3, 1 - q_3)$ , т. е. игра сводится следующей подыгре:

$$\begin{array}{cc} & s_2^{(3)} & s_2^{(4)} \\ s_1^{(1)} & (2, 6) & (6, 8) \\ s_1^{(2)} & (0, 4) & (4, 1) \end{array}$$

В этой игре стратегия  $s_1^{(1)}$  строго доминирует стратегию  $s_1^{(2)}$ , т. е.  $BR_1(\sigma_2 = (0, 0, q_3, 1 - q_3)) = s_1^{(1)} = \sigma_1|_{p=1} = (1, 0)$ .

Таким образом, не существует общей пары стратегий. Следовательно, равновесия в данном случае нет.

5.  $BR_2(\sigma_1|_{3/5 < p \leq 1}) = s_2^{(4)}$ . Поскольку  $BR_1(s_2^{(4)}) = s_1^{(1)}$ , причем  $s_1^{(1)} = \sigma_1|_{p=1} = (1, 0)$ , то существует (при  $p = 1$ ) общая пара стратегий  $s_{14} = (s_1^{(1)}, s_2^{(4)})$ , которая образует равновесие по Нэшу.

Итак, в данной игре имеются три равновесия по Нэшу: равновесия в чистых стратегиях  $s_{21} = (s_1^{(2)}, s_2^{(1)})$ ,  $s_{14} = (s_1^{(1)}, s_2^{(4)})$ , равновесие в смешанных стратегиях  $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2)$ , где

$$\sigma_1 = (1/3, 2/3), \sigma_2 = (1/2, 0, 1/2, 0).$$

### Свойства равновесных стратегий

Рассмотрим биматричную игру  $\Gamma = \{I, S, H\}$ , где  $I = \{1, 2\}$ ,  $S = S_1 \cdot S_2$ ,  $H = (H_1, H_2): S \rightarrow R^2$ , с соответствующими функциями выигрышей игроков  $H_1(s_{ij}) = a_{ij}$ ,  $H_2(s_{ij}) = b_{ij}$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ ;  $j = 1, 2, \dots, n$ , т. е. выигрыши каждого игрока задаются соответствующими матрицами  $A = (a_{ij})$  и  $B = (b_{ij})$ .

Обозначим смешанные стратегии игроков  $\sigma_1 \in \bar{S}_1$ ,  $\sigma_2 \in \bar{S}_2$  в игре  $\Gamma$  следующим образом:

$$\sigma_1 = x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Тогда функции выигрышей игроков для ситуации  $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2)$  имеют вид

$$\begin{aligned} \bar{H}_1(\sigma) &\equiv M\xi_1 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i y_j = x^\top A y, \\ \bar{H}_2(\sigma) &\equiv M\xi_2 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n b_{ij} x_i y_j = x^\top B y. \end{aligned}$$

Пусть  $\sigma^* = (\sigma_1^*, \sigma_2^*)$  — ситуация равновесия в смешанных стратегиях в игре  $\Gamma$ , где  $\sigma_1^* = x^*$ ,  $\sigma_2^* = y^*$ .

Тогда условие равновесия из теоремы 2

$$\bar{H}_k(\sigma^*) \geq \bar{H}_k(s_k, \sigma_{-k}^*) \quad \text{для } \forall s_k \in S_k, k = 1, 2,$$

примет вид

$$\begin{aligned} (x^*)^\top A y^* &\geq s_1^\top A y^* \quad \text{для } \forall s_1 \in S_1, \\ (x^*)^\top B y^* &\geq (x^*)^\top B s_2 \quad \text{для } \forall s_2 \in S_2, \end{aligned} \quad (6.14)$$

где  $s_k$  записаны в форме смешанных стратегий  $e_k^{(i)}$ , т.е.  $i$ -я чистая стратегия игрока  $k$  представляется как единичный вектор (с вероятностью 1 выбора  $s_k^{(i)}$ ):

$$(e_k^{(i)})^\top = (0, \dots, 0, \underset{i}{\overset{\uparrow}{1}}, 0, \dots, 0).$$

Поскольку в такой записи имеем

$$\begin{aligned} (e_1^{(i)})^\top A &= a_i \text{ — } i\text{-я строка матрицы } A, \\ B e_2^{(j)} &= b_j \text{ — } j\text{-й столбец матрицы } B, \end{aligned}$$

то из (6.14) получим следующие условия

$$\begin{aligned} a_i y^* &\leq v_A \quad \text{для } \forall i = 1, 2, \dots, m; \\ (x^*)^\top b_j &\leq v_B \quad \text{для } \forall j = 1, 2, \dots, n, \end{aligned} \quad (6.15)$$

где  $v_A = (x^*)^T A y^*$ ,  $v_B = (x^*)^T B y^*$  — значения выигрышей игроков в ситуации равновесия.

Неравенства (6.15) можно записать в матрично-векторной форме

$$\begin{aligned} A y^* &\leq v_A u, \\ (x^*)^T B &\leq v_B w^T, \end{aligned} \quad (6.16)$$

где вектор-столбцы  $u \in R^m$ ,  $w \in R^n$ , состоящие из одних единиц:  $u^T = (1, \dots, 1)$ ,  $w^T = (1, \dots, 1)$ .

**Определение.** Стратегия  $\sigma_k$  игрока  $k$  называется *вполне смешанной*, если ее носитель (или спектр) совпадает с множеством чистых стратегий  $S_k$ , т. е.  $\text{supp}(\sigma_k) = S_k$ .

Ситуация  $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2)$ , в которой обе стратегии  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  вполне смешанные, называется *вполне смешанной*.

Для вполне смешанных стратегий  $\sigma_1 = x$  и  $\sigma_2 = y$  игроков имеем  $x_i > 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ ;  $y_j > 0$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ .

Пусть  $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2)$  — *вполне смешанная ситуация равновесия* (по Нэшу). Тогда из условий теоремы 2 следует

$$\bar{H}_k(s_k, \sigma_{-k}) = \bar{H}_k(\sigma) \quad \text{для } \forall s_k \in S_k, k = 1, 2,$$

причем эти равенства можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} A y &= v_A u, \quad v_A = x^T A y, \\ x^T B &= v_B w^T, \quad v_B = (x^*)^T B y^*. \end{aligned}$$

Рассмотрим случай  $m = n$ . Тогда матрицы  $A$ ,  $B$  — квадратные,  $u = w$ . Условия  $\sum_{i=1}^n x_i = 1$  и  $\sum_{j=1}^n y_j = 1$  можно записать в виде  $x^T u = 1$ ,  $y^T u = 1$ .

Если существуют  $A^{-1}$ ,  $B^{-1}$ , то в ситуации равновесия имеем системы:

$$\text{а) } \begin{cases} Ay = v_A u, \\ x^T u = 1; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x^T B = v_B u^T, \\ y^T u = 1; \end{cases}$$

причем  $x > 0, y > 0$  (для вполне смешанной ситуации).

Из (а) получим  $y = v_A A^{-1} u$ , из (б) следует  $x^T = v_B u^T B^{-1}$ . Тогда находим

$$x^T u = v_B u^T B^{-1} u = 1 \Rightarrow v_B = (u^T B^{-1} u)^{-1},$$

$$u^T y = v_A u^T A^{-1} u = 1 \Rightarrow v_A = (u^T A^{-1} u)^{-1}.$$

Таким образом, для вполне смешанной ситуации равновесия имеем следующие равновесные стратегии  $x^T = v_B u^T B^{-1}$ ,  $y = v_A A^{-1} u$ , причем ожидаемые выигрыши игроков равны  $\bar{H}_1 = v_A = (u^T A^{-1} u)^{-1}$ ,  $\bar{H}_2 = v_B = (u^T B^{-1} u)^{-1}$ .

**Пример 6.4.** Найти вполне смешанную ситуацию равновесия в игре с платежными матрицами игроков

$$A = \begin{pmatrix} -10 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

*Решение.* Пусть  $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2)$  — вполне смешанная ситуация, причем  $\sigma_1 = x, \sigma_2 = y, x^T = (x_1, x_2), y^T = (y_1, y_2)$ .

1. Вычислим определители матриц  $A$  и  $B$ :

$$|A| = 10 - 2 = 8, \quad |B| = 5 - 2 = 3.$$

Поскольку  $|A| \neq 0, |B| \neq 0$ , то существуют обратные матрицы

$$A^{-1} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -10 \end{pmatrix} = -\frac{1}{8} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 10 \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

2. Вычислим ожидаемые выигрыши игроков:

$$\begin{aligned} v_A = (u^T A^{-1} u)^{-1} &= \left( -\frac{1}{8} (1 \ 1) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)^{-1} = \\ &= -8 \left( (1 \ 1) \begin{pmatrix} 3 \\ 11 \end{pmatrix} \right)^{-1} = -\frac{8}{14} = -\frac{4}{7}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_B &= (u^T B^{-1} u)^{-1} = \left( \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)^{-1} = \\ &= 3 \left( \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} \right)^{-1} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

3. Определим равновесные стратегии игроков:

$$\begin{aligned} x^T &= v_B u^T B^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \frac{1}{3} = \frac{1}{9} (2 \ 7) = (2/9 \ 7/9), \\ y &= v_A A^{-1} u = -\frac{4}{7} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \left(-\frac{1}{8}\right) = \frac{1}{14} (3 \ 11) = (3/14 \ 11/14). \end{aligned}$$

Итак, имеем вполне смешанную ситуацию равновесия

$$\sigma = ((2/9 \ 7/9), (3/14 \ 11/14)),$$

ожидаемые выигрыши игроков равны  $\bar{H}_1 = v_A = -4/7$ ,  $\bar{H}_2 = v_B = 1/3$ .

Решим данный пример также через *множества наилучших ответов* игроков.

Рассмотрим смешанные стратегии игроков:  $\sigma_1 = (p, 1-p)$ ,  $\sigma_2 = (q, 1-q)$ , причем  $0 \leq p \leq 1$ ,  $0 \leq q \leq 1$ . Вычислим ожидаемые выигрыши игроков:

$$\begin{aligned} \bar{H}_1(\sigma_1, \sigma_2) &= M\xi_1 = -10pq + 2p(1-q) + (1-p)q - (1-p)(1-q) = \\ &= -14pq + 3p + 2q - 1, \\ \bar{H}_2(\sigma_1, \sigma_2) &= M\xi_2 = 5pq - 2p(1-q) - (1-p)q + (1-p)(1-q) = \\ &= 9pq - 3p - 2q + 1. \end{aligned}$$

Наилучший ответ игрока 1 на стратегию  $\sigma_2 = (q, 1-q)$  игрока 2 — это множество стратегий

$$BR_1(\sigma_2) = \{\bar{\sigma}_1 \in \bar{S}_1 \mid \max_{\sigma_1 \in \bar{S}_1} \bar{H}_1(\sigma_1, \sigma_2) = \bar{H}_1(\bar{\sigma}_1, \sigma_2)\}.$$

Функция  $\bar{H}_1$  — линейная по  $p$ , с угловым коэффициентом  $\partial \bar{H}_1 / \partial p = -14q + 3$ . Тогда при  $\partial \bar{H}_1 / \partial p > 0$  функция  $\bar{H}_1$  — возрастающая по  $p$ , следовательно,  $p_{\max} = 1$ ,  $BR_1(\sigma_2) = \sigma_1|_{p=1} = (1, 0)$  при  $0 \leq q < 3/14$ .

Далее, при  $\partial \bar{H}_1 / \partial p < 0$  функция  $\bar{H}_1$  — убывающая по  $p$ , следовательно,  $p_{\max} = 0$ ,  $BR_1(\sigma_2) = \sigma_1|_{p=0} = (0, 1)$  при  $3/14 < q \leq 1$ .

При  $\partial \bar{H}_1 / \partial p = 0$  функция  $\bar{H}_1$  постоянная для всех  $p \in [0, 1]$ , тогда  $BR_1(\sigma_2) = \{\sigma_1 = (p, 1-p), p \in [0, 1]\}$  при  $q = 3/14$ .

Итак, в зависимости от значения  $q$  получим следующее множество наилучших ответов игрока 1

$$BR_1(\sigma_2) = \{\sigma_1 = (p, 1-p), p = p_{\max}(q)\},$$

где функция  $p_{\max}(q)$  имеет вид

$$p_{\max}(q) = \begin{cases} p_{\max} = 1, & 0 \leq q < 3/14; \\ p_{\max} = 0, & 3/14 < q \leq 1; \\ [0, 1], & q = 3/14. \end{cases}$$

Наилучший ответ игрока 2 на стратегию  $\sigma_1 = (p, 1-p)$  игрока 1 — это множество стратегий

$$BR_2(\sigma_1) = \{\bar{\sigma}_2 \in \bar{S}_2 \mid \max_{\sigma_2 \in \bar{S}_2} \bar{H}_2(\sigma_1, \sigma_2) = \bar{H}_2(\sigma_1, \bar{\sigma}_2)\}.$$

Выполняя аналогичные действия (и рассуждения) при поиске  $BR_2(\sigma_1)$ , вычисляя максимум функции  $\bar{H}_2$  по  $q$  (линейной по  $q$  с угловым коэффициентом  $\partial \bar{H}_2 / \partial q = 9p - 2$ ), получим в зависимости от значения  $p$  следующее множество наилучших ответов игрока 2:

$$BR_2(\sigma_1) = \{\sigma_2 = (q, 1-q), q = q_{\max}(p)\},$$

$$q_{\max}(p) = \begin{cases} q_{\max} = 0, & 0 \leq p < 2/9; \\ q_{\max} = 1, & 2/9 < p \leq 1; \\ [0, 1], & p = 2/9. \end{cases}$$

На рис. 6.2 изображены геометрические представления наилучших ответов игроков:  $p_{\max}(q)$  игрока 1 и  $q_{\max}(p)$  игрока 2.

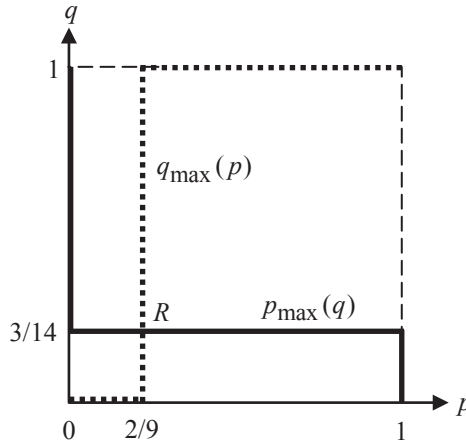


Рис. 6.2. Геометрические представления наилучших ответов игроков

Ситуация равновесия (по Нэшу) — пара наилучших ответов игроков, которой соответствует точка пересечения отображений  $p_{\max}(q)$  и  $q_{\max}(p)$ . В данном случае это точка  $R$  с координатами  $p = 2/9$ ,  $q = 3/14$ . Таким образом, имеем единственную смешанную ситуацию равновесия  $\sigma = ((2/9 \ 7/9), (3/14 \ 11/14))$ , причем вполне смешанную ситуацию.

### Доминирование смешанных стратегий

**Определение.** Смешанная стратегия  $\sigma_i \in \bar{S}_i$  игрока  $i$  строго доминируется в игре  $\bar{\Gamma} = \{I, \bar{S}, \bar{H}\}$ , если существует другая стратегия  $\sigma'_i \in \bar{S}_i$  такая, что для всех  $\sigma_j \in \bar{S}_j$ ,  $j \neq i$ , выполняется



$$\bar{H}_i(\sigma|_{\sigma'_i}) > \bar{H}_i(\sigma), \quad (6.17)$$

где  $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2)$  — ситуация в смешанных стратегиях.

Учитывая  $\bar{H}_i(\sigma) \equiv M\xi_i$ , можно неравенство (6.17) записать также в следующем виде:

$$M\xi_i|_{\sigma'_i} > M\xi_i|_{\sigma_i},$$

а также в форме

$$\bar{H}_i(\sigma'_i, \sigma_{-i}) > \bar{H}_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) \text{ для } \forall \sigma_{-i} \in \bar{S}_{-i}.$$

Стратегия  $\sigma'_i$  называется *строго доминирующей* стратегией для игрока  $i$  в игре  $\bar{\Gamma} = \{I, \bar{S}, \bar{H}\}$ , если она строго доминирует любую другую стратегию  $\sigma_i \in \bar{S}_i$ .

*Замечание.* Чистая стратегия может строго доминироваться смешанной стратегией, даже если она не доминируется строго никакой чистой стратегией.

Например, рассмотрим следующую игру

$$H = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} s_2^{(1)} & s_2^{(2)} \end{array} \\ \begin{pmatrix} (2, 0) & (-1, 0) \\ (0, 0) & (0, 0) \\ (-1, 0) & (2, 0) \end{pmatrix} \begin{array}{c} s_1^{(1)} \\ s_1^{(2)} \\ s_1^{(3)} \end{array} \end{array}.$$

У игрока 1 нет строго доминируемых чистых стратегий. Рассмотрим его смешанную стратегию  $\sigma_1 = (1/2, 0, 1/2)$ . Пусть  $\sigma_2 = (q, 1 - q)$  — произвольная смешанная стратегия игрока 2. Вычислим выигрыш игрока 1 в ситуации  $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2)$ :

$$\begin{aligned} \bar{H}_1(\sigma) \equiv M\xi_1|_{\sigma_1, \sigma_2} &= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot q + 0 \cdot 0 \cdot q + \frac{1}{2} \cdot (-1) \cdot q + \\ &+ \frac{1}{2} \cdot (-1) \cdot (1 - q) + 0 \cdot 0 \cdot (1 - q) + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (1 - q) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Таким образом, имеем:

$$1) \bar{H}_1(\sigma_1, \sigma_2) = M\xi_1 \Big|_{\sigma_1, \sigma_2} = \frac{1}{2} > \bar{H}_1(s_1^{(2)}, \sigma_2) = 0$$

для  $\forall \sigma_2 \in \bar{S}_2$ , т. е. чистая стратегия  $s_1^{(2)}$  игрока 1 строго доминируется смешанной стратегией  $\sigma_1 = (1/2, 0, 1/2)$ ;

2) игрок 1 обеспечивает выигрыш  $M\xi_1 = 1/2$  независимо от стратегии игрока 2.

**Теорема 6.3.** Смешанная стратегия  $\sigma_i \in \bar{S}_i$  игрока  $i$  строго доминируется в игре  $\bar{\Gamma} = \{I, \bar{S}, \bar{H}\}$  стратегией  $\sigma'_i \in \bar{S}_i$  тогда и только тогда, когда

$$\bar{H}_i(\sigma'_i, s_{-i}) > \bar{H}_i(\sigma_i, s_{-i}) \text{ для } \forall s_{-i} \in S_{-i}.$$

*Замечание.* Для того чтобы проверить, что  $\sigma_i$  строго доминируется стратегией  $\sigma'_i$ , достаточно проверить свойство доминирования на чистых стратегиях оппонента игрока  $i$ .

**Теорема 6.4.** Если чистая стратегия  $s_i^{(k)} \in S_i$  игрока  $i$  в игре  $\Gamma = \{I, S, H\}$  строго доминируема, то таковой является и любая смешанная стратегия  $\sigma_i \in \bar{S}_i$  игрока  $i$ , использующая  $s_i^{(k)}$  с положительной вероятностью, т. е. для которой  $s_i^{(k)} \in \text{supp}(\sigma_i)$ .

*Замечание 1.* Итак, для поиска равновесных по Нэшу смешанных стратегий нужно воспользоваться тем, что в строго доминирующей смешанной стратегии строго доминируемая чистая стратегия берется с нулевой вероятностью, т. е. такую чистую стратегию можно удалять.

*Замечание 2.* Смешанная стратегия может быть строго доминируемой даже в том случае, если она использует с положительной вероятностью чистые стратегии, не являющиеся доминируемыми. Например, рассмотрим следующую игру

$$H = \begin{pmatrix} & s_2^{(1)} & s_2^{(2)} \\ s_1^{(1)} & (1, 3) & (-2, 0) \\ s_1^{(2)} & (-2, 0) & (1, 3) \\ s_1^{(3)} & (0, 1) & (0, 1) \end{pmatrix}$$

Пусть  $\sigma_1 = (1/2, 1/2, 0)$ , при этом чистые стратегии  $s_1^{(1)}, s_1^{(2)} \in \text{supp}(\sigma_1)$ , но не являются доминируемыми. Однако

$$\begin{aligned}\bar{H}_1(\sigma_1, s_2^{(1)}) &= M\xi_1 \Big|_{\sigma_1, s_2^{(1)}} = \\ &= 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 + (-2) \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = -\frac{1}{2} < \bar{H}_1(s_1^{(3)}, s_2^{(1)}) = 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{H}_1(\sigma_1, s_2^{(2)}) &= M\xi_1 \Big|_{\sigma_1, s_2^{(2)}} = \\ &= (-2) \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 + 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = -\frac{1}{2} < \bar{H}_1(s_1^{(3)}, s_2^{(2)}) = 0,\end{aligned}$$

т.е. стратегия  $\sigma_1$  строго доминируется стратегией  $s_1^{(3)}$ .

### Контрольные вопросы и задания

---

1. Дайте определение ситуации равновесия по Нэшу в биматричной игре.
2. Что такое смешанное расширение биматричной игры?
3. Приведите определение ситуации равновесия в смешанных стратегиях в биматричной игре.
4. Сформулируйте условия равновесия в смешанных стратегиях в биматричной игре  $2 \times 2$ .
5. Укажите необходимые и достаточные условия равновесия по Нэшу в смешанных стратегиях в биматричной игре.
6. Запишите условия для определения вполне смешанных равновесных стратегий игроков в биматричной игре  $n \times n$ .
7. Приведите необходимые и достаточные условия строгой доминируемости смешанной стратегии в биматричной игре.
8. Проверьте, образует ли пара стратегий  $\sigma_1 = (1/2, 1/2)$ ,  $\sigma_2 = (1/4, 3/4)$  ситуацию равновесия в смешанных стратегиях в биматричной игре с платежной матрицей

$$H = \begin{pmatrix} (7, 3) & (0, 5) \\ (4, 1) & (2, 0) \end{pmatrix}.$$

9. Найдите ситуации равновесия по Нэшу в смешанных стратегиях в биматричной игре с платежной матрицей  $H$ , используя отображения наилучших ответов игроков,

$$H = \begin{pmatrix} (6, 2) & (0, 4) \\ (3, 1) & (1, 0) \end{pmatrix}.$$

10. При каких значениях  $z$  стратегия  $\sigma_2 = (1/2, 1/2)$  строго доминирует стратегию  $\sigma'_2 = (3/4, 1/4)$  в биматричной игре с платежной матрицей

$$H = \begin{pmatrix} (7, z) & (3, 5) \\ (2, 4) & (5, 2+z) \end{pmatrix}?$$

11. Найдите вполне смешанную ситуацию равновесия по Нэшу в биматричной игре с платежной матрицей

$$H = \begin{pmatrix} (0, 4) & (3, 3) \\ (5, 3) & (2, 5) \end{pmatrix}.$$

---

## Библиографический список

---

1. Айзекс Р. Дифференциальные игры / Р. Айзекс. — М. : Мир, 1969. — 480 с.
2. Берж К. Матричные игры / К. Берж. — М., 1963.
3. Берж К. Общая теория игр нескольких лиц / К. Берж. — М. : Физматлит, 1961. — 129 с.
4. Благодатских А. И. Сборник задач и упражнений по теории игр / А. И. Благодатских, Н. Н. Петров. — СПб. : Изд-во «Лань», 2014. — 304 с.
5. Вентцель Е. С. Введение в исследование операций / Е. С. Вентцель. — М. : Советское радио, 1964. — 390 с.
6. Вентцель Е. С. Исследование операций / Е. С. Вентцель. — М. : Советское радио, 1972. — 552 с.
7. Вентцель Е. С. Исследование операций: задачи, принципы, методология / Е. С. Вентцель. — М. : Дрофа, 2004. — 203 с.
8. Вилкас Э. Й. Оптимальность в играх и решениях / Э. Й. Вилкас. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 1990. — 256 с.
9. Воробьев Н. Н. Основы теории игр. Бескоалиционные игры / Н. Н. Воробьев. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 1984. — 496 с.
10. Воробьев Н. Н. Теория игр для экономистов-кибернетиков / Н. Н. Воробьев. — М. : Наука, 1985.

11. Даниловцева Е. Р. Теория игр. Основные понятия. Текст лекций / Е. Р. Даниловцева, И. Г. Фарафонов, Г. Н. Дьякова. — СПб. : Изд-во СПб. ГУАП, 2003. — 36 с.
12. Дюбин Г. Н., Суздаль В. Г. Введение в прикладную теорию игр / Г. Н. Дюбин, В. Г. Суздаль. — М. : Наука, 1981.
13. Замков О. О. Математические методы в экономике : учебник / О. О. Замков. — М. : «Дело и сервис», 2001.
14. Интрилигатор М. Математические методы оптимизации и экономическая теория / М. Интрилигатор. — М. : Айрис-пресс, 2002. — 553 с.
15. Карлин С. Математические методы в теории игр, программировании и экономике / С. Карлин. — М. : Мир, 1964. — 835 с.
16. Колесник Г. В. Теория игр : учеб. пособие / Г. В. Колесник. — М. : Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2014. — 152 с.
17. Колобашкина Л. В. Основы теории игр : учеб. пособие / Л. В. Колобашкина. — М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2014. — 195 с.
18. Льюс Р. Игры и решения / Р. Льюс, Х. Райфа. — М., 1961.
19. Мак-Кинси Дж. Введение в теорию игр / Дж. Мак-Кинси. — М. : Физматлит, 1960. — 420 с. (DJVU)
20. Мулен Э. Кооперативное принятие решений: аксиомы и модели / Э. Мулен. — М. : Мир, 1991.
21. Мулен Э. Теория игр с примерами из математической экономики / Э. Мулен. — М. : Мир, 1985.
22. Невежин В. П. Теория игр. Примеры и задачи : учеб. пособие / В. П. Невежин. — М. : ФОРУМ; ИНФРА-М, 2014. — 128 с.
23. Нейман Дж. Теория игр и экономическое поведение / Дж. Нейман, О. Моргенштерн. — М. : Наука, 1970. — 708 с. (DJVU)
24. Обен Ж.-П. Нелинейный анализ и его экономические приложения / Ж.-П. Обен. — М. : Мир, 1988.
25. Оуэн Г. Теория игр / Г. Оуэн. — М. : ЛКИ/URSS, 2010.

26. Партхасаратхи Т. Некоторые вопросы теории игр двух лиц / Т. Партхасаратхи, Т. Рагхаван. — М. : Мир, 1974. — 296 с.
27. Петросян Л. А. Теория игр: учеб. пособие для ун-тов / Л. А. Петросян, Н. А. Зенкевич, Е. А. Семина. — М. : Высш. шк.; Книжный дом «Университет», 2010. — 304 с.
28. Печерский С. Л. Теория игр для экономистов. Вводный курс : учеб. пособие / С. Л. Печерский. — СПб. : Изд-во Европейского ун-та в Санкт-Петербурге, 2001. — 342 с.
29. Печерский С. Л. Проблема оптимального распределения в социально-экономических задачах и кооперативные игры / С. Л. Печерский, А. И. Соболев. — Л. : Наука, 1983.
30. Розенмюллер И. Кооперативные игры и рынки / И. Розенмюллер. — М. : Мир, 1974.
31. Фомин Г. П. Математические методы и модели в коммерческой деятельности : учебник / Г. П. Фомин. — М. : Финансы и статистика, 2005. — 616 с. Изд.: Финансы и статистика; Инфра-М, 2009.
32. Экланд И. Элементы математической экономики / И. Экланд. — М. : Мир, 1983.

Для заметок

---



Для заметок

---

*Учебное издание*

**Кремлев** Александр Гурьевич

## **ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ИГР**

Редактор О. В. Климова  
Корректор Е. Е. Афанасьева  
Компьютерный набор А. Г. Кремлева  
Верстка О. П. Игнатьевой

Подписано в печать 21.11.2016. Формат 60×84/16.  
Бумага писчая. Печать цифровая. Гарнитура Newton.  
Уч.-изд. л. 6,5. Усл. печ. л. 8,4. Тираж 200 экз.  
Заказ 358

Издательство Уральского университета  
Редакционно-издательский отдел ИПЦ УрФУ  
620049, Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 5  
Тел.: 8(343)375-48-25, 375-46-85, 374-19-41  
E-mail: rio@urfu.ru

Отпечатано в Издательско-полиграфическом центре УрФУ  
620075, Екатеринбург, ул. Тургенева, 4  
Тел.: 8(343) 350-56-64, 350-90-13  
Факс: 8(343) 358-93-06  
E-mail: press-urfu@mail.ru



