

# ЗАДАЧИ

В. В. ПРАСОЛОВ

## АЛГЕБРА

9 класс

$$\sqrt{n}\sqrt{(n+1)}\sqrt{\dots}\sqrt{N} \leq n + \frac{1}{2}$$

ФГОС

В. В. Прасолов

# Задачи по алгебре

9 класс

Москва  
Издательство МЦНМО  
2020

УДК 512.1+517.1+511.1

ББК 22.141+22.161

П70

**Прасолов В. В.**

П70      Задачи по алгебре. 9 класс. — М.: МЦНМО, 2020. — 88 с.

ISBN 978-5-4439-1462-6

Книга содержит задачи повышенной сложности по алгебре для учащихся 9 класса. Большинство из 12 глав начинается с перечисления основных фактов и понятий, относящихся к этой главе. Затем приводятся решения нескольких наиболее типичных задач. После этого следуют задачи для самостоятельного решения. В конце приведены ответы и почти ко всем задачам даны указания.

Для учителей математики и для школьников, которые хотят научиться решать задачи немного более сложные, чем задачи из учебника. По этой книге можно подготовиться к математическим олимпиадам, уровень которых ниже уровня заключительного этапа Всероссийской олимпиады.

ББК 22.141+22.161

ISBN 978-5-4439-1462-6

© Прасолов В. В., 2020.

© МЦНМО, 2020.

# Оглавление

<b>Предисловие</b> . . . . .	5
<b>Список обозначений</b> . . . . .	6
<b>Глава 22. Арифметическая прогрессия</b> . . . . .	7
Свойства арифметической прогрессии (7). Сумма арифметической прогрессии (8). Арифметическая прогрессия и квадратный трёхчлен (9). Примеры арифметических прогрессий (10). Разбиение на арифметические прогрессии (10). Разные задачи (10).	
<b>Глава 23. Геометрическая прогрессия</b> . . . . .	11
Свойства геометрической прогрессии (11). Сумма геометрической прогрессии (12). Арифметическая и геометрическая прогрессии (12).	
<b>Глава 24. Рациональная степень числа</b> . . . . .	14
Корень степени $n$ (14). Уравнения (15). Неравенства (15). Избавление от иррациональности в знаменателе (16). Разные задачи (16).	
<b>Глава 25. Тригонометрические формулы</b> . . . . .	17
Тригонометрические тождества (18). Тангенс и котангенс (18). Тангенс суммы (19). Произведение косинусов (19). Синусы и косинусы некоторых углов (19).	
<b>Глава 26. Тригонометрические уравнения и неравенства</b> . .	20
Неравенства и сравнение чисел (20). Уравнения (20). Вспомогательные тригонометрические функции (20). Разные задачи (21).	
<b>Глава 27. Тригонометрические тождества</b> . . . . .	22
Произведения и суммы синусов и косинусов (22). Применения формул суммы и произведения (22). Тангенс половинного угла (23). Соотношения для углов с данной суммой (23).	
<b>Глава 28. Приближённые вычисления</b> . . . . .	25
Вычисления с заданной погрешностью (25). Оценка абсолютной погрешности (25). Оценка относительной погрешности (26). Оценки квадратных корней сверху и снизу (26).	
<b>Глава 29. Метод математической индукции</b> . . . . .	27
Вычисление сумм и произведений (27). Доказательство неравенств (28). Делимость (29). Разные задачи (29). Индукция в обратном направлении (30).	

---

<b>Глава 30. Последовательности чисел . . . . .</b>	<b>31</b>
Конечные последовательности (31). Бесконечные последовательности (32). Неравенства для членов последовательности (32). Числа Фибоначчи (32). Рекуррентные последовательности (33). Последовательность разностей (34). Суммы степеней (34). Последовательность Фаря (35).	
<b>Глава 31. Множества . . . . .</b>	<b>36</b>
Объединение и пересечение множеств (37). Уравнение окружности (37).	
<b>Глава 32. Непрерывные дроби . . . . .</b>	<b>38</b>
Основные свойства (38). Подходящие дроби (39). Алгоритм Евклида и решение в целых числах уравнения $px - ty = 1$ (39). Разложение числа в непрерывную дробь (40). Календарь (41).	
<b>Глава 33. Дополнительные задачи . . . . .</b>	<b>42</b>
Неравенства (42). Комбинаторика (42). Числа Фибоначчи в комбинаторике (43). Взвешивания (43).	
<b>Ответы . . . . .</b>	<b>44</b>
<b>Указания . . . . .</b>	<b>47</b>
<b>Предметный указатель . . . . .</b>	<b>86</b>

# Предисловие

Книга содержит задачи по алгебре для учащихся 9 класса. Эти задачи немного сложнее тех, которые приводятся в учебниках как основные, но не сложнее тех, которые приводятся как дополнительные задачи или как задачи повышенной трудности.

Большинство из 12 глав начинается с перечисления основных фактов и понятий, относящихся к этой главе. Эти факты и понятия есть во всех школьных учебниках и приводятся для напоминания. Те же понятия, которые есть в некоторых учебниках, но не во всех, приводятся в тех параграфах, в которых они впервые встречаются. К таким понятиям относятся, в частности, числа Фибоначчи, линейная рекуррентная последовательность, последовательность разностей, последовательность Фарея, непрерывная дробь.

После перечисления основных фактов и понятий во многих главах разбираются решения нескольких наиболее типичных задач. Затем приводятся задачи для самостоятельного решения. В конце приведены ответы и ко всем задачам (кроме тех, к которым уже сам ответ является полным решением) даны указания.

Порядок изложения материала в этом задачнике может отличаться от порядка изложения в школьном учебнике, но решать задачи желательно именно в предлагаемом порядке, потому что именно так лучше всего проясняются взаимосвязи между разными задачами.

Изложение строго последовательно: ни в одной из глав материал последующих глав не используется.

Эта книга является непосредственным продолжением книг «Задачи по алгебре. 7 класс» (МЦНМО, 2019) и «Задачи по алгебре. 8 класс» (МЦНМО, 2020). Нумерация глав продолжает нумерацию из этих книг.

# Список обозначений

## 7 класс

$\overline{abc}$  — десятичная запись числа  
 $\text{НОД}(a, b)$  — наибольший общий делитель  
 $\text{НОК}(a, b)$  — наименьшее общее кратное  
 $a \equiv c \pmod{b}$  — сравнение по модулю  
 $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$  — факториал

## 8 класс

$>, <, \geq, \leq$  — неравенства  
 $|x|$  — модуль числа  $x$   
 $\sqrt{a}$  — арифметический квадратный корень из числа  $a$   
 $i$  — мнимая единица  
 $|z|$  — модуль комплексного числа  
 $\bar{z}$  — сопряжённое число  
 $C_n^k$  — число сочетаний из  $n$  элементов по  $k$   
 $[x]$  — целая часть числа  
 $\{x\}$  — дробная часть числа

## 9 класс

$\sqrt[n]{a}$  — корень степени  $n$  из числа  $a$ , с. 14  
 $\sin \alpha$  и  $\cos \alpha$  — синус и косинус угла  $\alpha$ , с. 17  
 $\operatorname{tg} \alpha$  и  $\operatorname{ctg} \alpha$  — тангенс и котангенс угла  $\alpha$ , с. 18  
 $\approx$  — приближённое равенство, с. 25  
 $\{x_n\}$  — последовательность чисел, с. 31  
 $F_n$  — число Фибоначчи, с. 32  
 $\{a_1, \dots, a_n\}$  — множество, состоящее из элементов  $a_1, \dots, a_n$ , с. 36  
 $\emptyset$  — пустое множество, с. 36  
 $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$  — множества всех натуральных, целых, рациональных, действительных чисел, с. 36  
 $A \cup B$  — объединение множеств  $A$  и  $B$ , с. 36  
 $A \cap B$  — пересечение множеств  $A$  и  $B$ , с. 36  
 $[a_0; a_1, a_2, \dots, a_n]$  — непрерывная дробь, с. 38

## Глава 22

# Арифметическая прогрессия

### Основные факты и понятия

Последовательность чисел  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$  называют *арифметической прогрессией*, если для всех натуральных  $n$  выполняется равенство  $a_{n+1} = a_n + d$ , где  $d$  — некоторое постоянное число, называемое *разностью арифметической прогрессии*. Для конечной последовательности  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_m$  такое равенство должно выполняться для всех натуральных  $n < m$ . Число  $m$  при этом называют *длиной арифметической прогрессии*.

Условие, что разность  $d = a_{n+1} - a_n$  постоянна, можно записать следующим образом:  $a_{n+1} - a_n = a_n - a_{n-1}$ , т. е.

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}.$$

Это означает, что каждый член арифметической прогрессии равен среднему арифметическому соседних с ним членов. И наоборот: если каждый член последовательности равен среднему арифметическому соседних с ним членов, то такая последовательность — арифметическая прогрессия.

Для  $n$ -го члена арифметической прогрессии справедлива формула  $a_n = a_1 + (n - 1)d$ .

Сумма первых  $n$  членов арифметической прогрессии равна

$$\frac{n(a_1 + a_n)}{2} = \frac{n(2a_1 + (n - 1)d)}{2}.$$

### Свойства арифметической прогрессии

**22.1.** Стороны треугольника образуют арифметическую прогрессию. Докажите, что отношение большей стороны к меньшей меньше 3.

**22.2.** Могут ли длины сторон прямоугольного треугольника образовывать арифметическую прогрессию?

**22.3.** Положительные числа  $a$ ,  $b$  и  $c$  образуют арифметическую прогрессию. Докажите, что числа  $\frac{1}{\sqrt{b} + \sqrt{c}}$ ,  $\frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{c}}$  и  $\frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$  тоже образуют арифметическую прогрессию.



**22.4.** Докажите, что для конечной арифметической прогрессии  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ , все члены которой отличны от нуля, выполняется равенство

$$\frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \dots + \frac{1}{a_{n-1} a_n} = \frac{n-1}{a_1 a_n}.$$

**22.5.** Докажите, что для конечной арифметической прогрессии  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$  с разностью  $d \neq 0$ , все члены которой отличны от нуля, выполняется равенство

$$\frac{1}{a_1 a_2 a_3} + \frac{1}{a_2 a_3 a_4} + \dots + \frac{1}{a_{n-2} a_{n-1} a_n} = \frac{1}{2d} \left( \frac{1}{a_1 a_2} - \frac{1}{a_{n-1} a_n} \right).$$

**22.6.** Докажите, что для конечной арифметической прогрессии  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ , все члены которой положительны, выполняется равенство

$$\frac{1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2} + \sqrt{a_3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{a_{n-1}} + \sqrt{a_n}} = \frac{n-1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_n}}.$$

**22.7.** Могут ли числа  $\sqrt{2}$ ,  $\sqrt{3}$  и  $\sqrt{5}$  быть членами одной арифметической прогрессии?

**22.8.** Первый член и разность арифметической прогрессии — натуральные числа. Докажите, что если один из членов этой прогрессии — полный квадрат, то среди членов этой прогрессии бесконечно много полных квадратов.

**22.9.** Число  $p$  простое, целые числа  $a_1, a_2, \dots, a_p$  образуют возрастающую арифметическую прогрессию, и ни одно из них не делится на  $p$ . Докажите, что разность этой прогрессии делится на  $p$ .

**22.10.** Докажите, что в бесконечной арифметической прогрессии  $1, 1+n, 1+2n, \dots$ , где  $n$  — натуральное число, встречается куб натурального числа.

**22.11.** Докажите, что в любой бесконечной арифметической прогрессии, состоящей из натуральных чисел, найдутся два члена с одинаковой суммой цифр.

### Сумма арифметической прогрессии

**22.12.** Найдите сумму первых  $2n-1$  членов арифметической прогрессии, если известен её член  $a_n$ .

**22.13.** Для каких  $n$  сумма  $1+2+3+\dots+n$  делится на  $n$ ?

**22.14.** Арифметическая прогрессия состоит из целых чисел. Сумма первых  $n$  членов этой прогрессии является степенью двойки. Докажите, что  $n$  также степень двойки.

**22.15.** Для некоторого  $n \neq m$  сумма первых  $n$  членов арифметической прогрессии равна сумме первых  $m$  членов. Найдите сумму первых  $n + m$  членов.

**22.16.** Сумма первых  $n$  членов арифметической прогрессии равна  $S_n$ , сумма первых  $m$  членов равна  $S_m$  ( $m \neq n$ ). Найдите сумму первых  $n + m$  членов.

**22.17.** Найдите сумму всех трёхзначных чисел, делящихся на 30.

**22.18.** Найдите сумму всех трёхзначных чисел, не делящихся ни на 2, ни на 3.

**22.19.** Докажите, что любое число вида  $n^k$ , где  $n$  и  $k$  — натуральные числа, отличные от 1, можно представить в виде суммы  $n$  последовательных нечётных чисел.

**22.20.** Сумма номеров домов на одной стороне квартала равна 247. Какой номер имеет седьмой дом от угла?

**22.21.** Найдите  $2n + 1$  последовательных целых чисел, обладающих следующим свойством: сумма квадратов первых  $n + 1$  чисел равна сумме квадратов последних  $n$  чисел.

**22.22.** Число  $N$  составлено из всех последовательностей из  $n$  цифр 000...00, 000...01, ..., 999...99, записанных в произвольном порядке. Докажите, что  $N$  делится на 999...99 ( $n$  девяток).

**22.23.** Пусть  $a_1 = a > 0$  и  $a_{k+1} = \frac{a_k}{1 + ka_k}$  при  $k \geq 1$ . Вычислите  $a_n$ .

### Арифметическая прогрессия и квадратный трёхчлен

**22.24.** Для арифметической прогрессии с первым членом  $a_1$  и разностью  $d$  укажите квадратный трёхчлен  $f(x)$ , обладающий следующим свойством:  $f(n) = a_1 + a_2 + \dots + a_n$  для всех натуральных  $n$ .

**22.25.** Докажите, что для любого квадратного трёхчлена  $f(x) = ax^2 + bx$  последовательность  $a_n = f(n) - f(n - 1)$  — арифметическая прогрессия. Найдите первый член  $a_1$  и разность  $d$  этой прогрессии.

**22.26.** а) Найдите квадратный трёхчлен  $f(x) = ax^2 + bx$ , для которого  $f(n) - f(n - 1) = n$  для всех натуральных  $n$ .

б) С помощью этого трёхчлена выведите формулу суммы

$$1 + 2 + \dots + n.$$

**22.27.** а) Найдите кубический многочлен  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ , для которого  $f(n) - f(n - 1) = n^2$  для всех натуральных  $n$ .

б) С помощью этого многочлена выведите формулу суммы

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2.$$

### Примеры арифметических прогрессий

**22.28.** а) Существует ли арифметическая прогрессия длины 5, составленная из членов последовательности  $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$ ?

б) Существует ли такая арифметическая прогрессия сколь угодно большой длины?

**22.29.** Можно ли из натуральных чисел, которые нельзя представить ни в виде суммы, ни в виде разности двух простых чисел, составить бесконечную арифметическую прогрессию?

### Разбиение на арифметические прогрессии

Будем говорить, что натуральные числа *разбиты* на  $n$  арифметических прогрессий, если каждое натуральное число принадлежит ровно одной из этих прогрессий. Например, натуральные числа разбиты на чётные и нечётные числа.

**22.30.** Приведите пример разбиения натуральных чисел на три арифметические прогрессии.

**22.31.** Натуральные числа разбиты на  $n$  арифметических прогрессий. Пусть  $d_1, d_2, \dots, d_n$  — разности этих прогрессий. Докажите, что  $\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} + \dots + \frac{1}{d_n} = 1$ .

**22.32.** Натуральные числа разбиты на  $n$  арифметических прогрессий. Докажите, что хотя бы у одной из этих прогрессий первый член делится на разность прогрессии.

### Разные задачи

**22.33.** Можно ли разбить натуральные числа на две части так, чтобы ни в одной из них не было бесконечной арифметической прогрессии?

**22.34.** Укажите натуральное число  $n$ , для которого числа  $n + 36$ ,  $n + 300$  и  $n + 596$  — квадраты трёх последовательных членов арифметической прогрессии.

**22.35.** Для проверки на прочность партии одинаковых шариков выданы два шарика. Требуется выяснить, при бросании с какого именно этажа  $n$ -этажного дома шарик разбивается. Докажите, что если  $\frac{m(m+1)}{2} \geq n$ , то это можно сделать за  $m$  испытаний.

## Глава 23

# Геометрическая прогрессия

### Основные факты и понятия

Последовательность чисел  $b_1, b_2, b_3, \dots, b_n, \dots$  называют *геометрической прогрессией*, если для всех натуральных  $n$  выполняется равенство  $b_{n+1} = qb_n$ , где  $q$  — некоторое число, не равное нулю. Это число называют *знаменателем геометрической прогрессии*. Для конечной последовательности  $b_1, b_2, b_3, \dots, b_m$  такое равенство должно выполняться для всех натуральных  $n < m$ .

Для  $n$ -го члена геометрической прогрессии справедлива формула  $b_n = q^{n-1}b_1$ . Иногда  $n$ -й член бывает удобно записать в виде  $b_n = q^n b_0$ , где  $b_0 = \frac{b_1}{q}$ .

Сумма первых  $n$  членов геометрической прогрессии со знаменателем  $q \neq 1$  равна  $\frac{b_1(1 - q^n)}{1 - q}$ .

### Свойства геометрической прогрессии

**23.1.** Найдите произведение первых  $2n + 1$  членов геометрической прогрессии, если её член с номером  $n + 1$  равен  $b$ .

**23.2.** Сумма всех членов геометрической прогрессии с чётным числом членов в 3 раза больше суммы членов с нечётными номерами. Найдите знаменатель этой прогрессии.

**23.3.** Могут ли длины сторон прямоугольного треугольника образовывать геометрическую прогрессию?

**23.4.** Последовательность  $a_1, a_2, \dots$  обладает следующим свойством:  $a_{n+1} = qa_n + d$  для всех натуральных  $n$  и некоторых постоянных чисел  $q \neq 1$  и  $d$ . Докажите, что можно подобрать число  $c$  так, что последовательность  $b_n = a_n + c$  будет геометрической прогрессией.

**23.5.** Первые 10 членов возрастающей геометрической прогрессии — целые числа. Могут ли все остальные члены не быть целыми?

**23.6.** Существует ли геометрическая прогрессия, среди членов которой есть числа 8, 18 и 27?

**23.7.** Существует ли геометрическая прогрессия, среди членов которой есть числа 1, 2 и 3?

**23.8.** В возрастающей геометрической прогрессии три члена. Сумма этих членов равна 19, а сумма их квадратов равна 133. Найдите прогрессию.

**23.9.** В возрастающей геометрической прогрессии четыре члена. Сумма крайних членов равна 13, а сумма средних равна 4. Найдите члены прогрессии.

**23.10.** Дана геометрическая прогрессия, знаменатель  $q$  которой — целое число, отличное от  $-1$ . Докажите, что сумма любого числа произвольно выбранных её членов не может равняться никакому члену этой прогрессии.

### Сумма геометрической прогрессии

**23.11.** Сумма первых  $n$  членов геометрической прогрессии, знаменатель которой отличен от  $\pm 1$ , равна  $S_n$ , сумма первых  $2n$  членов равна  $S_{2n}$ . Найдите сумму членов с номерами от  $2n + 1$  до  $3n$ .

**23.12.** Найдите сумму  $n$  слагаемых  $1 + 11 + 111 + \dots + 11\dots 111$ .

**23.13.** Найдите сумму

$$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots + (n + 1)x^n \quad \text{при } x \neq 1.$$

**23.14.** Число  $2^n - 1 = P$  простое. Докажите, что сумма делителей числа  $N = 2^{n-1}P$ , отличных от  $N$ , равна  $N$ .

### Арифметическая и геометрическая прогрессии

**23.15.** Три числа, записанные в одном и том же порядке, образуют одновременно арифметическую и геометрическую прогрессии. Обязательно ли эти числа равны?

**23.16.** Различные числа  $a$ ,  $b$  и  $c$  в указанном порядке образуют геометрическую прогрессию, а числа  $a + b$ ,  $b + c$  и  $c + a$  в указанном порядке образуют арифметическую прогрессию. Найдите знаменатель геометрической прогрессии.

**23.17.** Последовательность из двух различных чисел продолжили двумя способами: так, чтобы получилась геометрическая прогрессия, и так, чтобы получилась арифметическая прогрессия. При этом третий член геометрической прогрессии совпал с десятым членом арифметической прогрессии. С каким членом арифметической прогрессии совпал четвёртый член геометрической прогрессии?

**23.18.** При сложении одноимённых членов арифметической и геометрической прогрессий, каждая из которых состоит из четырёх членов, получается последовательность 27, 27, 39, 87. Найдите эти прогрессии.

**23.19.** Подберите натуральные числа  $a < b < c < d$  так, чтобы числа  $a, b, c$  составляли арифметическую прогрессию, числа  $b, c, d$  — геометрическую прогрессию, а разность  $d - a$  была равна: а) 7; б) 10; в) 30.

**23.20.** Первый член арифметической прогрессии равен 1, а разность прогрессии — натуральное число  $d$ . Докажите, что из некоторых членов этой прогрессии можно составить бесконечную геометрическую прогрессию.

**23.21.** Пусть  $a, a + d, a + 2d, \dots$  — бесконечная арифметическая прогрессия, причём числа  $a$  и  $d$  положительные. Докажите, что из некоторых членов этой прогрессии можно составить бесконечную геометрическую прогрессию тогда и только тогда, когда число  $\frac{a}{d}$  рационально.

## Глава 24

# Рациональная степень числа

### Основные факты и понятия

*Корнем степени  $n$  из числа  $a$*  называют такое число (если оно существует),  $n$ -я степень которого равна  $a$ .

Корень нечётной степени из любого действительного число существует и притом единствен. Корень нечётной степени из положительного числа положителен, а из отрицательного числа отрицателен. Корень нечётной степени  $n$  из числа  $a$  обозначают  $\sqrt[n]{a}$ .

Существуют ровно два корня чётной степени из положительного числа; они отличаются только знаками. Положительный корень чётной степени  $n$  из положительного числа  $a$  обозначают  $\sqrt[n]{a}$ , а отрицательный корень чётной степени  $n$  из положительного числа  $a$  обозначают  $-\sqrt[n]{a}$ . Корня чётной степени из отрицательного числа не существует.

Неотрицательный корень степени  $n$  из неотрицательного числа  $a$  называют *арифметическим корнем* степени  $n$  из числа  $a$ .

Для неотрицательного числа  $a$  и натуральных чисел  $m$  и  $n$  ( $m \geq 2$ ,  $n \geq 2$ ) справедливы равенства

$$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}, \quad \sqrt[mn]{a^m} = \sqrt[n]{a} \quad \text{и} \quad \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}.$$

Для натурального числа  $n$  и отличного от нуля числа  $a$  число  $a^{-n}$  определяется как  $\frac{1}{a^n}$ .

Для положительного числа  $a$  и рационального числа  $\frac{p}{q}$ , где числа  $p$  и  $q$  целые и  $q \geq 2$ , число  $a^{\frac{p}{q}}$  определяется как  $\sqrt[q]{a^p}$ . При этом справедливы равенства

$$a^{\frac{p}{q}} = (a^{\frac{1}{q}})^p, \quad a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{pk}{qk}}$$

(число  $k$  натуральное) и  $a^p = a^{\frac{pq}{q}}$ .

### Корень степени $n$

**24.1.** Докажите, что  $\sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}} = 4$ .

**24.2.** Докажите, что  $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}} = 1$ .

**24.3.** Докажите, что числа

$$\sqrt[3]{3+\sqrt{\frac{242}{27}}} + \sqrt[3]{3-\sqrt{\frac{242}{27}}} \quad \text{и} \quad \sqrt[3]{6+\sqrt{\frac{847}{27}}} + \sqrt[3]{6-\sqrt{\frac{847}{27}}}$$

рациональные.

**24.4.** Докажите, что

$$\sqrt{\sqrt[3]{4}-1} + \sqrt{\sqrt[3]{16}-\sqrt[3]{4}} = \sqrt{3}.$$

**24.5.** Докажите, что

$$\sqrt[3]{\sqrt[3]{2}-1} = \frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{2}+1} = \frac{1}{\sqrt[3]{9}} (\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1).$$

**24.6.** Найдите многочлен с целыми коэффициентами, корнем которого является число  $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3}$ .

**24.7.** Члены  $b_1$ ,  $b_{10}$  и  $b_{100}$  геометрической прогрессии — натуральные числа. Обязательно ли  $b_{99}$  — натуральное число?

### Уравнения

**24.8.** Решите уравнение  $\sqrt[3]{1-x} + \sqrt[3]{1+x} = \sqrt[3]{2}$ .

**24.9.** Решите уравнение  $\frac{x^3}{\sqrt{4-x^2}} + x^2 - 4 = 0$ .

**24.10.** Решите уравнение  $\sqrt[3]{2-x} + \sqrt{x-1} = 1$ .

**24.11.** Решите уравнение  $\sqrt[3]{13x+37} - \sqrt[3]{13x-37} = \sqrt[3]{2}$ .

**24.12.** Для каждого натурального числа  $m$  решите уравнение

$$\sqrt[m]{(1+x)^2} - \sqrt[m]{(1-x)^2} = \sqrt[m]{1-x^2}.$$

**24.13.** Решите уравнение  $x^3 - [x] = 3$ .

### Неравенства

**24.14.** Докажите, что если  $x > y > 0$ , то для любого натурального  $n$  выполняется неравенство  $\sqrt[n]{x} > \sqrt[n]{y}$ .

**24.15.** Докажите, что если  $x > y > 0$  и  $r$  — положительное рациональное число, то  $x^r > y^r$ .

**24.16.** Пусть  $r$  и  $s$  — рациональные числа, причём  $r > s > 0$ , и  $x > 1$ . Докажите, что  $x^r > x^s$ .

**24.17.** Докажите, что  $\sqrt{4} + \sqrt[3]{4} + \sqrt[4]{4} > 4$  и  $\sqrt{7} + \sqrt[3]{7} + \sqrt[4]{7} < 7$ .

**24.18.** Какое из чисел больше:  $\sqrt{11}$  или  $5 - \sqrt[3]{5}$ ?

**24.19.** Докажите, что  $\frac{2}{3} \left( x + \frac{1}{x^2} \right) \geq \sqrt[3]{2}$  при  $x > 0$ .



**Избавление от иррациональности в знаменателе**

В заданиях 24.20—24.23 избавьтесь от иррациональности в знаменателе дроби.

**24.20.**  $\frac{1}{\sqrt[3]{2}-1}.$

**24.21.**  $\frac{1}{\sqrt[3]{2}+1}.$

**24.22.**  $\frac{\sqrt[3]{2}}{1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}.$

**24.23.**  $\frac{1}{\alpha+1},$  где  $\alpha^3 - 3\alpha + 1 = 0.$

**Разные задачи**

**24.24.** Укажите натуральные числа  $m$  и  $n$ , для которых

$$\sqrt[4]{m} - \sqrt[4]{n} = \sqrt{4\sqrt{3}-6}.$$

**24.25.** Первый член и знаменатель геометрической прогрессии — положительные числа, члены с номерами  $m-n$  и  $m+n$  равны  $b_{m-n}$  и  $b_{m+n}$ . Найдите члены с номерами  $m$  и  $n$ .

**24.26.** Пусть  $x = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$  и  $y = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}$ , где  $n$  — натуральное число. Докажите, что  $x^y = y^x$ .

**24.27.** Найдите все положительные рациональные решения уравнения  $x^y = y^x$ , для которых  $x > y$ .

## Глава 25

# Тригонометрические формулы

### Основные факты и понятия

В качестве единицы измерения углов используют не только градус, но и радиан. *Радиан* — это величина центрального угла окружности радиуса  $R$ , опирающегося на дугу длиной  $R$ . Угол в  $1^\circ$  равен углу в  $\frac{\pi}{180}$  радиан.

*Единичная окружность* — это окружность радиуса 1 с центром в начале координат  $Oxy$ . Пусть  $A$  — точка с координатами  $(1; 0)$ ,  $B$  — точка, движущаяся против часовой стрелки по единичной окружности и в начальный момент совпадающая с точкой  $A$ . Каждому положительному числу  $\alpha$  можно сопоставить точку  $B$ , прошедшую дугу длиной  $\alpha$ . Если  $0 < \alpha < \pi$ , то угол  $AOB$ , измеренный в радианах, равен  $\alpha$ . Кроме того, числам  $\alpha$  и  $\alpha + 2k\pi$  для всех натуральных чисел  $k$  соответствует одна и та же точка  $B$ . Для любого положительного числа  $\alpha$  будем говорить, что точка  $B$  соответствует углу  $\alpha$ . Чтобы можно было рассматривать и отрицательные углы, будем считать, что углам  $\alpha + 2k\pi$  для всех целых чисел  $k$  соответствует одна и та же точка. Если пройти по единичной окружности дугу длиной  $2\pi - \alpha$  против часовой стрелки, то окажешься в той же точке, что и пройдя дугу длиной  $\alpha$  по часовой стрелке. Поэтому точки, соответствующие углам  $\alpha$  и  $-\alpha$ , симметричны относительно оси абсцисс.

Число, равное ординате точки единичной окружности, соответствующей углу  $\alpha$ , называют *синусом* этого угла и обозначают  $\sin \alpha$ . Число, равное абсциссе точки единичной окружности, соответствующей углу  $\alpha$ , называют *косинусом* этого угла и обозначают  $\cos \alpha$ .

Для любого угла  $\alpha$  выполняется *основное тригонометрическое тождество*

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$$

Для любого угла  $\alpha$  выполняются равенства

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha \quad \text{и} \quad \cos(-\alpha) = \cos \alpha,$$

а также равенства

$$\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha \quad \text{и} \quad \cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha.$$

Число, равное  $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ , где  $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$  (число  $k$  целое), называют тангенсом угла  $\alpha$  и обозначают  $\operatorname{tg} \alpha$ . Число, равное  $\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$ , где  $\alpha \neq k\pi$  (число  $k$  целое), называют котангенсом угла  $\alpha$  и обозначают  $\operatorname{ctg} \alpha$ .

Для любых углов  $\alpha$  и  $\beta$  справедливы равенства

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta,$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta.$$

Для любого угла  $\alpha$  выполняются равенства  $\sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}$  и  $\cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1$ .

### Тригонометрические тождества

**25.1.** Докажите, что

$$\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x \quad \text{и} \quad \cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x.$$

**25.2.** Докажите, что

$$\cos x + \sin x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \quad \text{и} \quad \cos x - \sin x = \sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right).$$

**25.3.** Какое наибольшее количество различных значений может принимать число  $\sin \frac{x}{2}$ , если задано число  $a = \sin x$ ?

**25.4.** Какое наибольшее количество различных значений может принимать число  $\sin \frac{x}{3}$ , если задано число  $a = \sin x$ ?

**25.5.** Докажите, что

$$3(\sin^4 x + \cos^4 x) - 2(\sin^6 x + \cos^6 x) = 1.$$

**25.6.** Докажите, что  $\sin 10^\circ \sin 40^\circ \sin 50^\circ = \frac{1}{4} \sin 20^\circ$ .

**25.7.** Можно ли выбрать число  $\alpha$  так, чтобы число  $\cos(2^n \alpha)$  было отрицательным для всех натуральных  $n$ ?

### Тангенс и котангенс

**25.8.** Докажите, что  $\operatorname{tg} x = \frac{\sin 2x}{\cos 2x + 1}$ , если  $\cos x \neq 0$ .

**25.9.** Докажите, что  $(1 + \operatorname{tg} x) \left(1 + \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right) = 2$ .

**25.10.** Докажите, что  $\frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x} = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + x\right)$ .

25.11. Докажите, что  $\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x = 2 \operatorname{ctg} 2x$ .

25.12. Докажите, что

$$\operatorname{tg} x + 2 \operatorname{tg} 2x + 4 \operatorname{tg} 4x + \dots + 2^n \operatorname{tg} 2^n x = \operatorname{ctg} x - 2^{n+1} \operatorname{ctg} 2^{n+1} x.$$

25.13. Докажите, что  $\operatorname{tg} mx - \operatorname{tg} nx = \frac{\sin(m-n)x}{\cos mx \cos nx}$ .

25.14. Докажите, что

$$\frac{1}{\cos x \cos 2x} + \frac{1}{\cos 2x \cos 3x} + \dots + \frac{1}{\cos(n-1)x \cos nx} = \frac{\operatorname{tg} nx - \operatorname{tg} x}{\sin x}.$$

25.15. Докажите, что  $\operatorname{ctg} 30^\circ + \operatorname{ctg} 75^\circ = 2$ .

### Тангенс суммы

25.16. Докажите, что  $\operatorname{tg}(x+y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$ .

25.17. Пусть  $\operatorname{tg} x = \frac{1}{2}$  и  $\operatorname{tg} y = \frac{1}{3}$ . Найдите  $\operatorname{tg}(x+y)$ .

25.18. Пусть  $\operatorname{tg} x = \frac{1}{3}$ ,  $\operatorname{tg} y = \frac{1}{5}$ ,  $\operatorname{tg} z = \frac{1}{7}$  и  $\operatorname{tg} w = \frac{1}{8}$ . Найдите  $\operatorname{tg}(x+y+z+w)$ .

25.19. Пусть  $\operatorname{tg} x = \frac{1}{5}$  и  $\operatorname{tg} y = \frac{1}{239}$ . Найдите  $\operatorname{tg}(4x-y)$ .

25.20. Найдите  $\operatorname{tg}(x+y)$ , если  $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = p$  и  $\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} y = q$ .

25.21. Докажите, что если  $(1 + \operatorname{tg} x)(1 + \operatorname{tg} y) = 2$ , то  $\operatorname{tg}(x+y) = 1$ .

25.22. Докажите, что если  $\operatorname{tg}(x-y) + \operatorname{tg}(y-z) + \operatorname{tg}(z-x) = 0$ , то одно из чисел  $\operatorname{tg} x$ ,  $\operatorname{tg} y$ ,  $\operatorname{tg} z$  равно другому.

### Произведение косинусов

25.23. Докажите, что если  $\sin x \neq 0$ , то

$$\cos x \cos(2x) \cos(4x) \dots \cos(2^{n-1}x) = \frac{\sin(2^n x)}{2^n \sin x}.$$

25.24. Докажите, что  $\cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7} \cos \frac{8\pi}{7} = \frac{1}{8}$ .

25.25. Докажите, что  $\cos \frac{2\pi}{9} \cos \frac{4\pi}{9} \cos \frac{8\pi}{9} = -\frac{1}{8}$ .

### Синусы и косинусы некоторых углов

25.26. Вычислите  $\cos 15^\circ$ .

25.27. Вычислите  $\sin 15^\circ$ .

25.28. Вычислите  $\cos 36^\circ$ .

25.29. Вычислите  $\sin 18^\circ$ .

25.30. Докажите, что  $\cos 36^\circ = \sin 18^\circ + \frac{1}{2}$ .

25.31. Вычислите  $\sin 6^\circ$ .

## Глава 26

# Тригонометрические уравнения и неравенства

### Неравенства и сравнение чисел

26.1. Докажите, что если  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ , то  $\sin \alpha + \cos \alpha > 1$ .

26.2. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции

$$f(x) = a \sin x + b \cos x.$$

26.3. Докажите, что если  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ , то  $\sin \alpha < \alpha < \operatorname{tg} \alpha$ .

26.4. Докажите, что если  $0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$ , то  $\operatorname{tg} \alpha - \alpha < \operatorname{tg} \beta - \beta$ .

26.5. Докажите, что если  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ , то  $\sin(\cos \alpha) < \cos(\sin \alpha)$ .

26.6. Докажите, что если  $0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n < \frac{\pi}{2}$  и  $n > 1$ , то

$$\operatorname{tg} x_1 < \frac{\sin x_1 + \dots + \sin x_n}{\cos x_1 + \dots + \cos x_n} < \operatorname{tg} x_n.$$

26.7. Сравните числа  $\operatorname{tg} 55^\circ$  и 1,4.

### Уравнения

26.8. Решите уравнение  $3 - 7 \cos^2 x \sin x - 3 \sin^3 x = 0$ .

26.9. Решите уравнение  $x^2 + 2x \sin(xy) + 1 = 0$ .

### Вспомогательные тригонометрические функции

26.10. Найдите наибольшее значение выражения

$$x \sqrt{1 - y^2} + y \sqrt{1 - x^2}.$$

26.11. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2x + x^2 y = y, \\ 2y + y^2 z = z, \\ 2z + z^2 x = x. \end{cases}$$

**26.12.** Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^3 - 3x = y, \\ y^3 - 3y = z, \\ z^3 - 3z = x. \end{cases}$$

**26.13.** Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3\left(x + \frac{1}{x}\right) = 4\left(y + \frac{1}{y}\right) = 5\left(z + \frac{1}{z}\right), \\ xy + yz + zx = 1. \end{cases}$$

**26.14.** Пусть  $x_{n+1} = \frac{\sqrt{3}x_n - 1}{x_n + \sqrt{3}}$  при  $n \geq 1$ . Докажите, что  $x_{n+6} = x_n$ .

### Разные задачи

**26.15.** Угол  $x$  заключён между  $\frac{\pi}{2}$  и  $\pi$ ,  $\sin x + \cos x = \frac{\sqrt{2}}{3}$ . Найдите  $\sin x - \cos x$ .

**26.16.** Докажите, что

$$\frac{1}{\sin 45^\circ \sin 46^\circ} + \frac{1}{\sin 47^\circ \sin 48^\circ} + \dots + \frac{1}{\sin 133^\circ \sin 134^\circ} = \frac{1}{\sin 1^\circ}.$$

## Глава 27

### Тригонометрические тождества

#### Произведения и суммы синусов и косинусов

- 27.1. Докажите, что  $\sin x \cos y = \frac{1}{2}(\sin(x - y) + \sin(x + y))$ .
- 27.2. Докажите, что  $\cos x \cos y = \frac{1}{2}(\cos(x + y) + \cos(x - y))$ .
- 27.3. Докажите, что  $\sin x \sin y = \frac{1}{2}(\cos(x - y) - \cos(x + y))$ .
- 27.4. Докажите, что  $\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$ .
- 27.5. Докажите, что  $\sin x - \sin y = 2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2}$ .
- 27.6. Докажите, что  $\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$ .
- 27.7. Докажите, что  $\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$ .

#### Применения формул суммы и произведения

- 27.8. Докажите, что  $y - \sin y < x - \sin x$  для  $0 < y < x < \frac{\pi}{2}$ .
- 27.9. Докажите, что  $\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 80^\circ = \frac{\sqrt{3}}{8}$ .
- 27.10. Что больше:  $\frac{\sin 1^\circ}{\sin 2^\circ}$  или  $\frac{\sin 3^\circ}{\sin 4^\circ}$ ?
- 27.11. Докажите, что

$$4 \cos x \cos y \cos z = \cos(-x + y + z) + \cos(x - y + z) + \\ + \cos(x + y - z) + \cos(x + y + z).$$

- 27.12. Докажите, что

$$4 \sin x \sin y \sin z = \\ = \sin(-x + y + z) + \sin(x - y + z) + \sin(x + y - z) - \sin(x + y + z).$$

- 27.13. Докажите, что

$$\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma + \cos(\alpha + \beta + \gamma) = 4 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\beta + \gamma}{2} \cos \frac{\gamma + \alpha}{2}.$$

- 27.14. Докажите, что

$$\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma - \sin(\alpha + \beta + \gamma) = 4 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\beta + \gamma}{2} \sin \frac{\gamma + \alpha}{2}.$$

27.15. Докажите, что

$$\cos \alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha + \dots + \cos n\alpha = \frac{\sin \frac{(2n+1)\alpha}{2} - \sin \frac{\alpha}{2}}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}.$$

27.16. Вычислите  $\cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7}$ .

27.17. Докажите, что

$$\sin \alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha + \dots + \sin n\alpha = \frac{\sin \frac{n\alpha}{2} \sin \frac{(n+1)\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}}.$$

27.18. Найдите  $\frac{\sin 5x}{\sin x}$ , если  $\frac{\sin 3x}{\sin x} = \frac{6}{5}$ .

27.19. Докажите, что

$$2 \sin 2^\circ + 4 \sin 4^\circ + \dots + 178 \sin 178^\circ = 90 \operatorname{ctg} 1^\circ.$$

27.20. Докажите, что

$$\sin 10^\circ \sin 16^\circ \sin 24^\circ = \sin 2^\circ \cos 4^\circ \sin 34^\circ.$$

### Тангенс половинного угла

Синус и косинус можно представить в виде рациональной функции от тангенса половинного угла (задача 27.21). Это позволяет представить выражение, в которое входят  $\sin x$  и  $\cos x$ , как рациональное выражение от  $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$ .

27.21. Представьте  $\sin x$  и  $\cos x$  в виде рациональных выражений от  $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$ .

27.22. Решите уравнение  $\frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x} = 1 + \sin 2x$ .

27.23. Найдите  $\frac{1}{\sin x} + \operatorname{ctg} x$ , если  $\frac{1}{\cos x} + \operatorname{tg} x = k$ .

27.24. Докажите, что если  $\cos x \neq 0$ , то число  $\operatorname{tg} x$  рационально тогда и только тогда, когда оба числа  $\sin 2x$  и  $\cos 2x$  рациональны.

### Соотношения для углов с данной суммой

27.25. Пусть  $x + y + z = 0$ . Докажите, что

$$\sin 2x + \sin 2y + \sin 2z = -4 \sin x \sin y \sin z.$$

27.26. Пусть  $x + y + z = 0$ . Докажите, что

$$\cos 2x + \cos 2y + \cos 2z + 1 = 4 \cos x \cos y \cos z.$$



В задачах 27.27—27.32 докажите указанное равенство для углов  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$ , связанных соотношением  $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ . В частности, все такие равенства выполняются, когда  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  — углы треугольника.

**27.27.**  $\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma + 4 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma + 1 = 0$ .

**27.28.**  $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma = 1$ .

**27.29.**  $\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = 4 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$ .

**27.30.**  $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma$ .

**27.31.**  $\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \beta \operatorname{ctg} \gamma + \operatorname{ctg} \gamma \operatorname{ctg} \alpha = 1$ .

**27.32.**  $\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \gamma = \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta \operatorname{ctg} \gamma + \frac{1}{\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma}$ .

## Глава 28

# Приближённые вычисления

### Основные факты и понятия

Если число  $a$  мало отличается от числа  $x$ , то число  $a$  называют *приближением* или *приближённым значением* числа  $x$  и говорят, что число  $x$  *приближённо равно*  $a$ . Для приближённого равенства используют обозначение  $\approx$ .

*Абсолютной погрешностью* приближённого равенства  $x \approx a$  называют величину  $|a - x|$ . Запись  $x = 1,217 \pm 0,001$  означает, что абсолютная погрешность приближённого равенства  $x \approx 1,217$  не превосходит 0,001. *Верной цифрой* приближённого значения называют цифру любого разряда, если абсолютная погрешность не превосходит единицы этого разряда.

Число  $h$  называют *оценкой погрешности приближения*  $x \approx a$ , если  $h \geq |a - x|$ .

Если  $a_1 \leq x \leq a_2$ , то число  $a_1$  называют *приближением с недостатком* или *приближением снизу*, а число  $a_2$  называют *приближением с избытком* или *приближением сверху*.

*Относительной погрешностью* приближённого равенства  $x \approx a$  называют величину  $\frac{|a - x|}{|x|}$ . Обратите внимание, что здесь  $x$  — число, которое мы хотим приближённо вычислить.

### Вычисления с заданной погрешностью

В задачах 28.1—28.4 у указанных чисел требуется вычислить первые 20 знаков после запятой.

28.1.  $\sqrt{1 - (0,1)^{20}}$ .

28.2.  $(\sqrt{1001} - \sqrt{1000})^{12}$ .

28.3.  $(5 - \sqrt{26})^{20}$ .

28.4.  $(5 + \sqrt{26})^{20}$ .

### Оценка абсолютной погрешности

28.5. Пусть  $a_1 = 1$  и  $a_{n+1} = \frac{1}{2} \left( a_n + \frac{2}{a_n} \right)$  при  $n \geq 1$ . Докажите, что  $a_5$  отличается от  $\sqrt{2}$  менее чем на  $10^{-10}$ .

**28.6.** Пусть  $a_1 = 1$  и  $a_{n+1} = \frac{2}{3} \left( a_n + \frac{1}{a_n^2} \right)$  при  $n \geq 1$ . Докажите, что  $a_5$  отличается от  $\sqrt[3]{2}$  менее чем на  $10^{-8}$ .

### Оценка относительной погрешности

**28.7.** Докажите, что если относительные погрешности приближённых равенств  $x_1 \approx a_1$  и  $x_2 \approx a_2$  равны  $\delta_1$  и  $\delta_2$ , то относительная погрешность приближённого равенства  $x_1 x_2 \approx a_1 a_2$  не превосходит  $\delta_1 + \delta_2 + \delta_1 \delta_2$ .

**28.8.** Докажите, что если числа  $x_1$ ,  $x_2$  и  $a_2$  отличны от нуля и относительные погрешности приближённых равенств  $x_1 \approx a_1$  и  $x_2 \approx a_2$  равны  $\delta_1$  и  $\delta_2$ , то относительная погрешность приближённого равенства  $\frac{x_1}{x_2} \approx \frac{a_1}{a_2}$  не превосходит  $(\delta_1 + \delta_2) \left| \frac{x_2}{a_2} \right|$ .

### Оценки квадратных корней сверху и снизу

**28.9.** Пусть  $m_1 = 3$ ,  $n_2 = 2$  и  $m_{k+1} = 3m_k + 4n_k$ ,  $n_{k+1} = 2m_k + 3n_k$  при  $k \geq 1$ . Докажите, что

$$\text{а) } m_k^2 - 2n_k^2 = 1; \quad \text{б) } \frac{m_k}{n_k} - \frac{1}{m_k n_k} < \sqrt{2} < \frac{m_k}{n_k}.$$

**28.10.** Пусть  $m_1 = 1$ ,  $n_2 = 1$  и  $m_{k+1} = 3m_k + 4n_k$ ,  $n_{k+1} = 2m_k + 3n_k$  при  $k \geq 1$ . Докажите, что

$$\text{а) } m_k^2 - 2n_k^2 = -1; \quad \text{б) } \frac{m_k}{n_k} < \sqrt{2} < \frac{m_k}{n_k} + \frac{1}{m_k n_k}.$$

**28.11.** Докажите, что  $\frac{239}{169} < \sqrt{2} < \frac{99}{70}$ .

**28.12.** Пусть  $m_1 = 2$ ,  $n_2 = 1$  и  $m_{k+1} = 2m_k + 3n_k$ ,  $n_{k+1} = m_k + 2n_k$  при  $k \geq 1$ . Докажите, что

$$\text{а) } m_k^2 - 3n_k^2 = 1; \quad \text{б) } \frac{m_k}{n_k} - \frac{1}{m_k n_k} < \sqrt{3} < \frac{m_k}{n_k}.$$

**28.13.** Пусть  $m_1 = 1$ ,  $n_2 = 1$  и  $m_{k+1} = 2m_k + 3n_k$ ,  $n_{k+1} = m_k + 2n_k$  при  $k \geq 1$ . Докажите, что

$$\text{а) } m_k^2 - 3n_k^2 = -2; \quad \text{б) } \frac{m_k}{n_k} < \sqrt{3} < \frac{m_k}{n_k} + \frac{2}{m_k n_k}.$$

**28.14.** Докажите, что  $\frac{71}{41} < \sqrt{3} < \frac{97}{56}$ .

## Глава 29

# Метод математической индукции

### Основные факты и понятия

Метод математической индукции используется для доказательства утверждений  $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ , зависящих от натурального параметра  $n$ , называемого *параметром индукции*. При этом сначала доказывается утверждение  $A_1$  (*базис индукции*), а затем доказывается, что если  $k \geq 1$  и верны утверждения  $A_1, A_2, \dots, A_k$ , то верно и утверждение  $A_{k+1}$  (*шаг индукции*). Такое доказательство называют *индукцией по  $n$* .

Очень часто при доказательстве шага индукции используются не все утверждения  $A_1, A_2, \dots, A_k$ , а только утверждение  $A_k$ . Но иногда бывают нужны и все утверждения  $A_1, A_2, \dots, A_k$ .

Иногда бывает так, что требуемое утверждение нельзя доказать по индукции, но зато можно доказать по индукции более сильное утверждение, из которого требуемое следует очевидным образом. Пример такого утверждения даёт задача 29.15.

### Вычисление сумм и произведений

**29.1.** Докажите индукцией по  $n$ , что  $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$ .

**29.2.** Докажите, что для любого натурального  $n$  выполняется равенство

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

**29.3.** Докажите, что для любого натурального  $n$  выполняется равенство

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n - 1)^2 = \frac{n(2n - 1)(2n + 1)}{3}.$$

**29.4.** Докажите, что

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + (n - 1)n = \frac{(n - 1)n(n + 1)}{3}.$$

**29.5.** Докажите, что сумма  $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3$  является квадратом числа  $1 + 2 + 3 + \dots + n$ .

**29.6.** Вычислите сумму  $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \dots + n \cdot n!$ .

**29.7.** Докажите, что

$$1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + \dots + n(n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}.$$

**29.8.** Вычислите произведение

$$\left(1 - \frac{1}{4}\right) \left(1 - \frac{1}{9}\right) \left(1 - \frac{1}{16}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right).$$

### Доказательство неравенств

**29.9.** Докажите, что  $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{n^2} < 2 - \frac{1}{n}$ .

**29.10.** Докажите, что для любого натурального  $n > 1$  выполняется неравенство

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \geq \frac{7}{12}.$$

**29.11.** Докажите неравенство  $\sqrt[n]{n} \leq \sqrt[3]{3}$  для любого натурального  $n$ .

**29.12.** Докажите, что если  $a > -1$ ,  $a \neq 0$  и  $n \geq 2$  — натуральное число, то  $(1+a)^n > 1+na$ .

**29.13.** Докажите, что при  $n \geq 2$  выполняется неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}.$$

**29.14.** Докажите, что

$$2(\sqrt{n+1} - 1) < \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}.$$

**29.15.** Докажите, что

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{3n}}.$$

**29.16.** Докажите, что для любого натурального  $n \geq 2$  выполняется неравенство  $n^n > (n+1)^{n-1}$ .

**29.17.** Докажите, что

$$|\sin x_1| + \dots + |\sin x_n| + |\cos(x_1 + \dots + x_n)| \geq 1.$$

**29.18.** Пусть  $n > 1$  — натуральное число и  $a > b > 0$ . Докажите, что  $\left(\frac{a+b}{2}\right)^n < \frac{a^n + b^n}{2}$ .

**29.19.** Сравните числа  $\sqrt[3]{60}$  и  $2 + \sqrt[3]{7}$ .

### Делимость

**29.20.** Докажите, что сумма кубов трёх последовательных натуральных чисел делится на 9.

**29.21.** Докажите, что число  $11\dots 1$ , состоящее из  $3^n$  единиц, делится на  $3^n$  для любого натурального  $n$ .

### Разные задачи

**29.22.** Докажите равенство

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{199} - \frac{1}{200} = \frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \dots + \frac{1}{200}.$$

**29.23.** Существуют ли 10 различных натуральных чисел, сумма которых делится на каждое из них?

**29.24.** Докажите, что

$$\underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2 + \sqrt{6}}}}}_n = {}^{2^n}\sqrt{2 + \sqrt{3}} + {}^{2^n}\sqrt{2 - \sqrt{3}}.$$

**29.25.** Докажите, что

$$\underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}}_n = 2 \cos \frac{\pi}{2^{n+1}}.$$

**29.26.** В вагоне поезда едут несколько мудрецов. Когда поезд проехал туннель, в окна попала пыль. Вошёл проводник и сказал: «У некоторых из вас испачкались лица. К сожалению, в поезде нет воды. Но сейчас будут большие остановки, поэтому можно будет выйти из поезда и умыться». На  $n$ -й остановке испачкавшиеся мудрецы вышли из поезда, чтобы умыться. Сколько мудрецов испачкалось? (Мудрец идёт умываться тогда и только тогда, когда он точно знает, что испачкался.)

**29.27.** Игрушка «Ханойские башни» имеет три стержня. На одном находится пирамидка из  $n$  колец (уменьшающихся снизу вверх). Эту пирамидку нужно переложить на другой стержень, соблюдая следующие правила игры: нельзя переносить сразу несколько колец и нельзя класть большее кольцо поверх меньшего. Докажите, что это можно сделать за  $2^n - 1$  ходов.

**29.28.** Докажите, что для перекладывания ханойской башни из  $n$  колец требуется не менее  $2^n - 1$  ходов.

### Индукция в обратном направлении

Иногда рассуждения по индукции проводятся в обратном направлении: сначала для некоторого натурального числа  $N$  доказывается утверждение  $A_N$ , а затем доказывается, что если  $2 \leq k \leq N$  и верны утверждения  $A_N, A_{N-1}, \dots, A_k$ , то верно и утверждение  $A_{k-1}$ .

Индукция в обратном направлении может сочетаться с обычной индукцией следующим образом. Сначала по индукции утверждение доказывается не для всех натуральных  $n$ , а только для некоторых, например для степеней двойки. А затем уже утверждение доказывается для всех натуральных  $n$  индукцией в обратном направлении.

**29.29.** Докажите, что для любого натурального  $n \geq 2$  выполняется неравенство

$$\sqrt[n]{n \sqrt{(n+1) \sqrt{\dots \sqrt{n+k}}}} < n+1.$$

**29.30.** Числа  $a_1, a_2, \dots, a_n$  положительные. Докажите неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим

$$\sqrt[n]{a_1 \dots a_n} \leq \frac{a_1 + \dots + a_n}{n}$$

а) для чисел вида  $n = 2^m$ ; б) для всех натуральных  $n$ .

**29.31.** Докажите, что числа  $1, 2, \dots, n$  можно записать в таком порядке, что между любыми двумя числами не будет расположено их среднее арифметическое.

## Глава 30

# Последовательности чисел

### Основные факты и понятия

Если каждому натуральному числу  $n$  сопоставлено некоторое число  $x_n$ , то говорят, что задана *последовательность чисел*  $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ . Эту последовательность чисел иногда обозначают  $\{x_n\}$ .

Если числа  $x_n$  сопоставлены не всем натуральным числам  $n$ , а только числам от 1 до  $N$ , то говорят, что задана *конечная последовательность чисел*  $x_1, x_2, \dots, x_N$ .

Числа  $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$  называют *членами последовательности*.

Последовательность  $\{x_n\}$  называют *возрастающей*, если  $x_{n+1} > x_n$  для всех натуральных  $n$ . Последовательность  $\{x_n\}$  называют *убывающей*, если  $x_{n+1} < x_n$  для всех натуральных  $n$ . Последовательность  $\{x_n\}$  называют *неубывающей*, если  $x_{n+1} \geq x_n$  для всех натуральных  $n$ . Последовательность  $\{x_n\}$  называют *невозрастающей*, если  $x_{n+1} \leq x_n$  для всех натуральных  $n$ .

Последовательность называют *монотонной*, если она возрастающая, убывающая, неубывающая или невозрастающая.

Последовательность  $\{x_n\}$  называют *ограниченной сверху*, если существует такое число  $C$ , что  $x_n \leq C$  для всех  $n$ . Последовательность  $\{x_n\}$  называют *ограниченной снизу*, если существует такое число  $c$ , что  $x_n \geq c$  для всех  $n$ .

### Конечные последовательности

**30.1.** Найдите произведение  $x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_8$ , если

$$x_1 = 119, \quad x_2 = \frac{1}{x_1}, \quad x_3 = \frac{2}{x_2}, \quad x_4 = \frac{3}{x_3}, \quad \dots, \quad x_8 = \frac{7}{x_7}.$$

**30.2.** Каждый член последовательности  $a_1, a_2, \dots, a_{100}$ , кроме первого и последнего, является произведением двух соседних с ним членов. Найдите число  $a_{100}$ , если известно, что  $a_1 = 7$  и все члены последовательности отличны от нуля.

**30.3.** Расположите числа от 1 до  $n^2$  так, чтобы в полученной последовательности не было ни  $n + 1$  членов (не обязательно после-



довательных), образующих возрастающую последовательность, ни  $n + 1$  членов, образующих убывающую последовательность.

**30.4.** Числа  $p$  и  $q$  натуральные,  $x_1 = p$ ,  $x_2 = q$  и  $x_{n+2} = x_n - \frac{1}{x_{n+1}}$  при  $n \geq 1$ , если  $x_{n+1} \neq 0$ . Докажите, что эта последовательность конечная, и укажите номер члена, равного нулю.

### Бесконечные последовательности

**30.5.** Пусть  $a_n = 1$  и  $a_{n+1} = a_n + 8n$  при  $n \geq 1$ . Докажите, что  $a_n = (2n - 1)^2$

**30.6.** Может ли бесконечная возрастающая последовательность быть ограниченной?

**30.7.** Существует ли бесконечная последовательность натуральных чисел, никакие три члена которой не могут быть сторонами одного треугольника?

**30.8.** Докажите, что последовательность  $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$  убывающая.

### Неравенства для членов последовательности

**30.9.** Найдите наибольший член последовательности  $x_n = \frac{n-1}{n^2+1}$ .

**30.10.** Пусть  $a_1 = \frac{1}{2}$  и  $a_{n+1} = a_n - a_n^2$  при  $n \geq 1$ . Докажите, что  $a_n < \frac{1}{n+1}$  при  $n > 1$ .

**30.11.** Пусть  $a_1 = 1$  и  $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n}$  при  $n \geq 1$ . Докажите, что  $\sqrt{2n-1} < a_n < \sqrt{3n-2}$ .

### Числа Фибоначчи

В главе 14 задачника для 8 класса в связи с корнями квадратного трёхчлена нам уже встречались *числа Фибоначчи*

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right).$$

Напомним, что  $F_1 = 1$ ,  $F_2 = 1$  и  $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$  при  $n \geq 3$ . Начало этой последовательности имеет вид 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ... Здесь мы обсудим некоторые другие свойства этих чисел. Числа Фибоначчи ещё встретятся нам в главе 33.

**30.12.** а) Докажите, что  $F_k^2 = F_k F_{k+1} - F_{k-1} F_k$  при  $k \geq 2$ .

б) Докажите, что  $F_1^2 + F_2^2 + \dots + F_n^2 = F_n F_{n+1}$ .

**30.13.** Докажите, что числа  $F_n$  и  $F_{n+1}$  взаимно простые.

**30.14.** Докажите, что  $F_{n+k} = F_{n-1}F_k + F_nF_{k+1}$  (при  $n \geq 2$  и  $k \geq 1$ ).

**30.15.** Докажите, что  $F_n^2 + F_{n-1}^2 = F_{2n-1}$  при  $n \geq 2$ .

### Рекуррентные последовательности

*Линейная рекуррентная последовательность* — это последовательность, задаваемая линейным рекуррентным соотношением

$$a_n = p_1 a_{n-1} + p_2 a_{n-2} + \dots + p_d a_{n-d} \quad \text{при } n > d$$

и начальными членами  $a_1, a_2, \dots, a_d$ . Здесь  $p_1, \dots, p_d$  — некоторые числа, причём  $p_d \neq 0$ . Число  $d$  называют *порядком* последовательности. Линейные рекуррентные последовательности называют также *возвратными последовательностями*. В этом параграфе обсуждаются линейные рекуррентные последовательности порядка 2 и выясняется связь между рекуррентной последовательностью

$$a_n = p a_{n-1} + q a_{n-2}$$

и корнями уравнения  $x^2 = px + q$ .

**30.16.** Пусть  $a_1 = 2$ ,  $a_2 = 3$  и  $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}$  при  $n \geq 3$ . Докажите, что  $a_n = 2^{n-1} + 1$ .

**30.17.** Пусть  $a_1 = 3$ ,  $a_2 = 7$  и  $a_{n+1} = a_n - a_{n-1}$  при  $n \geq 2$ . Найдите  $a_{100}$ .

**30.18.** Корни  $x_1$  и  $x_2$  квадратного уравнения  $x^2 = px + q$  различны. Докажите, что члены последовательности  $a_n = \lambda x_1^{n-1} + \mu x_2^{n-1}$  удовлетворяют соотношению  $a_{n+2} = p a_{n+1} + q a_n$ .

**30.19.** Последовательность задана первыми двумя членами  $a_1$  и  $a_2$  и рекуррентным соотношением  $a_{n+2} = p a_{n+1} + q a_n$  при  $n > 1$ . Корни  $x_1$  и  $x_2$  квадратного уравнения  $x^2 = px + q$  различны. Докажите, что можно выбрать числа  $\lambda$  и  $\mu$  так, что  $a_n = \lambda x_1^{n-1} + \mu x_2^{n-1}$  для всех натуральных  $n$ .

**30.20.** Найдите последовательность, заданную двумя первыми членами  $a_1 = 5$ ,  $a_2 = 1$  и рекуррентным соотношением

$$a_{n+2} = -a_{n+1} + 6a_n$$

при  $n > 1$ .

**30.21.** Числа  $a$  и  $b$  различны. Найдите последовательность, заданную двумя первыми членами  $a_1 = a + b$ ,  $a_2 = a^2 + ab + b^2$  и рекуррентным соотношением  $a_{n+2} = (a + b)a_{n+1} - aba_n$  при  $n > 1$ .

**30.22.** Докажите, что члены последовательности

$$a_n = (\lambda + n\mu)p^{n-1}$$

удовлетворяют рекуррентному соотношению  $a_{n+2} = 2pa_{n+1} - p^2a_n$ .

**30.23.** Последовательность задана первыми двумя членами  $a_1$  и  $a_2$  и рекуррентным соотношением  $a_{n+2} = 2pa_{n+1} - p^2a_n$  при  $n > 1$ . Докажите, что при  $p \neq 0$  можно выбрать числа  $\lambda$  и  $\mu$  так, что  $a_n = (\lambda + n\mu)p^{n-1}$  для всех натуральных  $n$ .

**30.24.** Найдите последовательность, заданную двумя первыми членами  $a_1 = 3$ ,  $a_2 = 15$  и рекуррентным соотношением  $a_{n+2} = 6a_{n+1} - 9a_n$  при  $n > 1$ .

### Последовательность разностей

Последовательности  $a_1, a_2, a_3, \dots$  можно сопоставить *последовательность разностей*  $a_2 - a_1, a_3 - a_2, a_4 - a_3, \dots$ . Будем обозначать новую последовательность  $\Delta a_1, \Delta a_2, \Delta a_3, \dots$ . Затем можно рассмотреть *последовательность вторых разностей*

$$\Delta \Delta a_1 = (a_3 - a_2) - (a_2 - a_1) = a_3 - 2a_2 + a_1,$$

$$\Delta \Delta a_2 = a_4 - 2a_3 + a_2,$$

.....

Аналогично можно рассмотреть последовательность *третьих разностей* и т.д.

**30.25.** Найдите последовательность разностей и последовательность вторых разностей для последовательности  $a_n = n^2$ .

**30.26.** Докажите, что

$$(x+1)^n = x^n + C_n^{n-1}x^{n-1} + \dots + C_n^kx^k + \dots + C_n^1x + 1.$$

**30.27.** Вычислите последовательность разностей для последовательности  $a_n = n^k$ .

**30.28.** Вычислите последовательность разностей для последовательности  $a_n = C_n^k$ .

**30.29.** Докажите, что последовательность разностей для последовательности  $a_n = P_k(n)$ , где  $P_k$  — многочлен степени  $k$ , имеет вид  $\Delta a_n = Q_{k-1}(n)$ , где  $Q_{k-1}$  — многочлен степени  $k-1$ . Как связаны старшие коэффициенты этих многочленов?

### Суммы степеней

**30.30.** Пусть  $b_n = \Delta a_n$  и  $S_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n$ . Как связаны последовательности  $S_n$  и  $a_n$ ?

- 30.31.** а) Найдите последовательность  $a_n$ , для которой  $\Delta a_n = n^2$ .  
б) Выведите формулу для суммы  $1^2 + 2^2 + \dots + n^2$ .
- 30.32.** а) Найдите последовательность  $a_n$ , для которой  $\Delta a_n = n^3$ .  
б) Выведите формулу для суммы  $1^3 + 2^3 + \dots + n^3$ .
- 30.33.** Выведите формулу для суммы  $1^3 + 3^3 + \dots + (2n+1)^3$ .
- 30.34.** Докажите, что сумму  $1^k + 2^k + \dots + n^k$  можно представить в виде многочлена от  $n$  степени  $k+1$ . Найдите старший коэффициент этого многочлена.

### Последовательность Фарея

Последовательность Фарея порядка  $n$  — это возрастающая последовательность несократимых дробей, которые заключены между 0 и 1 и знаменатели которых не превосходят  $n$ . Например, последовательность Фарея порядка 5 такова:

$$\frac{0}{1}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{1}{1}.$$

**30.35.** Докажите, что знаменатели двух соседних дробей в последовательности Фарея не могут быть одинаковыми.

**30.36.** Пусть  $\frac{a}{b}$  и  $\frac{c}{d}$  — соседние члены последовательности Фарея. Докажите, что  $|ad - bc| = 1$ .

**30.37.** Пусть  $\frac{a}{b} < \frac{x}{y} < \frac{c}{d}$  — три последовательных члена последовательности Фарея. Докажите, что  $\frac{x}{y} = \frac{a+c}{b+d}$ .

**30.38.** Пусть  $\frac{a}{b}$  и  $\frac{c}{d}$  — соседние члены последовательности Фарея порядка  $n$ . Докажите, что  $b+d > n$ .

**30.39.** Докажите, что сумма числителей членов последовательности Фарея в два раза меньше суммы знаменателей.

## Глава 31

# Множества

### Основные факты и понятия

*Множество* — это некоторый набор объектов, называемых *элементами* этого множества. Запись  $a \in A$  означает, что  $a$  — элемент множества  $A$ .

Если каждый элемент множества  $A$  является элементом множества  $B$ , то говорят, что  $A$  — *подмножество* множества  $B$ . Запись  $A \subset B$  означает, что  $A$  — подмножество множества  $B$ .

*Конечное* множество — это множество, состоящее из элементов  $a_1, \dots, a_n$ , где  $n$  — натуральное число. Множество, состоящее из элементов  $a_1, \dots, a_n$ , обозначают  $\{a_1, \dots, a_n\}$ .

*Бесконечное* множество — это множество, в котором для любого натурального  $n$  найдётся  $n$  различных элементов.

Множество, не содержащее ни одного элемента, называют *пустым* и обозначают  $\emptyset$ . Пустое множество является подмножеством любого множества.

Множество всех натуральных чисел обозначают  $\mathbb{N}$ , целых —  $\mathbb{Z}$ , рациональных —  $\mathbb{Q}$ , действительных —  $\mathbb{R}$ .

*Объединение* множеств  $A$  и  $B$  — это множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих либо множеству  $A$ , либо множеству  $B$ . Объединение множеств  $A$  и  $B$  обозначают  $A \cup B$ .

*Пересечение* множеств  $A$  и  $B$  — это множество, состоящее из всех элементов, каждый из которых принадлежит как множеству  $A$ , так и множеству  $B$ . Пересечение множеств  $A$  и  $B$  обозначают  $A \cap B$ .

Множества  $A$  и  $B$  называют *непересекающимися*, если  $A \cap B = \emptyset$ .

Примером подмножества плоскости является множество точек, координаты  $(x; y)$  которых удовлетворяют некоторому уравнению

$$f(x, y) = 0.$$

Окружность радиуса  $R$  с центром  $(x_0; y_0)$  задаётся уравнением

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2.$$

### Объединение и пересечение множеств

**31.1.** На олимпиаду каждый из 30 школьников принёс одну ручку, один карандаш и одну линейку. После олимпиады 26 из них потеряли ручку, 23 — линейку и 21 — карандаш. Найдите наименьшее возможное количество школьников, потерявших все три предмета.

**31.2.** Найдите количество всех подмножеств множества, состоящего из  $n$  элементов. (Подмножества множества включают его само и пустое множество.)

**31.3.** Множество состоит из  $n$  элементов. Сколькими способами можно выбрать в нём непересекающиеся подмножества  $A$  и  $B$ ?

**31.4.** Даны 2020 множеств, каждое из которых состоит из 45 элементов, причём объединение любых двух множеств содержит ровно 89 элементов. Сколько элементов содержит объединение всех этих множеств?

**31.5.** В множестве, состоящем из  $n$  элементов, выбрано  $2^{n-1}$  подмножеств, каждые три из которых имеют общий элемент. Докажите, что все эти подмножества имеют общий элемент.

### Уравнение окружности

**31.6.** Найдите уравнение касательной к окружности  $x^2 + y^2 = 1$ , проходящей через точку  $(x_0; y_0)$ , расположенную на окружности.

**31.7.** К окружности  $x^2 + y^2 = 1$  проведены две касательные из точки  $(x_0; y_0)$ , расположенной вне окружности. Найдите уравнение прямой, соединяющей точки касания.

**31.8.** Найдите координаты точек касания окружности  $x^2 + y^2 = 1$  и касательных, проходящих через точку  $(0; b)$ , расположенную вне окружности.

**31.9.** Окружности

$$x^2 + a_1x + y^2 + b_1y + c_1 = 0$$

и

$$x^2 + a_2x + y^2 + b_2y + c_2 = 0$$

пересекаются в двух точках. Найдите уравнение прямой, проходящей через эти точки.

**31.10.** Докажите, что точки пересечения двух парабол с перпендикулярными осями лежат на одной окружности.

**31.11.** Из точки, лежащей на прямой  $ax + by = 1$ , проведены две касательные к окружности  $x^2 + y^2 = 1$ . Докажите, что прямая, соединяющая точки касания, проходит через точку  $(a; b)$ .

## Глава 32

### Непрерывные дроби

Непрерывные дроби сейчас не входят в ФГОС. Но они входили (хотя и как дополнительный материал) в учебник «Алгебра» А. П. Киселёва (1852—1940), который в течение четверти века (до середины 50-х годов) был единственным школьным учебником по алгебре. Тема эта нисколько не устаревшая и вполне актуальная.

*Непрерывная дробь* — это дробь вида

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_n}}}}},$$

где число  $a_0$  целое, а числа  $a_1, a_2, \dots, a_n$  натуральные. Иногда непрерывную дробь называют *цепной дробью*.

Для непрерывной дроби используют обозначение

$$[a_0; a_1, a_2, \dots, a_n].$$

Такое же обозначение удобно использовать не только для натуральных чисел  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , но и для произвольных чисел и даже для независимых переменных. Это обозначение позволяет использовать очевидное, но важное соотношение

$$[a_0; a_1, a_2, \dots, a_n] = [a_0; a_1, \dots, a_{k-1}, A_k],$$

где  $A_k = [a_k; a_{k+1}, a_{k+2}, \dots, a_n]$ . Это соотношение используется, например, при решении задач 32.4 и 32.7.

#### Основные свойства

**32.1.** Докажите, что  $\underbrace{[1; 1, \dots, 1]}_n = \frac{F_{n+1}}{F_n}$  — отношение последовательных чисел Фибоначчи.

**32.2.** Докажите равенство  $[0; 2, 3, 4, \dots, n] + [0; 1, 1, 3, 4, \dots, n] = 1$  для любого натурального  $n \geq 3$ .

**32.3.** Решите в натуральных числах уравнение

$$1 - [0; 2, 3, 4, \dots, n] = [0; x_1, x_2, \dots, x_n].$$

### Подходящие дроби

При  $k \leq n$  дробь  $\frac{p_k}{q_k} = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_k]$  называют *подходящей* дробью порядка  $k$  для непрерывной дроби  $[a_0; a_1, a_2, \dots, a_n]$ . Например,  $\frac{p_1}{q_1} = \frac{a_0 a_1 + 1}{a_1}$ ,  $\frac{p_2}{q_2} = \frac{a_0 a_1 a_2 + a_0 + a_2}{a_1 a_2 + 1}$  и  $\frac{p_3}{q_3} = \frac{a_0 a_1 a_2 a_3 + a_0 a_1 + a_0 a_3 + a_2 a_3 + 1}{a_1 a_2 a_3 + a_1 + a_3}$ . Подходящая дробь нулевого порядка — это число  $a_0$ .

**32.4.** Пусть  $p_0 = a_0$  и  $q_0 = 1$ .

а) Докажите, что при  $k \geq 2$  выполняются соотношения

$$p_k = a_k p_{k-1} + p_{k-2} \quad \text{и} \quad q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2}.$$

б) Докажите, что  $p_{k-1} q_k - q_{k-1} p_k = (-1)^k$ .

в) Докажите, что  $p_{k-2} q_k - q_{k-2} p_k = (-1)^{k-1} a_k$ .

**32.5.** Докажите, что  $\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}} - \frac{p_k}{q_k} = \frac{(-1)^k}{q_{k-1} q_k}$ .

**32.6.** Докажите, что

$$\frac{p_n}{q_n} = a_0 + \frac{1}{q_0 q_1} - \frac{1}{q_1 q_2} + \frac{1}{q_2 q_3} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{q_{n-1} q_n}.$$

**32.7.** Пусть  $A = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_n]$  и  $A_k = [a_k; a_{k+1}, a_{k+2}, \dots, a_n]$ .

Докажите, что  $A = \frac{A_k p_{k-1} + p_{k-2}}{A_k q_{k-1} + q_{k-2}}$ .

**32.8.** Пусть  $A = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_n]$ . Докажите, что

$$\frac{p_0}{q_0} < \frac{p_2}{q_2} < \dots < \frac{p_{2k}}{q_{2k}} < \dots < A < \dots < \frac{p_{2k+1}}{q_{2k+1}} < \dots < \frac{p_3}{q_3} < \frac{p_1}{q_1}.$$

### Алгоритм Евклида и решение в целых числах уравнения

$$nx - my = 1$$

Напомним, что при алгоритме Евклида для вычисления наибольшего общего делителя чисел  $n$  и  $m$  ( $n > m$ ) производятся последовательные деления с остатком:

$$n = a_0 m + r_1, \quad m = a_1 r_1 + r_2, \quad r_1 = a_2 r_2 + r_3, \quad \dots, \quad r_{s-1} = a_s r_s.$$

Тогда  $r_{s-1} = \text{НОД}(n, m)$ .



**32.9.** Докажите, что непрерывные дроби связаны с алгоритмом Евклида следующим образом. Пусть  $n > m$  — два натуральных числа и  $x_k = [0; a_k, a_{k+1}, \dots, a_s]$  для  $k = 0, 1, \dots, s$ . Тогда

$$x_0 = \frac{m}{n}, \quad x_1 = \frac{r_1}{m}, \quad x_2 = \frac{r_2}{r_1}, \quad \dots, \quad x_s = \frac{r_s}{r_{s-1}}.$$

**32.10.** Числа  $n$  и  $m$  натуральные. Докажите, что одно из решений уравнения  $nx - my = 1$  в целых числах можно найти следующим образом. Пусть  $\frac{n}{m} = [a_0; a_1, \dots, a_s]$  и  $\frac{p}{q} = [a_0; a_1, \dots, a_{s-1}]$ . Тогда  $(x, y) = \pm(p, q)$ .

### Разложение числа в непрерывную дробь

Каждому иррациональному положительному числу  $\alpha$  можно сопоставить его *разложение в непрерывную дробь*, т.е. бесконечную последовательность чисел  $a_0, a_1, \dots$ , которые равны целым частям чисел

$$A_0 = \alpha, \quad A_1 = \frac{1}{A_0 - a_0}, \quad A_2 = \frac{1}{A_1 - a_1}, \quad A_3 = \frac{1}{A_2 - a_2}, \quad \text{и т. д.};$$

эти равенства можно записать в виде

$$A_k = a_k + \frac{1}{A_{k+1}}.$$

Рациональному положительному числу аналогичным образом сопоставляется конечная последовательность чисел. Разложению числа в непрерывную дробь соответствуют подходящие дроби

$$\frac{p_k}{q_k} = [a_0; a_1, \dots, a_k].$$

**32.11.** Представьте в виде непрерывных дробей числа  $\frac{4}{13}$ ,  $\frac{43}{37}$ ,  $\frac{7}{120}$  и  $\frac{40}{17}$ .

**32.12.** С помощью калькулятора найдите первые 5 членов разложения числа 3,1415926536 в непрерывную дробь и подходящие дроби до  $\frac{p_3}{q_3}$ .

**32.13.** Найдите разложение числа  $\sqrt{2}$  в непрерывную дробь.

**32.14.** Найдите разложение числа  $\sqrt{3}$  в непрерывную дробь.

**32.15.** Найдите разложение числа  $\sqrt{7}$  в непрерывную дробь.

**32.16.** Докажите, что  $\alpha = [a_0; a_1, \dots, a_{k-1}, A_k]$  для любого натурального  $k$ .

**32.17.** Пусть  $[a_0; a_1, \dots, a_k] = \frac{p_k}{q_k}$ . Докажите, что число  $\alpha$  заключено между  $\frac{p_k}{q_k}$  и  $\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}$ .

### Календарь

При решении задач этого параграфа мы будем исходить из того, что число дней в году приблизительно равно 365,2422. В действительности это число не является постоянной. 2000 лет назад это число было немного другое, а именно, 365,2423.

Разные календари по-разному учитывают, что в году больше 365 дней. Обычно это делается с помощью високосных годов: в високосный год добавляется один день. Например, в *юлианском календаре* обычный, невисокосный, год состоит из 365 дней, а в високосный год (номер которого делится на 4) добавляется один день. А общепринятый ныне *григорианский календарь* устроен по следующим правилам:

- 1) год, номер которого делится на 400, високосный;
- 2) остальные годы, номер которых делится на 100, невисокосные;
- 3) остальные годы, номер которых делится на 4, високосные.

**32.18.** За сколько лет накапливается ошибка в один день в юлианском календаре?

**32.19.** За сколько тысяч лет накапливается ошибка в один день в григорианском календаре?

**32.20.** Найдите первые четыре подходящие дроби дробной части числа 365,2422.

**32.21.** За сколько тысяч лет накапливается ошибка в один день по календарю, в котором 8 високосных лет за 33 года? (Такой календарь соответствует третьей подходящей дроби, равной  $\frac{8}{33}$ ).

## Глава 33

### Дополнительные задачи

#### Неравенства

**33.1.** Пусть  $x > 0$ . Докажите, что  $\sqrt[n]{1+x} < 1 + \frac{1}{n}x$ .

**33.2.** Докажите, что если  $a \geq b > 0$ , то

$$\frac{(a-b)^2}{8a} \leq \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} \leq \frac{(a-b)^2}{8b}.$$

**33.3.** Пусть  $a$  и  $b$  — положительные числа,  $a \neq b$ ,  $A = \frac{a+b}{2}$  и  $B = \sqrt{ab}$ . Докажите, что  $B < \frac{(a-b)^2}{8(A-B)} < A$ .

**33.4.** Докажите, что если  $m$  и  $n$  — натуральные числа, то

$$\frac{1}{\sqrt[n]{m}} + \frac{1}{\sqrt[n]{n}} > 1.$$

#### Комбинаторика

**33.5.** Сколькими способами можно представить натуральное число  $n$  в виде суммы  $m$  целых неотрицательных чисел? (Представления, отличающиеся порядком слагаемых, считаются разными.)

**33.6.** Сколькими способами можно представить натуральное число  $n$  в виде суммы  $m$  натуральных чисел? (Представления, отличающиеся порядком слагаемых, считаются разными.)

**33.7.** Сколькими способами можно представить натуральное число  $n$  в виде суммы  $n - 2k$  нечётных натуральных чисел? (Представления, отличающиеся порядком слагаемых, считаются разными.)

**33.8.** Найдите количество натуральных чисел  $n$ ,  $1000 \leq n \leq 1999$ , для которых при сложении чисел  $n$  и  $n + 1$  не происходит перенос в старший разряд.

**33.9.** Сколькими способами в множестве из  $n$  элементов можно выбрать два (не обязательно различных) подмножества, объединение которых совпадает со всем множеством. (Порядок, в котором выбираются подмножества, не учитывается.)

**Числа Фибоначчи в комбинаторике**

**33.10.** Найдите количество подмножеств множества  $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ , не содержащих двух последовательных чисел.

**33.11.** Сколькими способами можно представить число  $n$  в виде суммы нескольких слагаемых, равных 1 или 2? (Представления, различающиеся порядком слагаемых, считаются различными.)

**33.12.** Сколькими способами можно представить число  $n$  в виде суммы нескольких целых слагаемых  $a_i \geq 2$ ? (Представления, различающиеся порядком слагаемых, считаются различными.)

**33.13.** Сколькими способами можно представить число  $n$  в виде суммы положительных нечётных слагаемых? (Представления, различающиеся порядком слагаемых, считаются различными.)

**Взвешивания**

**33.14.** Среди девяти одинаковых по виду монет есть одна фальшивая, которая легче остальных. За два взвешивания на чашечных весах без стрелок и гирь найдите фальшивую монету.

**33.15.** Среди четырёх монет есть одна фальшивая, отличающаяся по весу от настоящей. За два взвешивания на чашечных весах без гирь найдите фальшивую монету.

**33.16.** Среди трёх монет есть одна фальшивая, отличающаяся по весу от настоящей. За два взвешивания на чашечных весах без гирь найдите фальшивую монету и выясните, тяжелее она или легче настоящей.

**33.17.** Есть несколько мешков, в каждом из которых достаточно много монет. В одном мешке монеты фальшивые, а во всех других настоящие. Известен вес настоящей монеты и известно, что фальшивая монета на 1 г легче настоящей. Как при помощи одного взвешивания на весах с разновесками обнаружить мешок с фальшивыми монетами?

**33.18.** Среди  $2n + 1$  монеты есть  $2k$  фальшивых ( $k \leq n$ ), причём вес фальшивой монеты отличается от веса настоящей монеты на 1 г. Как за одно взвешивание на чашечных весах со стрелкой про одну выбранную монету узнать, фальшивая она или нет?

## ОТВЕТЫ

### Глава 22. Арифметическая прогрессия

- 22.2. Да. 22.7. Нет. 22.12.  $(2n-1)a_n$ . 22.13. Для нечётных.  
22.15. 0. 22.16.  $(S_n - S_m) \frac{n+m}{n-m}$ . 22.17. 16 650. 22.18. 164 700.  
22.20. 19. 22.21. Числа от  $2n^2 + n$  до  $2n^2 + 3n$  или числа от  $-n$  до  $n$ .  
22.23.  $a_n = \frac{2a}{n(n-1)a+2}$ . 22.24.  $f(x) = \frac{d}{2}x^2 + \left(a_1 - \frac{d}{2}\right)x$ .  
22.25.  $a_1 = a + b$ ,  $d = 2a$ .  
22.26. а)  $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$ ; б)  $1 + 2 + \dots + n = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$ .  
22.27. а)  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x$ ; б)  $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$ .  
22.28. а) Да; б) да. 22.29. Можно. 22.33. Можно. 22.34. 925.

### Глава 23. Геометрическая прогрессия

- 23.1.  $b^{2n+1}$ . 23.2. 2. 23.3. Да. 23.5. Могут. 23.6. Да. 23.7. Нет.  
23.8. 4, 6, 9. 23.9.  $\frac{1}{5}, \frac{4}{5}, \frac{16}{5}, \frac{64}{5}$ . 23.11.  $\frac{(S_{2n} - S_n)^2}{S_n}$ .  
23.12.  $(10^n - 1) \frac{10}{81} - \frac{n}{9}$ . 23.13.  $\frac{(n+1)x^{n+2} - (n+2)x^{n+1} + 1}{(x-1)^2}$ .  
23.15. Обязательно. 23.16. -2. 23.17. С 74-м.  
23.18. 24, 18, 12, 6 и 3, 9, 27, 81.  
23.19. а) 2, 4, 6, 9; б) 6, 9, 12, 16; в) 18, 27, 36, 48.

### Глава 24. Рациональная степень числа

- 24.6.  $x^9 - 15x^6 - 87x^3 - 125$ . 24.7. Нет. 24.8.  $x_{1,2} = \pm 1$ .  
24.9.  $x = \sqrt{2}$ . 24.10.  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 2$ ,  $x_3 = 10$ . 24.11.  $x_{1,2} = \pm 7$ .  
24.12.  $x = \frac{z^m - 1}{z^m + 1}$ , где  $z = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ . 24.13.  $x = \sqrt[3]{4}$ . 24.18.  $\sqrt{11}$ .  
24.20.  $1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$ . 24.21.  $\frac{1 - \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}}{3}$ . 24.22.  $\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2}$ .  
24.23.  $\frac{-a^2 + a + 2}{3}$ . 24.24.  $m = 27$ ,  $n = 3$ .  
24.25.  $\sqrt{b_{m-n}b_{m+n}}$  и  $b_{m-n}^{\frac{m}{2n}} b_{m+n}^{1-\frac{m}{2n}}$ .  
24.27.  $x = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}$  и  $y = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$ , где число  $n$  натуральное.

### Глава 25. Тригонометрические формулы

25.3. 4. 25.4. 3. 25.7. Можно. 25.17. 1. 25.18. 1. 25.19. 1.

25.20.  $\frac{pq}{q-p}$ . 25.26.  $\frac{\sqrt{\sqrt{3}+2}}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ . 25.27.  $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ .

25.28.  $\frac{1+\sqrt{5}}{4}$ . 25.29.  $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$ . 25.31.  $\frac{\sqrt{30-6\sqrt{5}}-1-\sqrt{5}}{8}$ .

### Глава 26. Тригонометрические уравнения и неравенства

26.2.  $\sqrt{a^2+b^2}$  и  $-\sqrt{a^2+b^2}$ . 26.7.  $\operatorname{tg} 55^\circ > 1,4$ .

26.8.  $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$  и  $x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + k\pi$ . 26.9.  $x = \pm 1$ ,  $y = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ .

26.10. 1. 26.11.  $x = \operatorname{tg} \varphi$ ,  $y = \operatorname{tg} 2\varphi$  и  $z = \operatorname{tg} 4\varphi$ , где  $\varphi = 0, \frac{\pi}{7}, \dots, \frac{6\pi}{7}$ .

26.12.  $x = 2 \cos \frac{k\pi}{14}$ ,  $y = 2 \cos \frac{3k\pi}{14}$ ,  $z = 2 \cos \frac{9k\pi}{14}$ ,  $k = 0, 1, \dots, 14$ ;

$x = 2 \cos \frac{k\pi}{13}$ ,  $y = 2 \cos \frac{3k\pi}{13}$ ,  $z = 2 \cos \frac{9k\pi}{13}$ ,  $k = 1, 2, \dots, 12$ .

26.13.  $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1\right)$  и  $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}, -1\right)$ . 26.15.  $\frac{4}{3}$ .

### Глава 27. Тригонометрические тождества

27.10.  $\frac{\sin 3^\circ}{\sin 4^\circ}$ . 27.16.  $-\frac{1}{2}$ . 27.18.  $-0,76$ .

27.21.  $\sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$ ,  $\cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$ .

27.22.  $x = n\pi$  и  $x = -\frac{\pi}{4} + n\pi$ . 27.23.  $\frac{k+1}{k-1}$ .

### Глава 28. Приближённые вычисления

28.1. 20 девяток. 28.2. 20 нулей. 28.3. 20 нулей.

28.4. 20 девяток.

### Глава 29. Метод математической индукции

29.6.  $(n+1)! - 1$ . 29.8.  $\frac{n+1}{2n}$ . 29.19.  $2 + \sqrt[3]{7} < \sqrt[3]{60}$ .

29.23. Да. 29.26.  $n$ .

### Глава 30. Последовательности чисел

30.1. 105. 30.2.  $\frac{1}{7}$ .

30.3.  $n, n-1, \dots, 1, 2n, 2n-1, \dots, n+1, \dots, n^2, n^2-1, \dots, n^2-n+1$ .

30.4.  $pq+2$ . 30.6. Может. 30.7. Существует. 30.9.  $x_2 = x_3 = 0,2$ .

30.17.  $-3$ . 30.20.  $a_n = \frac{1}{5}(16 \cdot 2^{n-1} + 9(-3)^{n-1})$ .

30.21.  $a_n = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a - b}$ . 30.24.  $a_n = (1 + 2n)3^{n-1}$ .

30.25.  $\Delta a_n = 2n + 1$  и  $\Delta \Delta a_n = 2$ .

30.27.  $\Delta a_n = C_k^{k-1} n^{k-1} + C_k^{k-2} n^{k-2} + \dots + C_k^1 n + 1$ . 30.28.  $\Delta a_n = C_n^{k-1}$ .

30.29. Старший коэффициент многочлена  $Q_{k-1}$  равен старшему коэффициенту многочлена  $P_k$ , умноженному на  $C_k^{k-1} = k$ .

30.30.  $S_n = a_{n+1} - a_1$ .

30.31. а)  $a_n = \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$ ; б)  $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ .

30.32. а)  $a_n = \frac{1}{4}n^4 - \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2$ ; б)  $\frac{n^2(n+1)^2}{4}$ .

30.33.  $(n+1)^2(2n^2 + 4n + 1)$ . 30.34.  $\frac{1}{k+1}$ .

### Глава 31. Множества

31.1. 10. 31.2.  $2^n$ . 31.3.  $3^n$ . 31.4.  $44 \cdot 2020 + 1 = 88881$ .

31.6.  $x_0x + y_0y = 1$ . 31.7.  $x_0x + y_0y = 1$ . 31.8.  $\left(\pm \sqrt{1 - \frac{1}{b^2}}; \frac{1}{b}\right)$ .

31.9.  $(a_1 - a_2)x + (b_1 - b_2)y + c_1 - c_2 = 0$ .

### Глава 32. Непрерывные дроби

32.3.  $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 3, x_4 = 4, \dots, x_n = n$ .

32.11.  $\frac{4}{13} = [0; 3, 4], \frac{43}{37} = [1; 6, 6], \frac{7}{120} = [0; 17, 7]$  и  $\frac{40}{17} = [2; 2, 1, 5]$ .

32.12.  $[3; 7, 15, 1, 292], 3, \frac{22}{7}, \frac{333}{106}$  и  $\frac{355}{113}$ .

32.13.  $\sqrt{2} = [1; (2)] = [1; 2, 2, 2, \dots]$ .

32.14.  $\sqrt{3} = [1; (1, 2)] = [1; 1, 2, 1, 2, \dots]$ .

32.15.  $\sqrt{7} = [2; (1, 1, 1, 4)] = [2; 1, 1, 1, 4, 1, 1, 1, 4, \dots]$ .

32.18. За 128 лет. 32.19. Приблизительно за 3 тысячи лет.

32.20.  $\frac{1}{4}, \frac{7}{29}, \frac{8}{33}, \frac{31}{128}$ . 32.21. Приблизительно за 4 тысячи лет.

### Глава 33. Дополнительные задачи

33.5.  $C_{n+m-1}^n$ . 33.6.  $C_{n-1}^{n-m}$ . 33.7.  $C_{n-k-1}^k$ . 33.8. 156. 33.9.  $\frac{3^n + 1}{2}$ .

33.10.  $F_{n+2}$ . 33.11.  $F_{n+1}$ . 33.12.  $F_{n-1}$ . 33.13.  $F_n$ .

# Указания

## Глава 22. Арифметическая прогрессия

**22.1.** Пусть меньшая сторона равна  $a$ , большая сторона равна  $c$ . Тогда средняя сторона равна  $\frac{a+c}{2}$ . Из неравенства треугольника  $a + \frac{a+c}{2} > c$  следует, что  $3a > c$ .

**22.2.** Рассмотрите треугольник со сторонами 3, 4 и 5.

**22.3.** *Первый способ.* Проверьте, что из равенства  $a + c = 2b$  следует равенство

$$(\sqrt{a} + 2\sqrt{b} + \sqrt{c})(\sqrt{a} + \sqrt{c}) = 2(\sqrt{b} + \sqrt{c})(\sqrt{a} + \sqrt{b}).$$

*Второй способ.* Воспользуйтесь тем, что если  $a \neq c$ , то

$$\frac{1}{\sqrt{b} + \sqrt{c}} = \frac{\sqrt{b} - \sqrt{c}}{b - c}, \quad \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{a - b}, \quad \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{c}} = \frac{\sqrt{a} - \sqrt{c}}{a - c}$$

и  $a - b = b - c = \frac{1}{2}(a - c)$ .

**22.4.** Воспользуйтесь тем, что  $\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}} = \frac{d}{a_k a_{k+1}}$ , где  $d$  — разность арифметической прогрессии, и тем, что  $a_n - a_1 = (n - 1)d$ .

**22.5.** Воспользуйтесь тем, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_k a_{k+1} a_{k+2}} &= \frac{1}{a_{k+2} - a_k} \left( \frac{1}{a_k a_{k+1}} - \frac{1}{a_{k+1} a_{k+2}} \right) = \\ &= \frac{1}{2d} \left( \frac{1}{a_k a_{k+1}} - \frac{1}{a_{k+1} a_{k+2}} \right). \end{aligned}$$

**22.6.** Можно считать, что разность  $d$  арифметической прогрессии отлична от нуля (если  $d = 0$ , то требуемое равенство очевидно).

Воспользуйтесь тем, что  $\frac{1}{\sqrt{a_k} + \sqrt{a_{k+1}}} = \frac{\sqrt{a_{k+1}} - \sqrt{a_k}}{d}$ .

**22.7.** Если эти числа являются членами одной арифметической прогрессии, то  $\sqrt{5} - \sqrt{2} = dm$  и  $\sqrt{5} - \sqrt{3} = dn$ , где числа  $m$  и  $n$  целые и числа  $d$ ,  $m$  и  $n$  отличны от нуля. Поэтому

$$\frac{\sqrt{5} - \sqrt{2}}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} = \frac{m}{n},$$

т.е.  $(n - m)\sqrt{5} = n\sqrt{2} - m\sqrt{3}$ . Возведите это равенство в квадрат и получите противоречие, показав, что число  $\sqrt{6}$  рационально.



**22.8.** Пусть разность арифметической прогрессии равна  $d$ , а один из членов равен  $n^2$ , где  $n$  — натуральное число. Тогда для каждого натурального числа  $k$  число  $(n + kd)^2 = n^2 + (2nk + k^2d)d$  является членом этой арифметической прогрессии.

**22.9.** Пусть разность арифметической прогрессии равна  $d$ . При делении на  $p$  числа  $a_1, a_2, \dots, a_p$  дают не более  $p - 1$  различных остатков, поэтому разность  $a_k - a_l = d(k - l)$  двух из этих чисел делится на  $p$ . Воспользуйтесь тем, что  $|k - l| < p$ .

**22.10.** Воспользуйтесь тем, что  $(1 + n)^3 = 1 + kn$ , где  $k = n^2 + 3n + 3$ .

**22.11.** Пусть  $d$  и  $a$  — разность и первый член данной прогрессии. Можно считать, что  $d \neq 0$ . Тогда  $d$  и  $a$  — натуральные числа. Пусть  $a < 10^k$ . Тогда для любого натурального  $n > k$  сумма цифр числа  $10^n d + a$  равна сумме цифр чисел  $d$  и  $a$ .

**22.12.** Воспользуйтесь тем, что  $a_n = \frac{a_1 + a_{2n-1}}{2}$ .

**22.13.** Число  $\frac{n(n+1)}{2}$  делится на  $n$  тогда и только тогда, когда число  $\frac{n+1}{2}$  целое, т. е. число  $n + 1$  делится на 2.

**22.14.** Пусть  $a$  — первый член данной прогрессии,  $d$  — её разность. По условию  $\frac{n(2a + (n-1)d)}{2} = 2^k$ , поэтому  $n(2a + (n-1)d) = 2^{k+1}$ . Воспользуйтесь тем, что число  $2a + (n-1)d$  целое, и тем, что любой делитель степени двойки является степенью двойки.

**22.15.** Запишите равенство

$$n(2a_1 + (n-1)d) = m(2a_1 + (m-1)d)$$

в виде  $(n-m)(2a_1 + (n+m-1)d) = 0$ .

**22.16.** Воспользуйтесь тем, что

$$S_n - S_m = \frac{(n-m)(2a_1 + (n+m-1)d)}{2},$$

где  $a_1$  и  $d$  — первый член и разность арифметической прогрессии.

**22.17.** Первое из этих чисел  $a_1$  равно 120, последнее  $a_n$  равно 990. Поэтому  $n = \frac{a_n - a_1}{30} + 1 = 30$ , а искомая сумма равна  $\frac{a_1 + a_n}{2} n = 16\,650$ .

**22.18.** Число, не делящееся ни на 2, ни на 3, — это число вида  $1 + 6d$  или вида  $5 + 6d$ . Количество чисел как одного, так и другого вида равно

$$\frac{997 - 103}{6} + 1 = \frac{995 - 101}{6} + 1 = 150.$$

Суммы этих чисел равны

$$\frac{997 + 103}{2} \cdot 150 = 82\,500 \quad \text{и} \quad \frac{995 + 101}{2} \cdot 150 = 82\,200.$$

**22.19.** Чтобы число  $a + (a + 2) + \dots + (a + 2n - 2) = n(a + n - 1)$  равнялось  $n^k$ , нужно положить  $a + n - 1 = n^{k-1}$ , т. е.  $a = n^{k-1} - n + 1$ . Число  $a$  при этом нечётно.

**22.20.** Сумма номеров нечётна, поэтому на указанной стороне квартала находятся нечётные номера и число домов нечётно. Сумма нечётного числа членов арифметической прогрессии равна произведению их количества на средний член. Число  $247 = 13 \cdot 19$  — произведение двух простых чисел, поэтому одно из этих чисел — номер среднего дома, а другое число — количество домов. Если номер среднего дома 13, то количество домов не превосходит 13. Поэтому номер среднего дома 19, а количество домов равно 13, т. е. средний дом седьмой от угла.

**22.21.** Пусть  $x$  — первое из искомых  $2n + 1$  чисел. Воспользовавшись тождеством  $(x + n + k)^2 - (x + k)^2 = n(2x + n + 2k)$  и тем, что

$$(2x + n + 2) + (2x + n + 4) + \dots + (2x + n + 2n) = n(2x + 2n + 1),$$

запишите условие задачи в виде  $x^2 = n^2(2x + 2n + 1)$  и решите квадратное уравнение  $x^2 - 2n^2x - n^2(2n + 1) = 0$ .

**22.22.** Число  $M = 1 + 2 + \dots + 999 \dots 99$  делится на  $999 \dots 99$ . Слагаемое  $k$ , входящее в эту сумму, даёт в число  $N$  вклад  $k \cdot (10^n)^l$  для некоторого  $l$ . Разность  $k \cdot (10^n)^l - k$  делится на  $10^n - 1$ .

**22.23.** Покажите, что  $\frac{1}{a_{k+1}} = \frac{1}{a_k} + k$ , и сложите такие равенства для  $k = 1, 2, \dots, n - 1$ .

**22.24.** Воспользуйтесь тем, что

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = \frac{n(2a_1 + (n-1)d)}{2} = \frac{d}{2}n^2 + \left(a_1 - \frac{d}{2}\right)n.$$

**22.25.** Запишите разность  $f(n) - f(n-1)$  в виде  $a + b + (n-1) \cdot 2a$ .

**22.26.** а) Из равенства  $f(n) - f(n-1) = 2an + b - a$  следует, что можно положить  $a = \frac{1}{2}$  и  $b = a = \frac{1}{2}$ .

б) Учтя, что  $f(1) = 1$ , получите формулу

$$1 + 2 + \dots + n = f(n) = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n.$$

**22.27.** а) Из равенства

$$f(n) - f(n-1) = 3an^2 + (2b - 3a)n + a - b + c$$

следует, что можно положить  $3a = 1$ ,  $2b - 3a = 0$  и  $a - b + c = 0$ .

б) Учтя, что  $f(1) = 1$ , получите формулу

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = f(n) = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n.$$

**22.28.** а) Рассмотрите арифметическую прогрессию

$$\frac{1}{60}, \quad \frac{2}{60} = \frac{1}{30}, \quad \frac{3}{60} = \frac{1}{20}, \quad \frac{4}{60} = \frac{1}{15}, \quad \frac{5}{60} = \frac{1}{12}.$$

б) Рассмотрите арифметическую прогрессию  $\frac{1}{N}, \frac{2}{N}, \dots, \frac{n}{N}$ , где  $N = \text{НОК}(2, 3, 4, \dots, n)$ .

**22.29.** Рассмотрите последовательность  $23 + 70n$ , где число  $n$  натуральное. Все члены этой последовательности нечётные, поэтому они не могут иметь вид  $\pm p \pm q$ , где  $p$  и  $q$  — нечётные числа. Если  $23 + 70n = 2 + p$ , то  $p$  делится на 7, а если  $23 + 70n = -2 + p$ , то  $p$  делится на 5.

**22.30.** Рассмотрите последовательности  $2n$ ,  $4n - 1$  и  $4n - 3$  или последовательности  $3n - 2$ ,  $3n - 1$  и  $3n$ .

**22.31.** Пусть  $N = d_1 d_2 \dots d_n$ . Рассмотрите  $N$  последовательных натуральных чисел, наименьшее из которых больше любого из первых членов данных прогрессий. Среди этих  $N$  чисел ровно  $\frac{N}{d_1}$  чисел принадлежат первой прогрессии, ровно  $\frac{N}{d_2}$  — второй, ..., ровно  $\frac{N}{d_n}$  —  $n$ -й прогрессии. Каждое из этих  $N$  чисел принадлежит ровно одной прогрессии, поэтому  $\frac{N}{d_1} + \frac{N}{d_2} + \dots + \frac{N}{d_n} = N$ .

**22.32.** Пусть  $d_1, d_2, \dots, d_n$  — разности этих прогрессий,  $a_1, a_2, \dots, a_n$  — их первые члены,  $N = d_1 d_2 \dots d_n$ . Число  $N$  входит в одну из прогрессий, пусть  $i$  — номер этой прогрессии. Тогда для некоторого целого неотрицательного  $k$  выполнено равенство  $d_1 d_2 \dots d_n = a_i + k d_i$ , поэтому  $a_i$  делится на  $d_i$ .

**22.33.** Включите число 1 в первую часть, следующие за ним два числа 2 и 3 во вторую, следующие три числа 4, 5 и 6 в первую, и т. д. Воспользуйтесь тем, что в каждой из таких двух частей для любого натурального  $n$  найдутся два соседних числа, разность между которыми больше  $n$ .

**22.34.** Предположите, что

$$n + 36 = (m - h)^2, \quad n + 300 = m^2 \quad \text{и} \quad n + 596 = (m + h)^2,$$

где числа  $m$  и  $h$  натуральные. Тогда

$$-264 = h(h - 2m) \quad \text{и} \quad 296 = h(h + 2m).$$

Наибольший общий делитель чисел 264 и 296 равен 8, поэтому  $h$  — делитель числа 8. Перебирая эти делители, убедитесь, что  $h = 4$  даёт верный ответ.

**22.35.** Сначала нужно бросить первый шарик с  $m$ -го этажа. Если он разобьётся, то второй шарик нужно бросать поочерёдно с первого, второго, третьего этажа и т. д. до этажа с номером  $m - 1$ . Если же первый шарик не разобьётся, то процедуру нужно повторить с учётом того, что испытаний осталось на одно меньше. Поэтому первый шарик нужно бросать с этажа с номером  $m + (m - 1)$ . Так можно продолжать до этажа с номером

$$m + (m - 1) + (m - 2) + \dots + 2 + 1 = \frac{m(m+1)}{2}.$$

Испытания для этажей с номерами больше  $n$  пропускаются.

### Глава 23. Геометрическая прогрессия

**23.1.** *Первый способ.* Если  $b_k = q^{k-1}a$ , то произведение чисел  $b_1, \dots, b_{2n+1}$  равно  $a^{2n+1}q^N$ , где

$$N = 0 + 1 + 2 + \dots + 2n = \frac{2n(2n+1)}{2} = n(2n+1).$$

Поэтому  $a^{2n+1}q^N = a^{2n+1}q^{n(2n+1)} = (aq^n)^{2n+1} = b^{2n+1}$ .

*Второй способ.* Воспользуйтесь тем, что произведение членов с номерами  $n+1-k$  и  $n+1+k$  равно  $b^2$ .

**23.2.** Пусть знаменатель геометрической прогрессии равен  $q$ . Если в геометрической прогрессии с чётным числом членов умножить на  $q$  все члены с нечётными номерами, то получатся все члены с чётными номерами. Поэтому сумма всех членов в  $1+q$  раз больше суммы членов с нечётными номерами.

**23.3.** Для любого положительного числа  $q$  существует прямоугольный треугольник со сторонами  $1$ ,  $q$  и  $\sqrt{1+q^2}$ . Если  $\sqrt{1+q^2} = q^2$ , то этот треугольник обладает требуемым свойством. Положите

$$q = \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}.$$

**23.4.** Чтобы выполнялось равенство  $a_{n+1} + c = q(a_n + c)$ , достаточно положить  $c = \frac{d}{q-1}$ .

**23.5.** Рассмотрите геометрическую прогрессию с первым членом  $2^9$  и знаменателем  $\frac{3}{2}$ .

**23.6.** Рассмотрите геометрическую прогрессию с первым членом  $8$  и знаменателем  $\frac{3}{2}$ .

**23.7.** Если знаменатель такой геометрической прогрессии равен  $q$ , то  $2 = q^n$  и  $3 = q^m$  для некоторых целых чисел  $m$  и  $n$ , отличных от нуля. В таком случае  $2^m = 3^n$ , чего не может быть.

**23.8.** Пусть средний член равен  $a$ , знаменатель прогрессии равен  $q$ . По условию  $a(q^{-1} + 1 + q) = 19$  и  $a^2(q^{-2} + 1 + q^2) = 133$ . Следовательно,

$$19^2 = a^2(q^{-2} + 1 + q^2 + 2q^{-1} + 2 + 2q) = 133 + 2 \cdot 19a.$$

Поэтому  $a = 6$  и  $q = \frac{3}{2}$ .

**23.9.** Знаменатель прогрессии можно представить в виде  $q^2$ , где  $q > 1$ . Тогда прогрессию можно записать в виде  $aq^{-3}$ ,  $aq^{-1}$ ,  $aq$ ,  $aq^3$ . По условию  $a(q^{-1} + q) = 4$  и  $a(q^{-3} + q^3) = 13$ . Поэтому

$$a^3(q^{-3} + q^3 + 3(q^{-1} + q)) = 64,$$

т. е.  $13a^2 + 3a^2 \cdot 4 = 64$ . Следовательно,  $a = \frac{8}{5}$  и  $q = 2$  (при  $a < 0$  получаем  $q < 0$ ).

**23.10.** Предположите, что число  $q \neq \pm 1$  целое и существуют различные целые неотрицательные числа  $k_1, k_2, \dots, k_{m+1}$  ( $m \geq 2$ ), для которых  $q^{k_1} + q^{k_2} + \dots + q^{k_m} = q^{k_{m+1}}$ . Перепишите это равенство в виде  $q^{l_1} = \pm q^{l_2} \pm \dots \pm q^{l_{m+1}}$ , где  $l_1$  — наименьшее из чисел  $k_1, k_2, \dots, k_{m+1}$ , и сократите полученное равенство на  $q^{l_1}$ .

**23.11.** Пусть первый член и знаменатель прогрессии равны  $b_1$  и  $q$ . Тогда  $\frac{b_1(1-q^n)}{1-q} = S_n$  и  $\frac{b_1(1-q^{2n})}{1-q} = S_{2n}$ , поэтому  $1 + q^n = \frac{S_{2n}}{S_n}$  и  $q^n = \frac{S_{2n} - S_n}{S_n}$ . Искомая величина равна

$$\frac{b_1(1-q^{3n})}{1-q} - \frac{b_1(1-q^{2n})}{1-q} = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q} q^{2n} = S_n \frac{(S_{2n} - S_n)^2}{S_n^2}.$$

**23.12.** Найдите сначала сумму  $n$  слагаемых

$$9 + 99 + 999 + \dots + 99\dots 999.$$

Эта сумма равна

$$(10 - 1) + (10^2 - 1) + \dots + (10^n - 1) = \frac{10^{n+1} - 10}{10 - 1} - n = (10^n - 1) \frac{10}{9} - n.$$

Полученное число нужно разделить на 9.

**23.13.** *Первый способ.* Чтобы получить искомую сумму, нужно сложить

$$\begin{aligned} 1 + x + x^2 + \dots + x^n &= \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}, \\ x + x^2 + \dots + x^n &= \frac{x^{n+1} - x}{x - 1}, \\ &\dots\dots\dots \\ x^n &= \frac{x^{n+1} - x^n}{x - 1}. \end{aligned}$$

Сумма числителей этих дробей равна

$$(n+1)x^{n+1} - (1 + x + \dots + x^n) = (n+1)x^{n+1} - \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}.$$

*Второй способ.* Пусть  $S = 1 + 2x + 3x^2 + \dots + (n+1)x^n$ . Воспользуйтесь тем, что  $S - xS = 1 + x + x^2 + \dots + x^n - (n+1)x^{n+1}$ .

**23.14.** Сумма делителей числа  $N$ , отличных от  $N$ , равна

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \dots + 2^{n-1} + P(1 + 2 + \dots + 2^{n-2}) &= \\ = 2^n - 1 + (2^n - 1)(2^{n-1} - 1) &= (2^n - 1)2^{n-1} = N. \end{aligned}$$

**23.15.** Если числа  $a$ ,  $b$ ,  $c$  образуют одновременно арифметическую и геометрическую прогрессии, то  $b = \frac{a+c}{2}$  и  $b^2 = ac$ , поэтому  $a = c$ .

**23.16.** Пусть  $b = qa$  и  $c = q^2a$ . Тогда  $2(q + q^2) = (1 + q) + (1 + q^2)$ , т. е.  $(q + 2)(q - 1) = 0$ .

**23.17.** Пусть  $a$  — первое из двух чисел исходной последовательности,  $d$  — разность арифметической прогрессии,  $q$  — знаменатель геометрической прогрессии. Тогда  $a + d = aq$  и  $a + 9d = aq^2$ . Следовательно,  $a(q - 1) = d$  и  $a(q - 1)(q + 1) = a(q^2 - 1) = 9d = 9a(q - 1)$ . Учитывая, что  $q \neq 1$ , получаем  $q = 8$  и

$$aq^3 = a + a(q^3 - 1) = a + a(q - 1)(q^2 + q + 1) = a + 73d.$$

**23.18.** Пусть  $a$  и  $b$  — первые члены искомых прогрессий,  $d$  и  $q$  — их разность и знаменатель. Тогда  $a + b = 27$ ,  $a + d + bq = 27$ ,  $a + 2d + bq^2 = 39$  и  $a + 3d + bq^3 = 87$ . Вычтите из второго уравнения первое, из третьего второе, из четвертого третье:

$$\begin{aligned} d + b(q - 1) &= 0, \\ d + bq(q - 1) &= 12, \\ d + bq^2(q - 1) &= 48. \end{aligned}$$

Из первого полученного уравнения следует, что  $b(q-1) = -d$ . Подставьте это выражение во второе и третье уравнения:  $d - dq = 12$ ,  $d - dq^2 = 48$ . Следовательно,  $1 + q = \frac{d - dq^2}{d - dq} = \frac{48}{12} = 4$ , т. е.  $q = 3$ . Поэтому  $d = -6$ ,  $b = 3$  и  $a = 24$ .

**23.19.** в) Умножьте на 3 числа из задачи б).

**23.20.** Рассмотрите геометрическую прогрессию  $(1+d)^n$  и воспользуйтесь тем, что число  $(1+d)^n - 1$  делится на  $d$ , поскольку числа  $1+d$  и 1 дают одинаковые остатки при делении на  $d$ .

**23.21.** Предположите сначала, что  $\frac{a}{d} = \frac{m}{n}$ , где  $m$  и  $n$  — натуральные числа. При всех натуральных  $k$  число  $(1+n)^k - 1$  делится на  $n$ , поэтому число  $b_k = \frac{a(1+n)^k - a}{d} = \frac{m}{n}((1+n)^k - 1)$  целое. Значит, все числа  $a(1+n)^k = a + b_k d$  принадлежат данной арифметической прогрессии. Предположите затем, что  $a + kd, a + ld, a + md$  — последовательные члены геометрической прогрессии, причём  $k < l < m$ . Тогда  $(a + ld)^2 = (a + kd)(a + md)$ , т. е.  $a(2l - k - m) = d(km - l^2)$ . Кроме того,  $2l - k - m \neq 0$ . Действительно, если  $2l - k - m = 0$ , то  $km - l^2 = 0$ , а потому  $(k - m)^2 = (k + m)^2 - 4km = 4l^2 - 4l^2 = 0$ , что противоречит условию  $k < m$ .

## Глава 24. Рациональная степень числа

**24.1.** Первый способ. Пусть

$$x = \sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}.$$

Тогда

$$x^3 = 40 + 3x \sqrt[3]{20^2 - 14^2 \cdot 2} = 6x + 40.$$

Дискриминант квадратного трёхчлена  $\frac{x^3 - 6x - 40}{x - 4} = x^2 + 4x + 10$  отрицателен.

Второй способ. Тождество  $(2 \pm \sqrt{2})^3 = 20 \pm 14\sqrt{2}$  показывает, что  $\sqrt[3]{20 \pm 14\sqrt{2}} = 2 \pm \sqrt{2}$ .

**24.2.** Первый способ. Пусть  $x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{5}}$ . Тогда

$$x^3 = 4 + 3x \sqrt[3]{2^2 - 5} = -3x + 4.$$

Дискриминант квадратного трёхчлена  $\frac{x^3 + 3x - 4}{x - 1} = x^2 + x + 4$  отрицателен.

*Второй способ.* Воспользуйтесь тождеством  $(1 \pm \sqrt{5})^3 = 16 \pm 8\sqrt{5}$ .

**24.3.** Пусть  $x = \sqrt[3]{a + \sqrt{b}} + \sqrt[3]{a - \sqrt{b}}$ . Тогда  $x^3 = 2a + 3x\sqrt[3]{a^2 - b}$ . Для первого числа получаем  $x^3 = 6 + x$ , а для второго  $x^3 = 12 + 5x$ . Первое уравнение имеет корень  $x = 2$ , а второе уравнение имеет корень  $x = 3$ . Дискриминанты квадратных трёхчленов  $\frac{x^3 - x - 6}{x - 2} = x^2 + 2x + 3$  и  $\frac{x^3 - 5x - 12}{x - 3} = x^2 + 3x + 4$  отрицательные.

**24.4.** Вычислите квадрат выражения в левой части, воспользовавшись тем, что  $\sqrt{\sqrt[3]{16} - \sqrt[3]{4}} = \sqrt[3]{2}\sqrt{\sqrt[3]{4} - 1}$ :

$$(\sqrt[3]{4} - 1)(\sqrt[3]{2} + 1)^2 = (\sqrt[3]{4} - 1)(\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{4} + 1) = 4 - 1 = 3.$$

**24.5.** Из тождества

$$(x + 1)^3(x - 1) = (x^3 - 2)x + 2x^3 - 1$$

следует, что  $(x + 1)^3(x - 1) = 3$  при  $x = \sqrt[3]{2}$ . Поэтому  $\sqrt[3]{x - 1} = \frac{\sqrt[3]{3}}{x + 1}$ . Второе требуемое равенство следует из того, что

$$(x + 1)(x^2 - x + 1) = x^3 + 1 = 3.$$

**24.6.** Сначала проверьте, что

$$(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3})^3 = 5 + 3\alpha,$$

$$(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3})^6 = 133 + 30\alpha + 9\beta,$$

$$(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3})^9 = 2555 + 711\alpha + 135\beta,$$

где  $\alpha = \sqrt[3]{6}(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3})$  и  $\beta = \sqrt[3]{36}(\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{9})$ . Из этих равенств следует, что если  $x = \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3}$ , то  $x^9 - 15x^6 - 87x^3 - 125 = 0$ .

**24.7.** Рассмотрите геометрическую прогрессию с первым членом  $b_1 = 1$  и знаменателем  $q = \sqrt[3]{2}$ .

**24.8.** Возведите обе части уравнения в куб:

$$2 + 3\sqrt[3]{1 - x^2}(\sqrt[3]{1 - x} + \sqrt[3]{1 + x}) = 2.$$

Здесь  $\sqrt[3]{1 - x} + \sqrt[3]{1 + x} = \sqrt[3]{2} \neq 0$ , поэтому  $1 - x^2 = 0$ .

**24.9.** Запишите уравнение в виде  $x^3 = (\sqrt{4 - x^2})^3$ , возведите обе части в квадрат и извлеките кубический корень. Полученное уравнение  $x^2 = 4 - x^2$  имеет корни  $x = \pm\sqrt{2}$ . Отрицательный корень не подходит.



**24.10.** Пусть  $u = \sqrt[3]{2-x}$  и  $v = \sqrt{x-1}$ . Тогда  $u+v=1$  и  $u^3+v^2=1$ , поэтому  $u^3+(1-u)^2=1$ , т. е.  $u(u-1)(u+2)=0$ .

**24.11.** Возведите обе части в куб и получите равенства

$$72 = 3 \sqrt[3]{13^2 x^2 - 37^2} (\sqrt[3]{13x+37} - \sqrt[3]{13x-37}) = 3 \sqrt[3]{13^2 x^2 - 37^2} \sqrt[3]{2}.$$

Сократите на 3 и ещё раз возведите в куб:  $4 \cdot 12^3 = 13^2 x^2 - 37^2$ , поэтому  $x = \pm 7$ . Оба эти значения являются решениями уравнения, поскольку  $\sqrt[3]{64} - \sqrt[3]{27} = 4 - 3 = 1$ .

**24.12.** Воспользовавшись тем, что  $x \neq \pm 1$ , поделите обе части уравнения на  $\sqrt[m]{1-x^2} = \sqrt[m]{(1-x)(1+x)}$  и получите уравнение

$$\sqrt[m]{\frac{1+x}{1-x}} - \sqrt[m]{\frac{1-x}{1+x}} = 1.$$

Положите  $z = \sqrt[m]{\frac{1+x}{1-x}}$  и получите для  $z$  квадратное уравнение  $z^2 - z - 1 = 0$ . Поэтому  $z = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$  и  $x = \frac{z^m - 1}{z^m + 1}$ .

**24.13.** Запишите данное уравнение в виде  $x^3 - x = 3 - \{x\}$ . Неравенство  $0 \leq \{x\} < 1$  показывает, что  $2 < x^3 - x \leq 3$ . Если  $x \geq 2$ , то  $x(x^2 - 1) \geq 2 \cdot 3 = 6$ . Если  $|x| \leq 1$ , то  $|x(x^2 - 1)| \leq 1$ . Если  $x < -1$ , то  $x(x^2 - 1) < 0$ . Поэтому  $[x] = 1$ . Уравнение  $x^3 - 1 = 3$  имеет корень  $x = \sqrt[3]{4}$ . Этот корень подходит, поскольку  $[\sqrt[3]{4}] = 1$ .

**24.14.** Предположите, что  $\sqrt[n]{x} \leq \sqrt[n]{y}$ . Тогда  $(\sqrt[n]{x})^n \leq (\sqrt[n]{y})^n$ , т. е.  $x \leq y$ .

**24.15.** Запишите число  $r$  в виде  $\frac{m}{n}$ , где  $m$  и  $n$  — натуральные числа. Ясно, что  $x^m > y^m$ . Кроме того,  $\sqrt[n]{x^m} > \sqrt[n]{y^m}$  согласно задаче 24.14.

**24.16.** Можно считать, то  $r = \frac{m}{q}$  и  $s = \frac{n}{q}$ , где  $m, n$  и  $q$  — натуральные числа. Тогда  $x^m > x^n$ , поэтому  $\sqrt[q]{x^m} > \sqrt[q]{x^n}$  согласно задаче 24.14, т. е.  $x^r > x^s$ .

**24.17.** Воспользуйтесь тем, что  $\sqrt{4} + \sqrt[3]{4} + \sqrt[4]{4} > 2 + 1 + 1 = 4$  и  $\sqrt{7} + \sqrt[3]{7} + \sqrt[4]{7} < \sqrt{9} + \sqrt[3]{8} + \sqrt[4]{16} = 7$ .

**24.18.** Вместо знака неравенства поставим знак  $\vee$  и будем рассматривать только преобразования, которые сохраняют знак неравенства:

$$\begin{aligned} \sqrt{11} \vee 5 - \sqrt[3]{5} &\Leftrightarrow \sqrt[3]{5} \vee 5 - \sqrt{11} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 5 \vee 125 - 75\sqrt{11} + 165 - 11\sqrt{11} \Leftrightarrow 86\sqrt{11} \vee 285 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 81356 \vee 81225. \end{aligned}$$

Значит,  $\sqrt{11} > 5 - \sqrt[3]{5}$ .

**24.19.** Воспользуйтесь тем, что

$$\frac{2}{3} \left( x + \frac{1}{x^2} \right) - \sqrt[3]{2} = \frac{(x - \sqrt[3]{2})^2 (2x + \sqrt[3]{2})}{3x^2}.$$

**24.20.** Воспользуйтесь тем, что

$$(1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4})(\sqrt[3]{2} - 1) = (\sqrt[3]{2})^3 - 1 = 1.$$

**24.21.** Воспользуйтесь тем, что

$$(1 - \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4})(\sqrt[3]{2} + 1) = (\sqrt[3]{2})^3 + 1 = 3.$$

**24.22.** Воспользуйтесь тем, что

$$1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4} = \frac{(\sqrt[3]{2})^3 - 1}{\sqrt[3]{2} - 1} = \frac{1}{\sqrt[3]{2} - 1}.$$

**24.23.** Воспользуйтесь тем, что

$$0 = \alpha^3 - 3\alpha + 1 = (\alpha^2 - \alpha - 2)(\alpha + 1) + 3.$$

**24.24.** Проверьте, что

$$(\sqrt[4]{27} - \sqrt[4]{3})^2 = \sqrt{27} - 2\sqrt[4]{81} + \sqrt{3} = 4\sqrt{3} - 6.$$

**24.25.** По условию

$$b_{m-n} = b_0 q^{m-n} \quad \text{и} \quad b_{m+n} = b_0 q^{m+n},$$

поэтому

$$(b_0 q^m)^2 = b_{m-n} b_{m+n} \quad \text{и} \quad q^{2n} = \frac{b_{m+n}}{b_{m-n}}.$$

Следовательно,  $b_0 q^n = b_{m+n} q^{-m} = b_{m+n} b_{m-n}^{\frac{m}{2n}} b_{m+n}^{-\frac{m}{2n}}$ .

**24.26.** Оба числа равны  $\left(\frac{n+1}{n}\right)^m$ , где  $m = \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n}$ .

**24.27.** Пусть  $x = ky$ , где  $k > 1$  — рациональное число. Тогда

$$(ky)^y = (y^k)^y,$$

поэтому  $ky = y^k$ , а значит,  $y = k^{\frac{1}{k-1}}$ . Пусть  $\frac{1}{k-1} = \frac{p}{q}$  — несократимая

дробь. Тогда  $y = \left(\frac{p+q}{p}\right)^{\frac{p}{q}}$  и  $x = \left(\frac{p+q}{p}\right)^{\frac{p+q}{q}}$ . Числа  $p$  и  $p+q$  взаимно простые, поэтому число  $y$  может быть рациональным лишь в том

случае, когда корень степени  $q$  из числителя и из знаменателя дроби  $\frac{p+q}{p}$  — натуральные числа, т.е.  $p = a^q$  и  $p + q = b^q$  для некоторых натуральных  $a$  и  $b$ . Предположим, что  $q \geq 2$ . Тогда при раскрытии скобок в выражении  $(a+1)^q$  получим  $a^q + qa^{q-1}$  и ещё некоторое положительное число, поэтому  $a^q < p + q \leq a^q + qa^{q-1} < (a+1)^q$ . Приходим к противоречию, так как между числами  $a^q$  и  $(a+1)^q$  не может находиться число  $b^q = p + q$ . Поэтому  $q = 1$ . Для любого натурального  $p$  числа  $x = \left(1 + \frac{1}{p}\right)^{p+1}$  и  $y = \left(1 + \frac{1}{p}\right)^p$  рациональны и являются решениями уравнения  $x^y = y^x$ .

## Глава 25. Тригонометрические формулы

**25.1.** Воспользуйтесь тем, что

$$\sin 3x = \sin(x+2x) \quad \text{и} \quad \cos 3x = \cos(x+2x).$$

**25.2.** Воспользуйтесь тем, что

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin x \cos \frac{\pi}{4} + \cos x \sin \frac{\pi}{4}$$

и

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos x \cos \frac{\pi}{4} - \sin x \sin \frac{\pi}{4}.$$

**25.3.** Если  $\sin y = \sin x$ , то либо  $y = x + 2k\pi$ , либо  $y = \pi - x + 2k\pi$ . Поэтому с точностью до  $2k\pi$  число  $\frac{y}{2}$  может принимать только следующие значения:  $\frac{x}{2}$ ,  $\frac{x}{2} + \pi$ ,  $\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}$  и  $\frac{3\pi}{2} - \frac{x}{2}$ . Если  $x = \frac{\pi}{3}$ , то эти значения равны  $\frac{\pi}{6}$ ,  $\frac{7\pi}{6}$ ,  $\frac{\pi}{3}$  и  $\frac{4\pi}{3}$ . Синусы этих четырёх углов попарно различны.

**25.4. Первый способ.** Если  $\sin y = \sin x$ , то либо  $y = x + 2k\pi$ , либо  $y = \pi - x + 2k\pi$ . Поэтому с точностью до  $2k\pi$  число  $\frac{y}{3}$  может принимать только следующие значения:  $\frac{x}{3}$ ,  $\frac{x}{3} + \frac{2\pi}{3}$ ,  $\frac{x}{3} + \frac{4\pi}{3}$ ,  $\frac{\pi}{3} - \frac{x}{3}$ ,  $\pi - \frac{x}{3}$ ,  $\frac{5\pi}{3} - \frac{x}{3}$ . Проверьте, что синус каждого из трёх первых углов равен синусу одного из трёх последних углов. Если  $\sin x = 0$ , то  $x = k\pi$ , поэтому  $\sin \frac{x}{3}$  принимает значения  $\sin 0 = 0$ ,  $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$  и  $\sin \frac{4\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

*Второй способ.* Согласно задаче 25.1

$$a = 3 \sin \frac{x}{3} - 4 \sin^3 \frac{x}{3},$$

а многочлен третьей степени не может иметь более трёх различных корней. Действительно, если многочлен третьей степени имеет попарно различные корни  $x_1$ ,  $x_2$  и  $x_3$ , то он делится на  $(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$ .

Результатом такого деления является отличное от нуля число, поэтому других корней нет.

**25.5.** Из тождества  $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$  следует, что

$$\sin^4 x + \cos^4 x = 2 \sin^4 x - 2 \sin^2 x + 1$$

и

$$\sin^6 x + \cos^6 x = 3 \sin^4 x - 3 \sin^2 x + 1.$$

**25.6.** Воспользуйтесь тем, что

$$\sin 40^\circ \sin 50^\circ = \sin 40^\circ \cos 40^\circ = \frac{1}{2} \sin 80^\circ$$

и

$$\sin 10^\circ \sin 80^\circ = \frac{1}{2} \sin 20^\circ.$$

**25.7.** Если  $\alpha = \frac{2\pi}{3}$ , то  $\cos \alpha = -\frac{1}{2}$ . Кроме того, если  $\cos x = -\frac{1}{2}$ , то  $\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1 = -\frac{1}{2}$ . Поэтому  $\cos(2^n \alpha) = -\frac{1}{2}$  для всех натуральных  $n$ .

**25.8.** Воспользуйтесь формулами синуса и косинуса двойного угла:  $\frac{\sin 2x}{\cos 2x + 1} = \frac{2 \sin x \cos x}{2 \cos^2 x - 1 + 1}$ .

**25.9.** Воспользовавшись задачей 25.2, покажите, что

$$1 + \operatorname{tg} x = \frac{\cos x + \sin x}{\cos x} = \frac{\sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right)}{\cos x} = \frac{\sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}{\cos x}.$$

Поэтому  $1 + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{\sqrt{2} \cos x}{\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}$ .

**25.10.** Воспользуйтесь задачей 25.2.

**25.11.** Воспользуйтесь тем, что  $\frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x \cos x} = \frac{\cos 2x}{\frac{1}{2} \sin 2x}$ .

**25.12.** Из задачи 25.11 следует, что

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{ctg} x - 2 \operatorname{ctg} 2x,$$

$$2 \operatorname{tg} 2x = 2 \operatorname{ctg} 2x - 4 \operatorname{ctg} 4x,$$

.....

$$2^n \operatorname{tg} 2^n x = 2^n \operatorname{ctg} 2^n x - 2^{n+1} \operatorname{ctg} 2^{n+1} x.$$

Сложите эти равенства.

**25.13.** Воспользуйтесь тем, что

$$\sin mx \cos nx - \cos mx \sin nx = \sin(m - n)x.$$

**25.14.** Из задачи 25.13 следует, что

$$\operatorname{tg}(k+1)x - \operatorname{tg} kx = \frac{\sin x}{\cos kx \cos(k+1)x}.$$

Сложите такие равенства для  $k = 1, 2, \dots, n-1$ .

**25.15.** Рассмотрите равнобедренный треугольник с углом  $30^\circ$  при вершине и проведите высоту к боковой стороне.

**25.16.** Поделите числитель и знаменатель дроби

$$\frac{\sin x \cos y + \cos x \sin y}{\cos x \cos y - \sin x \sin y}$$

на  $\cos x \cos y$ .

**25.17.** Воспользуйтесь тем, что

$$\operatorname{tg}(x+y) = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{6}}.$$

**25.18.** Последовательно покажите, что

$$\operatorname{tg}(x+y) = \frac{4}{7}, \quad \operatorname{tg}(x+y+z) = \frac{7}{9} \quad \text{и} \quad \operatorname{tg}(x+y+z+w) = 1.$$

**25.19.** Последовательно покажите, что  $\operatorname{tg}(2x) = \frac{5}{12}$ ,  $\operatorname{tg}(4x) = \frac{120}{119}$  и  $\operatorname{tg}(4x-y) = 1$ .

**25.20.** Из равенства  $\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} y = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$  следует, что  $\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = \frac{p}{q}$ . Поэтому

$$\operatorname{tg}(x+y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y} = \frac{p}{1 - \frac{p}{q}}.$$

**25.21.** Равенство  $(1 + \operatorname{tg} x)(1 + \operatorname{tg} y) = 2$  эквивалентно равенству  $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y$ . При этом  $1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y \neq 0$ . Действительно, если  $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 0$ , то числа  $\operatorname{tg} x$  и  $\operatorname{tg} y$  не могут иметь один и тот же знак, поэтому  $\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y \leq 0$ .

**25.22.** Пусть  $u = \operatorname{tg} x$ ,  $v = \operatorname{tg} y$ ,  $w = \operatorname{tg} z$ . Тогда

$$\operatorname{tg}(x-y) + \operatorname{tg}(y-z) = \frac{u-v}{1+uv} + \frac{v-w}{1+vw} = \frac{(u-w)(1+v^2)}{(1+uv)(1+vw)}$$

и

$$\frac{1+v^2}{(1+uv)(1+vw)} - \frac{1}{1+wu} = \frac{(v-w)(v-u)}{(1+uv)(1+vw)(1+wu)}.$$

Из условия следует, что знаменатели  $1+uv$ ,  $1+vw$  и  $1+wu$  не обращаются в нуль, поэтому  $(u-w)(v-w)(v-u) = 0$ .

**25.23.** Домножьте обе части равенства на  $\sin x$ .

**25.24.** Согласно задаче 25.23 искомое произведение равно

$$\frac{\sin \frac{16\pi}{7}}{8 \sin \frac{2\pi}{7}}.$$

Кроме того,  $\sin \frac{16\pi}{7} = \sin \frac{2\pi}{7}$ .

**25.25.** Согласно задаче 25.23 искомое произведение равно

$$\frac{\sin \frac{16\pi}{9}}{8 \sin \frac{2\pi}{9}}.$$

Кроме того,  $\sin \frac{16\pi}{9} = -\sin \frac{2\pi}{9}$ .

**25.26.** Воспользуйтесь тем, что

$$\cos^2 15^\circ = \frac{\cos 30^\circ + 1}{2} = \frac{\sqrt{3} + 2}{4} \quad \text{и} \quad (\sqrt{6} + \sqrt{2})^2 = 4(\sqrt{3} + 2).$$

**25.27. Первый способ.** Воспользуйтесь тем, что

$$\sin 15^\circ = \sin(45^\circ - 30^\circ).$$

*Второй способ.* Воспользуйтесь задачей 25.26 и тем, что

$$\sin 15^\circ = \sqrt{1 - \cos^2 15^\circ}.$$

**25.28.** Рассмотрите равнобедренный треугольник  $ABC$  с основанием  $BC = 1$  и углом  $A$ , равным  $36^\circ$ , и проведите в нём биссектрису  $BD$ . Вычислите углы треугольников  $ABD$  и  $BCD$  и убедитесь, что эти треугольники равнобедренные, и что  $AB = 2 \cos 36^\circ$ . Пусть  $\cos 36^\circ = x$ . Из подобия треугольников  $ABC$  и  $BCD$  следует, что  $AB : BC = BC : CD$ , т. е.  $2x : 1 = 1 : (2x - 1)$ .

**25.29.** Из задачи 25.28 следует, что

$$\sin^2 18^\circ = \frac{1 - \cos 36^\circ}{2} = \frac{3 - \sqrt{5}}{8} = \left( \frac{\sqrt{5} - 1}{4} \right)^2.$$

**25.30.** Воспользуйтесь задачами 25.28 и 25.29.

**25.31.** Воспользуйтесь тем, что  $\sin 6^\circ = \sin(36^\circ - 30^\circ)$ .

## Глава 26. Тригонометрические уравнения и неравенства

**26.1. Первый способ.** Сложите неравенства  $\sin \alpha > \sin^2 \alpha$  и  $\cos \alpha > \cos^2 \alpha$ .

*Второй способ.* Воспользуйтесь тем, что сумма катетов прямоугольного треугольника больше гипотенузы.

**26.2.** Выберите угол  $\varphi$  так, что  $\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$  и  $\sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ . Тогда  $f(x) = \sqrt{a^2+b^2} \sin(x+\varphi)$ .

**26.3.** Пусть  $O$  — центр окружности радиуса 1,  $A$  и  $B$  — точки этой окружности, для которых  $\angle AOB = \alpha$ ,  $C$  — точка, в которой касательная к окружности в точке  $B$  пересекает луч  $OA$  (рис. 1),  $S_{AOB}$  — площадь треугольника  $AOB$ ,  $S$  — площадь сектора, высекаемого радиусами  $AO$  и  $OB$ ,  $S_{BOC}$  — площадь треугольника  $BOC$ . Тогда  $S_{AOB} < S < S_{BOC}$  и  $S_{AOB} = \frac{1}{2} \sin \alpha$ ,  $S = \frac{1}{2} \alpha$ ,  $S_{BOC} = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha$ .

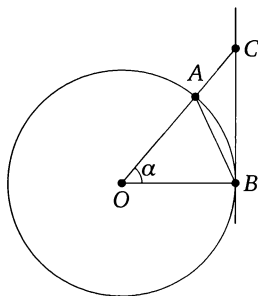


Рис. 1

**26.4.** Согласно задаче 26.3 получаем

$$\beta - \alpha < \operatorname{tg}(\beta - \alpha) = \frac{\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \alpha} < \operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha.$$

**26.5.** Примените неравенство  $\sin x < x$  из задачи 26.3 для  $x = \cos \alpha$  и получите неравенство  $\sin(\cos \alpha) < \cos \alpha$ . Далее, из неравенств  $0 < \sin \alpha < \alpha < \frac{\pi}{2}$  следует неравенство  $\cos(\sin \alpha) > \cos \alpha$ , поскольку  $\cos x > \cos y$  при  $0 < x < y < \frac{\pi}{2}$ .

**26.6.** Если  $a, b, c, d$  — положительные числа, причём  $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ , то  $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$  (8 класс, задача 12.23). Поэтому из неравенства  $\operatorname{tg} x_1 < \operatorname{tg} x_2$  следует, что

$$\operatorname{tg} x_1 < \frac{\sin x_1 + \sin x_2}{\cos x_1 + \cos x_2} < \operatorname{tg} x_2 < \operatorname{tg} x_3.$$

Ещё раз воспользовавшись задачей 12.23, получите неравенства

$$\operatorname{tg} x_1 < \frac{\sin x_1 + \sin x_2 + \sin x_3}{\cos x_1 + \cos x_2 + \sin x_3} < \operatorname{tg} x_3, \quad \text{и т. д.}$$

**26.7.** Ясно, что

$$\operatorname{tg} 55^\circ = \frac{\operatorname{tg} 45^\circ + \operatorname{tg} 10^\circ}{1 - \operatorname{tg} 45^\circ \operatorname{tg} 10^\circ} = \frac{1 + \operatorname{tg} 10^\circ}{1 - \operatorname{tg} 10^\circ}.$$

Из задачи 26.3 следует, что

$$\operatorname{tg} 10^\circ = \operatorname{tg} \frac{\pi}{18} > \frac{\pi}{18} > \frac{3}{18} = \frac{1}{6}.$$

Поэтому

$$\frac{1 + \operatorname{tg} 10^\circ}{1 - \operatorname{tg} 10^\circ} = \frac{2}{1 - \operatorname{tg} 10^\circ} - 1 > \frac{7}{5} = 1,4.$$

**26.8.** Положите  $t = \sin x$ . Тогда  $\cos^2 x = 1 - t^2$ , поэтому получаем уравнение  $4t^3 - 7t + 3 = 0$ . Это уравнение имеет корни  $t_1 = 1$ ,  $t_2 = \frac{1}{2}$  и  $t_3 = -\frac{3}{2}$ . Последний корень нам не подходит.

**26.9.** Рассмотрите данное уравнение как квадратное уравнение относительно  $x$ . Его дискриминант  $4(\sin^2(xy) - 1)$  должен быть неотрицательным, поэтому  $\sin^2(xy) \geq 1$ , т.е.  $\sin(xy) = \pm 1$ . Решения уравнения  $x^2 \pm 2x + 1 = 0$  имеют вид  $x = \mp 1$ . Далее, если  $\sin(\mp y) = \pm 1$ , то  $\sin y = -1$ .

**26.10.** Выберите  $\alpha$  и  $\beta$  так, что  $x = \cos \alpha$  и  $\sqrt{1 - x^2} = \sin \alpha$ ,  $y = \cos \beta$  и  $\sqrt{1 - y^2} = \sin \beta$ , и воспользуйтесь тем, что

$$x\sqrt{1 - y^2} + y\sqrt{1 - x^2} = \sin(\alpha + \beta).$$

Значение 1 достигается, например, при  $x = 1$  и  $y = 0$ .

**26.11.** Первое уравнение можно переписать в виде  $y = \frac{2x}{1 - x^2}$  (ясно, что  $x \neq \pm 1$ ). Пусть  $x = \operatorname{tg} \varphi$ . Тогда  $y = \operatorname{tg} 2\varphi$ . Аналогично  $z = \operatorname{tg} 4\varphi$  и  $x = \operatorname{tg} 8\varphi$ . Таким образом,  $\operatorname{tg} 8\varphi = \operatorname{tg} \varphi$ . Поэтому

$$\operatorname{tg} 7\varphi = \frac{\operatorname{tg} 8\varphi - \operatorname{tg} \varphi}{1 + \operatorname{tg} 8\varphi \operatorname{tg} \varphi} = \frac{\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \varphi}{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi} = 0,$$

т.е.  $7\varphi = k\pi$ , где  $k$  — целое число. Наоборот, если  $7\varphi = k\pi$ , то  $\operatorname{tg} 8\varphi = \operatorname{tg} \varphi$  и мы получаем решение данной системы уравнений. Всего получаем 7 различных решений, соответствующих углам  $\varphi = 0, \frac{\pi}{7}, \dots, \frac{6\pi}{7}$ .

**26.12.** Положите  $x = 2 \cos u$ , где  $0 \leq u \leq \pi$ . Тогда  $y = 2 \cos 3u$ ,  $z = 2 \cos 9u$  и  $x = 2 \cos 27u$ . Поэтому  $\cos 27u = \cos u$ , т.е.  $27u = 2k\pi \pm u$  для некоторого целого  $k$ .

**26.13.** Равенства

$$\frac{x}{3(1+x^2)} = \frac{y}{4(1+y^2)} = \frac{z}{5(1+z^2)}$$

показывают, что числа  $x, y, z$  имеют одинаковые знаки, причём если  $(x, y, z)$  — решение системы, то  $(-x, -y, -z)$  — тоже решение. Поэтому достаточно найти положительные решения. Воспользуйтесь тем, что  $\operatorname{tg} \varphi + \frac{1}{\operatorname{tg} \varphi} = \frac{2}{\sin 2\varphi}$ . Выберите углы  $\alpha, \beta, \gamma$ , заключённые между 0 и  $\pi$ , так, что  $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = x$ ,  $\operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = y$ ,  $\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = z$ . Тогда

$$\frac{\sin \alpha}{3} = \frac{\sin \beta}{4} = \frac{\sin \gamma}{5} \quad \text{и} \quad \frac{1}{z} = \frac{x+y}{1-xy},$$



т. е.  $\operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2} = \operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta}{2}$ . Если  $0 < \alpha, \beta, \gamma < \pi$ , то равенство

$$\operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\gamma}{2} \right) = \operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta}{2}$$

выполняется лишь в том случае, когда  $\frac{\pi}{2} - \frac{\gamma}{2} = \frac{\alpha + \beta}{2}$ , т. е.  $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ . Таким образом,  $\alpha, \beta$  и  $\gamma$  — углы треугольника, стороны которого относятся как  $3 : 4 : 5$ . Значит,  $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ ,  $\sin \beta = \frac{4}{5}$  и  $\gamma = \frac{\pi}{2}$ . Поэтому  $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{3}$ ,  $\operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = \frac{1}{2}$  и  $\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = 1$ .

**26.14.** Положите  $x_n = \operatorname{tg} t$  и проверьте, что  $x_{n+1} = \operatorname{tg} \left( t - \frac{\pi}{6} \right)$ .

**26.15.** Из задачи 25.2 следует, что  $\sin \left( x + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1}{3}$ , поэтому

$$\cos^2 \left( x + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{8}{9} \quad \text{и} \quad \cos x - \sin x = \sqrt{2} \cos \left( x + \frac{\pi}{4} \right) = \pm \frac{4}{3}.$$

Из условия следует, что  $\sin x > 0$  и  $\cos x < 0$ , поэтому искомая величина положительна.

**26.16.** Сложите равенства

$$\begin{aligned} \frac{\sin 1^\circ}{\sin n^\circ \sin(n+1)^\circ} &= \frac{\sin((n+1)^\circ - n^\circ)}{\sin n^\circ \sin(n+1)^\circ} = \\ &= \frac{\sin(n+1)^\circ \cos n^\circ - \cos(n+1)^\circ \sin n^\circ}{\sin n^\circ \sin(n+1)^\circ} = \\ &= \operatorname{ctg} n^\circ - \operatorname{ctg}(n+1)^\circ \end{aligned}$$

для  $n = 45, 47, \dots, 133$  и воспользуйтесь тем, что

$$\operatorname{ctg} 46^\circ + \operatorname{ctg} 134^\circ = \operatorname{ctg} 47^\circ + \operatorname{ctg} 133^\circ = \dots = \operatorname{ctg} 89^\circ + \operatorname{ctg} 91^\circ = 0$$

и  $\operatorname{ctg} 45^\circ - \operatorname{ctg} 90^\circ = 1$ .

## Глава 27. Тригонометрические тождества

**27.1.** Проверьте, что  $\sin(x-y) + \sin(x+y) = 2 \sin x \cos y$ .

**27.2.** Проверьте, что  $\cos(x+y) + \cos(x-y) = 2 \cos x \cos y$ .

**27.3.** Проверьте, что  $\cos(x-y) - \cos(x+y) = 2 \sin x \sin y$ .

**27.4.** Покажите, что

$$\sin(u+v) + \sin(u-v) = 2 \sin u \cos v,$$

и положите  $u = \frac{x+y}{2}$  и  $v = \frac{x-y}{2}$ .

**27.5.** Покажите, что

$$\sin(u+v) - \sin(u-v) = 2 \sin v \cos u,$$

и положите  $u = \frac{x+y}{2}$  и  $v = \frac{x-y}{2}$ .

**27.6.** Покажите, что

$$\cos(u+v) + \cos(u-v) = 2 \cos u \cos v,$$

и положите  $u = \frac{x+y}{2}$  и  $v = \frac{x-y}{2}$ .

**27.7.** Покажите, что

$$\cos(u+v) - \cos(u-v) = -2 \sin u \sin v,$$

и положите  $u = \frac{x+y}{2}$  и  $v = \frac{x-y}{2}$ .

**27.8.** Запишите равенство из задачи 27.5 и воспользуйтесь тем, что  $\sin \frac{x-y}{2} < \frac{x-y}{2}$  согласно задаче 26.3 и  $0 < \cos \frac{x+y}{2} < 1$ .

**27.9.** Воспользуйтесь тем, что  $\sin 20^\circ \sin 40^\circ = \frac{1}{2}(\cos 20^\circ - \cos 60^\circ)$ ,  $\cos 20^\circ \sin 80^\circ = \frac{1}{2}(\sin 60^\circ + \sin 100^\circ)$  и  $\sin 100^\circ = \sin 80^\circ$ .

**27.10.** Воспользуйтесь тем, что

$$\begin{aligned} \sin 1^\circ \sin 4^\circ - \sin 2^\circ \sin 3^\circ &= \frac{1}{2}(\cos 3^\circ - \cos 5^\circ) - \frac{1}{2}(\cos 1^\circ - \cos 5^\circ) = \\ &= \frac{1}{2}(\cos 3^\circ - \cos 1^\circ) < 0. \end{aligned}$$

**27.11.** Дважды воспользуйтесь задачей 27.2.

**27.12.** Воспользуйтесь сначала задачей 27.3, а затем задачей 27.1.

**27.13.** Примените формулу из задачи 27.11 для

$$x = \frac{\alpha + \beta}{2}, \quad y = \frac{\beta + \gamma}{2}, \quad z = \frac{\gamma + \alpha}{2}.$$

**27.14.** Примените формулу из задачи 27.12 для

$$x = \frac{\alpha + \beta}{2}, \quad y = \frac{\beta + \gamma}{2}, \quad z = \frac{\gamma + \alpha}{2}.$$

**27.15.** Воспользуйтесь тем, что

$$\cos m\alpha = \frac{\sin \frac{(2m+1)\alpha}{2} - \sin \frac{(2m-1)\alpha}{2}}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}.$$

**27.16.** Согласно задаче 27.15 искомая сумма равна

$$\frac{\sin 7 \cdot \frac{\pi}{7} - \sin \frac{\pi}{7}}{2 \sin \frac{\pi}{7}}.$$

**27.17.** Воспользуйтесь сначала формулой

$$\sin m\alpha = \frac{\cos \frac{(2m-1)\alpha}{2} - \cos \frac{(2m+1)\alpha}{2}}{2 \sin \frac{\alpha}{2}},$$

а затем формулой

$$\cos \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{(2n+1)\alpha}{2} = 2 \sin \frac{n\alpha}{2} \sin \frac{(n+1)\alpha}{2}.$$

**27.18.** Из равенств

$$\frac{11}{5} \sin x = \sin 3x + \sin x = 2 \sin 2x \cos x = 4 \sin x \cos^2 x$$

следует, что  $\cos^2 x = \frac{11}{20}$ . Поэтому

$$\begin{aligned} \sin 5x + \sin x &= 2 \sin 3x \cos 2x = \frac{12}{5} \sin x (2 \cos^2 x - 1) = \\ &= 2,4 \cdot (1,1 - 1) \sin x = 0,24 \sin x. \end{aligned}$$

**27.19.** Воспользуйтесь тем, что

$$2 \sin 2n^\circ \sin 1^\circ = \cos(2n-1)^\circ - \cos(2n+1)^\circ$$

и

$$\begin{aligned} &(\cos 1^\circ - \cos 3^\circ) + 2(\cos 3^\circ - \cos 5^\circ) + \dots + 89(\cos 177^\circ - \cos 179^\circ) = \\ &= \cos 1^\circ + (\cos 3^\circ + \cos 177^\circ) + \dots + (\cos 89^\circ + \cos 91^\circ) - 89 \cos 179^\circ = \\ &= 90 \cos 1^\circ. \end{aligned}$$

**27.20.** Первое произведение синусов равно

$$\frac{1}{2} \sin 16^\circ (\cos 14^\circ - \cos 34^\circ) = \frac{1}{4} (\sin 2^\circ + \sin 30^\circ + \sin 18^\circ - \sin 50^\circ).$$

Второе произведение синусов равно

$$\frac{1}{2} \sin 2^\circ (\sin 30^\circ + \sin 38^\circ) = \frac{1}{4} (\sin 2^\circ + \cos 36^\circ - \cos 40^\circ).$$

Воспользуйтесь равенством  $\cos 36^\circ = \sin 18^\circ + \frac{1}{2}$ , доказанным в задаче 25.30.

**27.21.** Воспользуйтесь тем, что

$$\sin x = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}} \quad \text{и} \quad \cos x = \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}}.$$

**27.22.** Положите  $t = \operatorname{tg} x$  и воспользуйтесь тем, что  $\sin 2x = \frac{2t}{1+t^2}$ .

По условию  $t \neq 1$ , поэтому уравнение  $\frac{1+t}{1-t} = 1 + \frac{2t}{1+t^2}$  можно привести к виду  $2t^2(1+t) = 0$ .

**27.23.** Пусть  $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$ . Тогда  $t \neq \pm 1$ , поскольку  $\cos x \neq 0$ . Поэтому

$$\frac{1}{\cos x} + \operatorname{tg} x = \frac{1 + \sin x}{\cos x} = \frac{1 + 2t + t^2}{1 - t^2} = \frac{1 + t}{1 - t}$$

и

$$\frac{1}{\sin x} + \operatorname{ctg} x = \frac{1 + \cos x}{\sin x} = \frac{1}{t}.$$

**27.24.** Воспользуйтесь формулами из задач 27.21 и 25.8.

**27.25.** *Первый способ.* Воспользуйтесь задачей 27.12 и тем, что  $-x + y + z = -2x$  и т. д.

*Второй способ.* Воспользуйтесь тем, что

$$\begin{aligned} 4 \sin x \sin y \sin(x + y) &= 4 \sin x \sin y (\sin x \cos y + \cos x \sin y) = \\ &= 2 \sin^2 x \sin 2y + \sin^2 y \sin 2x = \\ &= (1 - \cos 2x) \sin 2y + (1 - \cos 2y) \sin 2x. \end{aligned}$$

**27.26.** *Первый способ.* Воспользуйтесь задачей 27.11 и тем, что  $-x + y + z = -2x$  и т. д.

*Второй способ.* Воспользуйтесь тем, что

$$\begin{aligned} 4 \cos x \cos y \cos(x + y) &= 4 \cos x \cos y (\cos x \cos y - \sin x \sin y) = \\ &= 4 \cos^2 x \cos^2 y - \sin 2x \sin 2y = \\ &= (1 + \cos 2x)(1 + \cos 2y) - \sin 2x \sin 2y. \end{aligned}$$

**27.27.** *Первый способ.* Сложите равенства

$$\cos 2\alpha + \cos 2\beta = 2 \cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) = -2 \cos \gamma \cos(\alpha - \beta)$$

и

$$\cos 2\gamma = 2 \cos^2 \gamma - 1 = -2 \cos \gamma \cos(\alpha + \beta) - 1$$

и воспользуйтесь тем, что

$$\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta) = 2 \cos \alpha \cos \beta.$$

*Второй способ.* Воспользуйтесь задачей 27.11.

**27.28.** Воспользуйтесь равенством из задачи 27.27 и тем, что

$$\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1.$$

**27.29.** *Первый способ.* Сложите равенства

$$\sin 2\alpha + \sin 2\beta = 2 \sin(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) = 2 \sin \gamma \cos(\alpha - \beta)$$

и

$$\sin 2\gamma = 2 \sin \gamma \cos \gamma = -2 \sin \gamma \cos(\alpha + \beta)$$

и воспользуйтесь тем, что

$$\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta) = 2 \sin \alpha \sin \beta.$$

*Второй способ.* Воспользуйтесь задачей 27.12.

**27.30.** Воспользуйтесь тем, что

$$\operatorname{tg} \gamma = -\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = -\frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}.$$

**27.31.** Сначала проверьте, что

$$\begin{aligned} \cos \gamma (\sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha) + \sin \gamma (\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta) = \\ = \cos \gamma \sin(\alpha + \beta) + \sin \gamma \cos(\alpha + \beta) = \cos \gamma \sin \gamma - \sin \gamma \cos \gamma = 0. \end{aligned}$$

Затем поделите обе части полученного равенства на  $\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$ .

**27.32.** Сначала проверьте, что

$$\begin{aligned} \cos \alpha (\sin \beta \sin \gamma - \cos \beta \cos \gamma) + \sin \alpha (\cos \beta \sin \gamma + \cos \gamma \sin \beta) = \\ = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1. \end{aligned}$$

Затем поделите обе части полученного равенства на  $\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$ .

## Глава 28. Приближённые вычисления

**28.1.** Если  $0 < x < 1$ , то  $1 - 2x + x^2 < 1 - x$ , поэтому  $1 - x < \sqrt{1 - x}$ .

Следовательно,  $1 - (0,1)^{20} < \sqrt{1 - (0,1)^{20}} < 1$ .

**28.2.** Воспользуйтесь тем, что

$$\sqrt{1001} - \sqrt{1000} = \frac{1}{\sqrt{1001} + \sqrt{1000}} < \frac{1}{2\sqrt{1000}}$$

и  $2^{12} > 100$ .

**28.3.** Воспользуйтесь тем, что  $5 - \sqrt{26} = \frac{1}{5 + \sqrt{26}} < \frac{1}{10}$ .

**28.4.** Воспользуйтесь тем, что число  $(5 + \sqrt{26})^{20} + (5 - \sqrt{26})^{20}$  целое (задача 13.36, 8 класс).

**28.5.** Ясно, что  $a_{n+1} > \frac{1}{2} \left( a_n + \frac{1}{a_n} \right) \geq 1$ . Если  $a_n \geq 1$  и  $\varepsilon_n = |a_n - \sqrt{2}|$ , то

$$\varepsilon_{n+1} = |a_{n+1} - \sqrt{2}| = \left| \frac{1}{2} \left( a_n + \frac{2}{a_n} \right) - \sqrt{2} \right| = \frac{(a_n - \sqrt{2})^2}{2a_n} \leq \frac{\varepsilon_n^2}{2}.$$

Из того, что  $a_2 = 1,5$  и  $1,4^2 < 2 < 1,5^2$ , следует, что  $\varepsilon_2 < 0,1$ . Поэтому  $\varepsilon_3 < \frac{1}{2} \cdot 10^{-2}$ ,  $\varepsilon_4 < \frac{1}{8} \cdot 10^{-4}$  и  $\varepsilon_5 < \frac{1}{128} \cdot 10^{-8} < 10^{-10}$ .

**28.6.** Из неравенства  $a_n \geq \sqrt[3]{2}$  (см. задачу 24.19) следует, что

$$3a_n^2 - 2a_n = a_n(3a_n - 2) \geq \sqrt[3]{2}(3\sqrt[3]{2} - 2) \geq \sqrt[3]{2},$$

поскольку  $3\sqrt[3]{2} \geq 3$ . Таким образом,

$$\frac{2a_n + \sqrt[3]{2}}{3a_n^2} \leq 1.$$

Пусть  $\varepsilon_n = a_n - \sqrt[3]{2}$ . Несложно проверить, что

$$a_2 - \frac{1}{10} = \frac{4}{3} - \frac{1}{10} = \frac{37}{30} < 1,24 < \sqrt[3]{2}.$$

Из неравенств  $\sqrt[3]{2} \leq a_2 < \sqrt[3]{2} + 0,1$  следует, что  $\varepsilon_2 < 0,1$ . Воспользуйтесь также тем, что

$$\varepsilon_{n+1} = a_{n+1} - \sqrt[3]{2} = \frac{2}{3} \left( a_n + \frac{1}{a_n^2} \right) - \sqrt[3]{2} = \frac{(a_n - \sqrt[3]{2})^2 (2a_n + \sqrt[3]{2})}{3a_n^2} \leq \varepsilon^2.$$

**28.7.** Неравенство

$$\left| \frac{x_1 x_2 - a_1 a_2}{x_1 x_2} \right| \leq \left| \frac{x_1 - a_1}{x_1} \right| + \left| \frac{x_2 - a_2}{x_2} \right| + \left| \frac{x_1 - a_1}{x_1} \right| \cdot \left| \frac{x_2 - a_2}{x_2} \right|$$

следует из равенства

$$\begin{aligned} x_1 x_2 - a_1 a_2 &= \\ &= (x_1 x_2 - a_1 x_2) + (x_1 x_2 - x_1 a_2) - (x_1 x_2 - a_1 x_2 - x_1 a_2 + a_1 a_2). \end{aligned}$$

**28.8.** Из равенства  $x_1 a_2 - a_1 x_2 = x_2(x_1 - a_1) + x_1(a_2 - x_2)$  следует неравенство

$$\left| \frac{x_1}{x_2} - \frac{a_1}{a_2} \right| \leq \left| \frac{1}{a_2} \right| \cdot |x_1 - a_1| + \left| \frac{x_1}{x_2 a_2} \right| \cdot |a_2 - x_2|.$$

Домножьте обе части этого неравенства на  $\left| \frac{x_2}{x_1} \right|$  и получите требуемое неравенство

$$\left| \frac{x_1}{x_2} - \frac{a_1}{a_2} \right| \cdot \left| \frac{x_1}{x_2} \right|^{-1} \leq \left( \left| \frac{x_1 - a_1}{x_1} \right| + \left| \frac{x_2 - a_2}{x_2} \right| \right) \cdot \left| \frac{x_2}{a_2} \right|.$$

**28.9.** а) Проверьте, что  $m_1^2 - 2n_1^2 = 1$  и воспользуйтесь тем, что

$$m_{k+1}^2 - 2n_{k+1}^2 = (3m_k + 4n_k)^2 - 2(2m_k + 3n_k)^2 = m_k^2 - 2n_k^2.$$

б) Запишите равенство  $m_k^2 - 2n_k^2 = 1$  в виде

$$m_k - n_k \sqrt{2} = \frac{1}{m_k + n_k \sqrt{2}}$$

и поделите обе части последнего равенства на  $m_k$ .

**28.10.** Воспользуйтесь указанием к задаче 28.9.

**28.11.** Для доказательства неравенства  $\sqrt{2} < \frac{99}{70}$  вычислите дробь  $\frac{m_k}{n_k}$  из задачи 28.9 для  $k \leq 3$ . Для доказательства неравенства  $\frac{239}{169} < \sqrt{2}$  вычислите дробь  $\frac{m_k}{n_k}$  из задачи 28.10 для  $k \leq 4$ .

**28.12.** а) Проверьте, что  $m_1^2 - 3n_1^2 = 1$  и воспользуйтесь тем, что

$$m_{k+1}^2 - 3n_{k+1}^2 = (2m_k + 3n_k)^2 - 3(m_k + 2n_k)^2 = m_k^2 - 3n_k^2.$$

б) Запишите равенство  $m_k^2 - 3n_k^2 = 1$  в виде

$$m_k - n_k\sqrt{3} = \frac{1}{m_k + n_k\sqrt{3}}$$

и поделите обе части последнего равенства на  $m_k$ .

**28.13.** Воспользуйтесь указанием к задаче 28.12.

**28.14.** Для доказательства неравенства  $\sqrt{3} < \frac{97}{56}$  вычислите дробь  $\frac{m_k}{n_k}$  из задачи 28.12 для  $k \leq 4$ . Для доказательства неравенства  $\frac{71}{41} < \sqrt{3}$  вычислите дробь  $\frac{m_k}{n_k}$  из задачи 28.13 для  $k \leq 4$ .

## Глава 29. Метод математической индукции

**29.1.** При  $n = 1$  утверждение очевидно. При доказательстве шага индукции воспользуйтесь тем, что  $n^2 + (2n + 1) = (n + 1)^2$ .

**29.2.** При доказательстве шага индукции воспользуйтесь тем, что  $n(2n + 1) + 6(n + 1) = (n + 2)(2n + 3)$ , т. е.

$$n(n + 1)(2n + 1) + 6(n + 1)^2 = (n + 1)(n + 2)(2n + 3).$$

**29.3.** При доказательстве шага индукции воспользуйтесь тем, что  $n(2n - 1) + 3(2n + 1) = (n + 1)(2n + 3)$ .

**29.4.** При доказательстве шага индукции воспользуйтесь тем, что  $(n - 1)n + 3n = n(n + 2)$ .

**29.5.** Пусть  $S = \frac{n(n+1)}{2} = 1 + 2 + 3 + \dots + n$ . Воспользуйтесь тем, что  $(S + n + 1)^2 - S^2 = (n + 1)^3$ .

**29.6.** Воспользуйтесь тем, что  $(n + 2)! - (n + 1)! = (n + 1)(n + 1)!$ .

**29.7.** Умножьте обе части равенства  $(n + 4) - n = 4$  на произведение  $(n + 1)(n + 2)(n + 3)$ .

**29.8.** Воспользуйтесь тем, что  $\frac{n+1}{2n} \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right) = \frac{n+2}{2(n+1)}$ .

**29.9.** Воспользуйтесь тем, что  $\frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ .

**29.10.** Воспользуйтесь тем, что

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12} \quad \text{и} \quad \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2(n+1)(2n+1)} > 0.$$

**29.11.** Требуемое неравенство эквивалентно неравенству  $n^3 \leq 3^n$ ; при  $n=1$  и  $n=2$  это неравенство очевидно. При  $n \geq 3$  выполняется неравенство  $(n+1)^3 \leq 3n^3$ . Действительно,  $(n+1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1$ ,  $3n^2 \leq n^3$  и  $3n < n^3$ .

**29.12.** Базис индукции:  $(1+a)^2 = 1 + 2a + a^2 > 1 + 2a$  при  $a \neq 0$ . Шаг индукции: если  $(1+a)^n > 1 + na$ ,  $a \neq 0$  и  $1+a > 0$ , то

$$(1+a)^{n+1} > (1+a)(1+na) = 1 + (n+1)a + na^2 > 1 + (n+1)a.$$

**29.13.** Воспользуйтесь неравенством  $\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} > \sqrt{n+1}$ .

**29.14.** Докажите неравенства при  $n=1$  и воспользуйтесь неравенствами  $2\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} < 2\sqrt{n+1}$  и  $2\sqrt{n+2} < 2\sqrt{n+1} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ .

**29.15.** При  $n \geq 2$  замените  $\frac{1}{\sqrt{3n}}$  на  $\frac{1}{\sqrt{3n+1}}$  и воспользуйтесь неравенством

$$\frac{1}{\sqrt{3n+1}} \cdot \frac{2n+1}{2n+2} < \frac{1}{\sqrt{3n+4}}.$$

**29.16.** При доказательстве шага индукции воспользуйтесь тем, что

$$\frac{n^n}{(n+1)^{n-1}} = \frac{n^{2n-2}}{(n+1)^{n-1}n^{n-2}} > \frac{(n^2-1)^{n-1}}{(n+1)^{n-1}n^{n-2}} = \frac{(n-1)^{n-1}}{n^{n-2}} > 1$$

по предположению индукции.

**29.17.** Базис индукции:  $|\sin x_1| + |\cos x_1| \geq \sin^2 x_1 + \cos^2 x_1 = 1$ . Доказательство шага индукции начните с неравенств

$$\begin{aligned} |\cos(\beta - \alpha)| &= |\cos \beta \cos \alpha + \sin \beta \sin \alpha| \leq \\ &\leq |\cos \beta \cos \alpha| + |\sin \beta \sin \alpha| \leq |\cos \beta| + |\sin \alpha|. \end{aligned}$$

Положив  $\alpha = x_{n+1}$  и  $\beta = x_1 + \dots + x_{n+1}$ , получите неравенство

$$|\cos(x_1 + \dots + x_{n+1})| + |\sin x_{n+1}| \geq |\cos(x_1 + \dots + x_n)|$$

и примените его для доказательства шага индукции.

**29.18.** При  $n=2$  требуемое неравенство  $a^2 + 2ab + b^2 < 2a^2 + 2b^2$  эквивалентно неравенству  $0 < (a-b)^2$ . Из неравенства

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^n < \frac{a^n + b^n}{2}$$



следует, что

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^{n+1} < \left(\frac{a^n+b^n}{2}\right)\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{a^{n+1}+b^{n+1}+a^n b+ab^n}{4}.$$

Неравенство

$$a^n b + ab^n < a^{n+1} + b^{n+1}$$

следует из того, что  $(a^n - b^n)(a - b) > 0$ .

**29.19.** При  $n = 3$ ,  $a = \sqrt[3]{8}$  и  $b = \sqrt[3]{7}$  неравенство из задачи 29.18 запишется следующим образом:  $\frac{\sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{7}}{2} < \sqrt[3]{\frac{7+8}{2}}$ , т. е.  $2 + \sqrt[3]{7} < \sqrt[3]{60}$ .

**29.20.** Воспользуйтесь тем, что  $1^3 + 2^3 + 3^3$  делится на 9 и

$$(n+3)^3 - n^3 = 9(n^2 + 3n + 3)$$

делится на 9.

**29.21.** Если поделить число, состоящее из  $3^n$  единиц, на число, состоящее из  $3^{n-1}$  единиц, то получится число вида  $10\dots 010\dots 01$ , делящееся на 3.

**29.22.** Индукцией по  $n$  докажите равенство

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}.$$

При доказательстве шага индукции воспользуйтесь тождеством

$$\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1}.$$

**29.23.** Докажите индукцией по  $n$ , что для любого  $n \geq 3$  существуют  $n$  различных натуральных чисел, сумма которых делится на каждое из них. Базис индукции: числа 1, 2 и 3. При доказательстве шага индукции добавьте к числам их сумму.

**29.24.** Сначала проверьте, что  $\sqrt{6} = \sqrt{2+\sqrt{3}} + \sqrt{2-\sqrt{3}}$ , а затем воспользуйтесь тождеством

$$\left(\sqrt[2^{n+1}]{2+\sqrt{3}} + \sqrt[2^{n+1}]{2-\sqrt{3}}\right)^2 = \sqrt[2^n]{2+\sqrt{3}} + \sqrt[2^n]{2-\sqrt{3}} + 2.$$

**29.25.** Воспользуйтесь тем, что  $\sqrt{2} = 2 \cos \frac{\pi}{2^2}$ , и равенством

$$2 \cos x = \sqrt{2 + 2 \cos 2x} \quad \text{для } x = \frac{\pi}{2^{n+2}}.$$

**29.26.** Докажите, что если испачкались  $n$  мудрецов, то все они пойдут умываться на  $n$ -й остановке. Базис индукции  $n = 1$ : испачкавшийся мудрец видит, что все остальные не испачкались, причём

он знает, что кто-то испачкался. Шаг индукции: требуемое утверждение доказано в случае, когда испачкалось не более  $n$  мудрецов. Предположите, что испачкалось  $n + 1$  мудрецов. Каждый из испачкавшихся мудрецов рассуждает так. Возможны два варианта: (1) я не испачкался, (2) я испачкался. При варианте 1 испачкалось  $n$  мудрецов; они выйдут на  $n$ -й остановке. Поэтому до  $n$ -й остановки мне не следует выходить, потому что вариант 1 остаётся возможным. Но если на  $n$ -й остановке никто не выйдет, то я испачкался.

**29.27.** При  $n = 1$  утверждение очевидно. Предположите, что пирамидку из  $n$  колец можно переложить на другой стержень на  $2^n - 1$  ходов, и рассмотрите пирамидку из  $n + 1$  колец. Сначала переложите верхние  $n$  колец на второй стержень, затем переложите самое нижнее кольцо на третий стержень, а после этого переложите  $n$  колец со второго стержня на третий. На это потребуется

$$(2^n - 1) + 1 + (2^n - 1) = 2^{n+1} - 1 \text{ ходов.}$$

**29.28.** При  $n = 1$  утверждение очевидно. Предположите, что для перекладывания ханойской башни из  $n$  колец требуется не менее  $2^n - 1$  ходов, и рассмотрите пирамидку из  $n + 1$  колец. Чтобы переложить последнее кольцо, необходимо наличие свободного стержня. Поэтому до первого хода последнего кольца нужно переложить первые  $n$  колец на другой стержень. Для этого требуется  $2^n - 1$  ходов. Затем нужно переложить последнее кольцо, а после этого сложить на нём первые  $n$  колец. Всего на это потребуется не менее  $(2^n - 1) + 1 + (2^n - 1) = 2^{n+1} - 1$  ходов.

**29.29.** Неравенство  $\sqrt{n} < n + 1$  очевидно. Предположите, что  $n \geq 2$  и

$$\sqrt{(n+1)\sqrt{(n+2)\sqrt{\dots\sqrt{n+N}}}} < n+2.$$

Тогда

$$\sqrt{n\sqrt{(n+1)\sqrt{\dots\sqrt{n+N}}}} < \sqrt{n(n+2)} < n+1.$$

**29.30.** а) Базис индукции по  $m$  ( $m = 1$ ):

$$a_1 - 2\sqrt{a_1 a_2} + a_2 = (\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2})^2 \geq 0.$$

Шаг индукции: если утверждение верно для  $m$ , то оно верно и для  $m + 1$ . Положите  $b_k = \frac{a_k + a_{k+2^m}}{2}$  и, воспользовавшись тем, что

$$a_k a_{k+2^m} \leq b_k^2,$$

получите неравенство

$$2^{m+1}\sqrt{a_1 \dots a_{2^{m+1}}} \leq 2^m \sqrt{b_1 \dots b_{2^m}}.$$

По предположению индукции

$$2^m \sqrt{b_1 \dots b_{2^m}} \leq \frac{b_1 + \dots + b_{2^m}}{2^m} = \frac{a_1 + \dots + a_{2^{m+1}}}{2^{m+1}}.$$

б) Для произвольного натурального  $n$  можно выбрать  $m$  так, что  $n < 2^m$ . Положите  $a_{n+1} = \dots = a_m = A$ , где  $A = \frac{a_1 + \dots + a_n}{n}$ , запишите неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим для чисел  $a_1, \dots, a_{2^m}$  и воспользуйтесь тем, что среднее арифметическое этих чисел равно  $A$ .

**29.31.** Сначала докажите требуемое утверждение для чисел вида  $n = 2^m$  индукцией по  $m$ . При  $m = 1$  утверждение очевидно. Шаг индукции доказывается следующим образом. Если последовательность  $a_1, a_2, \dots, a_{2^m}$  обладает требуемым свойством, то последовательность  $2a_1, 2a_2, \dots, 2a_{2^m}, 2a_1 - 1, 2a_2 - 1, \dots, 2a_{2^m} - 1$  тоже обладает требуемым свойством. Ясно также, что если  $n < 2^m$ , то требуемую последовательность можно получить, вычеркнув из последовательности длины  $2^m$  все числа, превосходящие  $n$ .

### Глава 30. Последовательности чисел

**30.1.** Воспользуйтесь тем, что  $x_1 x_2 = 1, x_3 x_4 = 3, x_5 x_6 = 5$  и  $x_7 x_8 = 7$ .

**30.2.** Из равенств  $a_{k+1} = a_k a_{k+2}$  и  $a_{k+2} = a_{k+1} a_{k+3}$  следует, что  $a_k a_{k+3} = 1$ , т. е.  $a_{k+3} = \frac{1}{a_k}$ . В частности,  $a_{100} = \frac{1}{a_{97}}$ . Кроме того,  $a_{k+6} = a_k$ , поэтому  $a_1 = a_7 = \dots = a_{97}$ .

**30.3.** В указанной в ответе последовательности перед каждым числом менее  $n$  чисел, которые больше его, а после каждого числа менее  $n$  чисел, которые меньше его.

**30.4.** По условию  $x_{n+2} x_{n+1} = x_{n+1} x_n - 1$ . Поэтому равенство  $x_k = 0$  эквивалентно тому, что

$$x_{k-1} x_{k-2} = 1, \quad x_{k-2} x_{k-3} = 2, \quad \dots, \quad x_2 x_1 = x_{k-(k-2)} x_1 = k - 2,$$

т. е.  $k = 2 + x_1 x_2 = 2 + pq$ .

**30.5.** Воспользуйтесь тем, что  $(2n - 1)^2 + 8n = (2n + 1)^2$ .

**30.6.** Последовательность  $a_n = 1 - \frac{1}{n}$  возрастающая и ограниченная.

**30.7.** В геометрической прогрессии  $1, 2, 2^2, 2^3, \dots$  каждый член больше суммы двух любых предшествующих ему членов.

**30.8.** Воспользовавшись задачей 29.12, покажите, что

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{n}{n+1} \left( 1 + \frac{1}{n(n+2)} \right)^{n+2} > \frac{n}{n+1} \left( 1 + \frac{n+2}{n(n+2)} \right) = 1.$$

**30.9.** Из равенства  $x_{n+1} - x_n = -\frac{(n-2)(n+1)}{(n^2+1)((n+1)^2+1)}$  следует, что  $x_1 < x_2 = x_3 > x_4 > x_5 > \dots$

**30.10.** Если  $0 < a_n < 1$ , то  $0 < a_{n+1} < 1$ , поскольку  $a_{n+1} = a_n(1 - a_n)$ . Положите  $b_n = \frac{1}{a_n}$  и воспользуйтесь тем, что

$$b_{n+1} = \frac{1}{\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b_n^2}} = \frac{b_n^2}{b_n - 1} = b_n + 1 + \frac{1}{b_n - 1} > b_n + 1.$$

**30.11.** Пусть  $b_n = a_n^2$ . Тогда  $b_{n+1} = a_n^2 + 2 + \frac{1}{a_n^2}$  и  $2 < 2 + \frac{1}{a_n^2} < 3$ , поэтому  $b_n + 2 < b_{n+1} < b_n + 3$ . Следовательно,  $1 + 2n < b_{n+1} < 1 + 3n$ .

**30.12.** а) Воспользуйтесь тем, что  $F_k = F_{k+1} - F_{k-1}$ .

б) Сложите равенства  $F_1^2 = F_1 F_2$ ,  $F_2^2 = F_2 F_3 - F_1 F_2$ , ...,  $F_n^2 = F_n F_{n+1} - F_{n-1} F_n$ .

**30.13.** Предположите, что числа  $F_n$  и  $F_{n+1}$  делятся на целое число  $d > 1$ . Тогда  $F_{n-1} = F_{n+1} - F_n$  тоже делится на  $d$  и т. д. В итоге получите, что  $F_2 = 1$  делится на  $d$ , чего не может быть.

**30.14.** Примените индукцию по  $k$ .

*Базис индукции:*  $F_{n-1} F_1 + F_n F_2 = F_{n-1} + F_n = F_{n+1}$  и  $F_{n-1} F_2 + F_n F_3 = F_{n-1} + 2F_n = (F_{n-1} + F_n) + F_n = F_{n+1} + F_n = F_{n+2}$ .

*Шаг индукции:* если

$$F_{n+k-2} = F_{n-1} F_{k-2} + F_n F_{k-1} \quad \text{и} \quad F_{n+k-1} = F_{n-1} F_{k-1} + F_n F_k,$$

то

$$F_{n+k} = F_{n-1}(F_{k-2} + F_{k-1}) + F_n(F_{k-1} + F_k) = F_{n-1} F_k + F_n F_{k+1}.$$

**30.15.** Положите  $k = n - 1$  в формуле из задачи 30.14.

**30.16.** Воспользуйтесь тем, что  $3(2^{n-2} + 1) - 2(2^{n-3} + 1) = 2^{n-1} + 1$ .

**30.17.** Из равенств  $a_{n+3} = a_{n+2} - a_{n+1} = a_{n+1} - a_n - a_{n+1} = -a_n$  следует, что  $a_{n+6} = a_n$ . Число 100 при делении на 6 даёт остаток 4, поэтому  $a_{100} = a_4 = -a_1$ .

**30.18.** Сначала проверьте требуемое для последовательности  $a_n = x_1^{n-1}$ .

**30.19.** Система уравнений  $\lambda + \mu = a_1$ ,  $\lambda x_1 + \mu x_2 = a_2$  имеет единственное решение. У последовательности чисел  $\lambda x_1^{n-1} + \mu x_2^{n-1}$  первые два члена совпадают с  $a_1$  и  $a_2$ , и эта последовательность удовле-

творяет данному рекуррентному соотношению. Поэтому она совпадает с данной последовательностью.

**30.20.** Воспользуйтесь задачей 30.19.

**30.21.** Воспользуйтесь задачей 30.19. Корни уравнения

$$x^2 = (a+b)x - ab$$

равны  $a$  и  $b$ . Система уравнений  $\lambda + \mu = a + b$ ,  $\lambda a + \mu b = a^2 + ab + b^2$  имеет решение  $\lambda = \frac{a^2}{a-b}$ ,  $\mu = \frac{b^2}{b-a}$ .

**30.22.** Квадратное уравнение  $x^2 = 2px - p^2$  с нулевым дискриминантом имеет корень  $x_1 = p$ . Для последовательности  $nx_1^{n-1}$  сложите равенства  $x_1^2 = 2px_1 - p^2$  и  $x_1 = p$ , умноженные на  $nx_1^{n-1}$  и  $2x_1^n$  соответственно.

**30.23.** Система уравнений  $\lambda + \mu = a_1$ ,  $\lambda p + 2\mu p = a_2$  имеет единственное решение.

**30.24.** Воспользуйтесь задачей 30.23.

**30.25.** Ясно, что

$$\Delta a_n = (n+1)^2 - n^2 = 2n+1$$

и

$$\Delta \Delta a_n = \Delta a_{n+1} - \Delta a_n = (2n+3) - (2n+1) = 2.$$

**30.26.** При раскрытии скобок в произведении  $(x+1)\dots(x+1)$  член  $x^k$  появляется в том случае, когда в  $k$  скобках выбирается слагаемое  $x$ , а в остальных скобках выбирается слагаемое 1. Количество таких членов равно  $C_n^k$ .

**30.27.** Вычислите разность  $(n+1)^k - n^k$ , воспользовавшись задачей 30.26.

**30.28.** Нужно проверить, что

$$C_{n+1}^k - C_n^k = C_n^{k-1}, \quad \text{т. е.} \quad C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}.$$

*Первый способ.* Воспользуйтесь тем, что

$$\begin{aligned} \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \left( \frac{1}{k} + \frac{1}{n-k+1} \right) = \\ &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \cdot \frac{n+1}{k(n-k+1)} = \frac{(n+1)!}{k!(n-k+1)!}. \end{aligned}$$

*Второй способ.* Выделите один предмет из данных  $n+1$  предметов. Чтобы выбрать  $k$  предметов из данных, нужно либо выбрать выделенный предмет и  $k-1$  предмет из остальных  $n$  предметов, либо выбрать все  $k$  предметов из остальных  $n$  предметов.

**30.29.** Воспользуйтесь задачей 30.27.

**30.30.** Сложите равенства

$$b_1 = a_2 - a_1, \quad b_2 = a_3 - a_2, \quad \dots, \quad b_n = a_{n+1} - a_n.$$

**30.31.** а) Пусть  $a_n = An^3 + Bn^2 + Cn$ . Тогда согласно задаче 30.27 имеем  $\Delta a_n = 3An^2 + (3A + 2B)n + A + B + C$ . Поэтому нужно положить  $3A = 1$ ,  $3A + 2B = 0$  и  $A + B + C = 0$ .

б) *Первый способ.* Согласно задаче 30.30 искомая сумма равна  $a_{n+1} - a_1$ .

*Второй способ.* См. задачу 22.27 б).

**30.32.** а) Пусть  $a_n = An^4 + Bn^3 + Cn^2 + Dn$ . Тогда согласно задаче 30.27 имеем

$$\Delta a_n = 4An^3 + (6A + 3B)n^2 + (4A + 3B + 2C)n + A + B + C + D.$$

Поэтому нужно положить  $4A = 1$ ,  $6A + 3B = 0$ ,  $4A + 3B + 2C = 0$  и  $A + B + C + D = 0$ .

б) *Первый способ.* Согласно задаче 30.30 искомая сумма равна  $a_{n+1} - a_1$ .

*Второй способ.* См. задачу 29.5.

**30.33.** Воспользуйтесь задачей 30.32 и тем, что искомая сумма равна

$$1^3 + 2^3 + \dots + (2n + 1)^3 - 2^3(1^3 + 2^3 + \dots + n^3).$$

**30.34.** Для произвольного  $k$  рассуждения такие же, как и при решении задачи 30.32.

**30.35.** Пусть  $b > 1$ . При  $a + 1 < b$  выполняются неравенства

$$\frac{a}{b} < \frac{a}{b-1} < \frac{a+1}{b},$$

а при  $a + 1 = b$  дробь  $\frac{a+1}{b} = 1$  сократимая.

**30.36.** Примените индукцию по  $n$  (порядку последовательности Фарея). Базис индукции:  $n = 3$ . Для последовательности  $\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}$  утверждение легко проверяется. Пусть утверждение доказано для  $n - 1$ . При переходе от  $n - 1$  к  $n$  к старому набору чисел добавляются некоторые числа вида  $\frac{k}{n}$ . Согласно задаче 30.35 два новых числа не могут быть соседними, поэтому  $\frac{a}{b} < \frac{k}{n} < \frac{c}{d}$ , где  $\frac{a}{b}$  и  $\frac{c}{d}$  — соседние числа из старого списка. Оба числа  $A = kb - an$  и  $B = cn - kd$  положительны. Предположите, что одно из них больше 1. Тогда

$$b + d < bB + dA = (bc - ad)n = n,$$

поскольку  $bc - ad = 1$  по предположению индукции. Неравенства  $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$  показывают, что числа  $\frac{a}{b}$  и  $\frac{c}{d}$  не могут быть соседними. Получено противоречие.

**30.37.** Согласно задаче 30.36 выполняются равенства  $bx - ay = 1$  и  $cy - dx = 1$ , поэтому  $x = \frac{a+c}{bc-ad}$  и  $y = \frac{b+d}{bc-ad}$ .

**30.38.** Ясно, что  $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$ . Поэтому если  $b + d \leq n$ , то дробь  $\frac{a+c}{b+d}$  входит в последовательность Фарея порядка  $n$ , причём она расположена между дробями  $\frac{a}{b}$  и  $\frac{c}{d}$ .

**30.39.** Воспользуйтесь тем, что если дробь  $\frac{p}{q}$  входит в последовательность Фарея, то дробь  $\frac{q-p}{q}$  тоже в неё входит, поскольку  $\text{НОД}(q-p, q) = \text{НОД}(p, q)$ .

### Глава 31. Множества

**31.1.** У четырёх школьников осталась ручка, у семи — линейка и у девяти — карандаш. Поэтому хотя бы один предмет может быть не более чем у  $4 + 7 + 9 = 20$  человек. Следовательно, не менее чем  $30 - 20 = 10$  человек потеряли все три предмета. Если каждый из 20 человек потерял ровно два предмета, то остальные 10 человек потеряли все три предмета.

**31.2.** Для каждого из  $n$  элементов есть две возможности: он либо принадлежит подмножеству, либо не принадлежит. Всего получаем  $2^n$  различных вариантов.

**31.3.** Для каждого из  $n$  элементов есть три возможности:

- 1) он принадлежит  $A$ ;
- 2) он принадлежит  $B$ ;
- 3) он не принадлежит ни  $A$ , ни  $B$ .

**31.4.** Из условия следует, что каждые два множества пересекаются по одному элементу. Докажем, что тогда все множества пересекаются по одному элементу. Предположим противное. Возьмём множество  $M_1$ . В нём найдётся элемент  $a$ , который принадлежит по крайней мере ещё 45 множествам —  $M_2, M_3, \dots, M_{46}$ . Действительно, если каждый из 45 элементов множества  $M_1$  принадлежит не более чем 44 множествам, то общее число множеств не превосходит  $44 \cdot 45 + 1 = 1981$ . По предположению есть множество  $M$ , не содержащее элемента  $a$ . Множество  $M$  пересекается по одному элементу с множествами  $M_1, M_2, \dots, M_{46}$ . Эти элементы попарно различны, потому что общим элементом множеств  $M_i$  и  $M_j$  может быть только

элемент  $a$ . Поэтому множество  $M$  содержит 46, а не 45 элементов, чего не может быть.

**31.5.** В множестве  $A$ , состоящем из  $n$  элементов, есть ровно  $2^n$  различных подмножеств, включая пустое множество и само множество  $A$  (задача 31.2). Поэтому выбрана ровно половина всех подмножеств. Каждому множеству  $B \subset A$  можно сопоставить его дополнение  $\bar{B}$ , состоящее из тех элементов, которые не принадлежат  $B$ . Поэтому множества в  $A$  разбиваются на пары вида  $(B, \bar{B})$ . Пересечение любых двух (и даже трёх) выбранных множеств не пусто, поэтому из каждой пары множеств  $(B, \bar{B})$  выбрано ровно одно. Если множества  $B$  и  $C$  выбраны, то множество  $D = B \cap C$  тоже выбрано. Действительно, множество  $\bar{D}$  не может быть выбрано, поскольку  $B \cap C \cap \bar{D} = \emptyset$ . Докажите теперь по индукции, что если множества  $B_1, B_2, \dots, B_k$  выбраны, то множество  $B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_k$  тоже выбрано. Следовательно, пересечение всех выбранных множеств тоже выбрано, поэтому оно непусто.

**31.6. Первый способ.** Прямая, проходящая через точку  $(x_0; y_0)$ , задаётся уравнением  $y - y_0 = t(x - x_0)$ . Подставив выражение  $y = y_0 + t(x - x_0)$  в уравнение окружности, получите квадратное уравнение вида  $(1 + t^2)x^2 + 2(ty_0 - t^2x_0)x + c = 0$ , где  $c$  не зависит от  $x$ . Оба корня этого уравнения равны  $x_0$ , поэтому

$$ty_0 - t^2x_0 = -(1 + t^2)x_0, \quad \text{т. е.} \quad t = -\frac{x_0}{y_0}.$$

Касательная задаётся уравнением

$$y - y_0 = -\frac{x_0}{y_0}(x - x_0), \quad \text{т. е.} \quad x_0x + y_0y = x_0^2 + y_0^2 = 1.$$

*Второй способ.* Искомая прямая перпендикулярна прямой  $\frac{x}{x_0} = \frac{y}{y_0}$ , поэтому она задаётся уравнением вида  $x_0x + y_0y = c$ . Прямая проходит через точку  $(x_0; y_0)$ , расположенную на окружности, поэтому  $c = x_0^2 + y_0^2 = 1$ .

**31.7.** Пусть одна из точек касания имеет координаты  $(x_1; y_1)$ . Согласно задаче 31.6 касательная, проходящая через эту точку, задаётся уравнением  $x_1x + y_1y = 1$ . Эта касательная проходит через точку  $(x_0; y_0)$ , поэтому  $x_1x_0 + y_1y_0 = 1$ . Следовательно, точка  $(x_1; y_1)$  лежит на прямой  $x_0x + y_0y = 1$ . Вторая точка касания тоже лежит на этой прямой.

**31.8. Первый способ.** Согласно задаче 31.7 прямая, соединяющая точки касания, задаётся уравнением  $by = 1$ .



*Второй способ.* Прямая, проходящая через точку  $(0; b)$ , задаётся уравнением  $y = b + kx$ . Выразите  $x$  через  $y$  и подставьте полученное выражение в уравнение окружности. Дискриминант полученного уравнения равен нулю тогда и только тогда, когда

$$b^2 = (k^2 + 1)(b^2 - k^2), \quad \text{т. е.} \quad b^2 = k^2 + 1.$$

Корень уравнения с нулевым дискриминантом равен  $\frac{b}{k^2 + 1} = \frac{b}{b^2} = \frac{1}{b}$ .

**31.9.** Рассмотрите разность уравнений окружностей и воспользуйтесь тем, что в общей точке окружностей оба уравнения обращаются в нуль, поэтому их разность тоже обращается в нуль. Оба числа  $a_1 - a_2$  и  $b_1 - b_2$  не могут быть равны нулю одновременно. Действительно, если  $a_1 = a_2$  и  $b_1 = b_2$ , то центры окружностей совпадают, и они не могут пересекаться в двух точках.

**31.10.** Можно считать, что уравнения парабол имеют вид

$$x^2 + py = 0 \quad \text{и} \quad (y - y_0)^2 + ax + b = 0.$$

Точки пересечения парабол удовлетворяют обоим уравнениям, поэтому они лежат на кривой, заданной суммой уравнений. Сумма уравнений является уравнением окружности.

**31.11.** Пусть данная точка прямой  $ax + by = 1$  имеет координаты  $(x_0; y_0)$ . Тогда, с одной стороны,  $ax_0 + by_0 = 1$ . С другой стороны, согласно задаче 31.7, прямая, соединяющая точки касания, задаётся уравнением  $x_0x + y_0y = 1$ . Поэтому точка  $(a; b)$  лежит на этой прямой.

## Глава 32. Непрерывные дроби

**32.1.** Пусть

$$\underbrace{[1; 1, \dots, 1]}_n = \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}.$$

Тогда  $\frac{p_1}{q_1} = 2 = \frac{F_3}{F_2}$  и  $\frac{p_n}{q_n} = 1 + \frac{q_{n-1}}{p_{n-1}} = \frac{p_{n-1} + q_{n-1}}{p_{n-1}}$ .

**32.2.** Проверьте, что

$$\frac{1}{2+x} + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+x}} = 1$$

при  $x \neq -1, -2$  и подставьте в это тождество  $x = [0; 3, 4, \dots, n]$ .

**32.3.** Выражение в левой части больше  $\frac{1}{2}$ , поэтому  $x_1 < 2$ , а значит,  $x_1 = 1$ . Пусть  $[0; 3, 4, \dots, n] = a$  и  $[0; x_2, \dots, x_n] = x$ . Тогда

$$1 - \frac{1}{2+a} = \frac{1}{1+x},$$

т. е.  $\frac{1}{x} = 1 + a$ . Таким образом,

$$[1; 3, 4, \dots, n] = [x_2; x_3, \dots, x_n].$$

Ясно, что целые части выражений в левой и правой части равны 1 и  $x_2$ , поэтому  $x_2 = 1$ . После этого получаем равенство

$$[3; 4, \dots, n] = [x_3; x_4, \dots, x_n].$$

Снова сравнивая целые части, получаем  $x_3 = 3$  и т. д.

**32.4. а)** Примените индукцию по  $k$ . При  $k = 2$  требуемые соотношения легко проверяются. Если  $a_0, a_1, \dots$  рассматривать как независимые переменные, то имеет место очевидное равенство

$$[a_0; a_1, \dots, a_{k+1}] = \left[ a_0; a_1, \dots, a_k + \frac{1}{a_{k+1}} \right].$$

Поэтому согласно предположению индукции

$$\begin{aligned} \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} &= \frac{\left( a_k + \frac{1}{a_{k+1}} \right) p_{k-1} + p_{k-2}}{\left( a_k + \frac{1}{a_{k+1}} \right) q_{k-1} + q_{k-2}} = \\ &= \frac{a_{k+1}(a_k p_{k-1} + p_{k-2}) + p_{k-1}}{a_{k+1}(a_k q_{k-1} + q_{k-2}) + q_{k-1}} = \frac{a_{k+1} p_k + p_{k-1}}{a_{k+1} q_k + q_{k-1}}. \end{aligned}$$

б) и в) легко следуют из а).

**32.5.** Воспользуйтесь задачей 32.4 б).

**32.6.** Равенство из задачи 32.4 б) можно переписать в виде

$$\frac{p_k}{q_k} = \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}} + \frac{(-1)^{k-1}}{q_{k-1} q_k}.$$

Затем запишите

$$\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}} = \frac{p_{k-2}}{q_{k-2}} + \frac{(-1)^{k-2}}{q_{k-2} q_{k-1}}$$

и т. д. до  $\frac{p_1}{q_1} = \frac{p_0}{q_0} + \frac{1}{q_0 q_1} = a_0 + \frac{1}{q_0 q_1}$ .

**32.7.** Воспользуйтесь задачей 32.4 а) и тем, что

$$A = [a_0; a_1, \dots, a_{k-1}, A_k].$$

**32.8.** Равенство  $A = \frac{A_k p_{k-1} + p_{k-2}}{A_k q_{k-1} + q_{k-2}}$  из задачи 32.7 можно переписать в виде  $A_k (A q_{k-1} - p_{k-1}) = p_{k-2} - A q_{k-2}$ , поэтому числа  $A - \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}$  и  $\frac{p_{k-2}}{q_{k-2}} - A$  имеют один и тот же знак, т. е. число  $A$  заключено между  $\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}$  и  $\frac{p_{k-2}}{q_{k-2}}$ . Ясно также, что  $\frac{p_0}{q_0} = a_0 < A$ . Поэтому

$$\frac{p_0}{q_0} < A < \frac{p_1}{q_1}, \quad \frac{p_2}{q_2} < A < \frac{p_1}{q_1}, \quad \frac{p_2}{q_2} < A < \frac{p_3}{q_3} \quad \text{и т. д.}$$

**32.9.** Рассмотрите последовательность чисел

$$y_0 = \frac{m}{n}, \quad y_1 = \frac{r_1}{m}, \quad y_2 = \frac{r_2}{r_1}, \quad \dots, \quad y_s = \frac{r_s}{r_{s-1}}, \quad y_{s+1} = 0.$$

Каждое из этих чисел заключено между 0 и 1. По определению алгоритма Евклида  $r_{k-1} = a_k r_k + r_{k+1}$ . Если положить  $r_0 = m$  и  $r_{-1} = n$ , то это равенство выполняется для  $k = 0, 1, \dots, s$ . Следовательно,

$$y_k = \frac{r_k}{r_{k-1}} = \frac{r_k}{a_k r_k + r_{k+1}} = \frac{1}{a_k + y_{k+1}}$$

при  $k \leq s$ . Поэтому

$$\begin{aligned} y_s &= [0; a_s] = x_s, \\ y_{s-1} &= [0; a_{s-1}, a_s] = x_{s-1}, \\ &\dots\dots\dots \\ y_0 &= [0; a_0, \dots, a_s] = x_0. \end{aligned}$$

**32.10.** Воспользуйтесь задачей 32.4 б) для  $\frac{p_s}{q_s} = \frac{n}{m}$  и  $\frac{p_{s-1}}{q_{s-1}} = \frac{p}{q}$ .

**32.13.** Воспользуйтесь тем, что

$$a_0 = 1, \quad A_1 = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}+1, \quad a_1 = 2 \quad \text{и} \quad A_2 = \frac{1}{A_1-a_1} = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = A_1.$$

**32.14.** Воспользуйтесь тем, что

$$\begin{aligned} a_0 &= 1, \quad A_1 = \frac{1}{\sqrt{3}-1} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}, \quad a_1 = 1, \\ A_2 &= \frac{1}{\frac{\sqrt{3}+1}{2}-1} = \frac{2}{\sqrt{3}-1} = \sqrt{3}+1, \quad a_2 = 2, \quad A_3 = \frac{1}{\sqrt{3}-1} = A_1. \end{aligned}$$

**32.15.** Воспользуйтесь тем, что

$$\begin{aligned} a_0 &= 2, \quad A_1 = \frac{1}{\sqrt{7}-2} = \frac{\sqrt{7}+2}{3}, \quad a_1 = 1, \quad A_2 = \frac{\sqrt{7}+1}{2}, \quad a_2 = 1, \\ A_3 &= \frac{\sqrt{7}+1}{3}, \quad a_3 = 1, \quad A_4 = \sqrt{7}+2, \quad a_4 = 4, \quad A_5 = \frac{1}{\sqrt{7}-2} = A_1. \end{aligned}$$

**32.16.** Запишите равенство  $A_{k+1} = \frac{1}{A_k - a_k}$  в виде  $A_k = a_k + \frac{1}{A_{k+1}}$  и воспользуйтесь тем, что

$$\begin{aligned} \alpha &= A_0 = a_0 + \frac{1}{A_1} = [a_0; A_1] = \left[ a_0; a_1 + \frac{1}{A_2} \right] = [a_0; a_1, A_2] = \\ &= \left[ a_0; a_1, a_2 + \frac{1}{A_3} \right] = [a_0; a_1, a_2, A_3] = \dots \end{aligned}$$

**32.17.** Повторите рассуждения из задачи 32.8, воспользовавшись формулой из задачи 32.16.

**32.18.** Средняя продолжительность года по юлианскому календарю равна  $365 + \frac{1}{4} = 365,25$  и  $\frac{1}{0,25 - 0,2422} \approx 128,2$ .

**32.19.** Средняя продолжительность года по григорианскому календарю равна

$$365 + \frac{1}{4} - \frac{1}{100} + \frac{1}{400} = 365,2425 \quad \text{и} \quad \frac{1}{0,2425 - 0,2422} \approx 3333,3.$$

**32.20.** Непрерывная дробь этого числа имеет вид  $[0; 4, 7, 1, 3, \dots]$ .

$$\mathbf{32.21.} \left( \frac{8}{33} - 0,2422 \right)^{-1} \approx 4459,4.$$

Обратите внимание, что подходящая дробь  $\frac{8}{33}$  даёт более точное приближение, чем дробь  $\frac{97}{400}$ , используемая в григорианском календаре.

### Глава 33. Дополнительные задачи

**33.1.** Воспользовавшись задачей 29.12 или задачей 30.26, покажите, что

$$\left( 1 + \frac{1}{n}x \right)^n > 1 + n\frac{1}{n}x = 1 + x.$$

**33.2.** Умножьте двойное неравенство

$$\left( \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{2\sqrt{a}} \right)^2 \leq 1 \leq \left( \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{2\sqrt{b}} \right)^2 \quad \text{на} \quad (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2.$$

**33.3.** Воспользуйтесь неравенствами  $B < \frac{A+B}{2} < A$  и тем, что

$$\frac{(a-b)^2}{8(A-B)} = \frac{(\sqrt{a^2} - \sqrt{b^2})^2}{4(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2} = \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2}{4} = \frac{A+B}{2}.$$

**33.4.** Если одно из чисел равно 1, то требуемое неравенство очевидно. Пусть  $m, n > 1$ ,  $\sqrt[n]{m} = 1 + u$  и  $\sqrt[m]{n} = 1 + v$ . Согласно неравенству из задачи 29.12 имеем  $m = (1 + u)^n > 1 + nu$  и  $n > 1 + mv$ , т. е.  $u < \frac{m-1}{n}$  и  $v < \frac{n-1}{m}$ . Следовательно,

$$\frac{1}{\sqrt[n]{m}} + \frac{1}{\sqrt[m]{n}} = \frac{1}{1+u} + \frac{1}{1+v} > \frac{n+m}{n+m-1} > 1.$$

**33.5.** Сопоставьте сумме  $n = x_1 + \dots + x_m$  последовательность нулей и единиц, в которой сначала идут  $x_1$  единиц, потом один нуль, потом  $x_2$  единиц и т. д.; в конце стоит  $x_m$  единиц. Длина этой последовательности равна  $n + m - 1$ , поэтому из  $n + m - 1$  упорядоченных предметов нужно выбрать  $n$  предметов (они будут единицами) или  $m - 1$  предметов (они будут нулями).

**33.6.** Сопоставьте сумме  $n = x_1 + \dots + x_m$  сумму

$$n - m = (x_1 - 1) + \dots + (x_m - 1)$$

и воспользуйтесь задачей 33.5.

**33.7.** Сопоставьте сумме

$$n = (2x_1 - 1) + \dots + (2x_{n-2k} - 1) = 2(x_1 + \dots + x_{n-2k}) - n + 2k$$

сумму  $n - k = x_1 + \dots + x_{n-2k}$  и воспользуйтесь задачей 33.6.

**33.8.** Для чисел вида  $\overline{1abc}$  в следующих трёх случаях перенос происходит: 1) одна из цифр  $a, b, c$  равна 5, 6, 7 или 8; 2)  $b = 9$  и  $c \neq 9$ ; 3)  $a = 9$ , а хотя бы одна из цифр  $b$  и  $c$  отлична от 9. Остальные числа имеют вид  $\overline{1abc}, \overline{1ab9}, \overline{1a99}, \overline{1999}$ , где цифры  $a, b$  и  $c$  равны 0, 1, 2, 3 или 4. Для таких чисел перенос не происходит. Их количество равно  $5^3 + 5^2 + 5 + 1$ .

**33.9.** Рассмотрите сначала случай, когда порядок, в котором выбираются подмножества, учитывается. В таком случае для каждого из  $n$  элементов нужно выбрать один из трёх вариантов: 1) элемент принадлежит только первому подмножеству; 2) элемент принадлежит только второму подмножеству; 3) элемент принадлежит обоим подмножествам. Выбранные подмножества различны, кроме одного случая, когда оба они совпадают со всем множеством. Поэтому количество способов равно  $\frac{3^n - 1}{2} + 1$ .

**33.10.** Пусть искомое число равно  $x_n$ . При  $n = 1$  есть пустое множество и подмножество  $\{1\}$ , поэтому  $x_1 = 2$ . При  $n = 2$  есть пустое множество и подмножества  $\{1\}$  и  $\{2\}$ , поэтому  $x_2 = 3$ . При  $n \geq 3$  выполняется равенство  $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$ . Действительно, если рассматриваемое подмножество содержит  $n$ , то оно не содержит  $n - 1$ , и никаких других ограничений на него не накладывается. Количество таких подмножеств равно  $x_{n-2}$ . Количество рассматриваемых подмножеств, не содержащих  $n$ , равно  $x_{n-1}$ .

**33.11.** Пусть искомое число равно  $x_n$ . Тогда  $x_1 = 1, x_2 = 2$  и  $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$  при  $n \geq 3$ , поскольку количество представлений числа  $n$  с первым слагаемым 1 равно  $x_{n-1}$ , а с первым слагаемым  $2 - x_{n-2}$ .

**33.12.** Пусть искомое число равно  $x_n$ . Ясно, что  $x_1 = 0, x_2 = 1$  и  $x_3 = 1$ . При  $n \geq 3$  выполняется равенство  $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$ . Действительно, первое слагаемое может быть равно 2; количество таких представлений равно  $x_{n-2}$ . Первое слагаемое может быть больше 2. Тогда из него можно вычесть 1 и получить представление числа  $n - 1$ . Поэтому количество таких представлений равно  $x_{n-1}$ .

**33.13.** Пусть искомое число равно  $x_n$ . Ясно, что  $x_1 = 1$  и  $x_2 = 1$ . При  $n \geq 3$  выполняется равенство  $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$ . Действительно, количество представлений с первым слагаемым 1 равно  $x_{n-1}$ . Если же первое слагаемое не меньше 3, то из него можно вычесть 2 и получить представление числа  $n - 2$ .

**33.14.** Возьмите 6 монет и положите половину из них на одну чашку весов, а другую половину на другую чашку. Если одна группа монет окажется легче, то фальшивая монета входит в эту группу. Если же чашки весов уравновесятся, то фальшивая монета находится среди трёх оставшихся монет. Положив на обе чашки весов по одной подозрительной монете, можно выяснить, какая монета фальшивая.

**33.15.** Положите по одной монете на каждую чашку. Если весы в равновесии, то обе эти монеты настоящие. Если весы не в равновесии, то обе оставшиеся монеты настоящие. Положите на одну чашку весов одну монету из пары настоящих, на вторую — монету из той пары, в которой есть фальшивая. Если весы в равновесии, то фальшивая монета не лежит на весах. Если весы не в равновесии, то фальшивая монета лежит на весах.

**33.16.** Сравните сначала монеты  $A$  и  $B$ . Если их вес одинаков, то оставшаяся монета  $C$  фальшивая. Сравнив её с любой из настоящих монет, можно узнать, тяжелее она или легче. Если их вес разный, то оставшаяся монета  $C$  настоящая. Сравните самую лёгкую из монет  $A$  и  $B$  (пусть для определённости это монета  $A$ ) с монетой  $C$ . Если их вес одинаков, то монета  $B$  фальшивая и она тяжелее настоящей. Если их вес разный, то монета  $A$  фальшивая и она легче настоящей.

**33.17.** Занумеруйте мешки и возьмите из каждого мешка столько монет, каков его номер. Вес этих монет меньше веса такого же количества настоящих монет на столько же граммов, каков номер мешка с фальшивыми монетами.

**33.18.** Отложите выбранную монету и положите половину оставшихся монет на одну чашку весов, а другую половину — на другую чашку. Пусть среди первых  $n$  монет есть  $k_1$  фальшивых, а среди других  $n$  монет есть  $k_2$  фальшивых. Тогда на первой чашке лежит груз весом  $na \pm k_1$ , где  $a$  — вес настоящей монеты, а на второй чашке лежит груз весом  $na \pm k_2$ . Стрелка весов покажет разность  $k_1 - k_2 \equiv k_1 + k_2 \pmod{2}$ . Таким образом, если выбранная монета фальшивая, то показание стрелки весов — нечётное число, а если выбранная монета настоящая, то показание стрелки весов — чётное число.

# Предметный указатель

- абсолютная погрешность 25
- алгоритм Евклида 39
- арифметическая прогрессия 7
- арифметический корень степени  $n$ 
  - 14
- базис индукции 27
- бесконечное множество 36
- верная цифра 25
- возвратная последовательность 33
- возрастающая последовательность 31
- геометрическая прогрессия 11
- григорианский календарь 41
- длина арифметической прогрессии 7
- дробь непрерывная 38
  - подходящая 39
  - цепная 38
- знаменатель геометрической прогрессии 11
- индукция по  $n$  27
- конечная последовательность чисел 31
- конечное множество 36
- корень степени  $n$  14
- косинус 17
- котангенс 18
- метод математической индукции 27
- множества непересекающиеся 36
- множество 36
  - бесконечное 36
  - конечное 36
  - пустое 36
- монотонная последовательность 31
- невозрастающая последовательность 31
- непересекающиеся множества 36
- непрерывная дробь 38
- неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим 30
- неубывающая последовательность 31
- объединение множеств 36
- ограниченная сверху последовательность 31
- снизу последовательность 31
- основное тригонометрическое тождество 17
- относительная погрешность 25
- оценка погрешности приближения 25
- параметр индукции 27
- пересечение множеств 36
- подмножество 36
- подходящая дробь 39
- порядок рекуррентной последовательности 33
- последовательность возвратная 33
  - возрастающая 31
  - вторых разностей 34
  - монотонная 31

- 
- невозрастающая 31
  - неубывающая 31
  - ограниченная сверху 31
  - — снизу 31
  - разностей 34
  - рекуррентная 33
  - убывающая 31
  - Фаря 35
  - чисел 31
  - приближение 25
  - с избытком 25
  - с недостатком 25
  - сверху 25
  - снизу 25
  - приближённое значение 25
  - равенство 25
  - пустое множество 36
  
  - радиан 17
  - разложение в непрерывную дробь 40
  - разность арифметической прогрессии 7
  
  - рекуррентная последовательность 33
  - рекуррентное соотношение 33
  
  - синус 17
  
  - тангенс 18
  
  - убывающая последовательность 31
  - уравнение окружности 37
  
  - цепная дробь 38
  
  - числа Фибоначчи 32
  - член последовательности 31
  
  - шаг индукции 27
  
  - элемент множества 36
  
  - юлианский календарь 41



*Учебно-методическое издание*

ВИКТОР ВАСИЛЬЕВИЧ ПРАСОЛОВ

ЗАДАЧИ ПО АЛГЕБРЕ. 9 КЛАСС



В соответствии с Федеральным законом № 436-ФЗ  
от 29 декабря 2010 года издание маркируется знаком 6+

Подписано в печать 13.03.2020 г. Формат 60 × 90/16. Печать офсетная.  
Объем 6 печ. л. Тираж 2000 экз. Заказ № .

Издательство Московского центра  
непрерывного математического образования.  
119002, Москва, Бол. Власьевский пер., 11. Тел. (499) 241-08-04.

Отпечатано в типографии ООО «Принт сервис групп»,  
тел./факс: (499) 785-05-18, e-mail: 3565264@mail.ru, www.printsg.ru  
105187, г. Москва, Борисовская ул., д. 14, стр. 6

---

Книги издательства МЦНМО можно приобрести в магазине «Математическая книга»,  
Москва, Большой Власьевский пер., д. 11. Тел. (495) 745-80-31. E-mail: biblio@mccme.ru

---

ISBN 978-5-4439-1462-6



9 785443 914626 >