

ВУСІТ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Под общей редакцией  
М. С. Хрипунцова, И. И. Цыганок

# ВВЕДЕНИЕ В ВЫСШУЮ МАТЕМАТИКУ

Учебник и практикум

УМО ВО  
РЕКОМЕНДУЕТ

 **Юрайт**  
ПРЕСС



# ВВЕДЕНИЕ В ВЫСШУЮ МАТЕМАТИКУ

УЧЕБНИК И ПРАКТИКУМ ДЛЯ ВУЗОВ

Под общей редакцией **М. Б. Хрипуновой, И. И. Цыганок**

*Рекомендовано Учебно-методическим отделом высшего образования в качестве  
учебника и практикума для студентов высших учебных заведений, обучающихся  
по экономическим направлениям и специальностям*



Курс с практическими заданиями и дополнительными материалами  
доступен на образовательной платформе «Юрайт»,  
а также в мобильном приложении «Юрайт.Библиотека»

Москва • Юрайт • 2024



УДК 51(075.8)  
ББК 22.1я73  
В24

**Ответственные редакторы:**

**Хрипунова Марина Борисовна** — кандидат физико-математических наук, доцент, заведующая кафедрой математики и информатики Владимирского филиала Финансового университета при Правительстве Российской Федерации;

**Цыганок Ирина Ивановна** — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теории вероятностей и математической статистики Департамента математики и информатики Финансового университета при Правительстве Российской Федерации.

**Введение в высшую математику** : учебник и практикум для вузов / В24 М. Б. Хрипунова [и др.] ; под общей редакцией М. Б. Хрипуновой, И. И. Цыганок. — Москва : Издательство Юрайт, 2024. — 478 с. — (Высшее образование). — Текст : непосредственный.

ISBN 978-5-534-15087-2

Содержание издания соответствует актуальным требованиям федерального государственного образовательного стандарта высшего образования и включает следующие разделы математики: элементы линейной алгебры и аналитической геометрии, элементы дискретной математики и математической логики, математический анализ, дифференциальные и разностные уравнения, элементы линейного программирования, элементы вычислительной математики, теория вероятностей, математическая статистика.

Учебник включает теоретический минимум, необходимый для освоения курса высшей математики, и большое количество решенных с использованием математического аппарата задач экономического содержания и упражнений для самостоятельной работы, контролирующих усвоение изученного материала.

Для студентов высших учебных заведений, обучающихся по экономическим направлениям прикладного и академического бакалавриата, а также для всех, кто изучает высшую математику самостоятельно.

УДК 51(075.8)  
ББК 22.1я73

*Все права защищены. Никакая часть данной книги не может быть воспроизведена в какой бы то ни было форме без письменного разрешения владельцев авторских прав.*

ISBN 978-5-534-15087-2

© Коллектив авторов, 2015

© ООО «Издательство Юрайт», 2024



## Оглавление

Авторский коллектив.....	9
Введение.....	10

### Раздел I ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ, АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ, ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ

<b>Глава 1. Элементы линейной алгебры .....</b>	<b>15</b>
1.1. Матрицы и действия над ними .....	15
1.1.1. Виды матриц.....	15
1.1.2. Операции над матрицами и их свойства .....	17
1.2. Определители.....	20
1.2.1. Определители второго и третьего порядков .....	21
1.2.2. Определители и свойства определителей $n$ -го порядка.....	21
1.2.3. Обратная матрица.....	23
1.2.4. Ранг матрицы .....	24
1.3. Системы линейных уравнений .....	31
1.3.1. Основные понятия и определения.....	32
1.3.2. Метод Гаусса.....	35
1.3.3. Метод обратной матрицы .....	36
1.3.4. Правило Крамера.....	37
1.4. Комплексные числа.....	45
1.4.1. Действия над комплексными числами в алгебраической форме .....	45
1.4.2. Тригонометрическая и экспоненциальная формы комплексного числа .....	47
<i>Задания для самостоятельной работы.....</i>	<i>51</i>
<b>Глава 2. Элементы аналитической геометрии .....</b>	<b>56</b>
2.1. Линейные пространства .....	56
2.1.1. Векторы на плоскости и в пространстве. Операции над векторами...56	
2.1.2. $n$ -мерные векторные пространства.....	65
2.1.3. Линейная зависимость векторов. Базис и размерность линейного пространства.....	67
2.2. Линейные операторы .....	79
2.2.1. Матрица линейного оператора.....	80
2.2.2. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора .....	81



2.3. Квадратичные формы.....	84
2.4. Фигуры на плоскости и в пространстве.....	86
2.4.1. Прямая на плоскости.....	86
2.4.2. Кривые второго порядка .....	88
2.4.3. Прямая и плоскость в пространстве .....	95
<i>Задания для самостоятельной работы.....</i>	<i>97</i>
<b>Глава 3. Элементы дискретной математики и математической логики. 100</b>	
3.1. Комбинаторика .....	100
3.1.1. Элементы теории множеств. Правила суммы и произведения .....	101
3.1.2. Размещения, перестановки, сочетания без повторений и с повторениями .....	105
3.1.3. Задачи перечисления.....	108
3.2. Математическая логика.....	110
3.2.1. Высказывания. Основные логические операции и их свойства.....	110
3.2.2. Логические функции и способы их задания .....	114
3.2.3. Исчисление высказываний .....	116
3.2.4. Логика предикатов .....	118
3.3. Элементы теории графов .....	122
3.3.1. Общие понятия теории графов. Вершины и ребра.....	122
3.3.2. Связность графа. Графы и деревья .....	124
3.3.3. Эйлеровы путь и цикл.....	128
<i>Задания для самостоятельной работы.....</i>	<i>130</i>

## Раздел II

### МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ, ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ И РАЗНОСТНЫЕ УРАВНЕНИЯ, ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ, ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

<b>Глава 4. Дифференциальное и интегральное исчисление функции одной переменной .....</b>	<b>135</b>
4.1. Пределы и непрерывность.....	135
4.1.1. Числовые функции .....	135
4.1.2. Предел числовой последовательности.....	137
4.1.3. Предел функции.....	139
4.1.4. Теоремы о пределах функций .....	141
4.1.5. Непрерывность функции .....	144
4.2. Дифференциальное исчисление функции одной переменной .....	148
4.2.1. Производная функции, таблица производных .....	148
4.2.2. Основные правила дифференцирования .....	151
4.2.3. Основные теоремы дифференциального исчисления .....	154
4.2.4. Исследование функций с помощью производных, построение графиков .....	156
4.2.5. Дифференциал функции и его приложения .....	164
4.3. Интегральное исчисление функций одной переменной .....	165
4.3.1. Первообразная и неопределенный интеграл .....	165



4.3.2. Методы интегрирования .....	168
4.3.3. Определенный интеграл и его свойства .....	179
4.3.4. Приложения определенного интеграла .....	181
4.3.5. Несобственные интегралы.....	183
4.4. Примеры применения дифференциального исчисления для решения финансово-экономических задач.....	184
4.4.1. Эластичность функции, ее свойства и геометрический смысл .....	184
4.4.2. Функция спроса .....	187
4.4.3. Функция предложения .....	189
4.4.4. Предельные величины в экономике и оптимизация прибыли .....	190
<i>Задания для самостоятельной работы</i> .....	192
<b>Глава 5. Функции нескольких переменных, числовые и функциональные ряды .....</b>	<b>196</b>
5.1. Функции нескольких переменных .....	196
5.1.1. Понятие функции нескольких переменных. Предел и непрерывность.....	196
5.1.2. Дифференцирование функций нескольких переменных.....	199
5.1.3. Экстремумы функции нескольких переменных .....	205
5.1.4. Эмпирические формулы и метод наименьших квадратов .....	214
5.1.5. Основные виды функций нескольких переменных в экономических задачах.....	219
5.2. Числовые и функциональные ряды .....	225
5.2.1. Определения и свойства числовых рядов.....	225
5.2.2. Положительные ряды .....	227
5.2.3. Знакопеременные ряды .....	229
5.2.4. Функциональные ряды.....	230
5.2.5. Степенные ряды .....	231
5.2.6. Ряды Тейлора и Маклорена. Разложение элементарных функций в степенной ряд.....	232
<i>Задания для самостоятельной работы</i> .....	236
<b>Глава 6. Дифференциальные и разностные уравнения .....</b>	<b>239</b>
6.1. Обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка.....	239
6.1.1. Основные понятия .....	239
6.1.2. Виды дифференциальных уравнений первого порядка.....	242
6.1.3. Уравнения Бернулли и Риккати .....	251
6.1.4. Уравнения в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель .....	254
6.2. Дифференциальные уравнения высших порядков.....	256
6.2.1. Уравнения, допускающие понижение порядка.....	256
6.2.2. Линейные дифференциальные уравнения высших порядков.....	258
6.2.3. Линейные однородные дифференциальные уравнения. Фундаментальный набор решений.....	259
6.2.4. Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами.....	260
6.2.5. Линейные неоднородные уравнения .....	263



6.3. Разностные уравнения .....	268
6.3.1. Основные понятия .....	268
6.3.2. Линейные разностные уравнения .....	269
6.3.3. Применение разностных уравнений в экономической динамике ....	273
6.4. Простейшие математические модели экономической динамики с непрерывным временем .....	276
6.4.1. Модель естественного роста .....	277
6.4.2. Логистический рост .....	279
6.4.3. Неоклассический рост .....	282
6.4.4. Линейные уравнения в экономической динамике .....	283
<i>Задания для самостоятельной работы</i> .....	285
<b>Глава 7. Элементы линейного программирования.....</b>	<b>288</b>
7.1. Линейные экономические модели .....	288
7.1.1. Модель Леонтьева .....	288
7.1.2. Линейная модель обмена. Модель международной торговли .....	290
7.1.3. Модель равновесных цен .....	291
7.2. Задача линейного программирования.....	292
7.2.1. Постановка задачи линейного программирования.....	292
7.2.2. Геометрическая интерпретация задачи линейного программирования в случае двух переменных. Графический метод решения .....	294
7.2.3. Симплекс-метод решения задач линейного программирования .....	295
7.2.4. Понятие о взаимно двойственных задачах линейного программирования. Двойственность в экономико-математических моделях.....	297
<i>Задания для самостоятельной работы</i> .....	300
<b>Глава 8. Элементы вычислительной математики.....</b>	<b>303</b>
8.1. Элементы машинной арифметики. Теория погрешностей. Вычислительные алгоритмы .....	303
8.1.1. Понятие о численном методе. Аппроксимация.....	303
8.1.2. Основы теории погрешностей.....	305
8.2. Устойчивость и сходимость алгоритмов .....	307
8.2.1. Понятие об устойчивости метода и задачи .....	307
8.2.2. Понятие о сходимости численного метода .....	307
8.3. Численные методы решения нелинейных уравнений с одной неизвестной .....	308
8.3.1. Постановка задачи.....	308
8.3.2. Метод половинного деления.....	309
8.3.3. Метод простой итерации.....	310
8.3.4. Метод Ньютона .....	311
8.4. Численное интегрирование.....	312
8.4.1. Квадратурная формула прямоугольников .....	312
8.4.2. Квадратурная формула Симпсона.....	314
8.4.3. Квадратурная формула трапеций .....	314
8.4.4. Интерполяционный многочлен Лагранжа.....	316
<i>Задания для самостоятельной работы</i> .....	317



# Раздел III

## ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

<b>Глава 9. Теория вероятностей.....</b>	<b>321</b>
9.1. Основные понятия теории вероятностей.....	321
9.1.1. Случайные события и операции над ними .....	321
9.1.2. Классическое определение вероятности .....	327
9.1.3. Геометрическое определение вероятности .....	327
9.1.4. Основные формулы вычисления вероятностей.....	328
9.1.5. Повторные независимые испытания .....	333
9.2. Случайные величины .....	337
9.2.1. Закон распределения дискретной случайной величины .....	337
9.2.2. Арифметические операции над дискретными случайными величинами .....	339
9.2.3. Числовые характеристики дискретных случайных величин .....	343
9.2.4. Непрерывные случайные величины .....	349
9.3. Основные законы распределений, наиболее употребляемые в социально-экономических приложениях .....	354
9.3.1. Биномиальный закон распределения .....	354
9.3.2. Распределение Пуассона.....	357
9.3.3. Геометрическое и гипергеометрическое распределения.....	359
9.3.4. Равномерное распределение .....	361
9.3.5. Показательное распределение.....	363
9.3.6. Нормальное распределение.....	366
9.3.7. Логарифмически-нормальное распределение.....	369
9.4. Многомерные случайные величины .....	371
9.4.1. Дискретные многомерные случайные величины .....	371
9.4.2. Непрерывные многомерные случайные величины.....	377
9.4.3. Числовые характеристики двумерной случайной величины.....	381
9.4.4. Функции от случайных величин.....	389
9.5. Закон больших чисел и предельные теоремы.....	393
9.5.1. Неравенство Маркова .....	393
9.5.2. Теорема Чебышева .....	395
9.5.3. Центральная предельная теорема .....	397
<i>Задания для самостоятельной работы</i> .....	398
<b>Глава 10. Математическая статистика .....</b>	<b>405</b>
10.1. Статистические методы обработки экспериментальных данных .....	405
10.1.1. Эмпирические характеристики признаков .....	405
10.1.2. Выборочный метод.....	415
10.2. Статистические оценки параметров распределения .....	420
10.3. Статистическая проверка гипотез .....	434
10.4. Элементы корреляционно-регрессионного анализа.....	450
<i>Задания для самостоятельной работы</i> .....	456
<b>Литература .....</b>	<b>463</b>
<b>Приложение. Таблицы значений функций .....</b>	<b>466</b>







## **Авторский коллектив**

**Хрипунова Марина Борисовна** — кандидат физико-математических наук, доцент, заведующая кафедрой математики и информатики Владимирского филиала Финансового университета при Правительстве Российской Федерации — гл. 1, 2, 4 (параграфы 4.1–4.3);

**Цыганок Ирина Ивановна** — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теории вероятностей и математической статистики Департамента математики и информатики Финансового университета при Правительстве Российской Федерации — гл. 9, 10;

**Александрова Ирина Александровна** — доцент, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики Департамента математики и информатики Финансового университета при Правительстве Российской Федерации — гл. 7;

**Балджи Анна Сергеевна** — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики и информатики Владимирского филиала Финансового университета при Правительстве Российской Федерации — гл. 8;

**Денежкина Ирина Евгеньевна** — кандидат технических наук, доцент, заведующая кафедрой теории вероятностей и математической статистики Департамента математики и информатики Финансового университета при Правительстве Российской Федерации — гл. 6;

**Никифорова Светлана Владимировна** — кандидат экономических наук, доцент кафедры математики и информатики Владимирского филиала Финансового университета при Правительстве Российской Федерации — гл. 3;

**Степанов Сергей Евгеньевич** — доктор физико-математических наук, профессор кафедры математики-1 Департамента математики и информатики Финансового университета при Правительстве Российской Федерации — гл. 4 (параграф 4.4), 5.



## Введение

Общепризнано, что математика — это один из самых мощных методов изучения окружающего мира, с ее помощью можно решать как теоретические, так и практические проблемы, возникающие в социально-экономической сфере деятельности людей. Для этого достаточно перевести экономическую, транспортную, управленческую, как, впрочем, и любую другую, задачу на математический язык, т.е. построить ее математическую модель. Конечно, такая модель основана на некотором упрощении и не является точным описанием реального процесса, однако математизация практической задачи позволяет находить ранее неизвестные закономерности, давать математический анализ условий, при которых возможно решение такой задачи, или строить средствами математики прогноз развития того или иного экономического процесса. Современный практик, грамотно применяющий математику, способен принести пользу в любой сфере деятельности, в том числе и экономической, где роль математических методов год от года только возрастает.

Математику считают трудной наукой. Причина в том, что для нее характерны и серьезные логические построения, не допускающие ни малейшей ошибки, и громоздкие формулы. Поэтому распространено мнение, что среди учебных курсов самые непонятные — это курсы лекций по математике. В настоящем издании, которое предназначено для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлениям прикладного и академического экономического бакалавриата, а также для всех, кто изучает данную дисциплину самостоятельно, авторы постарались сосредоточиться на практической стороне вопроса. Конечно, данное издание включает и теоретический компонент, необходимый для освоения курса высшей математики, но больше всего оно будет интересно читателю примерами прикладных задач с их решениями и заданиями для самостоятельной работы, контролирующими усвоение им изученного материала.

Содержание учебника соответствует требованиям Федерального государственного образовательного стандарта высшего образования и включает следующие разделы математики: элементы линейной алгебры и аналитической геометрии, элементы дискретной математики и математической логики, математический анализ, дифференциальные и разностные уравнения, элементы линейного программирования, элементы вычислительной математики, теория вероятностей и математическая статистика.

В результате изучения дисциплины студент должен:

**знать**

- основы математического анализа, линейной алгебры, теории вероятностей и дискретной математики, необходимые для решения финансовых и экономических задач;



***уметь***

- применять математические методы для решения экономических задач;

***владеть***

- навыками применения современного математического инструментария для решения экономических задач;
- методикой построения, анализа и применения математических моделей для оценки состояния и прогноза развития экономических явлений и процессов (в части компетенций, соответствующих методам основы математического анализа, линейной алгебры, теории вероятностей и дискретной математики).

Авторы выражают глубокую благодарность доктору физико-математических наук, профессору Финансового университета при Правительстве РФ В. Ю. Попову, доктору физико-математических наук, профессору Университета имени Ф. Палацкого (Чешская Республика) Йозефу Микешу за рецензирование рукописи и сделанные замечания.







**Раздел I**  
**ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ,**  
**АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ,**  
**ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКИ**  
**И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ**

---

---







# Глава 1

## ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

---

В результате освоения содержания главы 1 студент должен:

**знать**

- основы линейной алгебры, необходимые для успешного изучения последующих курсов;

- доказательства основных теорем линейной алгебры;

- основные методы вычислений и методы решения алгебраических задач;

**уметь**

- применять методы линейной алгебры для решения математических задач, построения и анализа моделей в экономике;

- исследовать и решать системы линейных алгебраических уравнений;

**владеть**

- понятийным аппаратом и основными методами матричной алгебры;

- навыками применения современного математического аппарата для решения задач экономики и информатики.

---

### 1.1. Матрицы и действия над ними

Матрицы широко применяются в математике для компактной записи систем алгебраических и дифференциальных уравнений и их решения.

#### 1.1.1. Виды матриц

**Определение 1.1.** Матрицей размера  $m \times n$  называется прямоугольная таблица чисел, содержащая  $m$  строк и  $n$  столбцов. Числа, составляющие матрицу, называются *элементами* матрицы.

Матрицы обозначают прописными буквами латинского алфавита, например  $A, B, C, \dots$ , а для обозначения элементов матрицы используют соответствующие строчные буквы с двойной индексацией:  $a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}, \dots$ , где  $i$  — номер строки;  $j$  — номер столбца.

Например, матрица  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$

в сокращенной записи имеет вид  $A = (a_{ij}); i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$ .



Наряду с круглыми скобками используются и другие обозначения для матриц:

$$A = [a_{ij}], A = \|a_{ij}\|, i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n.$$

Две матрицы  $A$  и  $B$  одного размера называют *равными*, если они совпадают поэлементно:  $a_{ij} = b_{ij}$  для любых значений  $i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$ .

Элементы матрицы, у которых номер строки и номер столбца равны ( $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{mm}, \dots$ ), называют *диагональными элементами* матрицы.

Среди матриц выделяют:

$$\text{нулевую матрицу } \mathbf{0}_{m \times n} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}; \text{ она может быть любого размера;}$$

$$\text{матрицу (вектор)-строку } A = (a_{11} \ a_{12} \ \dots \ a_{1n});$$

$$\text{матрицу (вектор)-столбец } A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix};$$

$$\text{матрицу ступенчатого вида } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1m} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2m} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3m} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{mm} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}; \text{ в ней}$$

все элементы в столбцах, стоящие ниже диагональных элементов, равны нулю;

$$\text{квадратную матрицу } n\text{-го порядка } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}; \text{ в ней коли-}$$

чество строк равно количеству столбцов;

$$\text{диагональную матрицу } n\text{-го порядка } A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}; \text{ она обяза-}$$

тельно квадратная, и в ней только диагональные элементы отличны от нуля;

$$\text{единичную матрицу } n\text{-го порядка } E = E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}; \text{ она обяза-}$$

тельно квадратная, и в ней все диагональные элементы равны 1.



### 1.1.2. Операции над матрицами и их свойства

С матрицами выполнимы определенные операции, среди них сложение, вычитание, умножение матрицы на число, умножение матриц, возведение в степень, транспонирование. В результате действия операции определяется новая матрица, для которой должны быть указаны размер и правило нахождения ее элементов.

Суммой двух матриц  $A$  и  $B$  одинакового размера  $m \times n$  называется матрица  $C = A + B$ , размер которой  $m \times n$  и элементы находят по правилу  $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ ,  $i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$ .

Например, если  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 30 \\ 40 & 50 & 60 \end{pmatrix}$ , то

$$A+B = \begin{pmatrix} 1+10 & 2+20 & 3+30 \\ 4+40 & 5+50 & 6+60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 22 & 33 \\ 44 & 55 & 66 \end{pmatrix}.$$

Для сложения матриц выполнимы следующие свойства:

- 1)  $A + B = B + A$  (коммутативность);
- 2)  $A + (B + C) = (A + B) + C$  (ассоциативность);
- 3)  $A + 0 = A$ .

Доказательство этих свойств следует из свойств действительных чисел.

Произведением матрицы  $A$  размера  $m \times n$  на число  $\lambda$  называется матрица  $C = \lambda A$ , размер которой  $m \times n$  и элементы находят по правилу  $c_{ij} = \lambda a_{ij}$ , где  $i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$ .

Например, если  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ ,  $\lambda = 5$ , то  $5A = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 15 \\ 20 & 25 & 30 \end{pmatrix}$ .

Для умножения матрицы на число выполнимы следующие свойства:

- 1)  $\lambda(A \pm B) = \lambda A \pm \lambda B$ ;
- 2)  $(\lambda \pm \mu)A = \lambda A \pm \mu A$ ,

здесь  $A, B$  — матрицы, размер которых диктуется выполнимостью операции, а  $\lambda, \mu$  — числа.

Разностью двух матриц  $A$  и  $B$  одинакового размера  $m \times n$  называется матрица  $C = A - B$ , размер которой  $m \times n$  и элементы находят по правилу  $c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$ ,  $i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$ .

Например, если  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 30 \\ 40 & 50 & 60 \end{pmatrix}$ , то

$$A-B = \begin{pmatrix} 1-10 & 2-20 & 3-30 \\ 4-40 & 5-50 & 6-60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & -18 & -27 \\ -36 & -45 & -54 \end{pmatrix},$$

а

$$B-A = \begin{pmatrix} 10-1 & 20-2 & 30-3 \\ 40-4 & 50-5 & 60-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 18 & 27 \\ 36 & 45 & 54 \end{pmatrix}.$$

Разность матриц можно рассматривать как сумму первой матрицы и второй, умноженной на  $\lambda = -1$ .



Произведением матрицы  $A$  размера  $m \times k$  на матрицу  $B$  размера  $k \times n$  называют матрицу  $C = AB$ , размер которой  $m \times n$  и элементы находят по правилу

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ik}b_{kj} = \sum_{s=1}^k a_{is}b_{sj}; \quad i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n.$$

Для того чтобы перемножать матрицы, их размеры должны быть согласованы: количество столбцов в первой равно количеству строк во второй, тогда элемент  $c_{ij}$  в матрице произведения получают как сумму произведений элементов  $i$ -й строки первой матрицы на соответствующие элементы  $j$ -го столбца второй матрицы.

Например, если  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}_{2 \times 3}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 30 & 40 \\ 50 & 60 & 70 & 80 \\ 90 & 100 & 110 & 120 \end{pmatrix}_{3 \times 4}$ , то

$$\begin{aligned} C &= A \cdot B = \\ &= \begin{pmatrix} 1 \cdot 10 + 2 \cdot 50 + 3 \cdot 90 & 1 \cdot 20 + 2 \cdot 60 + 3 \cdot 100 & 1 \cdot 30 + 2 \cdot 70 + 3 \cdot 110 & 1 \cdot 40 + 2 \cdot 80 + 3 \cdot 120 \\ 4 \cdot 10 + 5 \cdot 50 + 6 \cdot 90 & 4 \cdot 20 + 5 \cdot 60 + 6 \cdot 100 & 4 \cdot 30 + 5 \cdot 70 + 6 \cdot 110 & 4 \cdot 40 + 5 \cdot 80 + 6 \cdot 120 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 380 & 440 & 500 & 560 \\ 830 & 980 & 1130 & 1280 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Операция умножения матриц некоммутативна в общем случае, т.е.  $AB \neq BA$ . Во-первых, если  $AB$  существует, то  $BA$  может не существовать. Даже в случае существования матриц  $AB$  и  $BA$  равенство  $AB = BA$  не всегда выполняется. Для доказательства достаточно привести один пример. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}_{2 \times 2}, B = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}_{2 \times 2}, \text{ тогда}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 11 & 3 \end{pmatrix}_{2 \times 2}, B \cdot A = \begin{pmatrix} 8 & 14 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}_{2 \times 2},$$

т.е.  $AB \neq BA$ .

Матрицы, для которых выполняется равенство  $AB = BA$ , называют *перестановочными*.

Для умножения матриц выполняемы следующие свойства:

- 1)  $A \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$ ;
- 2)  $AE = EA = A$ ;
- 3)  $A(BC) = (AB)C$  — ассоциативность;
- 4)  $A(B + C) = AB + AC$  — дистрибутивность;
- 5)  $(A + B)C = AC + BC$  — дистрибутивность;
- 6)  $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$ .

Здесь  $A, B, C, \mathbf{0}, E$  — матрицы, размер которых диктуется выполнимостью операции, а  $\lambda$  — число.



Целой положительной степенью квадратной матрицы  $A$   $n$ -го порядка называют матрицу  $C = A^m = \underbrace{A \cdot A \cdot \dots \cdot A}_{m \text{ раз}}$  ( $m > 1$ ).

Например, если  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ , то

$$\begin{aligned} A^3 &= A \cdot A \cdot A = (A \cdot A) \cdot A = \left( \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 4 \\ 3 \cdot 1 + 4 \cdot 3 & 3 \cdot 2 + 4 \cdot 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 7 \cdot 1 + 10 \cdot 3 & 7 \cdot 2 + 10 \cdot 4 \\ 15 \cdot 1 + 22 \cdot 3 & 15 \cdot 2 + 22 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 37 & 54 \\ 81 & 118 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Возведение в степень определено только для квадратных матриц  $n$ -го порядка, очевидно при этом, что получаемая матрица тоже будет квадратной  $n$ -го порядка.

Для возведения в степень по определению полагают  $A^0 = E$ ;  $A^1 = A$ . Кроме того, можно говорить о справедливости следующих равенств:

- 1)  $A^m A^k = A^{m+k}$ ;
- 2)  $(A^m)^k = A^{mk}$ .

Для матрицы  $A$  размера  $m \times n$  можно определить матрицу  $C = A^T$ , транспонированную к  $A$ . Размер матрицы  $C = A^T$  равен  $n \times m$ , и ее элементы находят по правилу  $c_{ij} = a_{ji}$  для всех значений  $i = 1, 2, \dots, m$ ;  $j = 1, 2, \dots, n$ .

Чтобы записать матрицу  $A^T$ , нужно в матрице  $A$  строки и столбцы поменять местами с сохранением порядка их следования.

Например, если  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}_{2 \times 2}$ , то  $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}_{2 \times 2}$ , а если

$$B = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 30 & 40 \\ 50 & 60 & 70 & 80 \\ 90 & 100 & 110 & 120 \end{pmatrix}_{3 \times 4}, \text{ то } B^T = \begin{pmatrix} 10 & 50 & 90 \\ 20 & 60 & 100 \\ 30 & 70 & 110 \\ 40 & 80 & 120 \end{pmatrix}_{4 \times 3}.$$

Для операции транспонирования выполнены следующие свойства:

- 1)  $(A^T)^T = A$ ;
- 2)  $(\lambda A)^T = \lambda A^T$ ;
- 3)  $(A + B)^T = A^T + B^T$ ;
- 4)  $(AB)^T = B^T A^T$ .

Приведем примеры решения задач с матрицами.

#### Пример 1.1

Вычислим

$$(A^T + B) \cdot (2C - 5D),$$



где  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$ ,  $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 3 \\ 5 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ ,  $D = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 1 & -3 \\ 4 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ .

*Решение*

Будем решать задачу по действиям.

$$1) A^T + B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 5 \\ 3 & -5 \end{pmatrix};$$

$$2) 2C - 5D = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 3 \\ 5 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} - 5 \cdot \begin{pmatrix} 7 & 1 & 1 & -3 \\ 4 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -31 & -5 & -7 & -9 \\ -10 & -3 & 16 & 10 \end{pmatrix};$$

$$3) (A^T + B) \cdot (2C - 5D) = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 5 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -31 & -5 & -7 & -9 \\ -10 & -3 & 16 & 10 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -216 & -39 & 6 & -24 \\ -143 & -30 & 59 & 23 \\ -43 & 0 & -101 & -77 \end{pmatrix}.$$

Ответ:  $\begin{pmatrix} -216 & -39 & 6 & -24 \\ -143 & -30 & 59 & 23 \\ -43 & 0 & -101 & -77 \end{pmatrix}$ .

*Замечание 1.1.* При выполнении операций над матрицами в современное время можно использовать программу *MS Excel*.

### Пример 1.2

Вычислим значение многочлена  $f(x) = 2x^3 - x + 5$  от матрицы  $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ .

*Решение*

Будем решать задачу по действиям.

$$1) 2A^3 = 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 12 & 16 \end{pmatrix};$$

$$2) 2A^3 - A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 12 & 16 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 10 & 14 \end{pmatrix};$$

$$3) 2A^3 - A + 5E = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 10 & 14 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 10 & 19 \end{pmatrix}.$$

Ответ:  $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 10 & 19 \end{pmatrix}$ .

## 1.2. Определители

Определители являются числовыми характеристиками квадратных матриц и играют важную роль в решении прикладных задач.



### 1.2.1. Определители второго и третьего порядков

Рассмотрим квадратные матрицы различных порядков. Определитель — это одна из числовых характеристик квадратной матрицы. Определитель (другое название — детерминант) матрицы  $A$  обозначают  $|A|$ , или  $\Delta$ , или  $\det A$ .

**Определение 1.2.** *Определителем матрицы первого порядка  $A = (a_{11})$  называют число  $a_{11}$ :  $\Delta = |A| = |a_{11}| = a_{11}$ . Определителем матрицы второго порядка  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$  называют число, которое находят по формуле*

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}.$$

*Определителем матрицы третьего порядка  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$  назы-*

*вают число, которое находят по так называемой формуле треугольников:*

$$\begin{aligned} \Delta = |A| &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{11}a_{23}a_{32}). \end{aligned}$$

### 1.2.2. Определители и свойства определителей $n$ -го порядка

Для того чтобы ввести понятие определителя  $n$ -го порядка, потребуются дополнительные рассуждения.

Рассмотрим квадратную матрицу  $n$ -го порядка  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ .

Из элементов этой матрицы можно составлять наборы из  $n$  элементов так, чтобы в него входило по одному элементу из каждой строки и каждого столбца. Любой такой набор можно упорядочить по номерам строк, записав сначала элемент из первой строки, затем из второй, третьей и т.д. Такой набор имеет вид  $(a_{1j_1}, a_{2j_2}, a_{3j_3}, \dots, a_{nj_n})$ . Номера столбцов при этом составляют перестановку  $J = (j_1, j_2, j_3, \dots, j_n)$  из чисел  $1, 2, 3, \dots, n$ . Всего таких перестановок существует  $n!$  ( $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$ ). Для перестановки  $J$  можно ввести понятие инверсии. Говорят, что перестановка  $J$  содержит инверсию, если в ней определяется хотя бы одна упорядоченная пара, первый элемент которой больше второго. Количество инверсий в перестановке обозначают  $r(J)$ .

**Определение 1.3.** *Определителем матрицы  $n$ -го порядка называют число, равное алгебраической сумме  $n!$  слагаемых, равных произведениям из  $n$  элементов матрицы, взятым по одному из каждой строки и каждого столбца, упорядоченным по номерам строк и записанным со знаком*



$(-1)^{r(J)}$ , где  $r(J)$  — число инверсий в перестановке из номеров столбцов соответствующего произведения:

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_J (-1)^{r(J)} a_{1j_1} \cdot a_{2j_2} \cdot \dots \cdot a_{nj_n}.$$

Использовать напрямую данное определение для вычислений весьма затруднительно, для решения задач, связанных с нахождением определителей высоких порядков, используют различные свойства определителей. Чтобы сформулировать некоторые из них, потребуются новые понятия.

**Определение 1.4.** *Минором  $M_{ij}$  элемента  $a_{ij}$  матрицы  $A$   $n$ -го порядка называют определитель матрицы  $(n-1)$ -го порядка, полученной из матрицы  $A$  вычеркиванием  $i$ -й строки и  $j$ -го столбца.*

Например, минором  $M_{21}$  элемента  $a_{21}$  матрицы  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

будет определитель  $M_{21} = \begin{vmatrix} \vdots & a_{12} & a_{13} \\ \vdots & a_{22} & a_{23} \\ \vdots & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}.$

Алгебраическим дополнением  $A_{ij}$  элемента  $a_{ij}$  матрицы  $A$   $n$ -го порядка называют его минор, взятый со знаком  $(-1)^{i+j}$ :

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij},$$

т.е. алгебраическое дополнение элемента  $a_{ij}$  совпадает с его минором, когда сумма номеров строки и столбца  $(i+j)$  — четное число, и отличается от минора только знаком, когда  $(i+j)$  — нечетное число.

Для вычисления определителей важное значение имеет следующее утверждение.

**Теорема 1.1.** *Определитель матрицы  $n$ -го порядка равен сумме произведений элементов любой строки (или столбца) на их алгебраические дополнения:*

$$\Delta = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in} = \sum_{k=1}^n a_{ik}A_{ik}$$

— разложение по элементам  $i$ -й строки ( $i = 1, 2, \dots, n$ ),

$$\Delta = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{kj}A_{kj}$$

— разложение по элементам  $j$ -го столбца ( $j = 1, 2, \dots, n$ ).

Можно сделать вывод, что значение определителя не зависит от способа его раскрытия, поэтому удобнее работать с теми строками или столбцами, в которых есть нулевые элементы, это позволит проводить вычисления значительно короче. Кроме того, есть целый ряд свойств, используя которые, можно находить значение определителя, не прибегая к громоздким выражениям. Перечислим эти свойства.



1. Если какая-либо строка (или столбец) квадратной матрицы состоит из одних нулей, то ее определитель равен нулю.

2. Если все элементы какой-либо строки (столбца) квадратной матрицы умножить на число  $\lambda$ , то определитель этой матрицы тоже умножится на это число.

*Замечание 1.2.* Согласно этому свойству можно за знак определителя выносить общий множитель для всех элементов какой-либо строки (столбца).

3. При транспонировании квадратной матрицы значение определителя не меняется:  $|A| = |A^T|$ .

4. При перестановке двух строк (столбцов) квадратной матрицы ее определитель меняет знак на противоположный.

5. Если квадратная матрица содержит две одинаковые строки (столбца), то ее определитель равен нулю.

6. Если соответствующие элементы двух строк (столбцов) квадратной матрицы пропорциональны, то ее определитель равен нулю.

7. Определитель матрицы не изменится, если к элементам какой-либо строки (столбца) матрицы прибавить соответствующие элементы другой строки (столбца), умноженные на одно и то же число.

8. Сумма произведений элементов какой-либо строки (столбца) матрицы на алгебраические дополнения элементов другой строки (столбца) этой матрицы равна нулю:  $\sum_{k=1}^n a_{ik} A_{jk} = 0$  при  $i \neq j$ .

9. Определитель произведения двух квадратных матриц равен произведению определителей этих матриц:  $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$ .

В свойстве 9 матрицы  $A$  и  $B$  должны быть одного и того же порядка, иначе не будет возможным их умножение.

Очень важным является свойство 7. Его используют для того, чтобы получить в определителе строку или столбец с одним только ненулевым элементом, в этом случае теорема о разложении определителя по строке или столбцу имеет самый простой вид.

### 1.2.3. Обратная матрица

**Определение 1.5.** Для квадратной матрицы  $A$   $n$ -го порядка вводится понятие *обратной матрицы*, которую обозначают  $A^{-1}$  и определяют как матрицу  $n$ -го порядка, удовлетворяющую условиям

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E,$$

где  $E$  — единичная матрица  $n$ -го порядка.

Необходимым и достаточным условием существования для матрицы  $A$  обратной матрицы  $A^{-1}$  является ее невырожденность.

**Определение 1.6.** Матрица  $A$  называется *невырожденной*, если ее определитель  $\Delta = |A|$  не равен нулю.

Для вычисления обратной матрицы существует алгоритм, который мы приведем без доказательства.

1. Найти определитель  $\Delta = |A|$  данной матрицы  $A$ . Если  $\Delta = 0$ , то  $A^{-1}$  не существует. Если  $\Delta \neq 0$ , то  $A^{-1}$  существует.

2. Найти матрицу  $A^T$ , транспонированную к данной матрице  $A$ .



3. Составить присоединенную матрицу  $\tilde{A}$ , элементами которой являются алгебраические дополнения элементов матрицы  $A^T$ .

4. Найти обратную матрицу по формуле:  $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \tilde{A}$ .

5. Осуществить проверку по определению:  $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$ .

Пример применения этого алгоритма рассматривается ниже.

С использованием обратной матрицы связано решение матричных уравнений вида  $A \cdot X = B$  или  $X \cdot A = B$ , где  $A, B$  — заданные матрицы;  $X$  — неизвестная матрица, подчиняющаяся соответствующему условию. Для матриц действие деления не определено, поэтому нахождение матрицы  $X$ , вообще говоря, проблематично, если не знать специальных приемов, позволяющих справиться с такого рода задачей. Достаточно провести цепочку преобразований с уравнением каждого вида, чтобы получить расчетные формулы для неизвестной матрицы  $X$ :

$$\begin{aligned} A \cdot X = B &\xrightarrow[\text{слева на } A^{-1}]{\text{умножим обе части}} A^{-1} \cdot (AX) = A^{-1} \cdot B \xrightarrow{\text{перегруппируем}} \\ &\rightarrow \underbrace{(A^{-1} \cdot A)}_E X = A^{-1} B \xrightarrow[\text{единичной матрицы}]{\text{по свойству}} X = A^{-1} B. \end{aligned}$$

Таким образом, для уравнения  $A \cdot X = B$  решением будет матрица  $X = A^{-1}B$ . Аналогичные рассуждения можно провести и для уравнения  $X \cdot A = B$ :

$$\begin{aligned} X \cdot A = B &\xrightarrow[\text{справа на } A^{-1}]{\text{умножим обе части}} (XA) \cdot A^{-1} = B \cdot A^{-1} \xrightarrow{\text{перегруппируем}} \\ &\rightarrow X \underbrace{(A \cdot A^{-1})}_E = BA^{-1} \xrightarrow[\text{единичной матрицы}]{\text{по свойству}} X = BA^{-1}. \end{aligned}$$

Таким образом, для уравнения  $X \cdot A = B$  решением будет матрица  $X = BA^{-1}$ .

#### 1.2.4. Ранг матрицы

Если определитель является числовой характеристикой только для квадратной матрицы, то ранг является числовой характеристикой для матрицы произвольного размера, не обязательно квадратной. Это важная характеристика для матрицы, используемая при решении математических и прикладных задач, поэтому рассмотрим ее подробно.

В матрице  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m \times n}$  вычеркиванием каких-

либо строк и столбцов можно выделять квадратные подматрицы  $k$ -го



порядка, где  $k \leq \min(m, n)$ . Определители таких подматриц называют *минорами  $k$ -го порядка матрицы  $A$* . Например, если имеем  $A$ , то из нее можно  $3 \times 5$  получить подматрицы 1-го, 2-го и 3-го порядков и найти соответствующие значения миноров.

**Определение 1.7.** Рангом матрицы  $A$  называют наивысший порядок отличных от нуля миноров этой матрицы (обозначают  $\text{rang } A$  или  $r(A)$ ).

Из определения следует:

- ранг матрицы не превосходит меньшего из ее размеров ( $\text{rang } A \leq \min(m, n)$ );
- ранг матрицы равен нулю только для нулевой матрицы, т.е. ( $\text{rang } A = 0 \Leftrightarrow A = 0$ );
- для квадратной матрицы  $A$   $n$ -го порядка ранг равен  $n$  только в случае, когда матрица  $A$  — невырожденная (ее определитель  $\Delta = |A|$  отличен от нуля), т.е. ( $\text{rang } A = n \Leftrightarrow |A| \neq 0$ ).

Вычисление ранга матрицы на основе определения является громоздкой задачей, связанной с выписыванием всех квадратных подматриц, подсчетом их определителей, выбором определителей с ненулевыми значениями, нахождением их порядка, поэтому используется крайне редко. Существуют стандартные приемы для вычисления рангов матриц, и приемы эти используют так называемые **элементарные преобразования матриц**. В общей алгебраической теории доказывают, что при элементарных преобразованиях матрицы ее ранг не изменяется. Мы перечислим элементарные преобразования матриц:

- 1) отбрасывание нулевой строки;
- 2) умножение всех элементов строки на одно и то же число, не равное нулю;
- 3) изменение порядка строк;
- 4) транспонирование;
- 5) прибавление к каждому элементу какой-либо строки соответствующих элементов другой строки, умноженных на число, не равное нулю.

Основная цель при использовании элементарных преобразований — привести данную матрицу к ступенчатому виду, тогда ранг данной матрицы определится количеством ненулевых строк в приведенной матрице. Нужно понимать при этом, что в процессе преобразований матрица меняется, остается неизменной только ее числовая характеристика — ранг.

Ступенчатый вид матрицы предполагает получение нулевых элементов, расположенных под диагональными. Сначала получают нули под элементом  $a_{11}$  (в этом случае рабочей является первая строка), затем — под элементом  $a_{22}$  (в этом случае рабочей является вторая строка) и т.д. Если в результате преобразований получают нулевые строки, то их из матрицы исключают. Если матрица приведена к ступенчатому виду, то все равно имеет смысл присмотреться к ее элементам внимательно, так как может присутствовать пропорциональная зависимость между оставшимися строками, а это допускает проведение элементарных преобразований, дающих



нулевую строку, которую можно исключить из матрицы. Без проведения такого преобразования можно допустить ошибку при вычислении ранга матрицы, а он определяется количеством ненулевых строк в приведенной матрице ступенчатого вида.

Для рангов матриц справедливы следующие соотношения:

- 1)  $\text{rang}(A + B) \leq \text{rang}A + \text{rang}B$ ;
- 2)  $\text{rang}(AB) \leq \min(\text{rang}A, \text{rang}B)$ ;
- 3)  $\text{rang}A = \text{rang}A^T$ .

Ранг матрицы в общей алгебраической теории определяет количество линейно независимых строк в матрице и играет решающую роль в матричном анализе, в частности при исследовании систем линейных уравнений.

Рассмотрим подробнее вопрос линейной зависимости строк матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Обозначим ее строки как  $e_1 = (a_{11} \ a_{12} \ \dots \ a_{1n})$ ,  $e_2 = (a_{21} \ a_{22} \ \dots \ a_{2n})$ , ...,  $e_m = (a_{m1} \ a_{m2} \ \dots \ a_{mn})$ . Понятно, что  $e_1, e_2, \dots, e_m$  сами выступают как матрицы, поэтому к ним применимы определение равных матриц (в нашей терминологии — строк), а также операции сложения, вычитания, умножения на число (они сводятся к поэлементному выполнению).

Строка  $e_m = (a_{m1} \ a_{m2} \ \dots \ a_{mn})$  называется *линейной комбинацией* строк  $e_1, e_2, \dots, e_{m-1}$  матрицы, если для нее выполнено равенство

$$e_m = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_{m-1} e_{m-1},$$

где  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{m-1}$  — произвольные действительные числа, отличные от нуля.

Строки  $e_1, e_2, \dots, e_m$  матрицы называют *линейно зависимыми*, если существуют такие числа  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ , не равные нулю одновременно, что линейная комбинация строк  $e_1, e_2, \dots, e_m$  матрицы будет равна нулевой строке:

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_m e_m = \mathbf{0},$$

где  $\mathbf{0} = (0 \ 0 \ \dots \ 0)$ .

Линейная зависимость строк матрицы означает, что хотя бы одна строка этой матрицы является линейной комбинацией остальных.

Если условие  $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_m e_m = \mathbf{0}$  выполняется тогда и только тогда, когда все коэффициенты  $\lambda_i$  равны нулю, т.е.  $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \dots, \lambda_m = 0$ , то строки  $e_1, e_2, \dots, e_m$  матрицы называют *линейно независимыми*. Имеет место следующая теорема.

**Теорема 1.2 (о ранге матрицы).** *Ранг матрицы равен максимальному числу ее линейно независимых строк, через которые линейно выражаются все остальные строки этой матрицы.*

В силу этой теоремы задачи, в которых требуется определить максимальное число линейно независимых строк матрицы, фактически сводятся к вычислению ранга данной матрицы.



Чтобы определять коэффициенты  $\lambda_i$  для соответствующих линейных комбинаций строк матрицы в случае их линейной зависимости, нужны дополнительные умения, связанные с решением систем уравнений. Рассмотрим их в следующих параграфах.

Приведем примеры решения задач.

### Пример 1.3

Вычислим определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

*Решение*

1 способ. Используем разложение по первой строке:

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + a_{14}A_{14} = \\ &= 1 \cdot (-1)^{1+1} M_{11} + 2 \cdot (-1)^{1+2} M_{12} + 3 \cdot (-1)^{1+3} M_{13} + 4 \cdot (-1)^{1+4} M_{14} = \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} - 4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \\ &= 11 - 2 \cdot 19 + 3 \cdot 11 - 4 \cdot 9 = -30. \end{aligned}$$

2 способ. Теперь используем разложение по второму столбцу:

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32} + a_{42}A_{42} = \\ &= 2 \cdot (-1)^{1+2} M_{12} + 1 \cdot (-1)^{2+2} M_{22} + 1 \cdot (-1)^{3+2} M_{32} + 3 \cdot (-1)^{4+2} M_{42} = \\ &= -2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \\ &= -2 \cdot 19 + 25 - 5 + 3 \cdot (-4) = -30. \end{aligned}$$

Ответ: -30.

### Пример 1.4

Вычислим определители:

$$\text{а) } \Delta = \begin{vmatrix} 4 & 6 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \\ 4 & -2 & 1 & 0 \\ 6 & 4 & 4 & 6 \end{vmatrix}; \text{ б) } \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$



*Решение*

а) Можно заметить, что элементы первого и четвертого столбцов в этом определителе отличаются только в третьей строке. Поэтому получить в определителе столбец с одним только ненулевым элементом можно, используя свойство 7 (умножив элементы первого столбца на  $-1$  и прибавив к соответствующим элементам четвертого столбца):

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} 4 & 6 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \\ 4 & -2 & 1 & 0 \\ 6 & 4 & 4 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 6 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \\ 4 & -2 & 1 & -4 \\ 6 & 4 & 4 & 0 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \text{используем} \\ \text{разложение} \\ \text{по элементам} \\ \text{четвертого столбца} \end{array} = -4A_{34} = \\ &= -4 \cdot (-1)^{3+4} M_{34} = 4 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 & -2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 6 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} 4 & -2 & 10 \\ 1 & 0 & 0 \\ 6 & -8 & 22 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \text{используем} \\ \text{разложение} \\ \text{по элементам} \\ \text{второй строки} \end{array} = \\ &= 4 \cdot 1 \cdot (-1)^{2+1} M_{21} = -4 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 10 \\ -8 & 22 \end{vmatrix} = -4 \cdot [-2 \cdot 22 - 10 \cdot (-8)] = -144. \end{aligned}$$

б)

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \begin{array}{l} -2 \quad -3 \quad -4 \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & -3 & -4 \\ 0 & -5 & -13 & -8 \\ 0 & -5 & -10 & -15 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \text{используем} \\ \text{разложение} \\ \text{по элементам} \\ \text{первого столбца} \end{array} = \\ &= 1 \cdot (-1)^{1+1} M_{11} = \begin{vmatrix} -3 & -3 & -4 \\ -5 & -13 & -8 \\ -5 & -10 & -15 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \text{вынесем общие} \\ \text{множители} \\ \text{из каждой строки} \end{array} = \\ &= (-1) \cdot (-1) \cdot (-5) \cdot \begin{vmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 5 & 13 & 8 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -5 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -3 & -5 \\ 5 & 3 & -7 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \text{используем} \\ \text{разложение} \\ \text{по элементам} \\ \text{третьей строки} \end{array} = \\ &= -5 \cdot 1 \cdot (-1)^{3+1} M_{31} = -5 \cdot \begin{vmatrix} -3 & -5 \\ 3 & -7 \end{vmatrix} = -5 \cdot [-3 \cdot (-7) - (-5) \cdot 3] = -5 \cdot 6 = -30. \end{aligned}$$

Ответ: а)  $\Delta = -144$ ; б)  $\Delta = -30$ .

**Пример 1.5**

Найдем матрицу, обратную к данной:  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ .

*Решение*

1. Найдем определитель  $\Delta = |A|$  данной матрицы:



$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-1)^{1+2} M_{12} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 2 = 5 \neq 0,$$

следовательно, обратная матрица существует.

$$2. \text{ Найдем } A^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. Составим присоединенную матрицу  $\tilde{A}$ , для чего вычислим ее элементы как алгебраические дополнения элементов матрицы  $A^T$ :

$$\tilde{a}_{11} = A_{11}^T = (-1)^{1+1} M_{11}^T = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 1;$$

$$\tilde{a}_{12} = A_{12}^T = (-1)^{1+2} M_{12}^T = - \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(-1 \cdot 2 - 1 \cdot 1) = -(-3) = 3;$$

$$\tilde{a}_{13} = A_{13}^T = (-1)^{1+3} M_{13}^T = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 = -2;$$

$$\tilde{a}_{21} = A_{21}^T = (-1)^{2+1} M_{21}^T = - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(2 \cdot 2 - 1 \cdot 1) = -3;$$

$$\tilde{a}_{22} = A_{22}^T = (-1)^{2+2} M_{22}^T = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 1;$$

$$\tilde{a}_{23} = A_{23}^T = (-1)^{2+3} M_{23}^T = - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(1 \cdot 1 - 2 \cdot 1) = -(-1) = 1;$$

$$\tilde{a}_{31} = A_{31}^T = (-1)^{3+1} M_{31}^T = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 - 1 \cdot 1 = 1;$$

$$\tilde{a}_{32} = A_{32}^T = (-1)^{3+2} M_{32}^T = - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -[1 \cdot 1 - 1 \cdot (-1)] = -2;$$

$$\tilde{a}_{33} = A_{33}^T = (-1)^{3+3} M_{33}^T = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - 2 \cdot (-1) = 3.$$

$$\text{Присоединенная матрица имеет вид } \tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$4. \text{ Вычислим обратную матрицу } A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \tilde{A}:$$

$$A^{-1} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}.$$



5. Проверим правильность вычисления обратной матрицы:

$$\begin{aligned}
 A^{-1}A &= \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \\
 &= \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 3 \cdot 2 - 2 \cdot 1 & 1 \cdot (-1) + 3 \cdot 1 - 2 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 3 \cdot 1 - 2 \cdot 2 \\ -3 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 & -3 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 & -3 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \\ 1 \cdot 1 - 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 & 1 \cdot (-1) - 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 & 1 \cdot 1 - 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 \end{pmatrix} = \\
 &= \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.
 \end{aligned}$$

Аналогично проверяется условие  $AA^{-1} = E$ .

$$\text{Ответ: } A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}.$$

#### Пример 1.6

$$\text{Решим уравнение } \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 9 & 5 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

*Решение*

По структуре это уравнение вида  $A \cdot X = B$ , где  $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 9 & 5 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$ , поэтому его решением будет матрица вида  $X = A^{-1}B$ , для нахождения которой нужно выполнить два действия.

1. Найдем  $A^{-1}$  для матрицы  $A$ .

Алгоритм известен, поэтому выписываем:

$$\begin{aligned}
 |A| &= \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 6; \quad A^T = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}; \\
 A^{-1} &= \frac{1}{|A|} \cdot \tilde{A} = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

$$\text{Проверка: } A^{-1}A = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

2. Найдем теперь неизвестную матрицу  $X$  по формуле  $X = A^{-1}B$ :



$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 & 5 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 & 5 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 12 & 6 \\ 18 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

*Проверка.* Мы нашли матрицу  $X$ , которая должна удовлетворять заданному уравнению, в чем легко убедиться:

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 5 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} = B.$$

Ответ:  $X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$

### Пример 1.7

Найдем ранг матрицы  $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & -4 & 1 & 5 & 3 \\ -4 & 5 & 7 & -10 & 0 \\ -2 & 1 & 8 & -5 & 3 \end{pmatrix}.$

*Решение*

Приведение матрицы к ступенчатому виду на первом этапе предполагает «удобный» для проведения преобразований выбор первой строки с элементом  $a_{11} \neq 0$ , в нашем случае это вторая строка, которую мы запишем на место первой:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & -4 & 1 & 5 & 3 \\ -4 & 5 & 7 & -10 & 0 \\ -2 & 1 & 8 & -5 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ -4 & 5 & 7 & -10 & 0 \\ -2 & 1 & 8 & -5 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 9 & 0 & 6 \\ 0 & -3 & 9 & 0 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что в задаче после исключения нулевых строк из матрицы оставшиеся строки не являются пропорциональными, поэтому преобразования проведены полностью и ранг последней матрицы равен 2, следовательно, и ранг заданной матрицы тоже равен 2.

Ответ:  $\text{rang } A = 2.$

## 1.3. Системы линейных уравнений

Системы линейных уравнений составляют один из важнейших разделов линейной алгебры. Они являются одним из основных инструментов для математического моделирования экономических процессов. Отметим, что строгие определения терминов «вектор», «плоскость», «пространство», используемых в настоящем параграфе, можно найти в параграфе 2.1.



### 1.3.1. Основные понятия и определения

Система  $m$  линейных уравнений с  $n$  переменными имеет вид

[illegible]

где  $a_{ij}$  и  $b_i$  (для всех значений  $i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$ ) — это произвольные числа, называемые соответственно коэффициентами при переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n$  и свободными коэффициентами или членами уравнений. Если хотя бы один из свободных коэффициентов  $b_1, b_2, \dots, b_m$  отличен от нуля, то система называется *неоднородной*. Если все свободные коэффициенты в системе равны нулю, то система определяется как *однородная*. Однородная система  $m$  линейных уравнений с  $n$  переменными имеет вид

[illegible]

С помощью знака суммирования неоднородную систему можно записать в виде  $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ), а однородную — в виде  $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = 0$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ).

Система линейных уравнений может быть записана и в матричной форме:

$$AX = B,$$

где  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$  — матрица из коэффициентов при неизвест-

ных;  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$  – матрица из неизвестных системы;  $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$  – матрица

из свободных коэффициентов, т.е. система принимает вид

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}.$$



Однородная система уравнений в матричной форме примет вид

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Для работы с системами линейных уравнений полезна и так называемая расширенная матрица системы, имеющая вид

$$A|B = \left( \begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right).$$

**Определение 1.8.** Решением системы  $m$  линейных уравнений с  $n$  переменными называют упорядоченный набор  $(k_1, k_2, \dots, k_n)$  чисел, при подстановке которых в каждое уравнение системы по правилу  $x_1 = k_1, x_2 = k_2, \dots, x_n = k_n$  получают тождество.

Система уравнений называется *совместной*, если она имеет хотя бы одно решение, в противном случае система определяется как *несовместная*.

Критерий совместности системы линейных уравнений определяется в следующей теореме.

**Теорема 1.3 (Кронекера — Капелли<sup>1</sup>).** Система линейных уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг основной матрицы системы равен рангу расширенной матрицы этой системы:

$$\text{rang} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \text{rang} \left( \begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right).$$

Понятно, что в рамках этого критерия можно утверждать, что *однородная система линейных уравнений всегда совместна*.

Из совместных систем особо выделяют *определенные* системы, т.е. системы, имеющие единственное решение. Системы, имеющие более одного решения, называют *неопределенными*.

Критерий определенности (или неопределенности) системы связан с рангом основной матрицы системы, а именно, если система совместна и

$$\text{rang} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \text{rang} \left( \begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right) = n,$$

то эта система определенная. Если же

<sup>1</sup> Леопольд Кронекер (1823—1891) — немецкий математик; Альфредо Капелли (1855—1910) — итальянский математик.



$$\text{rang} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \text{rang} \left( \begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right) = r < n,$$

то эта система является неопределенной. Для таких систем важно уметь сформировать общее решение. Общее решение системы линейных уравнений, как правило, записывается в параметрической форме и зависит от того, как выбраны *базисные* и *свободные* переменные.

*Базисными переменными* можно объявлять те переменные системы, определитель из коэффициентов при которых не равен нулю. Количество базисных переменных определяется рангом основной матрицы совместной системы. Если переменных в системе  $n$ , а ранг системы равен  $r < n$ , то и базисных переменных в этой системе будет  $r$ , выбор которых может быть осуществлен не более чем  $C_n^r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$  различными способами (напом-

ним, что по определению  $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$ ), где  $C_n^r$  — число сочетаний из  $n$  по  $r$  элементам, подробно рассматриваемое в разделе «Комбинаторика».

Переменные, оставшиеся после выбора базисных переменных, определяются как *свободные переменные* системы. Количество свободных переменных равно  $n - r$ . Для записи общего решения системы свободные переменные объявляют параметрами и выражают базисные переменные через эти параметры, формируя тем самым  $(n - r)$ -параметрическое решение системы линейных уравнений. Понятно, что вид общего решения зависит от выбора базисных переменных; однако в общей алгебраической теории доказывается наличие связи между общими решениями, полученными на основе разных базисных переменных, поэтому при исследовании неопределенных систем линейных уравнений, как правило, ограничиваются каким-либо одним видом ее общего решения.

Для неопределенных систем линейных уравнений очень важными являются ее так называемые *базисные решения*. Базисное решение системы получают из общего при условии равенства нулю всех свободных переменных системы (параметров). Количество базисных решений всегда конечно и не превосходит  $C_n^r$  в случае, когда переменных в системе  $n$ , а ранг системы равен  $r < n$ . Базисные решения систем линейных уравнений играют важную роль в решении задач линейного программирования.

**Замечание 1.3.** Если система линейных уравнений является определенной, то все ее переменные являются базисными, а получающееся единственное решение — базисным.

**Замечание 1.4.** Если система линейных уравнений является однородной неопределенной, то для нее можно сформировать *фундаментальную систему решений*. В случае, когда переменных в системе  $n$ , а ранг системы равен  $r < n$ , количество решений в фундаментальной системе равно  $n - r$ . Любое решение однородной системы уравнений может быть выражено через решения фундаментальной системы. В этом случае говорят, что







Возможны различные варианты для формирования решения, связанные со значениями  $r, m, n$ . Так, например, если  $r = m = n$ , то система имеет единственное решение. Если же  $r < n$ , то переменные  $x_1, x_2, \dots, x_r$  в этом случае считают базисными, оставшиеся переменные  $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n$  объявляют свободными параметрами и на основе обратного хода получают  $(n - r)$ -параметрическое общее решение системы линейных уравнений.

Важно отметить, что преобразования Гаусса удобнее проводить не с самой системой, а с ее расширенной матрицей. В конце параграфа приведены примеры решения систем линейных уравнений методом Гаусса.

При изучении систем линейных алгебраических уравнений особое внимание уделяют однородным системам. Такие системы всегда совместны. В случае, когда ранг основной матрицы системы совпадает с количеством переменных, однородная система имеет единственное решение, которое может быть только нулевым. Поэтому особый интерес представляют однородные системы, ранг основной матрицы в которых меньше количества переменных. В этом случае система имеет бесконечное множество решений, и среди них, конечно же, есть ненулевые.

Для однородных систем линейных уравнений важно не только знать все множество ее решений, но и определять в этом множестве фундаментальные наборы решений. Забегая вперед, скажем, что множество решений однородной системы уравнений является векторным пространством, базис которого и составляет фундаментальная система. Подробнее теорию векторных пространств мы рассмотрим в соответствующем разделе.

Метод Гаусса применим как к неоднородным, так и к однородным системам линейных уравнений, при использовании этого метода всегда можно ответить на вопрос, является ли система совместной, определенной или неопределенной. Этот метод не имеет ограничений в применении к решению систем линейных уравнений и по праву считается универсальным. Однако в случае определенных систем существуют и другие приемы для получения единственного решения системы. Первый из таких приемов основан на использовании обратной матрицы.

### 1.3.3. Метод обратной матрицы

Мы уже упоминали, что на систему линейных уравнений

[illegible]

можно посмотреть как на матричное уравнение вида  $AX = B$ , где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}.$$







$$\begin{array}{lll} \text{а) } \begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 5, \\ x_1 - x_2 - x_3 = 2, \\ 5x_1 - 3x_2 - x_3 = 10; \end{cases} & \text{б) } \begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 = -3, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 5, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 0; \end{cases} & \text{в) } \begin{cases} x_2 + 3x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 3, \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 - x_4 = 8, \\ 3x_1 + 4x_2 - 9x_3 - 5x_4 = 5. \end{cases} \end{array}$$

*Решение*

а) Для данной системы уравнений выпишем расширенную матрицу и приведем ее к ступенчатому виду, используя элементарные преобразования для матриц:

$$\begin{aligned} AB &= \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & 5 \\ 5 & -3 & -1 & 10 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & -1 & 10 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \text{ (матрица приведена к ступенчатому виду).} \end{aligned}$$

К полученной матрице применим критерий совместности системы:

$$\text{rang} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2, \text{rang} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3.$$

Напомним, что ранг матрицы может быть определен как количество ненулевых строк в матрице ступенчатого вида. В нашем примере основная матрица системы после элементарных преобразований имеет только две ненулевые строки, а расширенная матрица системы имеет три ненулевые строки (строка матрицы считается нулевой, когда все элементы в этой строке равны нулю).

Таким образом, для заданной системы уравнений критерий совместности не срабатывает, поэтому система является несовместной, т.е. у такой системы решений нет.

**Замечание 1.5.** Прямой ход метода Гаусса мы применили к расширенной матрице. Обратный ход в случае несовместной системы не нужен, тем не менее если по преобразованной матрице восстановить систему уравнений, то можно явно увидеть содержащееся в системе противоречие и прийти к выводу о том, что такая система не может иметь решений:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 2, \\ 2x_2 + 4x_3 = -1, \\ 0 = 1. \end{cases}$$

При восстановлении системы мы использовали преобразованную расширенную матрицу, элементы которой определяются коэффициентами при неизвестных  $x_1, x_2, x_3$  (до вертикальной черты) и свободными коэффициентами (после вертикальной черты).

#### Продолжение примера 1.8

б) Для данной системы уравнений выпишем расширенную матрицу и приведем ее к ступенчатому виду, используя элементарные преобразования для матриц:



$$(A|B) = \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & -3 \\ 1 & -2 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right) \sim \text{(нужно получить нули под диагональными элементами,}$$

используя удобные разрешающие элементы, поэтому на первом этапе поменяем

$$\text{местами первую и вторую строки)} \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & -2 & -3 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right) \sim \text{(обнулим элементы первого}$$

столбца под первым, сложив вторую строку с первой, умноженной на  $(-2)$ , и тре-

$$\text{тью с первой, умноженной на } (-3)) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & 5 & -4 & -13 \\ 0 & 7 & -4 & -15 \end{array} \right) \sim \text{(обнулим элемент вто-}$$

рого столбца, расположенный под главной диагональю, умножив вторую строчку

$$\text{на 7, третью на } (-5) \text{ и сложив их)} \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & 5 & -4 & -13 \\ 0 & 0 & 8 & 16 \end{array} \right) \text{ (матрица приведена к сту-}$$

пенчатому виду).

К полученной матрице применим критерий совместности системы:

$$\text{rang} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} = 3, \text{rang} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & 5 & -4 & -13 \\ 0 & 0 & 8 & 16 \end{pmatrix} = 3.$$

Данная система совместна. Применим обратный ход для получения решения. Восстановим систему уравнений по преобразованной расширенной матрице:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 5, \\ 5x_2 - 4x_3 = -13, \\ 8x_3 = 16. \end{cases}$$

Теперь начиная с последнего уравнения, последовательно найдем соответствующие значения переменных  $x_1, x_2, x_3$ :

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2 = 5, \\ 5x_2 - 4 \cdot 2 = -13, \\ x_3 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_2 = 3, \\ 5x_2 = -5, \\ x_3 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - 2 \cdot (-1) = 3, \\ x_2 = -1, \\ x_3 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = -1, \\ x_3 = 2. \end{cases}$$

Решение системы запишем как упорядоченный набор значений переменных в виде  $(1; -1; 2)$ .

**Замечание 1.6.** Установив, что данная система совместна, по найденному значению ранга основной матрицы системы можно было сразу прийти к выводу, что данная система будет иметь единственное решение, в чем мы убедились, применяя обратный ход метода Гаусса. Вообще, *если в совместной системе ранг основной матрицы совпадает с количеством переменных, то такая система всегда будет иметь единственное решение*, которое легко получить, используя обратный ход.



в) Для данной системы уравнений выпишем расширенную матрицу и приведем ее к ступенчатому виду, используя элементарные преобразования для матриц:

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & -1 & 3 \\ 2 & 5 & 1 & -1 & 8 \\ 3 & 4 & -9 & -5 & 5 \end{array} \right) \sim \text{(на месте разрешающего элемента не может стоять ноль,}$$

поэтому необходимо менять строки местами, учитывая и удобство дальнейших пре-

$$\text{образований)} \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 1 & -1 & 8 \\ 3 & 4 & -9 & -5 & 5 \end{array} \right) \sim \text{(обнулим элементы первого столбца, сложив}$$

со второй и третьей строками первую, умноженную на  $(-2)$  и  $(-3)$  соответственно)  $\sim$

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -6 & -2 & -4 \end{array} \right) \sim \text{(далее обнулим второй столбец, вычтем нулевые строчки)}$$

$$\sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

К полученной матрице применим критерий совместности системы:

$$\text{rang} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} = 2, \text{rang} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 2.$$

Данная система совместна. Поскольку ранг основной матрицы меньше количества переменных в системе, то данная система будет иметь бесконечное множество решений. Общее решение сформируем, если используем обратный ход метода Гаусса. Для этого восстановим систему по преобразованной расширенной матрице:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 3, \\ x_2 + 3x_3 + x_4 = 2. \end{cases}$$

Теперь определим, какие переменные можно выбрать базисными, а какие объявить свободными. Количество базисных переменных определяется рангом основной матрицы. В нашем случае ранг равен двум, значит, и базисных переменных в нашей системе две. Оставшиеся после выбора базисных переменные (их тоже две) будут свободными.

Выбрать базисные переменные, используя определение, можно разными способами, количество таких способов выбора не превосходит числа  $C_4^2 = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = 6$ . Однако

вид восстановленной системы тоже может подсказать, какие переменные можно выбирать в качестве базисных: из первого уравнения системы удобно выразить  $x_1$ , из второго —  $x_2$ , их и будем считать базисными (это не противоречит определению: в самом

деле, определитель из коэффициентов при этих переменных  $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ ). Тогда



оставшиеся переменные  $x_3, x_4$  объявим свободными. Дальнейшие преобразования восстановленной системы будут направлены на то, чтобы выразить базисные переменные через свободные:

$$\begin{aligned} \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 3, \\ x_2 + 3x_3 + x_4 = 2 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3 - 2x_2 + x_3 + x_4, \\ x_2 = 2 - 3x_3 - x_4 \end{cases} \Rightarrow (\text{подставили выражение для} \\ x_2 \text{ в первое уравнение}) &\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3 - 2(2 - 3x_3 - x_4) + x_3 + x_4, \\ x_2 = 2 - 3x_3 - x_4 \end{cases} \Rightarrow (\text{раскрыли скобки} \\ \text{в первом уравнении}) &\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3 - 4 + 6x_3 + 2x_4 + x_3 + x_4, \\ x_2 = 2 - 3x_3 - x_4 \end{cases} \Rightarrow (\text{привели подобные}) \Rightarrow \\ \begin{cases} x_1 = -1 + 7x_3 + 3x_4, \\ x_2 = 2 - 3x_3 - x_4. \end{cases} \end{aligned}$$

Полученная система позволяет формировать общее решение системы на основе базисных переменных  $x_1, x_2$ . Для этого свободные переменные считают параметрами:  $x_3 = t_1, x_4 = t_2$  и записывают решение в виде упорядоченного набора значений переменных:  $(-1 + 7t_1 + 3t_2; 2 - 3t_1 - t_2; t_1; t_2)$ .

Если теперь потребовать, чтобы свободные переменные (а значит, и параметры) были равны нулю, то получим одно из базисных решений системы  $(-1; 2; 0; 0)$ , а всего базисных решений данная система имеет не более, чем  $C_4^2 = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = 6$ .

*Ответ:* а) система не имеет решений; б) система имеет единственное решение  $(1; -1; 2)$ ; в) общее решение системы имеет вид  $(-1 + 7t_1 + 3t_2; 2 - 3t_1 - t_2; t_1; t_2)$ ; базисное решение на основе переменных  $x_1, x_2$  имеет вид  $(-1; 2; 0; 0)$ ; общее количество базисных решений не больше 6.

**Замечание 1.7.** Чтобы найти все базисные решения, нужно в восстановленной системе  $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 3, \\ x_2 + 3x_3 + x_4 = 2 \end{cases}$  последовательно осуществить весь перебор возможных базисных переменных (кроме  $x_1, x_2$  это могут быть  $x_1, x_3; x_1, x_4; x_2, x_3; x_2, x_4; x_3, x_4$ ), а соответствующие свободные переменные считать равными нулю:

$$\begin{aligned} \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 3, \\ x_2 + 3x_3 + x_4 = 2 \end{cases} & (\text{базисные } x_1, x_3, x_2 = 0, x_4 = 0) \Rightarrow \left(\frac{11}{3}; 0; \frac{2}{3}; 0\right); \\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 3, \\ x_2 + 3x_3 + x_4 = 2 \end{cases} & (\text{базисные } x_1, x_4, x_2 = 0, x_3 = 0) \Rightarrow (5; 0; 0; 2); \\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 3, \\ x_2 + 3x_3 + x_4 = 2 \end{cases} & (\text{базисные } x_2, x_3, x_1 = 0, x_4 = 0) \Rightarrow \left(0; \frac{11}{7}; \frac{1}{7}; 0\right); \\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 3, \\ x_2 + 3x_3 + x_4 = 2 \end{cases} & (\text{базисные } x_2, x_4, x_1 = 0, x_3 = 0) \Rightarrow \left(0; \frac{5}{3}; 0; \frac{1}{3}\right); \\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 3, \\ x_2 + 3x_3 + x_4 = 2 \end{cases} & (\text{базисные } x_3, x_4, x_1 = 0, x_2 = 0) \Rightarrow \left(0; 0; \frac{5}{2}; -\frac{11}{2}\right). \end{aligned}$$



### Пример 1.9

Для данной однородной системы сформируем общее решение на основе хотя бы одной фундаментальной системы:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$$

*Решение*

Прямой ход метода Гаусса для однородных систем использует основную матрицу системы. Поэтому выпишем ее и приведем к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{-2 \cdot R_1 \rightarrow R_2 \\ -3 \cdot R_1 \rightarrow R_3}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & -5 & 5 & -7 \\ 0 & -5 & 5 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow{-1 \cdot R_2 \rightarrow R_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & -5 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & -5 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Имеем  $\text{rang} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & -5 & 5 & -7 \end{pmatrix} = 2 < 4$ , поэтому система имеет бесконечное множе-

ство решений, среди которых есть ненулевые. Описать все множество решений данной однородной системы должно общее решение, сформировать которое можно, как используя обратный ход метода Гаусса, так и опираясь на фундаментальную систему решений. Определим хотя бы одну фундаментальную систему решений для данной однородной системы линейных уравнений. Для этого по преобразованной матрице восстановим систему, а затем выразим базисные переменные через свободные:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ -5x_2 + 5x_3 - 7x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow (\text{базисные переменные} - x_1, x_2, \text{свободные} - x_3, x_4) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 + 2x_3 - 3x_4, \\ -5x_2 = -5x_3 + 7x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 + 2x_3 - 3x_4, \\ x_2 = x_3 - \frac{7}{5}x_4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 = -2\left(x_3 - \frac{7}{5}x_4\right) + 2x_3 - 3x_4, \\ x_2 = x_3 - \frac{7}{5}x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3 + \frac{14}{5}x_4 + 2x_3 - 3x_4, \\ x_2 = x_3 - \frac{7}{5}x_4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{1}{5}x_4, \\ x_2 = x_3 - \frac{7}{5}x_4. \end{cases}$$

Фундаментальная система содержит столько решений, сколько свободных переменных в системе. В нашем примере их две, следовательно, фундаментальная система состоит из двух решений. Чтобы ее получить, можно воспользоваться таблицей, при заполнении которой нужно учитывать, что возможные значения свободных переменных должны составить единичную матрицу:

Решения	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$
1-е			1	0
2-е			0	1



Оставшиеся свободными клетки таблицы заполняются после решения приведенной системы с учетом дополнительных условий для первого и второго решения соответственно:

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{1}{5}x_4, \\ x_2 = x_3 - \frac{7}{5}x_4 \end{cases} \Rightarrow (\text{для первого решения } x_3 = 1, x_4 = 0) \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{1}{5}x_4, \\ x_2 = x_3 - \frac{7}{5}x_4 \end{cases} \Rightarrow (\text{для второго решения } x_3 = 0, x_4 = 1) \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{5}, \\ x_2 = -\frac{7}{5}. \end{cases}$$

Заполненная таблица примет вид

Решения	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$
1-е	0	1	1	0
2-е	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{7}{5}$	0	1

Обозначим  $e_1 = (0; 1; 1; 0)$ ,  $e_2 = \left(-\frac{1}{5}; -\frac{7}{5}; 0; 1\right)$ . Это и есть фундаментальная система решений на основе базисных переменных  $x_1, x_2$ . Общее решение данной однородной системы уравнений на основе  $e_1, e_2$  формируется с использованием параметров  $t_1, t_2$  в виде линейной комбинации

$$t_1 e_1 + t_2 e_2,$$

которая легко преобразуется:

$$\begin{aligned} t_1 e_1 + t_2 e_2 &= t_1(0; 1; 1; 0) + t_2\left(-\frac{1}{5}; -\frac{7}{5}; 0; 1\right) = \\ &= (0; t_1; t_1; 0) + \left(-\frac{1}{5}t_2; -\frac{7}{5}t_2; 0; t_2\right) = \left(-\frac{1}{5}t_2; t_1 - \frac{7}{5}t_2; t_1; t_2\right). \end{aligned}$$

Ответ: фундаментальная система решений на основе базисных переменных  $x_1, x_2$  имеет вид  $e_1 = (0; 1; 1; 0)$ ,  $e_2 = \left(-\frac{1}{5}; -\frac{7}{5}; 0; 1\right)$ ; общее решение имеет вид  $\left(-\frac{1}{5}t_2; t_1 - \frac{7}{5}t_2; t_1; t_2\right)$ .

*Замечание 1.8.* Именно такое общее решение данной системы мы получим, если для преобразованной системы  $\begin{cases} x_1 = -\frac{1}{5}x_4, \\ x_2 = x_3 - \frac{7}{5}x_4 \end{cases}$  обратный ход метода Гаусса доведем до конца.

#### Пример 1.10

Найдем решение системы уравнений, используя обратную матрицу:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 = -3, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 5, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$



*Решение*

Данная система в матричной форме запишется как уравнение вида  $AX = B$ , где

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}; X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Решение системы будем искать по формуле  $X = A^{-1}B$ .

1. Используя известный алгоритм, найдем обратную матрицу  $A^{-1}$  (подробные вычисления мы предлагаем провести самостоятельно):

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -8; A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}; \tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 4 & 4 & -4 \\ 7 & 1 & -5 \end{pmatrix};$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-8} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 4 & 4 & -4 \\ 7 & 1 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{7}{8} & -\frac{1}{8} & \frac{5}{8} \end{pmatrix}.$$

$$\text{Проверка: } A^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{7}{8} & -\frac{1}{8} & \frac{5}{8} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Теперь найдем решение системы:  $X = A^{-1}B \Rightarrow$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{7}{8} & -\frac{1}{8} & \frac{5}{8} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{-8} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 4 & 4 & -4 \\ 7 & 1 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{-8} \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 8 \\ -16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Поэтому } \begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = -1, \\ x_3 = 2 \end{cases} \text{ и решение имеет вид } (1; -1; 2).$$

*Ответ:* система имеет единственное решение  $(1; -1; 2)$ .

---

### Пример 1.11

Найдем решение системы уравнений по формулам Крамера:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 = -3, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 5, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$



Решение

Вычислим главный и замещенные определители:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -8; \Delta_1 = \begin{vmatrix} -3 & 1 & -2 \\ 5 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -8;$$
$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -3 & -2 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 8; \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 5 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -16.$$

Теперь воспользуемся формулами Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-8}{-8} = 1, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{8}{-8} = -1, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-16}{-8} = 2.$$

Решение системы запишем в виде упорядоченного набора значений переменных (1; -1; 2).

Ответ: система имеет единственное решение (1; -1; 2).

## 1.4. Комплексные числа

Комплексные числа — это традиционный раздел алгебры. Интересно и важно применение комплексных чисел для решения дифференциальных уравнений, которые широко используются в фундаментальных экономических исследованиях.

### 1.4.1. Действия над комплексными числами в алгебраической форме

**Определение 1.9.** *Комплексное число* — это число вида  $\alpha = a + bi$ , где  $a, b \in \mathbf{R}$ ,  $a = \operatorname{Re} \alpha$  — действительная часть числа;  $b = \operatorname{Im} \alpha$  — мнимая часть;  $i$  — мнимая единица,  $i^2 = -1$ . Заметим, что мнимая часть комплексного числа  $b$  — это коэффициент (множитель) при  $i$  без самой мнимой единицы. Запись  $\alpha = a + bi$  называется *алгебраической формой записи* комплексного числа. Если мнимая часть числа  $b = 0$ , то  $\alpha = a$  — действительное число, или комплексное число, мнимая часть которого равна 0. Таким образом, множество комплексных чисел  $\mathbf{C}$  является расширением всех других основных числовых множеств, т.е. все числа являются элементами множества комплексных чисел.

Пусть даны два комплексных числа  $\alpha = a + bi$ ,  $\beta = c + di$ .

Два комплексных числа называются *равными*, если равны их действительные и мнимые части, т.е.  $\alpha = \beta$ , если одновременно  $a = c$ ,  $b = d$ .

Чтобы найти *сумму* двух комплексных чисел, нужно сложить их действительные и мнимые части:

$$\alpha + \beta = (a + c) + i(b + d).$$

Для операции сложения выполняются следующие свойства:

- 1) коммутативность (перестановочность) —  $\alpha + \beta = \beta + \alpha$ ;
- 2) ассоциативность (сочетательность) —  $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$ ;



3) дистрибутивность (распределительность) —  $(\alpha + \beta)\gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma$ , где  $\alpha, \beta, \gamma$  — любые комплексные числа.

Очевидно, что сумма комплексных чисел тоже есть комплексное число.

Произведение комплексных чисел есть комплексное число, равное

$$\alpha\beta = (a + bi)(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = ac - bd + i(ad + bd).$$

Для операции умножения выполняются следующие свойства:

1) коммутативность (перестановочность) —  $\alpha\beta = \beta\alpha$ ;

2) ассоциативность (сочетательный закон) —  $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$ .

Доказательство выполнимости свойств сложения и умножения комплексных чисел полностью опирается на выполнение этих свойств для действительных чисел.

Операция возведения в степень комплексного числа в алгебраической форме не рациональна для общего случая. Рассмотрим частный случай  $\alpha^n = i^n$ , где  $n \in \mathbb{N}$ . Будем возводить  $i$  последовательно в различные натуральные степени:

$$i^1 = i, i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1, i^5 = i, i^6 = -1, i^7 = -i, i^8 = 1, \dots$$

Нетрудно заметить, что значения повторяются через каждые четыре шага и результат возведения в степень зависит от остатка при делении  $n$  на 4. Таким образом, можно записать

$$i^n = \begin{cases} i, & \text{если } n = 4k + 1, \\ -1, & \text{если } n = 4k + 2, \\ -i, & \text{если } n = 4k + 3, \\ 1, & \text{если } n = 4k. \end{cases}$$

Операция комплексного сопряжения состоит в следующем.

Число  $\bar{\alpha} = a - bi$  называется комплексно-сопряженным к числу  $\alpha = a + bi$ . Комплексно-сопряженные числа отличаются только знаком при мнимой части.

Свойства операции комплексного сопряжения:

1) сопряженное к сопряженному комплексному числу равно самому комплексному числу —  $\overline{\bar{\alpha}} = \overline{a - bi} = a + bi = \alpha$ .

2) произведение комплексно-сопряженных чисел есть неотрицательное вещественное число —  $\alpha\bar{\alpha} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$ .

Модуль комплексного числа определяется как корень из произведения сопряженных:

$$|\alpha| = \sqrt{\alpha\bar{\alpha}} = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Операция деления комплексных чисел состоит в следующем. Чтобы поделить комплексные числа в алгебраической форме, нужно числитель и знаменатель домножить на число, сопряженное к знаменателю, и выполнить действия по приведению подобных:

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + i \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}.$$



### 1.4.2. Тригонометрическая и экспоненциальная формы комплексного числа

Графически на плоскости комплексное число  $\alpha = a + bi$  изображается в виде точки с координатами  $(a; b)$  (рис. 1.1).

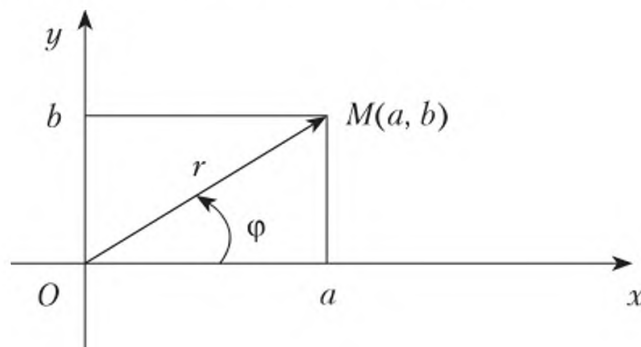


Рис. 1.1. Комплексное число на плоскости

**Определение 1.10.** Расстояние от начала координат до точки, изображающей число, называется *модулем* ( $r > |\alpha|$ ), а угол между положительным направлением оси  $Ox$  и вектором до точки — *аргументом* ( $\varphi$ ) комплексного числа. Из прямоугольного треугольника  $OAB$  выводим

$$r = |\alpha| = \sqrt{a^2 + b^2}; \quad \cos \varphi = \frac{a}{r}; \quad \sin \varphi = \frac{b}{r}; \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a},$$

или

$$a = r \cos \varphi; \quad b = r \sin \varphi. \quad (1.1)$$

Подставив последние выражения в алгебраическую форму комплексного числа, получим *тригонометрическую форму*

$$\alpha = a + bi = r(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Таким образом, используя формулы (1.1), можно переводить комплексное число из алгебраической формы в тригонометрическую и наоборот.

Кроме того, для любого действительного  $\varphi$  верна формула Эйлера [2]

$$\cos \varphi + i \sin \varphi = e^{i\varphi}.$$

Отсюда

$$\alpha = a + bi = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = re^{i\varphi}.$$

Такая форма записи называется *экспоненциальной формой* записи комплексного числа.

В тригонометрической форме удобно умножать, возводить в степень, делить комплексные числа, а также извлекать корень  $n$ -й степени, а экспоненциальная форма используется для краткости записи.

Пусть даны два комплексных числа в тригонометрической форме:

$$\alpha = r_1(\cos \varphi + i \sin \varphi) = r_1 e^{i\varphi};$$

$$\beta = r_2(\cos \psi + i \sin \psi) = r_2 e^{i\psi}.$$

Дальнейшие правила выводятся с использованием тригонометрических формул.



**Правило умножения.** Результат произведения двух комплексных чисел есть комплексное число, модуль которого равен произведению модулей сомножителей, а аргумент — сумме аргументов сомножителей:

$$\begin{aligned}\alpha\beta &= r_1(\cos\varphi + i\sin\varphi) \cdot r_2(\cos\psi + i\sin\psi) = \\ &= r_1r_2[\cos(\varphi + \psi) + i\sin(\varphi + \psi)] = r_1r_2e^{i(\varphi + \psi)}.\end{aligned}$$

**Правило возведения в степень.** Для того чтобы комплексное число возвести в натуральную степень  $n$ , нужно модуль числа возвести в эту степень, а аргумент умножить на эту степень:

$$\alpha^n = r_1^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = r_1^n e^{in\varphi}.$$

**Правило деления.** Результат деления двух комплексных чисел есть комплексное число, модуль которого равен отношению модулей делимого и делителя, а аргумент равен разности аргументов делимого и делителя:

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{r_1(\cos\varphi + i\sin\varphi)}{r_2(\cos\psi + i\sin\psi)} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi - \psi) + i\sin(\varphi - \psi)] = \frac{r_1}{r_2}e^{i(\varphi - \psi)}.$$

**Правило извлечения корня.** Корень степени  $n$  из комплексного числа имеет  $n$  различных значений, равных

$$\begin{aligned}\sqrt[n]{\alpha} &= \sqrt[n]{r_1(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r_1} \left( \cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right) = \\ &= \sqrt[n]{r_1} e^{i\frac{\varphi + 2\pi k}{n}}, \quad k = 1, \dots, n.\end{aligned}$$

Особый интерес представляют корни  $n$ -й степени из единицы, т.е. решения уравнения  $x^n - 1 = 0$ . Запишем единицу в тригонометрической форме:

$$1 = 1 + i0 = \cos 0 + i\sin 0;$$

$$\sqrt[n]{1} = \sqrt[n]{(\cos 0 + i\sin 0)} = \cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

При  $n = 3$  получаем

$$\sqrt[3]{1} = \sqrt[3]{(\cos 0 + i\sin 0)} = \cos\frac{2\pi k}{3} + i\sin\frac{2\pi k}{3}, \quad k = 0, 1, 2.$$

Выпишем все значения корня 3-й степени из единицы:

$$\sqrt[3]{1} = \begin{cases} \alpha_1 = 1, k = 0, \\ \alpha_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, k = 1, \\ \alpha_3 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}, k = 2. \end{cases}$$

На рис. 1.2 изображены корни 3-й степени из единицы. Они делят единичную окружность на три равные части (корни  $n$ -й степени на  $n$  равных частей). Множество корней 3-й степени из единицы замкнуто относительно операции умножения, имеется единичный элемент 1. Операция умножения



ассоциативна и обратима, еще и коммутативна. Следовательно, множество  $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$  корней 3-й степени из 1 образует циклическую мультипликативную абелеву группу.

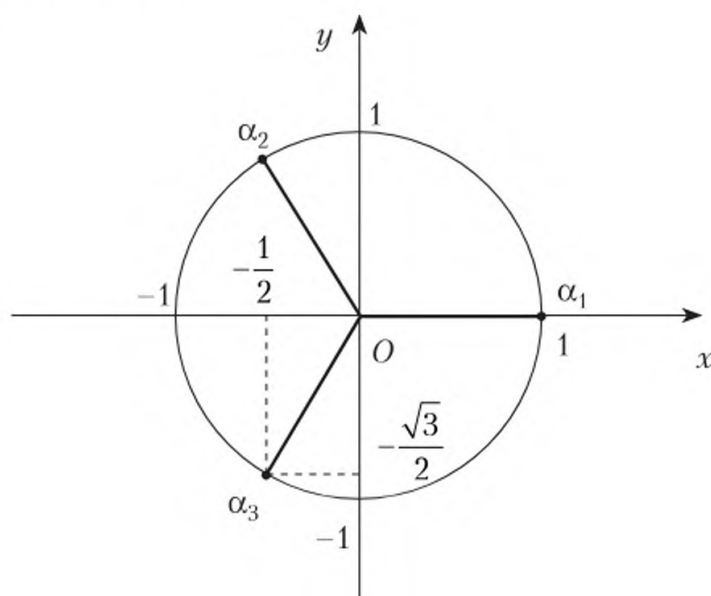


Рис. 1.2. Корни 3-й степени из единицы

#### Пример 1.12

Найдем действительную и мнимую части комплексных чисел:

$$\alpha_1 = 3 + 6i, \alpha_2 = -3i, \alpha_3 = 14.$$

*Решение*

$$\operatorname{Re} \alpha_1 = 3, \operatorname{Im} \alpha_1 = 6;$$

$$\operatorname{Re} \alpha_2 = 0, \operatorname{Im} \alpha_2 = -3;$$

$$\operatorname{Re} \alpha_3 = 14, \operatorname{Im} \alpha_3 = 0.$$

#### Пример 1.13

Произведем действия с комплексными числами в алгебраической форме:

$$(1+i)(2+i) + \frac{10}{1+2i} + (-1-i)^2.$$

*Решение*

Решим задачу по действиям:

$$(1+3i)(2-i) = 1 \cdot 2 - 1 \cdot i + 3i \cdot 2 - 3i \cdot i = 2 - i + 6i + 3 = 5 + 5i;$$

$$\frac{10}{1-2i} = \frac{10(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = \frac{10(1+2i)}{5} = 2 + 4i;$$

$$(-1-i)^2 = (-1)^2 - 2 \cdot (-1) \cdot i + i^2 = 2i.$$

Окончательно получим

$$(1+i)(2+i) + \frac{10}{1+2i} + (-1-i)^2 = 5 + 5i + 2 + 4i + 2i = 7 + 11i.$$

*Ответ:*  $7 + 11i$ .



Произведем вычисления, пользуясь правилами действий над комплексными числами в тригонометрической форме:

$$\frac{(\sqrt{3}-i)(\cos \varphi - i \sin \varphi)}{(1+i)(\cos \varphi + i \sin \varphi)}.$$

*Решение*

1. Найдем модуль и аргумент числа  $\sqrt{3}-i$ :

$$a = \sqrt{3}, b = -1, r = |\alpha| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = 2,$$

$$\cos \varphi = \frac{a}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}; \sin \varphi = \frac{b}{r} = \frac{-1}{2}; \varphi = -\frac{\pi}{6};$$

$$\sqrt{3}-i = 2 \left[ \cos \left( -\frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left( -\frac{\pi}{6} \right) \right].$$

2. Найдем модуль и аргумент числа  $1+i$ :

$$a = 1, b = 1, r = |\alpha| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2},$$

$$\cos \varphi = \frac{a}{r} = \frac{\sqrt{2}}{2}; \sin \varphi = \frac{b}{r} = \frac{\sqrt{2}}{2}; \varphi = \frac{\pi}{4};$$

$$1+i = \sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right).$$

3. Произведем умножение в числителе:

$$\begin{aligned} (\sqrt{3}-i)(\cos \varphi - i \sin \varphi) &= 2 \left[ \cos \left( -\frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left( -\frac{\pi}{6} \right) \right] (\cos \varphi - i \sin \varphi) = \\ &= 2 \left[ \cos \left( \varphi - \frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left( \varphi - \frac{\pi}{6} \right) \right]. \end{aligned}$$

4. Произведем умножение в знаменателе:

$$\begin{aligned} (1+i)(\cos \varphi + i \sin \varphi) &= \sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) (\cos \varphi + i \sin \varphi) = \\ &= \sqrt{2} \left[ \cos \left( \varphi + \frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left( \varphi + \frac{\pi}{4} \right) \right]. \end{aligned}$$

5. В результате имеем

$$\begin{aligned} \frac{(\sqrt{3}-i)(\cos \varphi - i \sin \varphi)}{(1+i)(\cos \varphi + i \sin \varphi)} &= \frac{2 \left[ \cos \left( \varphi - \frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left( \varphi - \frac{\pi}{6} \right) \right]}{\sqrt{2} \left[ \cos \left( \varphi + \frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left( \varphi + \frac{\pi}{4} \right) \right]} = \\ &= \sqrt{2} \left[ \cos \left( \varphi - \frac{\pi}{6} - \left( \varphi + \frac{\pi}{4} \right) \right) + i \sin \left( \varphi - \frac{\pi}{6} - \left( \varphi + \frac{\pi}{4} \right) \right) \right] = \\ &= \sqrt{2} \left[ \cos \left( -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left( -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} \right) \right] = \sqrt{2} \left[ \cos \left( -\frac{5\pi}{12} \right) + i \sin \left( -\frac{5\pi}{12} \right) \right]. \end{aligned}$$

Ответ:  $\sqrt{2} \left[ \cos \left( -\frac{5\pi}{12} \right) + i \sin \left( -\frac{5\pi}{12} \right) \right].$



Найдем все значения корня  $\sqrt[5]{32}$ .

*Решение*

Представим 32 в тригонометрической форме:  $32 = 32(\cos 0 + i \sin 0)$ .

Применим формулу извлечения корня  $\sqrt[n]{\alpha} = \sqrt[n]{r_1} \left( \cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right)$ :

$$\sqrt[5]{32} = \sqrt[5]{32} \left( \cos \frac{0 + 2\pi k}{5} + i \sin \frac{0 + 2\pi k}{5} \right) = 2 \left( \cos \frac{2\pi k}{5} + i \sin \frac{2\pi k}{5} \right), k = 0, 1, \dots, 4.$$

Ответ:  $2 \left( \cos \frac{2\pi k}{5} + i \sin \frac{2\pi k}{5} \right), k = 0, 1, \dots, 4.$

### Задания для самостоятельной работы

**1.1.** Вычислите  $G$ , если даны  $A, B, C, D$ :

а)  $G = (A^T + 2B)(2C - 5D)$ ,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 3 \\ 5 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 1 & -3 \\ 4 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix};$$

б)  $G = (A - 2B^T)(C + 3D)$ ,

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 2 & -1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -3 \\ 2 & 5 & -1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 10 & 5 & -1 \\ -2 & 3 & -3 \end{pmatrix};$$

в)  $G = (2A + B)^T(3C - 4D)$ ,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 11 & -2 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & -3 & 5 \\ 5 & 3 & 10 & -2 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -5 & -4 \\ 2 & 6 & 11 & -1 \end{pmatrix};$$

г)  $G = (3A - B)(2C + 3D)^T$ ,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & -5 \\ 2 & 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -3 & -2 \\ 1 & 1 & 10 & -1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & -5 \\ 3 & 1 & -2 & -1 \\ 5 & 4 & 0 & -4 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & -3 & -1 \end{pmatrix};$$

д)  $G = (2A + 3B)(C - 2D^T)$ ,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & -3 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -2 \\ -4 & 0 & -1 \end{pmatrix};$$



$$\text{е) } G = 2(A - B)(3C + 2D)^T,$$

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -3 \\ -1 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \\ 1 & 4 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & -4 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix};$$

$$\text{ж) } G = 3(A + B)^T(2C - D),$$

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -4 \\ -3 & 5 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -1 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\text{з) } G = 5(A^T - 2B)(C + 2D),$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -1 & -1 \\ 4 & 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 1 \\ -1 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & -4 \\ 4 & -3 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}.$$

**1.2.** Вычислите значение многочлена  $f(x)$  от матрицы  $A$ :

$$\text{а) } f(x) = 2x^3 + x + 5, A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } f(x) = x^3 + 2x - 4, A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\text{в) } f(x) = x^3 + x^2 + x + 1, A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}; \quad \text{г) } f(x) = 2x^2 + x - 3, A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\text{д) } f(x) = x^3 - x^2 - 1, A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \text{е) } f(x) = x^2 - x^3 + 1 - x, A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\text{ж) } f(x) = 5x^2 - x - 5, A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{з) } f(x) = 3x^4 - x^2 + 3, A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

**1.3.** Решите уравнение или неравенство:

$$\text{а) } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 \\ 1 & 1 & 2-x \end{vmatrix} = 0; \quad \text{б) } \begin{vmatrix} x^2 & 4 & 9 \\ x & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \geq 0; \quad \text{в) } \begin{vmatrix} 1 & x & 3 \\ x+2 & 5 & 2x+2 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 0;$$

$$\text{г) } \begin{vmatrix} 1 & 2 & x-2 \\ 4 & x & 6 \\ 7 & 8 & 2x-1 \end{vmatrix} \leq 0; \quad \text{д) } \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & 3x-1 & 3 \\ 2x-1 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 1; \quad \text{е) } \begin{vmatrix} 3 & x & 3-2x \\ 8 & 2x-1 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} \geq 0;$$

$$\text{ж) } \begin{vmatrix} 2 & x & 2 \\ 1 & 2 & x+1 \\ 1 & 2x-1 & 6 \end{vmatrix} = 2; \quad \text{з) } \begin{vmatrix} 2 & x+2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 5 & -3 & x \end{vmatrix} > 0.$$



1.4. Вычислите определитель:

$$\text{а) } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}; \quad \text{б) } \begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 & 2 \\ -5 & 8 & 2 & 7 \\ 4 & -5 & 3 & -2 \\ -7 & 8 & 4 & 5 \end{vmatrix}; \quad \text{в) } \begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 & 2 \\ 7 & 6 & 3 & 7 \\ 5 & 4 & 3 & 5 \\ -5 & -6 & -5 & -4 \end{vmatrix};$$

$$\text{г) } \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}; \quad \text{д) } \begin{vmatrix} 2 & 4 & 8 & 0 \\ 4 & 8 & 0 & 27 \\ 8 & 0 & 27 & 9 \\ 0 & 27 & 9 & 3 \end{vmatrix}; \quad \text{е) } \begin{vmatrix} -3 & 2 & 4 & 0 \\ -2 & 3 & 6 & 9 \\ -4 & 0 & 3 & 9 \\ -6 & 2 & 3 & 0 \end{vmatrix};$$

$$\text{ж) } \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 3 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ 5 & -5 & 2 & 3 \\ 3 & -4 & 4 & 3 \end{vmatrix}; \quad \text{з) } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 16 & 9 & 4 & 1 \\ 64 & 27 & 8 & 1 \end{vmatrix}; \quad \text{и) } \begin{vmatrix} 0 & 3 & 5 & 7 \\ -3 & 0 & 3 & 5 \\ -5 & -3 & 0 & 3 \\ -7 & -5 & -3 & 0 \end{vmatrix}.$$

1.5. Найдите матрицу, обратную к матрице  $A$ :

$$\text{а) } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & 4 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}; \quad \text{в) } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\text{г) } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}; \quad \text{д) } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -7 & 3 \end{pmatrix}; \quad \text{е) } A = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 1 \\ 5 & 6 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix};$$

$$\text{ж) } A = \begin{pmatrix} -6 & -1 & 4 \\ -4 & -4 & 3 \\ 3 & -2 & -2 \end{pmatrix}; \quad \text{з) } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

1.6. Найдите ранг матрицы:

$$\text{а) } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 & 2 & 5 \\ -1 & 0 & 4 & 8 & 3 \\ 3 & 6 & 10 & -4 & 7 \end{pmatrix}; \quad \text{в) } A = \begin{pmatrix} 0 & 5 & -1 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 6 \\ -1 & -3 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 4 & 6 \end{pmatrix};$$

$$\text{г) } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 5 & 1 & 11 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}; \quad \text{д) } A = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 3 & 5 & 1 \\ -3 & 2 & 4 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 4 & 3 & 2 \\ -3 & 8 & 7 & 6 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

1.7. Определите максимальное число линейно независимых строк матрицы:

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & -1 & 4 \\ -1 & 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & -6 & 5 \end{pmatrix}; \quad \text{в) } \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 7 & 8 \\ 1 & -6 & 1 \\ 7 & -2 & 15 \end{pmatrix};$$



$$\Gamma) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 5 \\ 3 & -6 & 5 & 6 \end{pmatrix}; \quad \Delta) \begin{pmatrix} 0 & 3 & -5 & -3 & 3 \\ 4 & 3 & 1 & 7 & 5 \\ 2 & 0 & 3 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

**1.8.** Найдите решение систем уравнений методом Гаусса (в случае неопределенной системы найдите общее решение и все базисные решения):

$$\text{а) } \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 5, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 6, \\ 6x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 6x_4 = 1; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = -1, \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 = -3; \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = 2, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_4 = 3; \end{cases} \quad \text{г) } \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 7, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 3, \\ 4x_1 + x_2 - x_3 = 16; \end{cases}$$

$$\text{д) } \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6, \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 18, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 4, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -8; \end{cases} \quad \text{е) } \begin{cases} -6x_1 + 9x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4, \\ -2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 2, \\ -4x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 3; \end{cases}$$

$$\text{ж) } \begin{cases} 5x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 7, \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 1, \\ x_1 - 3x_2 - 6x_3 + 5x_4 = 0; \end{cases} \quad \text{з) } \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = -4, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 7, \\ -x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 = 14, \\ 5x_1 - 3x_2 - x_3 - 2x_4 = -10. \end{cases}$$

**1.9.** Для данной однородной системы сформируйте общее решение на основе хотя бы одной фундаментальной системы решений:

$$\text{а) } \begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 + 3x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 - 5x_4 + 6x_5 = 0; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0; \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 + 5x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 + 16x_2 - 6x_3 + 4x_4 + 7x_5 = 0; \end{cases} \quad \text{г) } \begin{cases} 3x_1 + 5x_2 - 4x_3 + 2x_4 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 - 6x_3 + 3x_4 = 0, \\ 11x_1 + 17x_2 - 8x_3 + 4x_4 = 0; \end{cases}$$

$$\text{д) } \begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ 5x_1 + 7x_2 + 6x_3 + 4x_4 + 3x_5 = 0, \\ 7x_1 + 9x_2 + 9x_3 + 6x_4 + 5x_5 = 0, \\ 4x_1 + 8x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0; \end{cases} \quad \text{е) } \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 - 5x_3 - 3x_4 + x_5 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 - x_5 = 0; \end{cases}$$

$$\text{ж) } \begin{cases} 8x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 = 0, \\ 3x_1 - 3x_2 - 2x_3 + x_4 - 3x_5 = 0, \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 5x_5 = 0; \end{cases} \quad \text{з) } \begin{cases} 5x_1 + 7x_2 + 6x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0, \\ 8x_1 + 9x_2 + 9x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 0, \\ 7x_1 + x_2 + 6x_3 - 2x_4 + 6x_5 = 0, \\ 4x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 + 4x_5 = 0. \end{cases}$$



**1.10.** Найдите решение системы линейных уравнений по формулам Крамера и с помощью обратной матрицы:

$$\text{а) } \begin{cases} 2x + y - z = 2, \\ -x - y + 3z = 1, \\ 4x - z = 12; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x + 2y + z = 8, \\ -2x + 3y - 3z = -5, \\ 3x - 4y + 5z = 10; \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} 3x + 2y + z = -8, \\ 2x + 3y + z = -3, \\ 2x + y + 3z = -1; \end{cases} \quad \text{г) } \begin{cases} -6x - y + 4z = 1, \\ -4x - 4y + 3z = -3, \\ 3x - 2y - 2z = -3; \end{cases}$$

$$\text{д) } \begin{cases} 3x + 2y + z = 1, \\ 6x + 5y + 4z = -2, \\ 9x + 8y + 7z = 3; \end{cases} \quad \text{е) } \begin{cases} 2x - 3y - z = -6, \\ 3x + 4y + 3z = -5, \\ x + y + z + 2 = 0; \end{cases}$$

$$\text{ж) } \begin{cases} 6x + 4y + z = -17, \\ 5x + 6y + 2z = -10, \\ x + y - z + 1 = 0; \end{cases} \quad \text{з) } \begin{cases} -2x + y + 6 = 0, \\ x - 2y - z = 5, \\ 3x + 4y - 2z = 13. \end{cases}$$

**1.11.** Произведите действия с комплексными числами в алгебраической форме:

$$\text{а) } (1+i)(2+i) + \frac{8}{1+2i}; \quad \text{б) } \frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}} - (1-i)^2; \quad \text{в) } \frac{(1+2i)^2 - (1-i)^3}{(3+2i)^3 - (2+i)^2}.$$

**1.12.** Произведите вычисления, пользуясь правилами действий над комплексными числами в тригонометрической форме:

$$\text{а) } (1+i\sqrt{3})(i+1)(\cos \varphi + i \sin \varphi); \quad \text{б) } \frac{(1-i\sqrt{3})(\cos \varphi + i \sin \varphi)}{2(1-i)(\cos \varphi - i \sin \varphi)}; \quad \text{в) } (1+i)^{25}.$$

**1.13.** Найдите все значения корня:

$$\text{а) } \sqrt[3]{i}; \quad \text{б) } \sqrt[4]{-4}; \quad \text{в) } \sqrt[6]{-27}.$$



## Глава 2

# ЭЛЕМЕНТЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

---

В результате изучения главы 2 студент должен:

**знать**

- понятия векторов второго и третьего порядков,  $n$ -мерного вектора и действий над векторами;

- факты теории прямых и плоскостей;

- определения и свойства кривых и поверхностей второго порядка;

**уметь**

- решать задачи с векторами на плоскости и в пространстве;

- решать типовые задачи на прямые и плоскости;

**владеть**

- понятийным аппаратом и основными методами векторной алгебры и аналитической геометрии;

- навыками применения современного математического аппарата для решения прикладных задач экономики и информатики.

---

*Аналитическая геометрия* — раздел геометрии, в котором геометрические фигуры и их свойства исследуются с помощью средств алгебры.

### 2.1. Линейные пространства

Линейные, или векторные, пространства — это раздел математики, тесно связанный с линейной алгеброй и аналитической геометрией, в котором изучаются пространства векторов произвольной размерности  $n$ . Начнем изучение линейных пространств с двумерного случая.

#### 2.1.1. Векторы на плоскости и в пространстве.

##### Операции над векторами.

**Определение 2.1.** Отрезок называется *направленным*, если учитывается порядок задания его концов. Если для отрезка  $AB$  точка  $A$  определена как начало, а точка  $B$  — как конец, то направленный отрезок с таким порядком задания обозначают  $\overrightarrow{AB}$  и изображают как  $A \longrightarrow B$ .

Если концы  $A$  и  $B$  совпадают, то такой отрезок называют *нулевым* направленным отрезком и обозначают  $\overrightarrow{AA}$ .

**Определение 2.2.** Длиной направленного отрезка  $|\overrightarrow{AB}|$  считают длину отрезка  $AB$ :  $|\overrightarrow{AB}| = |AB|$ . Длина нулевого направленного отрезка считается равной нулю.



**Определение 2.3.** Ненулевые отрезки  $\overline{AB}$  и  $\overline{CD}$  называются *одинаково направленными* (сонаправленными), если отрезки  $AB$  и  $CD$  параллельны и точки  $B$  и  $D$  лежат по одну сторону от прямой  $AC$  (рис. 2.1).

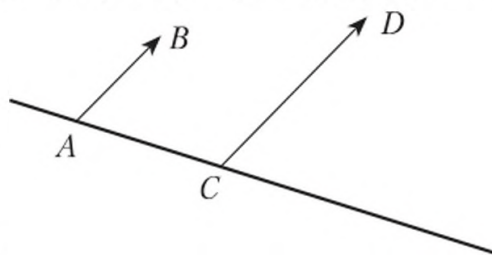


Рис. 2.1. Сонаправленные отрезки

Сонаправленность отрезков обозначают  $\overline{AB} \uparrow \uparrow \overline{CD}$ .

**Определение 2.4.** Ненулевые отрезки  $\overline{AB}$  и  $\overline{CD}$  называются *противоположно направленными*, если отрезки  $AB$  и  $CD$  параллельны и точки  $B$  и  $D$  лежат по разные стороны от прямой  $AC$  (рис. 2.2).

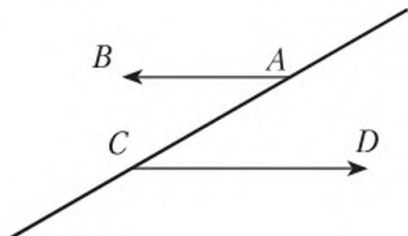


Рис. 2.2. Противоположно направленные отрезки

Противоположную направленность отрезков обозначают  $\overline{AB} \uparrow \downarrow \overline{CD}$ .

**Определение 2.5.** Вектором (свободным вектором) называют множество сонаправленных отрезков, имеющих одинаковую длину. Обозначают векторы малыми латинскими буквами  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ , ... .

Из школьного курса математики известно, что векторы можно складывать, вычитать, умножать на число. В результате этих операций образуются новые векторы, порядок построения которых описан в определениях.

**Определение 2.6.** Суммой векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  называется вектор  $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ , начало которого совпадает с началом вектора  $\vec{a}$ , а конец — с концом вектора  $\vec{b}$ , при условии что конец вектора  $\vec{a}$  совпадает с началом вектора  $\vec{b}$  (рис. 2.3).

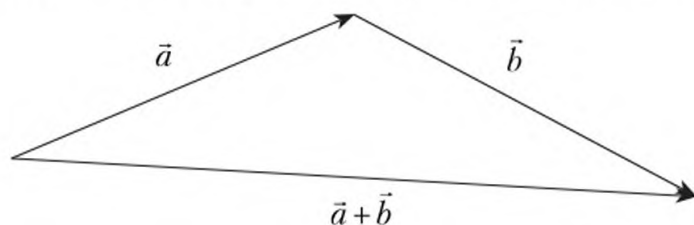


Рис. 2.3. Сумма векторов

**Определение 2.7.** Разностью векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  называется вектор  $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$ , начало которого совпадает с концом вектора  $\vec{b}$ , а конец — с концом вектора  $\vec{a}$ , при условии что начала векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  совпадают (рис. 2.4).



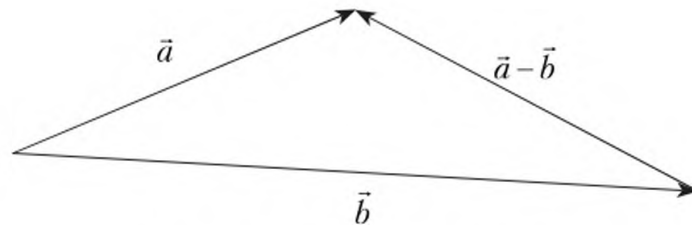


Рис. 2.4. Разность векторов

**Определение 2.8.** Произведением вектора  $\vec{a}$  на число  $\lambda$  называется вектор  $\vec{c} = \lambda\vec{a}$ , имеющий длину  $|\vec{c}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$ , направление которого совпадает с направлением вектора  $\vec{a}$ , если  $\lambda > 0$ . При  $\lambda < 0$  вектор  $\vec{c}$  и вектор  $\vec{a}$  противоположно направлены. При  $\lambda = -1$  определяется вектор, противоположный вектору  $\vec{a}$ , который обозначают  $-\vec{a}$ . При  $\lambda = 0$  результатом умножения будет нулевой вектор, который обозначают  $\vec{0}$ .

Векторы  $\vec{a}$  и  $\lambda\vec{a}$  параллельны одной и той же прямой, следовательно, параллельны между собой. Такие векторы называют *коллинеарными*. По определению считают, что нулевой вектор коллинеарен любому вектору.

Векторы можно рассматривать на плоскости с декартовой системой координат. С каждой точкой  $M$  плоскости можно связать направленный отрезок, начало которого расположено в начале координат — точке  $O$ , а конец — в заданной точке  $M$ , — радиус-вектор точки  $M$ . Если точка  $M$  имеет координаты  $(x; y)$ , то и радиус-вектор  $\overrightarrow{OM}$  имеет эти же координаты:  $\overrightarrow{OM} = (x; y)$ .

Координаты произвольного направленного отрезка  $\overrightarrow{AB}$  на плоскости определяются по правилу: если имеем  $A(x_1; y_1)$ ,  $B(x_2; y_2)$ , то  $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1)$ .

При известных координатах точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  имеет место формула длины вектора:  $|\overrightarrow{AB}| = |AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ .

Выполнение действий с векторами в координатной плоскости может быть сведено к выполнению этих действий с соответствующими координатами векторов, что, безусловно, гораздо проще и удобнее построений. Напомним правила, по которым находят координаты новых векторов: если  $\vec{a} = (a_1; a_2)$ ,  $\vec{b} = (b_1; b_2)$ , то  $\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1; a_2 + b_2)$ ;  $\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1; a_2 - b_2)$ ;  $\lambda\vec{a} = (\lambda a_1; \lambda a_2)$ .

Для осей координат в общей теории определяются *базисные орты* — векторы, направленные по координатным осям и имеющие длину, равную 1. Базисным ортом для оси  $Ox$  является вектор  $\vec{i}$ , для оси  $Oy$  — вектор  $\vec{j}$ ; так как оси координат взаимно перпендикулярны, то взаимно перпендикулярны и векторы  $\vec{i}$  и  $\vec{j}$ . Кроме того, как уже было сказано, для этих векторов обязательно выполняется условие  $|\vec{i}| = |\vec{j}| = 1$ . Используя координаты заданного вектора, его можно представить в виде линейной комбинации базисных ортов.

Применив теорему Пифагора, легко получить формулу, по которой вычисляют длину вектора  $\vec{a}$ , используя его координаты:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}.$$



Вектор вида  $\vec{a}^0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$  называют *нормированным* вектором, так как его длина равна 1.

Векторы  $\vec{a}$  и  $\lambda\vec{a}$  мы называли коллинеарными. Зная координаты этих векторов, можно получить условие их коллинеарности в координатной форме. Если  $\vec{a} = (a_1; a_2)$ ,  $\lambda\vec{a} = (\lambda a_1; \lambda a_2)$ , то отношение соответствующих координат будет одним и тем же:  $\frac{a_1}{\lambda a_1} = \frac{a_2}{\lambda a_2} \left( = \frac{1}{\lambda} \right)$ . Таким образом, чтобы векторы были коллинеарны, необходимо и достаточно, чтобы их соответствующие координаты были пропорциональны.

Например, векторы  $\vec{a} = (2; -3)$  и  $\vec{b} = (6; -9)$  коллинеарны:  $\frac{2}{6} = \frac{-3}{-9} \left( = \frac{1}{3} \right)$ , а векторы  $\vec{a} = (2; 3)$  и  $\vec{b} = (6; -9)$  коллинеарными не являются  $\left( \frac{2}{6} \neq \frac{3}{-9} \right)$ .

Особый интерес представляет операция скалярного умножения векторов, результатом действия которой будет не вектор (как в случае сложения или вычитания), а число, определяемое как скалярное произведение векторов (рис. 2.5).

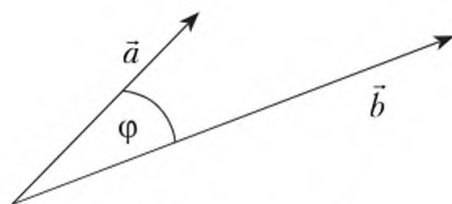


Рис. 2.5. Угол между векторами

**Определение 2.9.** Скалярным произведением векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  называют число, равное произведению их длин на косинус угла между ними:  $(\vec{a}, \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi$ .

Если известны координаты векторов в ортонормированном базисе (см. 1.4.):  $\vec{a} = (a_1; a_2)$ ,  $\vec{b} = (b_1; b_2)$ , то их скалярное произведение находят по формуле

$$(\vec{a}, \vec{b}) = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2.$$

Из определения следует, что два ненулевых вектора взаимно перпендикулярны (ортогональны) тогда и только тогда, когда их скалярное произведение равно нулю.

Если известны координаты векторов, то условие ортогональности легко проверяется. Например, векторы  $\vec{a} = (2; -3)$  и  $\vec{b} = (6; 4)$  будут ортогональными ( $2 \cdot 6 + (-3) \cdot 4 = 12 - 12 = 0$ ), а векторы  $\vec{a} = (2; 3)$  и  $\vec{b} = (6; 4)$  ортогональными не будут ( $2 \cdot 6 + 3 \cdot 4 = 12 + 12 \neq 0$ ).

Используя определение скалярного произведения, можно найти косинус угла между векторами:

$$\cos \varphi = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}.$$



Если известны координаты векторов:  $\vec{a} = (a_1; a_2)$ ,  $\vec{b} = (b_1; b_2)$ , то формула для вычисления косинуса угла между векторами примет вид

$$\cos \varphi = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}}.$$

Еще одним важным следствием определения скалярного произведения векторов является следующее утверждение. Скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины:

$$(\vec{a}, \vec{a}) = \vec{a}^2 = |\vec{a}|^2.$$

Естественным обобщением изучения векторов на плоскости является их рассмотрение в пространстве.

С каждой точкой пространства связывают направленный отрезок, начало которого расположено в начале координат, а конец — в заданной точке (рис. 2.6).

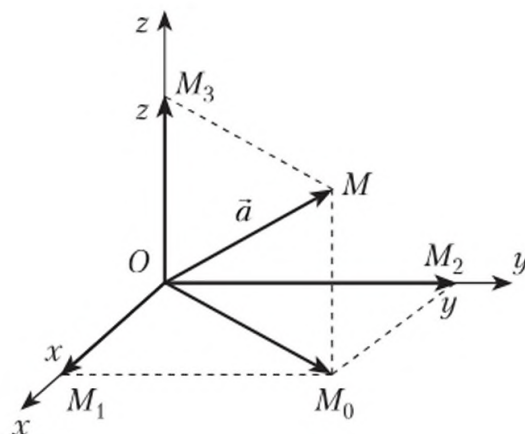


Рис. 2.6. Радиус-вектор точки  $M$

Направленный отрезок  $\overline{OM}$  является *радиус-вектором* точки  $M$ . Точка  $M$  имеет координаты  $(x; y; z)$ , следовательно, и радиус-вектор  $\overline{OM}$  имеет эти же координаты:  $\overline{OM} = (x; y; z)$ .

Как и на плоскости, в пространстве координаты радиус-вектора точки определяют координаты свободного вектора  $\vec{a}$ . Если  $\vec{a} = \overline{OM}$ , то  $\vec{a} = (x; y; z)$ .

Координаты произвольного направленного отрезка  $\overline{AB}$  в пространстве определяются аналогично тому, как они определялись на плоскости, а именно, по правилу: если имеем  $A(x_1; y_1; z_1)$ ,  $B(x_2; y_2; z_2)$ , то  $\overline{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$ . Аналогично определяется в пространстве и длина направленного отрезка  $\overline{AB}$ : при известных координатах точек  $A(x_1; y_1; z_1)$  и  $B(x_2; y_2; z_2)$  имеет место формула

$$|\overline{AB}| = |AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Направленный отрезок  $\overline{AB}$  определяет свободный вектор  $\vec{a}$  в точке  $A$ :  $\vec{a} = \overline{AB}$ . Обозначив  $a_1 = x_2 - x_1$ ;  $a_2 = y_2 - y_1$ ;  $a_3 = z_2 - z_1$ , можем записать:  $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ .



Правила, по которым находят координаты векторов, полученных при сложении, вычитании и умножении на число, тоже выглядят аналогично: если  $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ ,  $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$ , то  $\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1; a_2 + b_2; a_3 + b_3)$ ;  $\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1; a_2 - b_2; a_3 - b_3)$ ;  $\lambda \vec{a} = (\lambda a_1; \lambda a_2; \lambda a_3)$ .

В пространстве для осей координат определяются три *базисных орта*. Базисным ортом для оси  $Ox$  является вектор  $\vec{i}$ , для оси  $Oy$  — вектор  $\vec{j}$ , для оси  $Oz$  — вектор  $\vec{k}$ ; эти векторы взаимно перпендикулярны (ортогональны) и нормированы, т.е. их длины равны 1. Любой вектор в пространстве, как и на плоскости, может быть представлен в виде линейной комбинации базисных ортов, коэффициентами в таком представлении служат координаты вектора (рис. 2.7).

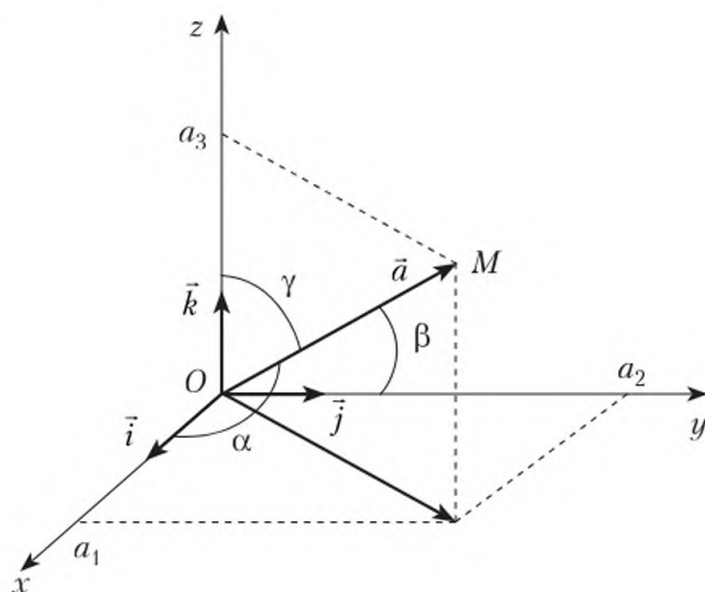


Рис. 2.7. Координаты точки в трехмерном пространстве

Для вектора  $\vec{a} = \overrightarrow{OM} = (a_1; a_2; a_3)$  линейная комбинация базисных ортов имеет вид

$$\vec{a} = a_1 \cdot \vec{i} + a_2 \cdot \vec{j} + a_3 \cdot \vec{k}.$$

Длина вектора  $\vec{a}$  определяется по формуле

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.$$

Формулы для вычисления направляющих косинусов тоже выглядят аналогично:

$$\cos \alpha = \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}; \cos \beta = \frac{a_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}; \cos \gamma = \frac{a_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}.$$

Условие коллинеарности векторов в пространстве сохраняется: чтобы векторы  $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$  и  $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$  были коллинеарными (параллельными одной и той же прямой), необходимо и достаточно, чтобы были пропорциональны их соответствующие координаты:  $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$ .



Определение скалярного произведения векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  выполняется и в пространстве, поэтому сохраняются и все следствия из него. Изменения происходят только в координатной записи соответствующих условий.

Если  $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$  и  $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$ , то их скалярное произведение и косинус угла между ними вычисляют по формулам

$$(\vec{a}, \vec{b}) = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3;$$

$$\cos \varphi = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}.$$

Однако геометрия векторов в пространстве богаче и интереснее, потому что помимо рассмотренных операций сложения, вычитания, умножения на число и скалярного умножения в пространстве возможны еще две операции, о которых мы не говорили, изучая векторы на плоскости. Это векторное и смешанное умножения. Результатом первого является вектор, результатом второго — число. Первое умножение оперирует с двумя векторами; для того чтобы применить второе, потребуется уже три вектора (рис. 2.8).

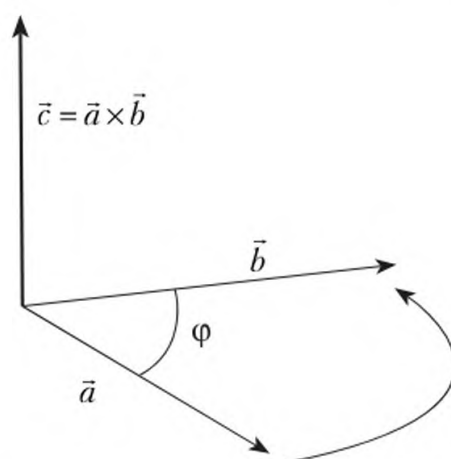


Рис. 2.8. Векторное произведение

**Определение 2.10.** Векторным произведением вектора  $\vec{a}$  на вектор  $\vec{b}$  называют вектор  $\vec{c}$ , который строится по следующему правилу:

1) вектор  $\vec{c}$  перпендикулярен векторам  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  и направлен таким образом, что кратчайший поворот от  $\vec{a}$  к  $\vec{b}$  виден из его конца совершающимся против часовой стрелки;

2) длина вектора  $\vec{c}$  находится по формуле  $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \varphi$ .

Обозначают векторное произведение так:  $[\vec{a}, \vec{b}]$  или  $\vec{a} \times \vec{b}$ .

О векторах  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$ , удовлетворяющих требованиям первого пункта определения, говорят, что они образуют правую тройку. Это связано с ориентацией плоскости, строго определять которую мы не будем, заметим лишь, что для базисных ортов  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  выполнено похожее условие: из конца вектора  $\vec{k}$  кратчайший поворот от  $\vec{i}$  к  $\vec{j}$  происходит против часовой стрелки.



Используя определение векторного произведения, можно проверить выполнимость свойств, которые полезно знать при решении задач:

$$1) \vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a};$$

$$2) (\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c};$$

$$3) (\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \lambda \cdot \vec{a} \times \vec{b}.$$

4) векторное произведение двух ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда эти векторы коллинеарны.

Длина (или модуль) вектора, являющегося результатом векторного произведения  $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$  двух неколлинеарных векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , равна площади параллелограмма, построенного на этих векторах как на сторонах:  $|\vec{c}| = S_{OACB}$  (рис. 2.9).

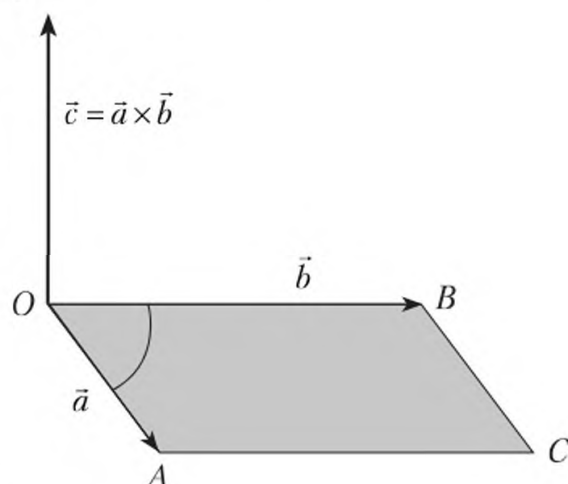


Рис. 2.9. Длина вектора, являющегося результатом векторного произведения

Если известны координаты векторов  $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$  и  $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$ , то векторное произведение  $\vec{a} \times \vec{b}$  находят с помощью определителя

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix},$$

разлагая его по элементам первой строки (основная теорема об определителях нам известна):

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \cdot \vec{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \cdot \vec{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \cdot \vec{k}.$$

**Определение 2.11.** Смешанным произведением  $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}$  трех векторов  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$  называется число, равное скалярному произведению вектора  $\vec{a} \times \vec{b}$  и вектора  $\vec{c}$ :

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c}).$$



Вычисление смешанного произведения векторов  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$  по определению — достаточно трудоемкая задача. Гораздо удобнее она решается в координатной форме.

Если заданы координаты векторов  $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ ,  $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$  и  $\vec{c} = (c_1; c_2; c_3)$ , то смешанное произведение  $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}$  равно определителю третьего порядка, составленному из координат этих векторов:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Нам известны различные способы вычисления определителей третьего порядка, поэтому задача вычисления  $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}$  и в самом деле перестает быть сложной.

*Геометрический смысл* смешанного произведения  $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}$  состоит в том, что его модуль равен объему параллелепипеда, построенного на данных векторах:  $|\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}| = V_{ABCD A_1 B_1 C_1 D_1}$  (рис. 2.10).

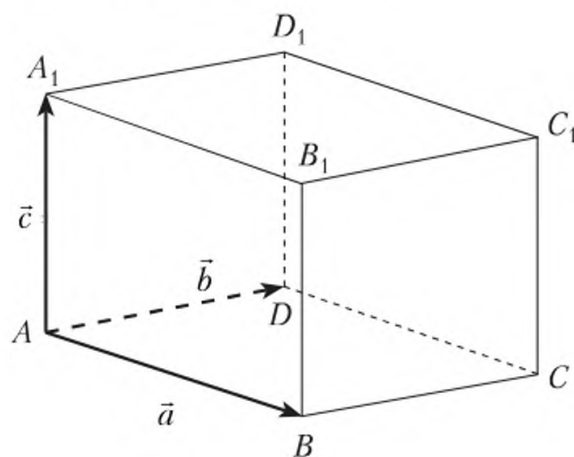


Рис. 2.10. Смешанное произведение векторов

Объем параллелепипеда (да и любого другого тела) не может быть отрицательным, а смешанное произведение  $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}$  может быть по знаку как положительным, так и отрицательным. Для того чтобы не возникали противоречия, используют модуль смешанного произведения (напомним, что модулем неотрицательного числа называют само число, модулем же отрицательного числа называют число, противоположное по знаку данному:  $|5| = 5$ ;  $|-5| = -(-5) = 5$ ).

Если на векторах  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$  нельзя построить параллелепипед, то эти векторы лежат в одной плоскости или параллельны одной и той же плоскости. Такие векторы называют *компланарными*. Смешанное произведение компланарных векторов равно нулю, и обратно: если смешанное произведение равно нулю, значит, векторы компланарны. Например, векторы  $\vec{a} = (1; 1; 3)$ ,  $\vec{b} = (0; 2; -1)$  и  $\vec{c} = (1; -1; 4)$  являются компланарными, так как их смешанное произведение равно нулю. Смешанное произведение мы



нашли как значение определителя, составленного из координат этих векторов:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 7 - 1 - 6 = 0.$$

При вычислении определителя мы использовали разложение по первой строке, но можно было применить правило треугольников или преобразования, не изменяющие значения определителя, а также воспользоваться возможностями *MS Excel*.

### 2.1.2. $n$ -мерные векторные пространства

Случаи двумерного и трехмерного векторного пространства имеют геометрическую интерпретацию, однако на практике приходится сталкиваться с наборами значений, состоящими более чем из трех координат. Например, когда к координатам, характеризующим объект в трехмерном пространстве, добавляются время, эластичность или другие показатели, возникают многомерные векторы.

Упорядоченный набор из  $n$  действительных чисел  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  называют  $n$ -мерным вектором  $\vec{x}$  и записывают  $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Значение  $x_i$  называют  $i$ -й компонентой (координатой) вектора  $\vec{x}$ .

Векторы постоянно используются при рассмотрении задач экономической направленности. Например, некоторый автомобильный завод должен выпустить в смену 50 легковых автомобилей, 100 грузовых, 10 автобусов, 50 комплектов запчастей для легковых автомобилей и 150 комплектов для грузовых автомобилей и автобусов, тогда производственную программу этого завода можно записать в виде вектора  $\vec{x} = (50, 100, 10, 50, 150)$ , имеющего пять компонент. Следовательно, производственная программа этого завода определяется 5-мерным вектором.

Заметим, что обозначение  $\vec{a}$  для  $n$ -мерного вектора сохранено; в комментариях сохраняют даже его изображение в виде направленного отрезка. Но надо отдавать себе отчет в том, что сделано это лишь для ассоциаций и упорядоченный набор чисел на самом деле направленным отрезком (а тем более — свободным вектором, как его понимают на плоскости или в пространстве) не является.

Два  $n$ -мерных вектора *равны* только в случае равенства их соответствующих компонент, называемых координатами:  $(\vec{x} = \vec{y}) \Leftrightarrow (x_1 = y_1, x_2 = y_2, \dots, x_n = y_n)$ .

Вектор, все компоненты которого равны 0, называют *нулевым* и обозначают  $\vec{0} = (0, 0, \dots, 0)$ .

Для  $n$ -мерных векторов определены линейные операции сложения и умножения на число.

Суммой векторов  $\vec{x}, \vec{y}$  называют новый вектор  $\vec{z} = \vec{x} + \vec{y}$ , компоненты которого определяют по правилу  $z_i = x_i + y_i$ , т.е. если  $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $\vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ , тогда

$$\vec{x} + \vec{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n).$$



Произведением вектора  $\vec{x}$  на число  $\lambda$  называют новый вектор  $\vec{z} = \lambda \cdot \vec{x}$ , компоненты которого определяют по правилу  $z_i = \lambda \cdot x_i$ , т.е. для вектора  $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  вектор  $\lambda \cdot \vec{x}$  определится как  $\lambda \cdot \vec{x} = (\lambda \cdot x_1, \lambda \cdot x_2, \dots, \lambda \cdot x_n)$ .

Для этих операций выполняются следующие свойства:

- 1)  $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$  (коммутативность сложения);
- 2)  $\vec{x} + (\vec{y} + \vec{z}) = (\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z}$  (ассоциативность сложения);
- 3)  $\alpha \cdot (\beta \cdot \vec{x}) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \vec{x}$  (ассоциативность относительно числовых множителей);
- 4)  $\alpha \cdot (\vec{x} + \vec{y}) = \alpha \cdot \vec{x} + \alpha \cdot \vec{y}$  (дистрибутивность относительно сложения векторов);
- 5)  $(\alpha + \beta) \cdot \vec{x} = \alpha \cdot \vec{x} + \beta \cdot \vec{x}$  (дистрибутивность относительно сложения чисел);
- 6)  $\vec{x} + \vec{0} = \vec{x}$ ;
- 7) для любого вектора  $\vec{x}$  существует противоположный вектор  $-\vec{x}$ , такой что выполнено равенство  $\vec{x} + (-\vec{x}) = \vec{0}$ .
- 8)  $1 \cdot \vec{x} = \vec{x}$ .

Все перечисленные свойства легко доказываются только на основе определений равных векторов и операций с векторами.

Множество  $n$ -мерных векторов, для которых определены операции сложения и умножения на число при выполнении свойств 1–8, называют  $n$ -мерным векторным пространством.

С экономической точки зрения  $n$ -мерное векторное пространство рассматривают как *пространство благ (товаров)*. Под *товаром* обычно понимают некоторое благо (услугу), поступившее в продажу в определенное время в определенном месте. Для построения пространства благ предполагается, что существует конечное число наличных товаров  $n$ ; количества каждого из них, приобретенные потребителем, характеризуются набором товаров  $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , где через  $x_i$  обозначено количество  $i$ -го блага, приобретенного потребителем. Как правило, считают, что все товары обладают свойством произвольной делимости, так что может быть куплено любое неотрицательное количество каждого из них. Тогда все возможные наборы товаров являются векторами пространства товаров  $C = \{\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \geq 0, i = 1, \dots, n\}$ .

Скалярным произведением векторов  $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  и  $\vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  называется число

$$(\vec{x}, \vec{y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

Скалярное произведение имеет следующий экономический смысл. Если  $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  — вектор объемов различных товаров,  $\vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  — вектор цен соответствующих товаров, то скалярное произведение  $(\vec{x}, \vec{y})$  выражает суммарную стоимость этих товаров.

Для скалярного произведения выполняются следующие свойства:

- 1)  $(\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{y}, \vec{x})$  (коммутативность скалярного умножения);
- 2)  $(\vec{x}, \vec{y} + \vec{z}) = (\vec{x}, \vec{y}) + (\vec{x}, \vec{z})$  (дистрибутивность скалярного умножения относительно сложения);
- 3)  $(\alpha \vec{x}, \vec{y}) = \alpha (\vec{x}, \vec{y})$  (для любого действительного числа  $\alpha$ );



4)  $(\vec{x}, \vec{x}) > 0$ , если  $\vec{x}$  — ненулевой вектор,  $(\vec{x}, \vec{x}) = 0$ , если  $\vec{x}$  — нулевой вектор.

Векторное пространство, в котором задано скалярное произведение векторов, удовлетворяющее указанным свойствам 1—4, называют *n-мерным евклидовым пространством*.

В евклидовом пространстве для вектора  $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  можно определять *длину (норму)* по формуле  $|\vec{x}| = \sqrt{(\vec{x}, \vec{x})} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$ .

Для длины вектора выполняются следующие свойства:

- 1)  $|\vec{x}| = 0$  тогда и только тогда, когда  $\vec{x} = \vec{0}$ ;
- 2)  $|\lambda \vec{x}| = |\lambda| \cdot |\vec{x}|$ , где  $\lambda$  — действительное число;
- 3)  $|(\vec{x}, \vec{y})| \leq |\vec{x}| \cdot |\vec{y}|$  (неравенство Коши — Буняковского<sup>1</sup>);
- 4)  $|\vec{x} + \vec{y}| \leq |\vec{x}| + |\vec{y}|$  (неравенство треугольника).

В *n*-мерном евклидовом пространстве условие ортогональности сохраняется: два вектора  $\vec{x}$  и  $\vec{y}$  ортогональны тогда и только тогда, когда их скалярное произведение  $(\vec{x}, \vec{y})$  равно нулю.

### 2.1.3. Линейная зависимость векторов.

#### Базис и размерность линейного пространства.

**Определение 2.12.** Система  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_m$  *n*-мерных векторов называется *линейно зависимой*, если найдутся числа (коэффициенты)  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ , из которых хотя бы одно отлично от нуля, такие, что выполняется равенство

$$\lambda_1 \vec{e}_1 + \lambda_2 \vec{e}_2 + \dots + \lambda_m \vec{e}_m = \vec{0}.$$

Если же указанное равенство возможно лишь в случае, когда все коэффициенты  $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_m = 0$ , то система векторов  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_m$  является *линейно независимой*.

**Определение 2.13.** Выражение вида  $\lambda_1 \vec{e}_1 + \lambda_2 \vec{e}_2 + \dots + \lambda_m \vec{e}_m$  называют *линейной комбинацией* векторов  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_m$ .

Если система векторов линейно зависима, то по крайней мере один из векторов является линейной комбинацией всех оставшихся.

Система, состоящая из одного вектора, *линейно зависима* тогда и только тогда, когда этот вектор нулевой.

**Определение 2.14.** Два линейно зависимых вектора называются *коллинеарными*. Коллинеарные векторы легко распознать: их соответствующие компоненты (координаты) пропорциональны. Например, векторы  $\vec{x} = (1; -1; 2; 3; 4)$  и  $\vec{y} = (2; -2; 4; 6; 8)$  являются коллинеарными, так как выполнены условия  $\frac{1}{2} = \frac{-1}{-2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8}$ , а векторы  $\vec{x} = (1; -1; 2; 5; 4)$  и  $\vec{y} = (2; -2; 3; 6; 8)$  коллинеарными не являются, так как соответствующие пропорции не выполнены:  $\frac{1}{2} = \frac{-1}{-2} \neq \frac{2}{3} \neq \frac{5}{6} \neq \frac{4}{8}$ . Можно заметить, что в пер-

<sup>1</sup> Огюстен Луи Коши (1789—1857) — французский математик, автор многих трудов по математическому анализу, математической физике, дифференциальным уравнениям, функциям комплексного переменного и другим разделам математики; Виктор Яковлевич Буняковский (1804—1889) — русский математик.







4. Выписать основную матрицу системы 
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nk} \end{pmatrix}$$
 и найти ее

ранг.

5. Выводы о линейной зависимости векторов  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$  сделать, сравнив ранг матрицы и число компонент векторов (размерность векторов).

Система  $n$ -мерных векторов  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n \in V$  образует **базис векторного пространства**  $V$ , если:

- 1) векторы  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$  линейно независимы;
- 2)  $n + 1$  векторов  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_{n+1}$  линейно зависимы, где  $\vec{e}_{n+1}$  — любой вектор пространства  $V$ .

**Определение 2.15.** Векторное пространство  $V$  называется  $n$ -мерным, если базис пространства состоит из  $n$  векторов. Число  $n$  называется *размерностью* пространства  $V$  и обозначается  $\dim V$ . Пространство  $n$ -мерных векторов часто обозначают как  $V^n$  или  $V_n$ .

Например, плоскость имеет размерность, равную двум, т.е. базис на плоскости состоит из двух линейно независимых векторов; пространство имеет размерность, равную трем, следовательно, и в базисе пространства будет три линейно независимых вектора.

Очень важную роль играет следующее утверждение.

Каждый вектор  $\vec{x}$   $n$ -мерного линейного векторного пространства можно единственным образом представить в виде линейной комбинации векторов базиса  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ :

$$\vec{x} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + \dots + x_n \vec{e}_n.$$

Это равенство называется *разложением вектора  $\vec{x}$  по базису  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$* , а набор чисел  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  — *координатами вектора  $\vec{x}$  относительно выбранного базиса*. Каждый вектор однозначно определяется своими координатами в некотором базисе.

Для того чтобы ответить на вопрос, *образуют ли данные векторы базис векторного пространства*, необходимо проверить два условия:

- 1) линейную независимость этих векторов;
- 2) ее максимальность, т.е. проверить, что при добавлении любого вектора к  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$  получится линейно зависимая подсистема.

Базис в векторном пространстве задается неоднозначно. Вектор  $\vec{x}$  может быть разложен по разным базисам. Ответим на вопрос: *какая связь существует между координатами одного и того же вектора, рассматриваемого в различных базисах векторного пространства?*

Рассуждения по этому поводу проведем в общем виде. Пусть в  $n$ -мерном векторном пространстве выбраны два базиса  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$  — «старый»,  $\{\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \dots, \vec{e}'_n\}$  — «новый» и вектор  $\vec{x}$ . Этот вектор можно разложить как по «старому», так и по «новому» базису. Предположим, что эти разложения имеют вид







Возможность скалярного умножения позволяет выдвигать дополнительные требования для векторов базиса.

**Определение 2.16.** Если векторы базиса  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$  попарно ортогональны, то базис называют *ортогональным*. Если в ортогональном базисе все векторы имеют длину, равную 1, то базис называют *ортонормированным*.

Например, базис из векторов  $\vec{e}_1 = (1; 0; 0)$ ;  $\vec{e}_2 = (0; 1; 0)$ ;  $\vec{e}_3 = (0; 0; 1)$  является ортонормированным, так как его векторы попарно ортогональны и их длины равны 1:

$(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 0$ , аналогично находим  $(\vec{e}_1, \vec{e}_3) = (\vec{e}_2, \vec{e}_3) = 0$ ;  
 $|\vec{e}_1| = \sqrt{(\vec{e}_1, \vec{e}_1)} = \sqrt{1+0+0} = 1$ , аналогично  $|\vec{e}_2| = \sqrt{(\vec{e}_2, \vec{e}_2)} = 1$  и  $|\vec{e}_3| = \sqrt{(\vec{e}_3, \vec{e}_3)} = 1$ . В трехмерном пространстве мы неявно уже использовали ортонормированный базис из векторов  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ , которые называли базисными ортами. В  $n$ -мерном пространстве базисные векторы стандартно обозначают  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ .

Рассмотрим примеры решения задач.

### Пример 2.1

Даны вектор  $\vec{a} = (5; 1)$  и точка  $A(-2; 3)$ . Найдём координаты точки  $B$  такой, что  $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ .

*Решение*

Воспользуемся условиями  $a_1 = x_2 - x_1$ ;  $a_2 = y_2 - y_1$ .

В нашем случае  $a_1 = 5$ ,  $a_2 = 1$ ,  $x_1 = -2$ ,  $y_1 = 3$ . Подставив эти значения, находим  $x_2 = 2$ ,  $y_2 = -2$ . Поэтому точка  $B$  имеет координаты  $(2; -2)$ .

*Ответ:*  $B(2; -2)$ .

### Пример 2.2

Найдём вектор  $\vec{c}$  как результат векторного произведения  $\vec{a} \times \vec{b}$  векторов  $\vec{a} = (1; 3; -1)$  и  $\vec{b} = (2; -2; 1)$  и его длину.

*Решение*

1. Составим соответствующий определитель и раскроем его по элементам первой строки:

$$\begin{aligned} \vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \cdot \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \cdot \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} \cdot \vec{k} = \\ &= \vec{i} - 3\vec{j} - 8\vec{k}. \end{aligned}$$

2. Запишем координаты вектора  $\vec{c} = (1; -3; -8)$  и найдём его длину по формуле

$$|\vec{c}| = \sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2} = \sqrt{1^2 + (-3)^2 + (-8)^2} = \sqrt{74} \approx 8,6.$$

*Ответ:*  $\vec{c} = \vec{i} - 3\vec{j} - 8\vec{k}$ ;  $|\vec{c}| \approx 8,6$ .

### Пример 2.3

Определим, будут ли линейно зависимы системы векторов:

а)  $\vec{a}_1 = (1; 1; 4; 2)$ ,  $\vec{a}_2 = (-3; -1; 3; 4)$ ,  $\vec{a}_3 = (1; -1; -2; 4)$ ;

б)  $\vec{a}_1 = (1; -1; -2; 4)$ ,  $\vec{a}_2 = (0; 2; 6; -2)$ ,  $\vec{a}_3 = (-3; -1; 3; 4)$ ,  $\vec{a}_4 = (-1; 0; -4; -7)$ .



*Решение*

а) 1. Для системы векторов  $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$  линейная комбинация имеет вид

$$\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \lambda_3 \vec{a}_3 = \vec{0}.$$

2. Заменим полученное условие матричным:

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

3. Выпишем соответствующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \lambda_1 - 3\lambda_2 + \lambda_3 = 0, \\ \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 = 0, \\ 4\lambda_1 + 3\lambda_2 - 2\lambda_3 = 0, \\ 2\lambda_1 + 4\lambda_2 + 4\lambda_3 = 0. \end{cases}$$

4. Для основной матрицы системы найдем ее ранг:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 4 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} -1 & -4 & -2 \\ \leftarrow & & \\ \leftarrow & & \\ \leftarrow & & \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 15 & -6 \\ 0 & 10 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} :2 \\ :3 \\ :2 \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & -2 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

5. Ранг приведенной, а следовательно, и исходной матрицы равен трем. Это совпадает с количеством переменных системы линейных уравнений. Значит, эта система имеет единственное решение  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ . Поэтому данная система векторов является линейно независимой.

б) Аналогично поступаем с системой векторов  $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4\}$ .

1. Линейная комбинация в этом случае имеет вид

$$\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \lambda_3 \vec{a}_3 + \lambda_4 \vec{a}_4 = \vec{0}.$$

2. Заменим полученное условие матричным:

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -4 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

3. Выпишем соответствующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \lambda_1 - 3\lambda_3 - \lambda_4 = 0, \\ -\lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 = 0, \\ -2\lambda_1 + 6\lambda_2 + 3\lambda_3 - 4\lambda_4 = 0, \\ 4\lambda_1 - 2\lambda_2 + 4\lambda_3 - 7\lambda_4 = 0. \end{cases}$$



4. Найдем ранг основной матрицы этой системы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ -2 & 6 & 3 & -4 \\ 4 & -2 & 4 & -7 \end{pmatrix} \xRightarrow{\substack{R_2 \leftarrow R_2 + R_1 \\ R_3 \leftarrow R_3 + 2R_1 \\ R_4 \leftarrow R_4 - 4R_1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & -4 & -1 \\ 0 & 6 & -3 & -6 \\ 0 & -2 & 16 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 9 & -3 \\ 0 & 0 & 12 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

5. Ранг приведенной, а следовательно, и исходной матрицы равен трем, это меньше числа переменных в системе. Однородная система линейных уравнений в таком случае имеет бесконечное множество решений, среди которых есть ненулевые. Значит, существуют ненулевые значения  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ , для которых выполняется условие  $\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \lambda_3 \vec{a}_3 + \lambda_4 \vec{a}_4 = \vec{0}$ , что характеризует заданную систему векторов как линейно зависимую.

Ответ: а) система векторов линейно независима; б) система векторов линейно зависима.

*Замечание 2.1.* При решении задачи в пункте б) мы не находили определенные значения коэффициентов  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ , так как этого не требовалось по условию. Если же в задаче необходимо привести пример ненулевых значений коэффициентов, то для этого нужно будет сформировать общее решение системы и при определенных значениях параметров найти какое-либо ее частное решение. В случае б) рассмотренной задачи продолжим решение.

По приведенной матрице  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$  восстановим систему линей-

ных уравнений, помня о том, что ее элементы служат коэффициентами для уравнений системы:

$$\begin{cases} \lambda_1 - 3\lambda_3 - \lambda_4 = 0, \\ 2\lambda_2 - 4\lambda_3 - \lambda_4 = 0, \\ 3\lambda_3 - \lambda_4 = 0. \end{cases}$$

Чтобы формировать общее решение, нужно выбрать базисные переменные и определить свободные. В нашем случае базисными переменными естественно выбрать  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ , а переменную  $\lambda_4$  объявить свободной. Далее выразим базисные переменные  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  через свободную переменную  $\lambda_4$ :

$$\begin{cases} \lambda_1 - 3\lambda_3 - \lambda_4 = 0, \\ 2\lambda_2 - 4\lambda_3 - \lambda_4 = 0, \\ 3\lambda_3 - \lambda_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 - 3\lambda_3 = \lambda_4, \\ 2\lambda_2 - 4\lambda_3 = \lambda_4, \\ 3\lambda_3 = \lambda_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \lambda_4 + 3\lambda_3, \\ 2\lambda_2 = \lambda_4 + 4\lambda_3, \\ \lambda_3 = \frac{1}{3}\lambda_4 \end{cases} \Rightarrow$$



$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \lambda_4 + 3 \cdot \frac{1}{3} \lambda_4, \\ 2\lambda_2 = \lambda_4 + 4 \cdot \frac{1}{3} \lambda_4, \\ \lambda_3 = \frac{1}{3} \lambda_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 2\lambda_4, \\ 2\lambda_2 = \frac{7}{3} \lambda_4, \\ \lambda_3 = \frac{1}{3} \lambda_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 2\lambda_4, \\ \lambda_2 = \frac{7}{6} \lambda_4, \\ \lambda_3 = \frac{1}{3} \lambda_4. \end{cases}$$

На основе последней системы формируем общее решение при  $\lambda_4 = t$ :  $\left(2t; \frac{7}{6}t; \frac{1}{3}t; t\right)$ , из которого можно получить любое частное решение. Например, при  $t = 6$  получим  $(12; 7; 2; 6)$ . Это и будет пример ненулевых значений коэффициентов  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ , для которых выполняется условие

$$\lambda_1 \bar{a}_1 + \lambda_2 \bar{a}_2 + \lambda_3 \bar{a}_3 + \lambda_4 \bar{a}_4 = \vec{0}.$$

В итоге, как пример, получим  $12\bar{a}_1 + 7\bar{a}_2 + 2\bar{a}_3 + 6\bar{a}_4 = \vec{0}$ .

При этом мы всегда можем проверить правильность решения, осуществив подстановки и проведя несложные вычисления:

$$12 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + 7 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + 6 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -4 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{В самом деле: } \begin{pmatrix} 12-6-6 \\ -12+14-2 \\ -24+42+6-24 \\ 48-14+8-42 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \text{ Следовательно, указанные значе-}$$

ния  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$  найдены нами верно.

Изучение линейно зависимых систем векторов является интересной задачей и с точки зрения ответа на вопрос: какое максимальное число линейно независимых векторов в данной линейно зависимой системе? И как реализовать утверждение о том, что в линейно зависимой системе хотя бы один из векторов является линейной комбинацией всех оставшихся? Отвечать на эти вопросы помогает фундаментальная система решений однородной системы уравнений. Рассмотрим следующий пример.

#### Пример 2.4

Для системы векторов  $\bar{a}_1 = (-1; 0; -4; -7)$ ,  $\bar{a}_2 = (1; 1; 4; 2)$ ,  $\bar{a}_3 = (-3; -1; 3; 4)$ ,  $\bar{a}_4 = (1; -1; -2; 4)$ ,  $\bar{a}_5 = (0; 2; 6; -2)$  выделим максимальную линейно независимую подсистему и представим оставшиеся векторы в виде линейной комбинации из линейно независимых векторов.

*Решение*

Изучение линейной зависимости данных векторов проводится стандартно.



1. Запишем линейную комбинацию:

$$\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \lambda_3 \vec{a}_3 + \lambda_4 \vec{a}_4 + \lambda_5 \vec{a}_5 = \vec{0}.$$

2. Заменяем полученное векторное условие матричным:

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -4 \\ -7 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda_5 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

3. Система линейных уравнений имеет вид

$$\begin{cases} -\lambda_1 + \lambda_2 - 3\lambda_3 + \lambda_4 = 0, \\ \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4 + 2\lambda_5 = 0, \\ -4\lambda_1 + 4\lambda_2 + 3\lambda_3 - 2\lambda_4 + 6\lambda_5 = 0, \\ -7\lambda_1 + 2\lambda_2 + 4\lambda_3 + 4\lambda_4 - 2\lambda_5 = 0. \end{cases}$$

4. Найдем ранг основной матрицы этой системы:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 2 \\ -4 & 4 & 3 & -2 & 6 \\ -7 & 2 & 4 & 4 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{4 \rightarrow 1 \\ 7 \rightarrow 1}} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 15 & -6 & 6 \\ 0 & -5 & 25 & -3 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{5 \rightarrow 1} \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 15 & -6 & 6 \\ 0 & 0 & 20 & -8 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{3:3 \\ 4:4}} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & -2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

5. Ранг матрицы равен трем, это меньше числа переменных в системе уравнений, значит, система имеет бесконечное множество решений, среди которых есть ненулевые. Следовательно, условие  $\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \lambda_3 \vec{a}_3 + \lambda_4 \vec{a}_4 + \lambda_5 \vec{a}_5 = \vec{0}$  выполняется при ненулевых значениях коэффициентов. Поэтому система векторов  $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4, \vec{a}_5\}$  является линейно зависимой.

По приведенной матрице восстановим систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} -\lambda_1 + \lambda_2 - 3\lambda_3 + \lambda_4 = 0, \\ \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4 + 2\lambda_5 = 0, \\ 5\lambda_3 - 2\lambda_4 + 2\lambda_5 = 0. \end{cases}$$

Базисными переменными удобно выбрать  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ , тогда  $\lambda_4, \lambda_5$  будут свободными. Количество свободных переменных определяет количество решений в фундаментальной системе, которые найдем, заполняя таблицу:

Решение	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	$\lambda_5$
1-е	$\frac{6}{5}$	$\frac{7}{5}$	$\frac{2}{5}$	1	0
2-е	$-\frac{6}{5}$	$-\frac{12}{5}$	$-\frac{2}{5}$	0	1

Первое решение получим, подставляя в восстановленную систему значения  $\lambda_4 = 1, \lambda_5 = 0$ :



$$\begin{cases} -\lambda_1 + \lambda_2 - 3\lambda_3 + 1 = 0, \\ \lambda_2 - \lambda_3 - 1 = 0, \\ 5\lambda_3 - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \lambda_2 - 3\lambda_3 + 1, \\ \lambda_2 = \lambda_3 + 1, \\ \lambda_3 = \frac{2}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \frac{6}{5}, \\ \lambda_2 = \frac{7}{5}, \\ \lambda_3 = \frac{2}{5}. \end{cases}$$

Второе решение получим, подставляя в восстановленную систему значения  $\lambda_4 = 0$ ,  $\lambda_5 = 1$ :

$$\begin{cases} -\lambda_1 + \lambda_2 - 3\lambda_3 = 0, \\ \lambda_2 - \lambda_3 + 2 = 0, \\ 5\lambda_3 + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \lambda_2 - 3\lambda_3, \\ \lambda_2 = \lambda_3 - 2, \\ \lambda_3 = -\frac{2}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -\frac{6}{5}, \\ \lambda_2 = -\frac{12}{5}, \\ \lambda_3 = -\frac{2}{5}. \end{cases}$$

Значения для коэффициентов  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5$  из таблицы подставим в условие  $\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \lambda_3 \vec{a}_3 + \lambda_4 \vec{a}_4 + \lambda_5 \vec{a}_5 = \vec{0}$ :

$$\begin{cases} \frac{6}{5} \vec{a}_1 + \frac{7}{5} \vec{a}_2 + \frac{2}{5} \vec{a}_3 + \vec{a}_4 = \vec{0}, \\ -\frac{6}{5} \vec{a}_1 - \frac{12}{5} \vec{a}_2 - \frac{2}{5} \vec{a}_3 + \vec{a}_5 = \vec{0}. \end{cases}$$

Из первого равенства выразим  $\vec{a}_4$ , из второго —  $\vec{a}_5$ , получим

$$\begin{cases} \vec{a}_4 = -\frac{6}{5} \vec{a}_1 - \frac{7}{5} \vec{a}_2 - \frac{2}{5} \vec{a}_3, \\ \vec{a}_5 = \frac{6}{5} \vec{a}_1 + \frac{12}{5} \vec{a}_2 + \frac{2}{5} \vec{a}_3. \end{cases}$$

*Ответ:* максимальная линейно независимая подсистема состоит из трех векторов  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ ,  $\vec{a}_4 = -\frac{6}{5} \vec{a}_1 - \frac{7}{5} \vec{a}_2 - \frac{2}{5} \vec{a}_3$ ,  $\vec{a}_5 = \frac{6}{5} \vec{a}_1 + \frac{12}{5} \vec{a}_2 + \frac{2}{5} \vec{a}_3$ .

Рассмотрим пример того, как разложить вектор  $\vec{x}$  по заданному базису.

### Пример 2.5

Докажем, что векторы  $\vec{a}_1 = (3; 4; 3)$ ,  $\vec{a}_2 = (-2; 3; 1)$ ,  $\vec{a}_3 = (4; -2; 3)$  образуют базис и найдем координаты вектора  $\vec{x} = (-17; 18; -7)$  в этом базисе.

*Решение*

Векторы  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$  заданы в трехмерном пространстве, поэтому при условии их линейной независимости будут образовывать базис.

Стандартную схему доказательства линейной независимости векторов мы разбирали. Здесь разберем упрощенный вариант проверки, касающийся квадратных матриц, для которых числовой характеристикой является не только ранг, но и определитель. Вспомним о том, что понижение ранга квадратной матрицы приводит к ее вырожденности (т.е. определитель такой матрицы будет равен нулю). Поэтому для ответа на вопрос о линейной зависимости трех векторов в трехмерном пространстве можно просто подсчитать значение определителя, составленного из координат этих векторов:



$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 4 & 3 & -2 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = \\ = 3 \cdot 11 + 2 \cdot 18 + 4 \cdot (-5) = 49 \neq 0.$$

Следовательно, матрица  $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 4 & 3 & -2 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$  является невырожденной и ее ранг равен

трем. Поэтому векторы  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$  линейно независимы и образуют базис трехмерного пространства (часть рассуждений, связанных с линейной комбинацией векторов и множеством решений однородной системы уравнений, мы повторять не стали).

Теперь составим линейную комбинацию, определяющую разложение вектора  $\vec{x}$  по базису из векторов  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ :

$$\vec{x} = x_1 \vec{a}_1 + x_2 \vec{a}_2 + x_3 \vec{a}_3,$$

и найдем неизвестные коэффициенты  $x_1, x_2, x_3$  в этом разложении. Технологии решения векторных уравнений нам знакомы (векторное условие заменить матричным, а матричное — системой линейных уравнений), применим их без подробных комментариев:

$$\begin{pmatrix} -17 \\ 18 \\ -7 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix};$$

$$\begin{cases} -17 = 3x_1 - 2x_2 + 4x_3, \\ 18 = 4x_1 + 3x_2 - 2x_3, \\ -7 = 3x_1 + x_2 + 3x_3, \end{cases}$$

или, что то же самое,

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = -17, \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 18, \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 = -7. \end{cases}$$

Полученная система линейных уравнений является неоднородной. Основная матрица этой системы имеет ранг, равный трем (см. выше проверку линейной независимости векторов  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ ), что совпадает с количеством переменных в системе. Поэтому система является определенной, т.е. имеет единственное решение, которое можно находить разными способами. Поскольку значение определителя основной матрицы системы нам уже известно ( $\Delta = 49$ ), мы можем воспользоваться формулами

Крамера  $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}$ :

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -17 & -2 & 4 \\ 18 & 3 & -2 \\ -7 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 49; \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & -17 & 4 \\ 4 & 18 & -2 \\ 3 & -7 & 3 \end{vmatrix} = 98; \Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & -2 & -17 \\ 4 & 3 & 18 \\ 3 & 1 & -7 \end{vmatrix} = -196.$$

Теперь найдем решение системы:  $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = -4$ , с помощью которого и запишем искомое разложение вектора  $\vec{x}$  по базису  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ :

$$\vec{x} = \vec{a}_1 + 2\vec{a}_2 - 4\vec{a}_3.$$



Задачу можно решать в матричной форме. Для этого надо записать матрицу, составленную из координат векторов, в последней строчке — вектор  $\vec{x}$  и обнулять ее, а сбоку записывать линейные комбинации. Тогда ранг матрицы будет равен 3, последняя строчка будет нулевой, а сбоку получится линейное соотношение всех векторов, из него выразим  $\vec{x}$ , это и будет искомое разложение.

Ответ: вектор  $\vec{x}$  в базисе, состоящем из векторов  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ , имеет координаты  $(1; 2; -4)$ , что соответствует разложению  $\vec{x} = \vec{a}_1 + 2\vec{a}_2 - 4\vec{a}_3$ .

**Замечание 2.2.** В рассмотренной задаче неявно присутствует еще один базис  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ , относительно которого заданы координаты векторов  $\vec{a}_1 = (3; 4; 3)$ ,  $\vec{a}_2 = (-2; 3; 1)$ ,  $\vec{a}_3 = (4; -2; 3)$  и  $\vec{x} = (-17; 18; -7)$ . В этом базисе имеют место разложения:  $\vec{a}_1 = 3\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3$ ;  $\vec{a}_2 = -2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + \vec{e}_3$ ;  $\vec{a}_3 = 4\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3$ ;  $\vec{x} = -17\vec{e}_1 + 18\vec{e}_2 - 7\vec{e}_3$ .

В базисе  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$  можно найти и координаты самих векторов базиса:  $\vec{e}_1 = (1; 0; \dots; 0)$ ;  $\vec{e}_2 = (0; 1; \dots; 0)$ ;  $\dots$ ;  $\vec{e}_n = (0; 0; \dots; 1)$ . Точно так же и для любого другого базиса  $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \dots, \vec{e}'_n$ :  $\vec{e}'_1 = (1; 0; \dots; 0)$ ;  $\vec{e}'_2 = (0; 1; \dots; 0)$ ;  $\dots$ ;  $\vec{e}'_n = (0; 0; \dots; 1)$ .

В задаче «старым» базисом будет базис из векторов  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ , а «новым» — базис из векторов  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ . Так как координаты этих векторов известны, то можно записать и матрицу перехода от «старого» базиса к «новому», располагая соответствующие координаты по столбцам:

$$C = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 4 & 3 & -2 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Координаты вектора  $\vec{x}$  в «старом» и «новом» базисах будут определять матрицы  $X = \begin{pmatrix} -17 \\ 18 \\ -7 \end{pmatrix}$  и  $X' = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$  соответственно. Не составляет труда проверить выполнимость матричного равенства:

$$X = CX' \Rightarrow \begin{pmatrix} -17 \\ 18 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 4 & 3 & -2 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

В процессе решения задачи мы нашли координаты вектора в «новом» базисе, а значит, и матрицу  $X'$ . С точки зрения теории матриц можно было находить это решение в виде  $X' = C^{-1}X$ . Мы предлагаем самостоятельно проверить выполнение и этого матричного равенства, найдя предварительно матрицу  $C^{-1}$  и опираясь при этом на известные приемы вычислений обратной матрицы.

Найденный нами в задаче базис из векторов  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$  не является ортогональным, так как его векторы не являются попарно ортогональными:  $(\vec{a}_1, \vec{a}_2) = 3 \cdot (-2) + 4 \cdot 3 + 3 \cdot 1 = 9 \neq 0$ ,  $(\vec{a}_1, \vec{a}_3) \neq 0$ ,  $(\vec{a}_2, \vec{a}_3) \neq 0$ . Однако для заданного вектора  $\vec{a}_1$  можно подобрать ему ортогональный  $\vec{a}_2$  из условия



$(\vec{a}_1, \vec{a}_2) = 0$ ; далее для уже ортогональных векторов  $\vec{a}_1, \vec{a}_2$  можно подобрать ортогональный им вектор  $\vec{a}_3$  из условий  $(\vec{a}_1, \vec{a}_3) = 0, (\vec{a}_2, \vec{a}_3) = 0$ . Так можно продолжать до тех пор, пока в  $n$ -мерном пространстве не образуется ортогональный базис из  $n$  векторов. Процесс построения ортогонального базиса называют *ортогонализацией*.

### Пример 2.6

Построим ортогональный базис, в который включен вектор  $\vec{a}_1 = (1; 1; 1)$ .

*Решение*

Сначала подберем вектор  $\vec{a}_2$ , удовлетворяющий условию  $(\vec{a}_1, \vec{a}_2) = 0$ . Координаты вектора  $\vec{a}_2$  обозначим как неизвестные  $(x_1, x_2, x_3)$  и запишем в координатной форме:  $(\vec{a}_1, \vec{a}_2) = 0 \Rightarrow 1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 = 0$ . В полученном уравнении три неизвестных  $(x_1, x_2, x_3)$ , поэтому значения для двух из них мы зададим произвольно, после чего определим значение третьего. Пусть  $x_1 = 1, x_2 = 2$ , тогда, подставив в уравнение  $1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 = 0$  эти значения, получим  $1 + 2 + x_3 = 0$ , откуда  $x_3 = -3$ . Значит,  $\vec{a}_2 = (1; 2; -3)$ .

Теперь подберем вектор  $\vec{a}_3$  ортогональный и  $\vec{a}_1$ , и  $\vec{a}_2$ , из условий  $(\vec{a}_1, \vec{a}_3) = 0, (\vec{a}_2, \vec{a}_3) = 0$ . Обозначив координаты вектора  $\vec{a}_3$  как неизвестные  $(x_1; x_2; x_3)$ , получим теперь систему уравнений 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0, \end{cases}$$
 о которой можно сказать, что она одно-

родная, число уравнений меньше числа переменных, следовательно, эта система имеет бесконечное множество решений. Сформировав общее решение в виде  $(-5t; 4t; t)$ , при  $t = 1$ , например, получим искомые координаты вектора  $\vec{a}_3 = (-5; 4; 1)$ .

В задаче рассматривают векторы трехмерного пространства, следовательно, найденные в процессе ортогонализации векторы  $\vec{a}_2$  и  $\vec{a}_3$  составят базис, поскольку их три и они линейно независимы. В этом легко убедиться, определив ранг матрицы, составленной из координат.

*Ответ:* базис из векторов  $\vec{a}_1 = (1; 1; 1)$ ,  $\vec{a}_2 = (1; 2; -3)$ ,  $\vec{a}_3 = (-5; 4; 1)$  является ортогональным и включает данный вектор.

Придавая другие значения возникающим параметрам, мы получили бы другие координаты векторов. Но другие параметры могут изменить только длину вектора, а не его направление. Поэтому возникающий при других значениях параметров базис останется ортогональным. Кроме того, на основе полученного ортогонального базиса можно построить базис ортонормированный. Для этого нужно просто найти орты векторов, составляющих ортогональный базис, по известной нам формуле

$$\vec{a}^0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|},$$

где  $|\vec{a}|$  — длина вектора  $\vec{a}$ , которую находят как  $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}$ .

## 2.2. Линейные операторы

Большой раздел современной математики посвящен теории линейных операторов. Эта теория находит многочисленные применения на практике, в программировании, а также при математическом моделировании экономических процессов.



### 2.2.1. Матрица линейного оператора

Пусть дано векторное  $n$ -мерное пространство  $V$ , элементами которого являются векторы, имеющие  $n$  координат.

**Определение 2.17.** Правило  $\varphi$ , по которому вектору  $X$  из  $V$  ставится в соответствие вектор этого же пространства  $Y = \varphi(X)$ , называется *отображением* пространства  $V$  в себя, где  $X$  — прообраз, а  $Y$  — образ  $\varphi$ .

**Определение 2.18.** Отображение  $\varphi$  пространства  $V$  в себя называется *линейным оператором*, если оно удовлетворяет следующим условиям:

- 1)  $\varphi(X_1 + X_2) = \varphi(X_1) + \varphi(X_2)$ ;
- 2)  $\varphi(kX) = k\varphi(X)$ , где  $X_1, X_2, X$  — любые векторы из  $V$ ;  $k$  — любое число.

Приведем примеры линейных операторов.

1. Нулевой оператор  $\varphi(X) = 0, X \in V$ ;
2. Тожественный оператор  $\varphi(X) = X, X \in V$ ;
3. Оператор растяжения (сжатия)  $\varphi(X) = kX, X \in V$ .

Доказательство линейности перечисленных операторов состоит из проверки выполнения условий 1 и 2 и предоставляется в виде задачи читателю.

**Теорема 2.1.** Произвольному линейному оператору  $\varphi$   $n$ -мерного пространства  $V$  соответствует определенная квадратная матрица  $A$  размера  $n$ , такая что

$$AX = Y,$$

$$\text{где } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Ограничимся случаем, когда  $\varphi$  — взаимно-однозначное отображение пространства  $V$ , т.е. каждому образу соответствует единственный прообраз, и наоборот, у каждого прообраза имеется единственный образ. При этом матрица  $A$  линейного оператора, задающая линейное отображение  $\varphi$ , будет невырожденной, т.е. ее определитель не равен нулю. Рассмотрим обратное взаимно-однозначное отображение  $\varphi^{-1}$ , по которому вектору  $Y$  из  $V$  ставится в соответствие вектор этого же пространства  $X = \varphi^{-1}(Y)$ , тогда этому отображению соответствует обратная матрица  $A^{-1}$ . Действительно, из  $AX = Y$  находим  $X = A^{-1}Y$ .

Зафиксируем в пространстве  $V$  базис  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , по которому разлагаются вектор  $X$  и его образ  $Y$ . Тогда линейному отображению соответствует матрица  $A$ . Перейдем к новому базису  $a_1^*, a_2^*, \dots, a_n^*$ . В новом базисе отображению  $\varphi$  отвечает новая матрица

$$A^* = P^{-1}AP,$$

где  $P$  — матрица перехода от базиса  $a_1, a_2, \dots, a_n$  к новому базису  $a_1^*, a_2^*, \dots, a_n^*$ :

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{n1} & p_{n2} & \dots & p_{nn} \end{pmatrix}.$$



Матрицы  $A^*$  и  $A$  называются подобными. При переходе от одного базиса к другому матрицы линейного преобразования переходят в подобные матрицы.

### 2.2.2. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора

**Определение 2.19.** Если  $\varphi$  — линейное отображение (оператор) пространства  $V$  в себя и для ненулевого вектора  $X$  и числа  $\lambda$  выполняется

$$\varphi(X) = \lambda X,$$

то  $\lambda$  называется *собственным значением* линейного оператора, а  $X$  — *собственным вектором* этого оператора, соответствующим этому собственному значению.

Пусть  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$  — матрица линейного оператора, тогда

$AX = \lambda X$ , отсюда  $AX - \lambda X = 0$  и  $(A - \lambda E)X = 0$ ,  $X \neq 0$ , следовательно, для того чтобы найти собственные значения линейного оператора, нужно решить характеристическое уравнение

$$|A - \lambda E| = 0.$$

В матричной форме характеристическое уравнение выглядит следующим образом:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Заметим, что у подобных матриц характеристические уравнения совпадают.

Интересные практические применения в решении экономических задач имеет задача приведения матрицы линейного оператора к диагональной форме. Если линейный оператор имеет различные собственные значения, то его матрицу можно привести к диагональному виду.

Если собственные значения линейного оператора не все различны, то задача имеет решение при дополнительных условиях.

**Теорема 2.2.** Матрица линейного оператора приводится к диагональному виду тогда и только тогда, когда размерность линейного пространства  $V$  равна сумме размерностей собственных подпространств.

Пусть  $\lambda$  — собственное значение линейного оператора, заданного матрицей

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$







### Пример 2.8

В трехмерном пространстве отображение  $\Phi$  задано в некотором базисе матрицей

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}. \text{ Приведем матрицу линейного оператора к диагональной форме, если}$$

это возможно.

*Решение*

Запишем и решим характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 3 & -1 \\ -3 & 5-\lambda & -1 \\ -3 & 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Разложим определитель по первому столбцу, преобразуем, получим

$$(-1-\lambda) \begin{vmatrix} 5-\lambda & -1 \\ 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} - (-3) \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} + (-3) \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 5-\lambda & -1 \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2(1-\lambda).$$

Характеристическое уравнение примет вид

$$(2-\lambda)^2(1-\lambda) = 0.$$

Заметим, что  $\lambda = 2$  — двукратный корень уравнения, так как множитель  $2 - \lambda$  входит в разложение характеристического многочлена во второй степени, а  $\lambda = 1$  — однократный корень уравнения, так как множитель  $1 - \lambda$  входит в разложение характеристического многочлена в первой степени. Найдем собственные векторы, отвечающие собственным значениям.

Для собственных векторов, отвечающих  $\lambda = 1$ , имеем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0, \\ -3x_1 + 4x_2 - x_3 = 0, \\ -3x_1 + 3x_2 = 0. \end{cases}$$

Ей соответствует матрица, которую приведем к диагональному виду с помощью элементарных преобразований над строками:

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ -3 & 4 & -1 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ранг матрицы равен 2, число неизвестных равно 3, значит, фундаментальный набор решений состоит из  $3 - 2 = 1$  вектора  $a_1 = (1; 1; 1)$ , координаты которого находятся из последней матрицы.

Для  $\lambda = 2$  имеем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} -3x_1 + 3x_2 - x_3 = 0, \\ -3x_1 + 3x_2 - x_3 = 0, \\ -3x_1 + 3x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

Ей соответствует матрица, которую приведем к диагональному виду с помощью элементарных преобразований над строками:

$$\begin{pmatrix} -3 & 3 & -1 \\ -3 & 3 & -1 \\ -3 & 3 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -3 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$



Ранг матрицы равен 1, размерность линейного пространства (число неизвестных) равна 3, значит, фундаментальный набор решений состоит из  $3-1=2$  векторов  $a_2 = (1; 1; 0)$ ,  $a_3 = (0; 1; 3)$ , координаты которых находятся из последней матрицы.

Таким образом, сумма размерностей собственных подпространств  $1+2=3$  равна размерности пространства, следовательно, матрицу линейного оператора в задаче можно привести к диагональному виду в заданном базисе. Для этого обнулим элементы ниже и выше диагонали:

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ответ:  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$

### 2.3. Квадратичные формы

Ограничимся в рассмотрении случаем двух переменных.

**Определение 2.20.** *Квадратичной формой* от двух переменных  $x_1, x_2$  называется многочлен вида

$$F = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2,$$

где  $a_{11}, a_{12}, a_{22}$  — числа, называемые коэффициентами квадратичной формы. Заметим, что  $a_{12} = a_{21}$ , поэтому во втором слагаемом есть умножение на 2. Запишем квадратичную форму в виде

$$F = (a_{11}x_1 + a_{12}x_2)x_1 + (a_{21}x_1 + a_{22}x_2)x_2.$$

Матрица  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$  называется *матрицей квадратичной формы*  $F$ .

Введя матрицу-столбец  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$  и матрицу-строку  $X^T = (x_1 \ x_2)$  и произведя умножение, получим

$$F = X^T A X.$$

Такая форма записи называется *матричной формой* записи квадратичной формы.

*Каноническая форма* квадратичной формы — это форма, в которой отсутствует член с произведением  $x_1x_2$ , т.е.

$$F = a_1x_1'^2 + a_2x_2'^2.$$

Задача приведения квадратичной формы к каноническому виду возникает, например, в теории вероятностей при изучении двумерных нормальных распределений. Отметим, что эта задача всегда имеет решение, при-



чем не единственное, т.е. любая квадратичная форма может быть приведена к каноническому виду. Для приведения квадратичной формы  $n$ -переменных к каноническому виду можно, например, использовать метод Лагранжа.

Воспользуемся тем, что квадратичная форма  $F = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2$  в каноническом виде есть  $F = \lambda_1 x_1'^2 + \lambda_2 x_2'^2$ , где  $\lambda_1, \lambda_2$  — корни характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Если эти корни — числа одного знака, то говорят, что квадратичная форма принадлежит к эллиптическому типу, если разных знаков, то — к гиперболическому типу, если один корень равен нулю, то — к параболическому типу. Таким образом, квадратичная форма будет иметь эллиптический, гиперболический или параболический тип, если выражение  $\lambda_1 \lambda_2 = a_{11}a_{22} - a_{12}^2$  соответственно больше, меньше или равно нулю.

*Ранг квадратичной формы равен рангу ее матрицы.*

**Определение 2.21.** Квадратичная форма называется *положительно (отрицательно) определенной*, если при всех значениях переменных значения самой квадратичной формы положительные (отрицательные). Например, нетрудно видеть, что квадратичная форма  $F_1 = 3x_1^2 + 9x_2^2$  положительно определенная, а квадратичная форма  $F_2 = -x_1^2 + 4x_1x_2 - 4x_2^2$  — отрицательно определенная.

Сформулируем правила определения знака квадратичной формы.

**Правило 1.** Для того чтобы квадратичная форма была положительно (отрицательно) определенной, необходимо и достаточно, чтобы все собственные значения ее матрицы были положительные (отрицательные).

**Правило 2 (критерий Сильвестра<sup>1</sup>).** Для того чтобы квадратичная форма была положительно (отрицательно) определенной, необходимо и достаточно, чтобы все главные миноры ее матрицы были положительные (знаки главных миноров чередовались начиная со знака минус).

Рассмотрим решение задач.

### Пример 2.9

Приведем к каноническому виду квадратичную форму

$$F = x_1^2 - 3x_1x_2 + x_2^2.$$

*Решение*

Выделим полный квадрат при  $x_1$ :

$$F = x_1^2 - 2x_1(1,5x_2) + (1,5x_2)^2 - (1,5x_2)^2 + x_2^2 = (x_1 - 1,5x_2)^2 - 1,25x_2^2.$$

Введем новые переменные

$$y_1 = x_1 - 1,5x_2; \quad y_2 = x_2,$$

тогда  $F = y_1^2 - 1,25y_2^2$ .

Ответ:  $F = y_1^2 - 1,25y_2^2$ .

<sup>1</sup> Джеймс Джозеф Сильвестр (1814–1897) — английский математик.



### Пример 2.10

Приведем к каноническому виду квадратичную форму

$$5x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_2^2.$$

*Решение*

Матрица данной квадратичной формы имеет вид  $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ .

Найдем корни характеристического уравнения, т.е. собственные значения матрицы квадратичной формы:

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0, \lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0, \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 6.$$

Следовательно,  $F = x_1'^2 + 6x_2'^2$ . Так как оба решения 1 и 6 больше нуля, квадратичная форма относится к эллиптическому типу.

*Ответ:*  $F = x_1'^2 + 6x_2'^2$ .

### Пример 2.11

Докажем, что квадратичная форма  $F = -5x_1^2 + 6x_1x_2 - 13x_2^2$  является отрицательно определенной.

*Решение*

*1 способ.* Запишем матрицу квадратичной формы  $\begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 3 & -13 \end{pmatrix}$  и ее характеристическое уравнение, из которого найдем собственные значения:

$$\begin{vmatrix} -5-\lambda & 3 \\ 3 & -13-\lambda \end{vmatrix} = 0; (-5-\lambda)(-13-\lambda) - 9 = 0;$$

$$\lambda^2 + 18\lambda + 56 = 0; \lambda_1 = -14; \lambda_2 = -4.$$

Оба собственных значения отрицательные, следовательно, квадратичная форма отрицательно определенная.

*2 способ.* Используем критерий Сильвестра. Выпишем миноры матрицы квадратичной формы:

$$|a_{11}| = |-5| = -5 < 0; \begin{vmatrix} -5 & 3 \\ 3 & -13 \end{vmatrix} = 65 - 9 = 56 > 0.$$

Знаки чередуются начиная с минуса, следовательно, квадратичная форма отрицательно определена.

*Ответ:* доказано, что квадратичная форма отрицательно определенная.

## 2.4. Фигуры на плоскости и в пространстве

### 2.4.1. Прямая на плоскости

*Прямая на плоскости задается линейным уравнением*, т.е. уравнением, в которое переменные  $x, y$  входят в степени не больше первой. Перечислим различные виды уравнений, задающих прямую линию на плоскости.

1. *Общее уравнение* прямой линии

$$Ax + By + C = 0.$$



2. Уравнение прямой, *проходящей через две точки* с координатами  $(x_1; y_1), (x_2; y_2)$ :

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

3. Уравнение прямой, проходящей через точку с координатами  $(x_1; y_1)$  *параллельно вектору*  $(\alpha; \beta)$ , называемому направляющим вектором прямой:

$$\frac{x - x_1}{\alpha} = \frac{y - y_1}{\beta}.$$

4. Уравнение прямой, проходящей через точку с координатами  $(x_1; y_1)$  *перпендикулярно вектору*  $(A; B)$ , называемому нормальным вектором прямой:

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) = 0.$$

5. Уравнение прямой линии через *угловой коэффициент*

$$y = kx + b,$$

где  $k$  — тангенс угла наклона прямой к положительному направлению оси  $OX$ ;  $b$  — свободный член.

Рассмотрим особые случаи уравнений прямых линий. Например, при  $k = 0$  уравнение  $y = b$  задает горизонтальную прямую линию, отстоящую от оси абсцисс на  $b$  единиц, а при  $b = 0$  уравнение  $y = kx$  задает прямую, проходящую через начало координат; вертикальная прямая задается уравнением  $x = a$ .

Нетрудно заметить, что, выполнив несложные арифметические действия, от одного вида уравнения можно перейти к другому и наоборот. Так, полезно отметить, что по общему уравнению прямой линии  $Ax + By + C = 0$  находятся координаты направляющего и нормального векторов прямой: *направляющий вектор*  $\vec{p} = (-B; A)$ , *нормальный вектор*  $\vec{n} = (A; B)$ .

Сформулируем условия параллельности и перпендикулярности двух прямых на плоскости. Пусть даны две прямые, заданные уравнениями:

$$l_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0 \text{ или } y = k_1x + b_1;$$

$$l_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0 \text{ или } y = k_2x + b_2.$$

Прямые  $l_1, l_2$  *параллельны*, если  $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$  или  $k_1 = k_2$ ;

Прямые  $l_1, l_2$  *перпендикулярны*, если  $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$  или  $k_1 = -\frac{1}{k_2}$ .

Рассмотрим основные типы задач с решениями.

### Пример 2.12

Запишем уравнение прямой, проходящей через две заданные точки  $M_1(5, 3), M_2(-2, 4)$ . Представим это уравнение через угловой коэффициент, в общем виде, найдем координаты направляющего и нормального векторов.

*Решение*

Запишем уравнение прямой, проходящей через две заданные точки:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1},$$



и подставим туда координаты данных точек  $x_1 = 5, y_1 = 3, x_2 = -2, y_2 = 4$ , получим

$$\frac{x-5}{-2-5} = \frac{y-3}{4-3}.$$

Преобразуем последнее уравнение, выразим  $y$ :

$$\frac{x-5}{-7} = \frac{y-3}{1}, y = -\frac{x}{7} + \frac{26}{7}.$$

Последнее уравнение есть уравнение прямой через угловой коэффициент  $k = -\frac{1}{7}$ .

Перенесем все в одну сторону, получим общее уравнение прямой линии  $x + 7y - 16 = 0$ , т.е.  $Ax + By + C = 0$ , с направляющим вектором  $\vec{p} = (-7; 1)$  и нормальным вектором  $\vec{n} = (1; 7)$ .

Ответ:  $y = -\frac{x}{7} + \frac{26}{7}, x + 7y - 16 = 0, k = -\frac{1}{7}, \vec{p} = (-7; 1), \vec{n} = (1; 7).$

---

### Пример 2.13

Найдем угловые коэффициенты прямых линий, параллельных и перпендикулярных данной прямой  $2x + 4y - 3 = 0$ .

*Решение*

Выразим из уравнения  $y$ :  $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}$ . Угловой коэффициент прямой  $k = -\frac{1}{2}$ .

Следовательно, у прямых, параллельных данной, угловой коэффициент равен  $k_1 = k = -\frac{1}{2}$ , а у прямых, перпендикулярных данной, угловой коэффициент равен

$$k_2 = -\frac{1}{k} = 2.$$

Ответ:  $-\frac{1}{2}; 2.$

---

### 2.4.2. Кривые второго порядка

Если уравнение нелинейное, то линия, изображающая точки, удовлетворяющие этому уравнению, не будет прямой линией. Изучим линии, заданные уравнением второй степени. Они называются кривыми второго порядка.

*Общее уравнение кривой второго порядка* имеет вид

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + a_1x + a_2y + a_0 = 0,$$

где коэффициенты  $a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_1, a_2, a_0$  — произвольные действительные числа. К кривым второго порядка относятся эллипс, гипербола и парабола.

**Определение 2.22.** *Эллипсом* (рис. 2.11) называется множество точек плоскости, сумма расстояний каждой из которых до двух заданных точек  $F_1, F_2$ , называемых фокусами, есть величина постоянная, равная  $2a$ .

*Каноническое* («простейшее») уравнение эллипса имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$



где  $a$  — большая полуось;  $b$  — малая полуось эллипса. Фокусы имеют координаты  $F_1(-c; 0)$ ,  $F_2(c; 0)$ ;  $2c$  — фокусное расстояние. При таком задании эллипса его центр находится в начале координат. Между параметрами  $a$ ,  $b$ ,  $c$  для эллипса существует связь  $a^2 - c^2 = b^2$ .

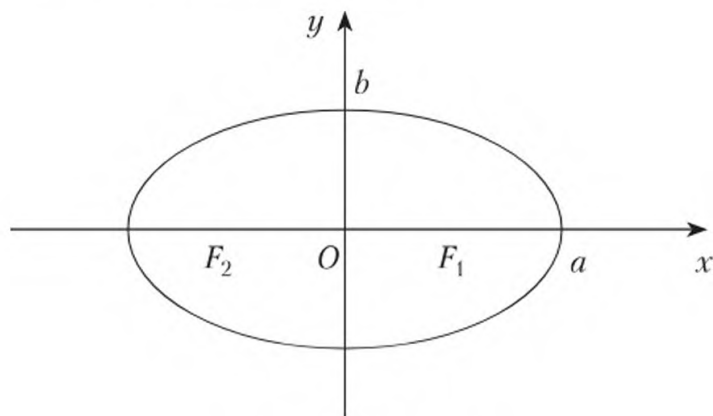


Рис. 2.11. Эллипс

Эксцентриситетом эллипса  $\epsilon$  называется отношение расстояния между фокусами к длине его большей оси, т.е.  $\epsilon = \frac{c}{a}$ , отсюда  $\frac{b}{a} = \sqrt{1 - \epsilon^2}$ . Таким образом, чем больше эксцентриситет, тем меньше отношение  $\frac{b}{a}$  и тем больше по оси  $Ox$  вытянут эллипс.

Если у эллипса  $a = b$ , то уравнение эллипса принимает вид  $x^2 + y^2 = a^2$  и определяет окружность с центром в начале координат и радиусом  $a$ . В этом случае  $c = 0$ .

**Определение 2.23.** Гиперболой (рис. 2.12) называется множество точек плоскости, разность расстояний от которых до двух заданных точек  $F_1, F_2$ , называемых фокусами, есть величина постоянная, равная  $2a$ .

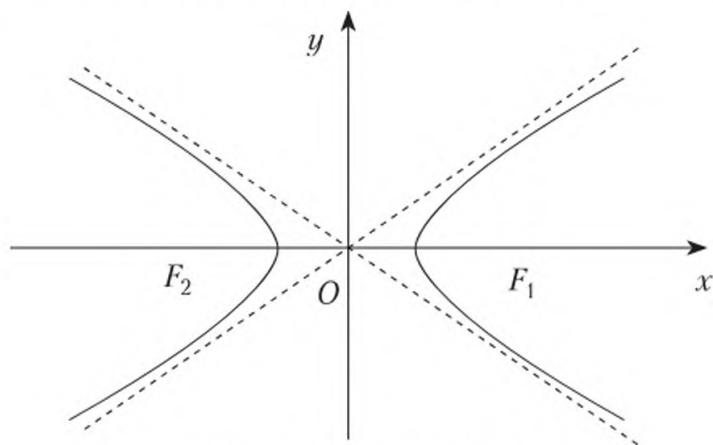


Рис. 2.12. Гипербола

Каноническое («простейшее») уравнение гиперболы имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$



где  $a$  — действительная полуось;  $b$  — мнимая полуось гиперболы. Фокусы имеют координаты  $F_1(-c; 0)$ ,  $F_2(c; 0)$ ,  $2c$  — фокусное расстояние. При таком задании гиперболы ее центр находится в начале координат. Между параметрами  $a, b, c$  гиперболы существует связь  $c^2 - a^2 = b^2$ . Прямые  $y = \pm \frac{b}{a}x$  называются *асимптотами* гиперболы.

*Эксцентриситетом* гиперболы  $\varepsilon$  называется отношение расстояния между фокусами к длине его большей оси, т.е.  $\varepsilon = \frac{c}{a} > 1$ , отсюда  $\frac{b}{a} = \sqrt{\varepsilon^2 - 1}$ .

Таким образом, чем меньше эксцентриситет гиперболы, тем больше вытянут основной прямоугольник по оси  $Ox$ .

Если у гиперболы  $a = b$ , то гипербола называется равносторонней или равнобочной и ее уравнение имеет вид  $x^2 - y^2 = a^2$ .

**Определение 2.24.** *Параболой* (рис. 2.13) называется множество точек плоскости, равноудаленных от данной точки  $F$ , называемой фокусом параболы, и от данной прямой  $l$ , называемой директрисой параболы.

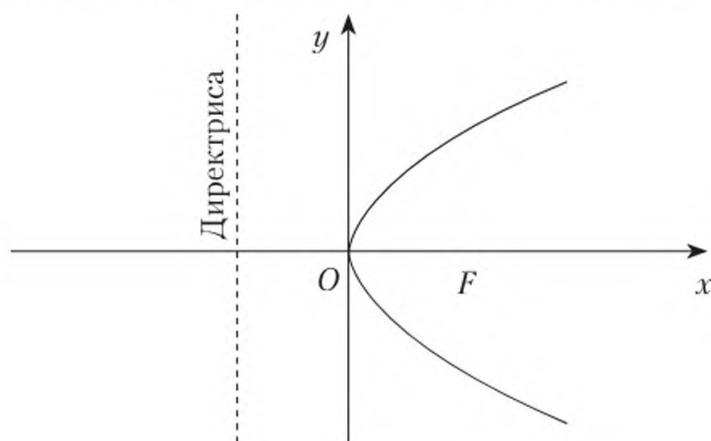


Рис. 2.13. Парабола

*Каноническое* («простейшее») уравнение параболы имеет вид

$$y^2 = 2px,$$

где  $p$  — параметр параболы. Фокус имеет координаты  $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ . Вершиной параболы называется точка пересечения параболы с ее осью симметрии.

*Директриса* параболы  $l$  имеет уравнение  $x = -\frac{p}{2}$ .

Чтобы привести общее уравнение кривой второго порядка к каноническому виду, нужно произвести преобразования поворота и параллельного переноса. Задачи приведения уравнения второго порядка к каноническому виду возникают при рассмотрении многомерных нормальных распределений случайных величин и имеют практическое значение. Рассмотрим преобразования коэффициентов уравнения линии второго порядка при повороте и параллельном переносе.



Пусть задано общее уравнение кривой второго порядка

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + a_1x + a_2y + a_0 = 0.$$

При повороте на угол  $\varphi$  подставим в общее уравнение вместо  $x, y$  выражения

$$\begin{cases} x = x' \cos \varphi - y' \sin \varphi, \\ y = x' \sin \varphi + y' \cos \varphi. \end{cases}$$

Получим уравнение

$$a'_{11}x'^2 + 2a'_{12}x'y' + a'_{22}y'^2 + 2a'_1x' + 2a'_2y' + a'_0 = 0.$$

Выберем угол  $\varphi$  так, чтобы  $\operatorname{ctg} 2\varphi = \frac{a_{11} - a_{22}}{2a_{12}}$ , тогда коэффициент  $a'_{12} = 0$ .

Далее дополним до полных квадратов слагаемые в уравнение следующим образом:

$$a'_{11}(x'^2 + 2a'_1x' / a'_{11} + (a'_1 / a'_{11})^2) + a'_{22}(y'^2 + 2a'_2y' / a'_{22} + (a'_2 / a'_{22})^2) - (a'_1 / a'_{11})^2 - (a'_2 / a'_{22})^2 + a'_0 = 0.$$

Обозначим

$$\begin{cases} x'' = x' + a'_1 / a'_{11}, \\ y'' = y' + a'_2 / a'_{22}, \\ a'' = a'_0 - (a'_1 / a'_{11})^2 - (a'_2 / a'_{22})^2 \end{cases}.$$

Итак, уравнение приведено к каноническому виду

$$a''_{11}x''^2 + a''_{22}y''^2 + a'' = 0 \quad \left( \frac{a''_{11}x''^2}{-a''} + \frac{a''_{22}y''^2}{-a''} = 1 \right).$$

Величины

$$\Delta_1 = a_{11} + a_{22}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_0 \end{vmatrix}$$

не меняются при любом преобразовании координат общего уравнения и называются *инвариантами* общего уравнения кривой второго порядка относительно преобразования прямоугольных координат.

Каждому уравнению

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + a_1x + a_2y + a_0 = 0$$

соответствует квадратичная форма

$$F = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2.$$

Кривая второго порядка будет иметь эллиптический, гиперболический или параболический тип, если выражение  $\Delta_2 = \lambda_1 \lambda_2 = a_{11}a_{22} - a_{12}^2$  соответ-



ственно больше, меньше или равно нулю;  $\lambda_1, \lambda_2$  — корни характеристического многочлена

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Центром кривой второго порядка называется точка, после перенесения в которую начала координат уравнение кривой не содержит членов первой степени. Его координаты

$$x_0 = \frac{\begin{vmatrix} a_{12} & a_1 \\ a_{22} & a_2 \end{vmatrix}}{\Delta_2}; y_0 = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & a_{11} \\ a_2 & a_{12} \end{vmatrix}}{\Delta_2}.$$

Кривая второго порядка называется *вырожденной*, если  $\Delta_3 = 0$ , и *невырожденной*, если  $\Delta_3 \neq 0$ .

К невырожденным кривым относятся уже рассмотренные эллипс, гипербола и парабола, а также мнимый эллипс  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$ , не имеющий ни одной точки.

Для вырожденных кривых могут возникать следующие варианты:

- вырожденный эллипс (при условии  $\Delta_2 > 0$ ) — вещественная точка на пересечении двух мнимых прямых;
- вырожденная гипербола (при условии  $\Delta_2 < 0$ ) — пара вещественных пересекающихся прямых;
- вырожденная парабола (при условии  $\Delta_2 = 0$ ):
  - пара вещественных параллельных прямых (при условии  $B = \begin{vmatrix} a_{11} & a_1 \\ a_1 & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_2 \\ a_2 & a_{33} \end{vmatrix} < 0$ );
  - одна вещественная прямая, т.е. две слившиеся параллельные прямые (при условии  $B = 0$ );
  - пара мнимых параллельных прямых, т.е. ни одной вещественной точки (при условии  $B > 0$ ).

Приведем таблицу всех кривых второго порядка: вырожденных и невырожденных (табл. 2.1).

Таблица 2.1

#### Классификация кривых второго порядка по инвариантам

Инвариант $\Delta_3$	Инвариант $\Delta_2$	Вид кривой
$\Delta_3 \neq 0$ , знаки $\lambda_1$ и $\Delta_3$ противоположны	$\Delta_2 > 0$ , знаки $\lambda_1$ и $\lambda_2$ совпадают	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ — эллипс
$\Delta_3 \neq 0$ , знаки $\lambda_1$ и $\Delta_3$ совпадают	$\Delta_2 > 0$ , знаки $\lambda_1$ и $\lambda_2$ совпадают	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$ — мнимый эллипс
$\Delta_3 = 0$	$\Delta_2 > 0$ , знаки $\lambda_1$ и $\lambda_2$ совпадают	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$ — две мнимых пересекающихся прямых



Инвариант $\Delta_3$	Инвариант $\Delta_2$	Вид кривой
$\Delta_3 \neq 0$	$\Delta_2 < 0$ , знаки $\lambda_1$ и $\lambda_2$ противоположны	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1$ — гипербола
$\Delta_3 = 0$	$\Delta_2 < 0$ , знаки $\lambda_1$ и $\lambda_2$ противоположны	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$ — две действительных пересекающихся прямых
$\Delta_3 \neq 0$	$\Delta_2 = 0$	Парабола, при $\lambda_2 \neq 0$ уравнение $\lambda_2 y^2 + 2px = 0$ , $p = -\frac{\Delta_3}{\lambda_2}$
$\Delta_3 = 0$	$\Delta_2 = 0$	Две параллельных прямых

Рассмотрим решение примеров.

#### Пример 2.14

Найдем параметры эллипса  $a, b, c, \varepsilon$ , заданного уравнением  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 4$ .

*Решение*

Чтобы привести уравнение к каноническому виду  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ , поделим его левую и правую части на 4. Получим  $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{36} = 1$ . Отсюда имеем

$$a = 8, b = 6, c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{64 - 36} = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}, \varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{2\sqrt{7}}{8} = \frac{\sqrt{7}}{4}.$$

*Ответ:*  $a = 8, b = 6, c = 2\sqrt{7}, \varepsilon = \frac{\sqrt{7}}{4}$ .

#### Пример 2.15

Найдем параметры гиперболы  $a, b, c, \varepsilon$ , заданной уравнением  $x^2 - 4y^2 = 36$ .

*Решение*

Чтобы привести уравнение к каноническому виду  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ , поделим его левую и правую части на 36. Получим  $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{9} = 1$ . Отсюда имеем

$$a = 6, b = 3, c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{36 + 9} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}, \varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{3\sqrt{5}}{6} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

*Ответ:*  $a = 6, b = 3, c = 3\sqrt{5}, \varepsilon = \frac{\sqrt{5}}{2}$ .

#### Пример 2.16

Парабола с вершиной в начале координат проходит через точку  $A(9; 3)$  и симметрично относительно оси  $Ox$ . Запишем ее каноническое уравнение.



Решение

Подставим координаты точки  $A$  в уравнение параболы  $y^2 = 2px$ . Получим  $9^2 = 2p \cdot 3 = 6p$ . Отсюда  $p = \frac{1}{2}$ . Значит, уравнение искомой параболы  $y^2 = x$ .

Ответ:  $y^2 = x$ .

### Пример 2.17

Приведем уравнение кривой второго порядка к каноническому виду:

$$5x^2 + 8xy + 5y^2 - 18x - 18y + 9 = 0.$$

Решение

Вычислим  $\Delta_2$ :  $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 9 > 0$ , следовательно, кривая эллиптического типа.

Так как присутствует член, содержащий  $xy$ , осуществим поворот. Решим характеристическое уравнение  $\begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 \\ 4 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0$ :  $\lambda_1 = 9, \lambda_2 = 1$ . Значит, квадратичная форма  $F = 5x^2 + 8xy + 5y^2$  в новой системе координат  $x'Oy'$  запишется в виде  $F = \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 = 9x'^2 + y'^2$ .

Найдем угол  $\varphi$  из условия  $\operatorname{ctg} 2\varphi = \frac{a_{11} - a_{22}}{2a_{12}} = 0$ . Получим  $2\varphi = \frac{\pi}{2}$ ;  $\varphi = \frac{\pi}{4}$ . Формулы преобразования координат

$$\begin{cases} x = x' \cos \varphi - y' \sin \varphi, \\ y = x' \sin \varphi + y' \cos \varphi \end{cases}$$

примут вид

$$\begin{cases} x = x' \cos \frac{\pi}{4} - y' \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y'), \\ y = x' \sin \frac{\pi}{4} + y' \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y'). \end{cases}$$

Подставим эти выражения в исходное уравнение, получим

$$9x'^2 + y'^2 - \frac{36x'}{\sqrt{2}} + 9 = 0.$$

Для параллельного переноса выделим полный квадрат:

$$\begin{aligned} 9\left(x'^2 - 2 \cdot \frac{2x'}{\sqrt{2}} + 2\right) + y'^2 - 18 + 9 &= 0; \\ 9x''^2 + y''^2 &= 9; \\ x''^2 + \frac{y''^2}{9} &= 1, \end{aligned}$$

где  $x'' = x' - \sqrt{2}$ ;  $y'' = y'$ .

Ответ: эллипс  $x''^2 + \frac{y''^2}{9} = 1$ .



### 2.4.3. Прямая и плоскость в пространстве

Рассмотрим трехмерное векторное пространство.

Уравнение *плоскости*, проходящей через точку  $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$  и перпендикулярной вектору  $\vec{n} = (A, B, C)$  ( $\vec{n}$  — нормаль, или нормальный вектор плоскости), представляется уравнением первой степени

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Если обозначить  $D = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0)$ , то уравнение плоскости примет вид

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Это *общее уравнение* плоскости.

Таким образом, можно сформулировать теорему.

**Теорема 2.3.** *Всякое уравнение первой степени  $Ax + By + Cz + D = 0$ , где  $A, B, C$  не равны нулю одновременно, задает плоскость в трехмерном пространстве. Верно и обратное: всякая плоскость в трехмерном пространстве задается таким линейным уравнением.*

Уравнение плоскости в **отрезках**

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 0,$$

где  $a, b, c$  — величины отрезков, отсекаемых плоскостью от осей координат.

Уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки  $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ ,  $M_1 = (x_1, y_1, z_1)$ ,  $M_2 = (x_2, y_2, z_2)$ , имеет вид

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Расстояние от точки  $(x_1; y_1; z_1)$  до плоскости  $Ax + By + Cz + D = 0$  равно

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Две плоскости, заданные уравнениями  $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ ,  $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ , *параллельны*, если координаты нормальных векторов этих плоскостей пропорциональны, т.е.  $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$ . Если  $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$ , то плоскости совпадают.

Две плоскости, заданные уравнениями  $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ ,  $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ , *перпендикулярны* (ортогональны), если перпендикулярны нормальные вектора этих плоскостей, т.е. скалярное произведение нормальных векторов равно нулю:  $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$ .

Прямую в пространстве можно определить как пересечение двух плоскостей, таким образом, уравнение прямой в пространстве представляется как система, состоящая из уравнений двух плоскостей

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$$



Это общее уравнение прямой линии в пространстве.

Уравнение прямой, проходящей через точку  $M_0 = (x_0; y_0; z_0)$  параллельно вектору  $\vec{p} = (m; n; q)$ , называется каноническим уравнением прямой в пространстве:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{q}.$$

Рассмотрим задачи с решениями.

#### Пример 2.18

Запишем уравнение плоскости, проходящей через точку  $(-1; 5; 1)$  перпендикулярно вектору  $(2; -4; 3)$ .

*Решение*

Подставим координаты точки и вектора в уравнение  $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$ , получим  $2[x - (-1)] + (-4)(y - 5) + 3(z - 1) = 0$  и окончательно  $2x - 4y + 3z + 19 = 0$ .

*Ответ:*  $2x - 4y + 3z + 19 = 0$ .

#### Пример 2.19

Найдем расстояние от точки  $M(1; 0; -2)$  до плоскости  $2x - y + 2z - 4 = 0$ .

*Решение*

Подставим значения координаты точки и уравнение плоскости в формулу, получим

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|1 \cdot 2 + (-1) \cdot 0 + 2 \cdot (-2) - 4|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \frac{6}{3} = 2.$$

*Ответ:*  $d = 2$ .

#### Пример 2.20

Найдем значение параметра  $\alpha$ , при котором плоскости  $3x + y + 3\alpha z + 5 = 0$  и  $3,5x + 2\alpha y + z + 3 = 0$  перпендикулярны.

*Решение*

Запишем скалярное произведение нормальных векторов плоскостей и приравняем его к нулю:  $3 \cdot 5 + 1 \cdot (-2\alpha) + (-3\alpha) \cdot 1 = 0$ . Найдем  $\alpha$ :  $5\alpha = 15$ ,  $\alpha = 3$ .

*Ответ:*  $\alpha = 3$ .

#### Пример 2.21

Найдем значение параметра  $\alpha$ , при котором плоскости  $3x + 2y - 2\alpha z + 5 = 0,3$  и  $3x + 2y + 7z + 3 = 0$  параллельны.

*Решение*

Запишем условие параллельности двух плоскостей  $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$ :  $\frac{3}{3} = \frac{2}{2} = \frac{-2\alpha}{7}$ ,

т.е.  $\frac{-2\alpha}{7} = 1$ ;  $\alpha = -3,5$ .

*Ответ:*  $\alpha = -3,5$ .



В завершение дадим определение поверхностей второго порядка и их классификацию.

Поверхность второго порядка задается *общим уравнением*

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{23}yz + 2a_{13}xz + 2a_1x + 2a_2y + 2a_3z + a_0 = 0,$$

в котором по крайней мере один из коэффициентов  $a_{ij}$  отличен от нуля. Это уравнение аналогично случаю кривых второго порядка приводится к каноническому виду. В результате получается одна из следующих поверхностей: сфера, эллипсоид, однополостный гиперболоид, двуполостный гиперболоид, конус второго порядка, эллиптический и гиперболический параболоиды, а также вырожденные поверхности, рассмотрение которых не входит в программу.

### Задания для самостоятельной работы

- 2.1.** Найдите длину и направляющие косинусы радиус-вектора точки  $M(-7; -6; 6)$ .
- 2.2.** Найдите длину и направляющие косинусы вектора  $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ , а также единичный вектор  $\vec{a}^0$  того же направления, если имеем  $A(3; -4; 6)$ ,  $B(1; 2; 3)$ . (Указание: единичный вектор  $\vec{a}^0$  — это орт вектора  $\vec{a}$ .)
- 2.3.** Найдите координаты вектора  $\vec{a}$ , если известно, что его длина  $|\vec{a}| = 4$ , а углы, образуемые им с осями координат, равны соответственно  $\alpha = 60^\circ$ ,  $\beta = 120^\circ$ ,  $\gamma = 45^\circ$ .
- 2.4.** Найдите значения  $m$  и  $n$ , при которых являются коллинеарными векторы  $\vec{a} = (-3; m; 9)$  и  $\vec{b} = (2; -8; n)$ .
- 2.5.** Проверьте принадлежность данных точек одной прямой: а)  $A(3; 4; 1)$ ,  $B(1; 0; -1)$  и  $C(-2; -6; -4)$ ; б)  $A(3; 2; -1)$ ,  $B(5; -1; 4)$  и  $C(1; -7; 12)$ . (Указание: используйте коллинеарность векторов, лежащих на одной прямой и имеющих общее начало.)
- 2.6.** Даны векторы  $\vec{a} = (-3; 4; -1)$ ,  $\vec{b} = (-1; 2; 3)$  и  $\vec{c} = (-4; -2; 1)$ . Найдите вектор  $\vec{x} = 4\vec{a} + 3\vec{b} - 2\vec{c}$  и вектор  $\vec{y} = -5\vec{a} + 4\vec{b} + \vec{c}$ . (Указание: выполнение действий с векторами сводится к выполнению этих же действий с соответствующими координатами.)
- 2.7.** Известно, что  $|\vec{a}| = 5$ ,  $|\vec{b}| = 6$ . Найдите скалярное произведение векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , если угол  $\varphi$  между ними равен: а)  $45^\circ$ ; б)  $60^\circ$ ; в)  $135^\circ$ .
- 2.8.** Найдите векторное произведение  $\vec{a} \times \vec{b}$ , если известно:
- а)  $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 5\vec{k}$ ,  $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ ;  
б)  $\vec{a} = 5\vec{i} - 4\vec{j} + 7\vec{k}$ ,  $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$ ;  
в)  $\vec{a} = (-1; 2; 4)$ ,  $\vec{b} = (2; -1; -4)$ ;  
г)  $\vec{a} = (7; -9; 3)$ ,  $\vec{b} = (-1; 4; 0)$ .
- 2.9.** Вычислите площадь параллелограмма, построенного на векторах  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  как на сторонах, если  $\vec{a} = (3; -2; 6)$ ,  $\vec{b} = (6; 3; -2)$ . (Указание: воспользуйтесь геометрическим смыслом модуля вектора векторного произведения.)
- 2.10.** Вычислите площадь треугольника с вершинами в точках  $A(-3; -2; -4)$ ,  $B(-1; -4; -7)$  и  $C(1; -2; 2)$ . (Указание: площадь треугольника  $ABC$  равна половине площади параллелограмма, построенного на векторах  $\overrightarrow{AB}$  и  $\overrightarrow{AC}$ .)
- 2.11.** Даны векторы  $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$  и  $\vec{b} = 3\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$ . Найдите векторное произведение векторов  $\vec{x}$  и  $\vec{y}$ , если  $\vec{x} = 2\vec{a} - \vec{b}$ ,  $\vec{y} = \vec{a} + 2\vec{b}$ .



**2.12.** Вычислите площадь параллелограмма, построенного на векторах  $\vec{x}$  и  $\vec{y}$  как на сторонах, если  $\vec{x} = \vec{a} + 4\vec{b}$ ,  $\vec{y} = 4\vec{a} + \vec{b}$ ,  $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$  и угол между векторами  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  равен  $30^\circ$ .

**2.13.** Дан треугольник с вершинами в точках  $A(9; -9; 13)$ ,  $B(7; -13; 17)$  и  $C(17; -3; 17)$ . Найдите длину высоты, проведенной из вершины  $C$ . (Указание: воспользуйтесь различными формулами для вычисления площади треугольника.)

**2.14.** Найдите смешанное произведение  $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}$  векторов, если  $\vec{a} = (1; 1; 2)$ ,  $\vec{b} = (1; -2; 3)$  и  $\vec{c} = (2; 1; 1)$ .

**2.15.** Проверьте, будут ли векторы  $\vec{a} = (1; 2; 2)$ ,  $\vec{b} = (2; 5; 7)$  и  $\vec{c} = (1; 1; -1)$  компланарными.

**2.16.** Проверьте, принадлежат ли точки  $A(3; 5; -4)$ ,  $B(1; -1; -3)$ ,  $C(7; 2; -6)$  и  $D(-1; 3; -2)$  одной плоскости. (Указание: используя данные точки, определите три вектора с общим началом и проверьте для них условие компланарности.)

**2.17.** Вычислите объем параллелепипеда, построенного на векторах  $\vec{a} = (3; 2; 1)$ ,  $\vec{b} = (1; 0; -1)$  и  $\vec{c} = (1; -2; 1)$ .

**2.18.** Вычислите высоту параллелепипеда, построенного на векторах  $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$ ,  $\vec{b} = -\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$  и  $\vec{c} = 2\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$ . За основание параллелепипеда взят параллелограмм, построенный на векторах  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ .

**2.19.** Для системы векторов  $\vec{a}_1 = (1; -1; 2; 1)$ ,  $\vec{a}_2 = (2; 1; -1; 3)$ ,  $\vec{a}_3 = (6; 0; 2; 8)$ ,  $\vec{a}_4 = (-1; -2; 3; -2)$ ,  $\vec{a}_5 = (3; 0; 1; 4)$  выделите максимальную линейно независимую подсистему и представьте оставшиеся векторы в виде линейной комбинации из линейно независимых векторов.

**2.20.** Постройте ортогональный базис, в который включен вектор  $\vec{a}_1 = (2; -2; 1)$ , и полученный базис замените ортонормированным.

**2.21.** Дополните данную систему векторов  $\vec{a}_1 = (6; -8; 5; -10)$ ,  $\vec{a}_2 = (10; 5; 8; 6)$  до ортогонального базиса и полученный базис замените ортонормированным.

**2.22.** Докажите, что векторы  $\vec{a}_1 = (-1; 2; 1)$ ,  $\vec{a}_2 = (2; 1; -2)$ ,  $\vec{a}_3 = (1; 1; 1)$  образуют базис и найдите координаты вектора  $\vec{x} = (-3; 4; 5)$  в этом базисе.

**2.23.** В «новом» базисе из векторов  $\vec{a}_1 = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3$ ,  $\vec{a}_2 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$ ,  $\vec{a}_3 = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$  вектор  $\vec{x}$  имеет разложение  $\vec{x} = 2\vec{a}_1 + 3\vec{a}_2 - \vec{a}_3$ . Найдите координаты вектора  $\vec{x}$  в «старом» базисе из векторов  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ , а также матрицу перехода от базиса  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$  к базису  $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$ .

**2.24.** Найдите собственные значения и собственные векторы линейного оператора, заданного в некотором базисе трехмерного пространства матрицей:

$$\begin{array}{llll} \text{а)} \begin{pmatrix} 5 & 6 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}; & \text{б)} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}; & \text{в)} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix}; & \text{г)} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{pmatrix}; \\ \text{д)} \begin{pmatrix} 2 & 5 & -6 \\ 4 & 6 & -9 \\ 3 & 6 & -8 \end{pmatrix}; & \text{е)} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 5 & 6 & -3 \end{pmatrix}; & \text{ж)} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -3 & 3 & 5 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}; & \text{з)} \begin{pmatrix} 5 & 6 & -2 \\ 6 & 9 & -4 \\ 6 & 8 & -3 \end{pmatrix}. \end{array}$$

**2.25.** В трехмерном пространстве отображение  $\Phi$  задано в некотором базисе матрицей. Приведите матрицу линейного оператора к диагональной форме, если это возможно:

$$\begin{array}{llll} \text{а)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}; & \text{б)} \begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & 1 \end{pmatrix}; & \text{в)} \begin{pmatrix} 13 & 16 & 16 \\ -5 & -7 & -6 \\ -6 & -8 & -7 \end{pmatrix}; & \text{г)} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}; \end{array}$$



$$д) \begin{pmatrix} -4 & 2 & 10 \\ -4 & 3 & 7 \\ -3 & 1 & 7 \end{pmatrix}; е) \begin{pmatrix} 7 & 12 & -2 \\ 3 & -4 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}; ж) \begin{pmatrix} -2 & 8 & 6 \\ -4 & 10 & 6 \\ 4 & -8 & -4 \end{pmatrix}; з) \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -1 & 8 & 6 \\ 2 & -14 & -10 \end{pmatrix}.$$

**2.26.** Приведите к каноническому виду квадратичную форму:

а)  $2x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2$ ; б)  $4x_1x_2 + 3x_2^2$ ; в)  $x_1^2 + \sqrt{3}x_1x_2 + 2x_2^2$ .

**2.27.** Выясните тип и знак квадратичной формы:

а)  $F = 5x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2$ ; б)  $F = x_1^2 + 12x_1x_2 + x_2^2$ ; в)  $F = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2$ .

**2.28.** Напишите уравнение прямой, проходящей через две заданные точки. Представьте это уравнение через угловой коэффициент, в общем виде, найдите координаты направляющего и нормального векторов:

а)  $M_1(15; 30)$ ,  $M_2(-20; 4)$ ;

б)  $M_1(5; -13)$ ,  $M_2(2; 1)$ .

**2.29.** Найдите угловые коэффициенты прямых линий, параллельных и перпендикулярных данной:

а)  $4x + 2y - 3 = 0$ ;

б)  $x - y - 3 = 0$ .

**2.30.** Определите тип кривой второго порядка и параметры  $a, b, c, \epsilon, p$ :

а)  $x^2 + 4y^2 - 36 = 0$ ;

б)  $4x^2 + 4y^2 - 36 = 0$ ;

в)  $6x^2 - 4y^2 - 36 = 0$ ;

г)  $4(y^2 - 5) = -20 + x$ .

**2.31.** Приведите уравнение кривой второго порядка к каноническому виду:

а)  $3x^2 + 3y^2 - 6x - 12y + 3 = 0$ ;

б)  $3x^2 + 2y^2 - 6x - 12y + 15 = 0$ ;

в)  $x^2 - 2y^2 + 4y - 4 = 0$ ;

г)  $4x - 3y^2 + 12y - 12 = 0$ ;

д)  $4x^2 - 4xy + y^2 - 2x - 14y + 7 = 0$ ;

е)  $3x^2 + 10xy + 3y^2 - 2x - 14y - 13 = 0$ ;

ж)  $17x^2 + 12xy + 8y^2 = 20$ .

**2.32.** Даны точки  $M_1(0; -1; 3)$  и  $M_2(1; 3; 5)$ . Напишите уравнение плоскости, проходящей через точку  $M_1$  и перпендикулярной к вектору  $\overline{M_1M_2}$ .

**2.33.** Запишите уравнение прямой, проходящей через точку  $A(2; -3; -8)$  и параллельной:

а) оси  $Oz$ ;

б) прямой  $\frac{x-2}{3} = \frac{y-4}{-2} = \frac{z+3}{5}$ .



## Глава 3

# ЭЛЕМЕНТЫ ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ

---

В результате изучения главы 3 студент должен:

**знать**

- основы дискретной математики (элементы теории множеств, комбинаторики, математической логики, метод математической индукции);
- элементы алгебры, теории кодирования, теории формальных грамматик, необходимые для успешного изучения математических и теоретико-информационных дисциплин, решения задач, возникающих в профессиональной сфере, в том числе экономических задач;
- основные понятия алгебры высказываний, логические операции над высказываниями, основные понятия логики предикатов, основные равносильности алгебры логики и логики предикатов, понятие об исчислении высказываний и его проблемах;
- основы теории графов;

**уметь**

- решать основные задачи векторной алгебры: вычисление линейных комбинаций, скалярного, векторного и смешанного произведения векторов, находить базис линейной оболочки заданных векторов и ее линейного дополнения;
- применять методы дискретной математики для решения математических задач, построения и анализа моделей в экономике и информатике;
- составлять таблицы истинности для формул алгебры логики, выполнять равносильные преобразования формул алгебры логики и логики предикатов, решать логические задачи методами алгебры логики, применять средства языка логики предикатов для записи и анализа математических предложений;
- решать задачи из области теории графов;

**владеть**

- методикой построения, анализа и применения математических моделей в экономике и информатике;
  - техникой равносильных преобразований логических формул;
  - методами распознавания тождественно истинных формул и равносильных формул;
  - методами решения основных задач математической логики.
- 

### 3.1. Комбинаторика

*Комбинаторика* — ветвь математики, изучающая комбинации и перестановки предметов, — возникла в XVII в.

Являясь самостоятельным разделом курса математики, комбинаторика часто служит основой для решения многих задач, возникающих в том числе и в теории вероятностей.



При изучении комбинаторики используют понятия теории множеств: элемент множества, объединение и пересечение множеств, декартово произведение множеств, численность (мощность) множества.

Комбинаторика изучает различные соединения элементов каких-либо множеств, а также отвечает на вопросы о том, сколько различных соединений, подчиненных определенным условиям, из этих элементов можно составить. Сейчас комбинаторные методы применяются в теории случайных процессов, статистике, математическом программировании, вычислительной математике, планировании экспериментов и т.д.

### 3.1.1. Элементы теории множеств. Правила суммы и произведения

В первых двух главах неоднократно использовалось понятие множества. Дадим здесь его строгое определение.

**Определение 3.1.** *Множество* — это совокупность элементов произвольной природы, объединенных по какому-нибудь общему для них свойству.

Примеры множеств: множество рабочих и служащих, занятых на каком-нибудь производстве (трудовой коллектив); множество целых положительных чисел (натуральные числа) и т.п.

Множества обозначаются большими буквами  $A, B, C, \dots$ . Элементы множества — малыми буквами  $a, b, c, \dots$ .

Запись  $a \in A$  (или  $a \notin A$ ) означает, что элемент  $a$  принадлежит (или не принадлежит) множеству  $A$ .

Запись  $A \subset B$  означает, что все элементы множества  $A$  являются элементами множества  $B$ , т.е.  $A$  является подмножеством множества  $B$  (рис. 3.1).

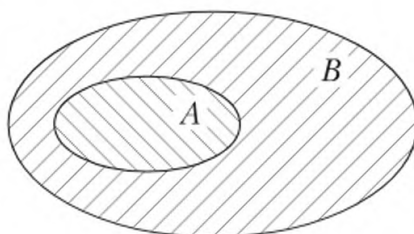


Рис. 3.1. Множество  $A$  — подмножество множества  $B$

Запись  $A = B$  означает, что множества  $A$  и  $B$  состоят из одних и тех же элементов.

Рассмотрим *операции над множествами*.

Объединение множеств:  $A \cup B$  — множество, состоящее из элементов обоих множеств  $A$  и  $B$  (рис. 3.2).

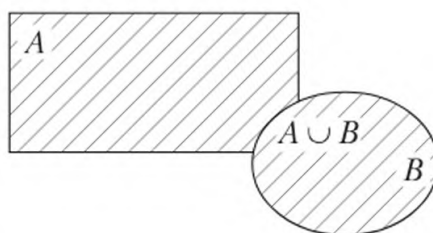


Рис. 3.2. Объединение множеств



Пересечение множеств:  $A \cap B$  — множество, состоящее из общих элементов двух множеств  $A$  и  $B$  (рис. 3.3).

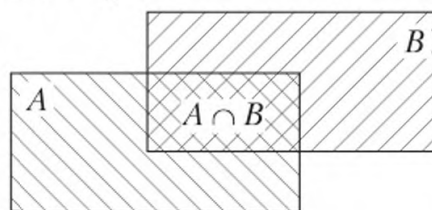


Рис. 3.3. Пересечение множеств

Приведем примеры числовых множеств.

$N = \{1, 2, 3, \dots\}$  — множество натуральных чисел.

$Z = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$  — множество целых чисел.

$Q = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in Z; b \neq 0 \right\}$  — множество рациональных чисел.

Для рациональных чисел имеется представление в виде десятичной дроби, но это либо конечная десятичная дробь, либо бесконечная периодическая десятичная дробь.

Множество бесконечных непериодических дробей образует множество иррациональных чисел  $J$  (например,  $\sqrt{2} \approx 1,4142\dots$ ;  $\pi \approx 3,141592\dots$  — иррациональные числа).

$R = Q \cup J$  — множество действительных чисел.

Для числовых множеств имеет место цепочка включений:  $N \subset Z \subset Q \subset R$ .

Если выбрать на прямой:

- 1) точку  $O$  — начало отсчета;
- 2)  $[OE]$  — масштабный единичный отрезок  $[0; 1]$ ;
- 3) направление отсчета (положительное),

то множество  $R$  изображается точками этой прямой, называемой *числовой прямой* (рис. 3.4).



Рис. 3.4. Числовая прямая

Числовые промежутки (рис. 3.5):

$(a, b) = \{x \in R \mid a < x < b\}$  — интервал;

$[a, b) = \{x \in R \mid a \leq x < b\}$  — полуинтервал;

$(-\infty, +\infty)$  — бесконечный интервал;

$(-\infty, a)$  и  $(b, +\infty)$  — бесконечные полуинтервалы;

$[a, b] = \{x \in R \mid a \leq x \leq b\}$  — отрезок (замкнутый интервал или сегмент);

$(a - \epsilon, a + \epsilon)$  — окрестность точки  $a$  радиуса  $\epsilon$ , или  $\epsilon$ -окрестность точки  $a$ .

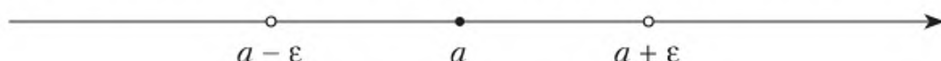


Рис. 3.5.  $\epsilon$ -окрестность точки  $a$

**Определение 3.2.** Множество  $C \subset R$  называется *ограниченным сверху* (снизу), если существует такое число  $c$ , что для любого  $x \in C$  выполняется



$x \leq c$  (соответственно  $x \geq c$ ). При этом число  $c$  называется верхней (нижней) *гранью* множества  $C$ .

### Пример 3.1

Число  $c$  для  $C = (-\infty, c)$  и  $C = (c, +\infty)$  является соответственно верхней и нижней гранью.

**Определение 3.3.** Точной верхней гранью множества  $C$  ( $\text{Sup}C$ ) называется наименьшее из чисел, ограничивающих множество  $C$  сверху. Точной нижней гранью множества  $C$  ( $\text{Inf}C$ ) называется наибольшее из чисел, ограничивающих множество  $C$  снизу.

### Пример 3.2

Для  $C = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$  имеем  $\text{Inf}C = 0$  и  $\text{Sup}C = 1$ .

### Пример 3.3

Для  $C = [a, b)$  имеем  $\text{Sup}C = b$  и  $\text{Inf}C = a$  и при этом  $\text{Sup}C \notin C$ , а  $\text{Inf}C \in C$ .

Теория множеств занимается изучением свойств как произвольных множеств, так и множеств специального вида независимо от природы образующих их элементов. Терминология и многие результаты этой теории широко используются в математике, например в комбинаторике, геометрии и теории вероятностей.

При решении практических задач часто приходится выбирать из некоторого множества объектов подмножества элементов, обладающих теми или иными свойствами, располагать элементы одного или нескольких множеств в определенном порядке и т.д. Поскольку в таких задачах речь идет о тех или иных комбинациях объектов, их называют *комбинаторными задачами*.

Если некоторое множество  $M$  состоит из  $n$  элементов ( $m(M) = n$ ), то один элемент из этого множества можно выбрать  $n$  способами. Для подсчета способов выбора более сложных соединений из элементов множеств применяют комбинаторные правила и формулы.

**Правило суммы.** Если один элемент из множества  $A$  можно выбрать  $m(A)$  способами, один элемент из множества  $B$  можно выбрать  $m(B)$  способами, то один элемент из объединения множеств  $A$  и  $B$  ( $A \cup B$ ) можно выбрать  $m(A) + m(B)$  способами при условии, что множества  $A$  и  $B$  не пересекаются ( $A \cap B = \emptyset$ ).

### Пример 3.4

Банк имеет 10 филиалов в европейской части России и 15 филиалов в азиатской части России. Правление банка принимает решение о проверке работы всех своих филиалов. Сколькими различными способами можно выбрать один филиал для проверки с участием председателя правления банка?



*Решение*

Множество европейских филиалов обозначим  $A$ , тогда  $m(A) = 10$ , множество азиатских филиалов обозначим  $B$ , тогда  $m(B) = 15$ . Понятно, что условие  $A \cap B = \emptyset$  выполнено. Для ответа на вопрос задачи необходимо выбрать один элемент из объединения непересекающихся множеств. Поэтому применяем правило суммы:  $10 + 15 = 25$ .

*Ответ:* 25.

---

Правило суммы применяется в тех случаях, когда речь идет о выборе *одного элемента* из какой-либо совокупности, представленной объединением непересекающихся множеств, поэтому его можно обобщать на любое количество таких множеств.

В сложных задачах правило суммы применяется при необходимости подсчета количества независимых исходов, связанных с составлением каких-либо соединений элементов с заданными свойствами (если проведена детализация определенного свойства).

**Правило произведения.** Если элемент  $x$  из множества  $A$  можно выбрать  $m(A)$  способами, элемент  $y$  из множества  $B$  можно выбрать  $m(B)$  способами, то упорядоченную пару вида  $(x; y)$  можно выбрать  $m(A) \cdot m(B)$  способами.

Набор элементов считается упорядоченным, если элементы выбираются из различных множеств; если набор формируется из элементов одного и того же множества, то упорядоченность понимается в привычном смысле: важно, какой элемент какое место по порядку в наборе занимает. Во втором случае, оценивая возможности выбора какого-либо элемента в наборе, считают, что все предыдущие элементы уже выбраны, и оценку ведут на основе оставшихся вариантов.

### Пример 3.5

Банк имеет 10 филиалов в европейской части России и 15 филиалов в азиатской части России. Правление банка принимает решение о проверке работы всех своих филиалов. Председатель правления банка хочет принять участие в проверке только двух филиалов банков — одного европейского и одного азиатского. Сколькими различными способами можно выбрать такую пару филиалов для проверки с участием председателя правления банка?

*Решение*

Множество европейских филиалов обозначим  $A$ , тогда  $m(A) = 10$ , множество азиатских филиалов обозначим  $B$ , тогда  $m(B) = 15$ .

Европейский филиал  $x$  из множества  $A$  можно выбрать 10 способами, азиатский филиал  $y$  из множества  $B$  можно выбрать 15 способами, пару филиалов  $(x; y)$  для проверки с участием председателя правления банка можно выбрать  $m(A) \cdot m(B) = 10 \cdot 15 = 150$  способами.

*Ответ:* 150.

### Пример 3.6

Банк имеет 10 филиалов в России. Правление банка принимает решение о проверке работы всех своих филиалов. Председатель правления банка хочет принять участие в проверке только двух филиалов банка в течение одной командировки. Сколькими различными способами может быть выбрана пара филиалов, если для председателя банка важно, какой из филиалов будет первым при посещении, а какой — вторым?



*Решение*

Множество филиалов обозначим  $A$ , тогда  $m(A) = 10$ . Филиал  $x$  для посещения первым из множества  $A$  можно выбрать 10 способами, филиал  $y$  для посещения вторым тоже выбираем из множества  $A$ , но уже при условии того, что филиал для  $x$  выбран, т.е. выбор  $y$  осуществляется из оставшихся  $10 - 1 = 9$  возможностей. Пару филиалов  $(x; y)$  для проверки с участием председателя правления банка рассматриваем как упорядоченную: председателю важно, какой филиал он посещает первым, а какой — вторым. Поэтому для ответа на вопрос задачи применяем правило произведения:  $10 \cdot 9 = 90$ . Пара филиалов для проверки с участием председателя правления банка с учетом выдвинутых председателем условий может быть выбрана 90 способами.

*Ответ:* 90.

---

Правило произведения обобщается на выбор упорядоченных наборов любой длины.

### 3.1.2. Размещения, перестановки, сочетания без повторений и с повторениями

К основным понятиям комбинаторики относят размещения, перестановки и сочетания.

**Определение 3.4.** *Размещением из  $n$  элементов по  $k$*  называют любой упорядоченный набор длины  $k$ , составленный из элементов  $n$ -элементного множества. Если все элементы в наборе различны, то размещение определяется как *размещение без повторений*, если же среди элементов набора могут быть одинаковые, то размещение определяется как *размещение с повторениями*. Число всех размещений вычисляется по правилу произведения.

Для размещений без повторений имеет место формула

$$A_n^k = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1).$$

#### Пример 3.7

Из 10 членов правления необходимо выбрать председателя и его первого и второго заместителей. Сколькими различными способами это можно сделать?

*Решение*

Председателя, его первого и второго заместителей можно рассматривать как упорядоченный набор длины 3, составленный из элементов 10-элементного множества, при этом элементы в наборе не могут быть одинаковыми (не может председатель быть одновременно и заместителем), поэтому для ответа на вопрос задачи необходимо найти число всех размещений без повторений из 10 элементов по 3:

$$A_{10}^3 = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720.$$

*Ответ:* 720.

---

Для размещений с повторениями имеет место формула

$$\overline{A}_n^k = n^k.$$

#### Пример 3.8

10 членам правления предложена анкета, в которой только два варианта ответа: «Поддерживаю существующую стратегию развития предприятия» и «Стратегия раз-



вита требует изменений». Сколько существует различных вариантов заполнения такой анкеты десятью членами правления?

*Решение*

У каждого члена правления всего две возможности выбора ответа, при этом выбранные разными членами ответы могут быть одинаковыми (например, все поддерживают выбранную стратегию). Поэтому вариант заполнения анкеты десятью членами правления можно рассматривать как упорядоченный набор длины 10, составленный из элементов двухэлементного множества, при этом элементы, входящие в набор, могут быть одинаковыми. Значит, для решения задачи будем использовать формулу размещений с повторениями:

$$\overline{A}_2^{10} = 2^{10} = 1024.$$

Ответ: 1024.

---

**Определение 3.5.** Перестановкой из  $n$  элементов без повторений называют любое размещение из  $n$  элементов по  $n$  без повторений.

Число всех перестановок из  $n$  элементов без повторений находят по формуле

$$P_n = n!.$$

Выражение  $n!$  читается « $n$  факториал» и определяется как произведение натуральных чисел от 1 до  $n$  включительно:  $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$ .

По определению полагают  $1! = 1$  и  $0! = 1$ .

Кроме того, существуют оценочные формулы для  $n!$ :

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

при  $n! \rightarrow \infty$  (формула Стирлинга) и

$$\frac{1}{e^{12n+1}} < \frac{n!}{\sqrt{2\pi n} \cdot n^n \cdot e^{-n}} < \frac{1}{e^{12n}}.$$

---

### Пример 3.9

В начале рабочего дня председатель правления изучает новости по пяти экономическим изданиям. Сколько существует различных вариантов для такого начала рабочего дня?

*Решение*

В данном случае важно, в какой последовательности председатель правления будет выбирать экономические издания (например, если сначала он изучит материалы в газете «Коммерсант», а затем — в «РБК», то это один способ начать рабочий день, если же сначала он будет работать с «РБК», а затем с газетой «Коммерсант», то это уже другой способ для начала рабочего дня). Поэтому для решения задачи применяют формулу перестановок без повторений из 5 элементов:

$$P_5 = 5! = 120.$$

Ответ: 120.



Если в перестановке из  $n$  элементов есть одинаковые, то она определяется как *перестановка с повторениями*. Число всех перестановок с повторениями вычисляют по формуле

$$\overline{P}_n(n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!}.$$

Здесь  $n$  определяет длину перестановки,  $n_1$  определяет, сколько раз элемент  $a_1$  встречается в перестановке,  $n_2$  определяет, сколько раз элемент  $a_2$  встречается в перестановке, ...,  $n_k$  определяет, сколько раз элемент  $a_k$  встречается в перестановке. Понятно, что  $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$ .

### Пример 3.10

Сколько существует различных способов перестановки букв в слове «экономика»?

*Решение*

Так как в слове «экономика» есть одинаковые буквы, для решения задачи применим формулу перестановок с повторениями, при этом  $n$  определяет длину перестановки и равно 9,  $n_1 = 1$  (определяет, сколько раз элемент  $a_1$  — буква «э» встречается в перестановке),  $n_2 = 2$  (определяет, сколько раз элемент  $a_2$  — буква «к» встречается в перестановке),  $n_3 = 2$  (определяет, сколько раз элемент  $a_3$  — буква «о» встречается в перестановке),  $n_4 = 1$  (определяет, сколько раз элемент  $a_4$  — буква «н» встречается в перестановке),  $n_5 = 1$  (определяет, сколько раз элемент  $a_5$  — буква «м» встречается в перестановке),  $n_6 = 1$  (определяет, сколько раз элемент  $a_6$  — буква «и» встречается в перестановке),  $n_7 = 1$  (определяет, сколько раз элемент  $a_7$  — буква «а» встречается в перестановке):

$$\overline{P}_9(1, 2, 2, 1, 1, 1, 1) = \frac{9!}{1! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1!} = 90\,720.$$

Ответ: 90 720.

Если в составляемых наборах порядок следования элементов не важен, то мы имеем дело с сочетаниями.

**Определение 3.6.** Сочетанием из  $n$  элементов по  $k$  без повторений называют любое  $k$ -элементное подмножество  $n$ -элементного множества.

При формировании подмножества порядок выбора элементов не важен. Число всех сочетаний из  $n$  элементов по  $k$  без повторений вычисляют по формуле

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

### Пример 3.11

Из 10 сотрудников отдела трех необходимо отправить в командировку. Сколькими различными способами это можно сделать?

*Решение*

Так как при выборе командируемых формируются просто подмножества (а не упорядоченные наборы элементов, когда важно, кто первым будет выбран для поездки, кто — вторым, а кто — третьим), то ответ на вопрос задачи находят, применяя формулу сочетаний без повторений:

$$C_{10}^3 = \frac{10!}{3! \cdot (10-3)!} = \frac{10!}{3! \cdot 7!} = \frac{8 \cdot 9 \cdot 10}{6} = 120.$$

Ответ: 120.



Из свойств сочетаний без повторений отметим следующие:

- 1)  $C_n^k = C_n^{n-k}$ ;
- 2)  $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$ ;
- 3)  $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 2^n$ ;
- 4)  $(a+b)^n = C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b^1 + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^{n-1} a^1 b^{n-1} + C_n^n a^0 b^n$ .

Если в выбираемых соединениях порядок следования элементов не важен, но могут встречаться одинаковые элементы, то в таком случае говорят о *сочетаниях из  $n$  элементов по  $k$  с повторениями*.

Формула для вычисления числа всех сочетаний из  $n$  элементов по  $k$  с повторениями имеет вид

$$\overline{C_n^k} = C_{n+k-1}^k.$$

### Пример 3.12

На бирже торгуют акциями десяти различных предприятий. Сколькими способами можно осуществить покупку трех акций?

*Решение*

Так как при покупке акций их порядок не важен (не важно, какую акцию покупают первой, какую — второй, какую — третьей), речь идет о сочетаниях. Поскольку можно купить все три акции одного предприятия, следовательно, мы имеем дело с сочетаниями с повторениями. Поэтому при решении задачи используется формула сочетаний с повторениями:

$$\overline{C_{10}^3} = C_{10+3-1}^3 = C_{12}^3 = \frac{12!}{3! \cdot 9!} = \frac{10 \cdot 11 \cdot 12}{6} = 220.$$

*Ответ:* 220.

При решении более сложных задач важно уметь выделить простые составляющие и использовать правила суммы и произведения.

### 3.1.3. Задачи пересчета

В науке и практике часто встречаются задачи, решая которые, приходится составлять различные комбинации из конечного числа элементов и подсчитывать число этих комбинаций. Такие задачи получили название *задач пересчета*.

### Пример 3.13

Дано три элемента  $a$ ,  $b$  и  $c$ . Сколькими способами можно расставить эти элементы друг за другом?

*Решение*

Расставляем:  $abc$ ,  $acb$ ,  $bac$ ,  $bca$ ,  $cab$ ,  $cba$ .

*Ответ:* всего 6 различных способов.

### Пример 3.14

Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 3, 5, 7, используя в записи числа каждую цифру не более одного раза?



*Решение*

Составляем таблицу:

1			3			5			7		
3	5	7	1	5	7	1	3	7	1	3	5
5	7	3	7	3	5	5	7	1	7	1	5
3	7	1	7	1	5	3	7	1	7	1	3
3	5	1	5	1	3	3	5	1	5	1	3

Итого 24 числа: 135, 137, 153, 157, 173, 175, 315, 317, 351, 357, 371, 375, 513, 517, 531, 537, 571, 573, 713, 715, 731, 735, 751, 753. Такой способ решения называют деревом возможных вариантов.

*Ответ:* 24.

### Пример 3.15

Сколько различных слов можно получить перестановкой букв слова «огород» так, чтобы три буквы «о» не стояли бы рядом?

*Решение*

Общее количество различных слов, полученных перестановкой слова «огород», равно

$$P(3, 1, 1, 1) = \frac{(3+1+1+1)!}{3! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1!} = \frac{6!}{3!} = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120.$$

Если в каком-то слове три буквы «о» стоят рядом, то тройную «о» можно считать единым символом, и количество слов, в которых три буквы «о» стоят рядом, равно  $P(4) = 4! = 24$ . В итоге получаем:  $120 - 24 = 96$ .

*Ответ:* 96.

### Пример 3.16

Сколькими способами можно выбрать комитет, включающий 6 мужчин и 8 женщин, из группы, состоящей из 12 мужчин и 20 женщин?

*Решение*

Существует  $C_{12}^6 = \frac{12!}{6!6!}$  способов выбора мужчин и  $C_{20}^8 = \frac{20!}{8!12!}$  способов выбора женщин. Поэтому согласно комбинаторному принципу умножения имеется

$$\frac{12!}{6!6!} \cdot \frac{20!}{8!12!} = 116\,396\,280$$

способов выбрать комитет.

*Ответ:* 116 396 280.

### Пример 3.17

Сколько строк длины девять содержат ровно 5 единиц и 4 нуля?

*Решение*

Несмотря на то что строки сами по себе — упорядоченные объекты, эту задачу можно решить, используя сочетания. В строке имеется девять мест для размещения 1 и 0. Можно выбрать любые пять из девяти мест для размещения единицы. Поэтому

имеется  $C_9^5 = \frac{9!}{5!4!} = 126$  мест для размещения единицы. Как только единицы встав-



лены, остальные места заполняются нулями. И хотя для строки важен порядок элементов, порядок заполнения пяти мест единицами не существен; как только эти места выбраны, их порядок уже не имеет значения.

Ответ: 126.

## 3.2. Математическая логика

*Математическая логика* — это раздел математики, посвященный анализу методов рассуждений, при этом в первую очередь исследуются формы рассуждений, а не их содержание, т.е. исследуется формализация рассуждений. Значение математической логики для науки не исчерпывается ее математическими приложениями, поскольку рассуждать и доказывать приходится во всех науках.

### 3.2.1. Высказывания. Основные логические операции и их свойства

**Определение 3.7.** *Простым высказыванием* называют повествовательное предложение, относительно которого имеет смысл говорить, *истинно* оно или *ложно*. Считается, что каждое высказывание либо истинно, либо ложно и ни одно высказывание не может быть одновременно истинным и ложным.

Можно привести следующие примеры высказываний.

1. Москва — столица России.
2. Число 27 является четным.
3. Январь — первый месяц года.

Высказывания 1 и 3 являются истинными, высказывание 2 — ложным, потому что число 27 не делится на 2 без остатка:  $27 : 2 = 13$  (остаток 1).

Не являются высказываниями следующие предложения.

1. Давай пойдем гулять.
2.  $2 \cdot x > 8$ .
3.  $ax^2 + bx + c = 0$ .
4. Который час?

Свойство быть истинным или ложным является отличительным признаком высказывания, представленные четыре предложения этим свойством не обладают.

С помощью высказываний устанавливаются свойства, взаимосвязи между объектами. Высказывание истинно, если оно адекватно отображает эту связь, в противном случае оно ложно. В математической логике не рассматривается конкретное содержание высказывания, важно только, *истинно* оно или *ложно*. Поэтому высказывание можно представить некоторой *переменной величиной*, значением которой может быть только 0 или 1. Если высказывание истинно, то его значение равно 1, если ложно, то — 0.

Однако определение истинности высказывания — далеко не простой вопрос. В целом обоснование истинности или ложности простых высказываний решается вне алгебры логики. Например, истинность или ложность высказывания «Сумма углов треугольника равна  $180^\circ$ » устанавлива-



ется геометрией, причем в геометрии Евклида это высказывание является истинным, а в геометрии Лобачевского — ложным.

Для обозначения истинности и ложности логических переменных существуют разные варианты: истинность обозначается «и», «true», «t», «1», ложность — «л», «false», «f», «0». Обозначаются логические переменные большими буквами латинского алфавита —  $A, B, C$  и т.д.

**Определение 3.8.** *Сложные (составные) высказывания представляют собой набор простых высказываний связанных логическими операциями.*

**Определение 3.9.** *Логическое выражение — это символическая запись высказывания, состоящая из логических величин (констант или переменных), объединенных логическими операциями (связками).*

Введем упомянутые логические операции. Действия логических операций задаются *таблицами истинности*, каждой строке которых взаимно однозначно сопоставляется набор значений переменных, составляющих выражение, и соответствующее этому набору значение выражения.

**Конъюнкция**, или *логическое умножение* (от лат. *conjunctio* — союз, связь), — это логическая операция, ставящая в соответствие каждому двум простым (или исходным) высказываниям составное высказывание, являющееся истинным тогда и только тогда, когда оба исходных высказывания истинны. Если хотя бы одно из составляющих высказываний ложно, то и полученное из них с помощью данной операции сложное высказывание также считается ложным. Обозначения: « $A$  и  $B$ », « $A \& B$ », « $A \wedge B$ ».

Истинность логического умножения устанавливается с помощью таблицы:

$A$	$B$	$A \wedge B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

**Дизъюнкция**, или *логическое сложение* (от лат. *disjunctio* — разобщение, различие), — это логическая операция, которая каждому двум простым (или исходным) высказываниям ставит в соответствие составное высказывание, являющееся ложным тогда и только тогда, когда оба исходных высказывания ложны, и истинным, когда хотя бы одно из двух образующих его высказываний истинно. Обозначения: « $A$  или  $B$ », « $A + B$ », « $A \vee B$ ».

Истинность логического сложения устанавливается с помощью таблицы:

$A$	$B$	$A \vee B$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

**Инверсия**, или *отрицание* (от лат. *inversio* — переворачивание), — это логическая операция, которая с помощью связки «не» каждому исходному



высказыванию ставит в соответствие составное высказывание, заключающееся в том, что исходное высказывание отрицается. Обозначения: « $\neg A$ », « $\bar{A}$ ». Суть операции формализуется с помощью таблицы:

$A$	$\bar{A}$
1	0
0	1

Итак, если исходное выражение истинно, то результат отрицания будет ложным, и наоборот, если исходное выражение ложно, то результат отрицания будет истинным.

*Импликация, или логическое следование* (от лат. *implicatio* — тесно связываю), — это высказывание, составленное из двух высказываний при помощи связки «если ..., то ...». Обозначение « $A \rightarrow B$ ». Истинность логического следования устанавливается с помощью таблицы:

$A$	$B$	$A \rightarrow B$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Итак, новое высказывание, полученное с помощью импликации, является ложным тогда и только тогда, когда условие (посылка  $A$ ) истинно, а следствие (заключение  $B$ ) ложно, и истинным — во всех остальных случаях.

### Пример 3.18

Дано сложное высказывание: «Если выглянет солнце, то станет тепло». Запишем его в виде логической формулы.

*Решение*

Обозначим через  $A$  простое высказывание «выглянет солнце», а через  $B$  — «станет тепло». Тогда логической формулой этого сложного высказывания будет импликация:  $A \rightarrow B$ .

*Ответ:*  $A \rightarrow B$ .

*Эквивалентность, или логическое тождество*, — это высказывание, составленное из двух высказываний при помощи связки «тогда и только тогда, когда» (эквивалентность — равнозначность, взаимная обусловленность). Обозначения: « $A \leftrightarrow B$ », « $A \sim B$ ». Истинность логического тождества устанавливается с помощью таблицы:

$A$	$B$	$A \sim B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1



Итак, новое высказывание, полученное с использованием эквивалентности, является истинным тогда и только тогда, когда оба исходных высказывания одновременно истинны или одновременно ложны. Например, поговорка «Что в лоб, что по лбу» ( $A$  — «в лоб»,  $B$  — «по лбу») представима как  $A \sim B$ .

### Пример 3.19

Запишем логическими формулами следующее сложное высказывание: «Если допоздна работаешь с компьютером и при этом пьешь много кофе, то утром просыпаешься в дурном расположении духа или с головной болью».

*Решение*

Сложное высказывание состоит из следующих простых:

$A$  — «допоздна работаешь с компьютером»;

$B$  — «пьешь много кофе»;

$C$  — «утром просыпаешься в дурном расположении духа»;

$D$  — «утром просыпаешься с головной болью».

С учетом введенных обозначений простых высказываний и определенных выше логических операций сложное высказывание может быть представлено в виде логической формулы  $(A \wedge B) \rightarrow (C \vee D)$ .

*Ответ:*  $(A \wedge B) \rightarrow (C \vee D)$ .

Истинность или ложность сложного или составного высказывания зависит от истинности или ложности входящих в него элементарных высказываний. Так возникает понятие *логической функции*. При рассмотрении логических функций вводят понятие *логической переменной* — элементарного высказывания, которое либо истинно («1») либо ложно («0»).

Следующие формулы являются *законами логики*:

- $\overline{\overline{A}} = A$  — закон двойного отрицания.
  - $A \wedge B \leftrightarrow B \wedge A$  — закон коммутативности конъюнкции.
  - $A \vee B \leftrightarrow B \vee A$  — закон коммутативности дизъюнкции.
  - $(A \wedge B) \wedge C \leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$  — закон ассоциативности конъюнкции.
  - $(A \vee B) \vee C \leftrightarrow A \vee (B \vee C)$  — закон ассоциативности дизъюнкции.
  - $A \wedge (B \vee C) \leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$  — закон дистрибутивности конъюнкции относительно дизъюнкции.
  - $A \vee (B \wedge C) \leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$  — закон дистрибутивности дизъюнкции относительно конъюнкции.
  - $\overline{A \vee B} \leftrightarrow \overline{A} \wedge \overline{B}$  — закон отрицания дизъюнкции
  - $\overline{A \wedge B} \leftrightarrow \overline{A} \vee \overline{B}$  — закон отрицания конъюнкции
- } законы де Моргана.
- $\overline{A \rightarrow B} \leftrightarrow A \wedge \overline{B}$  — закон отрицания импликации.
  - $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow [(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)]$  — закон выражения эквивалентности через конъюнкцию и импликацию.
  - $(A \rightarrow B) \leftrightarrow (\overline{B} \rightarrow \overline{A})$  — закон контрапозиции.
  - $A \wedge A \leftrightarrow A$  — закон идемпотентности конъюнкции.
  - $A \vee A \leftrightarrow A$  — закон идемпотентности дизъюнкции.
  - $A \wedge 0 \leftrightarrow 0$
  - $A \vee 0 \leftrightarrow A$
  - $A \wedge 1 \leftrightarrow A$
  - $A \vee 1 \leftrightarrow 1$
- } тождества с константами.



19.  $A \wedge (A \vee B) \leftrightarrow A$   
 20.  $A \vee (A \wedge B) \leftrightarrow A$  } законы поглощения.  
 21.  $\bar{A} \vee A \leftrightarrow 1$  — закон исключенного третьего.  
 22.  $\bar{A} \wedge A \leftrightarrow 0$  — закон противоречия.

Для доказательства, например, закона отрицания конъюнкции  $\overline{A \wedge B} \leftrightarrow \bar{A} \vee \bar{B}$  построим таблицы истинности.

$A$	$B$	$A \wedge B$	$\overline{A \wedge B}$	$\bar{A}$	$\bar{B}$	$\bar{A} \vee \bar{B}$	$\overline{A \wedge B} \leftrightarrow \bar{A} \vee \bar{B}$
1	1	1	0	0	0	0	1
1	0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1	1
0	0	0	1	1	1	1	1
1	1	1	0	0	0	0	1
1	0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1	1
0	0	0	1	1	1	1	1

Существует следующий порядок (от наибольшего приоритета к наименьшему) выполнения логических операций в выражении: инверсия, конъюнкция, дизъюнкция, импликация, эквивалентность.

### Пример 3.20

Упростим выражения: а)  $X = \overline{A \wedge B \vee \bar{B}}$ ; б)  $Y = \overline{\bar{B} \wedge C \vee C}$ ; в)  $Z = \overline{\bar{A} \wedge C \vee B \wedge \bar{C}}$ .

Решение

- а)  $X = \overline{A \wedge B \vee \bar{B}} = \bar{A} \vee \bar{B} \vee \bar{\bar{B}} = \bar{A} \vee \bar{B}$ ;  
 б)  $Y = \overline{\bar{B} \wedge C \vee C} = (\bar{B} \vee \bar{C}) \wedge \bar{C} = \bar{C}$ ;  
 в)  $Z = \overline{\bar{A} \wedge C \vee B \wedge \bar{C}} = A \vee \bar{C} \vee \bar{B} \wedge C = A \vee \bar{C}$ .

### 3.2.2. Логические функции и способы их задания

Формула алгебры логики задает логическую функцию — функцию от логических переменных, которая сама может принимать только два логических значения.

**Определение 3.10.** Булева переменная — это переменная, которая может принимать только два значения — 0 и 1.

Функция  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  называется булевой (или логической, или функцией алгебры логики, или переключательной), если все ее аргументы  $x_i$  являются булевыми, а сама функция также может принимать только два значения — 0 и 1. Множество всех булевых функций от переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n$  обозначают через  $P_2$ .

Рассмотрим способы задания булевых функций.



### 1. Табличный способ.

При этом способе функция задается в виде *таблицы истинности*, представляющей собой совокупность всех комбинаций входных переменных (левые столбцы) и соответствующих им значений функции (правый столбец).

Пусть  $w = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  — булева функция  $n$  аргументов. Область определения данной функции можно рассматривать и как множество упорядоченных наборов (или векторов, или двоичных наборов)  $D = \{x_1, x_2, \dots, x_n \mid x_i \in \{0; 1\}, i = 1, \dots, n\}$ , на каждом из которых функция принимает одно из двух значений:  $w \in \{0; 1\}$ . Количество таких наборов  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  согласно правилу прямого произведения равно  $|D| = 2^n$ .

Определим количество всех функций  $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Отдельная функция  $u' = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  задана, если определены ее значения  $(u'_1, \dots, u'_{2^n})$  на всех наборах  $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in D$ , где  $u'_j \in \{0; 1\}$  — значение функции  $u' = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  на  $j$ -м наборе  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $j = 1, 2, \dots, 2^n$ . Итак, количество булевых функций  $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  совпадает с числом двоичных наборов  $(u'_1, \dots, u'_{2^n})$ . Согласно правилу прямого произведения, число последних равно  $2^{2^n}$ .

#### Пример 3.21

Рассмотрим табличное представление булевой функции  $w = f(x, y, z)$ , где  $w, x, y, z \in \{0; 1\}$ . Область определения функции — это множество двоичных наборов  $D = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \{0; 1\}\}$ . Их число есть  $|D| = 2^3 = 8$ , а количество таких функций равно  $2^{|D|} = 2^8 = 256$ . Рассмотрим произвольный набор  $f(x, y, z)$ .

$x$	$y$	$z$	$f(x, y, z)$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

#### Пример 3.22

Вычислим значения функции  $((A \rightarrow B) \wedge B) \rightarrow A = F$  при конкретном наборе переменных, используя определения логических операций.

*Решение*

*Способ 1.*

При наборе (1, 1) получаем  $((1 \rightarrow 1) \wedge 1) \rightarrow 1 = (1 \wedge 1) \rightarrow 1 = 1 \rightarrow 1 = 1$ ;

При наборе (1, 0) получаем  $((1 \rightarrow 0) \wedge 0) \rightarrow 1 = (0 \wedge 0) \rightarrow 1 = 0 \rightarrow 1 = 1$ ;

При наборе (0, 1) получаем  $((0 \rightarrow 1) \wedge 1) \rightarrow 0 = (1 \wedge 1) \rightarrow 0 = 1 \rightarrow 0 = 0$ ;

При наборе (0, 0) получаем  $((0 \rightarrow 0) \wedge 0) \rightarrow 0 = (1 \wedge 0) \rightarrow 0 = 0 \rightarrow 0 = 1$ .



$A$	$B$	$F$
1	1	1
1	0	1
0	1	0
0	0	1

*Способ 2.* Формулу последовательно раскладываем на более простые подформулы и последовательно в обратном порядке строим таблицу истинности:

$A$	$B$	$A \rightarrow B$	$(A \rightarrow B) \wedge B$	$F$
1	1	1	1	1
1	0	0	0	1
0	1	1	1	0
0	0	1	0	1

## 2. Графический способ.

Рассмотрим графическое представление булевой функции трех аргументов  $w = f(x, y, z)$  ранее рассмотренного примера, заданной таблично. Заметим, что множество наборов области определения функции  $D = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \{0; 1\}\}$  является множеством координат точек вершин единичного трехмерного куба (рис. 3.6).

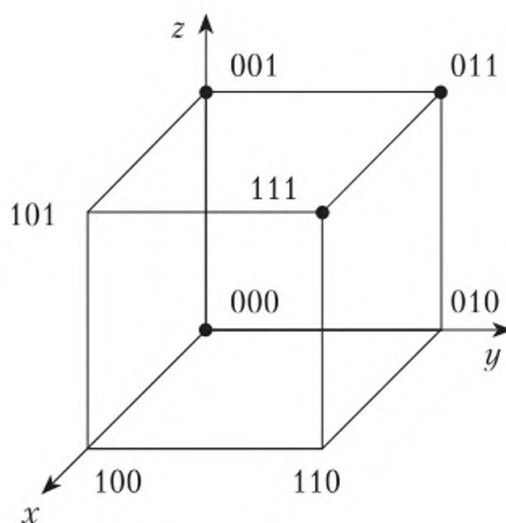


Рис. 3.6. Графический способ задания булевой функции

Графический способ представления булевой функции заключается в том, что необходимо отметить вершины куба, в которых функция принимает значение 1.

*Замечание 3.1.* Очевидно, что область определения булевой функции  $n$  аргументов  $w = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  составляется из наборов координат точек вершин единичного  $n$ -мерного куба.

## 3.2.3. Исчисление высказываний

**Определение 3.11.** *Исчисление высказываний* — аксиоматическая логическая система, интерпретацией (моделью) которой является алгебра высказываний. Здесь мы вновь встречаемся с формулами алгебры логики.



Однако теперь формулы рассматриваются не как способ представления функций, а как составные высказывания, образованные из элементарных высказываний (переменных) с помощью основных логических связок.

Из всех формул алгебры высказываний выделяется часть формул, объявляемых аксиомами. Определяется некоторое правило, по которому из одних формул можно получать другие (новые). Аксиомы выделяются, а правило определяется так, что по нему из аксиом могут быть получены все тождественно истинные высказывания (тавтологии), и только они. Получение тавтологий алгебры высказываний, представленных в виде теорем, является основной задачей исчисления высказываний.

Используя понятие формального исчисления, определим исчисление высказываний. Алфавит исчисления высказываний (ИВ) состоит из следующих элементов:

- 1) букв  $A, B, Q, R, P$  и других, возможно с индексами (которые называются пропозициональными переменными);
- 2) логических символов (связок)  $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \sim$ ;
- 3) вспомогательных символов (например, запятых).

Множество формул исчисления высказываний определяется индуктивно:

- 1) все пропозициональные переменные являются формулами ИВ;
- 2) если  $A, B$  — формулы исчисления высказываний, то  $\neg A, A \wedge B, A \vee B, A \rightarrow B$  — формулы ИВ;
- 3) выражение является формулой ИВ тогда и только тогда, когда это может быть установлено с помощью пунктов 1) и 2).

Таким образом, любая формула ИВ строится из пропозициональных переменных с помощью связок  $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \sim$ . В дальнейшем при записи формул будем опускать некоторые скобки, используя те же соглашения, что и в предыдущей главе.

*Аксиомами ИВ* являются следующие формулы (для любых формул  $A, B, C$ ):

- 1)  $A \rightarrow (B \rightarrow A)$ ;
- 2)  $(A \rightarrow B) \rightarrow \{[A \rightarrow (B \rightarrow C)] \rightarrow (A \rightarrow C)\}$ ;
- 3)  $(A \wedge B) \rightarrow A$ ;
- 4)  $(A \wedge B) \rightarrow B$ ;
- 5)  $(A \rightarrow B) \rightarrow \{(A \rightarrow C) \rightarrow [A \rightarrow (B \wedge C)]\}$ ;
- 6)  $A \rightarrow (A \vee B)$ ;
- 7)  $A \rightarrow (B \vee A)$ ;
- 8)  $(A \rightarrow C) \rightarrow \{(B \rightarrow C) \rightarrow [(A \vee B) \rightarrow C]\}$ ;
- 9)  $(A \rightarrow B) \rightarrow [(A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A]$ ;
- 10)  $\neg \neg A \rightarrow A$ .

Указанные формулы называются *схемами аксиом ИВ*. При подстановке конкретных формул в какую-либо схему получается частный случай схемы аксиом.

*Правилom вывода* в ИВ является *правило заключения (modus ponens)*: если  $A$  и  $A \rightarrow B$  — выводимые формулы, то  $B$  — также выводимая формула.

Например, если высказывания  $A \wedge B$  и  $A \wedge B \rightarrow (A \rightarrow C)$  выводимы, то высказывание  $A \rightarrow C$  также выводимо согласно правилу заключения.



Говорят, что *формула  $G$  выводима из формул  $F_1, F_2, \dots, F_n$*  (обозначается  $F_1, F_2, \dots, F_n \vdash G$ ), если существует последовательность формул  $F_1, F_2, \dots, F_k, G$ , в которой любая формула является либо аксиомой, либо принадлежит списку формул  $F_1, F_2, \dots, F_n$  (называемых гипотезами), либо получается из предыдущих формул по правилу вывода. Выводимость формулы  $G$  из множества формул  $F_1, F_2, \dots, F_n$  (обозначается  $\vdash G$ ) равносильно тому, что  $G$  — теорема ИВ.

### Пример 3.23

Покажем, что формула  $A \rightarrow A$  выводима в ИВ.

*Решение*

Построим вывод данной формулы:

- 1) в аксиоме 2 заменим  $B$  на  $A \rightarrow A$ ,  $C$  — на  $A$ . Получаем аксиому  $[A \rightarrow (A \rightarrow A)] \rightarrow \{[A \rightarrow ((A \rightarrow A) \rightarrow A)] \rightarrow (A \rightarrow A)\}$ ;
- 2) в аксиоме 1 заменим  $B$  на  $A$ . Получаем  $A \rightarrow (A \rightarrow A)$ ;
- 3) из пп. 1 и 2 по *modus ponens* заключаем  $\{A \rightarrow [(A \rightarrow A) \rightarrow A]\} \rightarrow (A \rightarrow A)$ ;
- 4) в аксиоме 1 заменяем  $B$  на  $A \rightarrow A$ . Получаем  $A \rightarrow [(A \rightarrow A) \rightarrow A]$ ;
- 5) из пп. 3 и 4 по правилу вывода справедливо  $\vdash A \rightarrow A$ .

**Теорема 3.1.** 1. Если  $F_1, F_2, \dots, F_n, A, B$  — формулы ИВ,  $\Gamma = \{F_1, F_2, \dots, F_n\}$ ,  $\Gamma \vdash A$ , то  $\Gamma, B \vdash A$  (можно увеличивать число гипотез). 2.  $F_1, F_2, \dots, F_n \vdash A$  тогда и только тогда, когда  $F_1 \wedge F_2 \wedge \dots \wedge F_n \vdash A$  (сведение множества гипотез к одной гипотезе).

### 3.2.4. Логика предикатов

**Определение 3.12.** *Предикат* — повествовательное предложение, содержащее переменные, определенные на соответствующих множествах. При подстановке вместо переменных конкретных значений предложение обращается в высказывание, т.е. принимает одно из двух значений: «истина» или «ложь». Таким образом, определенным на множествах  $M_1, M_2, \dots, M_n$   *$n$ -местным предикатом* называется предложение, содержащее  $n$  переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , превращающееся в высказывание при подстановке вместо этих переменных любых конкретных элементов из множеств  $M_1, M_2, \dots, M_n$  соответственно.

### Пример 3.24

Предложение «Город  $X$  находится на территории России» является одноместным предикатом, определенным на множестве всех названий городов. Подставив вместо предметной переменной  $X$  название «Тверь», получим высказывание «Город Тверь находится на территории России». Это высказывание истинно. Подставив вместо предметной переменной  $X$  название «Торонто», получим ложное высказывание «Город Торонто находится на территории России».

Для  $n$ -местного предиката будем использовать обозначение  $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Переменные  $x_1, x_2, \dots, x_n$  называют предметными, а элементы множеств  $M_1, M_2, \dots, M_n$ , которые являются значениями этих переменных, — конкретными предметами. Всякий  $n$ -местный предикат  $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , определен-



ный на множествах  $M_1, M_2, \dots, M_n$ , представляет собой функцию  $n$  аргументов, заданную на указанных множествах и принимающую значения в множестве всех высказываний. Поэтому предикат называют также *функцией-высказыванием*.

Предикат  $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , определенный на множествах  $M_1, M_2, \dots, M_n$ , превращается в конкретное высказывание  $P(a_1, a_2, \dots, a_n)$ , если вместо предметных переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n$  подставить в него конкретные предметы (элементы  $a_1, a_2, \dots, a_n$ ) из множеств  $M_1, M_2, \dots, M_n$  соответственно. Это высказывание может быть либо истинным, либо ложным, т.е. его логическое значение равно 1 или 0. Следовательно, данный предикат определяет функцию  $n$  аргументов, заданную на множествах  $M_1, M_2, \dots, M_n$ , принимающую значение в двухэлементном множестве  $\{0; 1\}$ .

### Пример 3.25

Предложение « $x + y < 5$ » является двухместным предикатом. Множества, на которых задан предикат, совпадают. Пара действительных чисел 2, 2 превращает предикат в истинное высказывание, а пара чисел 3, 4 — в ложное высказывание.

Предикат  $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , определенный на множествах  $M_1, M_2, \dots, M_n$ , называется *тождественно истинным*, если при любой подстановке вместо переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n$  любых конкретных предметов  $a_1, a_2, \dots, a_n$  из множеств  $M_1, M_2, \dots, M_n$  соответственно он превращается в истинное высказывание  $P(a_1, a_2, \dots, a_n)$ .

### Пример 3.26

Одноместный предикат « $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ », определенный на множестве действительных чисел, тождественно истинный.

Предикат  $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , определенный на множествах  $M_1, M_2, \dots, M_n$ , называется *тождественно ложным*, если при любой подстановке вместо переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n$  любых конкретных предметов  $a_1, a_2, \dots, a_n$  из множеств  $M_1, M_2, \dots, M_n$  соответственно он превращается в ложное высказывание  $P(a_1, a_2, \dots, a_n)$ .

### Пример 3.27

Двухместный предикат « $x^2 + y^2 < 0$ », заданный на множестве действительных чисел, является тождественно ложным предикатом, потому что любая пара действительных чисел превращает его в ложное высказывание (не удовлетворяет ему).

Предикат  $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , определенный на множествах  $M_1, M_2, \dots, M_n$ , называется *выполнимым (опровержимым)*, если существует по меньшей мере один набор конкретных предметов  $a_1, a_2, \dots, a_n$  из множеств  $M_1, M_2, \dots, M_n$  соответственно, при подстановке которых вместо соответствующих предметных переменных в предикат  $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$  последний превратится в истинное (ложное) высказывание  $P(a_1, a_2, \dots, a_n)$ .



### Пример 3.28

Предикат «Город  $X$  находится на территории России», определенный над множеством всех названий городов, является выполнимым, так как существуют города, названия которых превращают данный предикат в истинное высказывание, например «Москва», «Владивосток». Но данный предикат не будет тождественно истинным, так как существуют города, названия которых превращают его в ложное высказывание — «Мельбурн», «Берлин». Одноместный предикат «Город  $X$  находится на территории России» представляет собой и пример опровержимого, но не тождественно ложного предиката.

Закономерности взаимосвязей между предикатами различных типов:

- 1) каждый тождественно истинный предикат является выполнимым, но обратное неверно;
- 2) каждый тождественно ложный предикат является опровержимым, но обратное неверно;
- 3) каждый не тождественно истинный предикат будет опровержимым, но не будет тождественно ложным;
- 4) каждый не тождественно ложный предикат будет выполнимым, но не будет тождественно истинным.

Множеством истинности предиката  $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , заданного на множествах  $M_1, M_2, \dots, M_n$ , называется совокупность всех упорядоченных  $n$ -систем  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ , в которых  $a_1 \in M_1, a_2 \in M_2, \dots, a_n \in M_n$ , таких что данный предикат обращается в истинное высказывание  $P(a_1, a_2, \dots, a_n)$  при подстановке  $x_1 = a_1, x_2 = a_2, \dots, x_n = a_n$ . Это множество будем обозначать  $P^+$ . Таким образом, множество  $P^+$  истинности  $n$ -местного предиката  $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$  представляет собой  $n$ -арное отношение между элементами множеств  $M_1, M_2, \dots, M_n$ . Если предикат  $P(x)$  одноместный, заданный над множеством  $M$ , то его множество истинности  $P^+$  является подмножеством множества  $M$ :  $P^+ \subseteq M$ .

### Пример 3.29

Множество истинности двухместного предиката  $S(x, y)$ : « $x^2 + y^2 = 9$ », заданного на множестве  $R^2$ , есть множество всех таких пар действительных чисел, которые являются координатами точек плоскости, образующих окружность с центром в начале координат и радиусом 3.

В терминах множества истинности легко выразить понятия, связанные с классификацией предикатов:  $n$ -местный предикат  $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , заданный на множествах  $M_1, M_2, \dots, M_n$ , будет:

- тождественно истинным тогда и только тогда, когда  $P^+ = M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n$ ;
- тождественно ложным тогда и только тогда, когда  $P^+ = \emptyset$ ;
- выполнимым тогда и только тогда, когда  $P^+ \neq \emptyset$ ;
- опровержимым тогда и только тогда, когда  $P^+ \neq M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n$ .

Два  $n$ -местных предиката  $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$  и  $Q(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , заданные над одними и теми же множествами  $M_1, M_2, \dots, M_n$ , называются *равносильными*, если набор предметов (элементов)  $a_1 \in M_1, a_2 \in M_2, \dots, a_n \in M_n$  превращает первый предикат в истинное высказывание  $P(a_1, a_2, \dots, a_n)$  в том и только



в том случае, когда этот набор предметов превращает второй предикат в истинное высказывание  $Q(a_1, a_2, \dots, a_n)$ . Другими словами (на языке множеств истинности), предикаты  $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$  и  $Q(x_1, x_2, \dots, x_n)$  равносильны тогда и только тогда, когда их множества истинности совпадают.

Утверждение о равносильности двух предикатов  $P$  и  $Q$  символически будем записывать так:  $P \leftrightarrow Q$ . Отношение равносильности предикатов является отношением эквивалентности, так что совокупность всех  $n$ -местных предикатов, определенных на множествах  $M_1, M_2, \dots, M_n$ , распадается на непересекающиеся классы равносильных предикатов (все они определяют одну и ту же функцию, заданную на множествах  $M_1, M_2, \dots, M_n$  и принимающую значения в двухэлементном множестве  $\{0; 1\}$ ). Переход от предиката  $P_1$  к равносильному ему предикату  $P_2$  называется *равносильным преобразованием*. Это понятие очень важно, так как, например, уравнения и неравенства представляют собой частные виды предикатов. Решение уравнения и неравенства есть поиск их множеств истинности. При таком поиске мы проделываем над уравнением и неравенством различные преобразования, и здесь важно, чтобы эти преобразования были равносильными, т.е. чтобы найденное множество оказалось бы множеством истинности именно исходного уравнения или неравенства. Аналогичная ситуация и при решении систем уравнений или неравенств.

### Пример 3.30

Требуется решить уравнение (найти множество истинности предиката):  $5x - 2 = -3x - 10$ .

*Решение*

Преобразуем уравнение равносильным образом:

$$5x + 3x = -10 + 2; x = -1.$$

*Ответ:*  $\{-1\}$  — множество всех решений данного уравнения (множество истинности данного предиката).

Предикат  $Q(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , заданный над множествами  $M_1, M_2, \dots, M_n$ , называется *следствием* предиката  $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , заданного над теми же множествами, если он превращается в истинное высказывание на всех тех наборах значений предметных переменных из соответствующих множеств, на которых в истинное высказывание превращается предикат  $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

Другими словами (в терминах множеств истинности), можно сказать, что предикат  $Q$  является следствием предиката  $P$  тогда и только тогда, когда  $P^+ \subseteq Q^+$ .

Утверждение о том, что предикат  $Q$  является следствием предиката  $P$ , будем символически записывать так:  $P \Rightarrow Q$ .

### Пример 3.31

Одноместный предикат « $n$  делится на 6», определенный на множестве натуральных чисел, является следствием одноместного предиката « $n$  делится на 12», определенного на том же множестве. Из двух предикатов первый будет следствием второго, если считать, что оба предиката заданы на множестве  $Z$  целых чисел.



Язык множеств истинности позволяет установить взаимосвязь между понятиями равносильности и следования предикатов: два предиката, определенные на одних и тех же множествах, равносильны тогда и только тогда, когда каждый из них является следствием другого.

### 3.3. Элементы теории графов

*Теория графов* — один из фундаментальных разделов дискретной математики. Графы являются очень продуктивным средством информационного моделирования структур систем и процессов, представления задач информационного характера. Теория графов находит применение, например, в геоинформационных системах (ГИС). Существующие или вновь проектируемые дома, сооружения, кварталы и т.п. рассматриваются как вершины, а соединяющие их дороги, инженерные сети, линии электропередач и т.п. — как ребра. Применение различных вычислений, производимых на таком графе, позволяет, например, найти кратчайший объездной путь или ближайший продуктовый магазин, спланировать оптимальный маршрут.

#### 3.3.1. Общие понятия теории графов. Вершины и ребра

**Определение 3.13.** *Граф* задается множеством  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  вершин и мультимножеством  $E$ , элементами которого являются пары элементов (ребра)  $(v_i, v_j)$  множества  $V$  (*мультимножество* — неупорядоченная совокупность элементов, в которой могут быть одинаковые элементы).

Элементами множества  $E$  могут быть:

- 1) *дуги*, если пары  $(v_i, v_j)$  и  $(v_j, v_i)$  различают, тогда граф — *ориентированный*;
- 2) *ребра*, если пары  $(v_i, v_j)$  и  $(v_j, v_i)$  не различают, тогда граф — *неориентированный*;
- 3) *петли*, если имеем пары  $(v_i, v_i)$ .

Каждое ребро связывает пару вершин. Если ребро  $e$  соединяет вершины  $v_1$  и  $v_2$ , то говорят, что ребро  $e$  и вершины  $v_1$  и  $v_2$  *инцидентны*.

Два ребра, связывающие одну и ту же пару вершин  $v_1$  и  $v_2$ , называются *кратными*. Ребро, связывающее вершину саму с собой, называется *петлей*.

*Степенью вершины графа* называется число ребер графа, инцидентных этой вершине (петли считаются дважды). Степень вершины  $v$  обозначается  $d(v)$ .

*Изолированная вершина* — это вершина, не инцидентная ни одному ребру (ни одной дуге).

*Висячая вершина* — это вершина, инцидентная одному ребру (одной дуге).

*Изолированная* вершина имеет степень 0, *висячая* вершина — степень 1. Вершина графа называется *четной*, если ее степень четна, и *нечетной* в противном случае.

Поскольку ребро, соединяющее вершины  $v_1$  и  $v_2$ , добавляет по единице в степени ребер  $d(v_1)$  и  $d(v_2)$ , справедливо соотношение  $\sum_{v \in V} d(v) = 2m$ , где  $m$  — количество ребер графа.



Граф называется *полным*, если каждые две различные его вершины соединены одним и только одним ребром.

### Пример 3.32

На рис. 3.7, *а* изображен ориентированный граф  $G$  с множеством вершин  $V = \{1, 2, 3, 4\}$  и множеством дуг  $E = \{(1, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 3), (4, 1)\}$ . Ему соответствует неориентированный граф, изображенный на рис. 3.7, *б*.

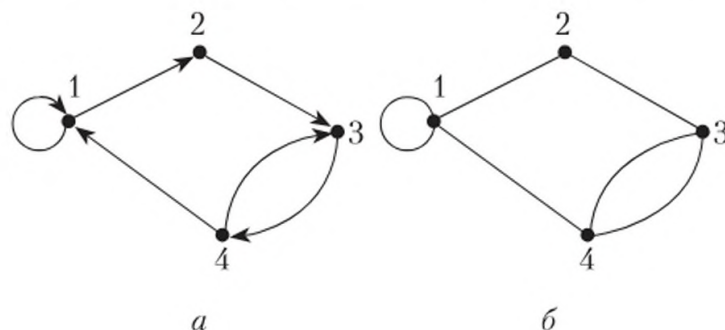


Рис. 3.7. Графы для примера 3.32:

*а* — ориентированный; *б* — неориентированный

Рассмотрим способы задания графа.

1. *Матрица смежности.* Граф с  $n$  вершинами задается матрицей  $n \times n$ , в которой элемент пересечения  $i$ -й строки и  $j$ -го столбца равен 1, если существует ребро  $(v_i, v_j)$ , иначе равен 0 (рис. 3.8).

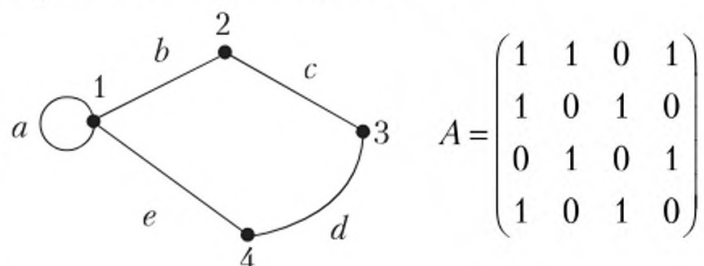


Рис. 3.8. Неориентированный граф и его матрица смежности

Если в графе нет петель, то на главной диагонали матрицы смежности стоят нули. Если же в графе нет кратных ребер, то все элементы матрицы равны либо нулю, либо единице.

2. *Матрица инцидентности.* Граф с  $n$  вершинами (строки) и  $m$  ребрами (столбцы) задается матрицей  $n \times m$ , в которой элемент пересечения  $i$ -й строки и  $j$ -го столбца равен 1, если  $i$ -я вершина инцидентна  $j$ -му ребру, иначе 0 (рис. 3.9).

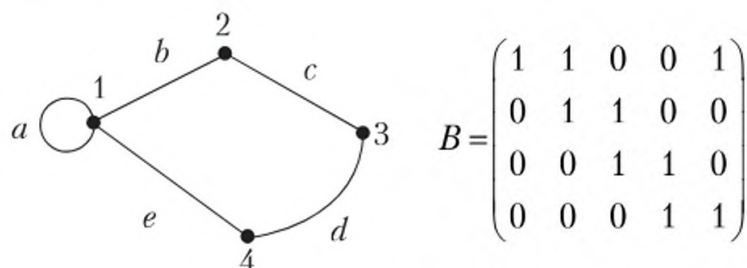


Рис. 3.9. Неориентированный граф и его матрица инцидентности



Рассмотрим задание ориентированного графа (*орграфа*) с помощью матриц смежности и инцидентности.

**Матрица смежности орграфа.** Граф с  $n$  вершинами задается матрицей  $n \times n$ , в которой элемент пересечения  $i$ -й строки и  $j$ -го столбца равен  $k$ , если существует  $k$  дуг из вершины  $v_i$  в вершину  $v_j$ , иначе равен 0 (рис. 3.10).

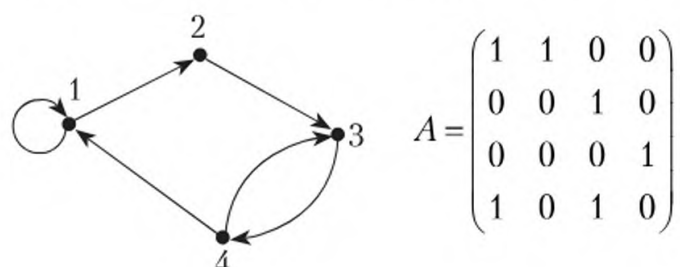


Рис. 3.10. Ориентированный граф и его матрица смежности

**Матрица инцидентности орграфа.** Граф с  $n$  вершинами (строки) и  $m$  дугами (столбцы) задается матрицей  $n \times m$ , в которой элемент пересечения  $i$ -й строки и  $j$ -го столбца равен 1, если  $j$ -я дуга начинается в  $i$ -й вершине, равен -1, если  $j$ -я дуга заканчивается в  $i$ -й вершине, иначе 0 (рис. 3.11).

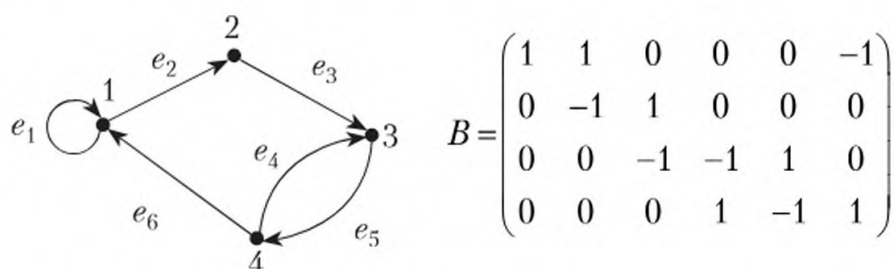


Рис. 3.11. Ориентированный граф и его матрица инцидентности

### 3.3.2. Связность графа. Графы и деревья

Рассматривая геометрический граф, можно зафиксировать некоторую вершину и, последовательно двигаясь по смежным ребрам, перейти в другую вершину или вернуться в исходную. Конечно, по ориентированному ребру перемещение допустимо только в направлении его ориентации. Последовательность ребер, по которым можно двигаться непрерывным образом, играют в теории графов фундаментальную роль.

Последовательность из  $n$  ребер графа (не обязательно различных) называется *маршрутом длины  $n$* , если любые два рядом стоящие в этой последовательности ребра — смежные. Кроме того, если эти два рядом стоящие ребра ориентированные, то ребро, стоящее слева, должно входить в инцидентную им вершину, а ребро, стоящее справа, из нее выходить.

Пусть маршрут задан ребрами  $e_1, e_2, \dots, e_n$  и ребру  $e_i$  соответствует пара вершин  $v_{i-1}, v_i$ , где  $i = 1, 2, \dots, n$ . Говорят, что маршрут *замкнут*, если  $v_0 = v_n$ , и *незамкнут*, если  $v_0 \neq v_n$ . Для незамкнутого маршрута вершина  $v_0$  называется *начальной* вершиной, а вершина  $v_n$  — *конечной*. В этом случае говорят, что маршрут соединяет вершины  $v_0$  и  $v_n$ .

Любая вершина, инцидентная двум рядом стоящим ребрам маршрута, называется *внутренней* или *промежуточной* вершиной. Так как ребра



и вершины в маршруте могут повторяться, то внутренняя вершина может также оказаться начальной или конечной.

Маршрут неориентированного графа называют *неориентированным маршрутом* (*составной цепью*), а маршрут орграфа — *ориентированным маршрутом* (*составным путем*). Если все ребра незамкнутого маршрута попарно различны, то такой маршрут неориентированного графа называется *цепью*, а орграфа — *путем*.

Если попарно различны все вершины незамкнутого маршрута, то такой маршрут неориентированного графа называется *простой цепью*, а орграфа — *простым путем*.

Если попарно различны все ребра замкнутого маршрута, то такой маршрут неориентированного графа называется *циклом*, а орграфа — *контуром*.

Замкнутый маршрут, в котором попарно различны все вершины, кроме первой и последней, называется в неориентированном графе *простым циклом*, а в орграфе — *простым контуром*.

Маршрут назовем *нетривиальным*, если он содержит хотя бы одно ребро; для систематичности рассуждений вводится еще *нуль-маршрут*, вообще не содержащий ребер, — этот маршрут состоит только из одной вершины графа.

Примеры маршрутов приведены на рис. 3.12.

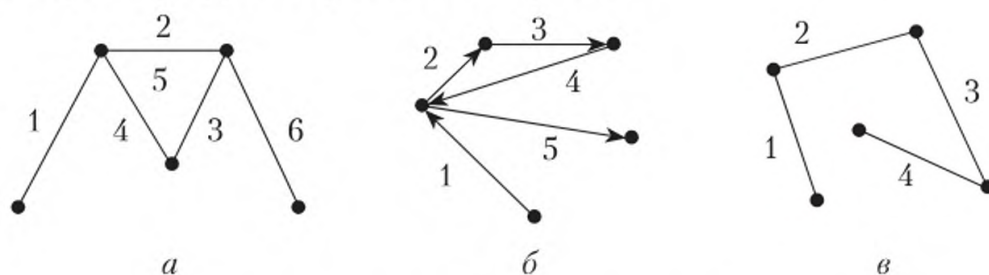


Рис. 3.12. Примеры маршрутов:

а — составная цепь; б — путь; в — простая цепь

Пусть задан неориентированный граф. Граф называется *связным*, если любые две несовпадающие вершины графа соединены маршрутом, в противном случае — *несвязным*. Очевидно, что для связности графа необходимо и достаточно, чтобы произвольная фиксированная вершина графа соединялась маршрутом с каждой из оставшихся вершин этого графа.

*Подграфом графа* называется граф, являющийся подмоделью исходного графа, т.е. подграф содержит некоторые вершины исходного графа и некоторые ребра, оба конца которых входят в подграф. Максимальный связный подграф графа называется его *компонентой связности*.

**Определение 3.14.** Введем понятие *бинарного отношения*. Это двухместное отношение между любыми двумя множествами  $A$  и  $B$ , т.е. всякое подмножество произведения этих множеств:  $R \subseteq A \times B$ . Бинарное отношение на множестве  $A$  — это любое подмножество  $R \subseteq A \times A$ .

**Определение 3.15.** Отношение является *эквивалентным*, если оно *рефлексивно* (вершина всегда связана сама с собой), *симметрично* (из связности вершины  $a$  с вершиной  $b$  следует связность вершины  $b$  с вершиной  $a$ ) и *транзитивно* (если вершины  $a, b$  и вершины  $b, c$  связаны, то связаны и вершины  $a, c$ ).



Отношение связности:

- рефлексивно;
- симметрично;
- транзитивно.

Таким образом, отношение связности для вершин есть отношение эквивалентности. Поэтому существует такое разбиение множества вершин графа на попарно непересекающиеся подмножества (классы эквивалентности), что все вершины в каждом подмножестве связаны, а вершины из различных подмножеств не связаны. Каждое такое подмножество вершин графа вместе с ребрами, инцидентными этим вершинам, образует связный подграф. Следовательно, неориентированный граф представим единственным образом в виде объединения непересекающихся связных подграфов. Эти подграфы называют *связными компонентами* рассматриваемого графа. Связный граф является своей единственной компонентой связности. На рис. 3.13 изображен граф, который имеет три компоненты связности.

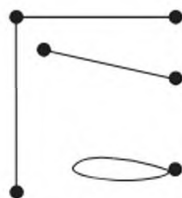


Рис. 3.13. Граф с тремя компонентами связности

Если в орграфе существует маршрут, связывающий вершины  $a$  и  $b$ , то говорят, что вершина  $b$  *достижима* из вершины  $a$ . Любая вершина считается достижимой из себя самой. Вершина орграфа называется *источником*, если из нее достижима любая вершина орграфа.

Связность ориентированных графов определяется в принципе так же, как и неориентированных, т.е. без учета направления дуг. Специфичным для орграфа (или смешанного графа) является понятие сильной связности.

Орграф называется *сильным* (или *сильносвязным*), если любые две его вершины достижимы друг из друга.

Орграф называется *односторонним* (или *одностороннесвязным*), если для любой пары его вершин по меньшей мере одна достижима из другой.

Орграф называется *слабым* (или *слабосвязным*), если связным графом является его неориентированный дубликат.

Примеры связности орграфа приведены на рис. 3.14.

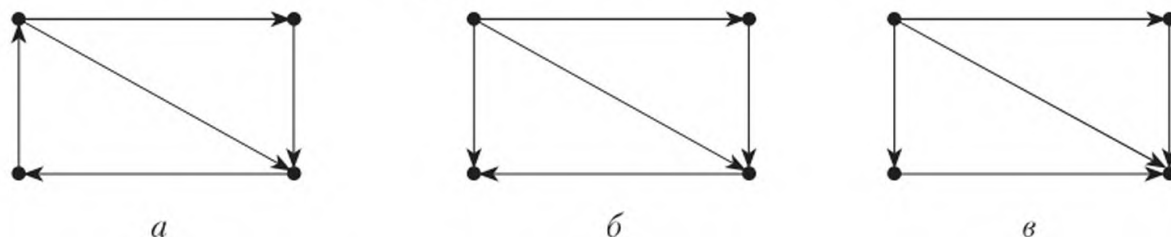


Рис. 3.14. Примеры связности орграфа:

$a$  — сильный орграф;  $б$  — односторонний орграф;  $в$  — слабый орграф



Поскольку вершина графа достижима из себя, то одновершинный орграф будет одновременно и сильным, и односторонним, и слабым. Каждый сильный орграф является односторонним, а каждый односторонний — слабым. Очевидно, что две любые несовпадающие вершины сильного орграфа принадлежат некоторому контуру.

В некоторых задачах существенно требование сильной связности графа. Например, граф, представляющий план города с односторонним движением по некоторым улицам, должен быть сильно связным, так как в противном случае нашлись бы вершины (площади и перекрестки), между которыми нельзя было бы проехать по городу без нарушения правил движения.

**Определение 3.16.** *Деревом* называется связный неориентированный граф без циклов (рис. 3.15).

Свойства деревьев:

- любые две вершины дерева можно соединить ровно одной простой цепью;
- если дерево содержит хотя бы одно ребро, то в нем найдется висячая вершина;
- число ребер в дереве на единицу меньше числа его вершин (например, на рис. 3.15 имеем 9 вершин и 8 ребер).

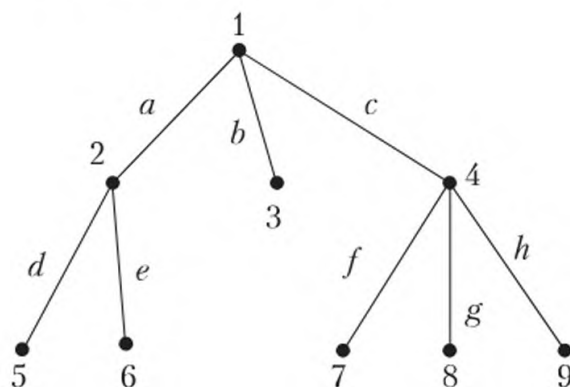


Рис. 3.15. Пример дерева

Справедливо и обратное утверждение: если у связного графа число ребер на единицу меньше числа вершин, то такой граф является деревом.

Если множество вершин графа можно разбить на два подмножества, все вершины которого не являются смежными, то граф называется *двудольным*. Дерево является двудольным графом.

В информатике часто используют *бинарные деревья*, в которых степень всех вершин, кроме корня, не превосходит 3, степень корня не превосходит 2 (рис. 3.16).

Дерево  $T(V, E)$ , множество вершин которого совпадает с множеством вершин графа  $G(V, E_1)$ , а ребра являются ребрами графа  $G$  ( $E \subseteq E_1$ ), называется *остовным деревом* графа  $G$ , т.е. остовное дерево графа  $G$  — это его подграф, содержащий все вершины и являющийся деревом.

Если  $n$  — число вершин, а  $m$  — число ребер графа  $G$ , то любое его остовное дерево имеет  $n$  вершин и  $(n - 1)$  ребер. Таким образом, остовное дерево получается отбрасыванием  $(m - n + 1)$  ребер графа  $G$ . Число  $a = m - n + 1$  называется цикломатическим числом графа  $G$ .



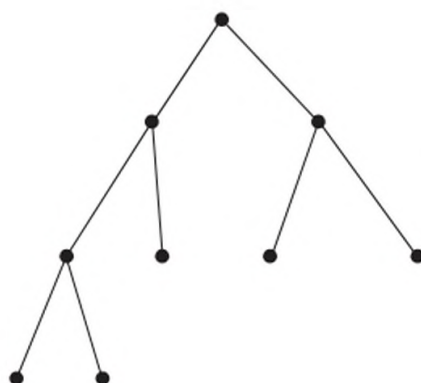


Рис. 3.16. Бинарное дерево

Если каждой дуге (ребру) графа приписано неотрицательное значение (вес), то он называется *взвешенным*. *Стоимостью* взвешенного графа считается суммарная стоимость всех его ребер. Вес ребра может означать стоимость передачи информации между узлами сети, величину потока передаваемой информации, расстояние между пунктами. Взвешенные графы применяются для решения транспортных задач. Многие экономические задачи, связанные с построением систем, приводят к задаче поиска остовного дерева минимальной (максимальной) стоимости.

### 3.3.3. Эйлеровы путь и цикл

Принято всякую замкнутую линию, если ее можно начертить, не отрывая карандаша от бумаги, проходя при этом каждый участок в точности один раз, называть *уникурсальной*.

Опишем одну из задач, положивших начало теории графов, — *задачу о кенигсбергских мостах*. В г. Кенигсберге (ныне Калининград) было семь мостов через реку Прегель (рис. 3.17, где *C* — левый берег; *B* — правый берег; *A* и *D* — острова). Можно ли, прогуливаясь по берегам реки, пройти по каждому мосту ровно один раз?

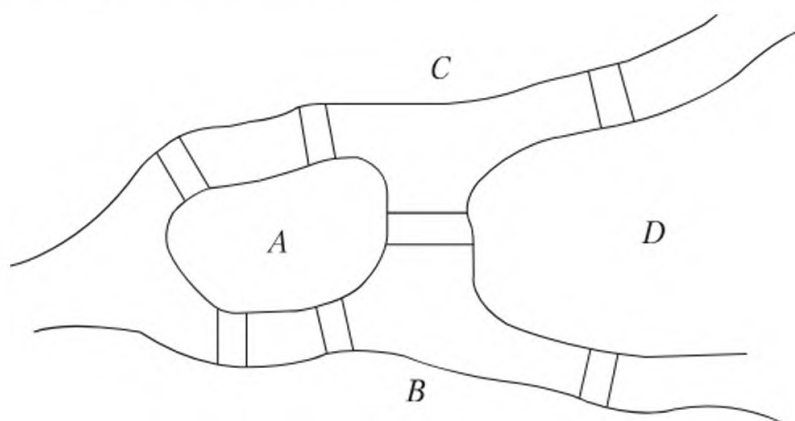


Рис. 3.17. Схема мостов г. Кенигсберг

На рис. 3.18 изображен граф, соответствующий задаче о кенигсбергских мостах. Докажем, что этот граф не является уникурсальным.



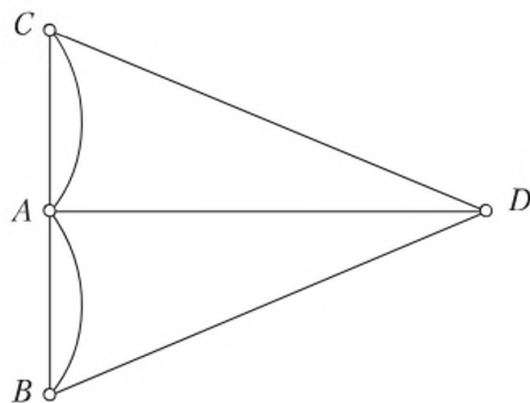


Рис. 3.18. Граф задачи о кенигсбергских мостах

Выдающимся математиком и механиком Л. Эйлером сформулирован и доказан критерий того, что связный неориентированный граф имеет цикл, содержащий все ребра данного графа — эйлеров цикл.

**Определение 3.17.** *Эйлеровым путем* в графе называется путь, содержащий все ребра графа. *Эйлеровым циклом* в графе называется цикл, содержащий все ребра графа. Граф, обладающий эйлеровым циклом, называется *эйлеровым графом*.

**Теорема 3.2.** *Связный неориентированный граф является эйлеровым тогда и только тогда, когда степень каждой из его вершин — четное число.*

Граф, изображенный на рис. 3.18, не содержит эйлеров цикл, поскольку в нем есть вершины, имеющие нечетную степень. Более того, все его вершины имеют нечетную степень.

Рассмотрим *алгоритм построения эйлерова цикла в эйлеровом графе*.

1. Выбрать произвольно некоторую вершину  $a$ .
2. Выбрать произвольно некоторое ребро  $u$ , инцидентное  $a$ , и присвоить ему номер 1 (назовем это ребро *пройденным*).
3. Каждое пройденное ребро вычеркнуть и присвоить ему номер, на единицу больший номера предыдущего вычеркнутого ребра.
4. Находясь в вершине  $x$ , не выбирать ребро, соединяющее  $x$  с  $a$ , если есть возможность иного выбора.
5. Находясь в вершине  $x$ , не выбирать ребро, которое является перешейком, т.е. при удалении которого граф, образованный невычеркнутыми ребрами, распадается на две компоненты связности, каждая из которых имеет по одному ребру.
6. После того как в графе будут занумерованы все ребра, образуется эйлеров цикл, причем порядок нумерации соответствует последовательности обхода ребер.

### Пример 3.33

Найдем эйлеров цикл в эйлеровом графе, изображенном на рис. 3.19.

*Решение*

После выбора вершины  $a$  и прохождения ребер 1 и 2 имеются три возможности выбора: ребра 3, 6 или 7. Так как ребро 7 является перешейком, выбираем следующее из оставшихся, например 3. Далее обходим оставшиеся ребра и получаем эйлеров цикл 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.



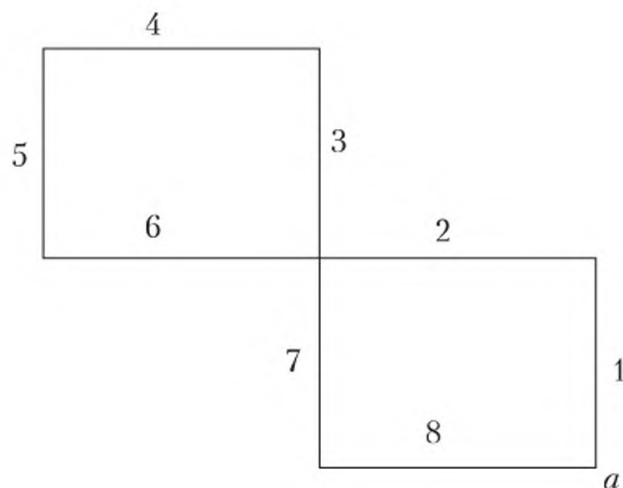


Рис. 3.19. Эйлеров граф

### Задания для самостоятельной работы

**3.1.** Имеется 5 билетов денежно-вещевой лотереи, 6 билетов спортлото и 10 билетов автомотолотереи. Сколькими способами можно выбрать один билет спортлото или автомотолотереи?

**3.2.** В отряде 5 разведчиков, 4 связиста и 2 санитара. Сколькими способами можно выбрать одного солдата так, чтобы он был разведчиком или связистом? Сколькими способами можно составить разведгруппу из трех человек так, чтобы в нее вошли разведчик, связист и санитар?

**3.3.** Из цифр 1, 2, 3, 4, 5 составлены всевозможные трехзначные числа. Сколько среди них таких, в которых цифра сотен больше цифры десятков, а цифра десятков больше цифры единиц?

**3.4.** Имеется материал 5 различных цветов, среди которых есть красный. Сколько различных флагов (три горизонтальные полосы разных цветов) можно сшить на их основе? Сколько таких флагов можно сшить так, чтобы на нем обязательно присутствовал красный цвет?

**3.5.** Даны цифры 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Сколько различных шестизначных телефонных номеров можно образовать на их основе, если известно, что шестизначный телефонный номер не должен начинаться с 0?

**3.6.** Сколько различных перестановок можно составить из букв слова «гипербола»?

**3.7.** Из группы, состоящей из 4 мужчин и 4 женщин, надо выбрать 6 человек так, чтобы среди них было не менее двух женщин. Сколькими способами это можно сделать?

**3.8.** Дано высказывание: «Петр выучил уроки, идет по улице и подбрасывает мяч». Выделите простые высказывания, обозначьте их буквами и запишите составное высказывание в виде формулы.

**3.9.** Выделите высказывания, не являющиеся логической суммой:

Корнем уравнения является число  $a$  или  $b$ .

На стене висит портрет Петрова или Сидорова.

Командиром отряда изберут Михайлова или Соколова.

Пять — делитель числа  $a$  или  $b$ .

**3.10.** Даны высказывания « $5 < 15$ » и « $5 < 15 < 20$ ». Какое из них является логическим произведением?

**3.11.** Определите истинность или ложность следующих высказываний:

а)  $x_1 = (A \vee B) \wedge (A \vee \bar{A})$ ;

б)  $x_2 = (A \vee B) \wedge (A \vee \bar{B}) \wedge \bar{A}$ ;



- в)  $x_3 = (A \vee \bar{C}) \wedge \bar{A} \wedge C$ ;  
 г)  $x_4 = A \wedge B \wedge (A \vee \bar{B})$ ;  
 д)  $x_5 = (A \vee B) \wedge A \wedge \bar{B}$ ;  
 е)  $x_6 = (A \vee \bar{A}) \wedge (A \wedge C \vee \bar{A} \vee \bar{C})$ .

**3.12.** Какие высказывания в каждом из двух наборов равносильны:

- а)  $x_1 = \bar{B} \vee \bar{A}$ ;  $x_2 = \overline{B \wedge A}$ ;  $x_3 = \bar{B} \vee A$ ;  $x_4 = \overline{B \vee \bar{A}}$ ;  
 б)  $x_1 = A \wedge B \vee \bar{C}$ ;  $x_2 = A \wedge B \vee \bar{A} \wedge B \wedge C$ ;  $x_3 = \overline{A \wedge B \wedge C}$ ;  $x_4 = (\bar{B} \vee \bar{A}) \wedge C$ .

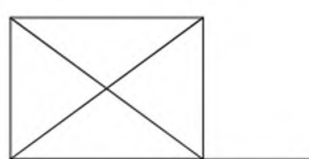
**3.13.** Используя законы де Моргана, преобразуйте формулы высказываний так, чтобы отрицание не распространялось на сложные высказывания:

- а)  $\overline{\bar{A} \wedge B \vee \bar{C}}$ ;  
 б)  $\overline{(A \vee \bar{B}) \wedge (\bar{A} \vee B \wedge C)}$ ;  
 в)  $A \wedge \bar{B} \vee A \wedge C \wedge (\bar{C} \vee \bar{B})$ ;  
 г)  $A \wedge \bar{B} \wedge C \vee \bar{A} \wedge (B \vee \bar{C})$ ;  
 д)  $\overline{\bar{B} \wedge A \vee A \wedge \bar{C}}$ ;  
 е)  $\overline{A \wedge B \wedge \bar{C} \vee \bar{A}}$ ;  
 ж)  $\overline{A \wedge B \wedge \bar{C} \vee \bar{A} \wedge C}$ .

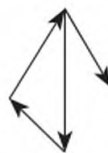
**3.14.** Найдите предикат из следующего списка, который определяется формулой « $x$  — простое число или  $x$  равно 1»:

- а) « $x$  — четное число»;  
 б) « $x$  равно 1»;  
 в) « $z$  есть наибольшее из чисел  $x$  и  $y$ »;  
 г) « $x$  принадлежит множеству  $\{1; 2\}$ ».

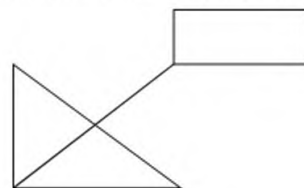
**3.15.** Построить матрицы смежности и инцидентности для графов:



а



б



в

**3.16.** Дано дерево  $T = (\{1, 2, 3, 4\}, \{(1, 2), (1, 3), (3, 4)\})$ . Постройте его матрицы смежностей и инцидентности.

**3.17.** Изобразите граф, которому соответствует следующая матрица инцидентности:

а) 
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix};$$
 б) 
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

в) 
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$







**Раздел II**  
**МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ,**  
**ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ**  
**И РАЗНОСТНЫЕ УРАВНЕНИЯ,**  
**ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ,**  
**ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА**

---

---







## Глава 4

# ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ И ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

---

В результате изучения главы 4 студент должен:

### **знать**

- основные базовые понятия и определения теории пределов дифференциального и интегрального исчисления;
- основные свойства последовательностей, элементарных функций;
- методы поиска интегралов и производных;
- методы построения графиков функций, нахождения экстремумов функции и площадей плоских фигур;

### **уметь**

- применять методы математического анализа для решения экономических и управленческих задач;
- решать задачи, формулируемые в разных разделах математического анализа;
- пользоваться современной вычислительной техникой в объеме, необходимом для решения определенного набора учебных задач;

### **владеть**

- навыками применения современного инструментария математического анализа для решения экономических и управленческих задач;
  - методикой нахождения пределов, производных и интегралов;
  - техниками поиска пределов числовых последовательностей и функций, асимптот, интегралов и производных.
- 

В настоящей главе рассмотрены классические разделы математического анализа: теория пределов, дифференциальное и интегральное исчисление функции одной переменной и их приложения в экономике.

## 4.1. Пределы и непрерывность

### 4.1.1. Числовые функции

Пусть  $X, Y \subset \mathbf{R}$ .

**Определение 4.1.** Если каждому числу  $x \in X$  ставится в соответствие единственное число  $y \in Y$ , то говорят, что на множестве  $X$  задана *функция*  $f$  со значениями во множестве  $Y$ .

Обозначения:  $f$  — функция;  $x$  — аргумент;  $X = D(f)$  — область определения функции;  $Y = E(f)$  — область значений функции.

Рассмотрим *способы задания функций*.

1. *Табличный* способ используется, когда область определения  $D(f)$  состоит из конечного числового множества, например таблица курса дол-



лара, где множество  $X = D(f)$  — дни торгов, множество  $E(f)$  — цены доллара в конце каждого дня (торговой сессии).

2. *Аналитический* способ используется, когда функцию  $f$  можно задать формулой  $y = f(x)$ . Например, спрос населения на товары роскоши описывается функцией Торнквиста  $y = ax(x - b)(x + c)^{-1}$ , где  $x$  — доход;  $y$  — спрос в денежном выражении;  $a, b, c$  — некоторые положительные постоянные.

3. Задание *графическим* способом функции  $f$  означает задание на числовой плоскости множества точек  $M(x, y)$  для  $x \in D(f)$  и  $y \in E(f)$ . При этом такое множество называется *графиком функции*.

#### Пример 4.1

Статистика показывает, что спрос населения на товары первой необходимости имеет следующее графическое выражение (рис. 4.1).

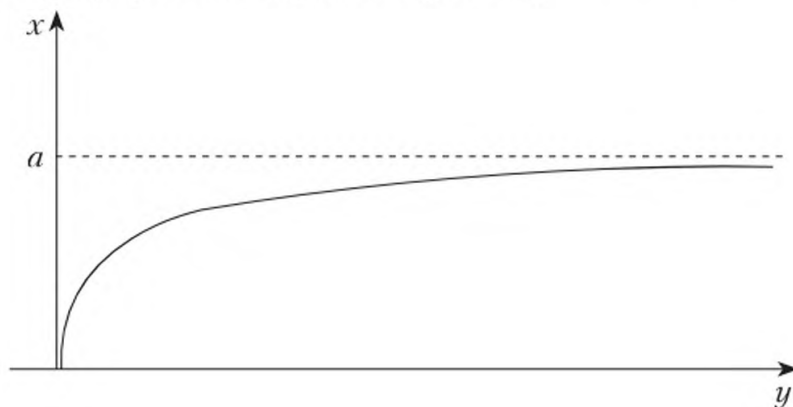


Рис. 4.1. Графический способ задания функции

4. Возможен еще *словесный*, или описательный, способ задания функции. Например, функция Дирихле:  $y = f(x) = 1$ , если  $x \in Q$  и  $y = f(x) = 0$ , если  $x \in J$ .

### Сложная и обратная функции

Если для функции  $y = f(x)$  переменная  $x$  функционально зависит от переменной  $t$ , т.е.  $x = g(t)$ , то, производя замену, получим *сложную* функцию вида  $y = f(g(t)) = F(t)$ .

Например,  $y = \sin x$  и  $x = |t|$ , тогда  $y = \sin |t|$ .

**Определение 4.2.** Для  $y = f_1(x)$  функция  $x = f_2(y)$  называется *обратной*, если  $E(f_1) = D(f_2)$  и  $y \equiv f_1(f_2(y))$ .

Обозначение:  $x = f^{-1}(y)$  — обратная для  $y = f(x)$ .

Свойство: графики прямой и обратной функций симметричны относительно прямой  $y = x$ .

Рассмотрим классификацию функций по их свойствам.

**Определение 4.3.**  $y = f(x)$  — *четная* функция, если  $f(-x) = f(x)$  для всех  $x \in D(f)$ .

Например,  $y = \cos(-x) = \cos x \Rightarrow y = \cos x$  — четная функция.

Свойство: график четной функции симметричен относительно оси  $Oy$ .

**Определение 4.4.**  $y = f(x)$  — *нечетная* функция, если  $f(-x) = -f(x)$  для всех  $x \in D(f)$ .

Например,  $y = \sin(-x) = -\sin x \Rightarrow y = \sin x$  — нечетная функция.



Свойство: график нечетной функции симметричен относительно начала координат.

**Определение 4.5.**  $y = f(x)$  — периодическая функция, если  $f(x + T) = f(x)$  для всех  $x \in D(f)$ . Наименьшее число  $T > 0$  называется *основным периодом* функции.

Например,  $y = \sin(x + 2\pi) = \sin x \Rightarrow y = \sin x$  — периодическая функция. Наименьший период равен  $2\pi$ .

Правило построения. Чтобы построить график периодической функции надо:

- 1) построить ее график для  $0 < x < T$ ;
- 2) сдвинуть его вдоль оси  $Ox$  на  $\pm T; \pm 2T; \pm 3T; \dots$ .

**Определение 4.6.** Функция  $f$  называется *ограниченной сверху*, если для всех  $x \in D(f)$   $f(x) \leq b$ ; *ограниченной снизу*, если для всех  $x \in D(f)$   $f(x) \geq a$ ; *ограниченной*, если для всех  $x \in D(f)$  выполняются двойные неравенства  $a \leq f(x) \leq b$ , и *неограниченной*, если для всех  $c$  существует  $x \in D(f)$ , такая что имеет место неравенство  $|f(x)| \geq c$ .

Например,  $x^2 \geq 0 \Rightarrow y = x^2$  — ограниченная снизу;  $-x^2 \leq 0 \Rightarrow y = -x^2$  — ограниченная сверху;  $|\sin x| \leq 1 \Rightarrow y = \sin x$  — ограниченная;  $y = \operatorname{tg} x$  — неограниченная.

**Определение 4.7.** Функция называется *монотонно возрастающей*, если для всех  $x \in D(f)$  выполняется:  $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ ; функция называется *монотонно убывающей*, если для всех  $x \in D(f)$  выполняется:  $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ .

Примеры графиков монотонных функций приведены на рис. 4.2.

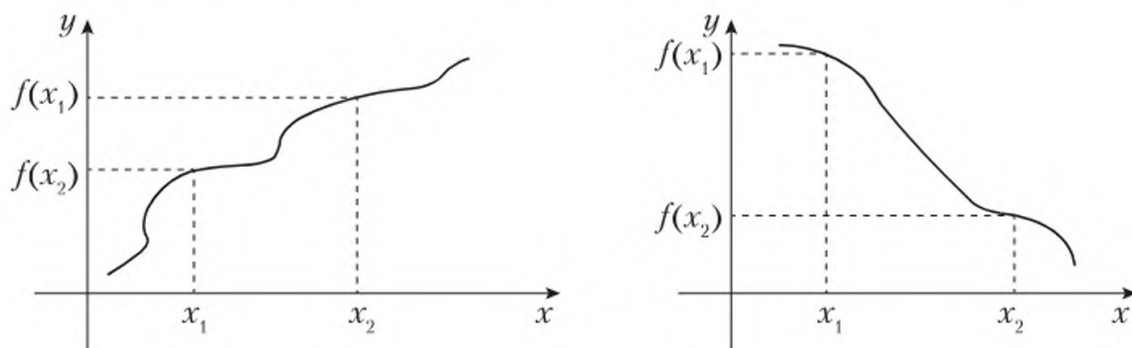


Рис. 4.2. Монотонно возрастающая (а) и монотонно убывающая (б) функции

#### 4.1.2. Предел числовой последовательности

**Определение 4.8.** Если  $D(f) = \mathbf{N}$ , то  $y = f(x)$  называется *числовой последовательностью*.

Обозначение:  $a_1 = f(1)$ ,  $a_2 = f(2)$ , ...,  $a_n = f(n)$ , ... или  $\{a_n\}$ :  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ . Здесь  $a_n = f(n)$  — общий член последовательности.

Рассмотрим способы задания последовательности.

1. Формулой общего члена:  $a_n = f(n)$ . Например,  $a_n = n^{-2}$ :  $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \dots$ .



2. Рекуррентным соотношением:  $a_n = F(a_1, a_2, \dots, a_n)$ . Например,  $a_{n+1} = \frac{1}{n} \times a_n$ ,  $a_1 = 3$ .

3. Описанием общего члена последовательности. Например,  $a_n$  равно нулю, если  $n$  четное, и 1, если  $n$  — нечетное.

**Определение 4.9.** Предел числовой последовательности  $\{a_n\}$  — это число  $a$  такое, что для любого сколь угодно малого  $\varepsilon > 0$  найдется такой номер  $N$ , что для всех членов последовательности с номерами  $n > N$  выполняется неравенство  $|a_n - a| < \varepsilon$ .

Следовательно,  $a_{N+1}, a_{N+2}, a_{N+3}, \dots \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$  и  $a$  выглядит «точкой накопления» для множества точек  $\{a_n\}$  на числовой прямой.

Обозначение:  $\lim a_n = a$ .

#### Пример 4.2

Пусть задана  $\{a_n\}$ :  $a_1 = 0,3$ ;  $a_2 = 0,33$ ;  $a_3 = 0,333$ , ... . Докажем, что  $\frac{1}{3}$  является пределом этой числовой последовательности.

*Решение*

Для начала вычислим:

$$1/3 - a_1 = 1/30;$$

$$1/3 - a_2 = 1/300;$$

$$1/3 - a_3 = 1/3000;$$

.....

Пусть  $\varepsilon = 0,001$ , тогда при  $n > N = 2$  имеем  $1/3 - a_3 = 1/3000 < \varepsilon$ .

Аналогичным образом доказывается для произвольного  $\varepsilon > 0$ .

В итоге  $\lim a_n = 1/3$ .

### Основные теоремы о пределах

**Теорема 4.1.** Если числовая последовательность  $\{a_n\}$  имеет предел, то он единственный.

*Доказательство.* Пусть  $\lim a_n = a$  и  $\lim a_n = b$ , тогда  $0 = a - b$  и  $a = b$ .

**Теорема 4.2.** Если числовая последовательность  $\{a_n\}$  имеет предел, то она ограниченная.

*Доказательство.* Пусть  $\lim a_n = a$ . Согласно определению 4.8 при  $n > N$  имеем  $a_{N+1}, a_{N+2}, a_{N+3}, \dots \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ . Вне интервала  $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$  останется  $N$  чисел  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_N$ . Можно сместить границы интервала до  $(c, d)$  так, чтобы  $c < a_n < d$  при всех  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Следовательно,  $a_n = f(n)$  — ограниченная функция.

**Теорема 4.3.** Пусть последовательности  $\{a_n\}$  и  $\{b_n\}$  такие, что  $\lim a_n = a$ ,  $\lim b_n = b$  и  $a_n \leq b_n$  при всех  $n = 1, 2, 3, \dots$ , тогда  $a \leq b$ .

**Теорема 4.4.** Пусть последовательности  $\{a_n\}$ ,  $\{b_n\}$  и  $\{c_n\}$  такие, что  $a_n \leq b_n \leq c_n$  при всех  $n = 1, 2, 3, \dots$  и  $\lim a_n = \lim c_n = a$ , тогда  $\lim b_n = a$ .

### Основные правила нахождения пределов

Пусть последовательности  $\{a_n\}$  и  $\{b_n\}$  имеют пределы  $\lim a_n = a \neq \infty$  и  $\lim b_n = b \neq \infty$ .



**Правило 1.**  $\lim (a_n + b_n) = \lim a_n + \lim b_n = a + b$ .

**Правило 2.**  $\lim (a_n b_n) = (\lim a_n) \cdot (\lim b_n) = ab$ .

**Правило 3.**  $\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim a_n}{\lim b_n} = \frac{a}{b}$ , если  $b_n \neq 0$  и  $b \neq 0$ .

### Бесконечно большие и малые последовательности

**Определение 4.10.** Последовательность  $\{a_n\}$  называется *бесконечно большой*, если для сколь угодно большого  $A > 0$  существует такой номер  $N$ , что из  $n > N \Rightarrow a_n > A$ .

Обозначение:  $\lim a_n = +\infty$ .

**Замечание 4.1.** Аналогично определяется бесконечно большая последовательность  $\{a_n\}$  с  $\lim a_n = -\infty$ .

#### Пример 4.3

Покажем, что если  $\{a_n\} = \{n^2 + 2n + 1\}$ , то  $\lim a_n = +\infty$ .

*Решение*

Выберем произвольное число  $A > 0$ .

Запишем условие  $a_n > A$ , которое имеет вид  $n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2 > A$ , и найдем  $n > \sqrt{A} - 1$ .

Выбираем за  $N$  целую часть  $\sqrt{A} - 1$ , тогда  $n > N \Rightarrow a_n > A$ .

**Определение 4.11.** Последовательность  $\{a_n\}$  называется *бесконечно малой* (сходящейся к нулю), если для сколь угодно малого  $\varepsilon > 0$  существует такой номер  $N$ , что из  $n > N \Rightarrow |a_n| < \varepsilon$ .

Обозначение:  $\lim a_n = 0$ .

#### Пример 4.4

Покажем, что если  $\{a_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}$ , то  $\lim a_n = 0$ .

*Решение*

Выберем произвольное число  $\varepsilon > 0$ .

Запишем условие  $|a_n| < \varepsilon$ , которое имеет вид  $\frac{1}{n} < \varepsilon$ , и находим  $n > \frac{1}{\varepsilon}$ .

Выберем за  $N$  целую часть  $\frac{1}{\varepsilon}$ , тогда  $n > N \Rightarrow |a_n| < \varepsilon$ .

### 4.1.3. Предел функции

**Определение 4.12.** Пределом функции  $y = f(x)$  в точке  $x = a$  (или при  $x$ , стремящемся к  $a$ ) называют число  $A$ , если для любой последовательности  $\{x_n\}$ :  $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$  значений аргумента  $x$ , имеющей своим пределом число  $a$ , соответствующая последовательность  $\{y_n\}$ :  $y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$  значений  $y_n = f(x_n)$  функции  $f$  имеет своим пределом число  $A$ .

Обозначение:  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ .



**Пример 4.5**

Найдем  $\lim_{x \rightarrow a} x^2$ .

*Решение*

Пусть  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$  для  $\{x_n\}: x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ . Тогда  $\{y_n = (x_n)^2\}: (x_1)^2, (x_2)^2, \dots, (x_n)^2, \dots$  и на основании правила 2 вычисления предела последовательности

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} x^2 = \lim_{x \rightarrow a} x \cdot \lim_{x \rightarrow a} x = a \cdot a = a^2.$$

**Замечание 4.2.** При определении предела функции последовательность  $\{x_n\}: x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$  сходится к числу  $a$ , но не обязательно это число достигает, и последовательность  $\{y_n\}: y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$  сходится к числу  $A$ , но не обязательно его достигает.

**Определение 4.13.** Число  $A$  называется *левосторонним (правосторонним) пределом* функции  $f$ , если  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$  и  $x_n < a$  ( $x_n > a$ ) для всех

членов последовательности  $\{x_n\}: x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ , сходящейся к  $a$ .

Обозначение:  $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = A$  ( $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = A$ ).

### Бесконечно большие и бесконечно малые функции

**Определение 4.14.** Функция  $f$  называется *бесконечно большой (бесконечно малой)*, если для любой последовательности  $\{x_n\}: x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$  значений аргумента  $x$ , сходящейся к  $a$ , последовательность  $\{y_n\}: y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$  значений  $y_n = f(x_n)$  функции  $f$  имеет своим пределом  $\pm\infty$  (соответственно 0).

Обозначение:  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$  ( $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ ).

**Теорема 4.5.** Функция, обратная по величине бесконечно большой, является бесконечно малой.

Обозначение:  $\left[ \frac{1}{\pm\infty} \right] = 0$ .

**Пример 4.6**

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 = \infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} = \left[ \frac{1}{\infty} \right] = 0.$$

**Теорема 4.6.** Функция, обратная по величине бесконечно малой, является бесконечно большой.

Обозначение:  $\left[ \frac{1}{\pm 0} \right] = \pm\infty$ .

**Пример 4.7**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sin x} = \left[ \frac{1}{0} \right] = \infty.$$

**Теорема 4.7.** Сумма бесконечно большой функции и функции ограниченной является бесконечно большой функцией.

Обозначение:  $\left[ \pm\infty \right] + A = \pm\infty$ .



**Пример 4.8**

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 = \infty \text{ и } -1 \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 + \sin x) = \infty.$$

**Теорема 4.8.** Сумма бесконечно больших функций одного знака является бесконечно большой функцией того же знака.

Обозначение:  $[\pm\infty] + [\pm\infty] = \pm\infty$ .

**Теорема 4.9.** Произведение бесконечно большой функции на функцию ограниченную является бесконечно большой функцией.

Обозначение:  $[\pm\infty] \times A = \pm\infty$  для  $A > 0$ .

**Пример 4.9**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = \infty \text{ и } -1 \leq \cos x \leq 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x} \cos x) = \infty.$$

**4.1.4. Теоремы о пределах функций**

**Теорема 4.10.** Если в точке  $a$  функция  $f$  имеет предел  $A$ , то он единственный.

*Доказательство.* Пусть  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$  и  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = B$ , тогда  $0 = A - B$  и  $A = B$ .

**Теорема 4.11.** Если в точке  $a$  функция  $f$  имеет конечный предел  $A$ , то в  $\varepsilon$ -окрестности точки  $a$  функция ограничена, т.е. для любого  $x \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$  справедливо неравенство  $|f(x)| < B$ .

**Теорема 4.12.** Если  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$  и  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = A$  и  $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$  для любого  $x \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ , то  $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = A$ .

**Правила нахождения пределов функций**

Пусть  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \neq \pm\infty$  и  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B \neq \pm\infty$ .

**Правило 1.**  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x) = A \pm B$ .

**Правило 2.**  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x) = AB$ .

**Правило 3.**  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{A}{B}$  для  $B \neq 0$ .

**Правило 4.**  $\lim_{x \rightarrow a} Cf(x) = C \lim_{x \rightarrow a} f(x) = CA$ .

*Замечание 4.3.* Каждое из этих правил является следствием соответствующего правила нахождения предела числовой последовательности.

**Два замечательных предела**

**Определение 4.15.** Первым замечательным пределом называется предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$



*Доказательство.* Рассмотрим круг радиуса  $R$  с центром в начале координат (рис. 4.3).

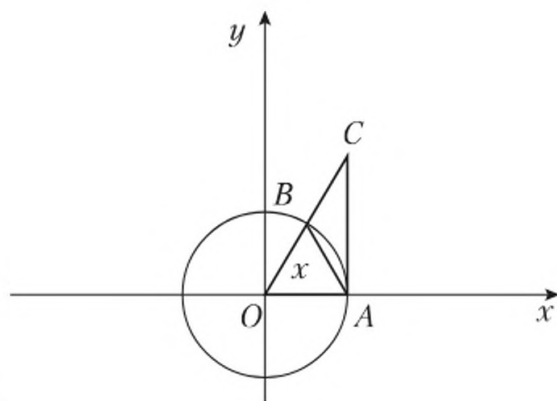


Рис. 4.3. Первый замечательный предел

Здесь полагаем, что  $\angle AOB = x$  (рад) и  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ , тогда  $S_{\triangle AOB} < S_{\text{сектор } AOB} < S_{\triangle AOC}$ , где

$$S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} R \cdot R \cdot \sin x = \frac{1}{2} R^2 \sin x; \quad S_{\text{сектор } AOB} = \frac{1}{2} R^2 x;$$

$$S_{\triangle AOC} = \frac{1}{2} AO \cdot AC = \frac{1}{2} AO \cdot (AO \cdot \operatorname{tg} x) = \frac{1}{2} R^2 \operatorname{tg} x.$$

Тогда неравенства примут вид

$$\frac{1}{2} R^2 \sin x < \frac{1}{2} R^2 x < \frac{1}{2} R^2 \operatorname{tg} x.$$

Разделим все части неравенства на  $\frac{1}{2} R^2 \sin x > 0$ , получим

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}, \text{ или } \cos x > \frac{\sin x}{x} > 1.$$

Перейдем к пределу при  $x \rightarrow 0$ , получим

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} \cos x = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0+0} 1 = 1.$$

На основании теоремы 4.13 находим  $\lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\sin x}{x} = 1$ .

Поскольку функция  $\frac{\sin x}{x}$  четная, то  $\lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{\sin x}{x} = 1$ .

Итогом будет доказываемое равенство:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \left[ \frac{0}{0} \right] = 1$ .

**Определение 4.16.** Вторым замечательным пределом называется предел

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^x = e.$$

Здесь  $e \approx 2,71828...$  — иррациональное число (число Эйлера).



Если положить  $y = \frac{1}{x}$ , то  $x = \frac{1}{y}$  и при  $x \rightarrow \infty$  получаем, что  $y \rightarrow 0$ . Тогда

$$\lim_{y \rightarrow 0} (1+y)^{\frac{1}{y}} = e.$$

*Замечание 4.4.* С учетом принятых выше обозначений имеем

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{y \rightarrow 0} (1+y)^{\frac{1}{y}} = [1^\infty] = e.$$

### Задачи о начислении процентов

Первоначальный вклад в банк составил  $S_0$  денежных единиц. Пусть банк выплачивает  $p$  % годовых по вкладу.

1. Найдем размер вклада  $S_t$  через  $t$  лет.

По истечении 1-го года сумма вклада составит

$$S_1 = S_0 + \frac{p}{100} S_0 = \left(1 + \frac{p}{100}\right) S_0.$$

По истечении 2-го года сумма вклада составит

$$S_2 = S_1 + \frac{p}{100} S_1 = \left(1 + \frac{p}{100}\right) S_1 = \left(1 + \frac{p}{100}\right)^2 S_0.$$

По истечении  $t$  лет сумма вклада составит

$$S_t = \left(1 + \frac{p}{100}\right)^t S_0.$$

2. Найдем размер вклада  $S_t$  через  $t$  лет, если проценты по вкладу начисляются  $k$  раз в год при той же процентной ставке.

Каждое начисление будет составлять  $\frac{p}{k}$  % от вклада, тогда по истечении  $t$  лет сумма вклада составит по доказанному выше

$$S_t = \left(1 + \frac{p}{100k}\right)^{tk} S_0.$$

3. Найдем размер вклада  $S_t$  через  $t$  лет, если проценты по вкладу начисляются непрерывно при той же процентной ставке. Имеем:

при  $k = 2$  проценты начисляются каждые полгода;

при  $k = 4$  проценты начисляются ежеквартально;

при  $k = 12$  проценты начисляются ежемесячно;

при  $k = 365$  проценты начисляются каждый день;

при  $k = 8750$  проценты начисляются каждый час.

Если  $k \rightarrow \infty$ , то проценты начисляются непрерывно, найдем размер вклада в этой парадоксальной ситуации:

$$S_t = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{p}{100x}\right)^{tx} S_0 = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \left(1 + \frac{p}{100x}\right)^{\frac{100x}{p}} \right]^{\frac{pt}{100}} S_0 =$$



$$= \left[ \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{p}{100x} \right)^{\frac{100x}{p}} \right]^{\frac{pt}{100}} S_0 = e^{\frac{pt}{100}} S_0.$$

#### 4.1.5. Непрерывность функции

**Определение 4.17** (первое определение непрерывности функции в точке). Функция  $y = f(x)$  называется *непрерывной* в точке  $x = a$ , если в этой точке она имеет значение (1)  $f(a)$  и (2) конечный предел  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \neq \pm\infty$ , которые совпадают, т.е. (3)  $f(a) = A$ .

**Определение 4.18.** Точка  $a$  называется *точкой разрыва* функции, если не выполняется хотя бы одно из условий (1)–(3).

##### Пример 4.10

Исследуем на непрерывность в точке  $x = 0$  функцию  $y = f(x) = \frac{1}{x}$ .

*Решение*

В точке  $x = 0$  функция  $y = f(x)$  (рис. 4.4) не является непрерывной, так как нарушено 1-е условие — функция не имеет значения  $f(0)$ . Следовательно,  $x = 0$  — точка разрыва функции.

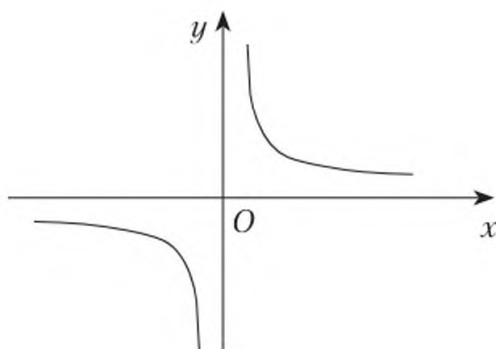


Рис. 4.4. График функции  $y = f(x) = \frac{1}{x}$

Выполнение хотя бы одного из условий  $\lim_{x \rightarrow 0-0} f(x) = -\infty$  и  $\lim_{x \rightarrow 0+0} f(x) = +\infty$  характеризует  $x = 0$  как точку разрыва II рода.

**Правило определения точки разрыва функции II рода.** В точке разрыва II рода хотя бы один односторонний предел не существует или бесконечен.

##### Пример 4.11

Исследуем на непрерывность в точке  $x = 0$  функцию  $y = \begin{cases} x+1, & \text{если } x \geq 0, \\ x-1, & \text{если } x < 0. \end{cases}$

*Решение*

В точке  $x = 0$  функция  $y = f(x)$  (рис. 4.5) не является непрерывной, так как нарушено 2-е условие — функция не имеет предела при  $x \rightarrow 0$ . Следовательно,  $x = 0$  — точка разрыва функции.



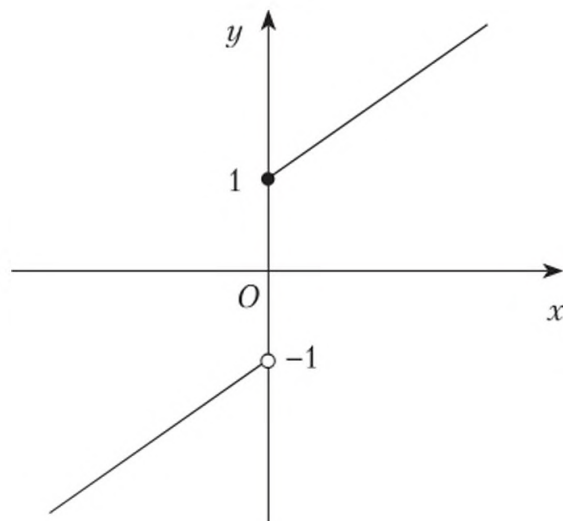


Рис. 4.5. График функции  $y = \begin{cases} x+1, & \text{если } x \geq 0, \\ x-1, & \text{если } x < 0 \end{cases}$

Выполнение условий  $\lim_{x \rightarrow 0-0} f(x) = -1$  и  $\lim_{x \rightarrow 0+0} f(x) = +1$  характеризуют точку  $x = 0$  как точку разрыва I рода в виде скачка функции.

Разность  $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) - \lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$  называется скачком функции в точке разрыва.

**Правило определения точки разрыва I рода со скачком функции.** В точке разрыва I рода, где функция имеет скачок, односторонние пределы конечные и неравные.

#### Пример 4.12

Исследуем на непрерывность в точке  $x = 0$  функцию  $y = \begin{cases} x^2, & \text{если } x \neq 0, \\ 1, & \text{если } x = 0. \end{cases}$

*Решение*

В точке  $x = 0$  функция  $y = f(x)$  (рис. 4.6) не является непрерывной, так как нарушено 3-е условие — предел функции при  $x \rightarrow 0$  не совпадает со значением функции в этой точке. Следовательно,  $x = 0$  — точка разрыва функции.

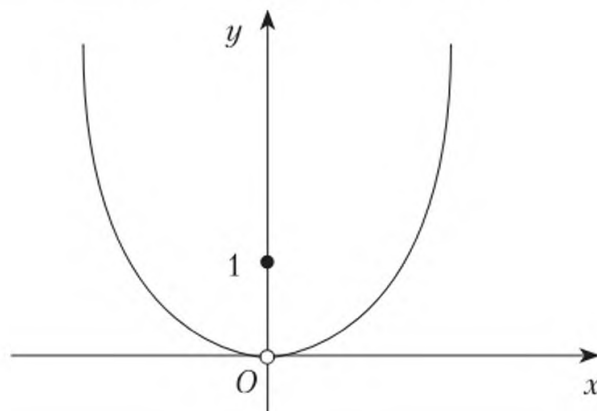


Рис. 4.6. График функции  $y = \begin{cases} x^2, & \text{если } x \neq 0, \\ 1, & \text{если } x = 0 \end{cases}$



Выполнение условия  $\lim_{x \rightarrow 0 \pm 0} f(x) \neq 1 = f(0)$  характеризует точку  $x = 0$  как точку разрыва I рода (устранимый разрыв).

**Правило определения устранимого разрыва функции.** В точке устранимого разрыва односторонние пределы существуют и равны между собой, но не равны значению функции в точке.

#### Пример 4.13

Исследуем на непрерывность в точке  $x = 0$  функцию  $y = x^2$ .

*Решение*

В точке  $x = 0$  функция непрерывна, так как выполнены все три условия непрерывности:  $\lim_{x \rightarrow 0 \pm 0} f(x) = f(0) = 0$ .

Назовем функцию *элементарной*, если она из следующего списка: степенная, показательная, логарифмическая, тригонометрическая, обратная тригонометрическая.

Сформулируем две теоремы о непрерывной в точке функции.

**Теорема 4.13.** Любая элементарная функция непрерывна в каждой точке области определения.

**Теорема 4.14.** Для непрерывной в точке  $x = a$  функции  $y = f(x)$  возможна перестановка символов предела и функции, т.е.  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(\lim_{x \rightarrow a} x)$ .

#### Пример 4.14

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^{x^2} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} x^2} = e^{(\lim_{x \rightarrow 0} x)^2} = e^0 = 1.$$

Приращением аргумента функции  $y = f(x)$  в точке  $a \in D(f)$  называется разность  $\Delta x = a - x$ , где  $x$  — точка  $\varepsilon$ -окрестности точки  $a$ , т.е.  $x \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ .

Приращению аргумента  $\Delta x$  соответствует приращение функции

$$\Delta y = f(a + \Delta x) - f(a).$$

Если функция  $y = f(x)$  непрерывна в точке  $a$ , то

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (f(a + \Delta x) - f(a)) = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(a + \Delta x) - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(a) = f(a) - f(a) = 0. \end{aligned}$$

**Определение 4.19** (второе определение непрерывности функции в точке). Функция  $y = f(x)$  непрерывна в точке  $a$ , если

- (1) функция определена в этой точке и
- (2) приращение функции  $\Delta y$  стремится к нулю, когда стремится к нулю приращение ее аргумента  $\Delta x$ .

#### Свойства функций, непрерывных в точке

**Свойство 1.** Если функции  $f(x)$  и  $g(x)$  непрерывны в точке  $a$ , то функции  $f(x) + g(x)$ ,  $f(x)g(x)$  и  $\frac{f(x)}{g(x)}$  для  $g(x) \neq 0$  являются непрерывными в точке  $a$  функциями.



**Замечание 4.5.** Справедливость утверждения следует из определения непрерывности функции и свойств пределов функций.

**Свойство 2.** Если функция  $y = f(x)$  непрерывна в точке  $a$  и при этом  $f(a) > 0$ , то существует  $\varepsilon$ -окрестность точки  $a$ , в которой  $f(x) > 0$ .

**Доказательство.** Пусть, от противного, в любой окрестности точки  $a$  выполняется  $f(x) \leq 0$ . Тогда существует последовательность  $\{x_n\}$ :  $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$  значений аргумента  $x$ , имеющая своим пределом число  $a$ , такая что соответствующая последовательность значений  $y_n = f(x_n)$  функции  $f$ , имеющая своим пределом число  $f(a)$ , запишется в виде

$$\{y_n\}: y_1 \leq 0, y_2 \leq 0, \dots, y_n \leq 0, \dots$$

В итоге  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \leq 0$ , что противоречит условию.

**Свойство 3.** Если функция  $y = f(x)$  непрерывна в точке  $x = a$ , а функция  $x = g(t)$  непрерывна в точке  $t = b$ , то сложная функция  $y = f(g(t))$  будет непрерывна в точке  $t = b$ , т.е.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(g(t)) = f(\lim_{t \rightarrow b} g(t)).$$

### Функции, непрерывные на отрезке

**Определение 4.20.** Функция  $y = f(x)$  называется *непрерывной на отрезке*  $[a, b]$ , если она определена на этом отрезке и непрерывна в каждой его точке (рис. 4.7).

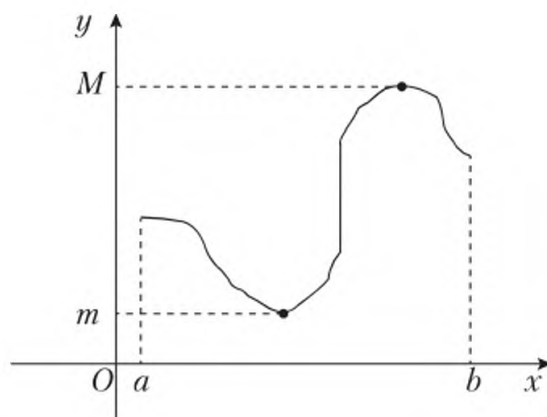


Рис. 4.7. Функция, непрерывная на отрезке

**Свойство 1.** Если функция  $y = f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$ , то она достигает на этом отрезке своих наибольшего и наименьшего значений.

**Свойство 2.** Если функция  $y = f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$ , то она ограничена на этом отрезке.

Как очевидно из рис. 4.7, функция  $y = f(x)$  заключена между своими наибольшим и наименьшим значениями, т.е.  $m \leq f(x) \leq M$ , где  $M = \max_{x \in [a, b]} f(x)$ ;

$$m = \min_{x \in [a, b]} f(x).$$

**Свойство 3.** Если функция  $y = f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$  и на его концах принимает значения противоположных знаков, то внутри отрезка найдется точка, в которой функция обратится в нуль (рис. 4.8).



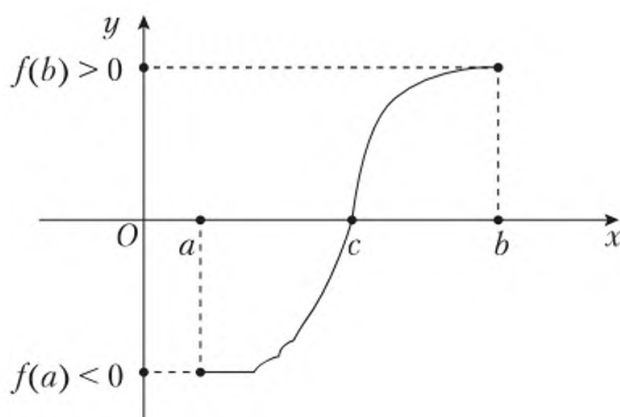


Рис. 4.8. Обращение функции в нуль

**Свойство 4.** Если функция  $y = f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$  и на его концах принимает значения  $f(a) = A$  и  $f(b) = B$  такие, что  $A < B$ , тогда для любого  $C \in (A, B)$  найдется точка  $c \in (a, b)$ , что  $f(c) = C$ .

*Доказательство.* Пусть  $g(x) = f(x) - C$ , и если  $f(x)$  — непрерывна, то непрерывной будет и функция  $g(x)$ . При этом  $g(a) = A - C < 0$  и  $g(b) = B - C > 0$ . По свойству 3 найдется такая точка  $c \in (a, b)$ , что  $g(c) = 0 = f(c) - C = 0$ . В итоге  $f(c) = C$ .

**Свойство 5.** Если функция  $y = f(x)$  непрерывна и возрастает на отрезке  $[a, b]$ , то обратная к ней функция  $x = f^{-1}(y)$  также непрерывна и возрастает на  $[f(a), f(b)]$ .

## 4.2. Дифференциальное исчисление функции одной переменной

### 4.2.1. Производная функции, таблица производных

Пусть функция  $y = f(x)$  определена в некоторой  $\varepsilon$ -окрестности точки  $a$  (рис. 4.9). Определим приращение аргумента  $\Delta x = x - a$  для любой точки  $x \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ , тогда приращение функции  $\Delta y = f(x) - f(a) = f(a + \Delta x) - f(a)$ .

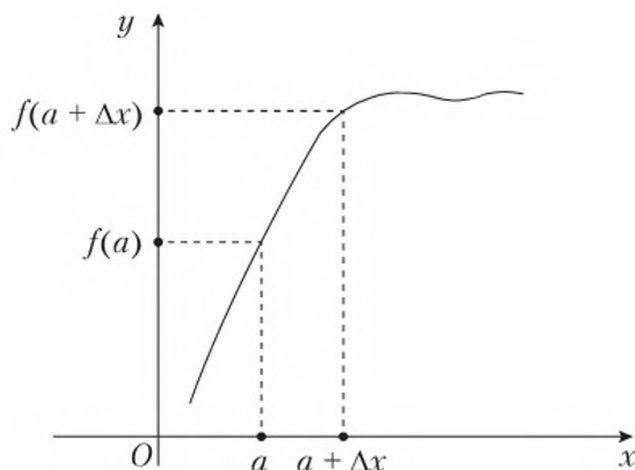


Рис. 4.9. График функции  $y = f(x)$



**Определение 4.21.** Производной  $f'(a)$  функции  $y = f(x)$  в точке  $x = a$  называется предел отношения приращения функции  $\Delta y$  к приращению аргумента  $\Delta x$  при стремлении последнего к нулю (если этот предел существует), т.е.

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}.$$

Обозначения:  $y'_x$ ;  $f'_x$ ;  $\frac{dy}{dx}$ ;  $\frac{dy}{dx}\bigg|_{x=a}$ .

**Определение 4.22.** Если функция  $y = f(x)$  имеет конечную производную в точке  $x = a$ , то эта функция называется дифференцируемой в этой точке. Если функция  $y = f(x)$  дифференцируема во всех точках промежутка  $X$ , то она называется дифференцируемой на числовом промежутке  $X \subset \mathbf{R}$ .

**Замечание 4.6.** Как найти производительность труда? Пусть известна функция  $d = d(t)$ , выражающая количество произведенной продукции  $d$  за время работы  $t$ . Тогда количество произведенной продукции  $\Delta u$  за время  $\Delta t = t_1 - t_0$  будет находится по формуле  $\Delta d = d(t_1) - d(t_0) = d(t_0 + \Delta t) - d(t_0)$ . Средней производительностью труда рабочего называется отношение количества произведенной им продукции к затраченному времени, т.е.

$$z_{\text{ср}} = \frac{\Delta u}{\Delta t}.$$

Производительностью труда рабочего  $z(t_0)$  в момент времени  $t_0$  называется предел, к которому при  $\Delta t \rightarrow 0$  стремится  $z_{\text{ср}}$ , т.е.  $z(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta t}$ .

Следовательно, вычисление производительности труда сводится к вычислению производной  $z(t_0) = u'(t_0)$ .

**Замечание 4.7.** Из школьного курса алгебры известно, что производная  $f'(a)$  есть тангенс угла  $\alpha$  наклона касательной к графику функции  $y = f(x)$  в точке  $a$ , т.е.  $f'(a) = \operatorname{tg} \alpha$  (рис. 4.10). Уравнение этой касательной записывается в виде  $y - f(a) = f'(a)(x - a)$ .

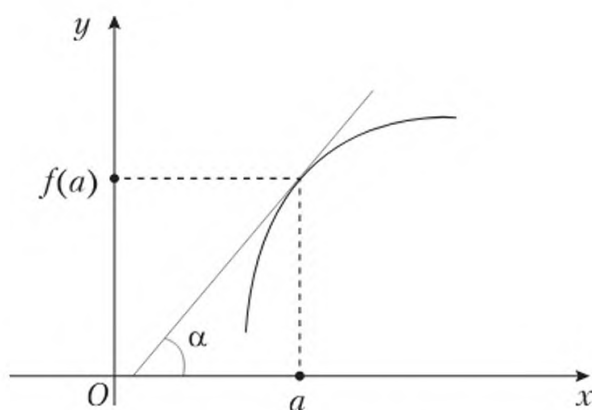


Рис. 4.10. Касательная к функции

**Теорема 4.15.** Если функция  $y = f(x)$  дифференцируема в точке  $a$ , то она в этой точке непрерывна.



*Доказательство.* Пусть функция  $y = f(x)$  дифференцируема в точке  $x = a$ , тогда существует конечный предел  $f'(a) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ , где  $f'(a) = \text{const.}$  В этом случае

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(a) + g(\Delta x); \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} g(\Delta x) = 0,$$

а потому

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = f'(a) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} g(\Delta x) \Delta x = 0.$$

Это и означает непрерывность функции  $y = f(x)$  в точке  $a$  (см. второе определение непрерывности).

Обратное, вообще говоря, не имеет места.

#### Пример 4.15

Функция  $y = |x|$  непрерывна в точке  $x = 0$ , но не дифференцируема в этой точке (рис. 4.11).

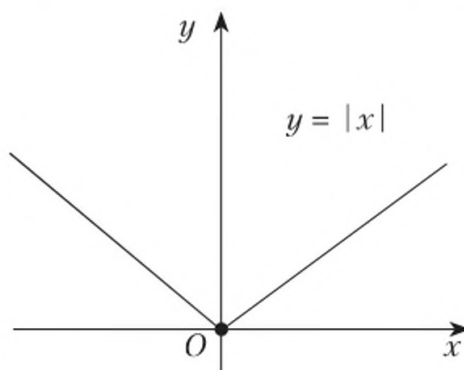


Рис. 4.11. Функция, не дифференцируемая в точке  $x = 0$

Согласно определению производной

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{|0 + \Delta x| - |0|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x}.$$

Следовательно, при  $\Delta x > 0$  имеем  $f'(0) = 1$  и при  $\Delta x < 0$  имеем  $f'(0) = -1$ . А потому отношение  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  не имеет предела при  $\Delta x \rightarrow 0$ .

#### Схема вычисления производной

Производная функции  $y = f(x)$  в произвольной точке  $x$  находится по следующей схеме.

1. Аргументу  $x$  дается приращение  $\Delta x \neq 0$ .
2. Вычисляется приращение функции  $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ .
3. Составляется отношение  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ .
4. Находится предел  $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ .

#### Пример 4.16

Найдем производную функции  $y = f(x) = x^3$ .



Решение

Действуем согласно схеме:

1) зададим приращение аргумента  $\Delta x \neq 0$ ;

2) найдем приращение функции  $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^3 - x^3 = x^3 + 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - x^3 = \Delta x[3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2]$ ;

3) составим  $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2$ ;

4) вычислим  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 3x^2$ .

Производные основных используемых функций приведены в табл. 4.1.

Таблица 4.1

Таблица производных

$y = x^a, a \in R$	$y' = ax^{a-1}$	$y = \cos x$	$y' = -\sin x$
$y = \sqrt{x}$	$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$y = \operatorname{tg} x$	$y' = \frac{1}{\cos^2 x}$
$y = e^x$	$y' = e^x$	$y = \operatorname{ctg} x$	$y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
$y = a^x$	$y' = a^x \ln a$	$y = \arcsin x$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$y = \ln x$	$y' = \frac{1}{x}$	$y = \arccos x$	$y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$y = \log_a x$	$y' = \frac{1}{x \ln a}$	$y = \operatorname{arctg} x$	$y' = \frac{1}{1+x^2}$
$y = \sin x$	$y' = \cos x$	$y = \operatorname{arcctg} x$	$y' = \frac{1}{1+x^2}$

#### 4.2.2. Основные правила дифференцирования

Сформулируем правила дифференцирования, некоторые из них докажем.

**Правило 1.** Производная постоянной равна нулю.

*Доказательство.* Если  $y = f(x) = C = \text{const}$ , то очевидно, что  $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = 0$  и, следовательно,  $f'(x) = 0$ .

**Правило 2.** Производная аргумента  $x$  равна единице.

*Доказательство.* Если  $y = f(x) = x$ , то

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1.$$

**Правило 3.** Производная суммы или разности двух дифференцируемых функций равна сумме или, соответственно, разности производных этих функций, т.е.

$$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x).$$



**Правило 4.** Производная произведения двух дифференцируемых функций равна произведению производной первого сомножителя на второй плюс произведение первого сомножителя на производную второго, т.е.

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

*Доказательство.* Произведем вычисление по схеме вычисления производной:

- 1) зададим приращение аргумента  $\Delta x \neq 0$ ;
- 2) найдем приращение функции:  $\Delta y = (f + \Delta f) \cdot (g + \Delta g) - f \cdot g = f \cdot g + \Delta f \cdot g + f \cdot \Delta g + \Delta f \cdot \Delta g - f \cdot g = \Delta f \cdot g + f \cdot \Delta g + \Delta f \cdot \Delta g$ ;
- 3) составим отношение

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta f}{\Delta x} \cdot g + f \cdot \frac{\Delta g}{\Delta x} + \frac{\Delta f}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta g}{\Delta x} \cdot \Delta x;$$

- 4) найдем предел отношения  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  при  $\Delta x \rightarrow 0$ , используя теоремы о пределах:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \left( \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \right) \cdot g + f \cdot \left( \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta g}{\Delta x} \right) + \\ &+ \left( \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \right) \left( \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta g}{\Delta x} \right) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x). \end{aligned}$$

**Следствие.** Постоянный множитель выносится из-под знака производной, т.е.  $(Cf(x))' = Cf'(x)$ .

*Доказательство.* Полагая в формуле правила 4, что  $g(x) = C = \text{const}$ , приходим к требуемому равенству.

**Правило 5.** Производная частного двух дифференцируемых функций находится по формуле

$$\left( \frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}.$$

### Производная сложной и обратной функций

Пусть задана сложная функция  $y = f(g(t))$  с областью определения  $T$ , т.е.  $y = f(x)$  и  $x = g(t)$  для  $T = D(g)$  и  $E(g) = D(f)$ .

**Теорема 4.16.** Если  $y = f(x)$  и  $x = g(t)$  — дифференцируемые функции от своих аргументов, то производная сложной функции  $y = f(g(t))$  находится по формуле  $y' = f'(x) \cdot g'(t)$ .

*Доказательство.* Зададим приращение  $\Delta t \neq 0$  переменной  $t$ , тогда можно найти приращение  $\Delta x \neq 0$  функции  $x = g(t)$ , а затем и приращение  $\Delta y$  функции  $y = f(x)$ . Очевидно равенство  $\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \frac{\Delta x}{\Delta t}$ , из которого при переходе к пределу получим

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = \left( \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \right) \cdot \left( \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \right) = f'(x) \cdot g'(t).$$



**Пример 4.17**

Пусть  $y = \sin(1 + x^2)$ , тогда  $y' = \sin'(1 + x^2) \cdot (1 + x^2)' = \cos(1 + x^2) \cdot 2x$ .

Пусть функция  $x = g(y)$  является обратной для функции  $y = f(x)$ , т.е.  $E(g) = D(f)$  и  $E(f) = D(g)$ .

**Теорема 4.17.** Для дифференцируемой функции  $y = f(x)$  с производной, не равной нулю, производная обратной функции  $x = g(y)$  находится по формуле  $x'_y = \frac{1}{y'_x}$ .

*Доказательство.* Зададим приращение  $\Delta x \neq 0$  переменной  $x$ , тогда можно найти приращение  $\Delta y$  функции  $y = f(x)$ . Если функция  $y = f(x)$  дифференцируемая, то существует  $y'_x = f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ . Перейдем к пределу в оче-

видном равенстве  $\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}$ , получим

$$x'_y = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{y'_x},$$

здесь в силу непрерывности функции  $x = g(y)$  из того, что  $\Delta y \rightarrow 0$ , следует, что  $\Delta x \rightarrow 0$ .

**Пример 4.18**

Пусть  $y = \arcsin x$ , тогда согласно теореме 4.17

$$\begin{aligned} (\arcsin y)' &= \frac{1}{\sin' x} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\cos(\arcsin y)} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin y)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}. \end{aligned}$$

**Производные высших порядков**

Пусть  $y = f(x)$  — дифференцируемая функция, тогда существует производная  $y' = f'(x)$ , которая является функцией и тоже может иметь производную.

**Определение 4.23.** Производной  $n$ -го порядка функции называется производная от производной  $(n - 1)$ -го порядка данной функции, т.е.  $f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'$ .

Обозначения:  $f''(x) = \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left( \frac{dy}{dx} \right)$  — производная второго порядка;

$f'''(x) = \frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{d}{dx} \left( \frac{d^2 y}{dx^2} \right)$  — производная третьего порядка;  $f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n} =$

$= \frac{d}{dx} \left( \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} \right)$  — производная  $n$ -го порядка.



Найдем вторую производную от функции  $y = \sin x$ .

Решение

$$y'' = (\sin x)'' = ((\sin x)')' = (\cos x)' = -\sin x.$$

Ответ:  $-\sin x$ .

**Замечание 4.8.** Из школьного курса алгебры известно: если точка движется по закону  $s = s(t)$ , где  $s$  — пройденный путь и  $t$  — затраченное время, то первая производная пути по времени  $s'(t_0) = v(t_0)$  — скорость движения в момент времени  $t_0$ , а вторая производная пути по времени  $s''(t_0) = v'(t_0) = a(t_0)$  — ускорение в момент времени  $t_0$ .

### 4.2.3. Основные теоремы дифференциального исчисления

Многочисленные применения дифференциального исчисления основываются на теоремах Ферма, Ролля, Лагранжа и др. В каждой из этих теорем утверждается существование некоторого «среднего значения аргумента»  $x = c$ , вследствие чего все они называются теоремами о среднем.

**Теорема 4.18 (Ферма).** Если дифференцируемая на числовом промежутке  $X$  функция  $y = f(x)$  достигает своего наибольшего или наименьшего значения во внутренней точке  $a$  этого промежутка, то производная функции в этой точке равна нулю, т.е.  $f'(a) = 0$ .

**Доказательство.** Пусть функция  $y = f(x)$  дифференцируема в промежутке  $X \subset \mathbf{R}$  и в его внутренней точке  $a$  принимает значение  $f(a)$ , которое является наименьшим (рис. 4.12).

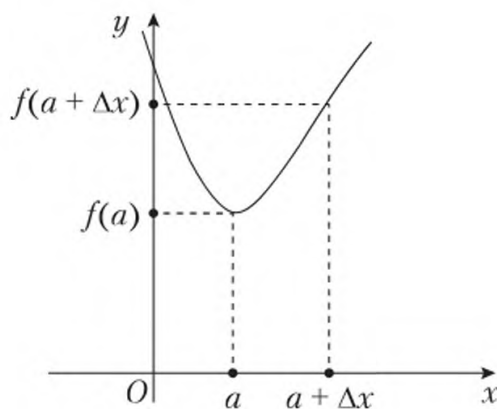


Рис. 4.12. Функция  $y = f(x)$

Тогда  $f(a + \Delta x) \geq f(a)$  для  $a + \Delta x \in X$ , а потому  $\Delta y = f(x) - f(a) = f(a + \Delta x) - f(a) \geq 0$ .

Следовательно,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} \geq 0, \text{ если } \Delta x \geq 0;$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} \leq 0, \text{ если } \Delta x \leq 0.$$

В итоге  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0+0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \geq 0$  и  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0-0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \leq 0$ .



Поскольку функция  $y = f(x)$  дифференцируемая, то

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0+0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0-0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(a) = 0.$$

Доказательство в случае, когда функция принимает наибольшее значение, является аналогичным.

**Замечание 4.9.** Поскольку  $f'(a) = \operatorname{tg} \alpha$  для угла  $\alpha$  наклона касательной в точке  $a$ , то в точке наибольшего или наименьшего значения функции касательная к графику функции будет параллельной оси  $Ox$  (рис. 4.13).

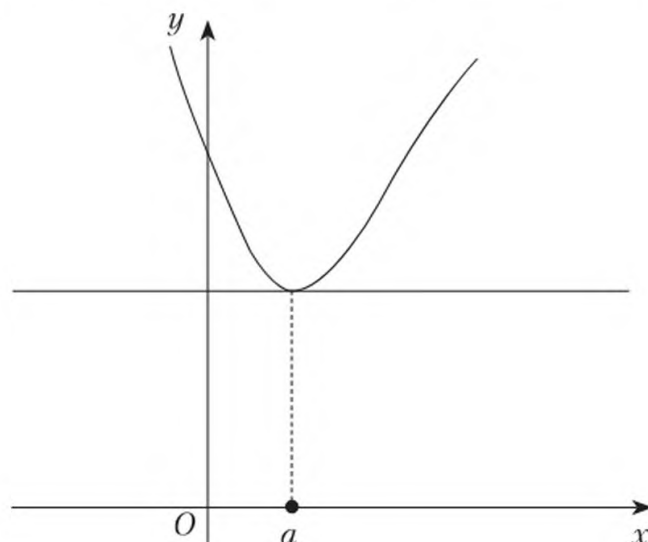


Рис. 4.13. Касательная к графику функции параллельна оси  $Ox$

**Теорема 4.19 (Ролля).** Пусть функция  $y = f(x)$  удовлетворяет следующим условиям:

- 1) непрерывна на отрезке  $[a, b]$ ;
- 2) дифференцируема на интервале  $(a, b)$ ;
- 3) на концах интервала принимает равные значения, т.е.  $f(a) = f(b)$ .

Тогда внутри отрезка найдется точка  $c \in (a, b)$ , в которой производная  $f'(c) = 0$ .

**Доказательство.** Если функция  $y = f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$ , то она на этом отрезке достигает наибольшего ( $M$ ) и наименьшего ( $m$ ) значений (свойство 3 непрерывных функций).

Если хотя бы одно из этих значений лежит внутри отрезка  $[a, b]$ , то по теореме Ферма  $f'(M) = 0$  или  $f'(m) = 0$ . Если оба значения располагаются на концах отрезка, то  $M = m$  и, следовательно,  $f(x) = \operatorname{const}$ , а потому  $f'(x) = 0$  для всех  $x \in [a, b]$ .

#### Пример 4.20

Докажем, что производная многочлена

$$f(x) = (x-2)(x-3)(x-4)(x-5)$$

обращается в нуль в трех точках интервала  $(2, 5)$ .

**Решение**

Разобьем интервал следующим образом (рис. 4.14).





Рис. 4.14. К примеру 4.20

Поскольку  $f(2) = f(3) = 0$  и функция  $y = f(x)$  как многочлен степени 4 непрерывна и дифференцируема на отрезке  $[2, 3]$ , то по теореме Роля найдется такая точка  $c \in (2, 3)$ , что  $f'(c) = 0$ .

Аналогичным образом доказывается, что производная обращается в нуль на  $(3, 4)$  и  $(4, 5)$ .

**Теорема 4.20 (Лагранжа).** Пусть функция  $y = f(x)$  удовлетворяет следующим условиям:

- 1) непрерывна на отрезке  $[a, b]$ ;
- 2) дифференцируема на интервале  $(a, b)$ ;

Тогда внутри отрезка найдется точка  $c \in (a, b)$ , в которой производная

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

**Следствие 1.** Если производная функции  $y = f(x)$  равна нулю в числовом промежутке  $X$ , то  $f(x) = \text{const}$  для всех  $x \in X$ .

*Доказательство.* Пусть  $[a, x] \subset X$  и согласно теореме Лагранжа  $f(x) - f(a) = f'(c)(x - a)$  для некоторого  $c \in (a, x)$ . По условию  $f'(c) = 0$  и, следовательно,  $f(x) - f(a) = 0$ , т.е.  $f(x) = f(a) = \text{const}$ .

**Следствие 2 (правило Лопиталья).** Предел отношения двух бесконечно малых или бесконечно больших функций равен пределу отношения их производных, т.е.

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ (x \rightarrow \infty)}} \frac{f(x)}{g(x)} = \left[ \frac{0}{0} \text{ или } \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ (x \rightarrow \infty)}} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

#### Пример 4.21

Найдем  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^x}$ .

*Решение*

Согласно правилу Лопиталья

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^x} = \left[ \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x'}{(e^x)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^x} = \left[ \frac{1}{\infty} \right] = 0.$$

### 4.2.4. Исследование функций с помощью производных, построение графиков

#### Возрастание и убывание функций

Предварительно напомним определения. Если для функции  $y = f(x)$  и всех  $x$  из числового промежутка  $X$  выполняется:

- 1)  $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ , функция  $y = f(x)$  называется монотонно возрастающей на  $X$ ;



2)  $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ , функция  $y = f(x)$  называется монотонно убывающей на  $X$ .

**Теорема 4.21.** Если производная дифференцируемой функции положительна (отрицательна) внутри некоторого числового промежутка  $X$ , то она монотонно возрастает (убывает) на этом промежутке.

*Доказательство.* Пусть  $f'(x) > 0$  на  $X$ . При этом для любых  $x_1 < x_2$  из числового промежутка  $X$  согласно теореме Лагранжа на  $[x_1, x_2]$  выполняется  $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$ . Тогда при  $f'(x) > 0$  имеем  $f(x_2) > f(x_1)$ . Аналогично доказывается теорема для случая убывания функции.

**Теорема 4.22.** Если функция возрастает (убывает) на некотором числовом промежутке  $X$ , то ее производная неотрицательна (неположительна) на этом промежутке.

## Экстремумы функций

**Определение 4.24.** Точка  $a$  называется точкой локального максимума (минимума) функции  $y = f(x)$ , если в некоторой  $\varepsilon$ -окрестности точки  $a$  выполняется неравенство  $f(a) \geq f(x)$  (соответственно  $f(a) \leq f(x)$ ).

Локальные максимум и минимум функции объединяются под одним общим названием экстремум функции (рис. 4.15).

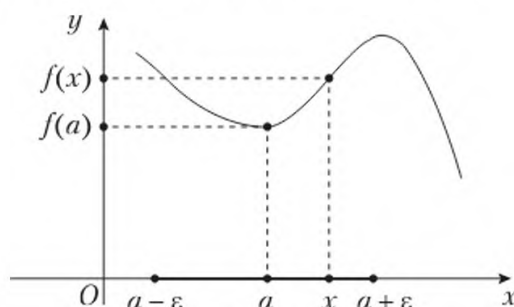


Рис. 4.15. Локальный экстремум функции

**Теорема 4.23.** Если функция  $y = f(x)$  в точке  $a$  имеет локальный экстремум, то ее производная в этой точке равняется нулю или не существует.

*Замечание 4.10.* Первая часть теоремы — это следствие теоремы Ферма, вторую ее часть поясняет следующий пример.

### Пример 4.22

Функция  $y = \sqrt[3]{x^2}$  в точке  $x = 0$  имеет минимум (рис. 4.16), а ее производная  $y' = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$  в точке  $x = 0$  не существует.

**Теорема 4.24.** Если при переходе через точку  $a$  производная дифференцируемой функции  $y = f(x)$  меняет свой знак с «плюса» на «минус», то  $a$  — точка локального максимума функции, если же знак меняется с «минуса» на «плюс» — то локального минимума.

*Доказательство.* Рассмотрим  $\varepsilon$ -окрестность точки  $a$ . Если  $a - \varepsilon < x < a \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow f(a) > f(x)$ ; если  $a < x < a + \varepsilon \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow f(x) > f(a)$ .

Это означает, что в  $\varepsilon$ -окрестности  $a$  — точка максимума функции  $y = f(x)$ . Аналогично доказывается в случае точки минимума.



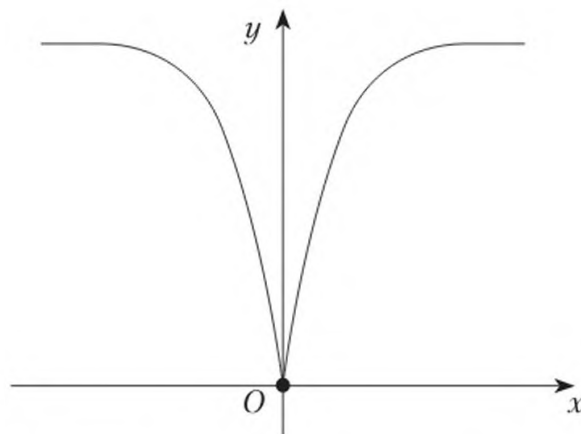


Рис. 4.16. График функции  $y = \sqrt[3]{x^2}$

**Теорема 4.25.** Если первая производная  $f'(x)$  дважды дифференцируемой функции  $y = f(x)$  равна нулю в некоторой точке  $a$ , т.е.  $f'(a) = 0$ , а вторая производная в этой точке  $f''(a) > 0$ , то  $a$  — точка минимума функции, если же  $f''(a) < 0$ , то  $a$  — точка максимума функции.

#### Пример 4.23

Хорошо известно, что для функции  $y = x^2$  точка  $x = 0$  является точкой минимума. Проверим это. Находим  $f'(x) = 2x$  и  $f''(x) = 2$ . В итоге точка экстремума — это  $x = 0$  и в ней  $f''(0) > 0$ , что согласно теореме означает, что  $x = 0$  — точка минимума функции  $y = x^2$ .

#### Схема исследования на локальный экстремум

Исследование на локальный экстремум проводится по следующей схеме.

1. Найти производную  $f'(x)$  функции  $y = f(x)$ .
2. Найти критические точки функции, т.е. точки, где  $f'(x) = 0$  или  $f'(x)$  не существует.
3. Исследовать знак производной слева и справа от каждой критической точки и сделать вывод о наличии экстремумов функции.
4. Найти локальные экстремумы, т.е. значения функции в найденных точках.

#### Выпуклость функции и точки перегиба ее графика

Рассмотрим график некоторой функции  $y = f(x)$  (рис. 4.17). Из наглядных соображений очевидно, что

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}. \quad (4.1)$$

Здесь  $\frac{x_1 + x_2}{2}$  — среднее арифметическое значений аргумента, а  $\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$  — среднее арифметическое значений функции.



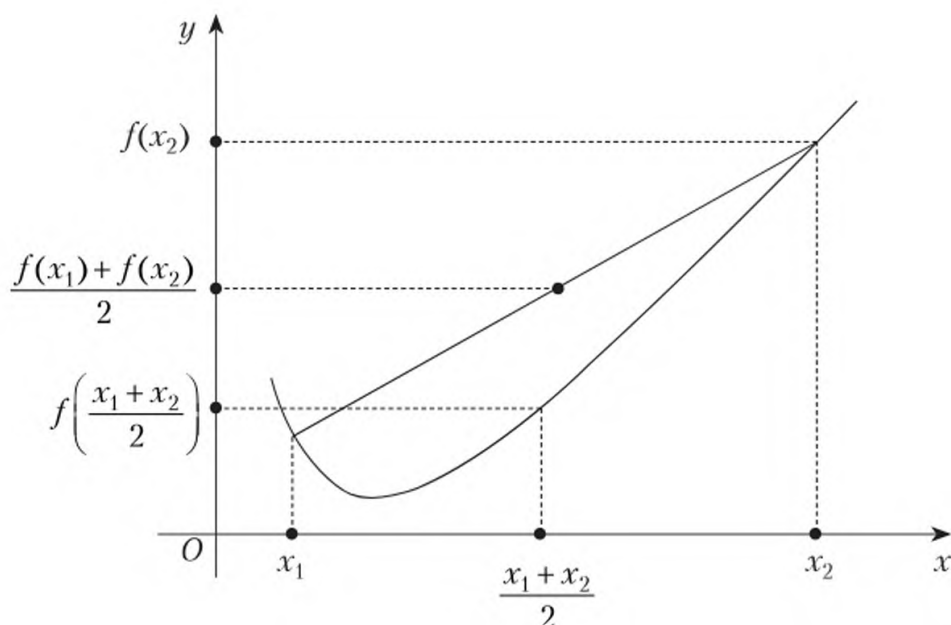


Рис. 4.17. График функции  $y = f(x)$

**Определение 4.25.** Функция  $y = f(x)$  на числовом промежутке  $X$  называется *выпуклой вниз*, если для любых  $x_1 < x_2$  из числового промежутка  $X$  выполняется неравенство (4.1).

**Теорема 4.26.** Если для функции  $y = f(x)$  ее вторая производная  $f''(x) > 0$  на числовом промежутке  $X$ , то на этом промежутке функция выпукла вниз.

#### Пример 4.24

Пусть  $y = f(x) = x^2$  (рис. 4.18). Очевидно, что  $f''(x) = 2 > 0$ , тогда график функции — выпуклый вниз.

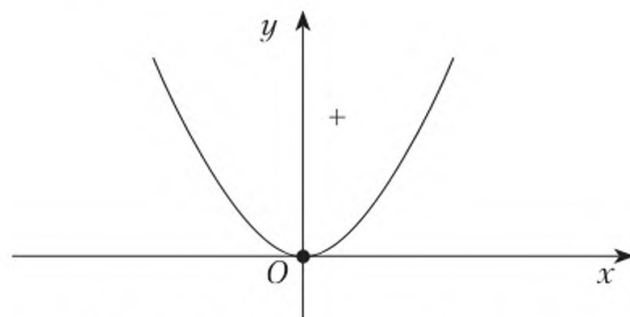


Рис. 4.18. График функции  $y = x^2$

Рассмотрим график функции  $y = f(x)$  (рис. 4.19).

Из наглядных соображений очевидно, что

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \geq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}. \quad (4.2)$$

**Определение 4.26.** Функция  $y = f(x)$  на числовом промежутке  $X$  называется *выпуклой вверх*, если для любых  $x_1 < x_2$  из числового промежутка  $X$  выполняется неравенство (4.2).

**Теорема 4.27.** Если для функции  $y = f(x)$  ее вторая производная  $f''(x) < 0$  на числовом промежутке  $X$ , то на этом промежутке функция выпукла вверх.



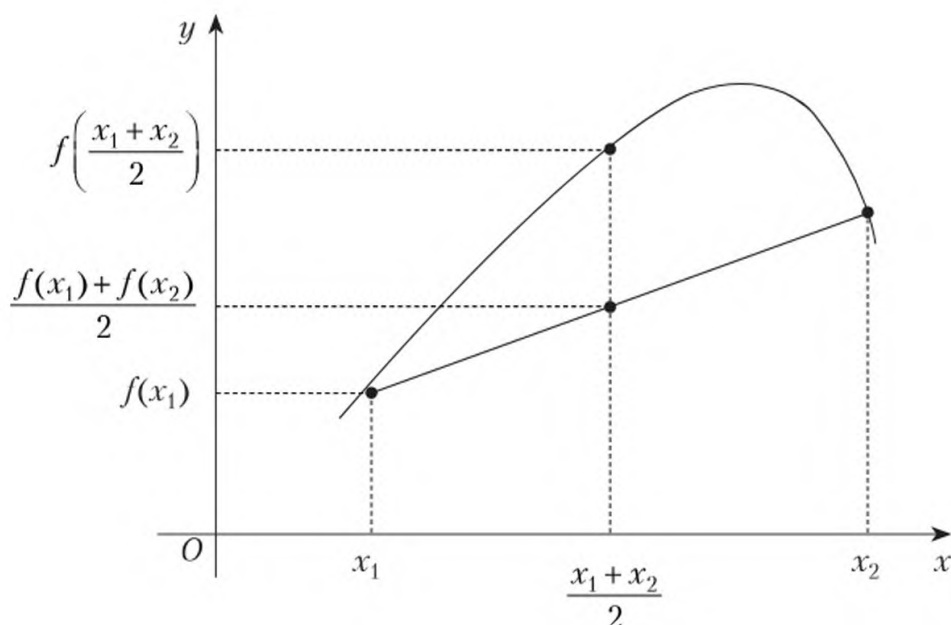


Рис. 4.19. График функции  $y = f(x)$

#### Пример 4.25

Пусть  $y = f(x) = -x^2$  (рис. 4.20). Очевидно, что  $f''(x) = -2 < 0$ , тогда график функции — выпуклый вверх.

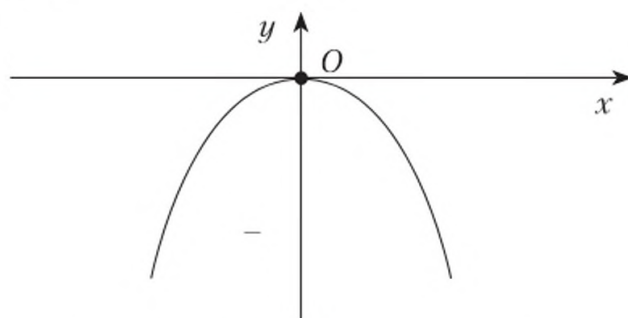


Рис. 4.20. График функции  $y = -x^2$

**Определение 4.27.** Точка, разделяющая интервалы, в которых непрерывная функция выпукла вниз и вверх, называется *точкой перегиба* графика функции.

**Теорема 4.28.** Если вторая производная  $f''(x)$  дважды дифференцируемой функции при переходе через некоторую точку  $a$  меняет свой знак, то  $a$  есть точка перегиба ее графика.

**Следствие.** Производная  $f''(x)$  дважды дифференцируемой функции в точке перегиба обращается в нуль.

Заметим, что и теорема 4.28, и следствие из нее выводятся из сформулированных выше теорем.

#### Пример 4.26

Пусть  $y = f(x) = x^3$ . Очевидно, что  $f''(x) = 6x$ , тогда:

1)  $f''(x) < 0 \Leftrightarrow -\infty < x < 0$  и, следовательно, на интервале  $(-\infty, 0)$  функция выпукла вверх;



2)  $f''(x) > 0 \Leftrightarrow 0 < x < \infty$  и, следовательно, на интервале  $(0, \infty)$  функция выпукла вниз;

3)  $x = 0$  — точка перегиба графика функции.

Это подтверждает и график функции (рис. 4.21).

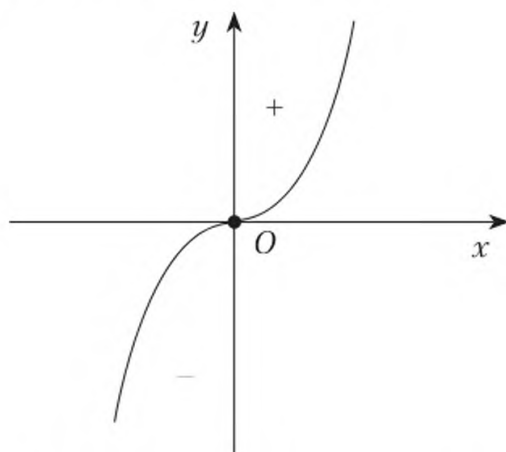


Рис. 4.21. График функции  $y = x^3$

### Схема исследования на выпуклость и точки перегиба

Исследование на выпуклость проводится по следующей схеме.

1. Найти производную  $f''(x)$  функции  $y = f(x)$ .
2. Найти точки функции, где  $f''(x) = 0$  или  $f''(x)$  не существует.
3. Исследовать знак производной  $f''(x)$  слева и справа от каждой точки и сделать вывод о наличии выпуклостей и точек перегиба.
4. Найти значения функции в точках перегиба.

**Определение 4.28.** Асимптотой графика функции  $y = f(x)$  называется прямая, обладающая тем свойством, что расстояние от точки  $M(x, f(x))$  графика до этой прямой стремится к нулю при неограниченном удалении точки  $M$  от начала координат.

Различают три вида асимптот (рис. 4.22):

- 1) вертикальные;
- 2) горизонтальные;
- 3) наклонные.

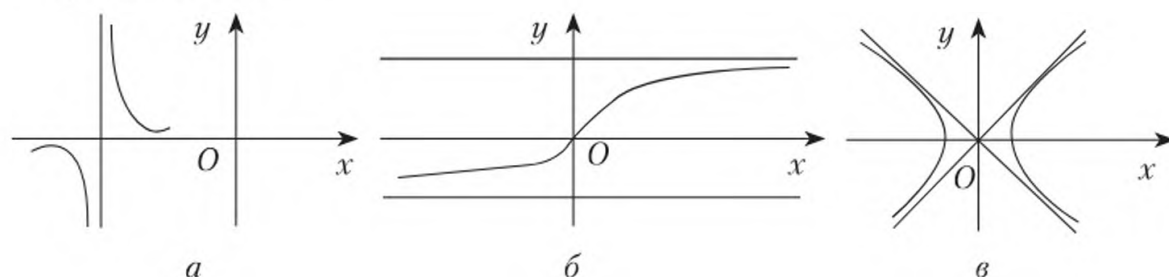


Рис. 4.22. Асимптоты:

$a$  — вертикальная;  $b$  — горизонтальные;  $v$  — наклонные

**Теорема 4.29.** Пусть функция  $y = f(x)$  определена в некоторой окрестности точки  $a$  (исключая, возможно, саму точку) и хотя бы один из односторонних пределов функции  $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = +\infty$  (или  $-\infty$ ) при стремлении  $x$



к точке  $a$  слева или  $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = +\infty$  (или  $-\infty$ ) при стремлении  $x$  к точке  $a$  справа. Тогда прямая  $x = a$  является вертикальной асимптотой графика функции  $y = f(x)$ .

#### Пример 4.27

График функции  $y = \ln x$  (рис. 4.23) имеет вертикальную асимптоту  $x = 0$  на границе области определения, так как  $\lim_{x \rightarrow 0+0} \ln x = -\infty$ .

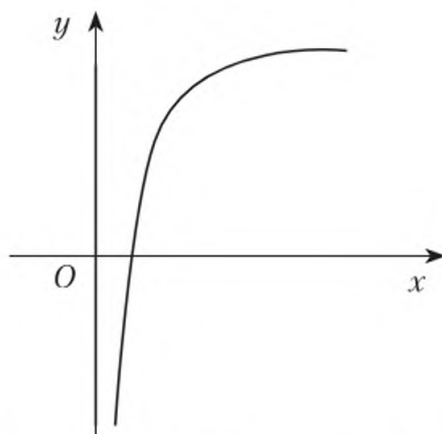


Рис. 4.23. График функции  $y = \ln x$

**Замечание 4.11.** Из определения непрерывности функции в точке следует, что прямая  $x = a$  не может быть вертикальной асимптотой, если функция непрерывна в точке  $x = a$ , так как в этом случае  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ .

**Правило поиска асимптот.** Вертикальные асимптоты следует искать в точках разрыва функции  $y = f(x)$  или на концах ее области определения  $(a, b)$ , где  $a \neq \infty$  и  $b \neq \infty$ .

**Теорема 4.30.** Пусть функция  $y = f(x)$  определена при достаточно больших  $x$  и существует конечный предел  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = C \neq \pm\infty$ , тогда прямая  $y = C$  является горизонтальной асимптотой графика функции  $y = f(x)$ .

**Замечание 4.12.** Если существует только один из пределов  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A \neq \pm\infty$  или  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = B \neq \pm\infty$ , то говорят, что график функции имеет левостороннюю  $y = A$  или правостороннюю  $y = B$  горизонтальную асимптоту.

#### Пример 4.28

Спрос населения на товары первой необходимости описывается функцией Торнквиста (рис. 4.24)  $y = \frac{ax}{x+c}$  для  $x \geq 0$ . Здесь  $x$  — доход;  $y$  — спрос в денежном выражении;  $a, c$  — эмпирические положительные постоянные.

Имеем

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax}{x+c} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a}{1+c/x} = a.$$



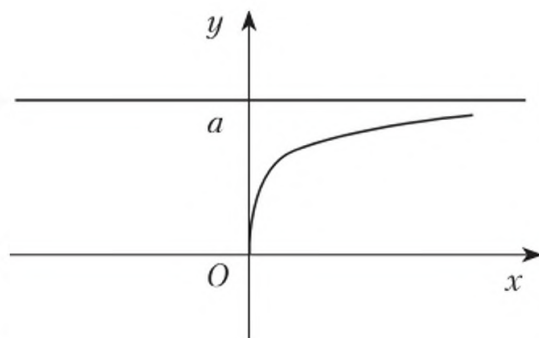


Рис. 4.24. График функции Торнквиста для спроса на товары первой необходимости

Следовательно, график функции имеет правостороннюю горизонтальную асимптоту  $y = a$ .

**Замечание 4.13.** График функции Торнквиста свидетельствует о том, что спрос на товары первой необходимости ограничен асимптотой и не растет с ростом доходов населения.

**Теорема 4.31.** Пусть функция  $y = f(x)$  определена при достаточно больших  $x$  и существуют конечные пределы  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = k \neq \pm\infty$  или  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - kx) = l \neq \pm\infty$ , тогда прямая  $y = kx + l$  является наклонной асимптотой (при  $x \rightarrow +\infty$  — правосторонней, а при  $x \rightarrow -\infty$  — левосторонней).

#### Пример 4.29

Спрос населения на товары роскоши описывается функцией Торнквиста

$$y = \frac{ax(x-b)}{x+c}$$

для  $x \geq b$ . Здесь  $x$  — доход и  $y$  — спрос в денежном выражении;  $a, b, c$  — эмпирические положительные постоянные.

Имеем

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax(x-b)}{x(x+c)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax - ab}{x+c} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{ax}{x+c} - \frac{ab}{x+c} \right) = a;$$

$$l = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{ax(x-b)}{x+c} - ax \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( -\frac{a(b+c)x}{x+c} \right) = -a(b+c).$$

В итоге график функции имеет правостороннюю наклонную асимптоту  $y = ax - a(b+c)$  (рис. 4.25).

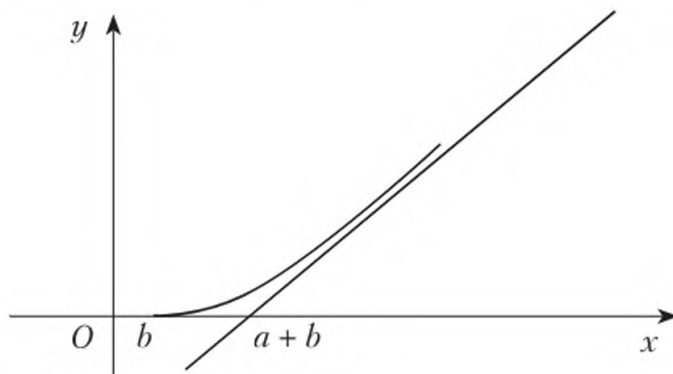


Рис. 4.25. Правосторонняя наклонная асимптота



**Замечание 4.14.** Можно проверить, что вертикальных и горизонтальных асимптот график данной функции Торнквиста не имеет.

**Замечание 4.15.** Из графика функции Торнквиста очевидно, что спрос на товары роскоши неограничен ничем и растет с ростом дохода населения по асимптоте.

### Схема исследования функции и построения графика

Схема исследования функции и построения графика состоит из следующих этапов.

1. Установление области определения.
2. Определение асимптот, поведения функции в бесконечности.
3. Определение экстремумов функции, интервалов монотонности.
4. Определение точек перегиба, интервалов выпуклости.
5. Определение точек пересечения с осями, дополнительных точек.
6. Построение графика.

### 4.2.5. Дифференциал функции и его приложения

Пусть  $y = f(x)$  — дифференцируемая в некотором числовом промежутке  $X \subset \mathbf{R}$  функция, тогда в каждой точке  $x \in X$  существует конечная производная

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \neq \infty.$$

Из этого неравенства следует, что разность  $\left(f(x) - \frac{\Delta y}{\Delta x}\right) \rightarrow 0$ , если  $\Delta x \rightarrow 0$ .

Это означает, что  $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \varepsilon$ , где  $\varepsilon \rightarrow 0$ , если  $\Delta x \rightarrow 0$ . В итоге  $\Delta y = f'(x)\Delta x + \varepsilon\Delta x$ . При этом величина  $\varepsilon\Delta x$  является бесконечно малой более высокого порядка, чем  $f'(x)\Delta x$ , поскольку  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\varepsilon\Delta x}{f'(x)\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\varepsilon}{f'(x)} = 0$ .

**Теорема 4.32.** Приращение функции  $\Delta y$  можно разложить на главную часть приращения  $f'(x)\Delta x$  и добавочную часть  $\varepsilon\Delta x$ , которая является бесконечно малой более высокого порядка по сравнению с  $f'(x)\Delta x$ .

**Определение 4.29.** Главная часть приращения функции  $\Delta y$ , обозначаемая как  $dy = f'(x)\Delta x$ , называется дифференциалом функции.

Если положить  $x = y$ , то  $dx = \Delta x$ . В результате справедлива следующая теорема.

**Теорема 4.33.** Дифференциал функции равен ее производной, умноженной на дифференциал аргумента, т.е.  $dy = f'(x)dx$ .

#### Пример 4.30

Выпишем дифференциал функции  $y = \cos \frac{x}{3} + \sin 3x$  и вычислим его при  $x = 0$ ,  $dx = 0,1$ .



Решение

$$dy = d\left(\cos\frac{x}{3} + \sin 3x\right) = \left(\cos\frac{x}{3} + \sin 3x\right)' dx = \left(-\frac{1}{3}\sin\frac{x}{3} + 3\cos 3x\right) dx.$$

Тогда значение дифференциала равно 0,3.

### Свойства дифференциала

1. Свойство инвариантности формулы дифференциала  $y = f(g(t)) \Rightarrow dy = f'(x)dx$ .

Действительно, пусть  $y = f(x) = f(g(t))$ , тогда  $dy = (f(g(t)))' dt = (f'(x) \times g'(t)) dt = f'(x)(g'(t)dt) = f'(x)dx$ .

2.  $dc = 0$ , если  $c = \text{const}$ .

3.  $d(cf) = cdf$ , если  $c = \text{const}$ .

4.  $d(f \pm g) = df \pm dg$ .

5.  $d(f \cdot g) = df \cdot g + f \cdot dg$ .

6.  $d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{df \cdot g - f \cdot dg}{g^2}$ , если  $g \neq 0$ .

*Замечание 4.16.* Свойства 2–6 являются следствиями соответствующих правил дифференцирования.

### Применение дифференциала в приближенных вычислениях

При достаточно малых значениях  $\Delta x$  приращение функции  $\Delta y$  заменяют ее дифференциалом, при этом погрешность оказывается достаточно малой, т.е.  $\Delta y \approx dy$  всюду, где  $f'(x) \neq 0$ . В этом случае  $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x$ , откуда

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x. \quad (4.3)$$

Формулу (4.3) называют расчетной формулой для приближенных вычислений.

#### Пример 4.31

Вычислим без калькулятора  $\ln(1,01)$ .

Решение

Полагаем  $y = \ln x$ ,  $x = 1$ ,  $\Delta x = 1,01$ , тогда согласно формуле (4.3) найдем  $\ln(1,01) = \ln(1 + 0,01) \approx \ln 1 + 1 \cdot 0,01 = 0,01$ , так как  $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ .

## 4.3. Интегральное исчисление функций одной переменной

### 4.3.1. Первообразная и неопределенный интеграл

Если первой из основных задач дифференциального исчисления является нахождение производной от заданной функции  $F'(x) = f(x)$ , то первая основная задача интегрального исчисления является обратной к данной:



восстановить продифференцированную функцию  $F(x)$  по ее производной  $f(x)$ . Конкретизируем задачу.

**Определение 4.30.** Пусть функция  $y = f(x)$  задана на числовом промежутке  $X$ , тогда функция  $y = F(x)$  называется *первообразной* для функции  $y = f(x)$ , если для любого  $x \in X$  выполняется равенство  $F'(x) = f(x)$ .

Например, функция  $F(x) = \sin x$  на числовом промежутке  $X = (-\infty, +\infty)$  является первообразной для функции  $f(x) = \cos x$ , поскольку  $(\sin x)' = \cos x$  для всех  $x \in X$ .

Следовательно, основная задача интегрального исчисления состоит в нахождении первообразной  $y = F(x)$  для заданной функции  $y = f(x)$ .

В связи с понятием первообразной возникают два вопроса.

*Вопрос 1.* Для каких функций можно гарантировать существование первообразной?

*Вопрос 2.* Сколько первообразных может иметь одна и та же функция?

Ответы на эти вопросы дают следующие теоремы.

**Теорема 4.34** (о существовании первообразной). Если функция  $y = f(x)$  непрерывна на числовом промежутке  $X$ , то на этом промежутке у нее существует первообразная.

**Теорема 4.35** (об общем виде первообразной). Если  $y = F(x)$  — какая-либо первообразная функции  $y = f(x)$  на числовом промежутке  $X$ , то формула:

$$G(x) = F(x) + C,$$

где  $C$  — произвольная постоянная, дает общий вид первообразной функции  $y = f(x)$ .

*Доказательство.* Пусть  $y = F(x)$  — первообразная функции  $y = f(x)$ , т.е.  $F'(x) = f(x)$  для всех  $x \in X$ . Тогда для произвольной постоянной  $C$  по правилу дифференцирования суммы имеем

$$(F(x) + C)' = F'(x) + 0 = f(x).$$

Это означает, что  $G(x) = F(x) + C$  также является первообразной функции  $y = f(x)$ .

Обратно, пусть  $y = G(x)$  — произвольная первообразная для  $y = f(x)$ , тогда согласно определению  $G'(x) = f(x)$  и согласно условию теоремы  $F'(x) = f(x)$ . Вычитая почленно из первого равенства второе, имеем  $G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$ , т.е.  $(G(x) - F(x))' = 0$ . Отсюда  $G(x) - F(x) = C$  для  $C = \text{const}$ , или  $G(x) = F(x) + C$ .

Обозначение: если  $y = f(x)$  — некоторая функция и  $y = F(x)$  — ее первообразная на числовом промежутке  $X$ , то будем писать так:

$$\int f(x) dx = F(x) + C.$$

Последнее равенство читается так: «Неопределенный интеграл  $\int$  от функции  $f(x)$  равен  $F(x) + C$ ». При этом  $f(x)$  называют *подынтегральной функцией*;  $f(x)dx$  — *подынтегральным выражением*;  $C$  — *постоянной интегрирования*.

*Замечание 4.17.* Все функции, стоящие под знаком интеграла, согласно теореме 4.34 должны быть непрерывными, тогда первообразная существует и выражение  $\int f(x) dx = F(x) + C$  имеет смысл.



Заметим, что если использовать таблицу производных элементарных функций, то можно составить таблицу основных (простейших) интегралов (табл. 4.2).

Таблица 4.2

### Основные интегралы

$\int dx = x + C$	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$
$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C$ для $a \neq -1$	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$
$\int \frac{dx}{x} = \ln x  + C$	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$
$\int \cos x dx = \sin x + C$	$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left  \frac{x-a}{x+a} \right  + C$
$\int \sin x dx = -\cos x + C$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left  x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right  + C$

Например, известно, что  $(x^a)' = ax^{a-1}$ , тогда  $\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C$ , т.е. для функции  $f(x) = x^a$  первообразной является функция  $F(x) = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C$ .

$$\text{Проверка: } F'(x) = \left( \frac{x^{a+1}}{a+1} \right)' = x^a = f(x).$$

Подобные интегралы носят название табличных.

### Свойства неопределенного интеграла

**Свойство 1.** Производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции, т.е.  $(\int f(x) dx)' = f(x)$ .

*Доказательство.* Согласно определению  $\int f(x) dx = F(x) + C$ , тогда  $(\int f(x) dx)' = F'(x) + 0 = f(x)$ .

**Свойство 2.** Дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению, т.е.  $d(\int f(x) dx) = f(x) dx$ .

*Доказательство.* По правилу нахождения дифференциала функции  $dF(x) = F'(x) dx$  имеем  $d(\int f(x) dx) = (\int f(x) dx)' dx = f(x) dx$ .

**Свойство 3.** Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен этой функции плюс произвольная постоянная, т.е.  $\int dF(x) = F(x) + C$ .

*Доказательство.* Согласно определению  $dF(x) = F'(x) dx = f(x) dx$ , тогда на основании определения неопределенного интеграла  $\int dF(x) = \int f(x) dx = F(x) + C$ .



**Свойство 4.** Неопределенный интеграл от суммы (разности) функций равен сумме (разности) интегралов от слагаемых, т.е.  $\int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$ .

*Доказательство.* Продифференцируем отдельно левую и правую части этого равенства, получим на основании свойства 1

$$(\int (f(x) dx \pm g(x) dx))' = f(x) \pm g(x);$$

$$(\int f(x) dx \pm \int g(x) dx)' = (\int f(x) dx)' \pm (\int g(x) dx)' = f(x) \pm g(x).$$

В результате производные равны, что и требовалось доказать.

**Свойство 5.** Постоянный множитель можно выносить из-под знака неопределенного интеграла, т.е.  $\int af(x) dx = a \int f(x) dx$ .

*Доказательство.* Продифференцируем левую и правую части этого равенства, получим на основании свойства 1

$$(\int af(x) dx)' = af(x);$$

$$(a \int f(x) dx)' = a (\int f(x) dx)' = af(x).$$

В результате производные равны, а это и требовалось доказать.

### 4.3.2. Методы интегрирования

#### Замена переменной

Во многих случаях неопределенный интеграл можно свести к табличному с помощью введения новой переменной. В основе метода лежит следующая теорема.

**Теорема 4.36** (о замене переменной под знаком интеграла). Пусть для всех  $x \in X$  имеет место  $\int f(x) dx = F(x) + C$ . Если при этом  $x = g(t)$  и функция  $g(t)$  имеет непрерывную производную  $g'(t)$  на некотором числовом промежутке  $T$ , то

$$\int f(x) dx = \int f(g(t))(g'(t) dt) = F(g(t)) + C$$

для всех  $t \in T$ .

*Доказательство.* По правилу дифференцирования сложной функции имеем

$$(F(g(t)) + C)' = (F(g(t)))' = F'(g(t)) \cdot g'(t) = f(g(t)) \cdot g'(t),$$

т.е. производная от правой части доказываемого равенства равна подынтегральному выражению в левой части равенства.

#### Пример 4.32

Найдем  $\int \operatorname{tg} x dx$ .

*Решение*

Согласно определению  $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ , а потому  $\int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx$ . Примем во внимание, что  $d(\cos x) = \cos' x \cdot dx = -\sin x \cdot dx$ . Делаем замену  $t = \cos x$ , тогда

$$\int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = \int \frac{-dt}{t} = -\ln|t| + C = -\ln|\cos x| + C.$$



Замечание 4.18. Аналогичным образом находятся  $\int \operatorname{ctg} x dx$ ;  $\int \frac{dx}{\sin x}$ ;  $\int \frac{dx}{\cos x}$ .

### Метод интегрирования по частям

Напомним правило нахождения дифференциала произведения двух функций  $u(x)$  и  $v(x)$ :  $d(u \cdot v) = du \cdot v + u \cdot dv$ . Проинтегрируем последнее равенство, используя свойство 4, получим

$$\int d(u \cdot v) = \int v \cdot du + \int u \cdot dv.$$

Здесь по свойству 3 неопределенного интеграла  $\int d(u \cdot v) = u \cdot v + C$ , а потому

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

Данная формула называется *формулой интегрирования по частям*.

Замечание 4.19. Формула интегрирования по частям позволяет свести вычисление одного интеграла к вычислению другого, который может оказаться более простым.

1. Формула интегрирования по частям применяется для вычисления неопределенных интегралов вида  $\int P(x)e^{ax} dx$ ;  $\int P(x)\sin bxdx$ ;  $\int P(x)\cos bxdx$ , где  $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  — многочлен степени  $n$ ,  $a_n, \dots, a_1, a_0$ ,  $a, b$  — постоянные. В этом случае полагают

$$u = P(x), dv = \begin{cases} e^{ax} dx, \\ \sin bxdx, \\ \cos bxdx. \end{cases}$$

#### Пример 4.33

Найдем  $\int (2x+6)e^x dx$ .

Решение

Здесь  $P(x) = 2x + 6$ , поэтому

$$\begin{aligned} \int (2x+6)e^x dx &= \left[ \begin{array}{l} u = 2x+6 \Rightarrow du = 2dx \\ dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x \end{array} \right] = \\ &= (2x+6)e^x - 2 \int e^x dx = (2x+6)e^x - 2e^x + C = (2x+4)e^x + C. \end{aligned}$$

2. Формула интегрирования по частям применяется для нахождения неопределенных интегралов вида  $\int \ln f(x) dx$ ;  $\int \operatorname{arctg} f(x) dx$ ;  $\int \arcsin f(x) dx$ ;  $\int \arccos f(x) dx$ , в этом случае полагают

$$u = \begin{cases} \ln f(x), \\ \operatorname{arctg} f(x), \\ \arcsin f(x), \\ \arccos f(x), \end{cases} \quad dv = dx.$$



**Пример 4.34**

Найдем  $\int \ln \sqrt{x+1} dx$ .

*Решение*

Здесь  $f(x) = \sqrt{x+1}$ . Вычисляем:

$$\begin{aligned} \int \ln \sqrt{x+1} dx &= \int \frac{1}{2} \ln(x+1) dx = \left[ u = \frac{1}{2} \ln(x+1) \Rightarrow du = \frac{dx}{2(x+1)}; \right. \\ &\quad \left. dv = dx \Rightarrow v = x \right] = \\ &= x \ln \sqrt{x+1} - \int \frac{x dx}{2(x+1)} = x \ln \sqrt{x+1} - \frac{1}{2} \int \left( 1 - \frac{1}{x+1} \right) dx = \\ &= x \ln \sqrt{x+1} - \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \ln|x+1| + C. \end{aligned}$$

### Методы интегрирования тригонометрических функций

1. Интегрирование рациональных выражений с тригонометрическими функциями.

Обозначим через  $R(u, v)$  рациональную функцию, т.е. функцию от переменных  $u, v$  и некоторых постоянных, которая построена с использованием лишь четырех арифметических действий: сложения, вычитания, умножения и деления. Например,  $R(u, v) = u^2 + 2v^5$  или  $R(u, v) = \frac{u + 3v}{2 - u^2}$ .

Рассмотрим интегралы вида  $\int R(\sin x, \cos x) dx$ .

Такие интегралы могут быть сведены к интегралам от рациональных функций методом замены переменной, а именно, надо положить  $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ , где  $-\pi < x < \pi$ . Эта подстановка называется универсальной, поскольку в этом случае

$$\sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}; \quad \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

и  $x = 2 \arctg t$ ;  $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$ . В результате можно найти выражения для  $\operatorname{tg} x$  и  $\operatorname{ctg} x$ , а также вычислить интеграл

$$\int R(\sin x, \cos x) dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}; \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{2}{1+t^2} dt.$$

**Пример 4.35**

Найдем  $\int \frac{dx}{\sin x}$ .

*Решение*

Полагаем  $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ , тогда  $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$  и  $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$ , а потому



$$\int \frac{dx}{\sin x} = \left[ \begin{array}{l} t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}; \\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2}; \\ dx = \frac{2dt}{1+t^2} \end{array} \right] = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C.$$

## 2. Интегрирование степеней тригонометрических функций.

Вычисление интегралов вида  $\int \sin^n x dx$ ;  $\int \cos^m x dx$ ;  $\int \sin^n x \cos^m x dx$  происходит с использованием следующих двух правил.

**Правило 1.** Интегралы от четных степеней можно найти путем понижения степени вдвое по следующим формулам понижения степени:

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x); \quad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x); \quad \sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x.$$

### Пример 4.36

Вычислим  $\int \sin^2 3x dx$ .

*Решение*

$$\int \sin^2 3x dx = \frac{1}{2} \int (1 - \cos 6x) dx = \frac{1}{2} \int dx - \frac{1}{12} \int \cos 6x d(6x) = \frac{x}{2} - \frac{1}{12} \sin 6x + C.$$

**Правило 2.** Интегралы от нечетных степеней можно найти путем отделения одного множителя и замены его новой переменной.

### Пример 4.37

Вычислим  $\int \sin^5 x dx$ .

*Решение*

$$\begin{aligned} \int \sin^5 x dx &= \frac{1}{2} \int \sin^4 x \cdot \sin x dx = -\int \sin^4 x d(\cos x) = -\int (1 - \cos^2 x)^2 d(\cos x) = \\ &= -\int (1 - 2t^2 + t^4) dt = -t + \frac{2}{3} t^3 - \frac{1}{5} t^5 + C = \cos x + \frac{2}{3} \cos^3 x - \frac{1}{5} \cos^5 x + C. \end{aligned}$$

Здесь была произведена замена  $t = \cos x$ .

Вычисление интегралов вида  $\int \operatorname{tg}^n x dx$ ;  $\int \operatorname{ctg}^m x dx$  происходит с использованием следующего правила.

**Правило 3.** Интегралы от степеней тангенса и котангенса вычисляются введением новой переменной по формулам  $t = \operatorname{tg} x$  или  $t = \operatorname{ctg} x$ .

### Пример 4.38

Найдем  $\int \operatorname{tg}^4 x dx$ .

*Решение*

$$\int \operatorname{tg}^4 x dx = \left[ \begin{array}{l} t = \operatorname{tg} x; \\ x = \operatorname{arctg} t \Rightarrow dx = \frac{dt}{1+t^2} \end{array} \right] = \int \frac{t^4}{t^2+1} dt = \int (t^2 - 1) dt + \int \frac{dt}{t^2+1} =$$



$$= \frac{1}{3}t^3 - t + \operatorname{arctg} t + C = \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg} x + x + C.$$

3. Вычисление интегралов вида  $\int \sin ax \cdot \sin bx \, dx$ ;  $\int \cos ax \cdot \cos bx \, dx$ ;  $\int \sin ax \cdot \cos bx \, dx$  происходит путем разложения на слагаемые с использованием тригонометрических формул

$$\sin ax \cos bx = \frac{1}{2}[\sin(a+b)x + \sin(a-b)x];$$

$$\sin ax \sin bx = \frac{1}{2}[\cos(a-b)x - \cos(a+b)x];$$

$$\cos ax \cos bx = \frac{1}{2}[\cos(a+b)x + \cos(a-b)x].$$

#### Пример 4.39

Найдем  $\int \sin 3x \cdot \cos 5x \, dx$ .

*Решение*

$$\begin{aligned} \int \sin 3x \cdot \cos 5x \, dx &= \frac{1}{2} \int [\sin(3+5)x + \sin(3-5)x] \, dx = \\ &= \frac{1}{16} \int \sin 8x \, d(8x) - \frac{1}{4} \int \sin 2x \, d(2x) = \frac{1}{4} \cos 2x - \frac{1}{16} \cos 8x + C. \end{aligned}$$

### Методы интегрирования иррациональных функций

**Правило 1.** Если подынтегральное выражение содержит один из радикалов вида  $\sqrt{a^2 - x^2}$ ;  $\sqrt{a^2 + x^2}$ ;  $\sqrt{x^2 - a^2}$ , то применяются подстановки:

- 1) для  $\sqrt{a^2 - x^2}$  полагают  $x = a \sin t$ ;
- 2) для  $\sqrt{a^2 + x^2}$  полагают  $x = a \operatorname{tg} t$ ;
- 3) для  $\sqrt{x^2 - a^2}$  полагают  $x = \frac{a}{\cos t}$

и применяют затем основное тригонометрическое тождество  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ .

#### Пример 4.40

Найдем  $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - a^2}}$ .

*Решение*

Осуществляем подстановку  $x = \frac{a}{\cos t}$ , тогда

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 - a^2} &= \sqrt{\frac{a^2 - a^2 \cos^2 t}{\cos^2 t}} = \sqrt{\frac{a^2(1 - \cos^2 t)}{\cos^2 t}} = a \operatorname{tg} t; \\ dx &= d\left(\frac{a}{\cos t}\right) = ad\left(\frac{1}{\cos t}\right) = \frac{a \sin t}{\cos^2 t} dt. \end{aligned}$$



Следовательно, интеграл предстанет в виде

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}} = \left[ \begin{array}{l} x = \frac{a}{\cos t}; \\ dx = \frac{a \sin t}{\cos^2 t} dt \end{array} \right] = \frac{1}{a} \int dt = \frac{1}{a} t + C = \frac{1}{a} \arccos \frac{a}{x} + C.$$

**Правило 2.** Если под интегралом стоит несколько радикалов вида  $\sqrt[n]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^k}$ ;  $\sqrt[m]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^l}$ ; ..., то выражение под интегралом рационализуется с помощью подстановки вида  $t^N = \frac{ax+b}{cx+d}$ , где  $N$  — общий знаменатель дробей  $\frac{k}{n}$ ;  $\frac{l}{m}$ ; ...

#### Пример 4.41

Найдем  $\int \frac{dx}{\sqrt{x-2}\sqrt[3]{x}}$ .

*Решение*

Здесь  $x$  входит в подынтегральное выражение с дробными показателями  $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ .

Общий знаменатель этих дробей — 6, поэтому применяем подстановку  $x = t^6$ , тогда интеграл примет вид

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x-2}\sqrt[3]{x}} = \left[ \begin{array}{l} x = t^6; \\ dx = 6t^5 dt \end{array} \right] = 6 \int \frac{t^3}{t-2} dt.$$

Выделим делением «уголком» целую и дробную части дроби, стоящей под интегралом:

$$\frac{t^3}{t-2} = t^2 + 2t + 4 + \frac{8}{t-2}.$$

Продолжая вычислять интеграл, будем иметь

$$6 \int \frac{t^3}{t-2} dt = 6 \left( \int (t^2 + 2t + 4) dt + 8 \int \frac{d(t-2)}{t-2} \right) = 6 \left( \frac{1}{3} t^3 + t^2 + 4t + 8 \ln |t-2| \right) + C.$$

Возвращаясь к  $x$ , получим

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x-2}\sqrt[3]{x}} = 2\sqrt{x} + 6\sqrt[3]{x} + 24\sqrt[6]{x} + 48 \ln |\sqrt[6]{x-2}| + C.$$

### Методы интегрирования функций, содержащих квадратный трехчлен

Рассмотрим интегралы вида

$$\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c} dx; \int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx; \int \sqrt{ax^2+bx+c} dx.$$



Вычисление таких интегралов начинается с выделения полного квадрата из квадратного трехчлена:

$$ax^2 + bx + c = a \left( x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) = a \left[ \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \underbrace{\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}}_{\pm k^2} \right] = a \left[ \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 \pm k^2 \right].$$

Далее необходимы преобразования, рассмотренные в следующих примерах.

#### Пример 4.42

Найдем  $\int \frac{1}{x^2 + 4x + 5} dx$ .

*Решение*

Выделим полный квадрат из квадратного трехчлена, стоящего в знаменателе дроби:

$$x^2 + 4x + 5 = (x + 2)^2 + 4.$$

Заменяем дифференциал  $dx$  на  $d(x + 2)$  и вычислим интеграл:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2 + 4x + 5} dx &= \int \frac{d(x + 2)}{(x + 2)^2 + 2^2} = [t = x + 2] = \int \frac{dt}{t^2 + 2^2} = \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{t}{2} + C = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x + 2}{2} + C. \end{aligned}$$

#### Пример 4.43

Найдем  $\int \frac{7 - 8x}{2x^2 - 3x + 1} dx$ .

*Решение*

Выделим полный квадрат из квадратного трехчлена, стоящего в знаменателе дроби:

$$2x^2 - 3x + 1 = 2 \left( x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2} \right) + 4 = 2 \left[ \left( x - \frac{3}{4} \right)^2 - \frac{1}{16} \right].$$

Введем новую переменную  $t = x - \frac{3}{4}$ , откуда  $dt = dx$ . Вычислим интеграл:

$$\int \frac{7 - 8x}{2x^2 - 3x + 1} dx = \int \frac{7 - 8x}{2 \left[ \left( x - \frac{3}{4} \right)^2 - \frac{1}{16} \right]} dx = \left[ \begin{array}{l} t = x - \frac{3}{4}; \\ x = t + \frac{3}{4}; \\ dx = dt \end{array} \right] = \frac{1}{2} \int \frac{1 - 8t}{t^2 - \frac{1}{16}} dt.$$

Разложим данный интеграл на два, соответствующих двум слагаемым в числителе:

$$\frac{1}{2} \int \frac{1 - 8t}{t^2 - \frac{1}{16}} dt = \frac{1}{2} \int \frac{1}{t^2 - \frac{1}{16}} dt - 2 \int \frac{4t}{t^2 - \frac{1}{16}} dt = \frac{1}{2} \int \frac{1}{t^2 - \left( \frac{1}{4} \right)^2} dt - 2 \int \frac{d \left( t^2 - \frac{1}{16} \right)}{t^2 - \frac{1}{16}} =$$



$$= \ln \left| \frac{t - \frac{1}{4}}{t + \frac{1}{4}} \right| - 2 \ln \left| t^2 - \frac{1}{16} \right| + C = \ln \left| \frac{x-1}{x-\frac{1}{2}} \right| - 2 \ln \left| x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2} \right| + C.$$

#### Пример 4.44

Найдем  $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - 4x - 3}} dx$ .

*Решение*

Выделим полный квадрат из квадратного трехчлена, стоящего в знаменателе дроби:  $x^2 - 4x - 3 = (x - 2)^2 - 7$ . Заменяем дифференциал  $dx$  на  $d(x - 2)$ . Вычислим интеграл:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{x^2 - 4x - 3}} dx &= \int \frac{d(x-2)}{\sqrt{(x-2)^2 - 7}} = [t = x - 2] = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 - 7}} = \\ &= \ln |t + \sqrt{t^2 - 7}| + C = \ln |x - 2 + \sqrt{(x-2)^2 - 7}| + C. \end{aligned}$$

#### Пример 4.45

Найдем  $\int \frac{3x - 5}{\sqrt{9 - 6x - 3x^2}} dx$ .

*Решение*

Выделим полный квадрат из квадратного трехчлена, стоящего в знаменателе дроби:

$$-3x^2 + 6x + 9 = -3(x^2 - 2x - 3) = -3[(x - 1)^2 - 4] = 3[4 - (x - 1)^2].$$

Введем новую переменную  $t = x - 1$ , откуда  $dt = dx$ . Вычислим интеграл:

$$\int \frac{3x - 5}{\sqrt{9 - 6x - 3x^2}} dx = \left[ \begin{matrix} x = t + 1; \\ dx = dt \end{matrix} \right] = \int \frac{(3t - 2)}{\sqrt{3}\sqrt{4 - t^2}} dt.$$

Разложим данный интеграл на два, соответствующих двум слагаемым в числителе:

$$\begin{aligned} \int \frac{(3t - 2)}{\sqrt{3}\sqrt{4 - t^2}} dt &= \frac{3}{\sqrt{3}} \int \frac{t}{\sqrt{4 - t^2}} dt - \frac{2}{\sqrt{3}} \int \frac{1}{\sqrt{4 - t^2}} dt = \\ &= -\frac{3}{2\sqrt{3}} \int (4 - t^2)^{-\frac{1}{2}} d(4 - t^2) - \frac{2}{\sqrt{3}} \int \frac{1}{\sqrt{4 - t^2}} dt = \\ &= -\frac{3}{\sqrt{3}} (4 - t^2)^{\frac{1}{2}} - \frac{2}{\sqrt{3}} \arcsin \frac{t}{2} + C = -\sqrt{9 - 6x - 3x^2} - \frac{2}{\sqrt{3}} \arcsin \frac{x-1}{2} + C. \end{aligned}$$

### Метод интегрирования дробно-рациональных функций

Изучим способ вычисления интеграла  $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$  от дробно-рациональной функции  $\frac{P(x)}{Q(x)}$ , где  $P(x)$  и  $Q(x)$  — многочлены.



**Определение 4.31.** Дробь  $\frac{P(x)}{Q(x)}$  называется *неправильной*, если степень

многочлена в числителе больше или равна степени многочлена в знаменателе.

Делением числителя на знаменатель «уголком» можно неправильную дробь  $\frac{P(x)}{Q(x)}$  представить в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби, у которой степень числителя ниже степени знаменателя.

#### Пример 4.46

Дробь  $\frac{x^3}{x-1}$  — рациональная неправильная. После деления «уголком» получаем  $\frac{x^3}{x-1} = x^2 + x + 1 + \frac{1}{x-1}$ , т.е. сумму многочлена  $x^2 + x + 1$  и правильной рациональной дроби  $\frac{1}{x-1}$ .

Правильную рациональную дробь всегда можно разложить на элементарные слагаемые — дроби следующих двух видов:

$$\frac{A}{(x-a)^m} \text{ и } \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}.$$

Для разложения правильной рациональной дроби  $\frac{P(x)}{Q(x)}$  на выписанные выше элементарные слагаемые дроби надо использовать следующий алгоритм.

**Шаг 1.** Разложить знаменатель  $Q(x)$  на простейшие действительные множители, причем согласно основной теореме алгебры это возможно:

$$Q(x) = (x-a)^m \cdots (x-b)^k (x^2+px+q)^n \cdots (x^2+cx+d)^r.$$

**Шаг 2.** Написать схему разложения данной дроби на элементарные слагаемые дроби в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{P(x)}{Q(x)} = & \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{A_m}{(x-a)^m} + \dots + \frac{B_1}{x-b} + \frac{B_2}{(x-b)^2} + \dots + \frac{B_k}{(x-b)^k} + \\ & + \frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2} + \dots + \frac{M_nx+N_n}{(x^2+px+q)^n} + \dots + \\ & + \frac{C_1x+D_1}{x^2+cx+d} + \frac{C_2x+D_2}{(x^2+cx+d)^2} + \dots + \frac{C_rx+D_r}{(x^2+cx+d)^r}, \end{aligned}$$

где  $A_1, \dots, B_1, \dots, M_1, \dots, N_1, \dots, C_1, \dots, D_1, \dots$  — некоторые постоянные.

В этой схеме знаменателями элементарных дробей являются все целые степени каждого множителя в разложении  $Q(x)$ , начиная с первой степени и заканчивая той степенью, которую имеет множитель в разложении  $Q(x)$ ; для каждого множителя в разложении знаменателя  $Q(x)$  вписыва-



ется столько элементарных слагаемых дробей, какова его кратность ( $m, k, n, r, \dots$ ).

**Шаг 3.** Освободиться от знаменателей, умножая обе части равенства на  $Q(x)$ .

**Шаг 4.** Составить систему уравнений, сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях  $x$  в обеих частях полученного тождества (число этих уравнений должно быть равно числу неизвестных коэффициентов  $A_1, \dots, B_1, \dots, M_1, \dots, N_1, \dots, C_1, \dots, D_1, \dots$ ).

**Шаг 5.** Решить систему и подставить найденные значения  $A_1, \dots, B_1, \dots, M_1, \dots, N_1, \dots, C_1, \dots, D_1, \dots$  в схему разложения.

**Шаг 6.** Представить интеграл  $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$  от правильной рациональной дроби  $\frac{P(x)}{Q(x)}$  в виде суммы интегралов от элементарных слагаемых дробей вида

$$I_1 = \int \frac{dx}{(x-a)^m} \text{ и } I_2 = \int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n} dx.$$

Интеграл  $I_1$  при  $m \neq 1$  находится по второй формуле из таблицы интегралов:

$$I_1 = \int \frac{dx}{(x-a)^m} = \int (x-a)^{-m} d(x-a) = \frac{(x-a)^{-m+1}}{-m+1} + C,$$

а при  $m = 1$  — по четвертой формуле:

$$I_1 = \int \frac{dx}{x-a} = \ln|x-a| + C.$$

Интеграл  $I_2$  при  $n = 1$  находится методом выделения полного квадрата, описанным выше, а при  $n \geq 2$  — путем преобразований, показанных в решении следующего примера.

#### Пример 4.47

Найдем неопределенный интеграл  $\int \frac{3x^2+8}{x^3+4x^2+4x} dx$ .

*Решение*

Разложим подынтегральную правильную рациональную дробь на элементарные слагаемые согласно указанному алгоритму.

**Шаг 1.** Разложим знаменатель на простейшие действительные множители:

$$x^3+4x^2+4x = x(x^2+4x+4) = x(x+2)^2.$$

**Шаг 2.** Напишем схему разложения подынтегральной дроби на элементарные слагаемые дроби:

$$\frac{3x^2+8}{x(x+2)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{(x+2)^2}.$$

**Шаг 3.** Освободимся от знаменателей, умножая обе части равенства на  $x(x+2)^2$ :

$$3x^2+8 = A(x+2)^2 + B(x+2)x + Cx = (A+B)x^2 + (4A+2B+C)x + 4A.$$



**Шаг 4.** Составим систему уравнений, сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях  $x$  в обеих частях полученного тождества:

$$\begin{cases} A + B = 0, \\ 4A + 2B + C = 0, \\ 4A = 8. \end{cases}$$

**Шаг 5.** Решаем систему уравнений:  $A = 2$ ;  $B = 1$ ;  $C = -10$ . Подставим найденные значения постоянных  $A$ ,  $B$  и  $C$  в схему разложения, получим

$$\frac{3x^2 + 8}{x(x+2)^2} = \frac{2}{x} + \frac{1}{x+2} - \frac{10}{(x+2)^2}.$$

**Шаг 6.** Подставляя под знак интеграла полученную сумму элементарных дробей и интегрируя каждое слагаемое отдельно, найдем

$$\begin{aligned} \int \frac{3x^2 + 8}{x(x+2)^2} dx &= \int \left( \frac{2}{x} + \frac{1}{x+2} - \frac{10}{(x+2)^2} \right) dx = \\ &= \int \frac{2}{x} dx + \int \frac{1}{x+2} dx - \int \frac{10}{(x+2)^2} dx = 2\ln|x| + \ln|x+2| + \frac{10}{x+2} + C. \end{aligned}$$

Ответ:  $2\ln|x| + \ln|x+2| + \frac{10}{x+2} + C.$

#### Пример 4.48

Найдем неопределенный интеграл  $\int \frac{2x^5 + 6x^2 + 1}{x^4 + 3x^2} dx.$

*Решение*

Разложим подынтегральную правильную рациональную дробь на элементарные слагаемые согласно указанному алгоритму.

**Шаг 0.** Выделим из подынтегральной неправильной дроби целую часть и правильную дробь, деля числитель на знаменатель:

$$\frac{2x^5 + 6x^2 + 1}{x^4 + 3x^2} = 2x + \frac{1}{x^4 + 3x^2}.$$

**Шаг 1.** Разложим знаменатель правильной дроби на простейшие действительные множители:

$$x^4 + 3x^2 = x^2(x^2 + 3).$$

**Шаг 2.** Напишем схему разложения подынтегральной правильной дроби на элементарные слагаемые дроби:

$$\frac{1}{x^2(x^2 + 3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 3}.$$

**Шаг 3.** Освободимся от знаменателей, умножая обе части равенства на  $x^2(x^2 + 3)$ :

$$1 = Ax(x^2 + 3) + B(x^2 + 3) + (Cx + D)x^2 = (A + C)x^3 + (B + D)x^2 + 3Ax + 3B.$$

**Шаг 4.** Составим систему уравнений, сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях  $x$  в обеих частях полученного тождества:

$$\begin{cases} A + C = 0, \\ B + D = 0, \\ 3A = 0, \\ 3B = 1. \end{cases}$$



**Шаг 5.** Решаем систему уравнений:  $A = 0$ ;  $B = \frac{1}{3}$ ;  $C = 0$ ;  $D = -\frac{1}{3}$ . Подставим найденные значения постоянных  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$  в схему разложения, получим

$$\frac{1}{x^2(x^2+3)} = \frac{1}{3x^2} + \frac{1}{3(x^2+3)}.$$

**Шаг 6.** Подставляя под знак интеграла полученную сумму элементарных дробей и интегрируя каждое слагаемое отдельно, найдем

$$\begin{aligned} \int \frac{2x^5+6x^2+1}{x^4+3x^2} dx &= \int \left( 2x + \frac{1}{x^4+3x^2} \right) dx = \\ &= \int \left( 2x + \frac{1}{3x^2} - \frac{1}{3(x^2+3)} \right) dx = 2 \int x dx + \frac{1}{3} \int x^{-2} dx - \frac{1}{3} \int \frac{1}{x^2+3} dx = \\ &= x^2 - \frac{1}{3x} - \frac{1}{3\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{3}} + C. \end{aligned}$$

Ответ:  $x^2 - \frac{1}{3x} - \frac{1}{3\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{3}} + C.$

### 4.3.3. Определенный интеграл и его свойства

#### Задача о площади криволинейной трапеции

Пусть требуется найти площадь плоской фигуры  $aABb$  (рис. 4.26). Эта фигура называется криволинейной трапецией. Назовем площадь этой фигуры *определенным интегралом*:

$$S_{aABb} = \int_a^b f(x) dx.$$

Здесь  $a$  — нижний предел (граница) интегрирования;  $b$  — верхний предел (граница) интегрирования;  $f(x) > 0$  — подынтегральная функция, она еще называется интегрируемой на отрезке  $[a; b]$ ;  $dx$  — дифференциал от  $x$ ;  $f(x)dx$  — подынтегральное выражение.

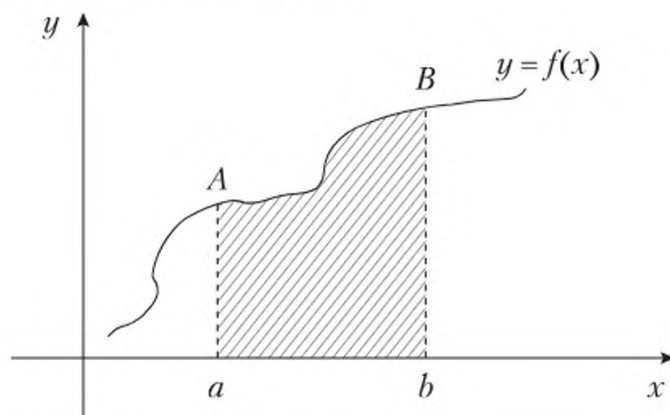


Рис. 4.26. Площадь криволинейной трапеции

Справедлива следующая теорема.

**Теорема 4.37.** Если функция непрерывна на отрезке  $[a; b]$ , то она интегрируема на этом отрезке.



Перечислим *свойства* определенного интеграла.

1.  $\int_a^a f(x)dx = 0$ .
2.  $\int_a^b Af(x)dx = A \int_a^b f(x)dx$ ,  $A$  — постоянный множитель.
3.  $\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$ ,  $f(x), g(x)$  — интегрируемые функции.
4.  $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$ .
5.  $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ , где  $a < c < b$ .
6. Если функция  $f(x) > 0$  на отрезке  $[a; b]$ , то  $\int_a^b f(x)dx > 0$ .

Последнее свойство непосредственно следует из определения определенного интеграла.

*Формула Ньютона — Лейбница<sup>1</sup> дает удобное правило вычисления определенного интеграла и устанавливает связь между неопределенным и определенным интегралами.*

*Если функция  $f(x)$  непрерывна на сегменте (отрезке)  $[a; b]$  и  $F(x)$  — первообразная функции  $f(x)$  на этом отрезке, то*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Таким образом, процесс вычисления определенного интеграла разбивается на два этапа.

1. Нахождение первообразной подынтегральной функции (неопределенного интеграла)  $F(x)$ . Здесь можно применять все приемы, рассмотренные для неопределенных интегралов.

2. Подстановка в найденную первообразную функцию верхнего и нижнего пределов интегрирования и нахождение разности  $F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$ .

#### Пример 4.49

Вычислим некоторые определенные интегралы:

$$а) \int_0^1 2x dx = 2 \int_0^1 x dx = \frac{2x^2}{2} \Big|_0^1 = 1 - 0 = 1;$$

$$б) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = -\sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1;$$

<sup>1</sup> Сэр Исаак Ньютон (1642–1727) — английский физик, механик, математик, астроном; Готфрид Вильгельм Лейбниц (1646–1716) — немецкий философ, логик, математик, юрист, историк.



$$\begin{aligned} \text{в) } \int_1^2 (3x^4 + 2x^2 - 7) dx &= 3 \int_1^2 x^4 dx + 2 \int_1^2 x^2 dx - 7 \int_1^2 dx = \frac{3}{5} x^5 \Big|_1^2 + \frac{2}{3} x^3 \Big|_1^2 - 7x \Big|_1^2 = \\ &= \frac{3}{5} (2^5 - 1) + \frac{2}{3} (2^3 - 1) - 7(2 - 1) = \frac{274}{15}. \end{aligned}$$

Формула замены переменной в определенном интеграле имеет вид

$$\int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt.$$

#### Пример 4.50

Вычислим  $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$ .

*Решение*

Здесь подстановка  $x = \sin t$  дает

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t) dt = \frac{1}{2} \left( t + \frac{\sin 2t}{2} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.$$

Формула интегрирования по частям в определенном интеграле имеет вид

$$\int_a^b u(x) dv(x) = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b v(x) du(x).$$

#### 4.3.4. Приложения определенного интеграла

Рассмотрим примеры вычисления площадей плоских фигур. Напомним, что если  $y = f(x) > 0$  на отрезке  $[a; b]$ , то  $\int_a^b f(x) dx > 0$ , если  $y = f(x) < 0$

на отрезке  $[a; b]$ , то  $\int_a^b f(x) dx < 0$ , поэтому площадь криволинейной трапеции,

ограниченной линиями  $x = a$ ,  $x = b$ , осью  $Ox$  и графиком подынтегральной функции  $y = f(x)$ , равна модулю интеграла:

$$S = \left| \int_a^b f(x) dx \right|.$$

#### Пример 4.51

Найдем площадь плоской фигуры, ограниченной параболой  $y = x^2$  и прямыми  $x = 1$ ,  $x = 4$  (рис. 4.27).

*Решение*

$$S = \int_1^4 x^2 dx = \frac{1}{3} x^3 \Big|_1^4 = \frac{1}{3} (64 - 1) = \frac{63}{3} = 21.$$



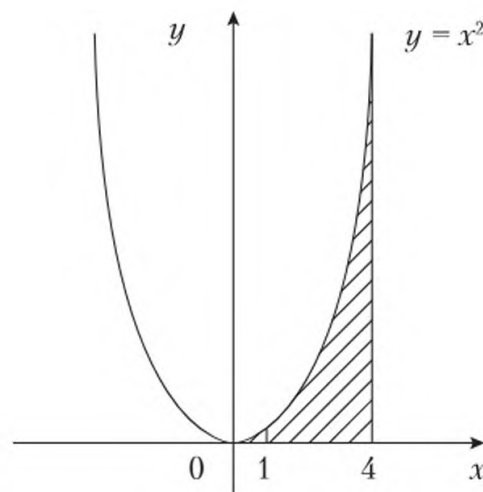


Рис. 4.27. Площадь фигуры к примеру 4.51

### Пример 4.52

Найдем площадь плоской фигуры, ограниченной графиком функции  $y = \sin x$  и прямой  $y = \frac{1}{2}$  при условии  $0 \leq x \leq 2\pi$  (рис. 4.28).

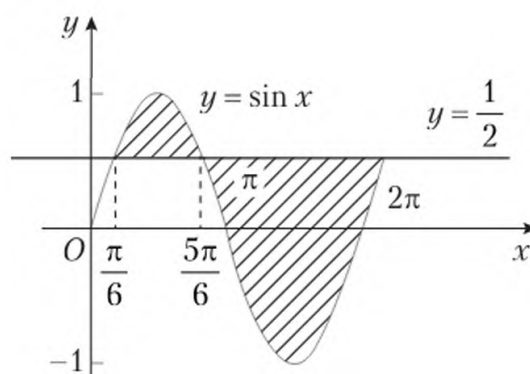


Рис. 4.28. Площадь фигуры к примеру 4.52

#### Решение

При решении на соответствующих интервалах из уравнения верхней линии будем вычитать уравнение нижней и менять знак интеграла на минус там, где подынтегральная функция отрицательная. Получим

$$\begin{aligned}
 S &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \left( \frac{1}{2} - \sin x \right) dx + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \left( \sin x - \frac{1}{2} \right) dx + \int_{\frac{5\pi}{6}}^{2\pi} \left( \frac{1}{2} - \sin x \right) dx = \\
 &= \left( \frac{1}{2}x + \cos x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} + \left( -\cos x - \frac{1}{2}x \right) \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} + \left( \frac{1}{2}x + \cos x \right) \Big|_{\frac{5\pi}{6}}^{2\pi} = \\
 &= \left( \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 0 - 1 \right) + \left( \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{5\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{12} \right) + \left( \pi - 1 - \frac{5\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 2\sqrt{3} - 2 + \frac{\pi}{3}.
 \end{aligned}$$



Отметим, что в настоящем изложении мы не рассматриваем применение определенного интеграла для нахождения длины дуги, площади и объема тела вращения, а также в механике и физике.

#### 4.3.5. Несобственные интегралы

**Определение 4.32.** Если в интеграле подынтегральная функция неограниченная, а также если один или оба предела интегрирования не являются конечным числом, интеграл называется *несобственным*.

##### Интегралы с бесконечными пределами

Пусть функция  $f(x)$  непрерывна при  $a \leq x < +\infty$ , тогда по определению

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx.$$

Если указанный предел существует, то говорят, что интеграл  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  сходится, а если не существует, то интеграл называют расходящимся.

Геометрически для неотрицательной при  $x \geq a$  функции  $f(x)$  несобственный интеграл представляет собой площадь фигуры, ограниченной сверху графиком функции  $y = f(x)$ , слева — отрезком прямой  $x = a$  и снизу — осью  $Ox$  (рис. 4.29).

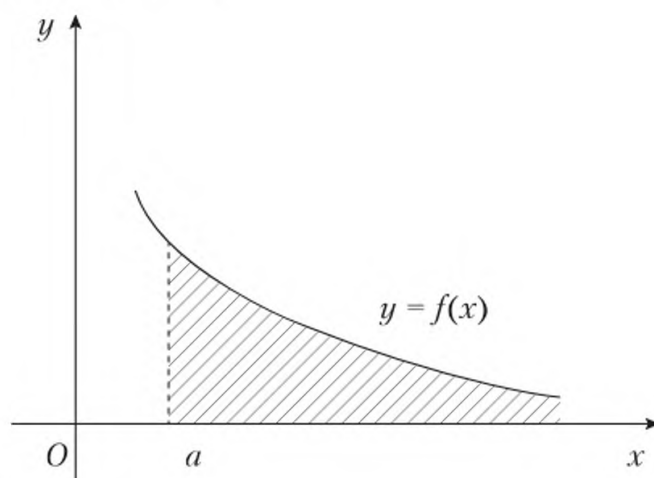


Рис. 4.29. Геометрический смысл несобственного интеграла

#### Пример 4.53

Рассмотрим некоторые интегралы:

а)  $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} (1 - e^{-b}) = 1$  — интеграл сходится;

б)  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{dx}{x} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \ln b = +\infty$  — интеграл расходится;

в)  $\int_0^{+\infty} \cos x dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \cos x dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \sin b$  — предел не существует, т.е. интеграл расходится.



Установим, при каких значениях  $\alpha$  сходится интеграл  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ .

*Решение*

Случай  $\alpha = 1$  рассмотрен в предыдущем примере. При  $\alpha \neq 1$  имеем

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{b^{1-\alpha} - 1}{1-\alpha} = \begin{cases} +\infty & \text{при } \alpha < 1, \\ \frac{1}{1-\alpha} & \text{при } \alpha > 1. \end{cases}$$

Значит, данный интеграл сходится при  $\alpha > 1$  и расходится при  $\alpha \leq 1$ .

Заметим, что формула Ньютона — Лейбница также применима в случае несобственных интегралов:

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = F(+\infty) - F(a).$$

#### 4.4. Примеры применения дифференциального исчисления для решения финансово-экономических задач

##### 4.4.1. Эластичность функции, ее свойства и геометрический смысл

Для исследования экономических процессов используется понятие эластичности функции.

**Определение 4.33.** Эластичностью  $E_x(y)$  функции  $y = f(x)$  называется предел отношения относительного приращения функции  $\frac{\Delta y}{y}$  к относительному приращению аргумента  $\frac{\Delta x}{x}$  при стремлении приращения  $\Delta x$  аргумента  $x$  к нулю, т.е.

$$E_x(y) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta y}{y} : \frac{\Delta x}{x} \right) = \frac{x}{y} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta y}{\Delta x} \right) = \frac{x}{y} y'$$

для  $y' = f'(x)$ .

**Первое правило использования эластичности.** Эластичность функции показывает приближенно, на сколько процентов изменится функция  $y = f(x)$  при изменении независимой переменной  $x$  на 1%.

**Свойство 1.** Эластичность функции равна произведению независимой переменной  $x$  на темп изменения функции  $T_y = (\ln y)' = \frac{y'}{y}$ .

*Доказательство.*  $E_x(y) = \frac{x}{y'} \cdot y' = \frac{y'}{y'} x = T_y \cdot x$ .

**Свойство 2.** Эластичность произведения (частного) двух функций равна сумме (разности) эластичностей этих функций:

$$E_x(fg) = E_x(f) + E_x(g); \quad E_x\left(\frac{f}{g}\right) = E_x(f) - E_x(g).$$



*Доказательство.* Формула следует из правил дифференцирования произведения и частного от деления двух функций.

**Свойство 3.**  $E_x(y) = \frac{1}{E_y(x)}$ .

*Доказательство.* Равенство является следствием правила дифференцирования обратной функции  $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$ .

**Второе правило использования эластичности.** Эластичность спроса  $y$  относительно дохода  $x$  — коэффициент  $E_x(y)$  показывает, на сколько процентов изменится спрос при изменении цены (дохода) на 1%.

При  $|E_x(y)| > 1$  спрос считается эластичным, при  $|E_x(y)| < 1$  — неэластичным относительно цены (дохода).

#### Пример 4.55

Найдем эластичность спроса населения на товары первой необходимости.

*Решение*

Подобный спрос описывается функцией Торнквиста  $y = \frac{ax}{x+c}$  для  $x \geq 0$  (см. пример 4.28). Здесь  $x$  — доход и  $y$  — спрос населения в денежном выражении и  $a, c$  — эмпирические положительные постоянные.

Имеем  $y' = \frac{c}{(x+c)^2}$ , а потому  $E_x(y) = \frac{c}{x+c} < 1$ .

Следовательно, подобный спрос всегда неэластичен: увеличение доходов населения не влияет на увеличение объема спроса на товары первой необходимости.

#### Пример 4.56

Найдем эластичность спроса населения на товары относительной роскоши.

*Решение*

Спрос на товары относительной роскоши описывается функцией Торнквиста  $y = f(x) = \frac{a(x-b)}{x+c}$  для эмпирических положительных постоянных  $a, b, c$  и  $x \geq b$ .

Условие  $x \geq b$  означает, что спрос на эту группу товаров появляется после того, как доход населения достигает некоторой величины  $b$ .

Найдем  $y' = \frac{a(b+c)}{(x+c)^2}$ , а потому  $E_x(y) = \frac{x(b+c)}{(x-b)(x+c)}$ .

Неравенство  $E_x(y) > 1$ , выражающее эластичность спроса на товары относительной роскоши относительно дохода, принимает вид  $x^2 - 2bx - b < 0$ .

График функции  $y = x^2 - 2bx - b$  представлен на рис. 4.30.

Спрос эластичен, т.е.  $E_x(y) > 1$ , при доходах  $x$ , заключенных в интервале  $b \leq x < b + \sqrt{b(b+c)}$ , и спрос будет неэластичным, т.е.  $E_x(y) < 1$ , при доходах  $x > b + \sqrt{b(b+c)}$ .

Поскольку  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a(x-b)}{x+c} = a$ , то график функции Торнквиста (рис. 4.31) имеет горизонтальную асимптоту  $y = a$ .



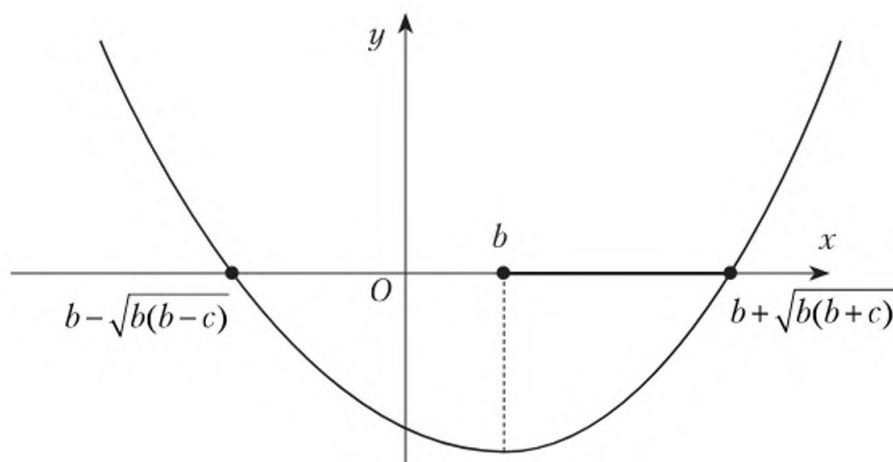


Рис. 4.30. График функции  $y = x^2 - 2bx - b$

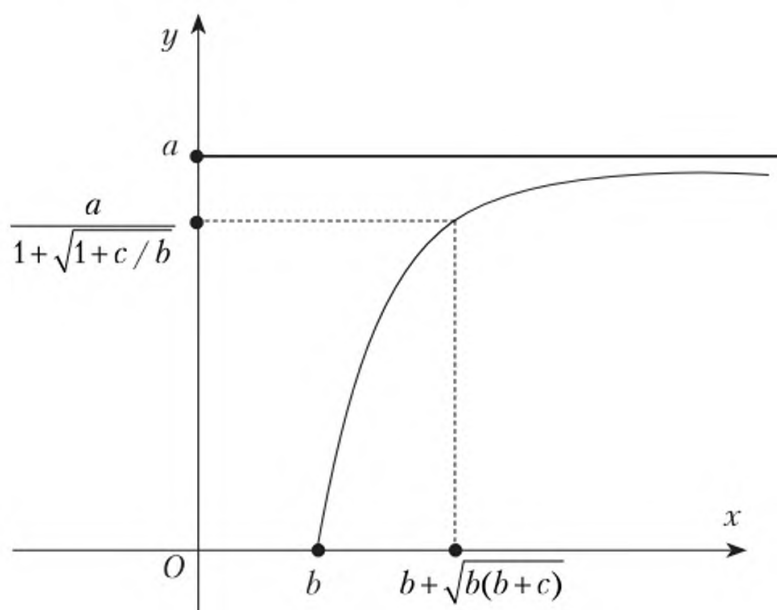


Рис. 4.31. График функции Торнквиста для спроса населения на товары относительной роскоши

После точки  $b + \sqrt{b(b+c)}$  рост спроса на товары относительной роскоши падает — происходит «насыщение» ими. «Сигналом» для торговли будет объем спроса, рав-

$$\text{ный } y = f(b + \sqrt{b(b+c)}) = \frac{a}{1 + \sqrt{1 + \frac{c}{b}}}.$$

#### Пример 4.56

Найдем эластичность спроса населения на товары роскоши.

*Решение*

Спрос населения на товары роскоши описывается функцией Торнквиста  $y = \frac{ax(x-b)}{x+c}$  для  $x \geq b$  (см. пример 4.29). Здесь  $x$  — доход;  $y$  — спрос в денежных единицах;  $a, b, c$  — эмпирические положительные постоянные.

Найдем  $y' = \frac{a(x^2 + 2cx - bc)}{(x+c)^2}$ , а потому для  $x > b$  имеем



$$E_x(y) = 1 + \frac{c(x+b)}{(x-b)(x+c)} > 1.$$

Следовательно, подобный спрос всегда эластичен: увеличение доходов населения напрямую влияет на увеличение объема спроса на товары роскоши.

#### 4.4.2. Функция спроса

Функция спроса  $D(p)$  (*demand*) определяет спрос (количество купленного товара) при цене  $p$  за единицу продукции. Понятие эластичности было введено Аланом Маршаллом<sup>1</sup> в связи с изучением свойств функции  $D(p)$ .

Эластичностью  $E_D$  спроса относительно цены  $D(p)$  называется относительное изменение спроса  $\frac{\Delta D}{D}$  при относительном изменении  $\frac{\Delta p}{p}$  цены товара:

$$E_D = \frac{\frac{\Delta D}{D} \cdot 100\%}{\frac{\Delta p}{p} \cdot 100\%}. \quad (4.4)$$

Если функция спроса является дифференцируемой, то под эластичностью понимается предел правой части формулы (4.4) при  $\Delta p \rightarrow 0$ . Тогда эластичность  $E_D$  спроса вычисляется по формуле

$$E_D = \frac{D'}{D} \cdot p = (\ln D)' \cdot p.$$

Заметим, что эта формула вполне согласуется с введенной выше формулой для эластичности произвольной дифференцируемой функции  $y(x)$

$$E_y = \frac{y'}{y} \cdot x = (\ln y)' \cdot x.$$

**Замечание 4.20.** В силу экономического смысла функция спроса  $D(p)$  и цена  $p$  принимают положительные значения. По той же причине  $D(p)$  является невозрастающей функцией  $p$ . Поэтому производная  $D'(p)$  и эластичность  $E_D$  являются неположительными величинами.

Спрос называется *эластичным*, если  $|E_D| > 1$ , и *неэластичным*, если  $|E_D| < 1$ .

**Замечание 4.21.** Если функция спроса не зависит от цены, т.е.  $E_D = 0$ , то спрос называют *совершенно неэластичным*. Если же малое изменение цены приводит к значительному изменению спроса, то говорят, что спрос является *совершенно эластичным*, и полагают, что  $|E_D| = \infty$ .

#### Пример 4.58

Пусть функция спроса  $D(p) = Cp^{-a}$ ,  $C > 0$ ,  $a > 0$ . Найдем эластичность спроса и значения параметра  $a$ , при которых спрос эластичен.

<sup>1</sup> Алан Маршалл (1842–1924) — английский экономист, основатель кембриджской школы политэкономии.



*Решение*

В силу ограничений на параметры  $C$  и  $a$  функция  $D(p)$  является положительной и убывающей. При этом  $D' = -aCp^{-a-1} = -\frac{aC}{p^{a+1}}$  и  $E_D = -\frac{aCp}{p^{a+1}Cp^{-a}} = -a$ . Поэтому  $|E_D| = a$ , и спрос эластичен при  $a > 1$  и неэластичен при  $a < 1$ .

Поясним теперь важность разделения эластичного и неэластичного спроса. Так как спрос  $D(p)$  является количеством проданного по цене  $p$  товара, то общая выручка (*total revenue*)  $TR$  (или просто  $R$ ) равна  $R = p \cdot D(p)$ . Поэтому

$$R' = p'D(p) + pD'(p) = D + pD',$$

а эластичность выручки

$$E_R = \frac{R'}{R} \cdot p = \frac{D + pD'}{pD} \cdot p = \frac{D + pD'}{D} = 1 + \frac{D'}{D} \cdot p = 1 + E_D.$$

Рассматривая случаи эластичного спроса, т.е.  $|E_D| > 1$  ( $E_D < -1$ ) и неэластичного спроса  $|E_D| < 1$  ( $-1 < E_D < 0$ ), приходим к следующему выводу: в первом случае  $E_R < 0$ , а во втором  $E_R > 0$ . Таким образом, при эластичном спросе изменение цены приводит к изменению выручки в противоположном направлении, т.е. увеличение (уменьшение) цены приводит к уменьшению (увеличению) выручки. Если же спрос неэластичен, то изменение цены вызывает изменение выручки в том же направлении, т.е. увеличение (уменьшение) цены приводит к увеличению (уменьшению) выручки.

**Пример 4.59**

Пусть функция спроса  $D(p) = 12 - p$ . Исследуем зависимость между эластичностью спроса и доходом от продажи товара.

*Решение*

Поскольку функция спроса равна количеству реализованного товара, т.е.  $q = D(p) = 12 - p$ , то общий доход  $R$ , получаемый при спросе  $D(p)$ , равен

$$R(p) = pD(p) = p(12 - p) = 12p - p^2.$$

Так как величины  $D(p)$  и  $p$  положительны, то будем рассматривать функцию  $R(p)$  на промежутке  $(0; 12)$ . При этом так как  $R'(p) = 12 - 2p$ , то  $R(p)$  возрастает при  $0 < p < 6$  и убывает при  $6 < p < 12$ .

С другой стороны,  $E_D = \frac{D'}{D} p = \frac{p}{p-12}$ . В силу замечания 4.20 условие эластичности спроса  $|E_D| > 1$  можно переписать в виде  $E_D < -1$ . Решая неравенство  $\frac{p}{p-12} < -1$  с учетом  $p - 12 < 0$ , получаем  $p \in (6; 12)$ , т.е. интервал, на котором функция  $R(p)$  убывает. Таким образом, при эластичном спросе цену товара повышать невыгодно.

Аналогично условие неэластичности спроса  $|E_D| < 1$  можно переписать в виде  $E_D > -1$ , т.е.  $p \in (0; 6)$ . Последний интервал совпадает с множеством, на котором доход  $R$  возрастает с увеличением цены. При неэластичном спросе увеличение цены товара приводит к увеличению выручки.

Наряду с общей выручкой важной для приложений является *функция издержек* фирмы. Компания, как правило, имеет фиксированные издержки



$FC$  (*fixed cost*), которые не зависят от объемов произведенной продукции, и переменные издержки  $VC$  (*variable cost*). Общие издержки  $TC$  (*total cost*) являются суммой  $TC = FC + VC$ , причем  $FC = TC(0)$ . Множество, на котором общие издержки равны общей выручке, т.е.  $TC = TR$ , называется *безубыточным множеством* (множеством безубыточности).

#### Пример 4.60

Пусть функция общих издержек  $TC = p^2 + 8p + 16$ , а функция общей выручки равна  $TR = 18p$ . Найдём множество безубыточности.

*Решение*

Решая уравнение  $TC = TR$ , т.е.  $p^2 + 8p + 16 = 18p$ , получим  $p = 2$  и  $p = 8$ . Таким образом, множество безубыточности состоит из двух точек. При этом легко видеть, что производство убыточно ( $TR < TC$ ) при  $p \in (2; 8)$  и прибыльно при остальных  $p$ .

### 4.4.3. Функция предложения

*Функция предложения* (*supply*)  $S(p)$  задает количество товара, которое поставщик может предложить по рыночной цене  $p$ . В силу своего экономического смысла функция предложения  $S(p)$  является неотрицательной и неубывающей.

Говорят, что *рынок находится в равновесии*, если покупатели могут купить столько товара, сколько им необходимо, а продавец может реализовать весь товар, который он намерен продать.

Равновесная цена  $p_0$  товара на рынке находится из условия  $S(p_0) = D(p_0)$ , а количество  $q_0$  проданного товара  $q_0 = D(p_0)$ .

#### Пример 4.61

Пусть спрос задан функцией  $D(p) = 204 - p - p^2$ , а функция предложения равна  $S(p) = 2p^2 + 2p + 114$ . Найдём равновесную цену и количество проданного товара.

*Решение*

Решая уравнение  $204 - p - p^2 = 2p^2 + 2p + 114$ , получим  $3p^2 + 3p - 90 = 0$ , т.е.  $p = 5$  и  $p = -6$ . В силу экономического смысла задачи ( $p \geq 0$ ) имеем  $p_0 = 5$ ,  $q_0 = D(p_0) = 170$ .

#### Пример 4.62 (задача о распределении налогового бремени)

Найдём изменение равновесной цены при введении дополнительного налога  $t$  на единицу продукции, если  $D(p) = 34 - 3p$ ,  $S(p) = 7p - 4$ . Как распределится бремя дополнительного налога между потребителем и производителем?

*Решение*

Если на производителя вводится дополнительный налог в размере  $t$  (*tax*) на каждую единицу продукции, то при новой равновесной цене товара  $p_t$  стоимость единицы продукции для потребителя равна  $p_t$ , а для производителя выручка с единицы продукции составляет  $p_t - t$  ( $t$  исключается из выручки как налоговая выплата). Поэтому  $p_t$  находится из уравнения

$$S(p_t - t) = D(p_t).$$

Из уравнения  $34 - 3p_0 = 7p_0 - 6$  находим исходную равновесную цену  $p_0 = 4$ . Решая уравнение  $7(p_t - t) - 6 = 34 - 3p_t$  для новой равновесной цены  $p_t$ , получим,



что  $p_t = 4 + \frac{7}{10}t = p_0 + \frac{7}{10}t$ . Таким образом, равновесная цена выросла по сравнению с  $p_0 = 4$ , но не на полную величину налога, а на ее часть: бремя налога делится между потребителем и производителем в отношении 7 : 3.

Если функции спроса и предложения заданы произвольными линейными функциями  $D(p) = d_2 - d_1 p$ ,  $S(p) = s_1 p + s_2$ , где  $d_1, d_2, s_1, s_2 \in \mathbb{R}$ ,  $d_1 \geq 0$ ,  $d_2 \geq 0$ , то легко показать, что бремя дополнительного налога разделится между потребителем и производителем в отношении  $s_1 : d_1$ .

#### 4.4.4. Предельные величины в экономике и оптимизация прибыли

Наряду с функциями издержек, дохода и т.д. в экономике рассматриваются соответствующие *предельные величины*. К ним относятся *предельные издержки*, *предельный доход*, *предельная производительность*, *предельная полезность* и т.д. Предельная величина определяется как отношение  $\frac{\Delta Y}{\Delta X}$  относительного изменения  $\Delta Y$  величины  $Y = Y(X)$  (например, дохода фирмы) при изменении  $\Delta X$  величины  $X$  (например, объема производства):

$$MY = \frac{\Delta Y}{\Delta X}.$$

Если же  $Y(X)$  является дифференцируемой функцией, то предельную величину рассматривают при  $\Delta X \rightarrow 0$ :

$$MY = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta Y}{\Delta X} = Y'(X).$$

Одной из задач оптимизации, естественно возникающих в микроэкономике, является задача об оптимизации прибыли. Необходимое условие максимизации прибыли формулируют как равенство предельного дохода предельным издержкам, т.е.

$$MR = MC.$$

Если функции выручки и издержек являются дифференцируемыми, то последнее условие можно записать в виде  $R'(q) = C'(q)$ . При этом так как функция прибыли  $\Pi(q)$  равна разности функций дохода и издержек, т.е.  $\Pi(q) = R(q) - C(q)$ , то необходимое условие экстремума  $\Pi'(q) = 0$  записывается как  $R'(q) - C'(q) = 0$ , что эквивалентно равенству  $MR = MC$ .

#### Пример 4.63

Пусть  $C(q) = 2q^3 - 332q^2 + 7000q + 800$  — функция полных затрат на производство  $q$  единиц товара,  $R(q) = 1000q - 2q^2$  — функция дохода от продажи. Найдем максимум прибыли.

*Решение*

Находим функцию прибыли

$$\Pi(q) = R(q) - C(q) = -2q^3 + 330q^2 - 6000q - 800,$$



ее производную  $\Pi'(q) = -6q^2 + 660q - 6000$  и критические точки:  $q_1 = 10$  и  $q_2 = 100$  (рис. 4.32).

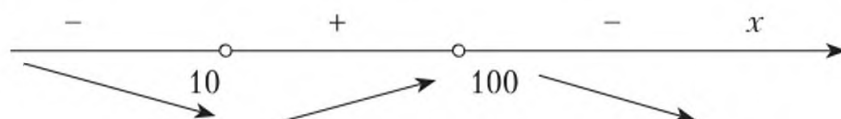


Рис. 4.32. Критические точки для примера 4.63

Таким образом, максимум прибыли достигается в точке  $q = 100$  и  $\Pi_{\max} = \Pi(100) = 699\,200$ . Заметим, что  $\Pi_{\min} = \Pi(10) = -29\,800$ . Отрицательная прибыль при низком объеме выпуска товаров объясняется тем, что затраты на их производство больше выручки от продажи.

#### Пример 4.64

Функция спроса  $q = D(p) = 2000 - 100p$ , фиксированные издержки равны  $FC = 25$  и переменные издержки  $VC = 10q + 0,03q^2$ . Найдём максимальную прибыль, множество безубыточности, предельные издержки и доход.

*Решение*

Общие издержки равны

$$TC = VC + FC = 0,03q^2 + 10q + 25.$$

Далее из условия  $q = 2000 - 100p$  находим, что  $p = 20 - 0,01q$  и общая выручка  $TR = pq = 20q - 0,01q^2$ . Отсюда получаем формулу для прибыли

$$\Pi(q) = TR - TC = -0,04q^2 + 10q - 25.$$

Из условия  $\Pi'(q) = 0$  получим  $10 - 0,08q = 0$ , т.е.  $q = 125$ . Легко проверить, что эта точка является точкой максимума и  $\Pi_{\max} = \Pi(125) = 600$ .

Решая уравнение  $\Pi(q) = 0$ , находим множество безубыточности, состоящее из двух точек  $q_{1,2} = 125 \pm 50\sqrt{6}$ , а предельные издержки и выручка получаются как производные общих выручки и издержек:  $MC = TC' = 0,06q + 10$  и  $MR = TR' = 20 - 0,02q$ .

Рассмотрим теперь задачу об оптимизации налогообложения. Предположим, что на продукцию компании вводится (дополнительный) фиксированный налог  $t$  на каждую единицу реализованного товара. Если ставка налога достаточно велика, то производство товара будет невыгодно и это приведет к его остановке. Естественно, возникает вопрос о такой ставке налога, чтобы итоговый сбор был максимальным.

#### Пример 4.65 (оптимизация налогообложения)

Пусть  $R(q) = 54q - 4q^2$  — доход (выручка) от продажи, а  $C(q) = q^2 - 6q + 24$  — затраты на выпуск продукта в зависимости от количества  $q$ . Найдём такую величину налога  $t$  на каждую единицу продукта, чтобы налог  $T = tq$  от всей реализуемой продукции был максимальным, и весь налоговый сбор. Как уменьшится количество выпускаемой продукции?

*Решение*

Найдём сначала объем производства без учета дополнительного налога. Так как  $\Pi_0(q) = -5q^2 + 60q - 24$ , то из условия  $\Pi'_0(q) = -10q + 60 = 0$  находим, что максимум прибыли достигается при объеме производства  $q_0 = 6$ .



Из-за введения дополнительного налога доход производителя уменьшится на величину  $T$  и составит  $R^{(T)}(q) = 54q - 4q^2 - tq$ , а его прибыль

$$\Pi(q) = R^{(T)}(q) - C(q) = -5q^2 + 60q - tq - 24.$$

В результате компания исходит из того, чтобы при реализации товара получить максимальную прибыль. Решая уравнение  $\Pi'(q) = 0$ , находим

$$60 - 10q - t = 0, \text{ т.е. } q = 6 - t/10.$$

Общая налоговая выплата будет составлять  $T = tq = 6t - t^2/10$ . Вычислим теперь максимум функции  $T = T(t)$ . Из условия  $T'(t) = 0$  следует, что  $6 - t/5 = 0$ , т.е.  $t = 30$ . Легко видеть, что точка  $t = 30$  является точкой максимума функции  $T(t)$ . При этом весь налоговый сбор  $T(30) = 6 \cdot 30 - 30^2/10 = 90$  и объем производства равен  $q = 6 - 30/10 = 3$ . Таким образом, введение дополнительного налога уменьшает объем производства в два раза (с 6 до 3 единиц продукции).

Отметим, что дифференциальное и интегральное исчисление широко применяется в теории функциональных рядов.

### Задания для самостоятельной работы

4.1. Найдите производные функций, пользуясь определением производной:

а)  $y = 7 - x^2$ ; б)  $y = (4x + 1)^2$ ; в)  $y = \sqrt{1 + x^2}$ .

4.2. Найдите производные следующих функций:

1)  $y = 1 - x^3$ ; 2)  $y = \frac{x+3}{x}$ ; 3)  $y = 3\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + 5$ ; 4)  $y = \frac{2x+1}{5}$ ;

5)  $y = (x^3 + 3)(4x^2 - 6)$ ; 6)  $y = \frac{x^3 - 3}{5 - x^2}$ ; 7)  $y = \frac{(4x^2 + 5)^3}{2x - 3}$ ; 8)  $y = \sqrt[3]{7x^2 - 6}$ ;

9)  $y = \frac{5}{\sqrt{x^2 + 4}}$ ; 10)  $y = \sin^3 x$ ; 11)  $y = \cos^2 \frac{x}{2}$ ; 12)  $y = x^2 \cos x$ ;

13)  $y = (x^2 - 2)\sin x + 2x \cos x$ ; 14)  $y = \ln \sqrt[5]{\frac{x}{x+6}}$ ; 15)  $y = \ln \frac{\sqrt{x^2 + 1} - x}{\sqrt{x^2 + 1} + x}$ ;

16)  $y = \operatorname{arctg} \frac{a}{x} + \ln \sqrt{\frac{x-a}{x+a}}$ ; 17)  $y = \frac{(1+x^2)\operatorname{arctg} x - x}{2}$ ; 18)  $y = \ln \arcsin \sqrt{1 - e^{2x}}$ .

4.3. Напишите уравнение касательной к кривой  $y = x^2$  в точке  $A(3; 9)$ .

4.4. Найдите угловой коэффициент касательной к кривой  $y = 5 - 3x^2$  в точке с абсциссой  $x = -2$ .

4.5. Напишите уравнение нормали к окружности  $x^2 + y^2 = 25$  в точке  $A(3; -4)$ .

4.6. Некоторая величина изменяется по закону  $s = 1,5d^2 + 2d + 12$ . Найдите скорость изменения величины при  $d = 2$ .

4.7. Найдите дифференциал следующих функций:

а)  $y = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$ ; б)  $y = \sqrt{1 + \sin^2 x}$ ; в)  $y = \sqrt[3]{(2 + \cos x)^2}$ .

4.8. Найдите указанные производные высших порядков для следующих функций:

а)  $y = x^5 - 3x^4 + x^3 - 5x^2 + x - 1$ ,  $y''$ ;

б)  $y = x^3 + 3x^2 + 1$ ,  $y'''$ ;

в)  $y = e^{2x}$ ,  $y^V$ ;



- г)  $y = e^{\cos x}$ ,  $y''$ ;  
 д)  $y = \operatorname{arctg} x$ ,  $y''$ .

4.9. Используя правило Лопиталя, найдите пределы:

- а)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\sin 10x}$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos 3x}{\cos x}$ ; в)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1}$ ; г)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x}$ ;  
 д)  $\lim_{x \rightarrow 3} \left( \frac{1}{x-3} - \frac{6}{x-9} \right)$ ; е)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x}$ ; ж)  $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$ ; з)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 + 1)^{\frac{1}{x}}$ .

4.10. Найдите интервалы возрастания и убывания функций:

- а)  $y = 3x - x^3$ ; б)  $y = \frac{2}{3}x^3 - 2x + 1$ ; в)  $y = 3x + \frac{3}{x} + 5$ .

4.11. Исследуйте на экстремум функции:

- а)  $y = 2x^2 - 8$ ; б)  $y = x^3 - 9x^2 + 15x - 3$ ; в)  $y = \frac{x}{x^2 + 4}$ ; г)  $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6x + 7$ ;  
 д)  $y = x \ln x$ .

4.12. Найдите наибольшее и наименьшее значения функций:

- а)  $y = x^4 - 8x^2 + 3$  на отрезке  $[-2; 2]$ ;

- б)  $y = \frac{1}{x^2 - 1}$  на отрезке  $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$ .

4.13. Найдите точки перегиба и интервалы выпуклости и вогнутости следующих функций:

- а)  $y = \sqrt[3]{x-1}$ ; б)  $y = -x^3 + 15x^2 - x - 250$ ; в)  $y = \frac{x^2 + 1}{x}$ .

4.14. Исследуйте функции и постройте их графики:

- а)  $y = 2x^3 - 12x^2 + 18x$ ; б)  $y = \frac{x}{x^2 + 16}$ ; в)  $y = e^{-\frac{x^2}{4}}$ .

4.15. Найдите положительное число  $x$ , чтобы разность  $x - x^2$  была наименьшей.

4.16. Разложите число 20 на два положительных слагаемых так, чтобы их произведение было наибольшим.

4.17. Найдите число, которое в сумме со своим квадратом дает этой сумме наименьшее значение.

4.18. Вычислите интегралы от дробно-рациональных функций:

- а)  $\int \frac{x}{x+2} dx$ ; б)  $\int \frac{dx}{(x+1)^2}$ ; в)  $\int \frac{dx}{x^2 + 2x + 3}$ ;  
 г)  $\int \frac{dx}{x^2 - 6x + 5}$ ; д)  $\int \frac{dx}{(x-2)(x-3)}$ ; е)  $\int \frac{dx}{(x^2 + 1)^2}$ .

4.19. Непосредственным интегрированием или методом замены переменной вычислите интегралы:

- а)  $\int x^6 dx$ ; б)  $\int \sqrt[3]{x} dx$ ; в)  $\int \frac{dx}{x^5}$ ; г)  $\int (x - x^3) dx$ ; д)  $\int (x^5 - 4x^3 + x - 1) dx$ ;  
 е)  $\int (2x - 3\sqrt{x}) dx$ ; ж)  $\int \left( \frac{x^4}{4} + \frac{4}{x^4} \right) dx$ ; з)  $\int (5 + \sqrt{x})^2 dx$ ; и)  $\int \frac{dx}{x^2 + 16}$ ;  
 к)  $\int (e^x - e^{-x})^2 dx$ .

4.20. Вычислите, используя метод интегрирования по частям:

- а)  $\int x e^{2x} dx$ ; б)  $\int x \sin x dx$ ; в)  $\int \arcsin x dx$ ; г)  $\int x \ln x dx$ ; д)  $\int 2x \operatorname{arctg} x dx$ ;



е)  $\int \frac{\ln x}{x^2} dx$ ; ж)  $\int \frac{x}{\sin^2 x} dx$ ; з)  $\int x^3 e^x dx$ ; и)  $\int x \cos 2x dx$ ; к)  $\int \operatorname{arctg} 3x dx$ .

4.21. Найдите интегралы от иррациональных функций:

а)  $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$ ; б)  $\int \frac{\sqrt{x+4}}{x} dx$ ; в)  $\int \frac{1-\sqrt{x}}{x-2\sqrt{x}} dx$ ; г)  $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+10}}$ ;

д)  $\int \frac{x-2}{\sqrt{x^2-10x+29}} dx$ ; е)  $\int \sqrt{1-x^2} dx$ .

4.22. Вычислите определенный интеграл:

а)  $\int_0^1 x^5 dx$ ; б)  $\int_{-1}^0 e^{-2x} dx$ ; в)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 4x dx$ ; г)  $\int_1^2 \frac{dx}{x}$ ; д)  $\int_1^4 \sqrt{x} dx$ .

4.23. Вычислите интегралы от следующих тригонометрических функций:

а)  $\int (1-\sin^2 x) dx$ ; б)  $\int (1-\cos^2 x) dx$ ; в)  $\int \sin 2x \cdot \cos 2x dx$ ; г)  $\int \cos 3x \cdot \cos \frac{4}{3} x dx$ ;  
д)  $\int \sin^5 x dx$ ; е)  $\int \sin^3 x \cdot \cos^2 x dx$ ; ж)  $\int \sin^2 x \cdot \cos^4 x dx$ ; з)  $\int \frac{1+\sin x}{(1+\cos x)\sin x} dx$ .

4.24. Найдите площадь плоской фигуры, ограниченной параболой  $y = x^2 + 1$ , осью  $Ox$  и прямыми  $x = 2, x = 5$ .

4.25. Найдите площадь плоской фигуры, ограниченной линиями  $y = \ln x, y = 0, x = 1, x = e$ .

4.26. Найдите площадь плоской фигуры, ограниченной графиками функций  $y^2 = x^3, x = 4$ .

4.27. Вычислите несобственные интегралы или установите их расходимость:

а)  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^4} dx$ ; б)  $\int_0^{+\infty} e^{-5x} dx$ ; в)  $\int_e^{+\infty} \frac{1}{x \ln^3 x} dx$ ;  
г)  $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+9} dx$ ; д)  $\int_1^{+\infty} \frac{x+5}{x^3 \sqrt{x}} dx$ ; е)  $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx$ .

4.28. Найдите эластичность спроса при цене  $p = 4$ , если  $D(p) = 28 - p^2$ . Эластичен ли спрос при данной цене?

4.29. Исследуйте зависимость между эластичностью спроса и доходом от продажи товара, если функция спроса  $D(p) = 16 - p$ . Пусть функция общих издержек  $TC = p^2 + 10p + 18$ , а функция общей выручки  $TR = 21p$ . Найдите множество безубыточности. При каких ценах производство убыточно?

4.30. Пусть функция спроса имеет вид  $D(p) = 180 - 0,4p$ , а функция предложения  $S(p) = 100 + 0,4p$ . Найдите эластичность спроса в точке рыночного равновесия.

4.31. Пусть функция спроса задана функцией  $D(p) = 215 - 3p - 3p^2$ , а функция предложения равна  $S(p) = 2p^2 + 2p + 115$ . Найдите равновесную цену и количество проданного товара.

4.32. Найдите изменение равновесной цены при введении дополнительного налога  $t$  на единицу продукции, если  $D(p) = 42 - 4p, S(p) = 6p - 2$  — функция полных затрат на производство  $q$  единиц товара,  $R(q) = 500q - q$  — функция дохода от продажи. Найдите максимум прибыли.

4.33. Функция спроса задана в виде  $p = 15 - 0,004q$ , фиксированные издержки равны  $FC = 50$  и переменные издержки  $VC = 6q + 0,02q^2$ . Найдите максимальную прибыль, точку безубыточности, предельные издержки и доход.



**4.34.** Пусть  $R(q) = 66q - 3q^2$  — доход (выручка) от продажи, а  $C(q) = q^2 - 6q + 14$  — затраты на выпуск продукта в зависимости от количества  $q$ . Найти такую величину налога  $t$  на каждую единицу продукта, чтобы налог  $T = tq$  от всей реализуемой продукции был максимальным, и весь налоговый сбор. Как уменьшится количество выпускаемой продукции?



## Глава 5

# ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ, ЧИСЛОВЫЕ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ

---

В результате изучения главы 5 студент должен:

**знать**

- основные базовые понятия и определения теории функций нескольких переменных и теории рядов;
- основные свойства числовых и функциональных рядов;
- методы асимптотического и экстремального анализа функций и последовательностей;

**уметь**

- применять методы математического анализа для решения экономических и управленческих задач;
- строить математические модели основных систем и процессов в экономике и управлении;
- решать задачи, формулируемые в разных разделах математического анализа, и оценивать точность получаемых решений;
- раскладывать функции в ряд;

**владеть**

- техниками поиска экстремума, асимптот функций нескольких переменных;
  - техниками суммирования членов ряда;
  - методикой применения теории функций нескольких переменных для оценки состояния и прогноза развития экономических явлений и процессов;
  - навыками применения теории числовых и функциональных рядов для решения экономических и управленческих задач.
- 

### 5.1. Функции нескольких переменных

#### 5.1.1. Понятие функции нескольких переменных.

##### Предел и непрерывность

Известна формула для вычисления объема цилиндра  $V = \pi R^2 h$ .

Введем обозначения:  $V = z$ ,  $R = x$ ,  $h = y$ , тогда получим выражение  $z = \pi x^2 y$ . В результате объем цилиндра есть функция  $z$  двух независимых переменных (аргументов) — радиуса основания  $x$  и высоты  $h$ .

Функции от нескольких переменных возникают при описании экономических процессов и будут рассмотрены ниже.

**Определение 5.1.** Если каждой точке  $M(x, y)$  из некоторого множества  $U \subset (xOy)$  (или, что то же самое, множества  $U \subset \mathbf{R}^2$ ) ставится в соответствие единственное число  $z \in \mathbf{R}$ , то говорят, что на множестве задана функция, и пишут  $z = f(M)$  или  $z = f(x, y)$ .



Здесь  $x, y$  — координаты точки  $M$ , они называются независимыми переменными или аргументами, величина  $z$  называется зависимой переменной,  $f$  означает закон соответствия или функцию,  $U$  — область определения функции,  $Z$  — область значений функции, т.е.  $D(f) = U$  и  $E(f) = Z$ .

### Пример 5.1

Найдем область определения функции  $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ .

*Решение*

Область определения  $D(f) = U$  задается условием  $x^2 + y^2 \leq 1$ , которое определяет единичный круг с центром в начале координат (рис. 5.1).

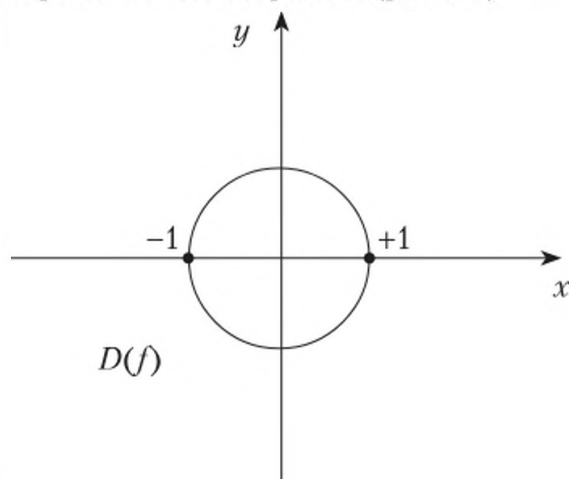


Рис. 5.1. Единичный круг с центром в начале координат

**Определение 5.2.** Множество точек  $M(x, y, z)$  таких, что  $z = f(x, y)$ , называется *графиком функции*  $z = f(x, y)$ .

### Пример 5.2

Построим график функции  $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ .

*Решение*

Возведем в квадрат левую и правую части уравнения, получим  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ;  $z \geq 0$ , что определяет верхнюю полусферу единичного радиуса с центром в начале координат (рис. 5.2).

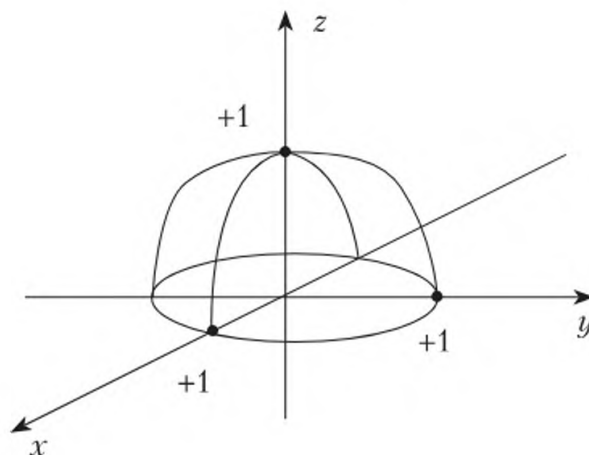


Рис. 5.2. График функции  $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$



На рис. 5.3 в качестве примера приведен график функции Кобба — Дугласа  $Q = \alpha L^\beta K^{1-\beta}$  для  $\alpha = 1,01$  и  $\beta = 0,73$ .

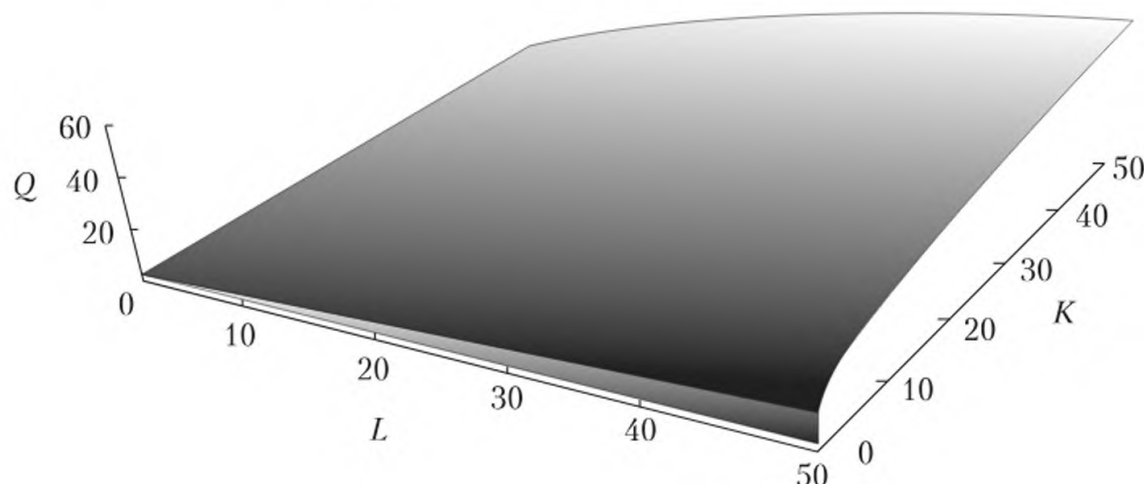


Рис. 5.3. График функции Кобба — Дугласа  $Q = \alpha L^\beta K^{1-\beta}$

**Определение 5.3.** Пусть  $M(x_1, y_1), M(x_2, y_2), \dots, M(x_n, y_n), \dots$  — бесконечная последовательность точек на координатной плоскости ( $xOy$ ) или, что то же самое, на плоскости  $\mathbf{R}^2$ . Говорят, что последовательность точек *сходится* к точке  $M(a, b)$ , если числовая последовательность  $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$  сходится к числу  $a$ , а числовая последовательность  $y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$  сходится к числу  $b$ .

Пусть задана функция  $z = f(x, y)$  на множестве  $U \subset D(f)$ .

**Определение 5.4.** Число  $A$  называется *пределом функции*  $z = f(x, y)$  в точке  $M$ , если для любой сходящейся к  $M$  последовательности точек  $\{M_n\}$  из  $U \subset D(f)$  соответствующая последовательность значений функции  $z_n = f(x_n, y_n)$  сходится к числу  $A$ .

В этом случае пишут  $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} f(x, y) = A$ .

### Пример 5.3

Найдем  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4} - 2}$ .

*Решение*

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4} - 2} &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{(x^2 + y^2)(\sqrt{x^2 + y^2 + 4} + 2)}{x^2 + y^2 + 4 - 2^2} = \\ &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (\sqrt{x^2 + y^2 + 4} + 2) = 4. \end{aligned}$$

**Определение 5.5.** Функция  $z = f(x, y)$ , определенная на множестве  $U = D(f)$ , называется *непрерывной в точке*  $M(a, b)$ , если она определена в этой точке и  $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} f(x, y) = f(a, b)$ .



### Пример 5.4

Определим, является ли функция

$$z = f(x, y) = \begin{cases} (x-1)\sin\frac{1}{y}, & \text{если } y \neq 0, \\ 0, & \text{если } y = 0 \end{cases}$$

непрерывной в точке  $M(1, 0)$ .

*Решение*

Проверим условия непрерывности функции в точке из определения 5.5.

1.  $f(1, 0) = 0$ , так как  $y = 0$  (см. условие задачи).

2.  $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 0}} (x-1)\sin\frac{1}{y} = 0$  как произведение бесконечно малой функции,

поскольку  $(x-1) \rightarrow 0$ , на функцию ограниченную, поскольку  $-1 \leq \sin\frac{1}{y} \leq 1$ . Второе условие выполнено. Следовательно, функция непрерывна.

**Определение 5.6.** Функция  $z = f(x, y)$ , определенная на множестве  $U = D(f)$ , называется *непрерывной*, если она непрерывна в каждой точке  $M(x, y) \in D(f)$ .

#### 5.1.2. Дифференцирование функций нескольких переменных

Пусть задана функция  $z = f(x, y)$ , определенная на множестве  $U = D(f)$ . Зададим приращение  $\Delta x$  аргументу  $x$  так, чтобы  $M(x + \Delta x, y) \in U$ . Запишем приращение функции:

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y).$$

**Определение 5.7.** Если существует конечный предел

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x},$$

то он называется *частной производной функции  $z = f(x, y)$  по аргументу  $x$* .

Обозначение: частную производную по аргументу  $x$  принято обозначать

$$\frac{\partial z}{\partial x}; z'_x; \frac{\partial f}{\partial x}; f'_x(x, y).$$

Аналогичным образом для приращения  $\Delta y$  переменной  $y$  такого, что  $M(x, y + \Delta y) \in U$ , находится приращение функции

$$\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

**Определение 5.8.** Если существует конечный предел

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y},$$

то он называется *частной производной функции  $z = f(x, y)$  по аргументу  $y$* .

Обозначение: частную производную по аргументу  $y$  принято обозначать

$$\frac{\partial z}{\partial y}; z'_y; \frac{\partial f}{\partial y}; f'_y(x, y).$$



**Замечание 5.1.** Каждая частная производная является производной функции одной переменной, т.е.

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = f'_x(x, y), \\ y = \text{const}; \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{\partial z}{\partial y} = f'_y(x, y), \\ x = \text{const}. \end{cases}$$

#### Пример 5.5

Найдем обе частные производные функции  $z = f(x, y) = 5x^3y^2 - x$ .

*Решение*

Считая аргумент  $y$  постоянной величиной, находим  $\frac{\partial z}{\partial x} = 15x^2y^2 - 1$ .

Считая аргумент  $x$  постоянной величиной, находим  $\frac{\partial z}{\partial y} = 10x^3y$ .

#### Пример 5.6

Найдем  $f'_y(0, 0)$ , если

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} & \text{для } x^2 + y^2 \neq 0; \\ 0 & \text{для } x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

*Решение*

Согласно определению частной производной

$$f'_y(0, 0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(0, 0 + \Delta y) - f(0, 0)}{\Delta y}.$$

Здесь  $f(0, 0 + \Delta y) - f(0, 0) = f(0, 0 + \Delta y) = -\frac{(\Delta y)^3}{(\Delta y)^2} = -\Delta y$ , поэтому

$$f'_y(0, 0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(0, 0 + \Delta y) - f(0, 0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{-\Delta y}{\Delta y} = -1.$$

### Частные производные высшего порядка

Частные производные  $\frac{\partial z}{\partial x}$  и  $\frac{\partial z}{\partial y}$  функции  $z = f(x, y)$  по аргументам  $x$  и  $y$  сами являются функциями тех же аргументов  $x$  и  $y$  и в свою очередь могут иметь частные производные.

Обозначение: частная производная второго порядка по аргументу  $x$

$$z''_{xx} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}; \text{ частная производная второго порядка по аргументу } y$$

$$z''_{yy} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}; \text{ смешанная частная производная второго порядка}$$

$$z''_{xy} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}.$$



**Пример 5.7**

Найдем частные производные второго порядка функции  $z = 3x + x^2y^5$ .

*Решение*

Согласно определению 5.8 находим  $z''_{xx} = 2y^5$ ;  $z''_{yy} = 20x^2y^3$ ;  $z''_{xy} = 10xy^4$ ;  $z''_{yx} = 10xy^4$ .

Можно усмотреть, что  $z''_{xy} = z''_{yx}$ .

**Теорема 5.1.** Если смешанные частные производные  $z''_{yx} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$  и  $z''_{xy} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$  — непрерывные функции в некоторой области  $U$ , то в этой области они совпадают, т.е.  $z''_{yx} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = z''_{xy}$ .

**Правило дифференцирования.** Для непрерывной смешанной частной производной порядок дифференцирования не играет роли.

**Дифференциалы функции нескольких переменных.  
Частные дифференциалы функции двух переменных**

Пусть задана функция  $z = f(x, y)$  на множестве  $U \subset D(f)$ .

Выберем какие-либо значения аргументов  $(a, b) \in U$  и зададим им приращения  $\Delta x$  и  $\Delta y$  такие, что  $M(a + \Delta x, b + \Delta y) \subset U$ . Определим частные приращения равенствами

$$\Delta_x z = \Delta_x f(a, b) = f(a + \Delta x, b) - f(a, b);$$

$$\Delta_y z = \Delta_y f(a, b) = f(a, b + \Delta y) - f(a, b).$$

**Определение 5.9.** Частным дифференциалом функции  $z = f(x, y)$  по аргументу  $x$  (соответственно по  $y$ ) называется дифференциал функции одного аргумента  $z = f(x, b)$  (соответственно  $z = f(a, y)$ ).

Обозначения:  $d_x z$  или  $d_x f$  — частный дифференциал по  $x$ ;  $d_y z$  или  $d_y f$  — частный дифференциал по  $y$ .

Согласно определению 5.9 имеем  $d_x z = z'_x \Delta x$  и  $d_y z = z'_y \Delta y$  или  $d_x z = z'_x dx$  и  $d_y z = z'_y dy$ .

**Пример 5.8**

Найдем частные дифференциалы функции  $z = x^2y + y^2x$ .

*Решение*

По определению 5.9  $d_x z = z'_x dx = (2xy + y^2)dx$  и  $d_y z = z'_y dy = (x^2 + 2xy)dy$ .

Поскольку частным дифференциалом функции  $z = f(x, y)$  по любому из двух ее аргументов является дифференциал функции одного аргумента, то каждое из двух частных приращений функции на основании теоремы 4.32 из гл. 4 можно разложить на «главную» и «добавочную» части приращения. А именно, справедлива следующая теорема.



**Теорема 5.2.** Частные дифференциалы функций являются «главными частями» соответствующих частных приращений.

*Доказательство.* Поскольку

$$z'_x = f'_x(a, b) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta x, b) - f(a, b)}{\Delta x},$$

то  $\Delta_x z = \Delta_x f(a, b) = f(a + \Delta x, b) - f(a, b) \approx f'_x(a, b)\Delta x = d_x f(a, b)$ .

Аналогично доказывается, что  $\Delta_y f(a, b) \approx d_y f(a, b)$ .

### Полный дифференциал функции двух переменных

Пусть задана функция  $z = f(x, y)$  на множестве  $U \subset D(f)$ .

**Определение 5.10.** Полным дифференциалом  $dz$  функции  $z = f(x, y)$  называется сумма ее частных дифференциалов, т.е.  $dz = d_x z + d_y z = z'_x dx + z'_y dy$ .

#### Пример 5.9

Найдем полный дифференциал функции  $z = 3x^2y^2$ .

*Решение*

Согласно определению 5.10  $dz = z'_x dx + z'_y dy = (6xy^2)dx + (6x^2y)dy$ .

**Определение 5.11.** Функция  $z = f(x, y)$  называется дифференцируемой в точке  $M(a, b) \in D(f)$ , если в этой точке она имеет полный дифференциал.

**Теорема 5.3.** Полное приращение функции с относительно малой погрешностью можно заменить ее полным дифференциалом, т.е.

$$\Delta z = \Delta f(a, b) = f(a + \Delta x, b + \Delta y) - f(a, b) \approx df(a, b).$$

Приведенная формула используется для приближенных вычислений.

#### Пример 5.10

Вычислим приближенно  $(0,98)^{2,01}$ .

*Решение*

Зададим:

- 1) функцию  $z = f(x, y) = x^y$ ;
- 2) точку  $M(a, b) = (1, 2)$ ;
- 3) приращения аргументов  $\Delta x = -0,02$  и  $\Delta y = 0,01$ .

Найдем:

- 1) частные производные выбранной функции

$$z'_x = f'_x(x, y) = yx^{y-1}, \quad z'_y = f'_y(x, y) = x^y \ln x;$$

- 2) значения функции и частных производных в выбранной точке

$$z_0 = f(1, 2) = 1^2 = 1; \quad f'_x(1, 2) = 2 \cdot 1 = 2; \quad f'_y(1, 2) = 1^2 \cdot \ln 1 = 0.$$

Применим полученную выше расчетную формулу:

$$f(a + \Delta x, b + \Delta y) \approx f(a, b) + f'_x(a, b)\Delta x + f'_y(a, b)\Delta y,$$

которая в нашем случае даст

$$(0,98)^{2,01} = f(1 - 0,02, 2 + 0,01) \approx f(1, 2) + f'_x(1, 2) \cdot (-0,02) + f'_y(1, 2) \cdot 0,01 = 0,96.$$

При этом калькулятор дает результат  $(0,98)^{2,01} \approx 0,960205$ .



## Производная по направлению

Две точки  $M(x, y)$  и  $M(x + \Delta x, y + \Delta y)$  на координатной плоскости определяют вектор  $\vec{m} = \overrightarrow{MM'}$  ( $\Delta x, \Delta y$ ) (рис. 5.4).

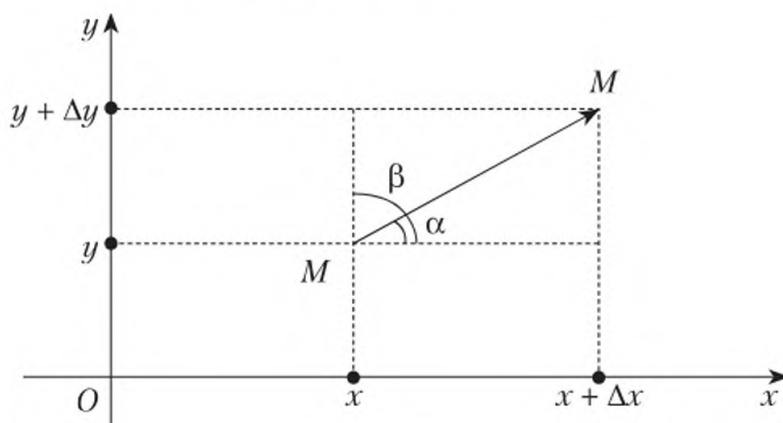


Рис. 5.4. Вектор приращения функции

Обозначим длину вектора  $\vec{m}$  через  $\Delta m = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ , тогда  $\Delta x = \Delta m \cos \alpha$ ,  $\Delta y = \Delta m \cos \beta$ , где  $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta = \cos^2 \alpha + \cos^2 \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$ .

Тогда приращению функции придадим вид

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) = f(x + \Delta m \cos \alpha, y + \Delta m \cos \beta) - f(x, y).$$

Выражение в правой части равенства называется приращением функции  $z = f(x, y)$  по направлению вектора  $\vec{m} = \overrightarrow{MM'}$  и обозначается  $\Delta_m z$ .

**Определение 5.12.** Производной  $z'_m$  по направлению вектора  $\vec{m}$  функции  $z = f(x, y)$  называется предел

$$z'_m = \lim_{\Delta m \rightarrow 0} \frac{\Delta_m z}{\Delta m}.$$

**Теорема 5.4.** Производная  $z'_m$  характеризует скорость изменения функции  $z = f(x, y)$  в направлении вектора  $\vec{m}$ .

**Правило вычисления производной по направлению.**  $z'_m = \cos \alpha z'_x + \cos \beta z'_y$ .

## Градиент функции двух переменных

Пусть задана функция  $z = f(x, y)$  на множестве  $U \subset D(f)$ .

**Определение 5.13.** Вектор с координатами  $(z'_x, z'_y)$  называется *градиентом* функции  $z = f(x, y)$ .

Обозначение:  $\text{grad } z = (z'_x, z'_y)$ .

Пусть  $\vec{m} = (\Delta m \cos \alpha, \Delta m \cos \beta)$  — вектор, определяющий направление дифференцирования функции  $z = f(x, y)$ .

**Определение 5.14.** Ортом вектора  $\vec{m}$  называется вектор единичной длины  $\vec{m}_0 = (\cos \alpha, \cos \beta)$  того же направления, что и вектор  $\vec{m}$ .

Вычислим скалярное произведение векторов  $\text{grad } z$  и  $\vec{m}_0$ .



Способ 1. Как произведение длин векторов на косинус угла между ними:

$$(\operatorname{grad} z, \vec{m}_0) = |\operatorname{grad} z| \cdot |\vec{m}_0| \cos \varphi = |\operatorname{grad} z| \cos \varphi,$$

где  $\varphi$  — угол между векторами  $\operatorname{grad} z$  и  $\vec{m}_0$ .

Способ 2. Как сумма произведений одноименных координат:

$$(\operatorname{grad} z, \vec{m}_0) = z'_x \cos \alpha + z'_y \cos \beta = z'_m.$$

В итоге получаем следующую формулу:

$$z'_m = |\operatorname{grad} z| \cos \varphi.$$

Поскольку  $-1 \leq \cos \varphi \leq 1$ , то при  $\cos \varphi = 1$  скалярное произведение  $(\operatorname{grad} z, \vec{m}_0)$  принимает максимальное значение, т.е. при  $\operatorname{grad} z \uparrow \vec{m}_0$  имеем  $\max \{z'_m\} = |\operatorname{grad} z|$ .

**Теорема 5.5.** Градиент функции указывает направление наискорейшего роста функции, а максимальная скорость роста равна модулю ее градиента.

### Линии уровня функции двух переменных

Пусть задана функция  $z = f(x, y)$  на множестве  $U \subset D(f)$ .

**Определение 5.15.** Совокупность точек координатной плоскости  $xOy$ , в которых функция  $z = f(x, y)$  имеет одинаковые значения, называется *линией уровня* функции.

Линия уровня определяется уравнением  $f(x, y) = C - \text{const}$ .

Различным постоянным значениям функции  $C_1, C_2, \dots, C_n, \dots$  отвечают различные линии уровня:  $f(x, y) = C_1, f(x, y) = C_2, \dots, f(x, y) = C_n, \dots$ .

#### Пример 5.11

Изобразим линии уровня  $z = 1, 2, 3, 4, \dots$  функции  $z = \frac{2y}{x^2}$  на координатной плоскости  $xOy$ .

*Решение*

Для  $z = 1, 2, 3, 4, \dots$  получаем уравнения линий уровня  $2y = x^2, y = x^2, 2y = 3x^2, y = 2x^2, 2y = 5x^2, \dots$ , которые представляют параболы, симметричные относительно оси  $Oy$ , с общей вершиной в начале координат (рис. 5.5).

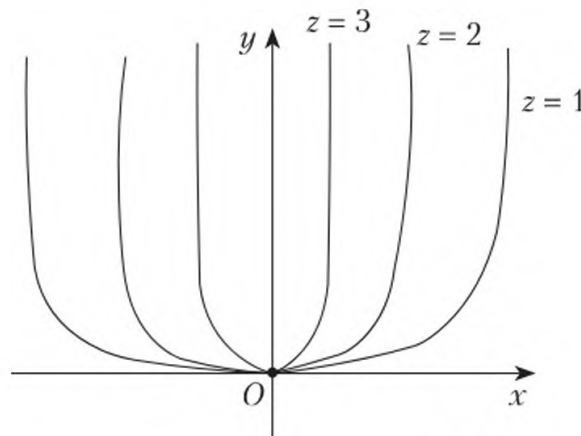


Рис. 5.5. График функции  $z = \frac{2y}{x^2}$



Предположим, что уравнение  $f(x, y) = C$  можно разрешить относительно  $y$ , т.е.  $y = g(x)$ . Тогда касательная к линии уровня в точке  $M(a, b)$  имеет уравнение

$$y - b = g'(a)(x - a).$$

Подставим  $y = g(x)$  в уравнение  $f(x, y) = C$  и продифференцируем его по  $x$ , получим  $f'_x(x, g(x)) + f'_y(x, g(x))g'(x) = 0$ , откуда  $g'(x) = -\frac{f'_x}{f'_y}$ .

Подставим полученное выражение в уравнение касательной, будем иметь

$$f'_x(x - a) + f'_y(y - b) = 0.$$

Это уравнение можно переписать как  $(\text{grad } f, \overrightarrow{M_0 M}) = 0$ , где вектор  $\overrightarrow{M_0 M}$  направлен по касательной (рис. 5.6).

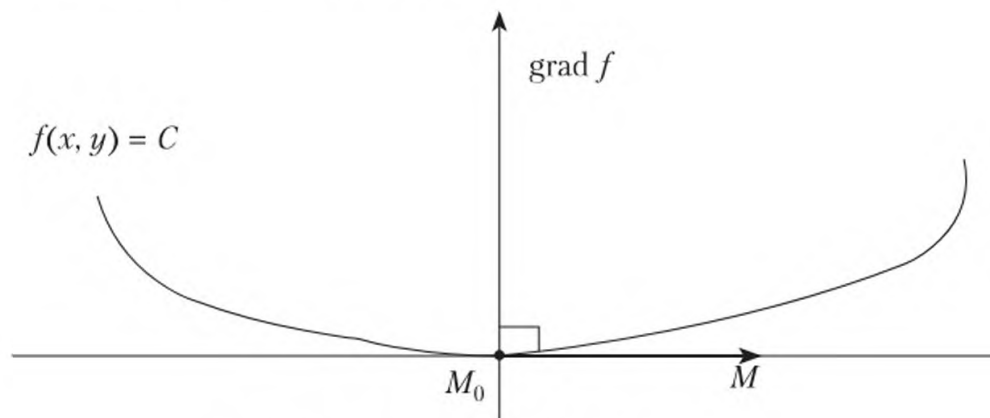


Рис. 5.6. Вектор  $\text{grad } f = \{f'_x, f'_y\}$

В итоге получаем, что вектор  $\text{grad } f = \{f'_x, f'_y\}$  перпендикулярен касательной к линии уровня функции  $z = f(x, y)$ . Таким образом, доказана следующая теорема.

**Теорема 5.6.** Градиент функции  $z = f(x, y)$  в точке  $M(a, b)$  является вектором, перпендикулярным касательной к линии уровня  $f(x, y) = C - \text{const}$ , проходящей через данную точку.

### 5.1.3. Экстремумы функции нескольких переменных

Рассмотрим следующую задачу. Муниципалитет оформляет заказ на строительство металлического ангара, имеющего форму прямоугольного параллелепипеда. Требуется рассчитать его размеры так, чтобы при заданном объеме  $32 \text{ м}^3$  на его строительство ушло минимальное количество материала (рис. 5.7).

Математическая формулировка задачи.

Обозначим через  $x$  и  $y$  размеры основания, тогда высота ангара, или, иначе, высота параллелепипеда,  $h$  будет вычисляться из равенства  $32 = xyh$ , т.е.  $h = \frac{32}{xy}$ . Составим функцию  $z = f(x, y)$  площади  $S$  поверхности ангара:



$$z = xy + 2y \frac{32}{xy} + 2x \frac{32}{xy} = xy + 64 \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right).$$

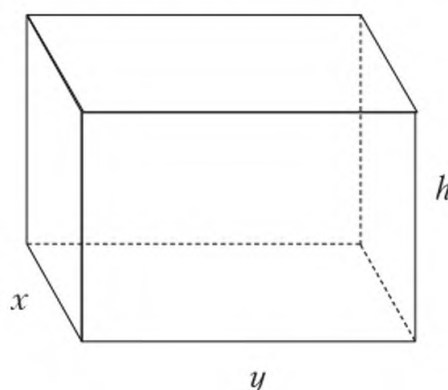


Рис. 5.7. К задаче о строительстве ангара

Можно предположить, что существуют такие значения  $a$  и  $b$  независимых переменных  $x$  и  $y$ , при которых  $S$  достигает наименьшего значения, т.е.  $z_{\min} = f(a, b)$ . Задача состоит в том, чтобы найти такие точки  $M(a, b)$ .

### Необходимое и достаточное условие экстремума

Пусть функция  $z = f(x, y)$  определена в некоторой  $\varepsilon$ -окрестности точки  $M(a, b)$ .

Функция  $z = f(x, y)$  имеет в точке  $M(a, b)$  локальный максимум (минимум), если для всех точек  $M(x, y)$  из  $\varepsilon$ -окрестности точки  $M(a, b)$  выполняется неравенство  $f(a, b) \geq f(x, y)$  (соответственно  $f(a, b) \leq f(x, y)$ ).

#### Пример 5.12

Поверхность, задаваемая уравнением  $z = x^2 + y^2$ , называется параболоидом и получается за счет вращения параболы  $z = x^2$  вокруг оси  $Oz$ . Для любой точки  $M(x, y)$  из открытого круга радиуса  $\varepsilon$  ( $\varepsilon$ -окрестности) с центром в точке  $O(0, 0)$  выполняется неравенство  $z = x^2 + y^2 \geq 0$ . Это означает, что  $O(0, 0)$  — точка локального минимума функции  $z = x^2 + y^2$  (рис. 5.8).

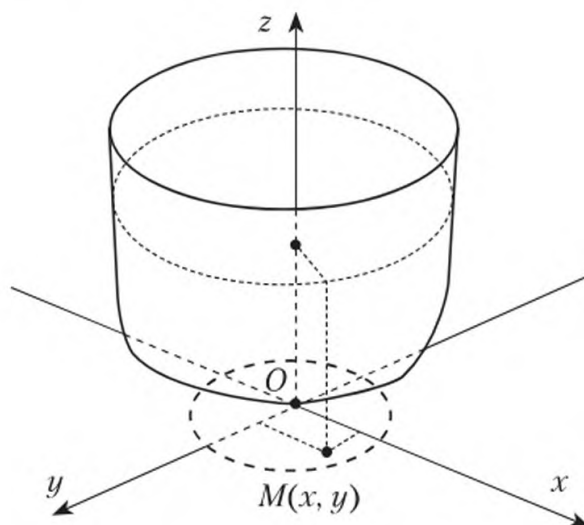


Рис. 5.8. Поверхность  $z = x^2 + y^2$



**Замечание 5.2.** Локальные максимумы и минимумы функции называются экстремальными значениями функции или, короче, экстремумами функции.

**Теорема 5.7.** Если дифференцируемая функция  $z = f(x, y)$  имеет локальный экстремум в точке  $M(a, b)$ , то ее частные производные первого порядка в этой точке обращаются в нуль.

Для параболоида  $z = x^2 + y^2$  точка  $O(0, 0)$  является точкой локального минимума. В этой точке

$$z'_x \Big|_{\substack{x=0 \\ y=0}} = 0 \text{ и } z'_y \Big|_{\substack{x=0 \\ y=0}} = 0.$$

**Доказательство** теоремы. Пусть для определенности  $M(a, b)$  — точка локального максимума функции  $z = f(x, y)$ . Полагая  $y = b$ , мы определим функцию одного аргумента  $z_1 = f(x, b) = f_1(x)$ , которая будет иметь максимум в точке  $x = a$ . Согласно теореме 4.18 (Ферма) это означает, что

$$f'_x(a, b) = \frac{\partial f_1}{\partial x} \Big|_{x=a} = 0.$$

Аналогичным образом доказывается, что

$$f'_y(a, b) = \frac{\partial f_2}{\partial y} \Big|_{y=b} = 0$$

для  $z_2 = f(a, y) = f_2(y)$ .

Рассмотрим функцию вида  $z = x^2 - y^2$ . График такой функции носит название гиперболического параболоида (рис. 5.9).

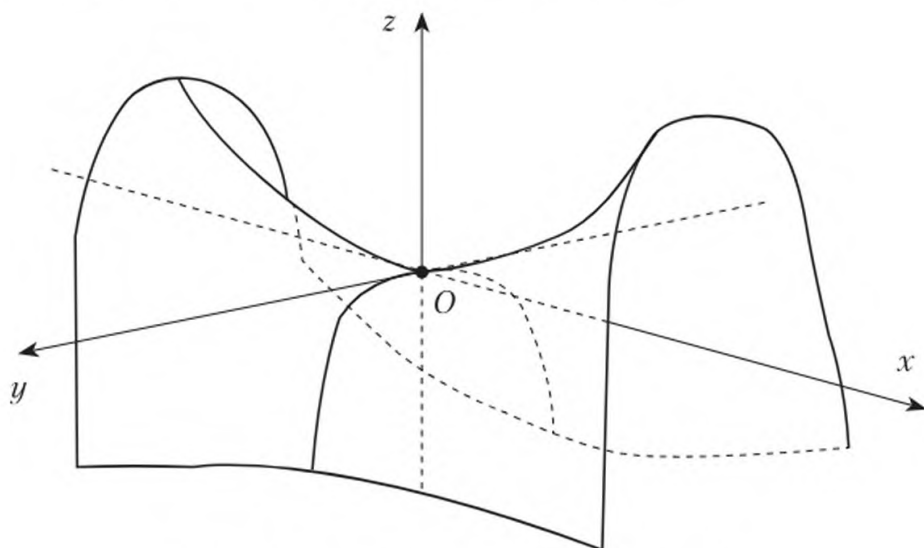


Рис. 5.9. График функции  $z = x^2 - y^2$

При  $x = 0$  имеем  $z = -y^2$  и  $z'_y = -2y$ , тогда  $z'_y < 0$ , если  $y > 0$ ,  $z'_y > 0$ , если  $y < 0$ , и  $z'_y \Big|_{\substack{x=0 \\ y=0}} = 0$ . Следовательно, точка  $O(0, 0)$  — точка максимума параболы  $z = -y^2$ .



При  $y = 0$  имеем  $z = x^2$  и  $z'_x = 2x$ , тогда  $z'_x < 0$ , если  $x < 0$ ,  $z'_x > 0$ , если  $x > 0$ , и  $z'_x \Big|_{\substack{x=0 \\ y=0}} = 0$ . Следовательно, точка  $O(0, 0)$  — точка минимума параболы  $z = x^2$ .

**Вывод.** Равенство нулю частных производных функции  $z = f(x, y)$  в точке не гарантирует наличия в этой точке локального максимума или минимума.

**Определение 5.16.** Точка  $M(a, b)$ , в которой выполнены условия  $z'_x \Big|_{\substack{x=a \\ y=b}} = 0$  и  $z'_y \Big|_{\substack{x=a \\ y=b}} = 0$ , называется *критической* или *стационарной точкой* функции  $z = f(x, y)$ .

**Теорема 5.8.** Пусть функция  $z = f(x, y)$  удовлетворяет следующим условиям:

- 1) определена в  $\varepsilon$ -окрестности критической точки  $M(a, b)$ , в которой  $z'_x \Big|_{\substack{x=a \\ y=b}} = 0$  и  $z'_y \Big|_{\substack{x=a \\ y=b}} = 0$ ;
- 2) имеет в этой точке непрерывные частные производные второго порядка:

$$z''_{xx} \Big|_{\substack{x=a \\ y=b}} = A, z''_{xy} \Big|_{\substack{x=a \\ y=b}} = B, z''_{yy} \Big|_{\substack{x=a \\ y=b}} = C.$$

Тогда:

- 1) если  $\Delta = AC - B^2 > 0$ , то функция имеет экстремум в точке  $M(a, b)$  — при  $A < 0$  максимум, при  $A > 0$  минимум;
- 2) если  $\Delta = AC - B^2 < 0$ , то функция не имеет экстремума в точке  $M(a, b)$ ;
- 3) если  $\Delta = AC - B^2 = 0$ , то вопрос об экстремуме в точке  $M(a, b)$  остается открытым.

Для параболоида  $z = x^2 + y^2$  точка  $O(0, 0)$  является критической точкой. В этой точке

$$z''_{xx} \Big|_{\substack{x=0 \\ y=0}} = 2; z''_{xy} \Big|_{\substack{x=0 \\ y=0}} = 0; z''_{yy} \Big|_{\substack{x=0 \\ y=0}} = 2,$$

следовательно,  $\Delta = AC - B^2 = 4 > 0$  и  $A = 2 > 0$ . Таким образом,  $O(0, 0)$  — точка локального минимума.

Для гиперболического параболоида  $z = x^2 - y^2$  точка  $O(0, 0)$  является критической точкой. В этой точке

$$z''_{xx} \Big|_{\substack{x=0 \\ y=0}} = 2; z''_{xy} \Big|_{\substack{x=0 \\ y=0}} = 0; z''_{yy} \Big|_{\substack{x=0 \\ y=0}} = -2,$$

следовательно,  $\Delta = AC - B^2 = -4 < 0$ . Таким образом,  $O(0, 0)$  не является точкой экстремума.

### Схема исследования функции на экстремум

Схема исследования функции на экстремум состоит из следующих этапов.



1. Найти частные производные  $z'_x$  и  $z'_y$  функции  $z = f(x, y)$ .
2. Решить систему уравнений  $z'_x = 0$  и  $z'_y = 0$  и найти критические точки.
3. Найти частные производные  $z''_{xx}, z''_{xy}, z''_{yy}$  функции  $z = f(x, y)$ , вычислить их значения в критических точках и с помощью теоремы 5.8 сделать вывод о наличии экстремумов.
4. Найти экстремальные значения  $z_{\max}$  и  $z_{\min}$  функции  $z = f(x, y)$ .

### Пример 5.13

Проведем исследование функции  $z = f(x, y)$  площади  $S$  поверхности ангара

$$z = xy + 64\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right).$$

*Решение*

Исследование проведем согласно указанной схеме.

1. Найдем частные производные:  $z'_x = y - \frac{64}{x^2}$ ;  $z'_y = x - \frac{64}{y^2}$ .
2. Найдем критические точки:

$$\begin{cases} y - \frac{64}{x^2} = 0, \\ x - \frac{64}{y^2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4, \\ y = 4 \end{cases} \Rightarrow h = \frac{32}{xy} = 2.$$

3. Найдем частные производные второго порядка:  $z''_{xx} = \frac{128}{x^3}$ ,  $z''_{xy} = 1$ ,  $z''_{yy} = \frac{128}{y^3}$ .

Воспользуемся теоремой 5.8:  $A = z''_{xx} = \frac{128}{4^3} = 2$ ,  $B = z''_{xy} = 1$ ,  $C = z''_{yy} = \frac{128}{4^3} = 2$ , следовательно,  $\Delta = AC - B^2 = 3 > 0$  и  $A = 2 > 0$ . Согласно теореме 5.8 в точке  $(4, 4)$  функция имеет минимум.

4. Найдем экстремальные значения функции:  $z_{\min} = z(4, 4) = 4 \cdot 4 + 64\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) = 48 \text{ (м}^2\text{)}.$

Ответ:  $x = 4$ ,  $y = 4$ ,  $h = 2$ ,  $S_{\min} = 48 \text{ м}^2$ .

### Абсолютный экстремум функции двух переменных

Пусть  $U$  — область на координатной плоскости  $xOy$ .

**Определение 5.17.** Точка  $M$  называется *внутренней точкой области*  $U$ , если она лежит в этой области вместе с некоторой  $\varepsilon$ -окрестностью (рис. 5.10).

**Определение 5.18.** Точка  $M$  называется *граничной точкой области*  $U$ , если любая ее  $\varepsilon$ -окрестность содержит как точки области  $U$ , так и точки, ей не принадлежащие (рис. 5.11).

**Определение 5.19.** Область  $U$  называется *замкнутой*, если ей принадлежат все ее граничные точки (рис. 5.12).

**Определение 5.20.** Область  $U$  называется *ограниченной*, если она содержится внутри круга некоторого радиуса  $R$  (пусть даже достаточно большого) (рис. 5.13).



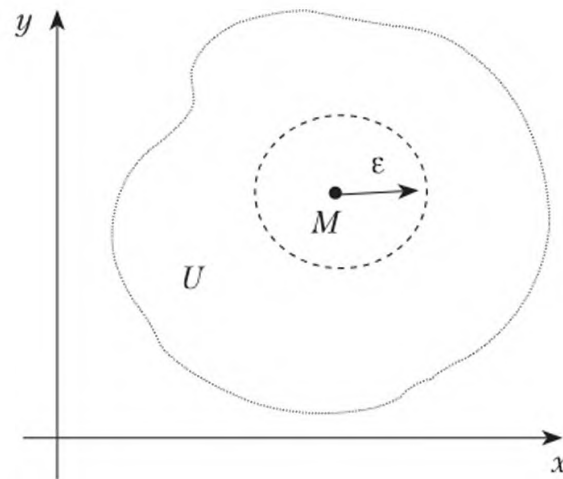


Рис. 5.10. Внутренняя точка области  $U$

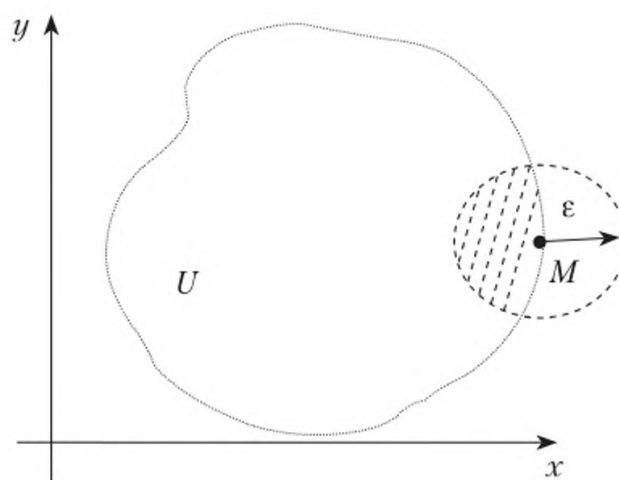


Рис. 5.11. Граничная точка области  $U$

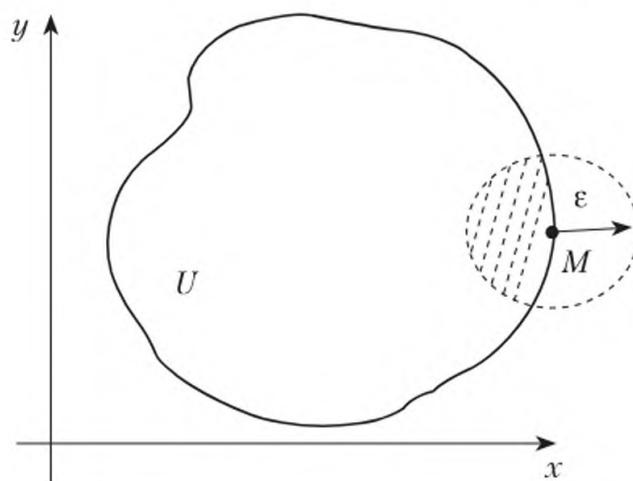


Рис. 5.12. Замкнутая область  $U$

Пусть для функции  $z = f(x, y)$  замкнутая область  $U \subset D(f)$ .

**Определение 5.21.** Наименьшее (наибольшее) значение функции  $z = f(x, y)$  в замкнутой области  $U$  называется *абсолютным экстремумом* функции в этой области.



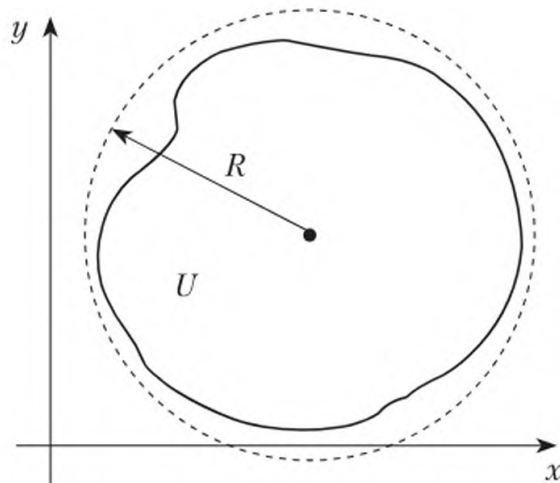


Рис. 5.13. Ограниченная область  $U$

**Теорема 5.9 (Вейерштрасса).** Если функция  $z = f(x, y)$  непрерывна в ограниченной и замкнутой области  $U$  координатной плоскости  $xOy$ , то она достигает в этой области своего наименьшего и наибольшего значений.

*Замечание 5.3.* Функция может достигать своего экстремума не только внутри области, но и на ее границе.

#### Пример 5.14

Найдем наибольшее и наименьшее значения функции  $z = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2}$  в круге радиуса 1 с центром в начале координат.

*Анализ*

1. Задана замкнутая и ограниченная область  $U: x^2 + y^2 \leq 1$ .
2. Задана в области непрерывная функция двух аргументов  $z = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2}$ .
3. По теореме Вейерштрасса функция должна достигать в этой области своего наименьшего и наибольшего значений.

*Решение*

1. Найдем частные производные функции:  $z'_x = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$ ,  $z'_y = -\frac{2y}{(1+y^2)^2}$ .
2. Найдем критические точки функции внутри области:

$$\begin{cases} z'_x = 0, \\ z'_y = 0 \end{cases} \Rightarrow M(0, 0) \text{ — внутренняя критическая точка.}$$

3. Найдем критические точки функции на границе области.

Найдем выражение функции  $z$  на границе области. Граница области — окружность  $x^2 + y^2 = 1$ . Найдем  $y^2 = 1 - x^2$ , где  $-1 \leq x \leq 1$ , и подставим в функцию  $z$ . Тогда получим функцию одной переменной

$$z = \bar{f}(x) = \frac{3}{2+x^2-x^4},$$

где  $-1 \leq x \leq 1$ . Найдем критические точки функции  $z = \bar{f}(x)$ :

$$z'_x = \frac{-6x(2x^2-1)}{(2+x^2-x^4)^2} = 0 \Rightarrow x_1 = 0; x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}; x_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$



4. Найдем значения функции в критических точках.

$$\text{На границе области: } z_1 = \bar{f}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{4}{3}; \quad z_2 = \bar{f}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{4}{3}.$$

$$\text{Внутри области: } z = f(0, 0) = 2.$$

**Вывод.** Наибольшего значения (абсолютный максимум)  $z_{\max} = 2$  функция достигает внутри области в точке  $M_1(0, 0)$ .

Наименьшего значения (абсолютный минимум)  $z_{\min} = \frac{4}{3}$  функция достигает на границе области в точках  $M_2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$  и  $M_3\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$  (рис. 5.14).

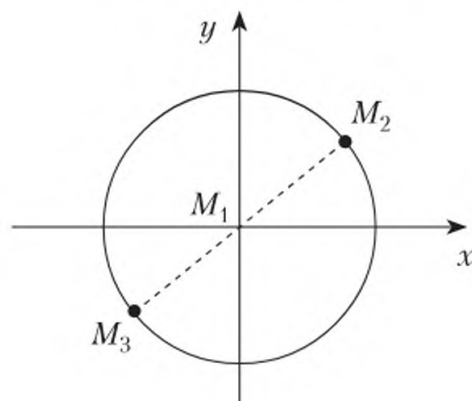


Рис. 5.14. Абсолютный минимум и максимум функции к примеру 5.14

### Условный экстремум

Пусть задана функция  $z = f(x, y)$  в области  $U$  координатной плоскости  $xOy$ . Пусть, кроме того, задано уравнение связи  $g(x, y) = C, C = \text{const}$ .

**Определение 5.22.** Точка  $M(a, b)$  называется *точкой условного максимума (минимума)*, если существует такая  $\varepsilon$ -окрестность этой точки, что для всех точек  $M(x, y)$  из этой окрестности, удовлетворяющих условию  $g(x, y) = C, C = \text{const}$ , выполняется неравенство  $f(a, b) \geq f(x, y)$  (или соответственно  $f(a, b) \leq f(x, y)$ ).

#### Пример 5.15

Найдем условный экстремум функции  $z = x^2 + y^2$  при условии, что  $x + y = 1$ .

**Решение**

1. Выразим из уравнения связи  $y = 1 - x$  и подставим в функцию  $z$ :

$$z = x^2 + y^2 = x^2 + (1 - x)^2 = 2x^2 - 2x + 1.$$

2. Найдем критические точки функции:  $z'_x = 4x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$ . При этом  $z'_x < 0$

при  $x < \frac{1}{2}$  и  $z'_x > 0$  при  $x > \frac{1}{2}$ , следовательно,  $x = \frac{1}{2}$  — точка локального минимума.

3. Таким образом,  $z = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$  — условный минимум функции  $z = x^2 + y^2$ .



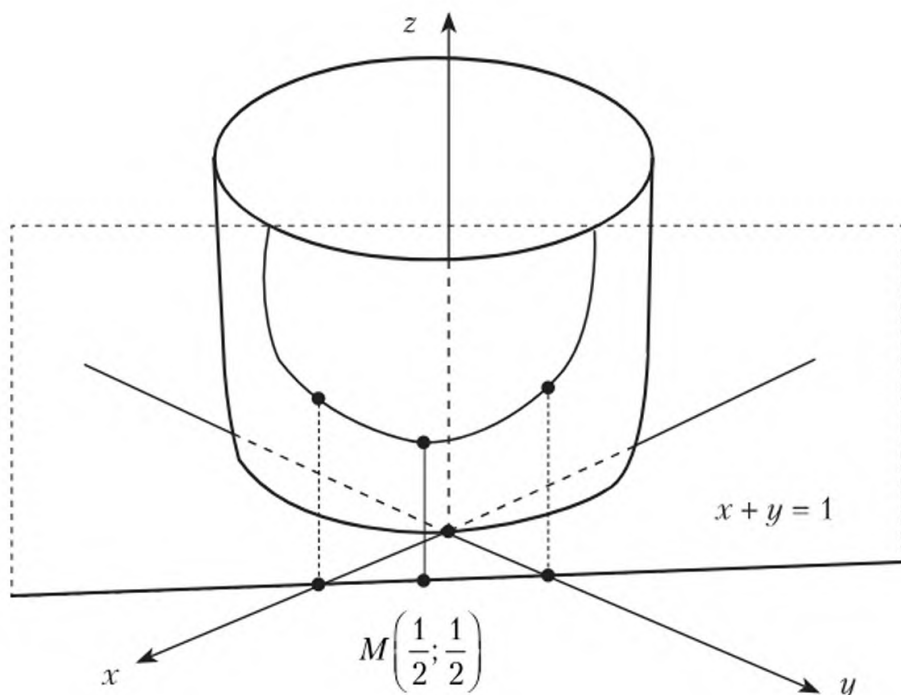


Рис. 5.15. Абсолютный минимум функции к примеру 5.15

Рассмотрим функцию трех переменных  $L(x, y, t) = f(x, y) + t(g(x, y) - C)$ , которую назовем функцией Лагранжа, а множитель  $t$  — множителем Лагранжа.

**Теорема 5.10 (Лагранжа).** Если для функции  $z = f(x, y)$  при условии  $g(x, y) = C, C = \text{const}$  точка  $M(a, b)$  — точка условного экстремума, то существует значение  $t = t_0$  такое, что точка  $(x_0, y_0, t_0)$  является точкой экстремума функции Лагранжа  $L(x, y, t)$ .

**Замечание 5.4.** Согласно теореме для нахождения условного экстремума функции  $z = f(x, y)$  при условии, что  $g(x, y) = C, C = \text{const}$ , надо искать точки  $(x_0, y_0, t_0)$  экстремума функции Лагранжа  $L(x, y, t)$ .

### Алгоритм нахождения условного экстремума

**Шаг 1.** Найти критические точки функции Лагранжа  $L(x, y, t)$  как решение системы уравнений

$$\begin{cases} L'_x = f'_x + tg'_x = 0, \\ L'_y = f'_y + tg'_y = 0, \\ L'_t = g - C = 0. \end{cases}$$

**Шаг 2.** Составить определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & g'_x & g'_y \\ g'_x & L''_{xx} & L''_{xy} \\ g'_y & L''_{yx} & L''_{yy} \end{vmatrix}$$

и вычислить его значения в критических точках.

**Шаг 3.** Сделать вывод о наличии условных экстремумов: если  $\Delta > 0$ , то функция  $z = f(x, y)$  имеет условный максимум; если  $\Delta < 0$ , то — условный минимум.



**Пример 5.16**

Найдем условный экстремум функции  $z = x^2 + y^2$  при условии, что  $x + y = 1$ .

*Решение*

**Шаг 1.** Составим функцию Лагранжа:  $L(x, y, t) = (x^2 + y^2) + t(x + y - 1)$ .

**Шаг 2.** Найдем критические точки функции Лагранжа:

$$\begin{cases} L'_x = 2x + t = 0, \\ L'_y = 2y + t = 0, \\ L'_t = x + y - 1 = 0. \end{cases}$$

Отсюда  $\left(x_0 = \frac{1}{2}, y_0 = \frac{1}{2}, t_0 = -1\right)$  — критическая точка.

**Шаг 3.** Определим вид условного экстремума:

$$g'_x = (x + y)'_x = 1; \quad g'_y = (x + y)'_y = 1; \quad L''_{xx} = 2; \quad L''_{xy} = 0; \quad L''_{yy} = 2,$$

тогда

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -4 < 0.$$

Следовательно, точка  $M_0\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$  — точка условного минимума функции  $z = x^2 + y^2$ .

**Замечание 5.5.** Задача нахождения условного экстремума применяется при нахождении оптимального распределения ресурсов и выборе *оптимального портфеля ценных бумаг*.

#### 5.1.4. Эмпирические формулы и метод наименьших квадратов

##### Задача о сглаживании экспериментальных зависимостей

Пусть зависимость между двумя переменными  $x$  и  $y$  выражается в виде таблицы, полученной опытным путем:

$x$	$x_1$	$x_2$	...	$x_k$	...	$x_n$
$y$	$y_1$	$y_2$	...	$y_k$	...	$y_n$

**Пример 5.17**

Требуется экспериментальную зависимость между переменными  $x$  и  $y$  представить в виде формулы  $y = f(x)$ , наиболее точно отражающей эту зависимость (формулу  $y = f(x)$  при этом называют эмпирической).

**Первый этап решения задачи.** Необходимо установить вид зависимости  $y = f(x)$ , т.е. решить, является ли она линейной, квадратичной, логарифмической, экспоненциальной или какой-либо другой.

Изобразим данные таблицы в виде точек  $M(x_k, y_k)$  координатной плоскости  $xOy$ . Видим, что для описания зависимости подходит линейная функция  $y = ax + b$  и, напротив, логарифмическая функция  $y = \ln x$  не подходит.

**Второй этап решения задачи.** Определяются неизвестные параметры функции  $y = f(x)$ . Для этого рассматриваются два вектора (рис. 5.17):

$\vec{X} = (f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n))$  — вектор теоретических (или расчетных) значений;

$\vec{Y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  — вектор фактических значений (или статистических) значений.



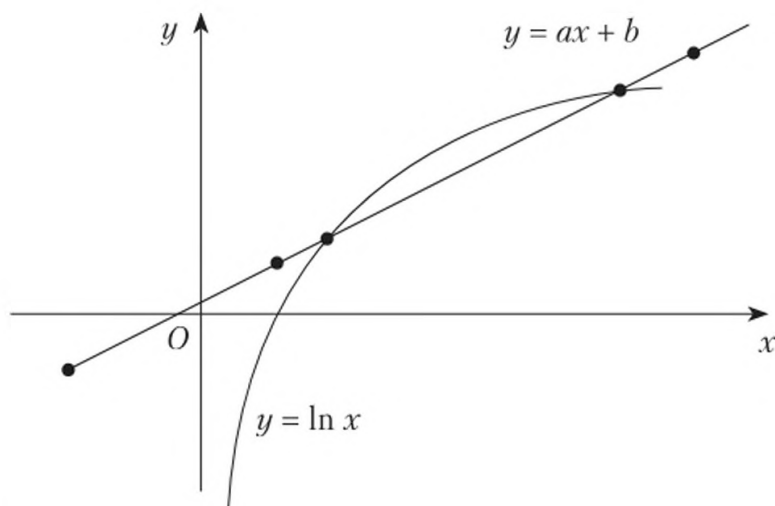


Рис. 5.16. Задача о сглаживании экспериментальных зависимостей

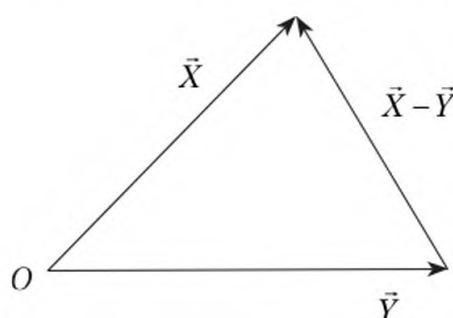


Рис. 5.17. Векторы теоретических и фактических значений

Требуется, чтобы квадрат длины вектора разности  $|\vec{X} - \vec{Y}|^2 \rightarrow \min$ , т.е. чтобы имела минимум функция

$$F = |\vec{X} - \vec{Y}|^2 = (f(x_1) - y_1)^2 + (f(x_2) - y_2)^2 + \dots + (f(x_n) - y_n)^2.$$

### Линейная эмпирическая функция

Выберем в качестве функции  $y = f(x)$  линейную функцию  $y = f(x) = ax + b$ , тогда задача состоит в отыскании таких значений параметров  $a$  и  $b$ , при которых квадратичная функция

$$\begin{aligned} F = |\vec{X} - \vec{Y}|^2 &= (f(x_1) - y_1)^2 + (f(x_2) - y_2)^2 + \dots + (f(x_n) - y_n)^2 = \\ &= (ax_1 + b - y_1)^2 + (ax_2 + b - y_2)^2 + \dots + (ax_n + b - y_n)^2 \end{aligned}$$

принимает наименьшее значение. Здесь  $x_1, x_2, \dots, x_n$  и  $y_1, y_2, \dots, y_n$  — постоянные, найденные экспериментально, поэтому роль неизвестных играют  $a$  и  $b$ , т.е.  $F = F(a, b)$ .

**Первый этап.** Найдем критические точки функции  $F = F(a, b)$ :

$$\begin{cases} F'_a = 2(ax_1 + b - y_1)x_1 + \dots + 2(ax_n + b - y_n)x_n = 0, \\ F'_b = 2(ax_1 + b - y_1) + \dots + 2(ax_n + b - y_n) = 0. \end{cases}$$

Раскроем скобки и произведем перегруппировку слагаемых, система в результате примет следующий вид:



$$\begin{cases} a(x_1^2 + \dots + x_n^2) + b(x_1 + \dots + x_n) - (x_1 y_1 + \dots + x_n y_n) = 0, \\ a(x_1 + \dots + x_n) + nb - (y_1 + \dots + y_n) = 0. \end{cases}$$

Введем обозначения:

$$A = x_1^2 + \dots + x_n^2; \quad B = x_1 + \dots + x_n; \quad C = n;$$

$$D = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n; \quad E = y_1 + \dots + y_n.$$

Получаем компактный вид системы уравнений:

$$\begin{cases} Aa + Bb = D, \\ Ba + Cb = E. \end{cases}$$

Данная система имеет единственное решение, если ее определитель отличен от нуля. Проверим это:

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2 = n(x_1^2 + \dots + x_n^2) - (x_1 + \dots + x_n)^2 > 0.$$

В частности, при  $n = 2$  выполняется

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2 = 2(x_1^2 + x_2^2) - (x_1 + x_2)^2 = \\ &= 2x_1^2 + 2x_2^2 - x_1^2 - 2x_1x_2 - x_2^2 = (x_1 - x_2)^2 > 0. \end{aligned}$$

Решая систему уравнений по методу Крамера, найдем критическую точку функции по формулам

$$a_0 = \frac{\begin{vmatrix} D & B \\ E & C \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}}; \quad b_0 = \frac{\begin{vmatrix} A & D \\ B & E \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}}.$$

**Второй этап.** Проверим, является ли точка  $(a_0, b_0)$  точкой экстремума функции  $F(a, b)$ . Найдем вторые производные:

$$F''_{aa} = (F'_a)'_a = (2Aa + 2Bb - 2D)'_a = 2A;$$

$$F''_{ab} = (F'_a)'_b = (2Aa + 2Bb - 2D)'_b = 2B;$$

$$F''_{bb} = (F'_b)'_b = (2Ba + 2Cb - 2E)'_b = 2C.$$

Воспользуемся теоремой об экстремуме функции двух аргументов:

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} F''_{aa} & F''_{ab} \\ F''_{ba} & F''_{bb} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2A & 2B \\ 2B & 2C \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} > 0; \\ F''_{aa} &= 2A = 2(x_1^2 + \dots + x_n^2) > 0. \end{aligned}$$

Следовательно, в точке  $(a_0, b_0)$  функция  $F = F(a, b)$  достигает своего минимального значения.



### Пример 5.18

Исследуем с помощью метода наименьших квадратов характер изменения цены в рублях швейцарского франка на ММВБ (г. Москва) как наиболее стабильной валюты, например, с 22 апреля (понедельник) по 26 апреля (пятница) в 2013 г. и сделаем прогноз на 29 апреля (понедельник) 2013 г. с помощью построенной линейной эмпирической формулы, а затем сравним его с известным результатом.

Таблица на основе данных ЦБ РФ:

Дата	22.04.2013	23.04.2013	24.04.2013	25.04.2013	26.04.2013
Курс франка	33,7704	33,8187	33,8014	33,4092	33,1185

*Решение*

1. Примем 24.04.2013 за начало отсчета, тогда

X	-2	-1	0	1	2
Y	33,7704	33,8187	33,8014	33,4092	33,1185

2. Подсчитаем коэффициенты  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  и  $E$  согласно приведенным выше формулам:  $A = 10$ ;  $B = 0$ ;  $C = 5$ ;  $D = -1,7133$  и  $E = 167,9182$ .

3. Составим систему уравнений для подсчета координат критической точки:

$$\begin{cases} 10a + 0 \cdot b = -1,7133, \\ 0 \cdot a + 5b = 167,9182. \end{cases}$$

4. Решая систему, находим эмпирическую функцию  $y = -0,1713x + 33,5836$ .

5. Прогнозируемая цена швейцарского франка на 29 апреля 2013 г. соответствует  $x_6 = 3$ , поэтому  $y_6 = 33,0698$  руб. за один швейцарский франк.

*Анализ.* По данным, приведенным Центральным банком РФ, курс франка на 29.04.2013 составил 33,0541 руб. Отсюда следует, что отклонение (погрешность) при прогнозе курса франка линейной функцией составляет 0,0157 руб. (рис. 5.18).

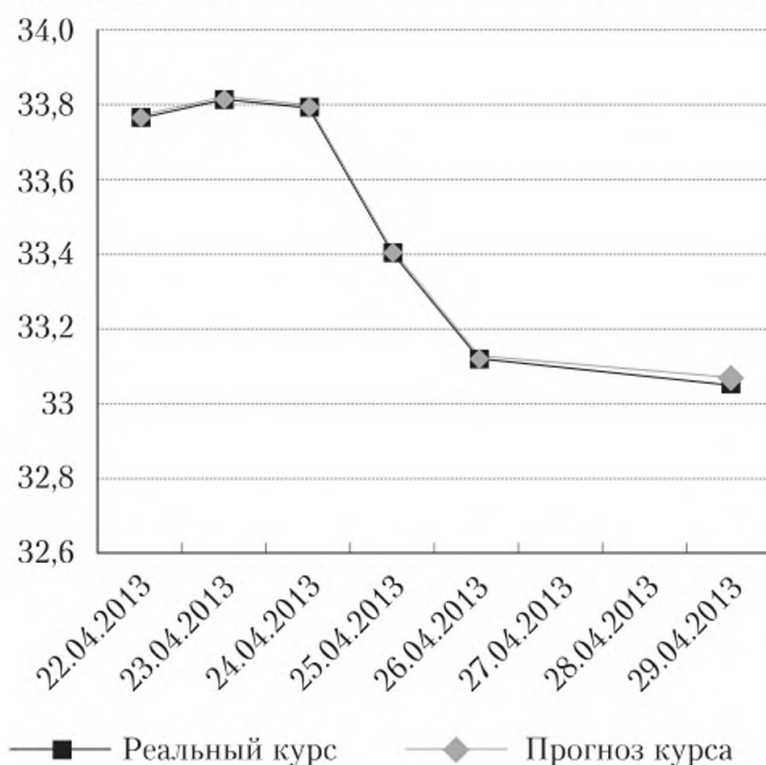


Рис. 5.18. Расхождение прогнозируемого курса франка с реальным при линейной функции



## Квадратичная эмпирическая функция

Выберем в качестве эмпирической функции  $y = f(x)$  функцию вида  $y = f(x) = ax + b$ . Тогда задача будет состоять в отыскании таких значений параметров  $a$  и  $b$ , при которых функция

$$F = \left| \bar{X} - \bar{Y} \right|^2 = (f(x_1) - y_1)^2 + (f(x_1) - y_1)^2 + \dots + (f(x_n) - y_n)^2 = \\ = (ax_1^2 + b - y_1)^2 + (ax_2^2 + b - y_2)^2 + \dots + (ax_n^2 + b - y_n)^2$$

принимает наименьшее значение. Здесь  $x_1, x_2, \dots, x_n$  и  $y_1, y_2, \dots, y_n$  — постоянные, найденные экспериментально, а роль неизвестных играют  $a$  и  $b$ , т.е., как и в случае линейной функции,  $F = F(a, b)$ .

**Первый этап.** Найдем критические точки функции  $F = F(a, b)$ :

$$\begin{cases} F'_a = 2(ax_1^2 + b - y_1)x_1^2 + \dots + 2(ax_n^2 + b - y_n)x_n^2 = 0, \\ F'_b = 2(ax_1^2 + b - y_1) + \dots + 2(ax_n^2 + b - y_n) = 0. \end{cases}$$

Раскроем скобки и произведем перегруппировку слагаемых, система в результате примет вид

$$\begin{cases} Aa + Bb = D, \\ Ba + Cb = E. \end{cases}$$

Здесь использованы следующие обозначения:

$$A = x_1^4 + \dots + x_n^4; \quad B = x_1^2 + \dots + x_n^2; \quad C = n;$$

$$D = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n; \quad E = y_1 + \dots + y_n.$$

Определитель системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2 = n(x_1^4 + \dots + x_n^4) - (x_1^2 + \dots + x_n^2)^2 > 0.$$

В частности, при  $n = 2$  выполняется

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2 = 2(x_1^4 + x_2^4) - (x_1^2 + x_2^2)^2 = \\ = 2x_1^4 + 2x_2^4 - x_1^4 - 2x_1^2 x_2^2 - x_2^4 = (x_1^2 - x_2^2)^2 > 0.$$

Решая систему уравнений методом Крамера, найдем критическую точку  $(a_0, b_0)$ .

**Второй этап.** Проверим, является ли данная точка  $(a_0, b_0)$  точкой экстремума. Найдем вторые производные:

$$F''_{aa} = (F'_a)'_a = (2Aa + 2Bb - 2D)'_a = 2A;$$

$$F''_{ab} = (F'_a)'_b = (2Aa + 2Bb - 2D)'_b = 2B;$$

$$F''_{bb} = (F'_b)'_b = (2Ba + 2Cb - 2E)'_b = 2C.$$

Воспользуемся теоремой об экстремуме функции двух аргументов:

$$\Delta = \begin{vmatrix} F''_{aa} & F''_{ab} \\ F''_{ba} & F''_{bb} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2A & 2B \\ 2B & 2C \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} > 0;$$

$$F''_{aa} = 2A = 2(x_1^2 + \dots + x_n^2) > 0.$$



Следовательно, в точке  $(a_0, b_0)$  функция  $F = F(a, b)$  достигает своего минимального значения.

**Замечание 5.6.** Вместо квадратичной функции  $y = f(x) = ax^2 + b$  можно рассматривать функцию  $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ . Тогда для нахождения критической точки надо будет рассматривать три уравнения —  $F'_a = 0$ ,  $F'_b = 0$ ,  $F'_c = 0$ .

#### Пример 5.19

Для условий примера 5.18 построим квадратичную эмпирическую функцию.

**Решение**

1. Подсчитаем коэффициенты  $A, B, C, D$  и  $E$  согласно приведенным выше формулам:

$A = 34; B = 10; C = 5; D = -1,7133$  и  $E = 164,9182$ .

2. Составим систему уравнений для подсчета координат критической точки:

$$\begin{cases} 34a + 10b = -1,7133, \\ 10a + 5b = 164,9182. \end{cases}$$

4. Решив систему, составим квадратичную эмпирическую функцию  $y = -23,6821x^2 + 80,3479$ .

5. Прогнозируемая цена швейцарского франка на 29 апреля 2013 г. соответствует  $x_6 = 3$ , поэтому получаем результат  $y_6 = -132,791$ , который не годится из-за отрицательного значения.

**Анализ.** Таким образом, квадратичная функция не отражает колебание цены на швейцарский франк.

#### 5.1.5. Основные виды функций нескольких переменных в экономических задачах

Рассмотрим теперь основные виды функций нескольких переменных, которые встречаются в экономических задачах.

Пусть  $X_1, X_2, \dots, X_n$  — ресурсы, используемые для производства, а  $x_1, x_2, \dots, x_n$  — соответствующие количества.

**Определение 5.23.** Производственной функцией  $Q = Q(x_1, x_2, \dots, x_n)$  называется функция, выражающая объем продукции  $Q$ , полученной при использовании ресурсов (факторов)  $X_1, X_2, \dots, X_n$  в количествах  $x_1, x_2, \dots, x_n$  соответственно. Если  $n = 1$ , то  $Q$  называется *однофакторной* функцией, а при  $n > 1$  — *многофакторной*. В силу экономического смысла переменные  $x_1, x_2, \dots, x_n$  и значения  $Q$  предполагаются неотрицательными.

Различные виды производственных функций возникают в экономических задачах как функции, описывающие тот или иной производственный процесс, и используются для анализа или прогноза деятельности компании, корпорации или отрасли.

Так, уже двухфакторная производственная функция Кобба — Дугласа

$$Q(K, L) = aK^\beta L^{1-\beta}, \text{ где } a > 0, 0 < \beta < 1,$$

названа в честь американских ученых Ч. Кобба и П. Дугласа<sup>1</sup>, которые в 1928 г. предприняли попытку эмпирическим путем определить влияние

<sup>1</sup> Чарльз Кобб (1875–1949) — американский математик и экономист; Пол Дуглас (1892–1976) — американский экономист.



затрачиваемого капитала и труда на объем выпускаемой продукции в обрабатывающей промышленности США. Они установили, что зависимость объема производства от объема используемого капитала и трудовых ресурсов связаны приведенным соотношением.

Функцией Кобба — Дугласа иногда также называют двухфакторную функцию более общего вида

$$Q(K, L) = aK^\alpha L^\beta,$$

где  $a > 0$ ,  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$ .

Функции Кобба — Дугласа являются частными случаями *мультипликативных производственных функций* вида

$$Q(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_0 x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_n^{a_n},$$

где  $a_i > 0$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ .

Наряду с мультипликативными производственными функциями рассматривают также *линейные производственные функции* вида

$$Q(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n,$$

где  $a_i > 0$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ , *производственные функции Леонтьева*<sup>1</sup>

$$Q(x_1, x_2, \dots, x_n) = \min \{ \alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, \dots, \alpha_n x_n \},$$

где  $\alpha_i > 0$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ , и др.

Каждая этих производственных функций связана с тем или иным технологическим процессом.

**Определение 5.24.** Геометрическое место точек в пространстве факторов, в которых различные сочетания факторов производства (ресурсов) дают одно и то же количество выпускаемой продукции, называют *изоквантой*.

В связи с понятием изокванты естественно возникает вопрос о возможности замещения одного из ресурсов другими при сохранении объемов производства.

Так, если процесс описывается первой из представленных функций Кобба — Дугласа, то из условия  $aK^\alpha L^{1-\alpha} = Q_0$  легко выразить как  $K$ , так и  $L$  через остальные параметры производства. Поэтому для любого положительного количества одного ресурса можно подобрать такое количество другого ресурса, что возможно произвести любой требуемый объем продукции.

Наоборот, функция Леонтьева характеризует такой производственный процесс, при котором замена одного ресурса другими невозможна при любом объеме производства и избыток одного ресурса не может компенсировать недостаток другого.

Рассмотрим еще один пример. Двухфакторная линейная производственная функция, функции Леонтьева и Кобба — Дугласа являются частными

<sup>1</sup> Василий Васильевич Леонтьев (1905—1999) — американский экономист российского происхождения, создатель теории межотраслевого анализа.



или предельными случаями производственной функции CES (*constant elasticity of substitution*)

$$Q(K, L) = F[aK^{-\rho} + (1-a)L^{-\rho}]^{1/\rho},$$

где  $F, a, \rho$  — некоторые параметры. Она была введена американским экономистом, нобелевским лауреатом Р. Солоу<sup>1</sup> в 1956 г. Оказывается, для изоквант функции для каждого из ресурсов существуют пороговые значения, такие что если количество ресурсов меньше этих значений, то замещение одного из ресурсов другим невозможно.

**Определение 5.25.** *Функцией полезности (utility function)  $U = U(x_1, x_2, \dots, x_n)$  называется функция, описывающая предпочтения потребителей на множестве товаров  $X_1, X_2, \dots, X_n$  и выражающая ценность набора товаров в количествах  $x_1, x_2, \dots, x_n$  соответственно. При этом если  $U(x_1, x_2, \dots, x_n) > U(y_1, y_2, \dots, y_n)$  для двух различных наборов  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  и  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ , то набор  $x$  является более полезным для потребителя, чем набор  $y$ .*

Ясно, что у каждого потребителя имеются свои предпочтения, поэтому и функция полезности у каждого индивидуальна. При решении практических задач нередко рассматривают (усреднённую) функцию полезности, характерную для некоторой категории потребителей.

**Замечание 5.7.** Из определения 5.24 следует, что значение функции полезности на данном наборе товаров безразлично. Существенным является лишь то, как это значение соотносится со значениями функции полезности на прочих наборах товаров.

**Определение 5.26.** Геометрическое место точек в пространстве товаров, в которых различные комбинации товаров дают одно и то же значение функции полезности  $U_0 = U(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , называют *линией безразличия*.

Среди примеров функций полезности упомянем функцию  $U(x_1, x_2) = Cx_1^\alpha x_2^\beta$ , где  $C, \alpha, \beta > 0, \alpha + \beta = 1$ , и ее обобщение

$$U(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1 - a_1)^{\alpha_1} (x_2 - a_2)^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot (x_n - a_n)^{\alpha_n},$$

где  $x_i > a_i \geq 0, \alpha_i > 0$  при  $i = 1, 2, \dots, n$ . При этом  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  представляет собой минимально допустимый набор товаров. Ввиду замечания 5.7 в приложениях иногда удобнее рассматривать логарифмическую функцию полезности

$$U^* = \alpha_1 \ln(x_1 - a_1) + \alpha_2 \ln(x_2 - a_2) + \dots + \alpha_n \ln(x_n - a_n),$$

где  $\alpha_i > 0, x_i > a_i \geq 0$  при  $i = 1, 2, \dots, n$ , которая получается логарифмированием функции  $U(x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

Пусть теперь  $I$  — денежная сумма, которую потребитель может потратить на приобретение товаров  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , а  $p_k$  — цена единицы товара  $X_k, k = 1, 2, \dots, n$ . Тогда стоимость набора товаров  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  равна  $x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n$ , а *бюджетное ограничение* имеет вид

$$x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n \leq I.$$

<sup>1</sup> Роберт Мертон Солоу (род. 1924) — американский экономист, лауреат Нобелевской премии 1987 г. «За фундаментальные исследования в области теории экономического роста».



**Определение 5.27.** Множество наборов товаров  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , стоимость которых удовлетворяет бюджетному ограничению, называется *бюджетным множеством*.

Если при этом предпочтения потребителей характеризуются функцией полезности  $U = U(x_1, x_2, \dots, x_n)$  и потребитель намерен употребить свои средства с наибольшей для себя пользой, то оптимальным набором товаров будет та точка из бюджетного множества, в которой функция полезности принимает наибольшее значение.

Рассмотрим случай  $n = 2$  (рис. 5.19). Бюджетное множество задает треугольник  $OAB$ , а оптимальный набор товаров задается точкой касания  $M$  его границы  $AB$  и кривой безразличия, наиболее удаленной от начала координат, как имеющей наибольшую полезность среди всех линий безразличия, имеющих общие точки с бюджетным множеством.

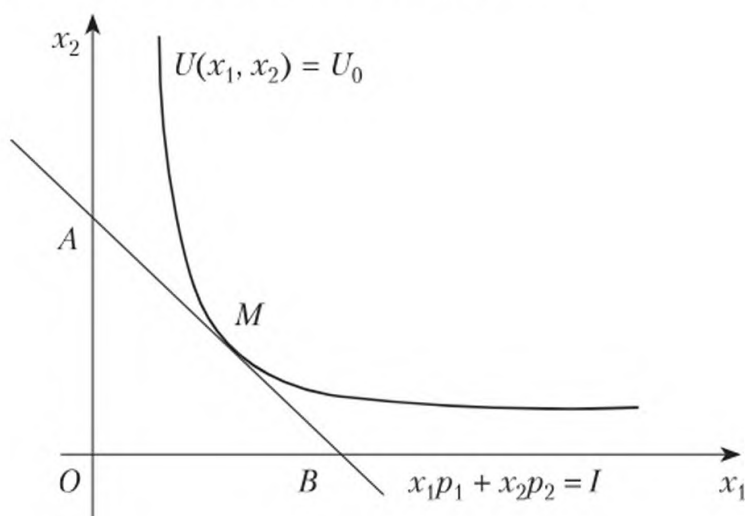


Рис. 5.19. Оптимальный набор товаров задан точкой  $M$

### Пример 5.20

Для товаров  $X_1$  и  $X_2$  известны функции спроса  $q_1 = 54 - p_1$ ,  $q_2 = 35 - \frac{1}{2}p_2$ . Фирма-монополист имеет функцию издержек  $C = 2q_1^2 + 6q_1q_2 + 3q_2^2 + 4$ . Вычислим максимальную прибыль фирмы в этих условиях и найдем соответствующий производственный план.

*Решение*

Последовательно находим общую выручку

$$R(q_1, q_2) = p_1q_1 + p_2q_2 = (54 - q_1)q_1 + (70 - 2q_2)q_2 = -q_1^2 - 2q_2^2 + 54q_1 + 70q_2$$

и прибыль

$$\Pi(q_1, q_2) = R(q_1, q_2) - C(q_1, q_2) = -3q_1^2 - 5q_2^2 + 54q_1 + 70q_2 - 6q_1q_2 - 4.$$

Критические точки функции  $\Pi(q_1, q_2)$  находим из системы

$$\begin{cases} \Pi'_{q_1} = -6q_1 - 6q_2 + 54 = 0, \\ \Pi'_{q_2} = -6q_1 - 10q_2 + 70 = 0, \end{cases}$$



решением которой является точка (5, 4). Так как матрица вторых производных  $G(\Pi)$  функции  $\Pi(q_1, q_2)$  не зависит от точки и равна

$$G(\Pi) = \begin{pmatrix} \Pi''_{q_1 q_1} & \Pi''_{q_1 q_2} \\ \Pi''_{q_2 q_1} & \Pi''_{q_2 q_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -6 \\ -6 & -10 \end{pmatrix},$$

то по критерию Сильвестра убеждаемся, что точка (5, 4) является точкой максимума функции  $\Pi(q_1, q_2)$  и  $\Pi_{\max}(5, 4) = 271$ .

### Предельная полезность товара и предельная норма замещения

Пусть  $U = U(x_1, x_2, \dots, x_n)$  — функция полезности, описывающая предпочтения потребителя (или некоторой категории потребителей) на множестве товаров  $X_1, X_2, \dots, X_n$ . Введем следующее определение.

**Определение 5.28.** *Предельной полезностью* товара  $X_k$  называется частная производная функции  $U = U(x_1, x_2, \dots, x_n)$  по переменной  $x_k$

$$U'_{x_k} = \lim_{\Delta x_k \rightarrow 0} \frac{\Delta U}{\Delta x_k}.$$

Таким образом, предельная полезность товара равна  $X_k$  скорости изменения полезности набора товаров  $M = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  при незначительном изменении его количества  $x_k$ . Ясно, что она приблизительно равна изменению полезности набора товаров  $M$  при изменении количества товара

$X_k$  на одну единицу:  $U'_{x_k} \approx \frac{\Delta U}{\Delta x_k}$ . При этом так как увеличение количества

одного товара, как правило, приводит к повышению полезности набора, то, очевидно, что предельная полезность — величина неотрицательная.

Чтобы сохранить неизменной полезность набора, следует, увеличивая количество одного товара, одновременно уменьшать количество другого товара.

**Определение 5.29.** *Предельной нормой замещения*  $MRS_{X_k, X_l}(M)$  (*marginal rate of substitution*) товара  $X_k$  товаром  $X_l$  для набора  $M = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  называется отношение предельных полезностей товаров  $X_k$  и  $X_l$ :

$$MRS_{X_k, X_l}(M) = \frac{U'_{x_k}(M)}{U'_{x_l}(M)}.$$

Предельная норма замещения приблизительно равна количеству товара  $X_l$ , которое может заменить единицу товара  $X_k$  в исходном наборе  $M = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  так, чтобы полезность набора товаров не изменилась.

Из определения 5.29 естественно получаем, что

$$MRS_{X_k, X_l}(M) = \frac{1}{MRS_{X_l, X_k}(M)}.$$

**Определение 5.30.** *Изоклиной* для пары товаров  $X_k$  и  $X_l$  называется множество наборов товаров  $M = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , для которых предельная норма замещения товара  $X_k$  товаром  $X_l$  постоянна, т.е.  $MRS_{X_k, X_l}(M) = \text{const}$ .



### Пример 5.21

Вычислим предельную норму замещения ресурса  $X_1$  ресурсом  $X_2$  в точке  $(4, 18)$ , если функции полезности  $U(x_1, x_2) = C x_1^{1/4} x_2^{3/4}$ , а также найдем уравнение изоклины, проходящей через эту точку.

*Решение*

Найдем сначала предельные полезности ресурсов  $X_1$  и  $X_2$ :

$$U'_{x_1} = \frac{C}{4} x_1^{-3/4} x_2^{3/4}, \quad U'_{x_2} = \frac{3C}{4} x_1^{1/4} x_2^{-1/4}.$$

Тогда предельная норма замещения имеет вид

$$MRS_{x_1, x_2} = \frac{U'_{x_1}}{U'_{x_2}} = \frac{\frac{C}{4} x_1^{-3/4} x_2^{3/4}}{\frac{3C}{4} x_1^{1/4} x_2^{-1/4}} = \frac{x_2}{3x_1}, \quad MRS_{x_1, x_2}(4, 18) = \frac{18}{3 \cdot 4} = 3/2.$$

Таким образом, искомое уравнение изоклины имеет вид  $MRS_{x_1, x_2} = 3/2$ , т.е.  $\frac{x_2}{3x_1} = 3/2$ , или, окончательно,  $2x_2 - 9x_1 = 0$ .

### Критерий оптимального набора товаров и оптимального производственного плана

Рассмотрим теперь задачи, непосредственно связанные с понятием предельной нормы замещения. Если известна функция полезности  $U = U(x_1, x_2)$  потребителя (мы ограничимся случаем  $n = 2$ ), то вполне естественно поставить вопрос о выборе оптимального набора товаров, а именно: о нахождении самого дешевого набора товаров с данным уровнем полезности и о нахождении самого полезного набора товаров с данной стоимостью, если известны цены  $p_1, p_2$  реализации товара.

Как легко можно заключить из рис. 5.18, для обеих рассматриваемых задач оптимальным является набор товаров, отвечающий точке касания  $M$  линии безразличия и прямой  $x_1 p_1 + x_2 p_2 = I$ , т.е. набор из двух товаров  $M = (x_1, x_2)$  оптимален тогда и только тогда, когда

$$MRS_{x_1, x_2}(M) = \frac{p_1}{p_2}. \quad (5.1)$$

Аналогично, если рассматривается задача об оптимальном производственном плане, т.е. о достижении максимально возможного объема производства при данном уровне издержек и о минимизации уровня издержек при данном объеме производства в предположении, что функция издержек линейна,  $C(q_1, q_2) = q_1 p_1 + q_2 p_2$ , где  $q_1, q_2$  — объемы используемых ресурсов  $X_1, X_2$ , а  $p_1, p_2$  — стоимости единиц этих ресурсов, то производственный план  $M = (q_1, q_2)$  является оптимальным тогда и только тогда, когда выполнено соотношение (5.1). При этом  $MRS_{x_1, x_2}(M) = \frac{Q'_{q_1}}{Q'_{q_2}}(M)$  — предельная норма замещения первого ресурса вторым, а  $Q(q_1, q_2)$  — соответствующая производственная функция.



Для функции полезности Кобба — Дугласа  $U(x_1, x_2) = C x_1^{1/4} x_2^{3/4}$  проверьте, будут ли наборы товаров: а) (2, 5), б) (5, 7) самыми дешевыми среди всех наборов, имеющих равные с ними уровни полезности, если стоимости этих товаров составляют  $p_1 = 20, p_2 = 24$ .

*Решение*

Согласно вычислениям примера 5.21 предельная норма замещения товара  $X_1$  товаром  $X_2$  имеет вид  $MRS_{X_1, X_2} = \frac{x_2}{3x_1}$ . Тогда

$$MRS_{X_1, X_2}(2, 5) = \frac{5}{6} = \frac{20}{24} = \frac{p_1}{p_2}, \quad MRS_{X_1, X_2}(5, 7) = \frac{7}{3 \cdot 5} \neq \frac{p_1}{p_2} = \frac{20}{24}.$$

Таким образом, набор (2, 5) является самым дешевым из всех наборов, имеющих с ним равные уровни полезности, а набор (5, 7) — не является.

## 5.2. Числовые и функциональные ряды

Числовые и функциональные ряды являются мощным инструментом теории приближений. Функциональные ряды имеют классификацию по способу построения и связаны с дифференциальным и интегральным исчислениями: для вычисления коэффициентов полиномиального ряда Тейлора используется дифференциальное исчисление, для вычисления коэффициентов периодических рядов Фурье — интегральное.

### 5.2.1. Определения и свойства числовых рядов

**Определение 5.31.** Символ

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots \quad (5.2)$$

называется *числовым рядом* или просто *рядом*,  $a_n$  — члены ряда.

Обозначим  $S_1 = a_1, S_2 = a_1 + a_2, \dots, S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ .

**Определение 5.32.** Если существует предел  $S = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ , то ряд  $\sum_{i=1}^{+\infty} a_i$

называется *сходящимся*, если не существует этого предела, то ряд называется *расходящимся*.

Рассмотрим ряд, составленный из членов геометрической прогрессии (геометрический ряд):  $1 + q + q^2 + \dots + q^n + \dots$  (или  $a + aq + aq^2 + \dots + aq^n + \dots$  ( $a > 0$ )),  $q > 0, q \neq 1$ . Сумма  $n$  первых членов ряда равна  $S_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$  ( $S_n = a \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$ ). При  $n \rightarrow \infty$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \begin{cases} \frac{1}{1 - q}, & |q| < 1, \\ \infty, & |q| > 1. \end{cases}$$



Следовательно, геометрический ряд расходится при  $|q| \geq 1$  и сходится при  $|q| < 1$ , когда  $S = \frac{a}{1-q}$ .

### Пример 5.23

Исследуем на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}.$$

*Решение*

Заметим, что

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \quad (n=1, 2, 3, \dots).$$

Поэтому

$$S_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Отсюда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1.$$

Следовательно, ряд сходится и его сумма равна 1.

## Основные свойства рядов

Если в ряде (5.2) отбросить первые  $m$  членов, то получим  $m$ -й остаток ряда

$$a_{m+1} + a_{m+2} + \dots + a_{m+k} + \dots \quad (5.3)$$

Верны следующие утверждения.

1. Ряд (5.2) сходится и расходится одновременно с рядом (5.3).
2. Предел суммы  $r_m$   $m$ -го остатка сходящегося ряда (5.2) при  $m \rightarrow \infty$  равен нулю.
3. Общий член  $a_n$  сходящегося ряда (5.2) стремится к нулю при неограниченном возрастании  $n$ , т.е.  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  (необходимый признак сходимости ряда).

Из третьего свойства следует, что если  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ , то ряд (5.2) расходится. Отметим, что условие равенства нулю предела  $n$ -го члена не является достаточным. Так, для ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ , называемого *гармоническим* рядом, условие выполняется ( $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ ), однако сам гармонический ряд, как будет показано далее, является расходящимся.

4. Если ряд (5.2) сходится и его сумма равна  $S$ , то ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$ , где  $c$  — произвольное число, также сходится и его сумма равна  $cS$ .



5. Если ряд (5.2) и ряд  $b_1 + b_2 + \dots + b_n + \dots$  сходятся и их суммы соответственно равны  $S_a$  и  $S_b$ , то ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$  сходится и его сумма равна  $S_a + S_b$ .

### 5.2.2. Положительные ряды

**Определение 5.33.** Если все члены ряда

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots \quad (5.4)$$

неотрицательные числа, то ряд называется *положительным*.

**Теорема 5.11.** Для того чтобы положительный ряд сходиллся, необходимо и достаточно, чтобы последовательность частичных сумм этого ряда была ограничена сверху.

Далее сформулируем достаточные признаки сходимости положительных рядов.

#### Признак сравнения рядов

Пусть даны два положительных ряда

$$(B) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n, (C) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n.$$

Если члены ряда  $(B)$  не превосходят соответствующих членов ряда  $(C)$ , т.е.  $b_n \leq c_n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ), то из сходимости ряда  $(C)$  следует сходимость ряда  $(B)$ , а из расходимости ряда  $(B)$  следует расходимость ряда  $(C)$ .

#### Пример 5.24

Исследуем на сходимость ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$ .

*Решение*

Сравним члены этого ряда с членами ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ , который, как было выяснено ранее, сходится. Имеем  $\frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n(n+1)}$ , следовательно, по признаку сравнения сходится и ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$ . Аналогично рассуждая, получаем, что ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  сходится.

#### Табличные числовые ряды, используемые для применения признака сравнения

1) *Геометрический ряд*  $a + aq + aq^2 + \dots + aq^n + \dots$  ( $a > 0$ ).

Ряд расходится при  $|q| \geq 1$  и сходится при  $|q| < 1$ , когда  $S = \frac{a}{1-q}$ .

2) *Гармонический ряд*  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$ .

Ряд является расходящимся.



3) Обобщенный гармонический ряд  $1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \dots + \frac{1}{n^\alpha} + \dots$ .

Ряд сходится при  $\alpha > 1$  и расходится при  $\alpha < 1$ .

### Признаки сходимости

**Признак Даламбера**<sup>1</sup>. Если члены положительного ряда таковы, что существует предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$ , то при  $l < 1$  ряд (5.4) сходится, а при  $l > 1$  ряд (5.4) расходится. При  $l = 1$  для выяснения вопроса о сходимости ряда (5.4) нужно применять другой признак.

#### Пример 5.25

Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$  сходится, так как

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1.$$

Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$  расходится, так как

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{n+1} n!}{(n+1)! n^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n+1}{n} \right)^n = e > 1.$$

**Интегральный признак Коши.** Пусть члены положительного ряда (5.4) таковы, что  $a_1 = f(1), a_2 = f(2), \dots, a_n = f(n), \dots$ , где функция  $f(x)$  при  $x \geq 1$  непрерывна, положительна и убывает. Тогда ряд (5.4) и несобственный интеграл  $\int_1^{+\infty} f(x) dx$  сходятся и расходятся одновременно.

#### Пример 5.26

Рассмотрим обобщенный гармонический ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$  ( $\alpha > 0$ ).

*Решение*

Функция  $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ ,  $x \geq 1$ , удовлетворяет условиям интегрального признака. Как установлено ранее,

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \begin{cases} \frac{b^{1-\alpha} - 1}{1-\alpha}, & \alpha \neq 1, \\ \ln b, & \alpha = 1. \end{cases} = \begin{cases} +\infty & \text{при } \alpha \leq 1, \\ \frac{1}{1-\alpha} & \text{при } \alpha > 1. \end{cases}$$

Значит, данный ряд, как и интеграл, сходится при  $\alpha > 1$  и расходится при  $\alpha \leq 1$ .

Таким образом, гармонический ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  расходится и верно следующее утверждение: ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$  при  $\alpha > 1$  сходится, а при  $0 < \alpha \leq 1$  расходится.

<sup>1</sup> Жан ле Рон Даламбер (1717–1783) – французский математик.



### 5.2.3. Знакопередающие ряды

**Определение 5.34.** Знакопередающим рядом называется ряд вида

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} a_n = a_1 - a_2 + \dots + (-1)^{n-1} a_n + \dots, \quad (5.5)$$

где  $a_n > 0$  ( $n = 1, 2, \dots$ ).

#### Необходимый признак сходимости знакопередающих рядов

**Теорема 5.12 (Лейбница).** Если члены ряда по абсолютной величине монотонно убывают, т.е.  $a_{n+1} < a_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), и общий член стремится к нулю, т.е.  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ , то ряд (5.5) сходится.

Ряд

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} + \dots$$

сходится, так как  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ , т.е. условие теоремы Лейбница выполнено.

Кроме того, остаток  $r_n$  знакопередающего ряда (5.5), удовлетворяющего условиям теоремы Лейбница, имеет знак своего первого члена и меньше его по абсолютной величине. Это позволяет вычислять приближенное значение суммы ряда с любой заданной точностью.

#### Пример 5.27

Вычислим с точностью до 0,1 сумму сходящегося ряда

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} + \dots$$

*Решение*

В качестве приближенного значения  $S_n$  возьмем ту частичную сумму, для которой  $|r_n| < 0,1$ , кроме того  $|r_n| < \frac{1}{n+1}$ . Отсюда  $\frac{1}{n+1} < 0,1$ , т.е.  $n+1 = 10$ ,  $n = 9$ . Складываем:

$$S_9 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} \approx 0,74.$$

Ответ:  $S \approx 0,7$  с точностью до 0,1.

### Абсолютная и условная сходимость

С каждым рядом  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  связан ряд, составленный из модулей (абсолютных величин) членов данного ряда, т.е. ряд  $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ .

**Теорема 5.13.** Если сходится ряд  $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ , то сходится и ряд  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ .

Обратное не всегда верно.



**Определение 5.35.** Если сходится знакочередующийся ряд  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ , а ряд  $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$  расходится, то знакочередующийся ряд называется *условно сходящимся*. Если же ряд  $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$  сходится, то знакочередующийся ряд называется *абсолютно сходящимся*.

#### Пример 5.28

Ряд  $\frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha}$  абсолютно сходится при  $\alpha > 1$  и условно сходится при  $0 < \alpha \leq 1$ .

#### Алгоритм проверки ряда на сходимость

1. Проверим необходимое условие сходимости — выполнение теоремы Лейбница. Если она не выполняется, то ряд расходится.
2. Если выполняется, то рассмотрим ряд из модулей. Применим к этому ряду один из достаточных признаков сходимости рядов с положительными членами.
3. Если ряд из модулей сходится, то искомый ряд сходится абсолютно, в противном случае искомый ряд сходится условно.

Абсолютно сходящиеся ряды можно перемножать, после перемножения рядов получается опять абсолютно сходящийся ряд.

В заключение рассмотрим ряд с комплексными членами  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + ib_n)$ . Задача о сходимости таких рядов сводится к изучению сходимости рядов составленных из действительных  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  и мнимых  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  частей. Ряд сходится тогда и только тогда, когда сходятся оба этих ряда.

Если сходится ряд из модулей  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n + ib_n|$ , то ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + ib_n)$  сходится абсолютно.

#### 5.2.4. Функциональные ряды

В отличие от рассмотренных ранее числовых рядов, элементами которых служат числа, функциональные ряды состоят из функций:

$$u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots$$

Пример функционального ряда:  $1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots$ .

Возникает вопрос о сходимости функционального ряда. Если в функции  $u_n(x)$  из определения функционального ряда подставить какое-либо значение  $x_0$  из области определения  $u_n(x)$ , то получится числовой ряд

$$u_1(x_0) + u_2(x_0) + \dots + u_n(x_0) + \dots$$



**Определение 5.36.** Если этот числовой ряд сходится, то точку  $x_0$  называют *точкой сходимости* функционального ряда. Если этот ряд расходится, то точку  $x_0$  называют *точкой расходимости* функционального ряда. Совокупность всех точек сходимости функционального ряда называют *областью сходимости* функционального ряда.

Сумма первых  $n$  членов функционального ряда, т.е. его частичная сумма, является также функцией, зависящей от  $x$ . Для любой точки из области сходимости функционального ряда существует предел  $S_n(x)$  при  $n \rightarrow \infty$ . В остальных точках частичная сумма не имеет предела.

Областью определения функции  $S(x)$  — суммы функционального ряда — является область сходимости функционального ряда. Как и в случае числовых рядов, разность  $r_n(x) = S(x) - S_n(x)$  называют  $n$ -м остатком:  $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) = 0$ .

**Определение 5.37.** Функциональный ряд называют *равномерно сходящимся* на отрезке  $[a, b]$ , если для любого  $\varepsilon > 0$  существует такое натуральное число  $N = N(\varepsilon)$ , не зависящее от  $x$ , что для  $n > N$  неравенство  $|S(x) - S_n(x)| < \varepsilon$  выполняется для всех  $x$  из отрезка  $[a, b]$ .

Справедлив следующий признак равномерной и абсолютной сходимости функционального ряда.

**Признак Вейерштрасса.** Если члены функционального ряда удовлетворяют на отрезке  $[a, b]$  условию  $|u_n(x)| \leq a_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), где  $a_n$  — члены сходящегося положительного ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ , то функциональный ряд сходится равномерно и абсолютно на отрезке  $[a, b]$ .

### 5.2.5. Степенные ряды

Рассмотрим функциональный ряд специального вида

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots$$

Такие ряды называют степенными, а постоянные вещественные числа  $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$  называют коэффициентами степенного ряда.

Возникает вопрос о сходимости степенного ряда.

**Теорема 5.14 (Абеля).** Если степенной ряд сходится при  $x = x_0 \neq 0$ , то он абсолютно сходится для любого  $x$ , удовлетворяющего условию  $|x| < |x_0|$ ; если при  $x = x_0 \neq 0$  степенной ряд расходится, то он расходится для любого  $x$ , удовлетворяющего условию  $|x| > |x_0|$ .

Важным следствием теоремы Абеля является наличие *радиуса сходимости* степенного ряда. Более точно, для каждого степенного ряда существует число  $R > 0$ , называемое радиусом сходимости этого ряда, такое что при  $|x| < R$  степенной ряд сходится абсолютно, а при  $|x| > R$  ряд расходится. Промежуток  $(-R, R)$  называют *интервалом сходимости* степенного ряда. *Областью сходимости* степенного ряда называют интервал сходимости, к которому могут добавляться один или оба конца интервала. Если для степенного ряда существует и отличен от нуля предел



$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L,$$

то радиус сходимости степенного ряда можно вычислить по формуле  $R = \frac{1}{L}$ .

### 5.2.6. Ряды Тейлора и Маклорена.

#### Разложение элементарных функций в степенной ряд

Ряд по степеням разности  $x - a$  также называют степенным рядом:

$$a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \dots + a_n(x-a)^n + \dots$$

Если функция  $f(x)$  есть сумма ряда такого вида, то говорят, что функция разлагается в степенной ряд. Это означает, что функцию можно приближенно заменить суммой нескольких членов степенного ряда. Важное свойство состоит в том, что это разложение единственно.

Радиус сходимости может быть вычислен по формулам

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \text{ или } R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Рядом Тейлора функции  $f(x)$  называют ряд следующего вида:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \dots$$

Здесь числа

$$a_0 = f(x_0), a_1 = \frac{f'(x_0)}{1!}, a_2 = \frac{f''(x_0)}{2!}, \dots, a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}, \dots$$

называют коэффициентами Тейлора функции  $f(x)$  в точке  $x_0$ .

Частным случаем ряда Тейлора при  $x_0 = 0$  является ряд Маклорена:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}x + \frac{f''(x_0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}x^n + \dots$$

Отметим, что если заранее не предполагать, что функция  $f(x)$  может быть разложена в степенной ряд, то возникает вопрос, будет ли составленный ряд Тейлора сходиться и в действительности ли его сумма равна  $f(x)$ .

Далее, если мы хотим закончить бесконечный степенной ряд на некотором члене, нужно учесть остаток  $r_n(x)$ . Имеет место формула Тейлора:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + r_n(x),$$

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + o(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

Для того чтобы ряд Тейлора сходил к функции  $f(x)$ , необходимо и достаточно, чтобы остаточный член  $r_n(x)$  в формуле Тейлора в каждой точке интервала сходимости стремился к нулю при  $n \rightarrow \infty$ .

Если в интервале  $(x_0 - R, x_0 + R)$  функция  $f(x)$  имеет производные любого порядка и все они ограничены по модулю, т.е.  $|f^{(n)}| \leq M, n = 1, 2, \dots$ , то в этом интервале имеет место разложение функции  $f(x)$  в ряд Тейлора.



Приведем разложение в степенные ряды основных элементарных функций (табл. 5.1).

Таблица 5.1

**Разложение в степенные ряды  
основных элементарных функций**

Функция	Ряд Маклорена	Область сходимости
$e^x$	$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$	$-\infty < x \leq \infty$
$\sin x$	$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots$	$-\infty < x \leq \infty$
$\cos x$	$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots$	$-\infty < x \leq \infty$
$\ln(x+1)$	$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots$	$-1 < x \leq 1$
$\operatorname{arctg} x$	$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots$	$-1 \leq x \leq 1$
$\frac{1}{1-x}$	$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots$	$-1 < x < 1$
$(1+x)^m$	$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}x^n + \dots$	$-1 < x < 1$

При решении многих математических задач можно использовать аппарат функциональных рядов. Приведем некоторые из них.

**Приближенное вычисление значений функций.** Чтобы найти приближенно значение функции  $f(x)$  в точке  $x_0$  с заданной точностью, нужно функцию  $f(x)$  разложить в ряд по степеням  $x - x_1$  в интервале сходимости, содержащем точку  $x_0$ . Точка  $x_1$  — это точка, в которой значения функции и ее производных вычисляются точно. Переменной  $x$  придается значение

$x_0$ . В полученном числовом ряду  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x_0 - x_1)^k$  оставляются только члены,

гарантирующие заданную точность вычислений. Минимальное число  $n_0$  таких членов ряда определяется из соответствующей оценки  $R_n(x_0) = \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$ . Про число  $a$  здесь известно лишь то, что оно лежит между  $x$  и  $x_0$ .

**Приближенное вычисление интегралов.** Многие определенные интегралы, не выражающиеся в элементарных функциях, могут быть вычислены с помощью рядов.

**Интегрирование дифференциальных уравнений.** Степенные ряды могут применяться также для решения дифференциальных уравнений, например в случае, если их решения не удастся найти в элементарных функциях.



**Пример 5.29**

Найдем радиус и интервал сходимости степенного ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ .

*Решение*

Применим формулу для нахождения радиуса сходимости степенного ряда:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{n!} : \frac{1}{(n+1)!} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) = \infty.$$

$R = \infty$ , значит, ряд сходится при всех  $x$ , т.е. в интервале  $(-\infty, +\infty)$ . Из сходимости ряда вытекает  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{n!} = 0$  при всех  $x$ .

**Пример 5.30**

Найдем область сходимости степенного ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!} x^n$ .

*Решение*

Радиус сходимости найдем, используя признак Даламбера:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n \cdot (n+1)!}{n! \cdot (n+1)^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot (n+1)} = \frac{1}{e}.$$

Ряд сходится на интервале  $-\frac{1}{e} < x < \frac{1}{e}$ . Исследуем сходимость ряда на концах интервала.

1. На левом конце ряд принимает вид  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!} \cdot \left(-\frac{1}{e}\right)^n$ , т.е. является знакочередующимся. Абсолютная величина его общего члена эквивалентна при  $n \rightarrow \infty$

$$a_n \sim \frac{n^n}{\sqrt{2\pi n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot e^n} = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \rightarrow 0.$$

2. На правом конце интервала ряд принимает вид  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n! \cdot e^n}$ . Тогда

$$a_n = \frac{n^n}{n! \cdot e^n} \sim \frac{n^n}{\sqrt{2\pi n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot e^n} = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot n^{1/2}}.$$

Это ряд Дирихле при  $p = \frac{1}{2}$ , поэтому данный ряд на правом конце своего интервала сходимости расходится.

Таким образом, область сходимости ряда есть промежуток  $\left[-\frac{1}{e}; \frac{1}{e}\right)$ .

**Пример 5.31**

Разложим в ряд Маклорена функцию  $f(x) = \arcsin x$ .

*Решение*

Заметим, что  $\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x$ .



Разложим функцию  $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  в табличный ряд Маклорена для функции  $(1+x)^m$ .  
Получим

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^4 + \dots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n}x^{2n} + \dots$$

Этот ряд сходится при  $|x| < 1$ . Интегрируя его по промежутку  $[0, x]$ , где  $0 < x < 1$ , находим

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \int_0^x \left( 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^4 + \dots \right) dx = \\ &= x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots \end{aligned}$$

Таким образом, получили разложение функции  $f(x) = \arcsin x$  в ряд Маклорена

$$\arcsin x = x + \frac{1}{6}x^3 + \dots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots$$

Полученный ряд сходится при  $|x| < 1$ .

### Пример 5.32

Вычислим интеграл  $\int_0^{1/4} e^{-x^2} dx$  с точностью  $10^{-4}$ .

*Решение*

Разложим подынтегральную функцию в ряд Маклорена, для этого в основное разложение для  $e^x$  (см. табл. 5.1) подставим  $-x^2$  вместо  $x$ :

$$e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} + \dots \quad (-\infty < x < +\infty).$$

Этот ряд можно интегрировать в любых конечных пределах, т.е.

$$\begin{aligned} \int_0^{1/4} e^{-x^2} dx &= \int_0^{1/4} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^{1/4} x^{2n} dx = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \cdot \left( \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \right) \Big|_0^{1/4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \cdot (2n+1) \cdot 4^{2n+1}}. \end{aligned}$$

Полученный числовой ряд есть знакочередующийся, удовлетворяющий условиям теоремы Лейбница, поэтому если мы возьмем для вычислений несколько первых членов ряда, то ошибка, которая при этом будет сделана, не превзойдет абсолютной величины первого из отброшенных членов.

Замечаем, что третий член ряда  $\frac{1}{2! \cdot 5 \cdot 4^5} = \frac{1}{10\,240} < 10^{-4}$ .

Следовательно, чтобы вычислить интеграл с точностью до  $10^{-4}$ , достаточно взять всего два члена ряда. С требуемой точностью

$$\int_0^{1/4} e^{-x^2} dx \approx \frac{1}{4} - \frac{1}{1! \cdot 3 \cdot 4^3} = \frac{1}{4} - \frac{1}{192} \approx 0,2448.$$

### Пример 5.33

Найдем первые пять членов разложения в ряд решения уравнения  $y' = x^2 + y^2$ , удовлетворяющего условию  $y = \frac{1}{2}$  при  $x = 0$ .



*Решение*

Искомое решение запишем в виде ряда Маклорена при  $x_0 = 0$ :

$$y(x) = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}x^3 + \dots + \frac{y^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots$$

Найдем выражения для трех производных, дифференцируя исходное уравнение:

$$y'' = 2x + 2yy'; \quad y''' = 2 + 2 \cdot (y')^2 + 2yy''; \quad y^{(4)} = 6y'y'' + 2yy'''$$

Вычислим значения этих производных при  $x = 0$ , принимая во внимание начальное условие  $y(0) = \frac{1}{2}$  и данное уравнение  $y' = x^2 + y^2$ , откуда

$$y'(0) = 0 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}; \quad y''(0) = 2 \cdot 0 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4};$$

$$y'''(0) = 2 + 2 \cdot \frac{1}{4^2} + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{19}{8}; \quad y^{(4)}(0) = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{19}{8} = \frac{11}{4}.$$

Подставляя эти значения в ряд Маклорена, получаем

$$y(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}x^2 + \frac{19}{48}x^3 + \frac{11}{96}x^4 + \dots$$

### Задания для самостоятельной работы

**5.1.** Найдите частные производные первого порядка от следующих функций:

- а)  $u = x^3 + 3x^2y - y^3$ ; б)  $u = \sqrt{x + 3y}$ ; в)  $u = \arctg \frac{y}{x}$ ; г)  $u = \arctg(2x - y)$ ;  
д)  $u = (1 - x)^{y^2}$ ; е)  $u = (1 + xy)^y$ ; ж)  $u = x^3y^2 + 2x \ln y + xy$ ;  
з)  $u = x^y + \arctg \frac{x}{y}$ ; и)  $u = x^3 \sin y + y^4$ ; к)  $u = x^6 - y^4$ .

**5.2.** Для функции  $u$  найдите значения частных производных  $u'_x, u'_y$  в заданной точке:

- а)  $u = \frac{x+y}{x-y}, A(2; 1)$ ; б)  $u = \frac{1-xy}{1+xy}, B(0; 1)$ ;  
в)  $u = x\sqrt{y} + \frac{y}{\sqrt[3]{x}}, C(1; 1)$ ; д)  $u = \ln \sqrt{x^2 + y^2}, D(\sqrt{2}; 1)$ .

**5.3.** Найдите полные дифференциалы первого порядка от функции:

- а)  $u = \frac{3x+5y}{2x-9y}$ ; б)  $u = \ln(3x+2y)$ ; в)  $u = e^{12x+5y}$ ;  
г)  $u = x \ln y$ ; д)  $u = x^y$ ; е)  $u = \frac{x}{y}$ .

**5.4.** Найдите частные производные второго порядка от функций:

- а)  $u = \frac{x}{y} - 19$ ; б)  $u = x^5 + 6x^3 - 5x - y$ ; в)  $u = \sin(x - y)$ .

**5.5.** Исследуйте на экстремум следующие функции:

- а)  $u = x^3 + 8y^3 - 6xy + 5$ ; б)  $u = (x-1)^2 + 2y^2$ ; в)  $u = 2x^3 - x^2 + xy^2 - 4x + 3$ ;  
г)  $u = x^2 - xy + y^2 + 9y - 6x + 20$ ; д)  $u = 3x + 6y - x^2 - xy - y^2$ ; е)  $u = e^{\frac{x}{2}}(x + y^2)$ .



**5.6.** Динамика объемов производства за пять лет отражена в следующей таблице:

Годы	1	2	3	4	5
Среднее количество произведенных товаров за год, шт.	235	250	270	292	300

Постройте линейную модель, используя метод наименьших квадратов.

**5.7.** Определите область сходимости функционального ряда:

а)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+x^n}$ ; б)  $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n^2}$ ; в)  $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{x}{2^n}$ ; г)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{x^n}$ ; д)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{e^x}$ ;  
 е)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x+2^n}$ ; ж)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(x-3)^n}$ ; з)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{x^2+n^2}$ ; и)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2+x^n}$ ; к)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+x^2n^2}$ .

**5.8.** Исследуйте сходимость ряда:

а)  $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \dots$ ; б)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^2}$ ; в)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(1+n)^n}$ ; г)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+2^n}$ ; д)  $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots$ ;  
 е)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n(n+2)}$ ; ж)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$ ; з)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+2n}}$ ; и)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}$ ; к)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$ ;  
 л)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}$ ; м)  $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{\alpha}{3^n}, 0 < \alpha < 3\pi$ ; н)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}$ ; о)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)2^{2n-1}}$ ;  
 п)  $\sum_{n=1}^{\infty} n \operatorname{tg} \frac{\pi}{2^{n+2}}$ ; р)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{100^n}{n!}$ ; с)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^3}{(2n)!}$ ; т)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$ .

**5.9.** Определите область сходимости степенного ряда:

а)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ ; б)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n(2n+1)}$ ; в)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n4^n}$ ; г)  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-1)^n}{3^n}$ ;  
 д)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}$ ; е)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n(n+2)}$ ; ж)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{4n-3}}{4n-3}$ ; з)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!} x^n$ ;  
 и)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n \ln n}$ ; к)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! x^n}{(2n-1)!}$ .

**5.10.** Разложите функцию в ряд Маклорена, используя разложения основных элементарных функций:

а)  $f(x) = \cos^2 x$ ; б)  $f(x) = \ln(2+x)$ ; в)  $f(x) = \frac{1}{x^3+1}$ ;  
 г)  $f(x) = e^{-x^2}$ ; д)  $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ ; е)  $f(x) = \frac{x+2}{x^2-5x+6}$ ;  
 ж)  $f(x) = \frac{3}{2-x-x^2}$ ; з)  $f(x) = \ln(x^2+x-6)$ ; и)  $f(x) = x \sin 5x$ .

**5.11.** Фирма-монополист продает товар на трех независимых рынках. Функции спроса на этих рынках линейны и имеют вид  $q_1(p_1) = 14,35 - 0,36p_1$ ,  $q_2(p_2) = 21,65 - 0,48p_2$ ,  $q_3(p_3) = 10,5 - 0,25p_3$ . Издержки на производство  $q$  единиц товара равны  $C(q) = 55 + 19q$ . Определите цены на каждом из рынков, при которых фирма получит максимальную прибыль.

**5.12.** Фирма-монополист продает товар на двух независимых рынках. Функции спроса на этих рынках имеют вид  $q_1 = \left(\frac{120}{p_1}\right)^2$ ,  $q_2 = \left(\frac{40}{p_2}\right)^2$ . Издержки на производство



$q$  единиц товара равны  $C(q) = q$ . Определите объемы продаж на каждом из рынков, при которых фирма получит максимальную прибыль.

**5.13.** Для товаров  $X_1$  и  $X_2$  известны функции спроса:  $q_1 = 50 - p_1$ ,  $q_2 = 75 - \frac{1}{2}p_2$ .

Фирма-монополист имеет функцию издержек  $C = 4q_1^2 + q_1q_2 + 6q_2^2 + 7$ . При каком производственном плане прибыль максимальна?

**5.14.** Вычислите предельную норму замещения ресурса  $X_1$  ресурсом  $X_2$  в точке  $(1; 8)$ , если функции полезности Кобба – Дугласа  $U(x_1, x_2) = Cx_1^{\frac{1}{3}}x_2^{\frac{2}{3}}$ , а также найдите уравнение изоклины, проходящей через эту точку.

**5.15.** Для функции полезности  $U(x_1, x_2) = (x_1 - 2)^3(x_2 - 1)$  и набора товаров  $y = f(x)$  вычислите предельные полезности первого и второго товаров, а также предельную норму замещения  $MRS_{X_1, X_2}$  первого товара вторым.

**5.16.** Пользуясь разложением подынтегральной функции в ряд Тейлора, вычислите с точностью до 0,001 значение определенного интеграла:

$$\begin{array}{lll} \text{а) } \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{256+x^4}} dx; & \text{б) } \int_0^{0,4} 1 - e^{-\frac{x}{2}} dx; & \text{в) } \int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx; \\ \text{г) } \int_0^{0,5} \frac{\arctg x}{x} dx; & \text{д) } \int_0^{0,25} \ln(1+\sqrt{x}) dx; & \text{е) } \int_0^{0,5} \frac{1}{x^4+1} dx. \end{array}$$



## Глава 6

# ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ И РАЗНОСТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

---

В результате изучения главы 6 студент должен:

**знать**

- основные понятия общей теории дифференциальных уравнений первого порядка;
- базовые типы дифференциальных уравнений первого порядка и методы их решения;
- основные понятия теории линейных дифференциальных уравнений старших порядков с постоянными коэффициентами и методы их решения;

**уметь**

- решать дифференциальные уравнения первого порядка и разностные уравнения;
- составлять характеристическое уравнение и находить фундаментальную систему решений однородного линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами;

**владеть**

- методами применения дифференциальных и разностных уравнений для решения экономических и финансовых задач.
- 

Дифференциальные и разностные уравнения являются важнейшими математическими понятиями, широко применяемым при решении практических задач. Возможности и правила составления дифференциальных уравнений определяются законами той области науки, с которой связана природа изучаемого явления. При этом методы решения дифференциальных уравнений не зависят от того, какие процессы они описывают. Поэтому в распоряжении исследователя имеется огромный материал, накопленный традициями применения динамических моделей в различных областях науки. Владение этим материалом является необходимым для специалиста в области экономики и финансов.

### 6.1. Обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка

#### 6.1.1. Основные понятия

**Определение 6.1.** Уравнение, связывающее независимую переменную  $x$ , неизвестную функцию  $y(x)$  и ее производные или дифференциалы, называется *обыкновенным дифференциальным уравнением (ОДУ)*.



Обыкновенное дифференциальное уравнение может быть записано в виде

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0,$$

где  $F$  — некоторая заданная функция;  $x$  — независимая переменная;  $y(x)$  — искомая функция;  $y'(x), \dots, y^{(n)}(x)$  — ее производные.

**Определение 6.2.** Порядком дифференциального уравнения называется наивысший порядок входящей в уравнение производной (или дифференциала).

Наиболее простое уравнение первого порядка имеет вид  $y' = f(x)$ . Его решением является неопределенный интеграл от функции  $f(x)$ . Другими примерами уравнений 1-го порядка могут служить уравнения  $y' + y = \cos x$ ;  $x dy + y dx = 1$ .

Уравнение  $y'' + 2y' - 5y = 1$  является уравнением второго порядка, уравнение  $y^{IV} - y'' = x - 1$  имеет четвертый порядок и т.д.

**Определение 6.3.** Решением дифференциального уравнения называется функция  $y(x)$ , имеющая производные до  $n$ -го порядка включительно и такая, что ее подстановка в уравнение обращает его в тождество.

Например, решением уравнения  $y' = 2y$  является функция  $y = e^{2x}$ . Легко проверить, что решением этого уравнения будет также любая функция вида  $y(x) = Ce^{2x}$ , где  $C$  — произвольная постоянная.

Рассмотрим в качестве еще одного примера уравнение  $y'' = x$ .

Интегрируя, получим  $y' = \frac{x^2}{2} + C_1$  и далее

$$y = \frac{x^3}{6} + C_1 x + C_2,$$

где  $C_1, C_2$  — постоянные. Очевидно, что при любых значениях  $C_1$  и  $C_2$  полученная функция  $y$  будет решением уравнения. Говорят, что последняя формула задает *общее решение* уравнения. Оно зависит от двух произвольных постоянных  $C_1$  и  $C_2$ . Придавая им конкретные значения, мы получаем *частные решения*.

Приведенные примеры позволяют сделать вывод о том, что дифференциальное уравнение имеет бесконечно много решений.

**Определение 6.4.** График решения дифференциального уравнения называется *интегральной кривой* этого уравнения.

Дифференциальное уравнение первого порядка имеет вид  $F(x, y, y') = 0$ .

Если это уравнение можно разрешить относительно  $y'$ , т.е. представить в виде  $y' = f(x, y)$ , то говорят, что уравнение записано в *нормальной форме* (или в *форме Коши*).

Это уравнение имеет простой *геометрический смысл*. Возьмем некоторую точку  $(x_0, y_0)$  из области определения  $D$  функции  $f(x, y)$ . Пусть  $y = \varphi(x)$  — интегральная кривая, проходящая через эту точку (т.е.  $y_0 = \varphi(x_0)$ ). Из уравнения следует, что  $\varphi'(x_0) = f(x_0, y_0)$ .

Таким образом, угловой коэффициент касательной к интегральной кривой, проходящей через точку  $(x_0, y_0)$ , равен (при  $x = x_0$ ) числу  $f(x_0, y_0)$ .



Для каждой точки  $(x_0, y_0)$  из области определения  $D$  можно вычислить значение  $f(x_0, y_0)$ , равное угловому коэффициенту касательной к интегральной кривой рассматриваемого уравнения, проходящей через указанную точку. В этом случае принято говорить, что на множестве  $D$  задано *поле направлений* (рис. 6.1). Таким образом, с геометрической точки зрения решить уравнение Коши означает найти кривую, касательная к которой в каждой точке совпадает с направлением поля в этой точке.

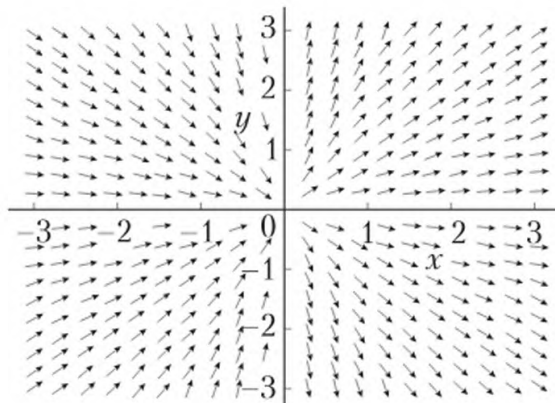


Рис. 6.1. Поле направлений уравнения  $y' = \frac{y}{x}$

Если уравнение можно представить в виде  $N(x, y)dx + M(x, y)dy = 0$ , то его называют *уравнением в дифференциалах* (или *уравнением в симметричной форме*).

Одной из важнейших задач теории дифференциальных уравнений является задача, в которой требуется найти решение, удовлетворяющее некоторому дополнительному условию. Чаще всего такое условие задается в виде начального условия  $y(x_0) = y_0$ .

**Определение 6.5.** Задача о нахождении решений дифференциального уравнения, удовлетворяющих начальному условию, называется *задачей Коши*.

При решении конкретной задачи, связанной с моделированием реального процесса, вопрос о существовании решения задачи Коши, а также о его единственности является исключительно важным. В общем случае задача Коши может иметь единственное решение, бесконечно много решений либо вообще не иметь решений. Условия, при которых решение задачи Коши существует и единственно, формулируются в следующей теореме Коши.

**Теорема 6.1. (достаточный признак существования и единственности решения задачи Коши).** Если в некоторой окрестности точки  $(x_0, y_0)$  функция  $f(x, y)$  определена, непрерывна и имеет непрерывную частную производную  $f'_y$ , то существует такая окрестность точки  $(x_0, y_0)$ , в которой задача Коши имеет решение, притом единственное.

Эту теорему мы примем без доказательства.

Итак, *решить дифференциальное уравнение* — это значит найти все его решения либо показать, что решений нет. Чаще всего предполагают, что решения можно выразить через элементарные функции. Возможно, решение будет выражено через «неберущийся» неопределенный интеграл.



## 6.1.2. Виды дифференциальных уравнений первого порядка

### Уравнения с разделяющимися переменными. Автономные уравнения

**Определение 6.6.** Если в уравнении  $y' = f(x, y)$  правая часть может быть представлена в виде произведения двух функций, каждая из которых зависит лишь от одной переменной, т.е.

$$y' = p(x)g(y),$$

где  $p(x)$  и  $g(y)$  — непрерывные функции, то такое уравнение называется *уравнением с разделяющимися переменными*.

Запишем уравнение в форме

$$\frac{dy}{dx} = p(x)g(y).$$

Для отыскания решения этого уравнения необходимо, как говорят, *разделить* в нем *переменные*, т.е. переписать уравнение следующим образом:

$$\frac{dy}{g(y)} = p(x)dx$$

в предположении, что в рассматриваемой области  $g(y) \neq 0$ . Теперь левая часть уравнения содержит только переменную  $y$ , а правая — только  $x$ . Интегрируя обе части этого уравнения, получим

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int p(x)dx + C.$$

Таким образом, найден общий интеграл уравнения.

#### Пример 6.1

Найдем функцию, имеющую постоянную эластичность, равную  $k$ .

*Решение*

По условию задачи имеем  $\frac{y'x}{y} = k$ , т.е.  $\frac{dy}{dx} \cdot \frac{x}{y} = k$ .

Отсюда при естественном предположении  $x \neq 0$  получим  $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \cdot k$ .

Интегрируя обе части полученного равенства, находим  $\ln|y| = k \ln|x| + \ln C$ , откуда следует, что  $y = Cx^k$ .

*Ответ:*  $y = Cx^k$ .

**Замечание 6.1.** При разделении переменных и при преобразовании уравнений могут быть потеряны решения, в частности, соответствующие условию  $g(y) = 0$ . Функции, удовлетворяющие этим условиям, следует найти и подстановкой в уравнение проверить, являются ли они решениями. При этом полученное решение может входить в общее при некоторых значениях  $C$ , а может оказаться особым.

#### Пример 6.2

Решим уравнение  $y \ln x = y' \cdot x$ .



Решение

Запишем уравнение в виде  $y \ln x dx = x dy$ .

Делим обе части уравнения на  $xy \neq 0$  и интегрируем:  $\int \ln x d(\ln x) = \int \frac{dy}{y}$ .

Отсюда  $\frac{1}{2} \ln^2 x = \ln|y| + C_1$ .

Полагая  $C_1 = -\ln C$ , последовательно получаем

$$\frac{1}{2} \ln^2 x + \ln C = \ln|y|; \ln(Cx^{\ln \sqrt{x}}) = \ln|y|; |y| = Cx^{\ln \sqrt{x}} \quad (C > 0).$$

Ответ:  $|y| = Cx^{\ln \sqrt{x}} \quad (C > 0)$ .

---

Легко проверить, что функция  $y = 0$  является решением исходного уравнения. Оно может быть получено из общего решения при  $C = 0$ . С учетом этого общее решение может быть записано в виде  $y = Cx^{\ln \sqrt{x}}$ , где  $C$  — произвольная константа.

Одним из важных частных случаев дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными являются *автономные уравнения*. Это уравнения вида  $y' = g(y)$ .

Такие уравнения часто встречаются в различных вопросах экономической динамики. Обычно в качестве независимой переменной выступает время; его отсутствие в правой части уравнения можно трактовать как неизменность законов, по которым развивается экономическая система в рассматриваемый промежуток времени.

Если  $y^*$  — корень уравнения  $g(y) = 0$ , то  $y = y^*$  ( $= \text{const}$ ) является решением уравнения  $y' = g(y)$ . Такое решение называется *стационарным*.

Отметим свойство, которым обладают решения автономного уравнения.

**Теорема 6.2.** Если  $y = \varphi(x)$  — решение автономного дифференциального уравнения, то  $y = \varphi(x + C)$  также является решением этого уравнения.

Геометрическая трактовка данной теоремы заключается в том, что при параллельном переносе вдоль оси  $Ox$  интегральные кривые автономного уравнения переходят друг в друга.

Таким образом, если  $g(y) \neq 0$ , то общее решение автономного уравнения задается формулой  $y = \varphi(x + C)$ , где  $\varphi(x)$  — произвольное частное решение.

К автономным уравнениям приводятся дифференциальные уравнения вида

$$y' = f(ky + lx + p),$$

где  $k, l, p$  — некоторые постоянные. Естественно предполагать, что  $k$  и  $l$  отличны от нуля. Тогда, применяя подстановку  $z = ky + lx$ , получаем, что  $z = ky' + l$ . Следовательно, рассматриваемое уравнение равносильно уравнению  $z' = kf(z + p) + l$ , которое в свою очередь совпадает с  $y' = p(x)g(y)$ , если положить  $g(z) = kf(z + p) + l$  (к тому же результату можно прийти, применив замену  $z = ky + lx + p$ ).

Аналогичным образом к автономным уравнениям приводятся и уравнения вида

$$y' = f\left(\frac{ky + lx + p}{my + nx + q}\right),$$



где  $k, l, p, m, n, q$  — некоторые действительные числа, удовлетворяющие условиям  $kn - lm = 0, k \neq 0, l \neq 0$ . Из этих условий следует, что  $\frac{m}{k} = \frac{n}{l} = a$ .

Поэтому после замены  $z = ky + lx$ , уравнение  $y' = f(ky + lx + p)$  преобразуется к виду

$$z' = kf\left(\frac{z+p}{az+q}\right) + l.$$

### Пример 6.3

Рассмотрим дифференциальное уравнение  $y' = \cos(2y + 2x + 6)$ .

*Решение*

Делая замену  $z = 2y + 2x + 6$ , находим  $z' = 2y' + 2$ . Следовательно,  $z' = 2\cos z + 2$ , или  $z' = 4\cos^2 \frac{z}{2}$ .

Это автономное дифференциальное уравнение. Возможны два случая.

1.  $\cos \frac{z}{2} \neq 0$ . Тогда, разделяя переменные, получаем

$$\frac{dz}{2\cos^2 \frac{z}{2}} = 2dx.$$

Интегрируя это уравнение, находим  $\operatorname{tg} \frac{z}{2} = 2x + C$ , откуда

$$z = 2\operatorname{arctg}(2x + C) + 2\pi k.$$

2.  $\cos \frac{z}{2} = 0$ . Этот случай дает нам стационарные решение уравнения  $z = (2k + 1)\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

Теперь, возвращаясь к переменной  $y = z/2 - x - 3$ , получаем решения исходного уравнения  $y = \operatorname{arctg}(2x + C) + \pi k - x - 3$ ,  $y = \frac{\pi}{2} + \pi k - x - 3$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

### Пример 6.4

Решим дифференциальное уравнение  $y' = \left(\frac{y-x}{2y-2x+1}\right)^2 + 1$ .

*Решение*

Положив  $z = y - x$ , имеем  $z' = y' - 1$ . Следовательно,  $z' = \left(\frac{z}{2z+1}\right)^2$ .

Очевидно, что  $z = 0$  является решением этого уравнения. Если же  $z \neq 0$ , то, разделяя переменные, приходим к уравнению

$$\left(2 + \frac{1}{z}\right)^2 dz = dx.$$

Интегрируя его, находим  $4z + 4\ln|z| - \frac{1}{z} = x + C$ .



Сделав обратную замену, получаем общий интеграл исходного уравнения

$$4y - 4 \ln |y - x| - \frac{1}{(y - x)} = 5x + C.$$

Кроме того, случай  $z = 0$  дает еще одно решение  $y = x$ .

**Определение 6.7.** Дифференциальное уравнение первого порядка  $N(x, y)dx + M(x, y)dy = 0$ , где  $N(x, y)$  и  $M(x, y)$  — однородные функции одной и той же степени<sup>1</sup>, называется *однородным уравнением*.

Рассмотрим другие формы записи однородного уравнения. Дифференциальное уравнение, заданное в нормальной форме  $y' = F(x, y)$ , является однородным тогда и только тогда, когда функция  $F(x, y)$  есть однородная функция нулевой степени. Кроме того, если в рассматриваемой области выполнено условие  $x \neq 0$ , то на основании определения однородной функции нулевой степени правая часть данного уравнения может быть преобразована следующим образом:

$$F(x, y) = F\left(x \cdot 1, x \cdot \frac{y}{x}\right) = x^0 F\left(1, \frac{y}{x}\right) = F\left(1, \frac{y}{x}\right).$$

В силу этого  $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ , где  $f\left(\frac{y}{x}\right) = F\left(1, \frac{y}{x}\right)$ .

#### Пример 6.5

Рассмотрим дифференциальное уравнение  $(x^2 + y^2)dy - xydx = 0$ .

*Решение*

Уравнение является однородным, так как обе функции  $N(x, y) = x^2 + y^2$  и  $M(x, y) = -xy$  являются однородными второй степени. В области, не включающей в себя начало координат, данное уравнение может быть записано в нормальной форме

$$y' = \frac{xy}{x^2 + y^2}.$$

Если дополнительно потребовать выполнения условия  $x \neq 0$ , то уравнение принимает вид

$$y' = \frac{\frac{y}{x}}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}.$$

Подстановкой  $y(x) = xu(x)$  однородное уравнение приводится к уравнению с разделяющимися переменными. Дифференцируя, получим  $y' = u(x) + xu'(x)$ .

Ввиду этого  $u + xu' = f(u)$ .

Разделяя переменные, получим

$$\frac{du}{f(u) - u} = \frac{dx}{x}.$$

Отсюда общий интеграл уравнения

$$\int \frac{du}{f(u) - u} = \ln|x| + C.$$

Найдя  $u(x)$ , необходимо вернуться к функции  $y(x) = xu(x)$ .

<sup>1</sup> Напомним, что функция  $f(x, y)$  называется однородной степени  $m$ , если для  $\forall \lambda \in \mathbf{R}$  выполняется условие  $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^m f(x, y)$ .



**Замечание 6.2.** Если существуют корни уравнения  $f(u) = u$ , то к найденным решениям добавляются стационарные решения  $u(x) = u^*$ , где  $u^*$  — любой корень уравнения  $f(u) = u$ .

### Пример 6.6

Решим уравнение  $y' = 3\left(\frac{y}{x}\right) - \left(\frac{y}{x}\right)^2 - 1$ .

*Решение*

Это уравнение является однородным.

Выполнив замену  $y(x) = xu(x)$ , приходим к уравнению

$$u' = \frac{2u - u^2 - 1}{x}.$$

Разделяя в нем переменные, получим при  $u \neq 1$

$$\int \frac{du}{2u - u^2 - 1} = \int \frac{dx}{x}; \quad \frac{1}{u-1} = \ln|x| + C; \quad u = (\ln|x| + C)^{-1} + 1.$$

Кроме этого, у уравнения  $u' = \frac{2u - u^2 - 1}{x}$  имеется стационарное решение  $u(x) = 1$ .

Таким образом, решением исходного уравнения являются функции

$$y(x) = \frac{x}{\ln|x| + C} + x; \quad y(x) = x.$$

*Ответ:*  $y(x) = \frac{x}{\ln|x| + C} + x; \quad y(x) = x.$

Дифференциальные уравнения вида

$$y' = f\left(\frac{ky + lx + p}{my + nx + q}\right), \quad kn - lm \neq 0,$$

где  $k, l, p, m, n, q$  — некоторые постоянные, приводятся к однородным с помощью следующей замены переменных:

$$t = x - \alpha; \quad z = y - \beta.$$

Постоянные  $\alpha$  и  $\beta$  выбирают таким образом, чтобы свободные члены в правой части дифференциального уравнения стали равными нулю. Действительно, имеем

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dz}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \left(\frac{dy}{dx} - 0\right) \cdot 1 = f\left(\frac{kz + lt + k\beta + l\alpha + p}{mz + nt + m\beta + n\alpha + q}\right).$$

Приравнявая к нулю свободные члены в числителе и знаменателе дроби, получаем следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} k\beta + l\alpha = -p, \\ m\beta + n\alpha = -q. \end{cases}$$

Определитель этой системы равен  $kn - ml$  и отличен от нуля. Следовательно, у этой системы существует единственное решение, и пара  $(\beta, \alpha)$



определена однозначно. В результате проведенной замены уравнение преобразуется к однородному уравнению

$$\frac{dz}{dt} = f\left(\frac{kz + lt}{mz + nt}\right).$$

### Пример 6.7

Решим уравнение  $y' = \frac{1}{2} \left( \frac{y+x+3}{x+2} \right)^2$ .

*Решение*

В данном случае замена очевидна и можно обойтись без решения системы. Положим  $t = x + 2$ ,  $z = y + 1$ . Тогда уравнение принимает вид

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{2} \left( \frac{z+t}{t} \right)^2, \text{ или } \frac{dz}{dt} = \frac{1}{2} \left( \frac{z}{t} + 1 \right)^2.$$

Применяя в полученном однородном уравнении подстановку  $z = ut$ , находим

$$\frac{du}{dt} = \frac{u^2 + 1}{2t}.$$

Разделяя переменные, имеем

$$\frac{dz}{u^2 + 1} = \frac{dt}{2t}.$$

Интегрируя это уравнение, получаем

$$\operatorname{arctg} u = \frac{1}{2} \ln |t| + C.$$

Возвращаясь сначала к переменной  $z$ , а затем к переменным  $x$  и  $y$ , находим общий интеграл уравнения

$$\operatorname{arctg} \frac{y+1}{x+2} = \frac{1}{2} \ln |x+2| + C.$$

*Ответ:*  $\operatorname{arctg} \frac{y+1}{x+2} = \frac{1}{2} \ln |x+2| + C.$

**Определение 6.8.** Дифференциальное уравнение вида  $\alpha(x)y' + \beta(x)y + \gamma(x) = 0$  называется *линейным дифференциальным уравнением первого порядка*.

Предполагается, что  $\alpha(x)$ ,  $\beta(x)$  и  $\gamma(x)$  — непрерывные на некотором промежутке функции. Если на нем  $\alpha(x) \neq 0$ , то уравнение  $\alpha(x)y' + \beta(x)y + \gamma(x) = 0$  можно преобразовать следующим образом:

$$y' + p(x)y = f(x), \quad (6.1)$$

где  $p(x) = \frac{\beta(x)}{\alpha(x)}$ ;  $f(x) = -\frac{\gamma(x)}{\alpha(x)}$ .

Дифференциальное уравнение  $y' + p(x)y = 0$  называется *линейным однородным уравнением*, соответствующим уравнению (6.1).

Линейные модели любых процессов являются весьма важными. Они наиболее просты для исследования, хотя и не всегда позволяют учитывать



многие важные свойства моделируемого объекта. Поэтому любое математическое моделирование, как правило, начинается с формирования и изучения линейных моделей.

Рассмотрим два способа интегрирования линейных дифференциальных уравнений первого порядка.

### Метод вариации произвольной постоянной

*Метод вариации произвольной постоянной (метод Лагранжа<sup>1</sup>)* заключается в следующем. Сначала найдем решение уравнения  $y' + p(x)y = 0$ , которое представляет собой уравнение с разделяющимися переменными. Очевидно, что  $y = 0$  является решением уравнения. При  $y \neq 0$  имеем

$$\frac{dy}{y} = -p(x)dx.$$

Интегрируя это уравнение, получим

$$\ln|y| = -P(x) + \ln|C|,$$

где  $P(x) = \int p(x)dx$ ;  $C$  — отличная от нуля постоянная. Из последнего уравнения находим общее решение уравнения

$$y = Ce^{-P(x)}.$$

Здесь  $C$  — произвольная постоянная, так как решение  $y = 0$  входит в последнее при  $C = 0$ . Теперь заменим постоянную  $C$  на некоторую неизвестную функцию  $C(x)$ , т.е. общее решение уравнения будем искать в виде

$$y = C(x)e^{-P(x)}. \quad (6.2)$$

Значит

$$y' = C'e^{-P(x)} - Ce^{-P(x)}p(x).$$

Подставив выражения для  $y$  и  $y'$  в уравнение, находим

$$C'e^{-P(x)} - Ce^{-P(x)}p(x) + p(x)Ce^{-P(x)} = f(x).$$

Отсюда получим, что  $C' = f(x)e^{P(x)}$ .

Следовательно,

$$C(x) = \int f(x)e^{P(x)}dx.$$

Подставив в формулу (6.2) выражение для  $C(x)$ , получим общее решение исходного уравнения.

Итак, опишем *алгоритм* решения линейного неоднородного дифференциального уравнения *методом вариации постоянной (методом Лагранжа)*.

1. Для заданного неоднородного уравнения выписать соответствующее ему однородное уравнение.

---

<sup>1</sup> Жозеф Луи Лагранж (1736—1813) — французский математик и механик, автор выдающихся исследований по различным вопросам математического анализа, его имя носят теоремы, формулы, методы.



2. Методом разделения переменных найти общее решение однородного уравнения.
3. В общем решении однородного уравнения заменить постоянную  $C$  на функцию  $C(x)$ .
4. Подставить полученное в п. 3 выражение в исходное неоднородное уравнение и найти  $C(x)$ .
5. Выписать общее решение неоднородного уравнения, подставив выражение для  $C(x)$  в формулу (6.2).

### Пример 6.8

Решим уравнение  $y' + \frac{2y}{x} = 5x^2$ .

*Решение*

Это линейное дифференциальное уравнение. Соответствующее однородное уравнение имеет вид

$$y' + 2\frac{y}{x} = 0.$$

Разделяя переменные, имеем

$$\frac{dy}{y} = -\frac{2dx}{x}.$$

Отсюда  $\ln|y| = -2\ln|x| + \ln C$ , т.е.  $y = \frac{C}{x^2}$ .

Полагая  $C = C(x)$ , находим

$$y' = \frac{C'(x)}{x^2} - \frac{2C(x)}{x^3}.$$

Подставив выражение для  $y$  и  $y'$  в исходное уравнение, получим

$$\frac{C'(x)}{x^2} - \frac{2C(x)}{x^3} + \frac{2C(x)}{x^3} = 5x^2.$$

Отсюда следует, что  $C'(x) = 5x^4$ . Значит,  $C(x) = x^5 + C_1$  ( $C_1 = \text{const}$ ). Таким образом,

$$y(x) = \frac{x^5 + C_1}{x^2}, \text{ или } y(x) = x^3 + \frac{C_1}{x^2}.$$

Ответ:  $y(x) = x^3 + \frac{C_1}{x^2}$ .

**Замечание 6.3.** В некоторых случаях дифференциальное уравнение может быть приведено к линейному, если поменять ролями переменные  $y$  и  $x$  — искомую функцию и ее аргумент.

### Пример 6.9

Решим задачу Коши  $y' = \frac{y}{x + 2y^3}$ ,  $y(8) = 2$ .

*Решение*

Данное дифференциальное уравнение не является линейным относительно неизвестной функции  $y(x)$ . Однако если предположить, что неизвестной является функ-



ция  $x(y)$ , то уравнение станет линейным. Действительно, из исходного уравнения следует

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x + 2y^3}{y}, \text{ или } \frac{dx}{dy} = \frac{x}{y} + 2y^2.$$

Решением соответствующего линейного однородного уравнения является  $x = Cy$ .

В соответствии с методом вариации постоянной будем искать решение неоднородного уравнения в виде  $x = C(y)y$ . Подставляя выражение для переменной  $x$  в полученное для нее уравнение, после приведения подобных получаем  $C'y = 2y^2$ , откуда находим  $C(y) = y^2 + C_1$  ( $C_1 = \text{const}$ ).

Таким образом, решением уравнения является  $x = y^3 + C_1y$ .

Теперь найдем решение задачи Коши. Полагая  $x = 8$ ,  $y = 2$ , получаем, что  $C_1 = 0$ . Следовательно,  $x = y^3$ , а значит,  $y = \sqrt[3]{x}$ .

Ответ:  $y = \sqrt[3]{x}$ .

---

### Метод подстановки

Для решения линейного дифференциального уравнения может быть также применен *метод подстановки* (*метод Бернулли*<sup>1</sup>), который заключается в следующем.

1. Решение уравнения ищется в виде

$$y = u(x)v(x),$$

где  $u(x)$  и  $v(x)$  — некоторые функции, которые необходимо определить.

2. Выражение для  $y$  подставляется в исходное уравнение, и после группировки слагаемых оно принимает вид

$$u'v + u(v' + p(x)v) = f(x).$$

3. Функция  $v(x)$  находится из уравнения  $v' + p(x)v = 0$ .

4. После подстановки найденной функции  $v(x)$  получается следующее уравнение для определения функции  $u(x)$ :

$$u' = -\frac{f(x)}{v(x)}.$$

5. Искомое общее решение выписывается в виде  $y = u(x)v(x)$ .

#### Пример 6.10

Решим уравнение  $y' + y \operatorname{ctg} x = 2 \cos x$ .

*Решение*

Пусть  $y = u(x)v(x)$ , тогда

$$u'v + u(v' + v \operatorname{ctg} x) = 2 \cos x.$$

Приравнявая выражение в скобках к нулю, получаем уравнение с разделяющимися переменными

$$\frac{v'}{v} = -\operatorname{ctg} x.$$

---

<sup>1</sup> Иоганн Бернулли (1667–1748) — швейцарский ученый, совместно с братом Якобом Бернулли положил начало вариационному исчислению.



Его общее решение имеет вид

$$v(x) = \frac{C}{\sin x}.$$

В качестве  $v(x)$  возьмем частное решение

$$v(x) = \frac{1}{\sin x},$$

получающееся из общего при  $C = 1$ . Подставляя выражение для  $v(x)$ , находим

$$u' = 2 \sin x \cos x.$$

Отсюда  $u(x) = \sin^2 x + C$ . Тогда  $y = uv = \frac{\sin^2 x + C}{\sin x}$ .

Таким образом, общим решением исходного уравнения будет  $y = \sin x + \frac{C}{\sin x}$ .

Ответ:  $y = \sin x + \frac{C}{\sin x}$ .

---

### 6.1.3. Уравнения Бернулли и Риккати

**Определение 6.9.** Дифференциальное уравнение вида

$$y' + p(x)y = f(x)y^n \quad (n \neq 0, n \neq 1)$$

называется *уравнением Бернулли*.

Заменой  $z = y^{1-n}$  уравнение Бернулли приводится к линейному уравнению

$$z' + (1-n)p(x)z = (1-n)f(x).$$

#### Пример 6.11

---

Решим уравнение  $y' - y = \frac{e^{6x}}{y^2}$ .

*Решение*

Это уравнение Бернулли ( $n = -2$ ). Выполнив замену  $z = y^3$ , получим  $z' = 3y^2y'$ . Умножая обе части исходного уравнения на  $3y^2$  ( $\neq 0$ ), с учетом выражений для  $z$  и  $z'$  находим

$$z' - 3z = 3e^{6x}.$$

Соответствующее линейное однородное уравнение  $z' - 3z = 0$  имеет решение  $z = Ce^{3x}$ . Применяя метод вариации постоянной, получаем

$$C'(x)e^{3x} + 3C(x)e^{3x} - 3C(x)e^{3x} = 3e^{6x},$$

т.е.  $C'(x) = 3e^{3x}$ ,  $C(x) = e^{3x} + C_1$ , где  $C_1$  — произвольная постоянная.

Таким образом,  $z = e^{6x} + C_1e^{3x}$ . Значит,  $y = \sqrt[3]{e^{6x} + C_1e^{3x}}$ .

Ответ:  $y = \sqrt[3]{e^{6x} + C_1e^{3x}}$ .

---

Уравнение Бернулли может быть решено непосредственно при помощи метода Лагранжа или метода Бернулли без предварительного приведения к линейному уравнению.



**Пример 6.12**

Решим задачу Коши  $y' - \frac{y}{x} = \frac{y^2}{x^4}$ ,  $y(1) = \frac{1}{2}$ .

*Решение*

Данное уравнение является уравнением Бернулли ( $n = 2$ ). Решим его методом Лагранжа. Для этого рассмотрим сначала однородное линейное уравнение

$$y' - \frac{y}{x} = 0.$$

Разделяя переменные, находим  $y = Cx$ .

В соответствии с методом вариации постоянной решения неоднородного уравнения будем искать в виде  $y = C(x)x$ . Подставляя выражения для  $y$  и  $y'$  в исходное уравнение, имеем

$$C'x + C - C = \frac{C^2 x^2}{x^3}; \quad \frac{C'}{C^2} = \frac{1}{x^2}.$$

Интегрируя это уравнение, получаем

$$\frac{-1}{C} = \frac{-1}{x} - C_1,$$

где  $C_1$  — произвольная постоянная. Отсюда

$$C(x) = \frac{x}{C_1 x + 1}.$$

Следовательно, общее решение исходного уравнения имеет вид

$$y = \frac{x^2}{C_1 x + 1}.$$

Полагая в общее решение  $x = 1$ ,  $y = \frac{1}{2}$ , находим  $C_1 + 1 = 2$ .

Таким образом,  $C_1 = 1$  и решением задачи Коши будет  $y = \frac{x^2}{x + 1}$ .

*Ответ:*  $y = \frac{x^2}{x + 1}$ .

**Пример 6.13**

Решим уравнение  $y' - \frac{2xy}{1+x^2} = \frac{2\operatorname{arctg} x}{3(1+x^2)^4} y^4$ .

*Решение*

Данное уравнение представляет собой уравнение Бернулли ( $n = 4$ ). Для его решения воспользуемся методом подстановки. Положим  $y = u(x)v(x)$ . В силу этого уравнение принимает вид

$$u'v + u\left(v' - \frac{2xv}{1+x^2}\right) = \frac{2\operatorname{arctg} x}{3(1+x^2)^4} (uv)^4.$$

Функцию  $v(x)$  найдем как решение уравнения с разделяющимися переменными

$$v' - \frac{2xv}{1+x^2} = 0.$$



Интегрируя его, получаем частное решение  $v(x) = 1 + x^2$ .

Подставляя выражение для  $v(x)$  в исходное уравнение, получаем

$$3u'(1+x^2) = 2u^4 \operatorname{arctg} x.$$

Разделяя переменные, находим

$$\frac{3du}{u^4} = \frac{2dx}{1+x^2} \operatorname{arctg} x; \quad \frac{-1}{u^3} = \operatorname{arctg}^2 x - C; \quad u = \frac{1}{\sqrt[3]{C - \operatorname{arctg}^2 x}}.$$

Перемножая  $u$  и  $v$ , получаем общее решение исходного уравнения.

Ответ:  $y = \frac{1+x^2}{\sqrt[3]{C - \operatorname{arctg}^2 x}}.$

---

При рассмотрении некоторых моделей роста встречаются дифференциальные уравнения первого порядка, в которых производная искомой функции равна квадратному трехчлену (с постоянными коэффициентами) от этой функции. С точки зрения экономической динамики также представляют интерес и уравнения того же типа с коэффициентами, зависящими от времени.

**Определение 6.10.** Дифференциальное уравнение вида

$$y' = a(x)y^2 + b(x)y + c(x)$$

называется *уравнением Риккати*<sup>1</sup>.

В общем случае уравнение Риккати не удастся проинтегрировать в квадратурах. Однако при известном частном решении  $y_1(x)$  этого уравнения можно найти и его общее решение. Действительно, делая замену  $y(x) = y_1(x) + z(x)$ , где  $z(x)$  — новая неизвестная функция, приходим к уравнению Бернулли

$$z' - (2a(x)y_1 + b(x))z = a(x)z^2.$$

#### Пример 6.14

---

Решим уравнение  $y' = y^2 - 2xy + x^2 - 1$ .

*Решение*

Нетрудно убедиться в том, что решением является  $y_1(x) = x$ . Тогда в результате замены  $y(x) = x + z(x)$  получаем автономное уравнение  $z' = z^2$ .

Это уравнение имеет стационарное решение  $z = 0$ . Если же  $z \neq 0$ , то, разделяя переменные, находим

$$z = -\frac{1}{x+C}.$$

Возвращаясь к переменной  $y$ , находим решение исходного уравнения

$$y = x - \frac{1}{x+C}.$$

Ответ:  $y = x, \quad y = x - \frac{1}{x+C}.$

---

<sup>1</sup> Якопо Франческо Риккати (1676–1754) — итальянский математик.



#### 6.1.4. Уравнения в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель

**Определение 6.11.** Дифференциальное уравнение вида

$$N(x, y)dx + M(x, y)dy = 0,$$

где  $N(x, y)$ ,  $M(x, y)$  — непрерывные в некоторой области  $D$  функции, называется *уравнением в полных дифференциалах*, если существует такая непрерывно дифференцируемая функция  $U(x, y)$ , что  $dU = N(x, y)dx + M(x, y)dy$ .

Общий интеграл уравнения в полных дифференциалах задается соотношением  $U(x, y) = C$ .

Если уравнение является уравнением в полных дифференциалах, то

$$N = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad M = \frac{\partial U}{\partial y}.$$

Так как  $\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}$ , то получаем  $\frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial y}$ .

Соотношения  $N = \frac{\partial U}{\partial x}$ ,  $M = \frac{\partial U}{\partial y}$  определяют необходимое условие того, что уравнение  $N(x, y)dx + M(x, y)dy = 0$  есть уравнение в полных дифференциалах. Эти условия в ряде случаев являются достаточными (например, если рассматриваемая область выпукла).

Решение такого уравнения сводится к определению функции  $U(x, y)$ . Поясним способ решения на примере.

##### Пример 6.15

Решим уравнение

$$[3x^2 - \sin(x + y^2) + \ln y]dx + \left(\frac{x}{y} - 2y \sin(x + y^2) + 2y\right)dy = 0.$$

*Решение*

Функции  $N(x, y) = 3x^2 - \sin(x + y^2) + \ln y$  и  $M(x, y) = \frac{x}{y} - 2y \sin(x + y^2) + 2y$

непрерывно дифференцируемы в выпуклой области  $D$ , задаваемой условием  $y > 0$ .

Условие равенства частных производных выполнено:

$$\frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial y} = \frac{1}{y} - 2y \cos(x + y^2),$$

значит, рассматриваемое уравнение является уравнением в полных дифференциалах. Найдем функцию  $U(x, y)$  из системы уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} = 3x^2 - \sin(x + y^2) + \ln y, \\ \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{x}{y} - 2y \sin(x + y^2) + 2y. \end{cases}$$

Интегрируя первое уравнение по переменной  $x$ , получаем

$$U = x^3 - \cos(x + y^2) + x \ln y + g(y),$$

где  $g(y)$  — некоторая непрерывно дифференцируемая функция. Чтобы ее определить, подставим выражение для  $U$  во второе уравнение системы. Имеем



$$\frac{x}{y} - 2y \sin(x + y^2) + g'(y) = \frac{x}{y} - 2y \sin(x + y^2) + 2y;$$

$$g'(y) = 2y; g(y) = y^2.$$

Таким образом, общим интегралом исходного уравнения будет

$$x^3 - \cos(x + y^2) + x \ln y + y^2 = C.$$

Ответ:  $x^3 - \cos(x + y^2) + x \ln y + y^2 = C$ .

Некоторые уравнения, записанные в симметричной форме, могут быть сведены к уравнению в полных дифференциалах путем умножения на некоторый множитель.

**Определение 6.12.** Интегрирующим множителем уравнения называется непрерывно дифференцируемая в области  $G$  функция  $\mu(x, y) \neq 0$ , после умножения на которую уравнение становится уравнением в полных дифференциалах.

### Пример 6.16

Решим уравнение

$$x(\sin y^2 - 2\sin x^2 + \cos x^2)dx + y(\sin y^2 + 2\cos y^2 + \cos x^2)dy = 0.$$

Решение

Непосредственной проверкой убеждаемся, что условие  $\frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial y}$  не выполнено

и данное уравнение не является уравнением в полных дифференциалах. Однако оно станет таковым, если обе части этого уравнения умножить на  $e^{xy}$ . Действительно, имеем

$$e^{xy}x(\sin y^2 - 2\sin x^2 + \cos x^2)dx + e^{xy}y(\sin y^2 + 2\cos y^2 + \cos x^2)dy = 0.$$

Теперь, как нетрудно убедиться, условие равенства частных производных выполнено. Решая систему

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} = e^{xy}x(\sin y^2 - 2\sin x^2 + \cos x^2), \\ \frac{\partial U}{\partial y} = e^{xy}y(\sin y^2 + 2\cos y^2 + \cos x^2), \end{cases}$$

находим  $U(x, y) = e^{xy}(\sin y^2 + \cos x^2)$ .

Следовательно, уравнение  $e^{xy}(\sin y^2 + \cos x^2) = C$  определяет общий интеграл исходного уравнения.

Ответ:  $e^{xy}(\sin y^2 + \cos x^2) = C$ .

Если для данного уравнения существует интегрирующий множитель, то он должен удовлетворять условию

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial x} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial y}, \text{ или } M \frac{\partial \mu}{\partial x} - N \frac{\partial \mu}{\partial y} + \mu \left( \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial y} \right) = 0.$$

Последнее равенство представляет собой так называемое *дифференциальное уравнение в частных производных*. Решить это уравнение ничуть



не проще, чем исходное. Однако так как нас интересует только лишь одно его частное решение, то иногда его можно найти, используя особенности коэффициентов  $N$  и  $M$ . В некоторых случаях это удастся сделать в предположении, что  $\mu = \mu(x)$  или  $\mu = \mu(y)$ .

### Пример 6.17

Решим уравнение  $(x + y^2)dx + xydy = 0$ .

*Решение*

Будем искать интегрирующий множитель этого уравнения в виде  $\mu = \mu(x)$ . Уравнение имеет вид  $xy\mu' = (2y - y)\mu$ , или

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{dx}{x}.$$

Из этого равенства находим  $\mu = Cx$ . Итак, в качестве интегрирующего множителя возьмем  $\mu = Cx$ . В результате получаем уравнение в полных дифференциалах

$$C(x^2 + xy^2)dx + Cx^2ydy = 0.$$

Решая систему

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} = C(x^2 + xy^2), \\ \frac{\partial U}{\partial y} = Cx^2y, \end{cases}$$

из первого уравнения находим  $U = \frac{C}{3}x^3 + \frac{C}{2}x^2y^2 + g(y)$ , где  $g(y)$  — некоторая непрерывно дифференцируемая функция. Подставляя выражение для  $U$  во второе уравнение системы, имеем

$$Cxy^2 + g'(y) = Cxy^2; \quad g'(y) = 0; \quad g(y) = C'.$$

Если взять, например,  $C = 6$ , то общим интегралом исходного уравнения будет  $2x^3 + 3x^2y^2 = C'$ .

*Ответ:*  $2x^3 + 3x^2y^2 = C'$ .

## 6.2. Дифференциальные уравнения высших порядков

Имеем  $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$  — дифференциальное уравнение  $n$ -го порядка в нормальной форме. Рассмотрим различные виды таких уравнений и методы их решения.

### 6.2.1. Уравнения, допускающие понижение порядка

В некоторых случаях удастся понизить порядок уравнения.

Если уравнение не содержит в явном виде аргумента, т.е. имеет вид

$$F(y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0,$$

то его порядок может быть понижен на единицу при помощи замены  $y' = z(y)$ , где  $z(y)$  — новая неизвестная функция от аргумента  $y$ .



**Пример 6.18**

Решим уравнение  $y'' = -2y(y')^3$ .

*Решение*

В данном уравнении отсутствует в явном виде аргумент  $x$ . Положим  $y' = z(y)$ , тогда

$$y'' = \frac{dz}{dy} y' = \frac{dz}{dy} z$$

и уравнение преобразуется к виду

$$\frac{dz}{dy} z = -6yz^3.$$

Отсюда следует, что либо  $z = 0$ , а значит,  $y = C$ , либо  $\frac{dz}{dy} = -3yz^2$ . Разделяя переменные и интегрируя полученное уравнение, находим  $3y^2 + C_1 = \frac{1}{z}$ . Следовательно,  $z = \frac{1}{3y^2 + C_1}$ . Возвращаясь к переменной  $y$ , имеем  $y' = \frac{1}{3y^2 + C_1}$ . Интегрируя это уравнение путем разделения переменных, получаем общий интеграл уравнения  $y^3 + C_1 y = x + C_2$ .

Если уравнение не содержит в явном виде искомую функцию и ее производные до  $(k-1)$ -го порядка включительно, т.е. имеет вид  $F(y, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}) = 0$ , то его порядок может быть понижен на  $k$  при помощи замены  $y^{(k)} = z(x)$ .

**Пример 6.19**

Решим уравнение  $y'' = (y')^2 + 1$ .

*Решение*

В данном уравнении отсутствует в явном виде искомая функция. Сделаем замену  $y' = z(x)$ , получаем  $z' = z^2 + 1$ . Разделяя в полученном уравнении переменные и интегрируя его, находим  $z = \operatorname{tg}(x + C_1)$ . Возвращаясь к  $y$ , получим  $y' = \operatorname{tg}(x + C_1)$ ;  $y = -\ln |\cos(x + C_1)| + C_2$ .

*Ответ:*  $y = -\ln |\cos(x + C_1)| + C_2$ .

**Пример 6.20**

Решим уравнение  $\frac{d^5 y}{dx^5} - \frac{1}{x} \cdot \frac{d^4 y}{dx^4} = 0$ .

*Решение*

Путем замены  $z(x) = \frac{d^4 y}{dx^4}$  вместо уравнения пятого порядка получим уравнение первого порядка  $\frac{dz}{dx} - \frac{1}{x} \cdot z = 0$ , решением которого является  $z = Cx$ , или  $\frac{d^4 y}{dx^4} = Cx$ . Четырежды проинтегрировав это выражение, получим решение исходного уравнения в виде  $y = C_1 x^5 + C_2 x^3 + C_3 x^2 + C_4 x + C_5$ . Отметим, что решение уравнения пятого порядка зависит от пяти независимых постоянных.

*Ответ:*  $y = C_1 x^5 + C_2 x^3 + C_3 x^2 + C_4 x + C_5$ .

Порядок дифференциального уравнения, однородного относительно неизвестной функции и ее производных, т.е. удовлетворяющего условию



$F(x, ty, ty', ty'') = t^m F(x, y, y', y'')$ , может быть понижен при помощи замены  $y' = yz(x)$ .

### Пример 6.21

Решим уравнение  $y''y - (y')^2 - \frac{3yy'}{x} = (6x - 3x^2)y^2$ .

*Решение*

Данное уравнение является однородным второй степени относительно  $y, y'$  и  $y''$ .

Сделаем замену  $y' = z(x)y$ , имеем  $y'' = z'y + zy' = (z' + z^2)y$ .

На основании этого исходное уравнение принимает вид

$$\left(z' - \frac{3z}{x} - 6x + 3x^2\right)y^2 = 0.$$

Отсюда вытекает, что либо  $y = 0$ , либо  $z' - \frac{3z}{x} - 6x + 3x^2 = 0$ .

Решая полученное линейное уравнение, находим  $z = 3x^2 + 4C_1x^3$ , отсюда  $\frac{y'}{y} = 3x^2 + 4C_1x^3$ . Интегрируя, получим  $\ln |y| = x^3 + C_1x^4 + \ln |C_2|$ , или  $y = C_2e^{C_1x^3+x^4}$ .

Ответ:  $y = C_2e^{C_1x^3+x^4}$ .

Заметим, что это соотношение задает общее решение исходного уравнения, так как полученное выше частное решение  $y = 0$  входит в него при  $C_1 = 0$ .

### 6.2.2. Линейные дифференциальные уравнения высших порядков

Линейные дифференциальные уравнения первого порядка были рассмотрены выше. Линейные уравнения высших порядков обладают аналогичными свойствами и традиционно выделяются в отдельный класс уравнений. Это связано с их широким применением, так как многие практические задачи либо описываются линейными уравнениями, либо могут быть приближенно решены при помощи линейных уравнений.

**Определение 6.13.** *Линейным дифференциальным уравнением  $n$ -го порядка называется уравнение вида*

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + \dots + a_n(x)y = f(x),$$

где функции  $a_1(x), a_2(x), \dots, a_n(x), f(x)$  определены и непрерывны на некотором подмножестве числовой прямой — конечном или бесконечном, открытом или замкнутом.

Если  $f(x) \not\equiv 0$ , это *неоднородное* уравнение, в случае  $f(x) \equiv 0$  — *однородное*.

Разрешив уравнение относительно старшей производной, получим

$$y^{(n)} = -a_1(x)y^{(n-1)} - a_2(x)y^{(n-2)} - \dots - a_n(x)y + f(x).$$

Правая часть полученного уравнения непрерывна и линейна по  $y, y', \dots, y^{(n-1)}$ , следовательно, дифференцируема. Таким образом, на указанном числовом подмножестве выполнены условия существования и единственности решения задачи Коши (теорема 6.1).



**Определение 6.14.** Назовем *линейным дифференциальным оператором  $n$ -го порядка* следующее выражение, зависящее от функции  $y(x)$ :

$$L(y) = y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y.$$

**Лемма 1.** Пусть  $y_1(x)$  и  $y_2(x)$  — произвольные функции, имеющие производные до  $n$ -го порядка включительно,  $C_1$  и  $C_2$  — произвольные постоянные, тогда

$$L(C_1y_1 + C_2y_2) = C_1L(y_1) + C_2L(y_2).$$

Справедливость этого утверждения легко установить непосредственной проверкой.

Используя принятые выше обозначения, рассматриваемое уравнение можно записать в виде  $L(y) = f(x)$ , называемом *линейным неоднородным уравнением*. Соответствующее ему уравнение  $L(y) = 0$  называется *линейным однородным уравнением*.

Следующее утверждение связывает решения этих уравнений.

**Теорема 6.3.** *Общее решение неоднородного уравнения есть сумма любого частного решения  $\bar{y}(x)$  этого уравнения и общего решения соответствующего ему однородного уравнения.*

Устанавливаемое следующей теоремой свойство линейных уравнений часто используется при нахождении решений.

**Теорема 6.4.** Пусть  $y_1(x)$  и  $y_2(x)$  — соответственно решения уравнений  $L(y) = f_1(x)$  и  $L(y) = f_2(x)$ , тогда  $y_1(x) + y_2(x)$  есть решение уравнения  $L(y) = f_1(x) + f_2(x)$ .

Действительно,  $L(y_1 + y_2) = L(y_1) + L(y_2) = f_1(x) + f_2(x)$ , что и утверждалось в теореме.

### 6.2.3. Линейные однородные дифференциальные уравнения. Фундаментальный набор решений

Остановимся на свойствах частного и общего решений линейного однородного дифференциального уравнения  $n$ -го порядка  $L(y) = 0$ .

**Лемма 2.** Пусть  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_k(x)$  — произвольные решения линейного однородного дифференциального уравнения и  $C_1, C_2, \dots, C_k$  — произвольные постоянные, тогда линейная комбинация  $C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \dots + C_ky_k(x)$  также является решением этого уравнения.

**Определение 6.15.** Система функций  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_k(x)$  называется *линейно зависимой* на некотором множестве  $D \subseteq R$ , если существуют такие числа  $a_1, \dots, a_k$ , одновременно не равные нулю, что линейная комбинация

$$a_1y_1(x) + a_2y_2(x) + \dots + a_ky_k(x) = 0 \text{ для всех } x \in D.$$

В противном случае система функций называется *линейно независимой* на  $D$ .

**Определение 6.16.** *Определителем Вронского<sup>1</sup> для системы функций  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_k(x)$  называется определитель вида*

<sup>1</sup> Юзеф Мария Вронский (1776—1853) — польский математик и философ-мистик.



$$W = W(y_1, y_2, \dots, y_k) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_k \\ y_1' & y_2' & \dots & y_k' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(k)} & y_2^{(k)} & \dots & y_k^{(k)} \end{vmatrix}.$$

Чтобы установить линейную зависимость для некоторого набора функций, применяется следующая теорема.

**Теорема 6.5.** Если функции  $y_1, \dots, y_k$  линейно зависимы на  $D$ , то их определитель Вронского тождественно равен нулю на этом множестве. Если  $y_1(x), \dots, y_k(x)$  — линейно независимые решения линейного однородного уравнения, то их определитель Вронского ни при одном значении  $x$  не обращается в нуль.

**Определение 6.17.** Система  $n$  линейно независимых решений уравнения  $y_1(x), \dots, y_n(x)$  называется *фундаментальным набором решений* этого уравнения.

Итак, если  $y_1(x), \dots, y_n(x)$  — решения уравнения, то любая их линейная комбинация также является решением этого уравнения.

Для получения общего решения линейного однородного дифференциального уравнения этого уравнения существует следующая теорема.

**Теорема 6.6 (об общем решении линейного однородного уравнения).** Общим решением линейного однородного уравнения  $L(y) = 0$  является линейная комбинация

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \dots + C_n y_n(x)$$

$n$  линейно независимых частных решений этого уравнения  $y_1(x), \dots, y_n(x)$ .

#### Пример 6.22

Найдем общее решение уравнения  $y'' - 4y = 0$ .

*Решение*

Для исходного уравнения функции  $y_1(x) = e^{2x}$  и  $y_2(x) = e^{-2x}$  являются частными решениями. Эти решения линейно независимы, так как их определитель Вронского

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} e^{2x} & e^{-2x} \\ 2e^{2x} & -2e^{-2x} \end{vmatrix} = -4 \neq 0.$$

Значит, решения  $y_1, y_2$  образуют фундаментальный набор и общее решение уравнения имеет вид  $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}$ .

*Ответ:*  $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}$ .

#### 6.2.4. Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

Пусть теперь в дифференциальном уравнении коэффициенты являются постоянными.

##### Линейные однородные уравнения

Чтобы найти общее решение линейного однородного уравнения, требуется знать какой-либо фундаментальный набор решений этого уравнения.



В общем случае это является довольно сложной задачей. Однако она упрощается, если коэффициенты уравнения постоянны. Рассмотрим уравнение

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_n y = 0, \quad (6.3)$$

где  $a_1, \dots, a_n$  — некоторые постоянные.

Будем искать решение уравнения в виде функции  $y = e^{\lambda x}$ . Тогда  $y' = \lambda e^{\lambda x}, \dots, y^{(n)} = \lambda^n e^{\lambda x}$ .

Подставим выражения для переменной  $y$  и ее производных в уравнение (6.3), получим

$$\lambda^n e^{\lambda x} + a_1 \lambda^{n-1} e^{\lambda x} + \dots + a_{n-1} \lambda e^{\lambda x} + a_n e^{\lambda x} = 0. \quad (6.4)$$

Так как  $e^{\lambda x} \neq 0$ , то это соотношение эквивалентно уравнению

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0.$$

Это соотношение называется *характеристическим уравнением* линейного однородного дифференциального уравнения (6.3).

Как известно, многочлен  $n$ -го порядка с действительными коэффициентами имеет ровно  $n$  корней, действительных или комплексно-сопряженных. Напомним, что в случае комплексного корня  $z = \alpha + i\beta$  имеем представление  $e^{iz} = e^{\alpha}(\cos\beta + i\sin\beta)$ .

Рассмотрим уравнение второго порядка  $y'' + py' + qy = 0$ .

Такие уравнения обладают всеми свойствами уравнений более высокого порядка, и все полученные для них результаты могут быть перенесены на случай  $n > 2$ .

Рассмотрим соответствующее характеристическое уравнение  $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ . Это квадратное уравнение с действительными коэффициентами. Состав его корней определяется дискриминантом  $D$ .

*Случай 1.  $D > 0$ .* Существуют два действительных различных корня  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  уравнения. Соответствующие им решения уравнения  $y_1 = e^{\lambda_1 x}$ ,  $y_2 = e^{\lambda_2 x}$  линейно независимы. Действительно, их определитель Вронского

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} \end{vmatrix} = (\lambda_2 - \lambda_1) e^{(\lambda_1 + \lambda_2)x}$$

ввиду того, что  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , отличен от нуля. Следовательно,  $y_1$  и  $y_2$  образуют фундаментальный набор и общее решение уравнения имеет вид  $y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$ .

### Пример 6.23

Решим уравнение  $y'' + y' - 2 = 0$ .

*Решение*

Корнями характеристического уравнения  $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$  являются числа  $\lambda_1 = 1$  и  $\lambda_2 = -2$ . Следовательно, общее решение уравнения имеет вид  $y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$ .

*Ответ:*  $y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$ .

*Случай 2.  $D < 0$ .* Характеристическое уравнение имеет два комплексно-сопряженных корня  $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ . Уравнение имеет два линейно независи-



мых комплексно-сопряженных решения  $y_1 = e^{(\alpha+i\beta)x}$ ,  $y_2 = e^{(\alpha-i\beta)x}$ , или в тригонометрической форме

$$y_1 = e^{\alpha x}(\cos \beta x + i \sin \beta x), y_2 = e^{\alpha x}(\cos \beta x - i \sin \beta x).$$

Заменим  $y_1$  и  $y_2$  их линейными комбинациями

$$y_1^* = \frac{1}{2}(y_1 + y_2), y_2^* = \frac{1}{2i}(y_1 - y_2),$$

представляющими собой соответственно действительную и мнимую части  $y_1$ . Эти функции также являются решениями исходного уравнения, причем линейно независимыми и действительными:

$$y_1^* = e^{\alpha x} \cos \beta x, y_2^* = e^{\alpha x} \sin \beta x.$$

Следовательно, общее решение в этом случае имеет вид

$$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x).$$

Ответ:  $y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$ .

#### Пример 6.24

Решим уравнение  $y'' - 2y' + 2y = 0$ .

Решение

Корнями характеристического уравнения  $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$  будут  $\lambda_{1,2} = 1 \pm i$ . В данном случае  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 1$ , так что общим решением данного дифференциального уравнения будет  $y = e^x(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$ .

Ответ:  $y = e^x(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$ .

*Случай 3.  $D = 0$ .* Характеристическое уравнение имеет единственный корень  $\lambda = -\frac{p}{2}$ , которому соответствует решение  $y_1 = e^{-\lambda x}$ . Второе решение возьмем равным  $y_2 = xe^{\lambda x}$ . Таким образом, общим решением в этом случае будет  $y = e^{\lambda x}(C_1 + C_2 x)$ .

#### Пример 6.25

Найдем общее решение уравнения  $y'' + 6y' + 9 = 0$ .

Решение

Характеристическое уравнение  $\lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0$  имеет единственный корень  $\lambda = -3$ . Поэтому общее решение имеет вид  $y = e^{-3x}(C_1 + C_2 x)$ .

Ответ:  $y = e^{-3x}(C_1 + C_2 x)$ .

Сформулируем теперь алгоритм решения линейного однородного дифференциального уравнения  $n$ -го порядка.

1. Составить характеристическое уравнение и найти его корни.
2. Построить фундаментальную систему решений, поставив в соответствие каждому действительному корню характеристического уравнения  $\lambda$  кратности  $k$  совокупность из  $k$  линейно независимых частных решений



$y_1 = e^{\lambda x}$ ,  $y_2 = xe^{\lambda x}$ , ...,  $y_k = x^{k-1}e^{\lambda x}$  и каждой паре комплексно-сопряженных корней  $\alpha \pm i\beta$  кратности  $l$  совокупность из  $2l$  линейно независимых решений

$$y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x, y_2 = xe^{\alpha x} \cos \beta x, \dots, y_l = x^{l-1}e^{\alpha x} \cos \beta x,$$

$$y_{l+1} = e^{\alpha x} \sin \beta x, y_{l+2} = xe^{\alpha x} \sin \beta x, \dots, y_{2l} = x^{l-1}e^{\alpha x} \sin \beta x.$$

3. Выписать общее решение уравнения.

### Пример 6.26

Решим уравнение  $y^{IV} - 2y''' + 2y' - y = 0$ .

*Решение*

Характеристическое уравнение имеет вид  $\lambda^4 - 2\lambda^3 + 2\lambda - 1 = 0$ .

После несложных тождественных преобразований получаем  $(\lambda + 1)(\lambda - 1)^3 = 0$ .

Данное уравнение имеет два корня:  $\lambda_1 = -1$  и  $\lambda_2 = 1$ , причем кратность  $\lambda_2$  равна 3. Следовательно, общим решением исходного уравнения будет

$$y = e^x(C_1 + C_2x + C_3x^2) + C_4e^{-x}.$$

*Ответ:*  $y = e^x(C_1 + C_2x + C_3x^2) + C_4e^{-x}$ .

### Пример 6.27

Найдем общее решение уравнения  $y''' - 2y'' + y' - 2y = 0$ .

*Решение*

Решая характеристическое уравнение  $\lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$ , находим  $\lambda_1 = 2$ ;  $\lambda_{2,3} = \pm i$ .

Таким образом, общее решение исходного уравнения имеет вид  $y = C_1e^{2x} + C_2 \cos x + C_3 \sin x$ .

*Ответ:*  $y = C_1e^{2x} + C_2 \cos x + C_3 \sin x$ .

## 6.2.5. Линейные неоднородные уравнения

Для отыскания решения неоднородного уравнения

$$y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + a_2y^{(n-2)} + \dots + a_ny = f(x)$$

так же, как и для уравнений первого порядка, можно применить *метод вариации постоянных*. Продемонстрируем это на примере уравнения второго порядка

$$y'' + py' + qy = f(x).$$

Будем искать решение в виде

$$y = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2, \quad (6.5)$$

где  $y_1(x)$ ,  $y_2(x)$  — фундаментальный набор решений соответствующего однородного уравнения, а  $C_1(x)$ ,  $C_2(x)$  — искомые функции. Из равенства (6.5) находим

$$y' = C_1'y_1 + C_2'y_2 + C_1y_1' + C_2y_2'.$$

Потребуем дополнительно, чтобы  $C_1'y_1 + C_2'y_2 = 0$ .

Тогда получим  $y' = C_1y_1' + C_2y_2'$ .



Следовательно,  $y'' = C_1'y_1' + C_2'y_2' + C_1y_1'' + C_2y_2''$ .

Подставив найденные значения для  $y$ ,  $y'$  и  $y''$  в исходное уравнение, получим

$$C_1(y_1'' + py_1' + qy_1) + C_2(y_2'' + py_2' + qy_2) + C_1'y_1' + C_2'y_2' = f(x).$$

Оба выражения, заключенные в скобки, равны нулю, так как  $y_1$  и  $y_2$  являются решениями однородного уравнения. Следовательно,  $C_1'y_1' + C_2'y_2' = f(x)$ .

Таким образом, неизвестные функции  $C_1'(x)$  и  $C_2'(x)$  должны удовлетворять системе уравнений

$$\begin{cases} C_1'y_1' + C_2'y_2' = 0, \\ C_1'y_1' + C_2'y_2' = f(x). \end{cases}$$

Определителем этой системы является определитель Вронского, который отличен от нуля в силу линейной независимости  $y_1$  и  $y_2$ . Следовательно, из этой системы мы можем однозначно определить функции  $C_1'(x)$  и  $C_2'(x)$ . Проинтегрировав их, мы найдем  $C_1(x)$  и  $C_2(x)$ , а затем найдем и решение самого уравнения.

#### Пример 6.28

Решим уравнение  $y'' + 3y' - 4y = 120e^{2x}$ .

*Решение*

Соответствующее однородное уравнение имеет линейно независимые решения  $y_1 = e^x$  и  $y_2 = e^{-4x}$  ( $\lambda_1 = 1$  и  $\lambda_2 = -4$  — корни характеристического уравнения). Потому решение этого неоднородного уравнения будем искать в виде  $y = C_1(x)e^x + C_2(x)e^{-4x}$ .

Чтобы найти  $C_1(x)$  и  $C_2(x)$ , решим систему

$$\begin{cases} e^x C_1'(x) + e^{-4x} C_2'(x) = 0, \\ e^x C_1'(x) - 4e^{-4x} C_2'(x) = 30e^{2x}. \end{cases}$$

Получим  $C_1(x) = 6e^x + \bar{C}_1$ ,  $C_2(x) = -e^{6x} + \bar{C}_2$ , где  $\bar{C}_1$  и  $\bar{C}_2$  — произвольные постоянные. Таким образом, общим решением искомого уравнения будет  $y = 5e^{2x} + \bar{C}_1 e^x + \bar{C}_2 e^{-4x}$ .

*Ответ:*  $y = 5e^{2x} + \bar{C}_1 e^x + \bar{C}_2 e^{-4x}$ .

В некоторых случаях отыскать частное решение неоднородного уравнения можно более простым способом.

Так, если коэффициенты левой части уравнения постоянны, а правая часть имеет специальный вид

$$f(x) = e^{ax}(P_n(x)\cos bx + Q_k(x)\sin bx),$$

где  $P_n(x)$  и  $Q_k(x)$  — многочлены от  $x$  степени соответственно  $n$  и  $k$ , для отыскания частного решения можно воспользоваться *методом неопределенных коэффициентов*. Он заключается в следующем. Если число  $\gamma = a + bi$  не является корнем характеристического уравнения, то частное решение ищется в виде

$$y = e^{ax}(\bar{P}_m(x)\cos bx + \bar{Q}_m(x)\sin bx),$$

где  $\bar{P}_m(x)$  и  $\bar{Q}_m(x)$  — многочлены степени  $m = \max\{k, n\}$  с неопределенными коэффициентами. Эти коэффициенты необходимо определить путем



подстановки неизвестной функции  $y$  в дифференциальное уравнение. Если же  $\gamma$  является корнем характеристического уравнения кратности  $l$ , то частное решение ищется в виде

$$y = x^l e^{ax} (\bar{P}_m(x) \cos bx + \bar{Q}_m(x) \sin bx).$$

Этот случай часто называют *резонансным*.

### Пример 6.29

Решим уравнение  $y'' + 5y' + 6y = 56e^{5x}$ .

*Решение*

Характеристическое уравнение  $\lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0$  имеет корни  $\lambda_1 = -2$  и  $\lambda_2 = -3$ . Следовательно, общим решением соответствующего однородного уравнения будет

$$y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-3x}.$$

Теперь найдем частное решение. Воспользуемся методом неопределенных коэффициентов. Частное решение будем искать в том же виде, какой имеет правая часть исходного уравнения (число  $\gamma = 5$  не является корнем характеристического уравнения):

$$y = A e^{5x} (A = \text{const}).$$

Продифференцировав  $y' = 5A e^{5x}$ ;  $y'' = 25A e^{5x}$  и подставив  $y$ ,  $y'$  и  $y''$  в исходное уравнение, имеем  $56A e^{5x} = 56e^{5x}$ . Отсюда  $A = 1$ . Таким образом, частным решением исходного уравнения будет  $y = e^{5x}$ .

Следовательно, общее решение уравнения имеет вид  $y = e^{5x} + C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-3x}$ .

*Ответ:*  $y = e^{5x} + C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-3x}$ .

### Пример 6.30

Найдем общее решение уравнения  $y''' + y'' - 4y' - 4 = 10 \sin x$ .

*Решение*

Характеристическое уравнение  $\lambda^3 + \lambda^2 - 4\lambda - 4 = 0$  имеет корни  $\lambda_{1,2} = \pm 2$  и  $\lambda_3 = -1$ . Общее решение однородного уравнения имеет вид  $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{2x} + C_3 e^{-x}$ .

В этом решении нет слагаемых, соответствующих правой части уравнения, поэтому частное решение будем искать в виде

$$y = A \sin x + B \cos x (A, B = \text{const}).$$

Дифференцируя:

$$y' = A \cos x - B \sin x, y'' = -A \sin x - B \cos x, y''' = -A \cos x + B \sin x,$$

и подставляя выражения для искомой функции и ее производных в исходное уравнение, находим

$$(5B - 5A) \sin x - (5B + 5A) \cos x = 10 \sin x.$$

Так как это равенство выполняется тождественно, то имеем систему уравнений

$$\begin{cases} 5B - 5A = 10, \\ 5B + 5A = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -1, \\ B = 1. \end{cases}$$

Таким образом, общим решением данного уравнения будет

$$y = \cos x - \sin x + C_1 e^{-2x} + C_2 e^{2x} + C_3 e^{-x}.$$

*Ответ:*  $y = \cos x - \sin x + C_1 e^{-2x} + C_2 e^{2x} + C_3 e^{-x}$ .



**Пример 6.31**

Решим уравнение  $y'' + y = x^2 + 2xe^x$ .

*Решение*

Составив и решив характеристическое уравнение, получим общее решение однородного уравнения  $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$ .

Так как правая часть данного линейного неоднородного уравнения представляет собой сумму двух выражений, то в соответствии с теоремой 6.5 его частное решение будем искать в виде суммы  $y_1 + y_2$  частного решения  $y_1$  уравнения  $y'' + y = x^2$  (а) и частного решения  $y_2$  уравнения  $y'' + y = 2xe^x$  (б).

Отметим, что обе составляющие правой части не входят в общее решение однородного уравнения.

В первом случае частное решение будем искать в виде

$$y = Ax^2 + Bx + C \quad (A, B, C = \text{const}).$$

Имеем  $y' = 2Ax + B$ ,  $y'' = 2A$ . Подставляя в уравнение (а), получим

$$2A + Ax^2 + Bx + C = x^2,$$

или

$$(A - 1)x^2 + Bx + C + 2A = 0.$$

Следовательно,

$$\begin{cases} A - 1 = 0, \\ B = 0, \\ C + 2A = 0, \end{cases} \text{ т.е. } \begin{cases} A = 1, \\ B = 0, \\ C = -2. \end{cases}$$

Отсюда находим частное решение уравнения (а):  $y = x^2 - 2$ .

Для уравнения (б) частное решение ищем в виде

$$y = (Mx + K)e^x \quad (M, K = \text{const}).$$

Находим  $y' = (Mx + K + M)e^x$ ,  $y'' = (Mx + K + 2M)e^x$ .

Подставляя в уравнение (б), получим  $(2Mx + 2K + 2M)e^x = 2xe^x$ . Имеем систему

$$\begin{cases} 2M = 2, \\ 2M + 2K = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M = 1, \\ K = -1. \end{cases}$$

Отсюда получаем частное решение уравнения (б)  $y = (x - 1)e^x$ .

Следовательно, общим решением исходного уравнения будет

$$y = x^2 - 2 + (x - 1)e^x + C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

*Ответ:*  $y = x^2 - 2 + (x - 1)e^x + C_1 \cos x + C_2 \sin x$ .

**Пример 6.32**

Решим уравнение  $y'' - 2y' + y = e^x$ .

*Решение*

Характеристическое уравнение  $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$  имеет корень  $\lambda = 1$  кратности 2 (резонансный случай). Общее решение однородного уравнения  $y = (C_1 x + C_2)e^x$ .

Здесь правая часть исходного уравнения входит в общее решение однородного уравнения. Поэтому частное решение неоднородного уравнения будем искать в виде

$$y = Ax^2 e^x.$$

Имеем  $y' = 2Ax e^x + Ax^2 e^x$ ;  $y'' = (2A + 4Ax + Ax^2)e^x$ .



Подставляя полученные выражения в исходное уравнение, находим  $2Ae^x = e^x$ ;  $A = 0,5$ .

Таким образом, общим решением данного уравнения является  $y = (0,5x^2 + C_1x + C_2)e^x$ .

Ответ:  $y = (0,5x^2 + C_1x + C_2)e^x$ .

### Пример 6.33

Решим уравнение  $y^{IV} + 3y'' - 4y = e^{2x}(42\sin x + 64\cos x)$ .

Решение

Характеристическое уравнение  $\lambda^4 + 3\lambda^2 - 4 = 0$  имеет корни  $\lambda_1 = -1$ ,  $\lambda_2 = 1$ ,  $\lambda_3 = 2i$ ,  $\lambda_4 = -2i$ . Они не совпадают с числом  $\gamma = 2 + i$ , соответствующим правой части, поэтому частное решение будем искать в виде

$$y = e^{2x}(A\sin x + B\cos x) \quad (A, B = \text{const}).$$

Находим производные:

$$y' = e^{2x}[(2B - A)\sin x + (B + 2A)\cos x];$$

$$y'' = e^{2x}[(3B - 4A)\sin x + (4B + 3A)\cos x];$$

$$y''' = e^{2x}[(4B - 7A)\sin x + (7B + 4A)\cos x];$$

$$y^{IV} = e^{2x}[(B - 18A)\sin x + (18B + A)\cos x].$$

Подставляя выражения для  $y$ ,  $y''$  и  $y^{IV}$  в исходное уравнение, получаем

$$e^{2x}[(6B - 30A)\sin x + (30B - 4A)\cos x] = e^{2x}(42\sin x + 64\cos x).$$

Следовательно, имеем систему

$$\begin{cases} 6B - 30A = 42, \\ 30B - 4A = 64. \end{cases}$$

Решением этой системы является пара  $A = -1$ ,  $B = 2$ . Таким образом, общим решением исходного уравнения будет

$$y = e^{2x}(2\cos x - \sin x) + C_1e^x + C_2e^{-x} + C_3\sin 2x + C_4\cos 2x.$$

Ответ:  $y = e^{2x}(2\cos x - \sin x) + C_1e^x + C_2e^{-x} + C_3\sin 2x + C_4\cos 2x$ .

Рассмотрим модель рынка с прогнозируемыми ценами. В простых моделях рынка спрос и предложение полагают зависящими от текущей цены на товар. Однако для более полного отражения реальной ситуации можно учесть зависимость спроса и предложения также от тенденции ценообразования и темпов изменения цены. Эти характеристики описываются первой и второй производными функции цены  $p(t)$ . В этом случае процесс описывается дифференциальным уравнением второго порядка. Рассмотрим конкретный пример.

### Пример 6.34

Пусть функции спроса  $D$  и предложения  $S$  описываются зависимостями  $D(t) = 3p'' - p' - 2p + 18$ ;  $S(t) = 4p'' + p' + 3p + 3$ . Выражение для функции  $D(t)$  учитывает факт влияния темпа роста цены  $p''$  на увеличение спроса. Слагаемое  $p'$  входит в формулу со знаком «минус», так как быстрый рост цены отпугивает покупателя. Предложение  $S(t)$  также усиливается при высоком росте темпа изменения цены, а также увеличивается при увеличении цены. Необходимо установить зависимость цены от времени, т.е. найти функцию  $p(t)$ .



### Решение

Считая, что рынок находится в состоянии равновесия, приравняем спрос и предложение, приведем подобные и получим уравнение

$$p'' + 2p' + 5p = 15,$$

которое является линейным неоднородным дифференциальным уравнением второго порядка. Характеристическое уравнение  $\lambda + 2\lambda + 5 = 0$  имеет комплексно-сопряженные корни  $\lambda_{1,2} = -1 \pm 2i$ , следовательно, общее решение однородного уравнения имеет вид

$$p(t) = e^{-t}(C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t).$$

В качестве частного решения неоднородного уравнения возьмем равновесную цену  $p = p^*$ . Подставив в исходное уравнение, получим  $p^* = 3$ . Окончательно зависимость цены от времени имеет вид  $p(t) = 3 + e^{-t}(C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t)$ .

Анализ этой зависимости показывает, что все интегральные кривые имеют горизонтальную асимптоту  $p = 3$  и колеблются около нее. При увеличении времени все цены стремятся к равновесной цене.

Ответ:  $p(t) = 3 + e^{-t}(C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t)$ .

## 6.3. Разностные уравнения

### 6.3.1. Основные понятия

**Определение 6.18.** Уравнение вида

$$F(n, y_n, y_{n+1}, \dots, y_{n+k}) = 0, \quad (6.6)$$

где  $k$  — фиксированное, а  $n$  — произвольное натуральное число,  $y_n, y_{n+1}, \dots, y_{n+k}$  — члены некоторой числовой последовательности, называется *разностным уравнением  $k$ -го порядка*.

Решить разностное уравнение, найти его общее решение, означает найти все последовательности  $y_n = y(n)$ , удовлетворяющие уравнению (6.6).

Разностные уравнения используются в моделях экономической динамики с дискретным временем, а также для приближенного решения дифференциальных уравнений.

Некоторые типы разностных уравнений нам уже знакомы. Например, разностное уравнение второго порядка

$$2y_{n+1} = y_n + y_{n+2}$$

задает признак арифметической прогрессии. Его решением является последовательность  $y_n = a_1 + d(n-1)$ , где  $a_1$  и  $d$  — произвольные действительные числа. Аналогично уравнение  $y_{n+1}^2 = y_n y_{n+2}$  определяет признак геометрической прогрессии, и его решением является последовательность  $y_n = b_1 q^{n-1}$ , где  $b_1$  и  $q$  — произвольные действительные числа.

Между теориями разностных и дифференциальных уравнений прослеживается определенная аналогия. Если в уравнении (6.6) произвести формальную замену

$$n \mapsto x, \quad y_n \mapsto y(x), \quad y_{n+1} \mapsto y'(x), \dots, \quad y_{n+k} \mapsto y^{(k)}(x), \quad (6.7)$$



то определение разностного уравнения трансформируется в общее определение обыкновенного дифференциального уравнения порядка  $k$ . Проведя замену (6.7), нетрудно получить *нормальную форму* записи разностного уравнения

$$y_{n+k} = f(n, y_n, y_{n+1}, \dots, y_{n+k-1}). \quad (6.8)$$

*Задача Коши* ставится как задача определения решения уравнения (6.8), удовлетворяющего начальным условиям

$$y(n_0) = a_0, \quad y(n_0 + 1) = a_1, \quad \dots, \quad y(n_0 + k - 1) = a_{k-1}.$$

Решение соответствующих классов дифференциальных и разностных уравнений (например, линейных) осуществляется схожими методами.

**Теорема 6.7.** *Решение  $y_n = y(n)$  задачи Коши при  $n \geq n_0$  определено однозначно.*

Заметим, что приведенная теорема не позволяет находить общее решение разностного уравнения.

### 6.3.2. Линейные разностные уравнения

**Определение 6.19.** Разностное уравнение вида

$$a_k(n)y_{n+k} + \dots + a_1(n)y_{n+1} + a_0(n)y_n = f(n),$$

где  $a_0, a_1, \dots, a_k, f$  — некоторые функции от  $n$  ( $a_0 \neq 0, a_k \neq 0$ ), называется *линейным разностным уравнением  $k$ -го порядка*.

Назовем

$$L(y) = a_k y_{n+k} + \dots + a_1 y_{n+1} + a_0 y_n$$

*линейным разностным оператором  $k$ -го порядка*. Тогда данное уравнение может быть записано в виде

$$L(y) = f(n). \quad (6.9)$$

Уравнение  $L(y) = 0$  называется *линейным однородным разностным уравнением*, соответствующим уравнению (6.9). Само же уравнение (6.9) при  $f(n) \neq 0$  называется *неоднородным*.

**Теорема 6.8 (об общем решении линейного неоднородного уравнения).** *Общее решение линейного неоднородного разностного уравнения (6.9) есть сумма частного решения  $\bar{y}(n)$  этого уравнения и общего решения соответствующего ему однородного уравнения.*

**Теорема 6.9 (об общем решении линейного однородного уравнения).** *Пусть  $y^{(1)}(n), \dots, y^{(k)}(n)$  — система, состоящая из  $k$  линейно независимых решений линейного однородного разностного уравнения, тогда общее решение этого уравнения задается формулой*

$$y(n) = C_1 y^{(1)}(n) + \dots + C_k y^{(k)}(n).$$

Множество решений линейного однородного разностного уравнения  $k$ -го порядка образует  $k$ -мерное линейное пространство, а любой набор



$y^{(1)}(n), \dots, y^{(k)}(n)$  из  $k$  линейно независимых решений (называемый *фундаментальным набором*) является его базисом. Признаком линейной независимости решений  $y^{(1)}(n), \dots, y^{(k)}(n)$  однородного уравнения является неравенство нулю определителя Казорати<sup>1</sup>

$$\Delta = \begin{vmatrix} y_n^{(1)} & y_n^{(2)} & \dots & y_n^{(k)} \\ y_{n+1}^{(1)} & y_{n+1}^{(2)} & \dots & y_{n+1}^{(k)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n+k}^{(1)} & y_{n+k}^{(2)} & \dots & y_{n+k}^{(k)} \end{vmatrix},$$

который является аналогом определителя Вронского в теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

В случае, когда коэффициенты  $a_0, a_1, \dots, a_k$  являются постоянными, методы решения линейного однородного разностного уравнения

$$a_k y_{n+k} + \dots + a_1 y_{n+1} + a_0 y_n = 0 \quad (6.10)$$

во многом аналогичны методам решения дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Будем искать решения уравнения в виде  $y_n = \lambda^n$ , где  $\lambda \neq 0$  — некоторая постоянная. Подставляя выражение  $y_n = \lambda^n$  в уравнение (6.10), получим

$$a_k \lambda^{n+k} + a_{k-1} \lambda^{n+k-1} + \dots + a_1 \lambda^{n+1} + a_0 \lambda^n = 0.$$

Разделим обе части этого уравнения на  $\lambda^n$ , получим

$$a_k \lambda^k + a_{k-1} \lambda^{k-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0.$$

Последнее уравнение называется *характеристическим уравнением* однородного линейного разностного уравнения.

Так же как и в случае линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, общее решение однородного разностного уравнения формируется в зависимости от корней характеристического уравнения.

Продemonстрируем это на примере уравнения второго порядка

$$a y_{n+2} + b y_{n+1} + c y_n = 0, \quad a \neq 0, c \neq 0.$$

Полученные при этом результаты могут быть без труда перенесены на случай уравнений более высокого порядка.

В зависимости от значения дискриминанта характеристического уравнения  $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$  возможны следующие случаи.

*Случай 1.*  $D > 0$ . Характеристическое уравнение имеет два действительных различных корня  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ . Тогда  $\lambda_1 \neq 0$  и  $\lambda_2 \neq 0$  (если хотя бы один корень равен нулю, то коэффициент  $c = \lambda_1 \lambda_2$  также будет равен нулю, что противоречит определению линейного разностного уравнения второго порядка).

<sup>1</sup> Феличе Казорати, или Касороти (1835–1890), — итальянский математик, автор учебников и монографий, родился в Павии и там же был профессором университета. Работы относятся к теории функций. Известны также его работы по обыкновенным дифференциальным уравнениям и истории математики.



Корням  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  характеристического уравнения соответствуют два решения  $y_n^{(1)} = \lambda_1^n$ ,  $y_n^{(2)} = \lambda_2^n$ . Покажем, что эти решения линейно независимы. Для этого вычислим определитель Казорати:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \lambda_1^n & \lambda_2^n \\ \lambda_1^{n+1} & \lambda_2^{n+1} \end{vmatrix} = \lambda_1^n \lambda_2^{n+1} - \lambda_1^{n+1} \lambda_2^n = \lambda_1^n \lambda_2^n (\lambda_2 - \lambda_1).$$

Так как корни  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  различны, то  $\lambda_2 - \lambda_1 \neq 0$ , следовательно,  $\Delta \neq 0$ , а значит, решения линейно независимы. В этом случае общее решение уравнения имеет вид

$$y(n) = C_1 \lambda_1^n + C_2 \lambda_2^n,$$

где  $C_1, C_2$  — произвольные постоянные.

### Пример 6.35

Решим уравнение  $y_{n+2} + 4y_{n+1} - 5y_n = 0$ .

*Решение*

Характеристическое уравнение  $\lambda^2 + 4\lambda - 5 = 0$  имеет корни  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = -5$ . Поэтому общее решение исходного уравнения имеет вид  $y_n = C_1 + C_2(-5)^n$ .

*Ответ:*  $y_n = C_1 + C_2(-5)^n$ .

*Случай 2.  $D < 0$ .* Характеристическое уравнение имеет два комплексно-сопряженных корня  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ , которые, используя тригонометрическую форму записи, могут быть представлены следующим образом:

$$\lambda_1 = r(\cos \varphi + i \sin \varphi), \quad \lambda_2 = r(\cos \varphi - i \sin \varphi),$$

где  $r$  — модуль корня  $\lambda_1$ , а  $\varphi$  — его аргумент. Соответствующие решения разностного уравнения также комплексно сопряжены и на основании формулы Муавра имеют вид

$$y_n^{(1)} = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi), \quad y_n^{(2)} = r^n (\cos n\varphi - i \sin n\varphi).$$

Чтобы получить действительные решения, заменим  $y_n^{(1)}$  и  $y_n^{(2)}$  их линейными комбинациями

$$z_n^{(1)} = \frac{1}{2}(y_n^{(1)} + y_n^{(2)}), \quad z_n^{(2)} = \frac{1}{2i}(y_n^{(1)} - y_n^{(2)}).$$

Таким образом, мы получили два линейно независимых действительных решения

$$z_n^{(1)} = r^n \cos n\varphi; \quad z_n^{(2)} = r^n \sin n\varphi.$$

Общее решение имеет вид  $y_n = r^n (C_1 \cos n\varphi + C_2 \sin n\varphi)$ .

### Пример 6.36

Решим уравнение  $y_{n+2} - 2y_{n+1} + 4y_n = 0$ .

*Решение.*

Характеристическое уравнение  $\lambda^2 - 2\lambda + 4 = 0$  имеет два комплексно-сопряженных корня  $\lambda_1 = 1 + \sqrt{3}i$  и  $\lambda_2 = 1 - \sqrt{3}i$ , которые могут быть записаны в виде



$$\lambda_1 = 2 \left( \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right); \lambda_2 = 2 \left( \cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3} \right).$$

Следовательно, общим решением исходного уравнения будет

$$y_n = 2^n \left( C_1 \cos \frac{n\varphi}{3} + C_2 \sin \frac{n\varphi}{3} \right).$$

Ответ  $y_n = 2^n \left( C_1 \cos \frac{n\varphi}{3} + C_2 \sin \frac{n\varphi}{3} \right).$

---

*Случай 3.  $D = 0$ .* Характеристическое уравнение имеет действительный корень  $\lambda$ . В этом случае кроме решения  $y_n^{(1)} = \lambda^n$  нужно подобрать еще одно решение, линейно независимое с  $y_n^{(1)}$ . Нетрудно убедиться, что таковым является  $y_n^{(2)} = n\lambda^n$ .

Сначала докажем, что  $y_n^{(2)}$  является решением уравнения  $ay_{n+2} + by_{n+1} + cy_n = 0$ ,  $a \neq 0$ ,  $c \neq 0$ . Подставляя выражение для  $y_n^{(2)}$  в уравнение, получим

$$\begin{aligned} a(n+2)\lambda^{n+2} + b(n+1)\lambda^{n+1} + cn\lambda^n &= \lambda^n [a(n+2)\lambda^2 + b\lambda(n+1) + cn] = \\ &= \lambda^n [n(a\lambda^2 + b\lambda + c) + 2a\lambda^2 + b\lambda] = 0 \end{aligned}$$

в силу того, что  $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$  и  $\lambda = -\frac{b}{2a}$ . Определитель Касорати для этой

пары решений  $\Delta = \begin{vmatrix} \lambda^n & n\lambda^n \\ \lambda^{n+1} & (n+1)\lambda^{n+1} \end{vmatrix} = \lambda^{2n+1}$  не обращается в ноль, так как

$\lambda \neq 0$ . Следовательно, частные решения  $y_n^{(1)}$  и  $y_n^{(2)}$  линейно независимы и общее решение уравнения имеет вид

$$y_n = \lambda^n (C_1 + nC_2).$$

### Пример 6.37

Решим уравнение  $y_{n+2} + 6y_{n+1} + 9y_n = 0$ .

*Решение*

Характеристическое уравнение  $\lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0$  имеет единственный действительный корень  $\lambda = -3$ . Следовательно, общим решением исходного уравнения является

$$y_n = (-3)^n (C_1 + nC_2).$$

Ответ:  $y_n = (-3)^n (C_1 + nC_2).$

---

Чтобы решить неоднородное линейное разностное уравнение, так же как и в случае линейных дифференциальных уравнений, используется *метод неопределенных коэффициентов*, основанный на подборе частного решения неоднородного уравнения по виду правой части  $f(n)$ .

### Пример 6.38

Решим уравнение  $y_{n+2} + 2y_{n+1} - 3y_n = 64 \cdot 5^n$ .



Решение

Будем искать частное решение в виде  $y(n) = p5^n$ .

Подставляя это выражение в наше уравнение, получим

$$p(25 + 10 - 3)5^n = 64 \cdot 5^n.$$

Следовательно,  $p = 2$ , а значит,  $y(n) = 2 \cdot 5^n$ .

Решая характеристическое уравнение  $\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0$ , находим  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = -3$ . Таким образом, общее решение уравнения имеет вид  $y_n = 2 \cdot 5^n + C_1 + C_2(-3)^n$ .

Ответ:  $y_n = 2 \cdot 5^n + C_1 + C_2(-3)^n$ .

---

### 6.3.3. Применение разностных уравнений в экономической динамике

Рассмотрим некоторые модели экономической динамики, базирующиеся на разностных уравнениях.

#### Модель Самуэльсона — Хикса

Модель делового цикла Самуэльсона — Хикса<sup>1</sup> (динамический вариант модели Кейнса<sup>2</sup>) строится в предположении о том, что объемы инвестирования прямо пропорциональны приросту национального дохода (принцип акселерации). Это предположение описывается следующим уравнением:

$$I(t) = V(Y(t-1) - Y(t-2)),$$

где коэффициент  $V > 0$  — фактор акселерации;  $I(t)$  — величина инвестиций в период  $t$ ,  $Y(t-1), Y(t-2)$  — величины национального дохода соответственно в  $(t-1)$ -м и  $(t-2)$ -м периодах. Предполагается также, что спрос на данном этапе зависит от величины национального дохода на предыдущем этапе, т.е.

$$C(t) = aY(t-1) + b.$$

Условие равенства спроса и предложения имеет вид

$$Y(t) = I(t) + C(t).$$

Последнее с учетом предыдущего принимает вид

$$Y(t) = (a+V)Y(t-1) - VY(t-2) + b.$$

Это уравнение Хикса. Оно представляет собой неоднородное линейное разностное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами (если предположить, что на протяжении рассматриваемых периодов величины  $a$  и  $V$  постоянны).

---

<sup>1</sup> Джон Ричард Хикс (1904—1989) — английский экономист, лауреат нобелевской премии 1972 г. (совместно с К. Д. Эрроу) за новаторский вклад в общую теорию экономического равновесия и теорию благосостояния; Пол Энгонн Самуэльсон (1915—2009) — американский экономист, нобелевский лауреат 1970 г. за научную работу, развившую статическую и динамическую экономическую теорию и внесшую вклад в повышение общего уровня анализа в области экономической науки.

<sup>2</sup> Джон Мейнард Кейнс (1883—1946) — английский экономист и публицист, основоположник кейнсианства. Основное сочинение — «Общая теория занятости, процента и денег» (1936).



В качестве частного решения рассмотрим равновесное решение  $Y^* = \text{const}$ , которое будем искать из условия

$$Y(t) = Y(t-1) = Y(t-2) = Y^*.$$

Подставив в уравнение Хикса, получим  $Y^* = (a+V)Y^* - VY^* + b$ , откуда  $Y^* = b(1-a)^{-1}$ .

Выражение  $(1-a)^{-1}$  носит название *мультипликатора Кейнса* и является одномерным аналогом *матрицы полных затрат*.

### Пример 6.39

Рассмотрим модель Самуэльсона — Хикса при условии, что  $a = 0,5$ ;  $V = 0,5$ ;  $b = 4$ . В этом случае уравнение принимает вид  $Y(t) - Y(t-1) + 0,5Y(t-2) = 4$ .

*Решение*

Частным решением будет

$$y(t) = \frac{4}{1-0,5} = 8.$$

Корни характеристического уравнения  $\lambda^2 - \lambda + 0,5 = 0$  равны

$$\lambda_{1,2} = 1 \pm i = \sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} \pm i \sin \frac{\pi}{4} \right).$$

Таким образом, общим решением соответствующего однородного уравнения является

$$\tilde{Y}(t) = (\sqrt{2})^t \left( C_1 \cos \frac{t\pi}{4} + C_2 \sin \frac{t\pi}{4} \right).$$

Следовательно, общим решением уравнения будет

$$Y(t) = 8 + (\sqrt{2})^t \left( C_1 \cos \frac{t\pi}{4} + C_2 \sin \frac{t\pi}{4} \right).$$

*Ответ:*  $Y(t) = 8 + (\sqrt{2})^t \left( C_1 \cos \frac{t\pi}{4} + C_2 \sin \frac{t\pi}{4} \right).$

В зависимости от значений  $a$  и  $V$  возможны четыре типа динамики. Она может быть растущей или затухающей и при этом иметь или не иметь колебательный характер. Так, в рассмотренном выше примере динамика носила колебательный характер с возрастающей амплитудой. Мы рекомендуем читателю самостоятельно определить виды динамики в зависимости от  $a$  и  $V$ .

### Паутинная модель рынка

Рассмотрим паутинную модель рынка. При этом предположим, что спрос и предложение задаются линейными функциями, но при этом спрос зависит от цены в данный момент времени, а предложение зависит от цены на предыдущем этапе, т.е.

$$d_t = a - bp_t; s_t = m + np_{t-1},$$

где  $a, b, m, n$  — положительные действительные числа.

Таким образом, если  $s_t = d_t$ , то  $a - m = bp_t + np_{t-1}$ .



Уравнение представляет собой линейное разностное уравнение первого порядка с постоянными коэффициентами. В качестве частного решения можно использовать равновесное решение  $p_t = \bar{p} = \text{const}$ .

Действительно, подставив выражение для  $p_t$ , получим

$$\bar{p} = \frac{a - m}{b + n}.$$

Из равенства  $b\lambda + n = 0$  находим  $\lambda = -\frac{n}{b}$ . Следовательно,

$$p_t = C_1 \left( -\frac{n}{b} \right)^t + \frac{a - m}{b + n}.$$

Динамика цен носит колебательный характер. При этом если  $n < b$ , то последовательность цен  $\{p_t\}$  будет сходиться к равновесному состоянию (рис. 6.2), если  $n > b$ , то с течением времени последовательность  $\{p_t\}$  будет удаляться от равновесного состояния (рис. 6.3), если же  $n = b$ , то будут иметь место циклические колебания цены относительно равновесного состояния.

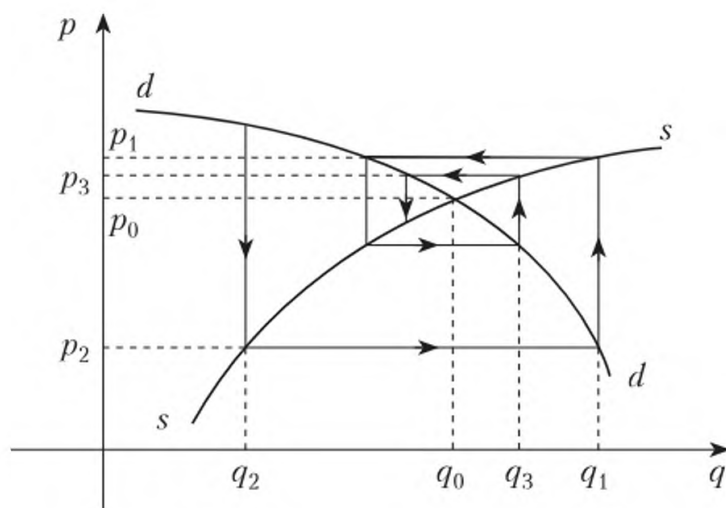


Рис. 6.2. Динамика цен при  $n < b$

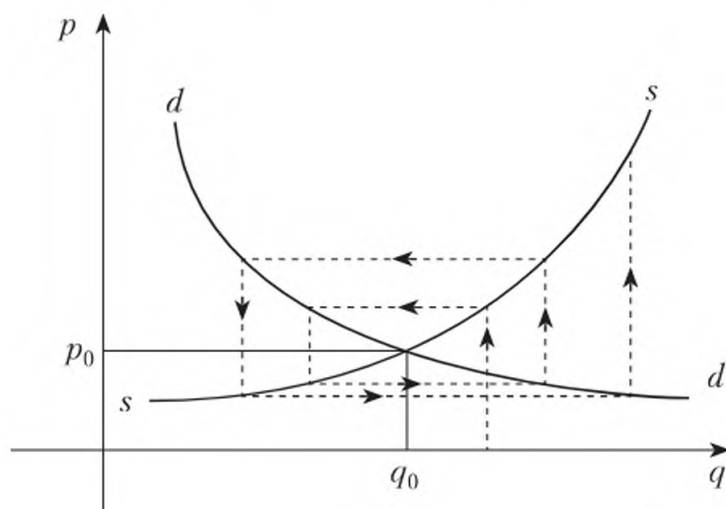


Рис. 6.3. Динамика цен при  $n > b$



### Задача об определении текущей стоимости купонной облигации

Пусть  $F$  — номинальная стоимость купонной облигации (т.е. денежная сумма, выплачиваемая эмитентом в момент погашения, совпадающего с концом последнего купонного периода);  $K$  — величина купона (т.е. денежная сумма, выплачиваемая в конце каждого купонного периода);  $P(n)$  — текущая стоимость облигации в конце  $n$ -го купонного периода;  $k$  — число купонных периодов. Пусть также  $r$  — процентная ставка за один купонный период, выраженная в частях. Предполагается, что она неизменна в течение всего срока обращения облигации. Вышеперечисленные величины связаны между собой следующими соотношениями:

$$P(k) = F; P(n+1) + K = (1+r)P(n).$$

Таким образом, задача об определении текущей стоимости купонной облигации сводится к решению задачи Коши для неоднородного линейного разностного уравнения первого порядка с постоянными коэффициентами. В качестве частного решения выберем равновесное решение

$$P(n+1) = P(n) = P^*.$$

Подставив последнее выражение для  $P(n)$  в  $P(n+1) + K = (1+r)P(n)$ , получаем

$$P^* = \frac{K}{r}.$$

Заметим, что величина  $K/r$  есть не что иное, как текущая стоимость бесконечной ренты, т.е. сумма, которую необходимо уплатить в настоящий момент, чтобы в течение бесконечно длительного времени получать сумму  $K$  через каждый промежуток времени  $t$  при процентной ставке  $r$ . Действительно:

$$\frac{K}{r} = \frac{K}{1+r} + \frac{K}{(1+r)^2} + \frac{K}{(1+r)^3} + \dots$$

В справедливости этого равенства легко убедиться, посчитав сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии, находящейся в правой части формулы.

Решив характеристическое уравнение  $\lambda - (1+r) = 0$ , находим

$$P(n) = C(1+r)^n + (K/r).$$

Полагая  $n = k$ , имеем  $C = (F - K/r)(1+r)^{-k}$ .

Последовательность  $P(n)$  будет возрастающей, если номинальная стоимость облигации выше, чем стоимость бесконечной ренты, убывающей, если она меньше, и постоянной, если они равны.

## 6.4. Простейшие математические модели экономической динамики с непрерывным временем

Будем предполагать, что в качестве независимой переменной выбрано время  $t$ . Приведенные ниже модели, базирующиеся на дифференциальных



уравнениях, называются моделями роста с непрерывным временем. Отметим, что существуют также дискретные аналоги этих моделей, которые будут рассмотрены ниже.

#### 6.4.1. Модель естественного роста

Пусть  $y(t)$  — интенсивность выпуска продукции некоторого предприятия (т.е. количество выпускаемой продукции в единицу времени). Мы будем предполагать, что имеет место аксиома о ненасыщаемости рынка, т.е. что весь выпущенный предприятием товар будет продан. Предположим также, что объем продаж не настолько высок, чтобы повлиять на цену товара  $p$ , которую ввиду этого мы будем считать фиксированной.

Изменение скорости выпуска продукции зависит от вложенных в производство средств (инвестиций). Пусть эта зависимость выражается прямой пропорциональностью, т.е. имеет место *принцип акселерации*:

$$my' = I \quad (m = \text{const}), \quad (6.11)$$

где  $m$  — норма акселерации.

Чтобы увеличить интенсивность выпуска  $y(t)$ , необходимо, чтобы чистые инвестиции (т.е. разность между общим объемом инвестиций и амортизационными затратами) были больше нуля. Если чистые инвестиции равны нулю, общие инвестиции лишь покрывают затраты на амортизацию и уровень выпуска продукции остается неизменным. Случай отрицательных инвестиций приводит к уменьшению основных фондов и, как следствие, уменьшению уровня выпуска продукции. Таким образом, скорость увеличения интенсивности выпуска продукции является возрастающей функцией от  $I$ .

Пусть  $\alpha$  — норма чистых инвестиций, т.е. часть дохода  $py$ , которая тратится на чистые инвестиции, тогда  $I = \alpha(py)$ .

Подставляя это выражение в формулу (6.11), получаем

$$y' = \frac{\alpha p}{m} y, \text{ или } y' = ky,$$

где  $k = \alpha p/m$ , это уравнение называется *уравнением естественного роста*. С помощью него описываются также динамика роста цен при постоянном темпе инфляции, процессы размножения бактерий и т.д. При отрицательных  $k$  это уравнение описывает процесс распада (так, в физике оно носит название уравнения радиоактивного распада). Оно применяется для описания процессов различной природы, в которых скорость изменения некоторой величины прямо пропорциональна ее значению в данный момент времени.

Уравнение естественного роста представляет собой дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными. Разделяя переменные, имеем

$$\frac{dy}{y} = k dt.$$

Отсюда после интегрирования обеих частей находим  $\ln|y| = kt + \ln|C|$ , или, потенцируя,  $y = Ce^{kt}$ .



Интегральная кривая уравнения имеет следующий вид (рис. 6.4).

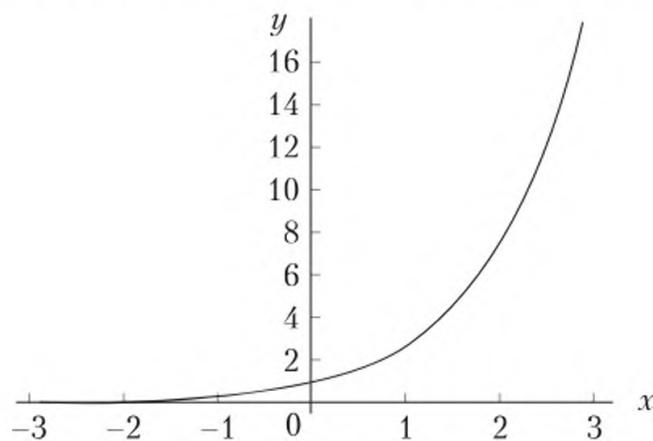


Рис. 6.4. Кривая естественного роста

Если  $y(t_0) = y_0$ , то  $C = y_0 e^{-kt_0}$ , т.е.  $y = y_0 e^{-k(t-t_0)}$ . Эту модель целесообразно применять для исследования начальных этапов развития экономической системы и в течение ограниченного промежутка времени, поскольку с течением времени  $y$  может принимать сколь угодно большие значения, что не может не сказаться на изменении цены.

Дифференциальное уравнение  $y' = ky$ , где  $k = \alpha p/m$ , было предложено Т. Р. Мальтусом<sup>1</sup> в 1798 г. для прогнозирования роста населения Земли. Приведем пример использования приведенного уравнения в задаче об истощении ресурсов.

#### Пример 6.40

В настоящее время для обеспечения пищей одного человека необходима площадь 0,1 га. На земном шаре 4000 млн га пахотной земли. Если не использовать новых источников пищи, население не должно превышать 40 000 млн человек. Оно растёт со скоростью 1,8% в год. Когда будет достигнут предел насыщения?

*Решение*

Процесс роста населения описывается уравнением  $y' = ky$  с  $k = 0,018$ . Примем в качестве начального момента времени ( $t = 0$ ) 1999 г., когда население Земли составило  $y(0) = 6 \cdot 10^9$  человек. Тогда закон изменения количества проживающих на Земле людей имеет вид

$$y(t) = 6 \cdot 10^9 \cdot e^{0,018t}.$$

Требуется найти такое  $t$ , чтобы  $y(t) = 40 \cdot 10^9$ , тогда  $40 \cdot 10^9 = 6 \cdot 10^9 \cdot e^{0,018t}$ , или  $e^{0,018t} = \frac{40 \cdot 10^9}{6 \cdot 10^9} \approx 6,667$ .

Логарифмируя, получим  $t \approx \frac{\ln 6,667}{0,018} \approx 105$  лет. Таким образом, согласно модели

Мальтуса к 2104 г. при постоянном приросте населения мир достиг бы предела насыщения.

*Ответ:* к 2104 г.

<sup>1</sup> Томас Роберт Мальтус (1766–1834) — английский экономист, основоположник мальтузианства, утверждавшего, что темпы роста населения значительно превышают темпы увеличения средств существования.



Закону естественного роста подчиняется также сумма на денежном вкладе в сбербанке.

#### Пример 6.41

Пусть в настоящем году в сбербанк под 5% годовых положили одну копейку. В какую сумму она обратится через 2000 лет при условии непрерывного начисления приращения и отсутствия денежных реформ?

*Решение*

Скорость изменения суммы вклада составляет 0,05 от текущей суммы. Поэтому в уравнении  $y' = ky$   $k = 0,05$ . Требуется решить задачу Коши  $y'(t) = 0,05y(t)$ ,  $y(0) = 0,01$  (руб.).

Решением ее будет функция  $y(t) = 0,01 \cdot e^{0,05t}$ . При  $t = 2000$  получим  $y(2000) = 0,01 \cdot e^{0,05 \cdot 2000} = e^{98} \approx 2,688 \cdot 10^{41}$  (руб.). Эта сумма заметно превосходит все денежные запасы Земли. Этот пример часто приводят для доказательства необходимости денежных реформ.

*Ответ:*  $y(t) = 0,01 \cdot e^{0,05t}$ .

### 6.4.2. Логистический рост

Все приведенные примеры иллюстрируют противоречие закона естественного роста реальности на достаточно больших промежутках времени. Если величина коэффициента роста  $k$  остается постоянной в течение всего периода времени, то говорят, что закон роста является линейным, а сам рост называют экспоненциальным. Например, при коэффициенте роста в 5% величина  $y$  удваивается каждые 14 лет. Законы такого типа применимы только на ограниченных промежутках времени. Для роста всегда существуют пределы. В первую очередь это связано с неправомерностью применения аксиомы о ненасыщаемости или ее аналогов.

Одним из первых обратил на это внимание П. Ф. Ферхюльст<sup>1</sup>, сформулировав закон, содержащий ограничение на рост некой популяции. Он пришел к необходимости рассмотрения переменного коэффициента роста. В результате этого процесс становится нелинейным, что коренным образом изменяет его динамическое поведение. Для задачи об истощении ресурсов, рассмотренной в примере 6.40, введем переменный коэффициент роста населения Земли.

#### Пример 6.42

Пусть население Земли растет в соответствии с уравнением  $y' = ky$ , но коэффициент роста не постоянен, а является убывающей функцией от  $y(t)$ . В 1836 г. Ферхюльст предложил для этого процесса уравнение

$$y'(t) = a \cdot \left(1 - \frac{y(t)}{b}\right) y(t),$$

где  $a$  и  $b$  — постоянные. Решив это уравнение методом разделения переменных, получим функцию, описывающую рост населения в условиях насыщения:

<sup>1</sup> Пьер Франсуа Ферхюльст (1804—1849) — бельгийский ученый, предложивший ввести ограничение на коэффициент роста в условиях насыщаемости.



$$y(t) = \frac{b \cdot C \cdot e^{at}}{1 + C \cdot e^{at}}.$$

Заметим, что эта функция, являясь возрастающей, остается ограниченной и при  $t \rightarrow \infty$  приближается к значению  $y = b$ , т.е. к стационарному решению автономного уравнения.

Вернемся к рассматриваемой модели выпуска продукции. Снимем аксиому о ненасыщаемости рынка. Пусть теперь цена  $p = p(y)$  — убывающая функция ( $\frac{dp}{dy} < 0$ ), т.е. с увеличением выпуска будет происходить насыщение рынка и цена будет падать. Проведя аналогичные рассуждения, получим уравнение  $y' = kp(y)y$ , здесь  $k = \alpha/m$ . Уравнение представляет собой автономное дифференциальное уравнение. Поскольку все сомножители в правой части уравнения положительны, то  $y' > 0$  и  $y(t)$  — возрастающая функция. Проанализируем характер возрастания, для чего исследуем  $y(t)$  на выпуклость. Дифференцируя уравнение  $y' = kp(y)y$  по  $t$ , имеем

$$y'' = ky' \left( \frac{dp}{dy} \cdot y + p \right) = ky' p \left( \frac{dp}{dy} \cdot \frac{y}{p} + 1 \right) = ky' p \left( 1 - \frac{1}{|e_y|} \right),$$

где  $e_y(p) = \frac{dy}{dp} \cdot \frac{p}{y}$  — эластичность спроса. Из последнего соотношения следует, что если спрос эластичен, т.е.  $|e_y| > 1$ , то  $y'' > 0$ , функция спроса выпукла вниз, что означает прогрессирующий рост. Если спрос неэластичен, т.е.  $|e_y| < 1$ , то  $y'' < 0$  и функция выпукла вверх, что означает замедленный рост.

#### Пример 6.43

Рассмотрим конкретный вид зависимости цены от выпуска. Для простоты изложения примем эту зависимость линейной:  $p(y) = b - ay$  ( $a, b > 0$ ). Тогда  $y' = k(b - ay)y$ .

*Решение*

Имеем  $y' = 0$ , если  $y = 0$  или  $y = \frac{b}{a}$ ;  $y'' < 0$  при  $y < \frac{b}{2a}$  и  $y'' > 0$  при  $y > \frac{b}{2a}$ . График  $y(t)$  изображен на рис. 6.5.

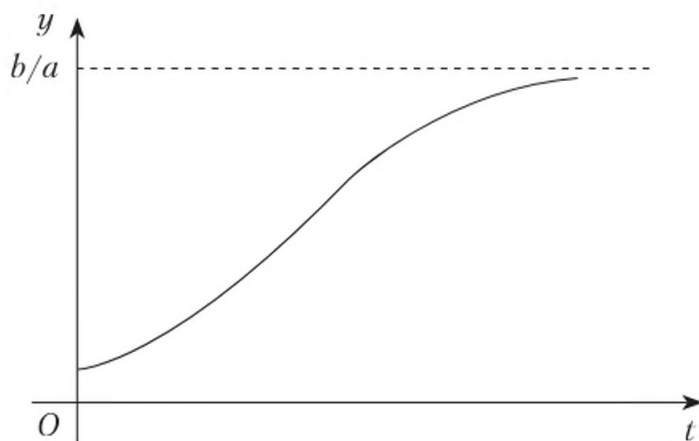


Рис. 6.5. Логистическая кривая



В данном случае нетрудно получить и явное выражение для  $y(t)$ . Разделяя переменные в уравнении, находим

$$\frac{dy}{y(b-ay)} = kdt, \text{ или } \frac{dy}{b} \left( \frac{1}{y} + \frac{a}{b-ay} \right) = kdt.$$

Проинтегрировав это соотношение, имеем  $\ln |y| - \ln |b-ay| = kbt + \ln C$ ,

$$\frac{y}{b-ay} = Ce^{kbt}.$$

Отсюда получим, что  $y = \frac{Cbe^{kbt}}{1 + Cae^{kbt}}$ .

Ответ:  $y = \frac{Cbe^{kbt}}{1 + Cae^{kbt}}$ .

Интегральная кривая уравнения называется *логистической кривой*. Она также описывает некоторые модели распространения информации (рекламы), динамику эпидемий, процессы размножения бактерий в ограниченной среде обитания и др.

Многие процессы можно описать уравнением

$$y' = k(t)(y - y_1)(y_2 - y), \quad (6.12)$$

где  $k(t) > 0$ ,  $y_2 > y_1 > 0$ . Интегральная кривая такого дифференциального уравнения называется *обобщенной логистической кривой*.

Уравнение (6.12) используется для описания моделей роста в макроэкономике, в частности роста в условиях инфляции или роста с учетом технологического прогресса. При этом множитель  $k(t)$  носит соответственно название *мультипликатор инфляции*, или *мультипликатор технологического прогресса*. Прделав выкладки, аналогичные тем, что были проведены выше, нетрудно получить решения

$$y = y_1, y = y_2, y = \frac{y_1 + y_2 Ce^{P(t)}}{1 + Ce^{P(t)}},$$

где  $P(x) = (y_2 - y_1) \int k(t) dt$ .

Рассмотрим теперь модель, в которой скорость роста зависит не от дохода, а от прибыли. Пусть  $S(y) = \alpha y + \beta$  — функция издержек, где  $\alpha y$  — переменные издержки;  $\beta$  — постоянные ( $\alpha, \beta = \text{const}$ ), тогда

$$y' = k(p(y)y - \alpha y - \beta).$$

Если теперь предположить, что  $p(y) = b - ay$ , то правая часть уравнения (6.12) представляет собой квадратный трехчлен относительно  $y$  с отрицательным коэффициентом перед  $y^2$ . В этом случае возможны три варианта.

а)  $D < 0$ . Следовательно,  $y' < 0$ . Издержки настолько велики, что это приводит к постоянному падению уровня производства и в конце концов к банкротству.

б)  $D = 0$ . В этом случае  $y' = 0$  и имеется одна стационарная кривая  $y = y^* < \frac{b}{a}$ . При этом интегральные кривые, удовлетворяющие начальному



условию  $y(t_0) > y^*$  (тогда  $y_0 < \frac{b}{a}$ ), будут асимптотически приближаться к  $y^*$  на  $+\infty$ , а удовлетворяющие условию  $y(t_0) < y^*$  — на  $-\infty$ .

в)  $D > 0$ . В этом случае существует два стационарных решения  $y = y_1$ ,  $y = y_2$  ( $0 < y_1 < y_2 < \frac{b}{a}$ ). При этом  $y' > 0$  при  $y_1 < y < y_2$  и  $y' < 0$  при  $y < y_1$  или  $y > y_2$ .

### 6.4.3. Неоклассический рост

Пусть  $Y = F(K, L)$  — национальный доход, где  $K$  — объем капиталовложений (производственных фондов);  $L$  — величина затрат труда;  $F(K, L)$  — линейно-однородная производственная функция, т.е.  $F(tK, tL) = tF(K, L)$ .

Обозначим  $k = K/L$  — фондовооруженность. Тогда производительность труда  $f(k)$  описывается формулой

$$f(k) = \frac{F(K, L)}{L} = F\left(\frac{K}{L}, 1\right) = F(k, 1).$$

Отметим, что функция  $f(k)$  называется *неоклассической*, если  $f'(k) > 0$ ,  $f''(k) < 0$ .

Задача заключается в описании динамики фондовооруженности, т.е. в представлении ее в виде функции времени.

Будем предполагать, что:

1) происходит естественный прирост трудовых ресурсов, т.е.  $L' = \alpha L$  ( $\alpha = \text{const}$ );

2) инвестиции направлены как на увеличение производственных фондов, так и на амортизацию, т.е.  $I = K' + \beta K$  ( $\beta$  — норма амортизации).

Пусть  $v$  — норма инвестиций (т.е.  $I = vY$ ), тогда имеем

$$vY = K' + \beta K, \text{ или } K' = vY - \beta K.$$

Из определения фондовооруженности вытекает соотношение

$$k' = \left(\frac{K}{L}\right)' = \frac{K'L - KL'}{L^2}.$$

Подставляя сюда значения для  $L'$  и  $K'$ , находим

$$k' = \frac{(vY - \beta K)L - \alpha LK}{L^2},$$

т.е.  $k' = \frac{vY}{L} - (\beta + \alpha)k.$

Учитывая, что  $f = \frac{Y}{L}$ , получаем  $k' = vf(k) - (\alpha + \beta)k$ . Это автономное дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными называется *уравнением неоклассического роста*. У него существует стационарное решение  $k = k^*$ . При  $k' = 0$  уравнение  $vf(k) - (\alpha + \beta)k = 0$  имеет корень  $k^*$ . Действительно, так как  $f''(k) < 0$ , то графики  $vf(k)$  и  $(\alpha + \beta)k$  обязательно пересекутся (рис. 6.6).



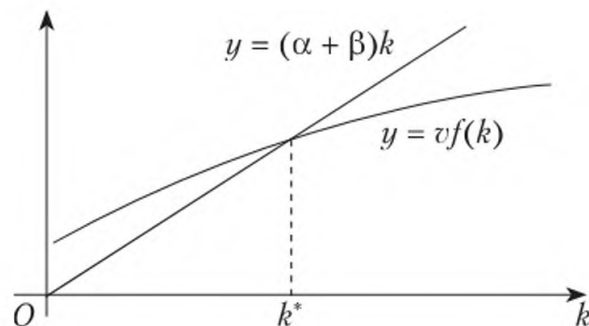


Рис. 6.6. Стационарная точка

Кроме того, так как  $f'(k)$  — непрерывная монотонно убывающая функция, то существует такое  $k_1$ , что  $f'(k_1) = \frac{\alpha + \beta}{v}$  (т.е. у  $k(t)$  существует точка перегиба). Поэтому при  $k_0 > k^*$  функция  $f(k)$  убывает ( $k' < 0$ ), при  $k_0 < k^*$  возрастает ( $k' > 0$ ). При  $k = k_1$  меняется направление выпуклости. Ввиду этого интегральная кривая уравнения (6.12) очень напоминает логистическую кривую. При  $t \rightarrow \infty$  функция фондовооруженности стремится к стационарному значению (рис. 6.7).

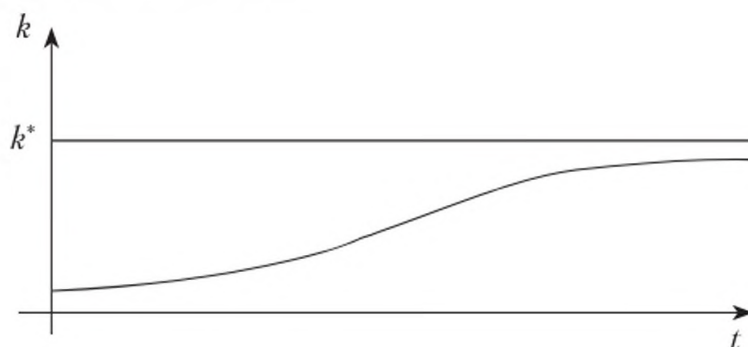


Рис. 6.7. Кривая неоклассического роста

#### 6.4.4. Линейные уравнения в экономической динамике

Рассмотрим пример описания экономического процесса с помощью линейного дифференциального уравнения 1-го порядка. Пусть предприятие выпускает некоторую продукцию, стоимость которой в момент времени  $t$  равна  $y(t)$ . При этом происходит изнашивание оборудования и орудий труда (выбытие фондов) со скоростью  $-k(t)$ . При этом само предприятие не вкладывает вырученные деньги в производство, а денежные вложения осуществляет банк. Пусть в момент времени  $t$  поток инвестиций составляет  $u(t)$  денежных единиц и мгновенно вкладывается в производство. Тогда стоимость произведенной продукции описывается уравнением

$$y'(t) + k(t)y(t) = u(t). \quad (6.13)$$

Это линейное дифференциальное уравнение 1-го порядка. Как показывают примеры, приведенные выше, характер решения такого уравнения зависит как от коэффициента выбытия  $k(t)$ , так и от свойств функции  $u(t)$ . Поэтому иногда можно, не решая уравнения, определить некоторые свой-



ства решения. Например, при отрицательном  $k(t)$  (фонды не выбывают, а растут) и неубывающей функции инвестиций  $u(t)$  должен происходить рост производства, т.е. решением уравнения будет возрастающая функция. Возможно, функция  $u(t)$  отрицательна, например она учитывает издержки производства, потребительские расходы, выплаты по налогам и т.д.

Уравнение (6.13) может оказаться и нелинейным, если коэффициент  $k(t)$  или функция  $u(t)$  зависят не только от времени, но и от объема выпуска продукции. В общем случае уравнение роста может иметь вид

$$y'(t) + k(t, y)y(t) = u(t, y).$$

Приведенные уравнения широко используются в микроэкономике. Для макроэкономики характерно описание процессов с помощью уравнения

$$y(t) = k(t)y'(t) + c(t), \quad (6.14)$$

где  $t$  — время;  $y(t)$  — национальный доход;  $c(t)$  — потребление; слагаемое  $k(t)y'(t)$  описывает накопление основных производственных фондов. Уравнение (6.14) отражает разделение национального дохода на две части — накопление, которое производится пропорционально приросту национального дохода, и потребление. Это простейшая модель экономической динамики, тем не менее она позволяет оценить изменение национального дохода в зависимости от характера потребления.

Рассмотрим уравнение Самуэльсона — Солоу<sup>1</sup>

$$p' = k(d(p) - s(p)),$$

моделирующее связь между изменением цены  $p$  и неудовлетворенным спросом  $d(p) - s(p)$  (здесь  $d(p)$  и  $s(p)$  — соответственно величины спроса и предложения при цене  $p$ ,  $k > 0$ ). Предположим, что спрос и предложение задаются линейными функциями

$$d(p) = a - bp, \quad s(p) = m + np,$$

где  $a, b, m, n$  — некоторые положительные числа. С учетом последнего уравнения примет вид

$$p' = k(a - m) - k(n + b)p.$$

Это уравнение является линейным. Найдем решение соответствующего однородного уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dt} &= k(n + b)p; \quad \frac{dp}{p} = k(n + b)dt; \\ \ln p &= k(n + b)t + \ln C; \quad p(t) = Ce^{k(n+b)t}. \end{aligned}$$

В качестве частного решения уравнения можно использовать стационарное равновесное решение

$$p(t) = \bar{p} (= \text{const}),$$

где  $\bar{p}$  — корень уравнения  $d(p) = s(p)$  (в этом случае обе части уравнения будут равны нулю). Тогда

<sup>1</sup> Роберт Солоу (род. 1924) — американский экономист, нобелевский лауреат 1987 г. за вклад в теорию экономического роста.



$$\bar{p} = \frac{a-m}{b+n}.$$

Таким образом, общее решение уравнения имеет вид

$$p(t) = \frac{a-m}{b+n} + Ce^{k(n+b)t}.$$

Из последнего, в частности, вытекает, что если  $n > b$ , то с течением времени интегральные кривые будут отдаляться от состояния равновесия  $\bar{p}$ . В случае  $n = b$   $p(t)$  постоянна. Если же  $n < b$ , то с течением времени интегральные кривые будут асимптотически приближаться к состоянию равновесия  $\bar{p}$ . Данную модель можно рассматривать как непрерывный аналог паутиной модели рынка.

### Задания для самостоятельной работы

**6.1.** Решите следующие уравнения методом вариации:

а)  $y = x(y' - x \cos x)$ ; б)  $y' + 2y = x^2 + 2x$ ; в)  $x^2 y' + xy + 1 = 0$ ;

г)  $y' + y \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}$ ; д)  $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$ ; е)  $(2x + y)dy = ydx + 4 \ln y dy$ ;

ж)  $y = xy' + y' \ln y$ ; з)  $y' + \frac{2x}{1+x^2}y = x - \sin 3x$ .

**6.2.** Решите следующие уравнения методом подстановки:

а)  $xy' - 2y = 2x^4$ ; б)  $y' + (x+1)y = 3x^2 e^{-x}$ ; в)  $y' = \frac{1}{x \cos y + \sin 2y}$ ;

г)  $y' + 2y = 2 - 3x$ ; д)  $(x + y^2)dy = ydx$ ; е)  $(1 + x^2)y' + y = \arctg x$ .

**6.3.** Решите уравнения Бернулли:

а)  $4xy' + 3y = -e^x x^4 y^5$ ; б)  $y' + 2y = y^2 e^x$ ; в)  $y' = y^4 \cos x + y \operatorname{tg} x$ ;

г)  $ydx + x(1 - 2xy)dy = 0$ ; д)  $y' + \frac{y}{x} = \frac{y^2}{x} + \ln x$ ;

е)  $y' - \frac{2xy}{1+x^2} = 4 \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{1+x^2}} \arctg x$ .

**6.4.** Интенсивность выпуска  $y = y(t)$  при условии ненасыщаемости потребителя удовлетворяет уравнению вида  $y' = ky$ , где  $k$  — некоторая константа. Найдите, на сколько процентов вырастет выпуск за год, если рост за первые три месяца составил 3%. Определите, каков должен быть ежемесячный рост, чтобы рост за год составил не менее 25%.

**6.5.** Предположим, что скорость изменения цены  $p = p(t)$  пропорциональна разнице между спросом и предложением:  $p' = \gamma(d - s)$ . Исследовать поведение  $p(t)$  при  $t \rightarrow +\infty$  в зависимости от начальной цены  $p_0 = p(0)$ , если спрос и предложение линейно зависят от цены  $d = 100 - 10p$ ,  $s = 10 + 20p$ . Найдите явное выражение для  $p(t)$ .

**6.6.** Рассматривается неоклассическая модель роста. Пусть  $Y = \sqrt{KL}$  — национальный доход, где  $K$  — объем капиталовложений (фондов);  $L$  — величина затрат труда. Будем предполагать, что:

- 1) происходит естественный прирост трудовых ресурсов, т.е.  $L' = \alpha L$ ,  $\alpha = \text{const}$ ;
- 2) инвестиции направлены как на увеличение производственных фондов, так и на амортизацию, т.е.  $I = K' + \beta K$ ,  $\beta = \text{const}$  — норма амортизации;



3) инвестиции прямо пропорциональны национальному доходу, т.е.  $I = lY$ , где  $l$  — норма инвестиций. После преобразований получается уравнение  $k' = l\sqrt{k} - (\alpha + \beta)k$ , где  $k = \frac{K}{L}$ . Найдите решение полученного уравнения.

**6.7.** Предположим, что скорость изменения выпуска продукции пропорциональна прибыли, т.е.  $q' = \alpha(pq - c)$ , где  $p$  — цена продукции, а  $c$  — затраты. Пусть  $\alpha = 0,2$ , выпуск и цена связаны зависимостью  $p = 10 - q$ , а функция затрат имеет вид  $c = \beta q + 4$ , где  $\beta$  — постоянный коэффициент. Найдите  $q = q(t)$  при следующих значениях  $\beta$  и исследуйте найденные функции:

а)  $\beta = 6$ ; б)  $\beta = 10$ ; в)  $\beta = 5$ .

**6.8.** Решите уравнения, подобрав подходящую замену переменной:

а)  $y' = y(e^x + \ln y)$ ; б)  $y' \sin y + x \cos y + x = 0$ ; в)  $yy' + 1 = (x-1)e^{-\frac{y^2}{2}}$ ;  
г)  $y' + \sin 2y = 2xe^{-2x} \cos^2 y$ ; д)  $\operatorname{tg} x \cdot e^y - x^3 y' + 3x^2 = 0$ .

**6.9.** Решите уравнения в полных дифференциалах:

а)  $e^{-y} dx - (2y + xe^{-y}) dy = 0$ ; б)  $[1 + y^2 \sin(2x)] dx - 2y \cos^2 x dy = 0$ ;

в)  $3x^2(1 + \ln y) dx = \left(2y - \frac{x^3}{y}\right) dy$ ; г)  $\frac{y}{x} dx + (y^3 + \ln x) dy = 0$ ;

д)  $(2x - 10) dy + (2y + 10x^2) dx = 0$ ; е)  $\left(\frac{2}{x^2} - y\right) dy - (x + 2y) dx = 0$ ;

ж)  $2\sin(5x)\cos 5y dx - \sin^2(5x)\sin(5y) dy = 0$ ; з)  $(e^{4y} - 2x) dx + (8y + 4xe^{4y} dy) = 0$ .

**6.10.** Найдите интегрирующий множитель и решите уравнения:

а)  $(x^2 + y^2 + x) dx + y dy = 0$ ; б)  $y^2 dx - (xy + x^3) dy = 0$ ;

в)  $\left(y - \frac{1}{x}\right) dx + \frac{dy}{y} = 0$ ; г)  $(x^2 - \sin^2 y) dx + x \sin(2y) dy = 0$ .

**6.11.** Решите уравнения:

а)  $(y')^3 + (x+2)e^y = 0$ ; б)  $(y')^2 + 2yy' \operatorname{ctg} x - y^2 = 0$ ;

в)  $2(y')^2 + 2y'(\cos x - \sin x) - \sin 2x = 0$ ; г)  $x^2(y')^2 + y^2 = 2x(2 - yy')$ .

**6.12.** Решите уравнения методом введения параметра:

а)  $y = (y')^2 \cdot e^{y'}$ ; б)  $\ln(y') + \sin(y') = x$ ;

в)  $(y')^3 + x^2 = xy y'$ ; г)  $y = (y')^4 - (y')^3 - 2$ .

**6.13.** Решите уравнения:

а)  $y = 2xy - (y')^3$ ; б)  $2xy' - y = \sin(y')$ ; в)  $xy' + y = \ln(y')$ ;

г)  $xy' - y = \ln(y')$ ; д)  $(y')^3 y^2 + 2xy' = y$ ; е)  $(y')^3 - 3xy' + 3y = 0$ .

**6.14.** Найдите общие решения уравнений:

а)  $x^2 y'' - xy' = 3x^2$ ; б)  $(2x+1)y'' + (2x-1)y' - 2y = x^2 + x$ .

**6.15.** Найдите решения уравнений, удовлетворяющие указанным начальным условиям:

а)  $y'' - 4y' + 3y = 0$ ,  $y(0) = 6$ ,  $y'(0) = 10$ ;

б)  $y'' - 2y' + y = 0$ ,  $y(2) = 1$ ,  $y'(0) = 3$ ;

в)  $y'' - 2y' + 2y = 0$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 1$ ;

г)  $y'' - 2y' + 3y = 0$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 3$ ;

д)  $y'' - 6y' + 13y = 0$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 2$ .

**6.16.** Найдите общие решения уравнений:

а)  $y'' - 4y' + 4y = x^2$ ; б)  $y'' + 8y' = 8x$ ; в)  $y'' - 2y' - 3y = e^{4x}$ ;

г)  $y'' + 4y' + 4y = 8e^{-2x}$ ; д)  $y'' + y = 4 \sin x$ ;

е)  $y'' + 2y' + 5y = e^{-x} \cdot \sin 2x$ ; ж)  $y'' - y' = xe^x$ .



**6.17.** Найдите решения уравнений, удовлетворяющие указанным начальным условиям:

а)  $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}$ ,  $y(0) = 2$ ,  $y'(0) = 8$ ;

б)  $y'' - y' = -5e^{-x}(\sin x + \cos x)$ ,  $y(0) = -4$ ,  $y'(0) = 5$ .

**6.18.** Изменение количества товара на рынке пропорционально разнице между предложением и спросом:  $q' = 0,48(s - d)$ , а изменение цены пропорционально отклонению количества товара от базового уровня  $q = 50$ :  $q' = -0,1(q - 50)$ . Функции спроса и предложения имеют вид  $s = 10 + 20p$ ,  $d = 70 - 10p$ .

а) Найдите  $p = p(t)$  и  $q = q(t)$ . Каков период колебания цены? При каких начальных значениях цены останутся неизменными?

б) Найдите  $p = p(t)$  и  $q = q(t)$ , если в начальный момент  $p(0) = 1,5$ ,  $q(0) = 44$ . Найдите значения  $p$  и  $q$  в момент времени  $t_1 = 0,1$ . Найдите моменты времени, когда  $p$  и  $q$  принимают экстремальные значения; вычислите значения  $p$  и  $q$  для этих моментов времени.



## Глава 7

# ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

---

В результате изучения главы 7 студент должен:

**знать**

- основы линейного программирования, необходимые для решения математических и финансово-экономических задач;

**уметь**

- применять методы линейного программирования для решения задач экономики и финансов;

**владеть**

- навыками применения современного математического инструментария для решения экономических задач;
  - методикой построения, анализа и применения математических моделей для оценки состояния и прогноза развития экономических явлений и процессов в части компетенций, соответствующих понятиям и методам линейного программирования.
- 

### 7.1. Линейные экономические модели

#### 7.1.1. Модель Леонтьева

Рассмотрим некоторую экономическую систему, которая состоит из  $n$  отраслей. Пусть  $x_i$  — объем однородной продукции, выпускаемой  $i$ -й отраслью за некоторый промежуток времени;  $x_{ij}$  — объем продукции  $i$ -й отрасли, необходимой  $j$ -й отрасли для ее производства;  $y_i$  — объем продукции  $i$ -й отрасли, используемой в непроеизводственной сфере (конечное потребление). Тогда

$$x_i = x_{i1} + x_{i2} + \dots + x_{in} + y_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (7.1)$$

Данное уравнение называется *уравнением баланса*. Обозначим через  $a_{ij}$  коэффициенты прямых затрат:

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j}, \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (7.2)$$

Коэффициент  $a_{ij}$  показывает, какое количество продукции  $i$ -й отрасли затрачивается на производство одной единицы продукции  $j$ -й отрасли.

Учитывая соотношения (7.2), уравнения баланса (7.1) могут быть записаны в виде







Найдем:

- а) матрицу прямых затрат (матрицу Леонтьева);
- б) матрицу полных затрат;
- в) валовый выпуск на новый вариант потребления  $(10, 10)^T$ .

*Решение*

Воспользуемся уравнениями баланса (7.1) и найдем объем продукции, выпускаемый I и II отраслями за год:

$$x_1 = 40 + 51 + 9 = 100; x_2 = 50 + 459 + 1 = 510.$$

Используя формулу (7.2), легко найти матрицу прямых затрат (матрицу Леонтьева):

$$A = \begin{pmatrix} \frac{40}{100} & \frac{51}{510} \\ \frac{50}{100} & \frac{459}{510} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,1 \\ 0,5 & 0,9 \end{pmatrix}.$$

Для нахождения матрицы полных затрат  $H$  и валового выпуска на новый вариант потребления воспользуемся формулой (7.5):

$$H = (E - A)^{-1};$$

$$E - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,4 & 0,1 \\ 0,5 & 0,9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,6 & -0,1 \\ -0,5 & 0,1 \end{pmatrix};$$

$$H = (E - A)^{-1} = \frac{1}{0,01} \begin{pmatrix} 0,1 & 0,1 \\ 0,5 & 0,6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 10 \\ 50 & 60 \end{pmatrix};$$

$$X = (E - A)^{-1}Y = HY = \begin{pmatrix} 10 & 10 \\ 50 & 60 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 200 \\ 1100 \end{pmatrix}.$$

Ответ: а)  $A = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,1 \\ 0,5 & 0,9 \end{pmatrix}$ ; б)  $H = \begin{pmatrix} 10 & 10 \\ 50 & 60 \end{pmatrix}$ ; в)  $X = \begin{pmatrix} 200 \\ 1100 \end{pmatrix}$ .

### 7.1.2. Линейная модель обмена. Модель международной торговли

Предположим, что бюджеты  $n$  стран  $x_1, x_2, \dots, x_n$  расходуются только на покупку некоторых товаров. Пусть  $a_{ij}$  — доля бюджета  $j$ -й страны, затрачиваемая на покупку товаров  $i$ -й страны. Тогда

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} = 1. \quad (7.6)$$

Матрица  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ , для которой справедливо данное усло-

вие, называется *структурной матрицей торговли*. Общая выручка  $i$ -й страны выражается соотношением

$$P_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n, i = 1, \dots, n.$$

Так как весь бюджет страны по предположению тратится на закупку товаров, то  $P_i = x_i$ , или  $x_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n, i = 1, \dots, n$ . Эту систему уравнений можно записать в матричной форме

$$X = AX. \quad (7.7)$$



Собственный вектор матрицы  $A$ , соответствующий единичному собственному значению, состоит из бюджетов стран бездефицитной международной торговли.

Уравнение (7.7) можно записать в виде

$$(A - E)X = 0. \quad (7.8)$$

### Пример 7.2

Дана структурная матрица двух стран  $A = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,8 \\ 0,6 & 0,2 \end{pmatrix}$ . Найдём бюджеты этих стран, соответствующие бездефицитной торговле, при условии, что сумма бюджетов равна 700.

*Решение*

Так как элементы структурной матрицы удовлетворяют условию (7.6), то для матрицы  $A$  существует единичное собственное значение. Найдём соответствующий ему собственный вектор из формулы (7.8):

$$\begin{aligned} A - E &= \begin{pmatrix} 0,4 & 0,8 \\ 0,6 & 0,2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,6 & 0,8 \\ 0,6 & -0,8 \end{pmatrix}; \\ \begin{pmatrix} -0,6 & 0,8 \\ 0,6 & -0,8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \\ \begin{cases} -0,6x_1 + 0,8x_2 = 0, \\ 0,6x_1 - 0,8x_2 = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Отсюда  $x_1 = k$ ,  $x_2 = \frac{4}{3}k$ . Учитывая, что  $x_1 + x_2 = 700$ , имеем  $x_2 = 300$ ,  $x_1 = 400$ .

*Ответ:*  $x_1 = 400$ ,  $x_2 = 300$ .

Модель международной торговли является частным случаем линейной модели обмена, которая описывается матричным уравнением (7.7), но для которой не требуется обязательным выполнение условия (7.6).

### 7.1.3. Модель равновесных цен

Пусть матрица  $A$  — матрица прямых затрат, вектор  $x$  — вектор валового выпуска. Обозначим через  $P = (p_1 \ p_2 \ \dots \ p_n)^T \geq 0$  вектор цен, где  $p_i$  — цена одной единицы продукции  $i$ -й отрасли. Тогда весь доход  $i$ -й отрасли составит  $x_i p_i$ . Для выпуска одной единицы продукции  $i$ -я отрасль закупает  $a_{1i}$  единиц продукции первой отрасли,  $a_{2i}$  единиц продукции второй отрасли и т.д. Таким образом, затраты на выпуск  $x_i$  единиц продукции составят  $x_i(a_{1i}p_1 + a_{2i}p_2 + \dots + a_{ni}p_n)$ . Оставшуюся часть дохода обозначим  $w_i$  и назовём добавленной стоимостью. Справедливо следующее равенство:

$$x_i p_i = x_i(a_{1i}p_1 + a_{2i}p_2 + \dots + a_{ni}p_n) + w_i.$$

Разделив обе части равенства на  $x_i$ , получим

$$p_i = a_{1i}p_1 + a_{2i}p_2 + \dots + a_{ni}p_n + v_i,$$



где  $v_i = \frac{w_i}{x_i}$  — норма добавленной стоимости.

Данная система может быть записана в матричной форме:

$$P = A^T P + V, \quad (7.9)$$

где  $V = (v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n)^T \geq 0$  — вектор норм добавленной стоимости. Модель (7.9) называется *моделью равновесных цен*. Записав это уравнение в виде

$$(E - A^T)P = V,$$

получим *задачу прогнозирования*, а в виде

$$P = (E - A^T)^{-1}V$$

— *задачу планирования*.

Полученные уравнения очень похожи на уравнения модели Леонтьева, более того, модель равновесных цен является двойственной задачей к задаче Леонтьева.

### Пример 7.3

Даны матрица прямых затрат  $A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,6 \\ 0,9 & 0,3 \end{pmatrix}$  и вектор цен  $P = (115 \ 100)^T$ .

Найдем вектор норм добавленной стоимости  $V$ .

*Решение*

Для нахождения вектора норм добавленной стоимости воспользуемся формулой  $(E - A^T)P = V$ :

$$E - A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,2 & 0,9 \\ 0,6 & 0,3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8 & -0,9 \\ -0,6 & 0,7 \end{pmatrix};$$

$$V = \begin{pmatrix} 0,8 & -0,9 \\ -0,6 & 0,7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 115 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ответ:  $V = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$

## 7.2. Задача линейного программирования

### 7.2.1. Постановка задачи линейного программирования

Рассмотрим так называемую задачу о диете. Пусть имеется  $n$  видов продуктов  $P_1, P_2, \dots, P_n$ , каждый из которых содержит питательные вещества  $S_1, S_2, \dots, S_m$ . В одном килограмме продукта  $P_j$  содержится  $a_{ij}$  единиц вещества  $S_i$ . Обозначим через  $b_i$  суточные потребности организма в питательном веществе  $S_i$ , а через  $p_j$  — стоимость одного килограмма продукта  $P_j$ . Для составления рациона питания необходимо найти количество  $x_j$  каждого продукта  $P_j$  так, чтобы суточная потребность организма в питательных







### 7.2.2. Геометрическая интерпретация задачи линейного программирования в случае двух переменных. Графический метод решения

Рассмотрим задачу линейного программирования для двух переменных. В этом случае областью допустимых решений, заданной системой ограничений, является выпуклая многоугольная область  $D$ , а задача линейного программирования сводится к нахождению экстремума целевой функции  $f(X)$  на  $D$ . Если целевая функция является ограниченной на  $D$ , то оптимальное решение задачи линейного программирования достигается в угловых точках области  $D$ . Для решения задачи линейного программирования двух переменных графическим методом используется следующий алгоритм.

1. Привести задачу линейного программирования к стандартной форме (система ограничений должна быть задана в виде неравенств).

2. Построить многогранную область  $D$ , заданную системой ограничений, как пересечение полуплоскостей, которые определяются каждым из входящих в эту систему неравенством.

3. Построить для целевой функции  $f(x_1, x_2) = c_1x_1 + c_2x_2 + c_0$  вектор нормали  $\vec{n} = (c_1, c_2)$  и перпендикулярные ему линии уровня. Вектор нормали определяет направление роста функции  $f(X)$ .

4. Смещая линию уровня в направлении вектора  $\vec{n}$ , найти первую точку пересечения линии уровня с областью  $D$  (это есть точка  $X_{\min}$ ) и последнюю точку пересечения линии уровня с областью  $D$  (это есть точка  $X_{\max}$ ).

При графическом методе решения задачи линейного программирования возможны следующие случаи:

- $X_{\max}$  и  $X_{\min}$  совпадают с угловыми точками области  $D$ . В этом случае задача имеет единственное решение;
- если последними (первыми) точками пересечения линии уровня с множеством  $D$  являются точки отрезка границы, то задача имеет бесконечно много решений;
- если область  $D$  не ограничена, то  $f_{\min}$  может быть равна  $-\infty$ , а  $f_{\max}$  может быть равна  $+\infty$ .

#### Пример 7.4

Решим графическим методом задачу линейного программирования с целевой

$$\text{функцией } z = x + 2y + 1 \rightarrow \max \text{ и ограничениями } \begin{cases} y - x \leq 4, \\ y + x \leq 7, \\ x \geq 0, y \geq 0. \end{cases}$$

#### Решение

Построим область  $D$  на плоскости  $(x, y)$ , определяемую системой ограничений (рис. 7.1). Для этого построим прямую  $y - x = 4$  и из двух получившихся полуплоскостей выберем ту, координаты точек которой удовлетворяют неравенству  $y - x \leq 4$ . Аналогично поступим и со вторым неравенством системы ограничений. Так как  $x \geq 0$  и  $y \geq 0$ , то область  $D$  есть четырехугольник  $OABC$  с угловыми точками  $O(0, 0)$ ,  $A(0, 4)$ ,  $B(3/2, 11/2)$  и  $C(7, 0)$ ; при этом все решения системы ограничений задачи есть точки на границе и внутри этого четырехугольника.







3. Исключить из целевой функции базисные переменные и записать ее в виде  $f - k_{r+1}x_{r+1} + k_{r+2}x_{r+2} + \dots + k_n x_n = k_0$ , где  $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n$  — свободные переменные.

4. Построить начальную симплекс-таблицу, записав в нее все данные задачи линейного программирования; последняя строка симплекс-таблицы называется строкой оценок и обозначается  $\Delta_{ij}$ .

5. Проверить решение задачи на оптимальность: если в оценочной строке нет отрицательных для задачи на максимум (положительных для задачи на минимум) оценок, то оптимальное решение достигнуто. Если же в оценочной строке есть хотя бы одна отрицательная для задачи на максимум (положительная для задачи на минимум) оценка, то решение может быть улучшено. Для этого необходимо выбрать разрешающий столбец (пусть он имеет номер  $j$ ), содержащий отрицательную (положительную) оценку, а в качестве разрешающего элемента выбирается положительный элемент  $a_{ij} > 0$ , дающий минимум отношения элемента свободного столбца

$b_i$  к  $a_{ij}$ , т.е.  $\min_{a_{ij}>0} \left\{ \frac{b_i}{a_{ij}} \right\}$ . При этом возможны следующие ситуации:

а) если в симплекс-таблице имеется отрицательная (положительная) оценка, а в соответствующем столбце нет положительных элементов, то исходная задача не имеет решения, т.е.  $z_{\max} = +\infty$  ( $z_{\min} = -\infty$ );

б) если оптимальное решение найдено, но при этом у одной (или нескольких) свободной переменной оценка  $\Delta_{ij}$  равна 0, то задача имеет альтернативное решение, для получения которого следует сделать шаг симплекс-метода, выбрав разрешающий элемент (по общему правилу) в столбце с нулевой оценкой.

### Пример 7.5

Решим симплексным методом задачу линейного программирования

$$\begin{cases} z = x_1 - 4x_2 - 2x_4 + x_5 - 11 \rightarrow \min, \\ x_1 - 5x_2 + x_3 = 5, \\ -x_1 + x_2 + x_4 = 4, \\ x_1 + x_2 + x_5 = 8, \\ x_i \geq 0, i = 1, \dots, 5. \end{cases}$$

#### Решение

Задача уже записана в каноническом виде. Действуя по п. 2 алгоритма симплекс-метода, выберем допустимый базис из переменных  $x_3, x_4, x_5$ . Исключим из целевой функции базисные переменные. Для этого выразим из системы ограничений переменные  $x_3, x_4, x_5$  и подставим полученные выражения в целевую функцию. Имеем

$$\begin{cases} x_3 = 5 - x_1 + 5x_2, \\ x_4 = 4 + x_1 - x_2, \\ x_5 = 8 - x_1 - x_2, \\ z = -2x_1 - 3x_2 - 11. \end{cases}$$



Перепишем функцию  $z$  в виде  $z + 2x_1 + 3x_2 = -11$  и формируем симплекс-таблицу:

Базисные переменные	Свободный член	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$
$x_3$	5	1	-5	1	0	0
$x_4$	4	-1	1	0	1	0
$x_5$	8	1	1	0	0	1
$Z$	-11	2	3	0	0	0

Так как данная задача линейного программирования является задачей на минимум и в последней строке (строке оценок) есть положительные элементы, то решение может быть улучшено. Выберем в качестве разрешающего столбца второй столбец. Так как  $\min \left\{ \frac{4}{-1}, \frac{8}{1} \right\} = 4$ , то разрешающим элементом будет 1, стоящая на пересечении строки  $x_4$  и столбца  $x_2$ . Переменную  $x_4$  выводим из базиса, а переменную  $x_2$  вводим в базис:

Базисные переменные	Свободный член	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$
$x_3$	25	-4	0	1	5	0
$x_2$	4	-1	1	0	1	0
$x_5$	4	2	0	0	-1	1
$z$	-23	5	0	0	-3	0

Так как в строке оценок есть единственный положительный элемент, то разрешающим столбцом будет столбец  $x_1$ . Так как в данном столбце единственный положительный элемент, то выбор разрешающего элемента однозначен. Выводим из базиса переменную  $x_5$  и вводим в базис переменную  $x_1$ . Делим разрешающую строку на 2 и после шага симплекс-метода получаем:

Базисные переменные	Свободный член	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$
$x_3$	33	0	0	1	3	0
$x_2$	6	0	1	0	1/2	1/2
$x_1$	2	1	0	0	-1/2	1/2
$z$	-33	0	0	0	-1/2	-5/2

В последней строке нет отрицательных элементов, поэтому оптимальным решением является базисное решение  $X^* = (2, 6, 33, 0, 0)$  и  $z_{\min} = z(X_1) = -33$ .

Ответ:  $z_{\min} = -33$  при  $X^* = (2, 6, 33, 0, 0)$ .

#### 7.2.4. Понятие о взаимно двойственных задачах линейного программирования.

##### Двойственность в экономико-математических моделях

Рассмотрим одну из задач линейного программирования — задачу об оптимальном использовании ресурсов.

Пусть некоторое предприятие выпускает  $n$  видов продукции  $P_1, P_2, \dots, P_n$ , для изготовления которой используется  $m$  видов сырья  $S_1, S_2, \dots, S_m$ .







В качестве исходной задачи можно рассматривать любую из пары взаимно двойственных задач.

**Теорема 7.2 (вторая теорема двойственности).** Оптимальные решения  $X^*$  и  $Y^*$  пары двойственных задач связаны между собой следующими равенствами:

$$(A^T Y^* - C)^T E X^* = 0, \text{ или } \left( \sum_{i=1}^m a_{ik} y_i^* - c_k \right) \cdot x_k^* = 0, k = 1, \dots, n;$$

$$(A X^* - B)^T E Y^* = 0, \text{ или } \left( \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k^* - b_i \right) \cdot y_i^* = 0, i = 1, \dots, m.$$

Зная исходную задачу линейного программирования, можно построить двойственную ей задачу по следующим правилам.

1. Матрица ограничений двойственной задачи получается из матрицы ограничений исходной задачи транспонированием.

2. Столбец свободных членов матрицы ограничений исходной задачи становится коэффициентами целевой функции двойственной задачи и наоборот.

3. Если исходная задача являлась задачей на максимум, то двойственная ей будет задачей на минимум. Если же исходная задача являлась задачей на минимум, то двойственная ей будет задачей на максимум.

4. Знаки во взаимно-двойственных задачах связаны следующим свойством: если исходная задача является задачей на максимум, то знаки тривиальной части ограничений переходят в знаки нетривиальной части ограничений без изменения, а знаки нетривиальной части ограничений переходят в знаки тривиальной части ограничений с изменением знака; если же исходная задача является задачей на минимум, то знаки тривиальной части ограничений переходят в знаки нетривиальной части ограничений с изменением знака, а знаки нетривиальной части ограничений переходят в знаки тривиальной части ограничений без изменения знака.

### Пример 7.6

Составим двойственную задачу для задачи линейного программирования

$$\begin{cases} z = 72x_1 + 47x_2 + 45 \rightarrow \max, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 \leq 5, \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 \geq 4, \\ 7x_1 + x_2 \leq 9, \\ x_1 \geq 0, x_2 \leq 0, x_3 \leq 0. \end{cases}$$

*Решение*

Составим для исходной задачи расширенную матрицу:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & \leq & 5 \\ -1 & 1 & -2 & \geq & 4 \\ 7 & 1 & 0 & \leq & 9 \\ \geq & \leq & \leq & & \\ 72 & 47 & 0 & & 45 \end{pmatrix}.$$



Используя алгоритм построения двойственной задачи, составим соответствующую матрицу:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 7 & \geq & 72 \\ -2 & 1 & 1 & \leq & 47 \\ 3 & -2 & 0 & \leq & 0 \\ \geq & \leq & \geq & & \\ 5 & 4 & 9 & & 45 \end{pmatrix},$$

по которой легко записать двойственную задачу:

$$\text{Ответ: } \begin{cases} t = 5y_1 + 4y_2 + 9y_3 + 45 \rightarrow \min, \\ y_1 - y_2 + 7y_3 \geq 72, \\ -2y_1 + y_2 + y_3 \leq 47, \\ 3y_1 - 2y_2 \leq 0, \\ y_1 \geq 0, y_2 \leq 0, y_3 \geq 0. \end{cases}$$

### Задания для самостоятельной работы

**7.1.** Для двухотраслевой модели экономики найдите матрицу Леонтьева, матрицу прямых затрат и валовый выпуск на новый вариант потребления  $\bar{v}$ :

а)  $\bar{v} = (10, 10)^T$ .

Отрасли	Производственное потребление		Непроизводственное (конечное) потребление
	I	II	
I	30	61	9
II	60	549	1

б)  $\bar{v} = (21, 42)^T$ .

Отрасли	Производственное потребление		Непроизводственное (конечное) потребление
	I	II	
I	40	42	18
II	50	336	34

в)  $\bar{v} = (9, 30)^T$ .

Отрасли	Производственное потребление		Непроизводственное (конечное) потребление
	I	II	
I	20	71	9
II	50	639	21

г)  $\bar{v} = (10, 50)^T$ .

Отрасли	Производственное потребление		Непроизводственное (конечное) потребление
	I	II	
I	20	71	9
II	30	639	41



**7.2.** Задана структурная матрица двух стран  $A$ . Найдите бюджеты этих стран, соответствующие бездефицитной торговле, при условии, что сумма бюджетов равна  $P$ :

а)  $A = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,8 \\ 0,7 & 0,2 \end{pmatrix}; P = 750;$

б)  $A = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,7 \\ 0,5 & 0,3 \end{pmatrix}; P = 600;$

в)  $A = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,6 \\ 0,6 & 0,4 \end{pmatrix}; P = 800.$

**7.3.** Даны матрица прямых затрат и вектор цен. Найдите вектор добавленной стоимости  $V$ :

а)  $A = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,5 \\ 0,7 & 0,3 \end{pmatrix}; P = (130, 120)^T;$

б)  $A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,8 \\ 0,7 & 0,1 \end{pmatrix}; P = (125, 120)^T;$

в)  $A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,7 \\ 0,5 & 0,4 \end{pmatrix}; P = (110, 100)^T.$

**7.4.** Даны матрица прямых затрат и вектор норм добавленной стоимости. Найдите вектор цен:

а)  $A = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,7 \\ 0,5 & 0,2 \end{pmatrix}; V = (1, 2)^T;$

б)  $A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,4 \\ 0,8 & 0,5 \end{pmatrix}; V = (2, 1)^T;$

в)  $A = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,4 \\ 0,7 & 0,2 \end{pmatrix}; V = (11, 22)^T.$

**7.5.** Решите задачу линейного программирования графическим методом:

а)  $\begin{cases} z = x_1 + 3x_2 + 8 \rightarrow \max, \\ x_1 - x_2 \geq -5, \\ 4x_1 + 7x_2 \leq 61, \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 36, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0; \end{cases}$  б)  $\begin{cases} z = 2x_1 + x_2 - 3 \rightarrow \max, \\ x_1 + x_2 \geq 3, \\ x_1 - x_2 \geq 1, \\ x_1 + x_2 \leq 7, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0; \end{cases}$

в)  $\begin{cases} z = 3x_1 + 2x_2 + 1 \rightarrow \max, \\ 5x_1 + 2x_2 \leq 25, \\ x_1 + 2x_2 \leq 13, \\ -2x_1 + x_2 \leq 4, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0; \end{cases}$  г)  $\begin{cases} z = x_1 + 3x_2 - 6 \rightarrow \min, \\ 2x_1 - x_2 \geq -2, \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 30, \\ 2x_1 + x_2 \geq 6, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$

**7.6.** Решите задачу линейного программирования симплекс-методом:

а)  $\begin{cases} z = x_1 + 3x_2 + 8 \rightarrow \max, \\ x_1 - x_2 - x_3 = -5, \\ 4x_1 + 7x_2 + x_4 = 61, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_5 = 36, \\ x_i \geq 0, i = 1, \dots, 5; \end{cases}$  б)  $\begin{cases} z = 2x_1 + x_2 - 3 \rightarrow \max, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ -x_1 + x_2 + x_4 = 1, \\ x_i \geq 0, i = 1, \dots, 4; \end{cases}$  в)  $\begin{cases} z = 3x_1 + 2x_2 + 1 \rightarrow \max, \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 25, \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 13, \\ -2x_1 + x_2 + x_5 = 4, \\ x_i \geq 0, i = 1, \dots, 5. \end{cases}$



**7.7.** Для следующих задач линейного программирования постройте двойственные:

$$\begin{array}{lll} \text{а) } \begin{cases} z = 3x_1 + 2x_2 + 1 \rightarrow \max, \\ 5x_1 + 2x_2 \leq 25, \\ x_1 + 2x_2 \leq 13, \\ -2x_1 + x_2 \leq 4, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0; \end{cases} & \text{б) } \begin{cases} z = x_1 + 3x_2 - 6 \rightarrow \min, \\ 2x_1 - x_2 \geq -2, \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 30, \\ 2x_1 + x_2 \geq 6, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0; \end{cases} & \text{в) } \begin{cases} z = x_1 + 3x_2 + 8 \rightarrow \max, \\ x_1 - x_2 \geq -5, \\ 4x_1 + 7x_2 \leq 61, \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 36, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases} \end{array}$$



## Глава 8

# ЭЛЕМЕНТЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ

---

В результате изучения главы 8 студент должен:

**знать**

- предмет вычислительной математики, его специфику, роль и место численных методов в системе наук;
- источники возникновения погрешностей, методы их устранения;
- основные численные методы алгебры, математического анализа, дифференциальных уравнений;

**уметь**

- применять численные методы решения типовых математических задач при исследовании математических моделей физических, экономических, биологических и других процессов и в прикладных задачах;

**владеть**

- основными численными методами решения математических задач;
  - базовыми программными методами вычислительной математики.
- 

### 8.1. Элементы машинной арифметики.

#### Теория погрешностей. Вычислительные алгоритмы

##### 8.1.1. Понятие о численном методе. Аппроксимация

Основным инструментом для решения сложных математических задач являются численные методы, позволяющие свести решение задачи к выполнению конечного числа действий над числами. Это дает возможность использовать вычислительную технику для создания моделей реальных экономических процессов.

*Численные методы* — это методы приближенного решения задач прикладной математики, основанные на реализации алгоритмов, соответствующих математическим моделям. Наука, изучающая численные методы, называется также численным анализом или вычислительной математикой.

Важнейшим понятием вычислительной математики является понятие аппроксимации. *Аппроксимация* (от лат. *proxima* — ближайшая) есть использование приближенного выражения или функции вместо некоторой исходной, которую сложно исследовать. Аппроксимация позволяет исследовать числовые характеристики и качественные свойства объекта, сводя задачу к изучению более простых или более удобных объектов (например, таких, характеристики которых легко вычисляются или свойства которых уже известны). Аппроксимация широко используется в приложениях. Так, в экономических задачах ее используют для прогнозов показателей, исследуя нерегулярные временные ряды.



Рассмотрим схему численного решения экономической задачи (рис. 8.1).

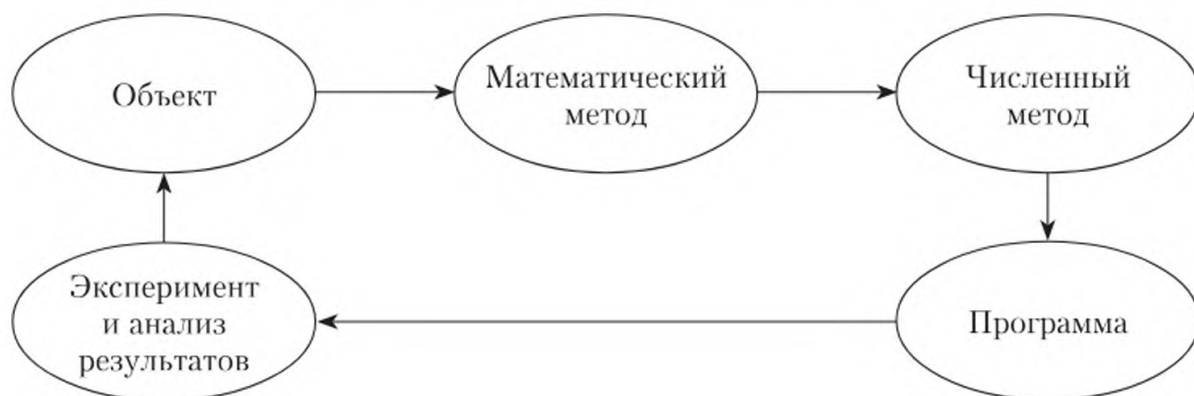


Рис. 8.1. Схема численного решения экономической задачи

В настоящей главе будут рассмотрены два этапа: математический и численный методы.

Для того чтобы непрерывную величину представить в дискретной форме, используют *сетку* (расчетную сетку) — совокупность точек (сеточных узлов)  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , заданных в области определения рассматриваемой функции  $y(x)$ .

При анализе точности вычислительного процесса одним из важнейших критериев является *сходимость численного метода*. Она означает близость получаемого численного решения задачи к истинному решению. Численный метод называется *сходящимся*, если при стремлении параметров метода к определенным предельным значениям результаты расчета стремятся к точному решению. Пусть  $h_n$  — число шагов сетки — стремится к нулю ( $h_n \rightarrow 0$ ). Тогда для сходимости численного метода необходимо, чтобы  $\tilde{y}$  — приближенное решение задачи — стремилось к точному решению  $y$ :  $\tilde{y} \rightarrow y$  при  $h_n \rightarrow 0$ .

Еще одной важной характеристикой численного метода является *устойчивость численного метода*. Численный метод называется *устойчивым*, если результаты расчета непрерывно зависят от входных данных задачи и погрешность округления, связанная с реализацией численного метода, остается ограниченной. Понятие устойчивости численного метода тесно связано с понятием хорошо обусловленной задачи.

### Пример 8.1

Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} 600x_1 + 800x_2 = 1400, \\ 200x_1 + 266x_2 = 466. \end{cases}$$

Точное решение этой системы легко находится подбором:  $x_1 = 1, x_2 = 1$ . Изучим вопрос о влиянии незначительного изменения исходных данных на решение задачи.

*Решение*

Пусть число  $c = 466$  незначительно изменилось, вместо него возьмем число  $\tilde{c} = 464$

(исходное данное число 466 изменилось на 0,43%:  $\frac{2}{466} \cdot 100\% = 0,43\%$ ). Решением

новой системы



$$\begin{cases} 600x_1 + 800x_2 = 1400, \\ 200x_1 + 266x_2 = 464 \end{cases}$$

являются числа  $x_1 = -3, x_2 = 4$ , т.е. при изменении исходных данных на 0,43% компоненты решения изменились в 3 и 4 раза. Итак, задача является плохо обусловленной.

### 8.1.2. Основы теории погрешностей

При решении задачи численными методами получаемый ответ в силу своей приближенности содержит некоторые погрешности. Рассмотрим основные типы погрешностей и их источники. Пусть  $x$  — точное неизвестное значение величины,  $\tilde{x}$  — известное приближенное значение.

*Абсолютной погрешностью* приближения  $x$  называется разность

$$\Delta\tilde{x} = |x - \tilde{x}|.$$

*Относительная погрешность* приближения  $x$  есть частное от деления абсолютной погрешности приближения на модуль приближенного значения. Относительная погрешность приближения обозначается через  $\delta$  и вычисляется в процентах:

$$\delta = \frac{\Delta\tilde{x}}{|\tilde{x}|} \cdot 100\%.$$

*Предельная абсолютная погрешность*  $\Delta(\tilde{x})$  задается соотношением

$$\Delta\tilde{x} = |x - \tilde{x}| \leq \Delta(\tilde{x}).$$

Отсюда, раскрывая знак модуля, получаем, что искомая величина  $x$  находится в  $\Delta$ -окрестности, определяемой величинами приближенного значения и предельной абсолютной погрешности:

$$\tilde{x} - \Delta(\tilde{x}) \leq x \leq \tilde{x} + \Delta(\tilde{x}).$$

*Предельная относительная погрешность* приближения  $\tilde{x}$  определяется как частное от деления предельной абсолютной погрешности на модуль приближенного значения:

$$\delta(\tilde{x}) = \frac{\Delta(\tilde{x})}{|\tilde{x}|}.$$

Отсюда получается соотношение

$$\Delta(\tilde{x}) = \delta(\tilde{x}) |\tilde{x}|.$$

#### Пример 8.2

Найдем предельные абсолютные и относительные погрешности числа  $\pi = 3,141592654\dots$ , заданного двумя цифрами после запятой.

*Решение*

Пусть число  $\pi$  задано двумя цифрами после запятой  $\tilde{x} = 3,14$ . Вычислим абсолютную и относительную погрешности приближения:



$$|\pi - 3,14| \leq 0,002 = \Delta(3,14);$$

$$\delta(3,14) = \left( \frac{0,002}{3,14} \right) \cdot 100\% = 0,064\%.$$

Ответ:  $\Delta(3,14) = 0,002$ ,  $\delta(3,14) = 0,064\%$ .

*Значащими цифрами* приближенного числа называют все цифры в его записи, начиная с первой ненулевой слева.

### Пример 8.3

Выделим значащие цифры следующих чисел: а) 2,134098; б) 0,00123; в) 5690000; г) 0,00001.

*Решение*

По определению значащими являются все цифры в записи числа начиная с первой ненулевой слева. Для числа 2,134098 значащими являются все цифры, для числа 0,00123 — цифры 1, 2, 3, для числа 5690000 — все цифры, для числа 0,00001 значащей является цифра 1.

Ответ: а) все цифры; б) цифры 1, 2, 3; в) все цифры; г) цифра 1.

Первые  $n$  значащих цифр приближенного числа называются *верными*, если абсолютная погрешность этого числа не превышает половины единицы разряда, соответствующего  $n$ -й значащей цифре, считая слева направо. Все другие цифры, помимо верных, называются сомнительными.

Вычислить приближенное число с точностью  $\varepsilon = 10^{-n}$  означает, что необходимо сохранить верной значащую цифру, стоящую в  $n$ -м разряде после запятой.

### Пример 8.4

Найдем верные цифры числа  $a = 467,78245$  при разных значениях  $\Delta(a^*)$ .

*Решение*

Если  $\Delta(a^*) = 0,01$ , то верных цифр в числе 5:  $a = 467,78$ .

Если  $\Delta(a^*) = 0,03$ , то верных цифр в числе 4:  $a = 467,7$ .

Если  $\Delta(a^*) = 0,00006$ , то верных цифр в числе 7:  $a = 467,7824$ .

Ответ: 467,78; 467,7; 467,7824.

*Округлить приближенное число* значит заменить его числом с меньшим количеством значащих цифр.

Для округления числа до  $n$  значащих цифр следует отбросить все его цифры, стоящие справа от значащей цифры. При этом следует руководствоваться следующим *правилом округления*:

- если первая из отброшенных цифр меньше 5, то оставшиеся десятичные цифры остаются без изменения;
- если первая из отброшенных цифр больше либо равна 5 и среди остальных отброшенных цифр есть ненулевые, то к последней оставшейся цифре прибавляется единица;
- если первая из отброшенных цифр равна 5 и остальные отброшенные цифры нулевые, то последняя оставшаяся цифра не изменяется, если она четная, и увеличивается на единицу, если она нечетная.



### Пример 8.5

Округлим число  $x = 5,818525750$  до семи и шести десятичных знаков.

*Решение*

Округлим число  $x = 5,818525750$  до семи знаков после запятой, пользуясь правилом округления. Так как первая из отброшенных цифр равна 5, остальные отброшенные цифры нулевые, последняя оставшаяся цифра нечетная, получаем  $x = 5,8185258$ .

Округлим число  $x = 5,818525750$  до шести знаков после запятой:  $x = 5,818526$ , так как первая из отброшенных цифр больше 5.

*Ответ:*  $x = 5,8185258$ ,  $x = 5,818526$ .

## 8.2. Устойчивость и сходимость алгоритмов

### 8.2.1. Понятие об устойчивости метода и задачи

Любой численный метод представляет собой алгоритм, в результате которого по исходной величине  $x$  находится искомая величина  $y$ . Если исходная величина имеет погрешность  $\Delta x$ , то решение имеет погрешность  $\Delta y$ . Задача называется *устойчивой* по исходному параметру  $x$ , если решение  $y$  непрерывно зависит от  $x$ . Это означает, что малое приращение  $\Delta x$  приводит к малому приращению  $\Delta y$ .

Отсутствие устойчивости означает, что даже незначительные погрешности в исходных данных приводят к большим погрешностям в решении или вовсе к неверному результату. О подобных неустойчивых задачах также говорят, что они *чувствительны* к погрешностям исходных данных.

Приведем пример неустойчивой задачи. Рассматривается многочлен

$$P(x) = (x-1)(x-2)\dots(x-20) = x^{20} - 210x^{19} + \dots$$

Заметим, что корнями этого многочлена являются  $x_1 = 1, x_2 = 2, \dots, x_{20} = 20$ .

Теперь допустим, что один из коэффициентов многочлена вычислен с некоторой малой погрешностью. Например, коэффициент  $-210$  при  $x^{19}$  увеличим на  $2^{-23}$  (около  $10^{-7}$ ). В результате вычислений даже с большой точностью до 11 значащих цифр получим совершенно другие значения корней. Например:

$$\begin{aligned}x_1 &= 1, x_2 = 2, x_3 = 3, x_4 = 4, x_5 = 5, x_6 = 6, x_7 = 7, x_8 = 8,01, x_9 = 8,92, \\x_{10,11} &= 10,1 \pm 0,664i, x_{12,13} = 11,8 \pm 1,65i, x_{14,15} = 14 \pm 2,52i, \\x_{16,17} &= 16,7 \pm 2,81i, x_{18,19} = 19,5 \pm 1,94i, x_{20} = 20,8.\end{aligned}$$

Мы видим, что незначительное изменение коэффициента при  $x^{19}$  привело к тому, что большая половина корней стали комплексными. Причина такого явления — неустойчивость самой задачи; вычисления выполнялись очень точно (11 разрядов), а погрешности округлений не могли привести к таким последствиям.

### 8.2.2. Понятие о сходимости численного метода

Мы обсудили понятие устойчивой задачи. Рассмотрим теперь *устойчивость алгоритма*. Построим численный метод вычисления интеграла



$$I_n = \int_0^1 x^n e^{x-1} dx, n = 1, 2, \dots$$

Применим формулу интегрирования по частям:

$$I_1 = \int_0^1 x e^{x-1} dx = x e^{x-1} \Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx = \frac{1}{e};$$

$$I_2 = \int_0^1 x^2 e^{x-1} dx = x^2 e^{x-1} \Big|_0^1 - 2 \int_0^1 x e^x dx = 1 - 2I_1;$$

...

$$I_n = \int_0^1 x^n e^{x-1} dx = x^n e^{x-1} \Big|_0^1 - n \int_0^1 x^{n-1} e^x dx = 1 - n I_{n-1}.$$

Полученные рекуррентные соотношения позволяют вычислить значения величин:  $I_1 = 0,367879$ ;  $I_2 = 0,263242$ ;  $I_3 = 0,207274$ ;  $I_4 = 0,170904$ ;  $I_5 = 0,145480$ ;  $I_6 = 0,127120$ ;  $I_7 = 0,110160$ ;  $I_8 = 0,118720$ ;  $I_9 = -0,00684800$ .

Итак, мы получили, что интеграл от неотрицательной функции  $x^9 e^{x-1}$  равен отрицательному числу  $-0,00684800$ . Получаем противоречие, так как интеграл от неотрицательной функции на отрезке всегда есть положительное число. Источник погрешности в этом случае лежит в самом алгоритме численного метода. Именно округление в  $I_1$  дает небольшую погрешность  $4,4 \cdot 10^{-7}$ . С каждой последующей итерацией погрешность умножается на числа  $-2$ ,  $-3$  и т.д., что в итоге дает  $9$  и результат  $-0,00684800$ , не имеющий смысла.

При анализе точности вычислительного процесса одним из важнейших критериев является *сходимость* численного метода. Она означает близость получаемого численного решения задачи к истинному решению.

Рассмотрим понятие *сходимости итерационного процесса*. Этот процесс состоит в том, что для решения некоторой задачи и нахождения искомого значения определяемого параметра (например, корня нелинейного уравнения) строится метод последовательных приближений. В результате многократного повторения этого процесса (или *итераций*) получаем последовательность значений  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Говорят, что эта последовательность *сходится* к точному решению  $x = a$ , если при неограниченном возрастании числа итераций предел этой последовательности существует и равен

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a.$$

В этом случае имеем *сходящийся численный метод*.

### 8.3. Численные методы решения нелинейных уравнений с одной неизвестной

#### 8.3.1. Постановка задачи

Ставится задача отыскания корней уравнения  $f(x) = 0$ .

В процессе приближенного отыскания корней уравнения обычно выделяют два этапа: локализация (или отделение) корня и уточнение корня.



Локализация корня заключается в определении отрезка  $[a, b]$ , содержащего один и только один корень. На наличие корня на отрезке  $[a, b]$  указывает различие знаков функции на концах отрезка. Основанием для этого служит следующая теорема.

**Теорема 8.1.** Если функция  $f$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$  и принимает на его концах значения разных знаков, так что  $f(a)f(b) < 0$ , то отрезок  $[a, b]$  содержит по крайней мере один корень уравнения.

Однако корень четной кратности таким образом локализовать нельзя, так как в окрестности такого корня функция  $f(x)$  имеет постоянный знак. На этапе уточнения корня вычисляют приближенное значение корня с заданной точностью  $\varepsilon > 0$ . Рассмотрим некоторые численные методы решения нелинейных уравнений: метод половинного деления, метод простой итерации и метод Ньютона.

### 8.3.2. Метод половинного деления

Пусть известно, что корень уравнения находится на отрезке  $[a_0, b_0]$ , т.е.  $x^* \in [a_0, b_0]$ , так что  $f(x^*) = 0$ . Пусть функция  $f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a_0, b_0]$  и принимает на концах отрезка значения разных знаков, т.е.  $f(a_0)f(b_0) < 0$ .

Разделим отрезок  $[a_0, b_0]$  пополам. Получим точку  $x_0 = \frac{a_0 + b_0}{2}$ . Вычислим значение функции в этой точке  $f(x_0)$ . Если  $f(x_0) = 0$ , то  $x_0$  — искомый корень и задача решена. Если  $f(x_0) \neq 0$ , то  $f(x_0)$  — число определенного знака:  $f(x_0) > 0$  либо  $f(x_0) < 0$ . Тогда либо на концах отрезка  $[a_0, x_0]$ , либо на концах отрезка  $[x_0, b_0]$  значения функции  $f(x)$  имеют разные знаки. Обозначим такой отрезок  $[a_1, b_1]$ . Очевидно, что  $x^* \in [a_1, b_1]$  и длина отрезка  $[a_1, b_1]$  в два раза меньше, чем длина отрезка  $[a_0, b_0]$ . Поступим аналогично с отрезком  $[a_1, b_1]$ . В результате получим либо корень  $x^*$ , либо новый отрезок  $[a_2, b_2]$  и т.д.

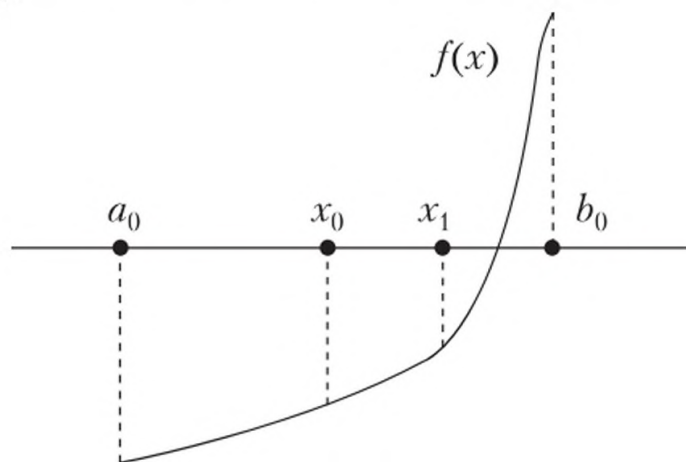


Рис. 8.2. Метод половинного деления

Середина  $n$ -го отрезка  $x_n = \frac{a_n + b_n}{2}$ . Очевидно, что длина отрезка  $[a_n, x_n]$  будет равна  $\frac{b_0 - a_0}{2^n}$ , а так как  $x^* \in [a_n, b_n]$ , то



$$|x_n - x^*| \leq \frac{b_n - a_n}{2} \leq \frac{b_0 - a_0}{2^{n+1}}.$$

При заданной точности приближения  $\varepsilon$  вычисления заканчиваются, когда будет выполнено неравенство  $b_n - a_n \leq 2\varepsilon$ .

### Пример 8.6

Вычислим приближенно  $x = \sqrt[5]{2}$  с точностью  $\varepsilon = 0,01$ .

*Решение*

Эта задача эквивалентна решению уравнения  $x^5 - 2 = 0$  или нахождению нуля функции  $f(x) = x^5 - 2$ . В качестве начального отрезка  $[a_0, b_0]$  возьмем отрезок  $[1, 2]$ . На концах этого отрезка функция принимает значения с разными знаками:  $f(1) < 0, f(2) > 0$ . Найдем число  $n$  делений отрезка  $[1, 2]$ , необходимых для достижения требуемой точности. Имеем:

$$|x_n - x^*| \leq \frac{2-1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^{n+1}} \leq 10^{-2}, \quad n \geq 6.$$

$x = \sqrt[5]{2} \approx 1,1484$ . Приведем результаты вычисления в табл. 8.1.

Таблица 8.1

Результаты вычислений для примера 8.6

$n$	0	1	2	3	4	5	6
$a_n$	1,0000	1,0000	1,0000	1,1250	1,1250	1,1406	1,1406
$b_n$	2,0000	1,5000	1,2500	1,2500	1,1875	1,1875	1,1562
$x_n$	1,5000	1,2500	1,1250	1,1875	1,1406	1,1562	1,1484
Знак $f(a_n)$	–	–	–	–	–	–	–
Знак $f(b_n)$	+	+	+	+	+	+	+
$f(x_n)$	5,5938	0,7585	–0,2959	0,1812	–0,0691	0,0532	–0,0078
$b_n - a_n$	1,0000	0,5000	0,2500	0,1250	0,0625	0,0312	0,0156

### 8.3.3. Метод простой итерации

Пусть уравнение  $f(x) = 0$  можно заменить эквивалентным ему уравнением  $x = \varphi(x)$ .

Выберем каким-либо образом начальное приближение  $x_0$ . Вычислим значение функции  $\varphi(x)$  при  $x = x_0$  и найдем уточненное значение  $x_1 = \varphi(x_0)$ . Подставим теперь  $x_1$  в уравнение  $x_2 = \varphi(x_1)$  и получим новое приближение и т.д. Продолжая этот процесс, получим последовательность приближений к корню:  $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ . Это расчетная формула метода простой итерации.

Если существует предел

$$x^* = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$$

и функция  $\varphi(x)$  непрерывна, то, переходя к пределу, получим, что  $x^*$  есть корень уравнения.

Метод простой итерации сходится, что видно из следующей теоремы.



**Теорема 8.2.** Пусть функция  $\varphi(x)$  определена и дифференцируема на отрезке  $[a, b]$ , причем все ее значения  $\varphi \in [a, b]$ . Тогда если выполняется условие  $|\varphi'(x)| < 1$  при  $a < x < b$ , то:

- 1) процесс итерации сходится независимо от начального значения;
- 2) предельное значение является единственным корнем уравнения  $x = \varphi(x)$  на отрезке  $[a, b]$ .

#### Пример 8.7

Решим методом простой итерации уравнение  $f(x) = x^2 - 0,6$ . Отрезок  $[0, 1]$ , точность 0,025.

*Решение*

Преобразуем исходное уравнение:  $x = x + \lambda(x^2 - 0,6)$ . Чтобы вычислить  $\lambda$ , будем использовать формулу  $\lambda = -1 / \max\{f'(x)\} = -1 / (2x) = -1 / 2$ . Тогда  $x_{i+1} = -0,5x_i^2 + x_i + 0,3$ . Пусть начальная точка  $x_0 = 1$ . Составим таблицу:

$n$	0	1	2
$x_n$	1	0,8	0,78

Так как  $|0,8 - 0,78| = 0,02 < \varepsilon$ , то  $x^* \approx 0,78$ .

Ответ: 0,78.

#### 8.3.4. Метод Ньютона

Пусть корень  $x^* \in [a, b]$ , т.е.  $f(a)f(b) < 0$ . Предполагаем, что функция  $f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$  и дважды непрерывно дифференцируема на интервале  $(a, b)$ . Положим  $x_0 = b$ . Проведем касательную к графику функции  $y = f(x)$  в точке  $B_0(x_0, f(x_0))$  (рис. 8.3).

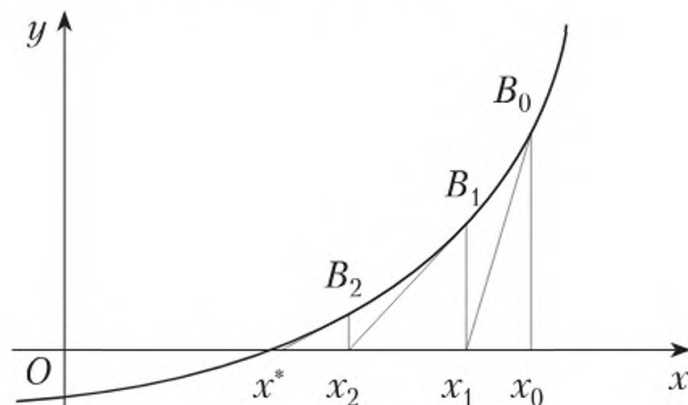


Рис. 8.3. Метод Ньютона

Запишем уравнение касательной:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Возьмем абсциссу точки пересечения этой касательной с осью  $Ox$ :

$$y = 0, x = x_1 : x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$



Таким же образом поступаем с точкой  $B_1(x_1, f(x_1))$ , затем с точкой  $B_2(x_2, f(x_2))$  и т.д., в результате получим последовательность приближений  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , причем

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Получили расчетную формулу метода Ньютона.

Метода Ньютона сходится, что видно из следующей теоремы.

**Теорема 8.3.** Пусть  $x^*$  — простой корень уравнения  $f(x) = 0$  и в некоторой окрестности этого корня функция  $f$  дважды непрерывно дифференцируема. Тогда найдется такая малая  $\sigma$ -окрестность корня  $x^*$ , что при произвольном выборе начального приближения  $x_0$  справедлива оценка

$$|x_{n+1} - x^*| \leq c |x_n - x^*|^2, \quad c = \frac{1}{\sigma}.$$

Заметим, что вопрос о сходимости метода Ньютона зависит от того, как выбрано начальное приближение. Пусть  $[a, b]$  — отрезок, содержащий корень. Выберем в качестве начального приближения тот из концов отрезка, для которого  $f(x_0)f''(x) \leq 0$ . Тогда итерации сходятся монотонно (см. рис. 8.3,  $x_0 = b$ ).

#### Пример 8.8

Найдем с помощью метода Ньютона отрицательный корень уравнения  $f(x) = x^4 - 3x^2 + 75x - 10000 = 0$  с точностью 0,0001.

*Решение*

Корень локализован на интервале  $[-11, -10]$ :  $f(-11) = 3435$ ,  $f(-10) = -1050$ . В этом интервале  $f'(x) < 0$  и  $f''(x) > 0$ . Так как  $f(-11) > 0$  и  $f''(-11) > 0$ , то  $x_0 = -11$ . Составим таблицу:

$x_n$	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$h_n = -f(x_n)/f'(x_n)$
-11	3453	-5183	0,6662
-10,3336	307,3	4276,8	0,0718
-10,2618	3,496	4185,9	0,0008
-10,261	0,1477	—	—

$$|x_3 - x_2| = |-10,261 - (-10,2618)| = 0,0008 < 0,001.$$

Поэтому  $x^* = -10,261$ .

Ответ: -10,261.

## 8.4. Численное интегрирование

### 8.4.1. Квадратурная формула прямоугольников

Пусть нужно вычислить значение определенного интеграла, если известны значения подынтегральной функции в некоторых точках. Рассмотрим определенный интеграл вида

$$\int_a^b p(x)f(x)dx.$$



Здесь  $f(x)$  — вещественная функция, заданная на любом отрезке  $[a, b]$ ;  $p(x)$  — некоторая фиксированная функция, которую называют *весовой функцией*, или *весом*.

Будем искать приближенное значение интеграла в виде линейной комбинации значений функции  $f(x)$  на отрезке  $[a, b]$ :

$$\int_a^b p(x)f(x)dx \approx \sum_{k=1}^n A_k f(x_k).$$

Это равенство называют *квадратурной формулой*, определяемой узлами  $x_k$  и коэффициентами  $A_k$ . Величину

$$R_n(f) = \int_a^b p(x)f(x)dx - \sum_{k=1}^n A_k f(x_k)$$

называют *остаточным членом*, или *остатком* квадратурной формулы.

Пусть вес тождественно равен 1, т.е.  $p(x) = 1$ . В этом случае рассматриваемый интеграл имеет вид  $\int_a^b f(x)dx$  с конечным отрезком интегрирования.

Пусть на отрезке  $[a, b]$  задана функция  $f(x)$ . Введем сетку, разбивающую отрезок  $[a, b]$  на  $N$  равностоящих узлов  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N = b$ , где  $x_i = a + ih$ , шаг  $h = (b - a) / N$ . Обозначим  $f_i = f(x_i)$ ,  $i = 0, 1, \dots, N$ .

Выберем на каждом сегменте серединную точку  $x_{i-1/2} = x_i - 0,5h$  и обозначим  $f_{i-1/2} = f(x_{i-1/2})$ . Тогда интеграл вычисляется по *квадратурной формуле прямоугольников*

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^n f_{i-1/2}h.$$

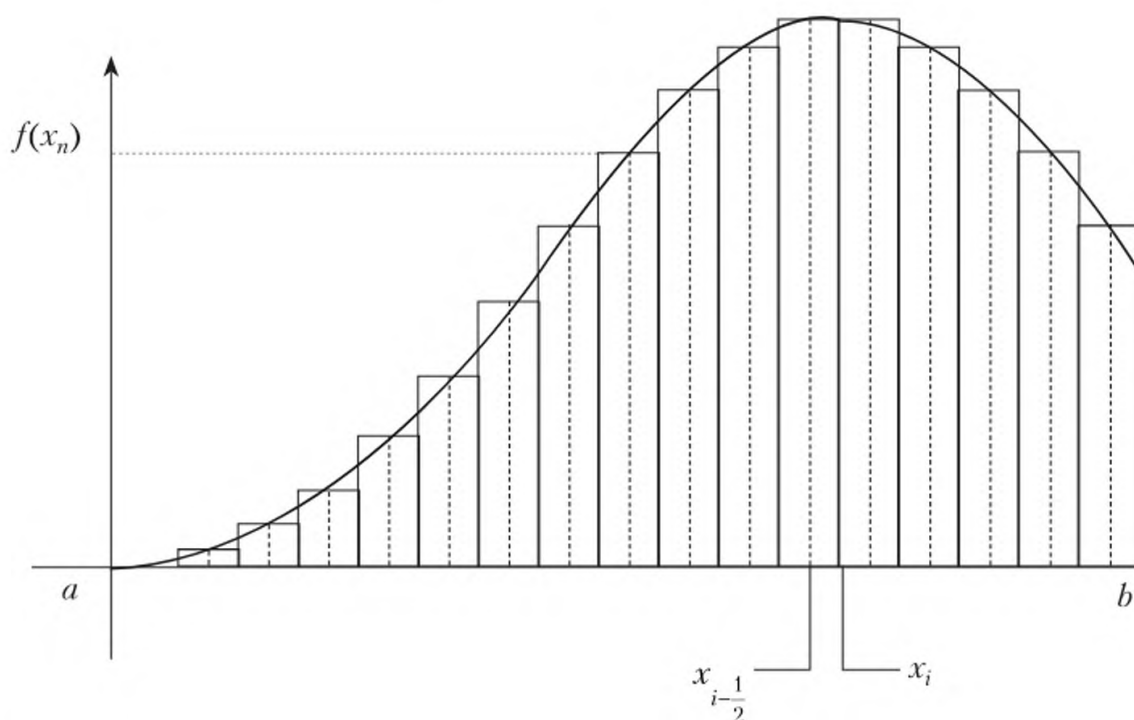


Рис. 8.4. Вычисление интеграла по квадратурной формуле прямоугольников



### 8.4.2. Квадратурная формула Симпсона

Суть метода Симпсона<sup>1</sup> состоит в приближении графика функции на отрезке параболой:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^n \frac{h}{6} (f_{i-1} + 4f_{i-1/2} + f_i).$$

Другой вариант формулы Симпсона:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{6N} [f_0 + f_{2N} + 2(f_2 + \dots + f_{2N-2}) + 4(f_1 + \dots + f_{2N-1})].$$

### 8.4.3. Квадратурная формула трапеций

Суть метода трапеций состоит в приближении интеграла функции на отрезке площадью трапеции (рис. 8.5):

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^n \frac{f_{i-1} + f_i}{2} h,$$

или

$$\int_a^b f(x)dx = h(0,5f_0 + f_1 + \dots + f_{N-1} + 0,5f_N).$$

Выберем на каждом сегменте серединную точку  $x_{i-1/2} = x_i - 0,5h$  и обозначим  $f_{i-1/2} = f(x_{i-1/2})$ .

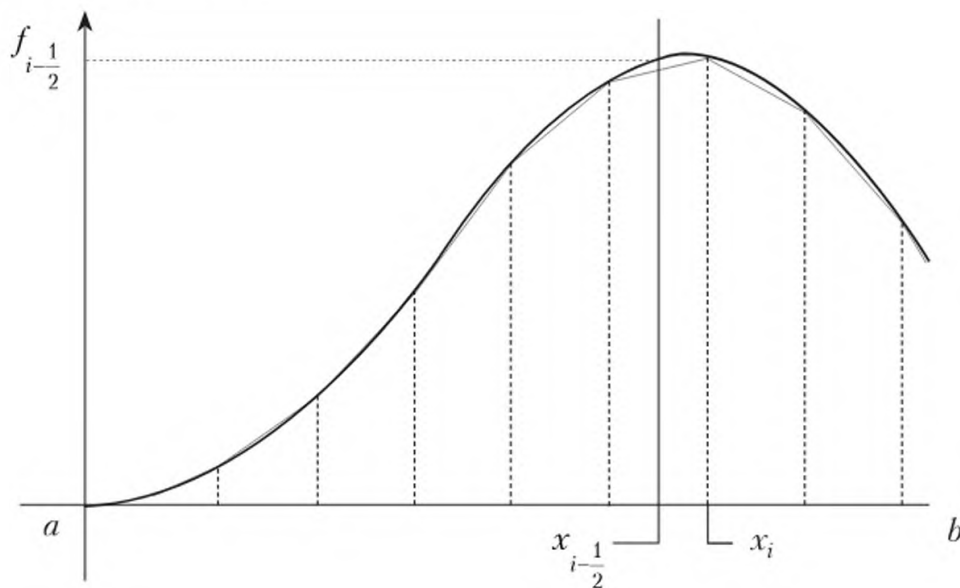


Рис. 8.5. Вычисление интеграла по формуле трапеций

#### Пример 8.9

Вычислим интеграл  $\int_{2,1}^{4,1} \frac{dx}{1-x}$  по квадратурным формулам прямоугольников, трапеций и Симпсона и сравним с точным значением интеграла.

<sup>1</sup> Томас Симпсон (1710–1761) — английский математик.



Решение

1. Вычислим интеграл точно:  $\int_{2,1}^{4,1} \frac{dx}{1-x} = -1,036$ .

2. Квадратурная формула прямоугольников. Введем сетку, разделяющую отрезок  $[a, b]$  на  $n = 10$  частей, при этом  $h = 0,2$ . Выберем на каждом сегменте  $[x_{i-1}, x_i], i = 1, \dots, 10$ , срединную точку  $x_{i-1/2} = x_i - 0,5h$ .

Применяя квадратурную формулу прямоугольников, получаем

$$\int_{2,1}^{4,1} \frac{dx}{1-x} \approx \sum_{i=1}^n f(x_{i-1/2})h \approx 0,2 \left( \frac{1}{1-2,2} + \frac{1}{1-2,4} + \frac{1}{1-2,6} + \frac{1}{1-2,8} + \frac{1}{1-3} + \frac{1}{1-3,2} + \frac{1}{1-3,4} + \frac{1}{1-3,6} + \frac{1}{1-3,8} + \frac{1}{1-4} \right) \approx -1,035.$$

Сравним точное и полученное значений интегралов. Разнос  $|-1,036 + 1,035| = 0,01$  значительно меньше погрешности 0,66666, что говорит о явно завышенной оценке.

3. Квадратурная формула трапеций. На той же сетке получаем по квадратурной формуле трапеции

$$\begin{aligned} \int_{2,1}^{4,1} \frac{dx}{1-x} &= h(0,5f_0 + f_1 + \dots + f_{N-1} + 0,5f_N) = \\ &= 0,2 \left( 0,5 \frac{1}{1-2,1} + \frac{1}{1-2,3} + \frac{1}{1-2,5} + \frac{1}{1-2,7} + \frac{1}{1-2,9} + \frac{1}{1-3,1} + \frac{1}{1-3,3} + \frac{1}{1-3,5} + \frac{1}{1-3,7} + \frac{1}{1-3,9} + 0,5 \frac{1}{1-4,1} \right) \approx -1,22. \end{aligned}$$

При этом оценка погрешности составляет

$$R \leq M_2 \frac{h^2(b-a)}{12} = 200 \cdot \frac{0,2^2(4,1-2,1)}{12} \approx 1,333333.$$

При сравнении точного и полученного значений интегралов разность  $|-1,036 + 1,22| = 0,18$  значительно меньше погрешности 0,66666, что говорит о явно завышенной оценке.

4. Квадратурная формула Симпсона. Введем сетку, как в п. 2. Чтобы не использовать дробные индексы, обозначим  $x_i = a + 0,5h_i$ ,  $f_i = f(x_i)$ ,  $i = 0, 1, \dots, 20$ , и запишем формулу Симпсона в виде

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{6} [f_0 + f_{2n} + 2(f_2 + \dots + f_{2n-2}) + 4(f_1 + \dots + f_{2n-1})].$$

Вычислим интеграл по квадратурной формуле Симпсона:

$$\begin{aligned} \int_{2,1}^{4,1} \frac{dx}{1-x} &= \frac{0,2}{6} \left[ \frac{1}{1-2,1} + \frac{1}{1-4,1} + 2 \left( \frac{1}{1-2,3} + \frac{1}{1-2,5} + \frac{1}{1-2,7} + \frac{1}{1-2,9} + \frac{1}{1-3,1} + \frac{1}{1-3,3} + \frac{1}{1-3,5} + \frac{1}{1-3,7} + \frac{1}{1-3,9} \right) + \right. \\ &+ 4 \left( \frac{1}{1-2,2} + \frac{1}{1-2,4} + \frac{1}{1-2,6} + \frac{1}{1-2,8} + \frac{1}{1-3,0} + \frac{1}{1-3,2} + \frac{1}{1-3,4} + \frac{1}{1-3,6} + \frac{1}{1-3,8} \right) \left. \right] = -0,99. \end{aligned}$$

Оценка погрешности этой формулы:

$$M_4 = \sup_{x \in [2,1; 4,1]} |f^{(4)}(x)| = |f^{(4)}(2,1)| = -14,9.$$



$$R \leq M_4 \frac{h^4(b-a)}{2880} = -14,9 \cdot \frac{0,2^4(4,1-2,1)}{2880} \approx -1,6 \cdot 10^{-5}.$$

Сравнение точного значения интеграла с полученным дает разность  $|-1,036 + 0,99| = 0,046$ . Эта разность больше погрешности. Можно сказать, что в данном случае оценка занижена.

#### 8.4.4. Интерполяционный многочлен Лагранжа

Для приближения табличных функций многочленами французский математик Жозеф Луи Лагранж предложил следующий метод. Пусть функция задана таблично:

$y$	$y_1$	$y_2$	...	$y_n$
$x$	$x_1$	$x_2$	...	$x_n$

Тогда ее можно приблизить многочленом следующего вида:

$$L(x) = \sum_{i=0}^n y_i l_i,$$

где базисные полиномы  $l_i$  вычисляются по формулам

$$l_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}, i = 1, \dots, n.$$

#### Пример 8.10

Построим многочлен Лагранжа при  $n = 3$  для случая

$$x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 2, f_1 = 3, f_2 = 2, f_3 = 5.$$

*Решение*

Воспользуемся формулой для многочлена Лагранжа. Вычислим предварительно вспомогательные многочлены:

$$\Phi_1(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq 1}}^3 \frac{x - x_j}{x_1 - x_j} = \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} \frac{x - x_3}{x_1 - x_3} = \frac{x - 1}{-1} \frac{x - 2}{-2} = \frac{(x - 1)(x - 2)}{2};$$

$$\Phi_2(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq 2}}^3 \frac{x - x_j}{x_2 - x_j} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \frac{x - x_3}{x_2 - x_3} = \frac{x}{1} \frac{x - 2}{-1} = -x(x - 2);$$

$$\Phi_3(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq 3}}^3 \frac{x - x_j}{x_3 - x_j} = \frac{x - x_1}{x_3 - x_1} \frac{x - x_2}{x_3 - x_2} = \frac{x}{2} \frac{x - 1}{1} = \frac{x(x - 1)}{2}.$$

Теперь подставим полученные вспомогательные многочлены в формулу многочлена Лагранжа:

$$\begin{aligned} L_3(x) &= \sum_{i=1}^3 f_i \Phi_i(x) = f_1 \Phi_1(x) + f_2 \Phi_2(x) + f_3 \Phi_3(x) = \\ &= 3 \frac{(x - 1)(x - 2)}{2} - 2x(x - 2) + 5 \frac{x(x - 1)}{2} = 2x^2 - 3x + 3. \end{aligned}$$

Ответ:  $L_3(x) = 2x^2 - 3x + 3$ .



## Задания для самостоятельной работы

**8.1.** Выполните округление приближенных чисел и запишите результат с учетом верных цифр:

- а)  $a = -0,5689176$ ,  $\Delta(a^*) = 0,005$ ; б)  $a = 2,497302$ ,  $\Delta(a^*) = 0,01$ ;  
в)  $a = -0,6709987$ ,  $\Delta(a^*) = 0,007$ ; г)  $a = 2,386222$ ,  $\Delta(a^*) = 0,03$ ;  
д)  $a = -0,5689176$ ,  $\Delta(a^*) = 0,0016$ ; е)  $a = -1,5689176$ ,  $\Delta(a^*) = 0,005$ ;  
ж)  $a = 1,386222$ ,  $\Delta(a^*) = 0,04$ ; з)  $a = -0,5689176$ ,  $\Delta(a^*) = 0,001$ ;  
и)  $a = -1,386222$ ,  $\Delta(a^*) = 0,02$ ; к)  $a = 1,386222$ ,  $\Delta(a^*) = 0,02$ .

**8.2.** Высота и радиус основания цилиндра измерены с точностью до 0,5%. Какова относительная погрешность при вычислении объема цилиндра?

**8.3.** Укажите правила оценки абсолютных и относительных погрешностей функций  $x^a$ ,  $a^x$ .

**8.4.** Решите уравнение приближенно одним из известных вам способов с точностью  $\varepsilon = 0,00001$ :

- а)  $2^x + 5x - 3 = 0$ ; б)  $3x + 4x^3 - 12x^2 - 5 = 0$ ; в)  $5^x - 3x = 0$ ;  
г)  $0,5^x + 1 = (x - 2)^2$ ; д)  $x^4 - x - 1 = 0$ ; е)  $x^2 - 2 + 0,5^x = 0$ ;  
ж)  $(x - 1)^2 \lg(x + 1) = 1$ ; з)  $2x^3 - 9x^2 - 60x + 1 = 0$ ;  
и)  $\log_2(-x) \cdot (x + 2) = -1$ ; к)  $x^3 - 3x^2 - 10 = 0$ .

**8.5.** Решите уравнение методами Ньютона и итерации с точностью  $\varepsilon = 0,00001$ :

- а)  $\ln x + (x + 1)^3 = 0$ ; б)  $x^3 + 3x - 1 = 0$ ; в)  $x^3 - 3x^2 + 9x - 15 = 0$ ;  
г)  $x^3 + 2x^2 + 2 = 0$ ; д)  $x^3 + x - 3 = 0$ ; е)  $x \cdot 2^x = 1$ ;  
ж)  $x + \lg x = 0,5$ ; з)  $\sqrt{x + 1} = 1/x$ ; и)  $x^3 + 0,4x^2 + 0,6x - 1,6 = 0$ ;  
к)  $x^3 - 2x + 2 = 0$ ; л)  $2 - x + 2 = 0$ ; м)  $x^3 - 0,2x^2 + 0,4x - 1,4 = 0$ .

**8.6.** Постройте многочлен Лагранжа для следующих узлов и значений функции:

- а)  $x_1 = 2, x_2 = 3, x_3 = 5, f_1 = 4, f_2 = 5, f_3 = 7$ ;  
б)  $x_1 = 0, x_2 = 5, x_3 = 7, f_1 = 1, f_2 = 4, f_3 = 5$ ;  
в)  $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = -1, f_1 = 2, f_2 = 3, f_3 = 4$ ;  
г)  $x_1 = 2, x_2 = 3, x_3 = 5, f_1 = 4, f_2 = 5, f_3 = 7$ .

**8.7.** Найдите численным методом значение определенного интеграла:

- а)  $\int_0^1 \frac{e^x}{x^2} dx$ ; б)  $\int_0^1 \frac{\cos x - 1}{x^2} dx$ ; в)  $\int_0^1 \frac{1 - \cos x}{x\sqrt{x}} dx$ ; г)  $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dx$ ; д)  $\int_0^1 \frac{\sqrt{x^3 + 1}}{\sqrt{x}} dx$ .







**Раздел III**  
**ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ**  
**И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА**









## Глава 9

# ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

---

В результате изучения главы 9 студент должен:

**знать**

- основные понятия теории вероятностей, необходимые для решения профессиональных задач экономиста;

**уметь**

- применять теоретико-вероятностные методы при изучении и моделировании экономических процессов;

**владеть**

- навыками практического использования базовых знаний и вероятностных методов решения задач в области экономики;
  - методикой построения, анализа и применения математических моделей для оценки состояния и прогноза развития экономических процессов (в части компетенций, соответствующих методам теории вероятностей).
- 

### 9.1. Основные понятия теории вероятностей

#### 9.1.1. Случайные события и операции над ними

При использовании классических подходов к определению основных понятий теории вероятностей необходимо, чтобы имелась возможность для многократного осуществления какого-либо испытания (опыта) при неизменных условиях. Качественный результат испытания в таком случае называют *событием*.

Если событие никогда не наступит при испытании, сколько бы раз его ни повторяли, то оно называется *невозможным*. Невозможное событие обозначают символом  $\emptyset$ .

Если при каждом осуществлении испытания событие наступает обязательно, то оно называется *достоверным*. Достоверное событие обозначают символом  $\Omega$ .

Если при осуществлении испытания событие может наступить, а может и не наступить, то оно называется *случайным*. Случайные события принято обозначать латинскими буквами  $A, B, C, \dots$

Если событие нельзя разложить на более простые события, тогда оно называется *элементарным*. Элементарные события, как правило, обозначают  $\omega_1, \omega_2, \dots$

Множество всех возможных событий, связанных с данным испытанием, называют *пространством событий*. Пространство событий обозначают  $\Omega$  и изображают как универсальное множество. Тогда область наступления какого-либо события  $A$  изображают подмножеством, а элементарное событие — точкой в пространстве  $\Omega$  (рис. 9.1).



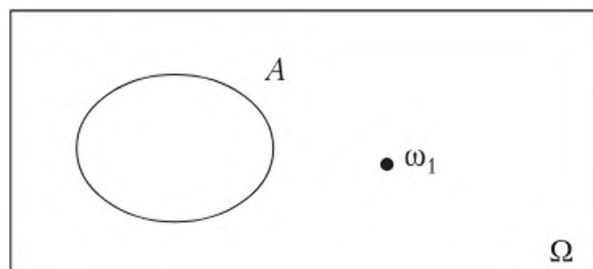


Рис. 9.1. Пространство событий

События, которые не могут наступить одновременно в одном и том же испытании, называют *несовместными* (рис. 9.2).

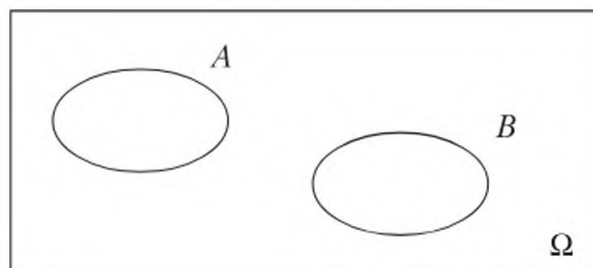


Рис. 9.2. Несовместные события

События, которые могут наступить одновременно в одном и том же испытании, называют *совместными* (рис. 9.3).

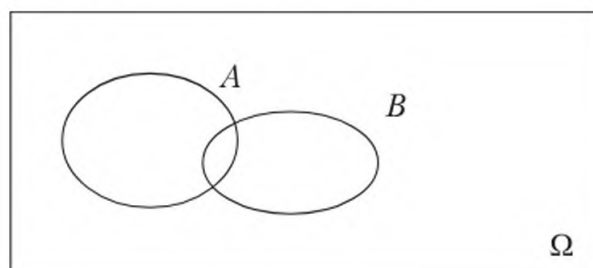


Рис. 9.3. Совместные события

Если в одном и том же испытании при наступлении события  $A$  событие  $B$  наступает обязательно, то говорят, что  $A$  *благоприятствует*  $B$  (рис. 9.4).

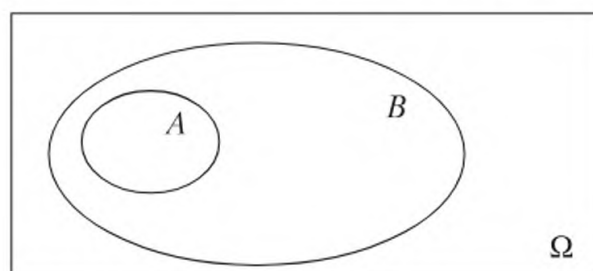


Рис. 9.4. Событие  $A$  благоприятствует событию  $B$

Если событие  $A$  благоприятствует событию  $B$  и одновременно событие  $B$  благоприятствует событию  $A$ , то события  $A$  и  $B$  определяются как *равные*, или *тождественные*.

Для событий определены операции сложения, вычитания и умножения. В результате выполнения операции формируется новое событие, область



наступления которого можно отмечать штриховкой на диаграмме. Кроме того, для нового события можно заполнять таблицу значимости, в которой 1 обозначает факт наступления события, а 0 отмечает то, что событие не наступило.

*Суммой  $A + B$  двух событий называют новое событие, состоящее в том, что наступило хотя бы одно из событий  $A$  или  $B$  (рис. 9.5).*

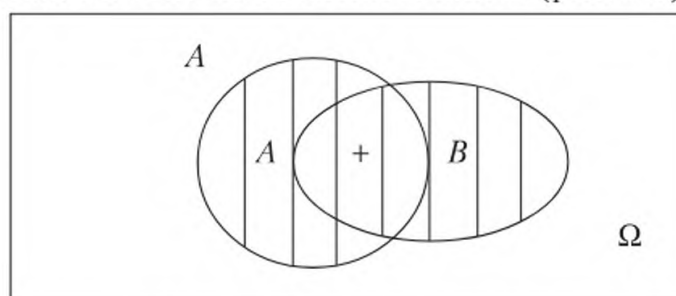


Рис. 9.5. Сумма событий

Таблица значимости для суммы событий имеет вид

$A$	$B$	$A + B$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

*Разностью  $A - B$  двух событий называют новое событие, состоящее в том, что событие  $A$  наступило, а событие  $B$  не наступило (рис. 9.6).*

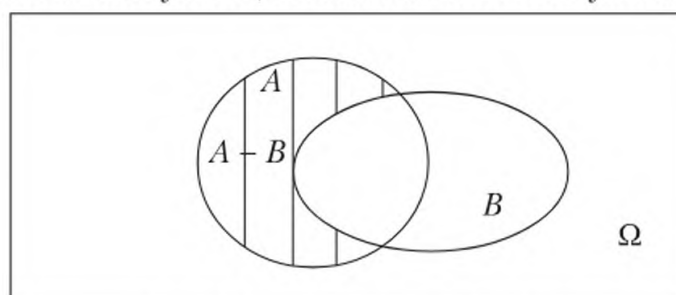


Рис. 9.6. Разность событий

Таблица значимости для разности событий имеет вид

$A$	$B$	$A - B$
1	1	0
1	0	1
0	1	0
0	0	0

Можно рассмотреть разность  $\Omega - A$ . Это будет новое событие, состоящее в том, что событие  $A$  не наступило. Такое событие называют *противоположным к событию  $A$*  и обозначают  $\bar{A}$  (рис. 9.7).



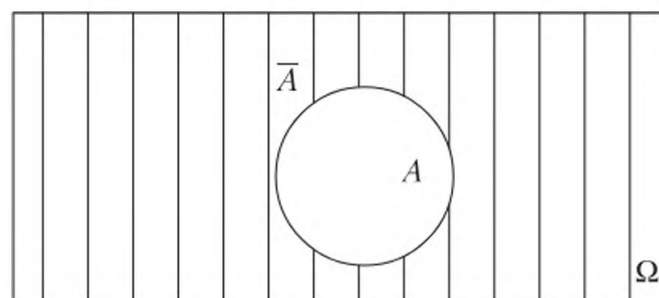


Рис. 9.7. Противоположные события

Таблица значимости для противоположного события имеет вид

$A$	$\bar{A}$
1	0
0	1

Произведением  $AB$  двух событий называют новое событие, состоящее в том, что наступило *каждое* из событий  $A$  или  $B$  (рис. 9.8).

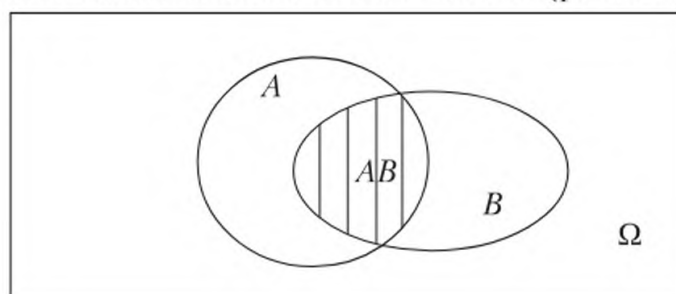


Рис. 9.8. Произведение событий

Таблица значимости для произведения событий имеет вид

$A$	$B$	$AB$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Отметим, что определения суммы и произведения событий обобщаются на любое количество компонент. Так, суммой событий  $A_1, A_2, \dots, A_n$  называют новое событие  $A_1 + A_2 + \dots + A_n$ , состоящее в том, что наступило *хотя бы одно* из событий  $A_1, A_2, \dots, A_n$ . Аналогично произведением событий  $A_1, A_2, \dots, A_n$  называют новое событие  $A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_n$ , состоящее в том, что наступило *каждое* из событий  $A_1, A_2, \dots, A_n$ .

Имеют место следующие равенства:

- 1)  $A + B = B + A$ ;
- 2)  $A + (B + C) = (A + B) + C$ ;
- 3)  $A + \emptyset = A$ ;
- 4)  $A + \Omega = \Omega$ ;
- 5)  $AB = BA$ ;



- 6)  $A \cdot (BC) = (AB) \cdot C$ ;
- 7)  $A \cdot \emptyset = \emptyset$ ;
- 8)  $A \cdot \Omega = A$ ;
- 9)  $A + BC = (A + B) \cdot (A + C)$ ;
- 10)  $A \cdot (B + C) = AB + AC$ ;
- 11)  $A - BC = (A - B) + (A - C)$ ;
- 12)  $A - (B + C) = (A - B) \cdot (A - C)$ ;
- 13)  $A - A = \emptyset$ ;
- 14)  $A + \bar{A} = \Omega$ ;
- 15)  $A \cdot \bar{A} = \emptyset$ ;
- 16)  $\overline{A+B} = \bar{A} \cdot \bar{B}$ ;
- 17)  $\overline{AB} = \bar{A} + \bar{B}$ .

Доказательство равенств можно проводить, используя как диаграммы, так и таблицы значимости.

### Пример 9.1

Докажем равенство  $A - (B + C) = (A - B) \cdot (A - C)$ .

*Решение*

*Способ 1.* Используя диаграммы, отметим штриховкой области наступления событий из левой и правой частей доказываемого равенства (рис. 9.9), при этом будем считать, что исходные события  $A$ ,  $B$  и  $C$  совместны в совокупности (т.е. возможно их одновременное наступление).

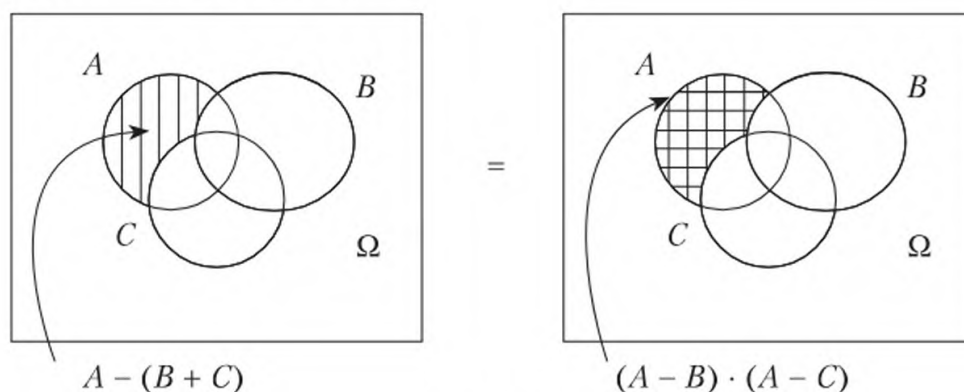


Рис. 9.9. Первый способ решения

Области наступления событий  $A - (B + C)$  и  $(A - B) \cdot (A - C)$  одинаковы, значит, равенство для событий выполняется.

*Способ 2.* Составим таблицы значимости для событий из левой и правой частей доказываемого равенства:

$A$	$B$	$C$	$B + C$	$A - (B + C)$	$A - B$	$A - C$	$(A - B) \cdot (A - C)$
1	1	1	1	0	0	0	0
1	0	1	1	0	1	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
1	1	0	1	0	0	1	0
1	0	0	0	1	1	1	1







### 9.1.2. Классическое определение вероятности

Пусть некоторое испытание имеет  $n$  равновозможных исходов,  $k$  из которых благоприятны для наступления события  $A$ . Тогда *классической вероятностью события  $A$*  называют отношение числа благоприятных для  $A$  исходов к общему числу исходов испытания:

$$P(A) = \frac{k}{n}.$$

Если событие — достоверное, то его вероятность равна 1. Для невозможного события вероятность равна 0. Если же событие  $A$  — случайное, то его вероятность подчиняется условию

$$0 < P(A) < 1.$$

#### Пример 9.3

В коробке находятся три белых и семь черных шаров. Наугад из коробки извлекают три шара. Какова вероятность того, что среди извлеченных шаров будет только один белый?

*Решение*

Рассмотрим событие  $A$ : «Из трех извлеченных из коробки шаров только один белый» и найдем его вероятность, используя формулу классической вероятности. Для этого необходимо знать, сколькими способами может закончиться опыт и в скольких случаях наступит событие  $A$ .

Всего в коробке находится 10 шаров. Опыт состоит в том, что из этих десяти шаров извлекают три. Количество исходов опыта находим по формуле сочетаний:

$$n = C_{10}^3 = \frac{10!}{3! \cdot 7!} = 120.$$

Благоприятные исходы связаны с наступлением события  $A$ , значит, необходимо знать, сколькими способами формируется выборка из одного белого и двух черных шаров. Понятно, что белые шары извлекаются из белых, а черные — из черных, затем полученные значения перемножаются:

$$k = C_3^1 \cdot C_7^2 = \frac{3!}{1! \cdot 2!} \cdot \frac{7!}{2! \cdot 5!} = 3 \cdot 21 = 63.$$

Теперь можно вычислить вероятность события  $A$ :

$$P(A) = \frac{k}{n} = \frac{63}{120} = \frac{21}{40} = 0,525.$$

*Ответ:* 0,525.

### 9.1.3. Геометрическое определение вероятности

Если число исходов испытания несчетно, то применяют формулу геометрической вероятности:

$$P(A) = \frac{\text{мера } g}{\text{мера } G},$$

где через  $G$  обозначена область осуществления испытания, а через  $g$  — область наступления события, вероятность которого вычисляют.



### Пример 9.4

Внутри квадрата со стороной 10 см находится круг радиуса 4 см (рис. 9.11). Случайным образом в квадрат бросается точка. Какова вероятность того, что точка не попадет в круг?

*Решение*

Так как множество точек квадрата несчетно, при решении задачи будет применяться формула геометрической вероятности. Для этого необходимо вычислить меры (площади) области осуществления испытания и области наступления события  $A$ : «Точка, брошенная в квадрат, не попадает в круг».

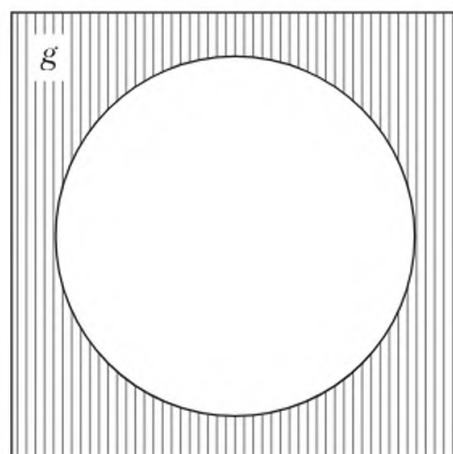


Рис. 9.11. Диаграмма к примеру 9.4

Мерой области осуществления испытания является площадь квадрата:

$$\text{мера } G = 10^2 = 100 \text{ (кв. см).}$$

Область наступления события отмечена штриховкой, ее меру можно найти вычитанием из площади квадрата площади круга:

$$\text{мера } g = 100 - \pi \cdot 4^2 = 100 - 16\pi \text{ (кв. см).}$$

Теперь может быть вычислена вероятность события  $A$ :

$$P(A) = \frac{\text{мера } g}{\text{мера } G} = \frac{100 - 16\pi}{100} = 1 - 0,16\pi \approx 1 - 0,503 = 0,497.$$

*Ответ:* 0,497.

### 9.1.4. Основные формулы вычисления вероятностей

При решении задач, связанных с вычислениями вероятностей событий, весьма полезными будут следующие утверждения и теоремы.

**Предложение 1.** Если события  $A$  и  $B$  несовместны, то вероятность суммы событий  $A + B$  равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A + B) = P(A) + P(B).$$

Это утверждение обобщается на любое количество попарно несовместных событий.

**Предложение 2.**  $P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$ , если  $A_i \cap A_j = \emptyset$  при  $i \neq j$ .



### Пример 9.5

Из коробки, содержащей пять красных, три зеленых и два белых шара, извлекают один. Какова вероятность того, что извлеченный шар не будет белым?

*Решение*

Событие из вопроса задачи «Извлеченный шар не будет белым» может быть заменено эквивалентным событием «Извлеченный шар — красный или зеленый», что представляет собой сумму попарно несовместных событий  $A$ : «Извлеченный шар — красный» и  $B$ : «Извлеченный шар — зеленый», поэтому для ответа на вопрос задачи применим предложение 1:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) = \frac{5}{10} + \frac{3}{10} = \frac{8}{10} = 0,8.$$

Ответ: 0,8.

**Предложение 3.** Поскольку события  $A$  и  $\bar{A}$  попарно несовместны, а в сумме дают достоверное событие, то имеют место и следующие равенства:

$$P(A + \bar{A}) = 1; P(A) + P(\bar{A}) = 1; P(\bar{A}) = 1 - P(A).$$

В рассмотренном примере можно ввести событие  $A$ : «Извлеченный шар — белый», тогда событие из вопроса задачи «Извлеченный шар не будет белым» представляет собой противоположное событие  $\bar{A}$ , вероятность которого можно найти, используя предложение 3:

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{2}{10} = \frac{8}{10} = 0,8.$$

Попарно несовместные события, сумма которых образует все пространство событий, называют *полной группой испытания*.

Если события  $H_1, H_2, \dots, H_n$  образуют полную группу испытания, то для них всегда выполнены условия:

- 1)  $H_i \cap H_j = \emptyset$  при  $i \neq j$ ;
- 2)  $H_1 + H_2 + \dots + H_n = \Omega$ ;
- 3)  $P(H_1) + P(H_2) + \dots + P(H_n) = 1$ .

Полная группа испытания может формироваться по-разному. Пусть опыт состоит в однократном подбрасывании кубика, тогда шесть элементарных событий, связанных с выпадением 1, 2, 3, 4, 5 или 6 очков, образуют полную группу. Для этого же опыта события  $H_1$ : «Выпало четное число очков» и  $H_2$ : «Выпало нечетное число очков» тоже образуют полную группу, уже не являясь элементарными. И в первом, и во втором случае выполнены все условия из определения полной группы испытания: попарная несовместность событий (условие 1), в сумме дающих все пространство событий (условие 2), сумма вероятностей которых равна 1 (условие 3).

Если вероятность события  $A$  вычисляется при условии наступления события  $B$ , то такую вероятность называют *условной* и обозначают  $P(A|B)$  или  $P_B(A)$ .

**Предложение 4.** Вероятность произведения двух событий вычисляют по формуле



$$P(AB) = P(A) \cdot P(B|A) = P(B) \cdot P(A|B).$$

Это правило обобщается на любое количество множителей.

**Предложение 5.**  $P(A_1 A_2 \cdot \dots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n|A_1 \times \dots \times A_{n-1})$ .

### Пример 9.6

Из коробки, содержащей пять красных и три зеленых шара, последовательно без возвращения извлекают два шара. Какова вероятность того, что извлечены разноцветные шары?

*Решение*

Можно рассмотреть событие из вопроса задачи  $A$ : «Извлечены разноцветные шары» как результат действий с более простыми событиями, моделирующими опыт, связанный с формированием выборки без возвращения:  $A = I_K \cdot II_3 + I_3 \cdot II_K$ , где, например,  $I_K$  определяет событие «Первым извлекли красный шар». При решении задачи надо учитывать, что при извлечении второго шара общее количество шаров в коробке уменьшается на один (первый извлеченный шар в коробку не возвращается):

$$P(A) = P(I_K \cdot II_3 + I_3 \cdot II_K) = \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{7} + \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{7} = \frac{30}{56} = \frac{15}{28} = 0,5357.$$

*Ответ:* 0,5357.

Пример 9.6 возможно решить и с применением формулы классической вероятности, однако в приведенном решении показано, какое влияние на решение оказывает условие формирования выборки. Мы должны прийти к выводу, что выборка без возвращения формирует зависимые события, и при решении задачи в таких условиях необходимо использовать условные вероятности.

Если условные и безусловные вероятности событий совпадают, то события определяются как *независимые*:

$$P(A) = P(A|B) \text{ и } P(B) = P(B|A).$$

Можно сказать, что для независимых событий наступление одного события не изменяет вероятности наступления другого.

Предложения 4 и 5 для *независимых* событий примут следующий вид.

Предложение 6.  $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$ .

Предложение 7.  $P(A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n)$ .

В последнем случае события должны быть независимыми в совокупности: наступление какого-либо из них не изменяет вероятности наступления оставшихся событий, а также любых их произведений.

### Пример 9.7

Предприятие оформило кредиты в трех разных банках, оценив вероятность возврата кредита первому банку в 0,8, второму — в 0,9 и третьему — 0,7. Какова вероятность того, что предприятие вернет все взятые кредиты? Какова вероятность того, что предприятие вернет только один из взятых кредитов?

*Решение*

В условии задачи нет указаний на то, что вероятность возврата кредита одному банку как-то связана с вероятностью возврата кредита другому банку, т.е. события



$A_1$ : «Предприятие вернуло кредит первому банку»,  $A_2$ : «Предприятие вернуло кредит второму банку»,  $A_3$ : «Предприятие вернуло кредит третьему банку» являются независимыми. На основе этих событий можно описывать события из вопроса задачи.

Событие  $A$ : «Предприятие вернет все взятые кредиты» равно произведению событий  $A_1, A_2, A_3$ . Поэтому вероятность события  $A$  вычислим с применением предложения 7:

$$P(A) = P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) = 0,8 \cdot 0,9 \cdot 0,7 = 0,504.$$

Событие  $B$ : «Предприятие вернет только один из взятых кредитов» может быть представлено как  $B = A_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \bar{A}_3 + \bar{A}_1 \cdot A_2 \cdot \bar{A}_3 + \bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot A_3$ .

При вычислении вероятности события  $B$  применяем предложения 2, 3 и 7:

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \bar{A}_3 + \bar{A}_1 \cdot A_2 \cdot \bar{A}_3 + \bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot A_3) = \\ &= P(A_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \bar{A}_3) + P(\bar{A}_1 \cdot A_2 \cdot \bar{A}_3) + P(\bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot A_3) = \\ &= 0,8 \cdot (1-0,9) \cdot (1-0,7) + (1-0,8) \cdot 0,9 \cdot (1-0,7) + (1-0,8) \cdot (1-0,9) \cdot 0,7 = \\ &= 0,8 \cdot 0,1 \cdot 0,3 + 0,2 \cdot 0,9 \cdot 0,3 + 0,2 \cdot 0,1 \cdot 0,7 = 0,092. \end{aligned}$$

Ответ: 0,504; 0,092.

Если событие  $A$  может наступить только с одним из событий  $H_1, H_2, \dots, H_n$ , образующих полную группу испытания, то вероятность наступления события  $A$  вычисляют по *формуле полной вероятности*:

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A|H_1) + P(H_2) \cdot P(A|H_2) + \dots + P(H_n) \cdot P(A|H_n).$$

События  $H_1, H_2, \dots, H_n$  называют *априорными* гипотезами.

Если событие  $A$  уже наступило, то становится понятным, вместе с каким из событий  $H_1, H_2, \dots, H_n$  это произошло. В этом случае соответствующая гипотеза, обеспечившая наступление события  $A$ , называется *апостериорной*, и ее вероятность может быть переоценена по *формуле Бейеса*:

$$P(H_i|A) = \frac{P(H_i) \cdot P(A|H_i)}{P(A)}.$$

Здесь в знаменателе стоит полная вероятность события  $A$ .

### Пример 9.8

Три эксперта проверяли пять предприятий и по результатам проверки составили списки, в которых указали предприятия с нарушениями в финансовой отчетности. В списке, составленном первым экспертом, оказалось четыре предприятия из числа проверенных, вторым — пять предприятий и третьим — два предприятия. Для проведения повторной проверки наугад выбирается список и из него наугад выбирается предприятие. Какова вероятность того, что предприятие для повторной проверки было выбрано из списка, составленного третьим экспертом?

*Решение*

Так как список выбирается наугад, необходимо выдвинуть гипотезы:

$H_1$ : «Выбран список, составленный первым экспертом»;

$H_2$ : «Выбран список, составленный вторым экспертом»;

$H_3$ : «Выбран список, составленный третьим экспертом»,

которые равновероятны:  $P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = \frac{1}{3}$ , и после этого рассуждать о вероятности выбора одного предприятия из соответствующего списка. Тогда вероятность



события  $A$ : «Для повторной проверки будет выбрано одно предприятие» вычисляется по формуле полной вероятности:

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A|H_1) + P(H_2) \cdot P(A|H_2) + P(H_3) \cdot P(A|H_3) = \\ = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5 \cdot 2 + 4 \cdot 2 + 4 \cdot 5}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 2} = \frac{38}{120} = \frac{19}{60} = 0,3167.$$

Для ответа на вопрос задачи необходимо переоценить вероятность третьей гипотезы. Для этого используем формулу Байеса:

$$P(H_3|A) = \frac{P(H_3) \cdot P(A|H_3)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{38}{120}} = \frac{120}{6 \cdot 38} = \frac{120}{228} = \frac{10}{19} = 0,5263.$$

Ответ: 0,5263.

### Пример 9.9

В трех списках, представленных экспертами, содержится перечень проверенных предприятий, все предприятия во всех списках различны. В списке из 10 предприятий, проверенных первым экспертом, два имеют нарушения в финансовой отчетности, во втором списке из 8 предприятий нарушения отчетности отмечены у трех предприятий, а из 12 предприятий, проверенных третьим экспертом, нарушения выявлены у пяти предприятий. Из каждого списка наугад выбирают одно предприятие и затем из них выбирают одно для повторной проверки. Какова вероятность того, что в результате будет выбрано предприятие, не имеющее нарушений в финансовой отчетности?

*Решение:*

Так как неизвестно, какая тройка предприятий по одному из каждого списка будет выбрана, необходимо выдвижение следующих гипотез:

$H_1$ : «Все три выбранных из соответствующих списков предприятия имеют нарушения в финансовой отчетности»;

$H_2$ : «Все три выбранных из соответствующих списков предприятия не имеют нарушений в финансовой отчетности»;

$H_3$ : «Только одно из трех выбранных из соответствующих списков предприятий имеет нарушения в финансовой отчетности»;

$H_4$ : «Только одно из трех выбранных из соответствующих списков предприятий не имеет нарушений в финансовой отчетности».

Вероятности гипотез вычисляем с применением формулы классической вероятности, а также предложений 2, 3 и 7:

$$P(H_1) = \frac{2}{10} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{12} = \frac{30}{960} = \frac{1}{32}; \quad P(H_2) = \frac{8}{10} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{7}{12} = \frac{280}{960} = \frac{7}{24}; \\ P(H_3) = \frac{2}{10} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{7}{12} + \frac{8}{10} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{7}{12} + \frac{8}{10} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{5}{12} = \frac{438}{960} = \frac{73}{160}; \\ P(H_4) = \frac{8}{10} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{12} + \frac{2}{10} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{5}{12} + \frac{2}{10} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{7}{12} = \frac{212}{960} = \frac{53}{240}.$$

Вероятность события  $A$ : «Предприятие, выбранное одно из трех, не будет иметь нарушений в финансовой отчетности» вычисляем по формуле полной вероятности в присутствии четырех гипотез:

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A|H_1) + P(H_2) \cdot P(A|H_2) + P(H_3) \cdot P(A|H_3) + P(H_4) \cdot P(A|H_4) = \\ = \frac{1}{32} \cdot 0 + \frac{7}{24} \cdot \frac{3}{3} + \frac{73}{160} \cdot \frac{2}{3} + \frac{53}{240} \cdot \frac{1}{3} = \frac{0 + 840 + 876 + 212}{2880} = \frac{1928}{2880} = \frac{241}{360} = 0,6694.$$

Ответ: 0,6694.



### 9.1.5. Повторные независимые испытания

Говорят, что серия из  $n$  испытаний проходит по *схеме Бернулли*, если выполнены условия:

- эти испытания независимы;
- каждое из них имеет только два исхода ( $A$  наступило или  $A$  не наступило);
- вероятность наступления события  $A$  в каждом испытании одна и та же и равна  $p = p(A)$ .

Наступление события  $A$  принято называть успехом. Неудача связана с тем, что событие  $A$  не наступило,  $P(\bar{A}) = 1 - p = q$ .

Если испытания проходят по схеме Бернулли, то вероятность  $k$  успехов при  $n$  испытаниях вычисляют по формуле Бернулли

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}.$$

Здесь  $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ ,  $p = p(A)$ ,  $q = 1 - p$ .

#### Пример 9.10

Испытываются пять независимо работающих одинаковых приборов. Вероятность отказа в работе для каждого прибора равна 0,2. Найдем вероятность того, что в результате проводящихся испытаний откажет только один прибор.

*Решение*

Испытания проходят по схеме Бернулли: они независимы и вероятность отказа остается неизменной от опыта к опыту, поэтому ответ на вопрос задачи найдем по формуле Бернулли при  $n = 5$ ,  $k = 1$ ,  $p = 0,2$  и  $q = 1 - 0,2 = 0,8$ :

$$P_5(1) = C_5^1 \cdot 0,2^1 \cdot 0,8^{5-1} = 5 \cdot 0,2 \cdot 0,4096 = 0,4096.$$

*Ответ:* 0,4096.

Понятно, что для различных значений  $k$  соответствующие вероятности  $P_n(k)$ , вообще говоря, различны. Однако наиболее вероятное количество успехов  $k_0$  всегда подчиняется неравенству

$$np + p - 1 \leq k_0 \leq np + p.$$

#### Пример 9.11

Вероятность наступления события  $A$  в каждом из девяти независимых испытаний равна 0,5. Найдем наиболее вероятное число наступлений события  $A$ .

*Решение*

Можно, используя формулу Бернулли, вычислить вероятности  $P_n(k)$  для  $n = 9$  и значений  $k$  от 0 до 9, затем выбрать то  $k_0$ , которому соответствует наибольшая вероятность. Но удобнее сразу использовать оценочное неравенство:

$$9 \cdot 0,5 + 0,5 - 1 \leq k_0 \leq 9 \cdot 0,5 + 0,5 \Rightarrow 4 \leq k_0 \leq 5.$$

Таким образом, наибольшая вероятность отвечает двум значениям  $k_0 = 4$  и  $k_0 = 5$ , для всех других значений  $k$  соответствующая вероятность  $P_9(k)$  будет меньше.

*Ответ:*  $k_0 = 4$ ,  $k_0 = 5$ .



Если верхняя граница  $np + p$  оценочного неравенства получается дробным числом, тогда наиболее вероятное число успехов  $k_0$  определяется единственным образом.

При больших значениях  $n$  вычисления по формуле Бернулли весьма затруднительны, поэтому для решения задач используют приближенные формулы. Различают локальную формулу Муавра — Лапласа, интегральную формулу Лапласа и приближенную формулу Пуассона. Последнюю применяют в тех случаях, когда  $n \rightarrow \infty$ ,  $p \rightarrow 0$ , т.е. тогда, когда успех представляет собой *очень редкое* событие. Аналитически это условие можно связать с произведением  $npq$ , которое должно быть значительно меньше 10 (точнее, произведение  $np^2$  должно быть значительно меньше 1).

*Локальная приближенная формула Муавра — Лапласа* имеет вид

$$P_n(k) \approx \frac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}},$$

где  $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$  — функция Гаусса, значения которой табулированы

(приложение 1) для различных значений аргумента  $x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}$ .

Из полезных для решения задач отметим следующие свойства функции  $\varphi(x)$ :

- 1)  $\varphi(-x) = \varphi(x)$ , т.е. функция Гаусса является четной;
- 2)  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \varphi(x) = 0$ .

*Интегральная приближенная формула Лапласа* имеет вид

$$P_n(k_1 \leq k \leq k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1),$$

где  $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$  — функция Лапласа, значения которой табулированы

(приложение 2);  $x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$ ;  $x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$ .

Из полезных для решения задач отметим следующие свойства функции  $\Phi(x)$ :

- 1)  $\Phi(-x) = -\Phi(x)$ , т.е. функция Лапласа является нечетной;
- 2)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \Phi(x) = 0,5$ ;  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \Phi(x) = -0,5$ .

*Приближенная формула Пуассона* имеет вид

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda},$$

где  $\lambda = np$ , и определяет среднее число успехов в серии из  $n$  испытаний, проходящих по схеме Бернулли. Для вероятностей  $P_n(k)$  при разных значениях  $\lambda$  и  $k$  также составлены таблицы (приложение 3).

### Пример 9.12

Известно, что среди выпускаемых изделий изделия первого сорта составляют 20%, остальные — высшего сорта. Какова вероятность того, что из 400 проверенных изделий 60 будут изделиями первого сорта?



*Решение*

Вероятность события  $A$ : «Проверяемое изделие окажется изделием первого сорта» ( $P(A) = \frac{20}{100} = 0,2$ ) остается постоянной в серии из 400 независимых испытаний. Поэтому имеет место схема испытаний Бернулли. Однако  $n = 400$  достаточно велико и использование формулы Бернулли для вычисления  $P_{400}(60)$  затруднительно, поэтому необходимо применить одну из приближенных формул. Для выбора нужной формулы оценим произведение  $npq$ :

$$npq = 400 \cdot 0,2 \cdot (1 - 0,2) = 400 \cdot 0,2 \cdot 0,8 = 64 > 10.$$

Из полученной оценки понятно, что для решения задачи должна быть применена локальная приближенная формула Муавра — Лапласа  $P_n(k) \approx \frac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}}$  при  $n = 400$  и  $k = 60$ . Вычислим аргумент для функции Гаусса:

$$x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = \frac{60 - 400 \cdot 0,2}{\sqrt{400 \cdot 0,2 \cdot 0,8}} = \frac{60 - 80}{\sqrt{64}} = -\frac{20}{8} = -2,5.$$

Теперь найдем ответ на вопрос задачи:

$$P_{400}(60) \approx \frac{\varphi(-2,5)}{\sqrt{64}} = \frac{\varphi(2,5)}{8} = \frac{0,0175}{8} = 0,00219.$$

При вычислениях использованы свойство четности функции Гаусса и ее табличное значение для аргумента  $x = 2,5$ .

Ответ:  $P_{400}(60) \approx 0,00219$ .

В приведенном примере вероятность успеха равна 0,2, а это не так уж и мало, и события с такой вероятностью не так уж и редки. Поэтому сразу можно было сделать вывод о том, что приближенная формула Пуассона в данном случае не применяется, подтверждение этому было получено на основе оценки произведения  $npq$ .

### Пример 9.13

Вероятность выхода из строя для приборов определенного типа составляет 0,001. Найдем вероятность того, что из 2000 проверяемых приборов выйдут из строя только два прибора.

*Решение*

Вероятность события  $A$ : «Проверяемый прибор выйдет из строя» ( $P(A) = 0,001$ ) остается постоянной в серии из 2000 независимых испытаний. Поэтому имеет место схема испытаний Бернулли. Но  $n = 2000$  очень велико, и формула Бернулли в данном случае не применяется, необходимо применить одну из приближенных формул. Для выбора нужной формулы оценим произведение  $npq$  ( $np^2$ ):

$$npq = 2000 \cdot 0,001 \cdot (1 - 0,001) = 1,998 \ll 10 \quad (np^2 = 2000 \cdot 0,001^2 = 0,002 \ll 1).$$

Из полученной оценки понятно, что для решения задачи должна быть применена приближенная формула Пуассона  $P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}$  при  $n = 2000$ ,  $k = 2$  и  $\lambda = np = 2000 \cdot 0,001 = 2$ :

$$P_{2000}(2) \approx \frac{2^2}{2!} \cdot e^{-2} = 0,2707.$$

Мы использовали таблицу значений для  $P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}$  при  $k = 2$  и  $\lambda = np = 2$ .

Ответ:  $P_{2000}(2) \approx 0,2707$ .



В этом примере вероятность успеха равна 0,001, а это действительно малая вероятность, и события с такой вероятностью являются редкими. Поэтому сразу можно было сделать вывод о том, что при решении будет применена приближенная формула Пуассона, что и подтвердилось соответствующей оценкой произведения  $npq$ .

#### Пример 9.14

Известно, что среди выпускаемых изделий изделия первого сорта составляют 20%, остальные — высшего сорта. Какова вероятность того, что из 400 проверенных изделий не менее 50, но и не более 90 окажутся изделиями первого сорта?

*Решение*

Вероятность события  $A$ : «Проверяемое изделие окажется изделием первого сорта» ( $P(A) = \frac{20}{100} = 0,2$ ) остается постоянной в серии из 400 независимых испытаний. Поэтому имеет место схема испытаний Бернулли. Однако при  $n = 400$  формула Бернулли не используется. В примере 9.12 мы уже оценили произведение  $npq = 400 \cdot 0,2 \cdot (1 - 0,2) = 64 > 10$  и пришли к выводу, что для решения задачи должна быть применена приближенная формула Лапласа. В случае рассматриваемого примера — это интегральная формула Лапласа  $P_n(k_1 \leq k \leq k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$ , так как число успехов должно быть заключено в интервале от 50 до 90:

$$P_{400}(50 \leq k \leq 90) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1).$$

Вычислим соответствующие значения аргументов для функции Лапласа:

$$x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{90 - 400 \cdot 0,2}{\sqrt{64}} = 1,25; \quad x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{50 - 400 \cdot 0,2}{\sqrt{64}} = -3,75.$$

Теперь найдем ответ на вопрос задачи:

$$\begin{aligned} P_{400}(50 \leq k \leq 90) &\approx \Phi(1,25) - \Phi(-3,75) = \Phi(1,25) + \Phi(3,75) = \\ &= 0,39435 + 0,49991 = 0,89426. \end{aligned}$$

При вычислениях были использованы свойство нечетности функции Лапласа и ее табличные значения для аргументов 1,25 и 3,75.

*Ответ:*  $P_{400}(40 \leq k \leq 90) \approx 0,89426$ .

#### Пример 9.15

Вероятность выхода из строя для приборов определенного типа составляет 0,001. Найдем вероятность того, что из 2000 проверяемых приборов выйдут из строя более двух приборов.

*Решение:*

В примере 9.13 мы уже обосновали необходимость применения приближенной формулы Пуассона, опираясь на оценку произведения  $npq$  ( $np^2$ ). Поэтому просто найдем ответ на вопрос задачи:

$$\begin{aligned} P_{2000}(2 < k \leq 2000) &\approx 1 - (P_{2000}(0) + P_{2000}(1) + P_{2000}(2)) = \\ &= 1 - (0,1353 + 0,2707 + 0,2707) = 0,3233. \end{aligned}$$

При этом мы использовали табличные значения для  $P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}$  при  $\lambda = np = 2000 \cdot 0,001 = 2$  и  $k = 0, k = 1, k = 2$ .

*Ответ:*  $P_{2000}(20 \leq k \leq 2000) \approx 0,3233$ .



## 9.2. Случайные величины

### 9.2.1. Закон распределения дискретной случайной величины

*Случайной* называют величину, принимающую числовое значение, но заранее неизвестно — какое. Прибыль фирмы в наугад выбранном году, курс доллара в наугад выбранный день или время бесперебойной работы какого-либо прибора — это лишь немногие примеры из огромного количества случайных величин. Каждая из них принимает определенное числовое значение, но узнать заранее это значение не представляется возможным. Для изучения случайной величины в первую очередь важно знать, какие значения она может принимать. В зависимости от возможных значений, принимаемых величиной, различают дискретные и непрерывные случайные величины.

Если множество возможных значений величины конечно или счетно, то величина определяется как дискретная. Если же множество возможных значений величины представляет собой часть или все множество действительных чисел, то такая величина определяется как непрерывная.

Мы рассмотрим сначала дискретные случайные величины (ДСВ).

Существуют стандарты обозначений случайных величин, как  $X, Y, Z, \dots$ . Соответствующие возможные значения величины обозначают малыми буквами с индексами:  $x_1, x_2, \dots$  — значения для величины  $X$ ,  $y_1, y_2, \dots$  — значения для величины  $Y$ ,  $z_1, z_2, \dots$  — значения для величины  $Z$ . Чтобы полностью охарактеризовать дискретную случайную величину, необходимо не только указать все ее возможные значения, но и определить вероятности, с которыми величина эти значения может принять. Такая информация для ДСВ записывается в виде таблицы:

Значение величины $X$	$x_1$	$x_2$	...	$x_n$
Вероятность $p_i$	$p_1$	$p_2$	...	$p_n$

Здесь  $p_1 = P(X = x_1)$ ,  $p_2 = P(X = x_2)$ , ...,  $p_n = P(X = x_n)$ .

Вероятность того, что величина принимает определенное числовое значение, является событием. Поэтому если в первой строке таблицы мы предлагаем все возможные значения величины, то сумма всех вероятностей во второй строке таблицы должна быть равна 1. Это условие является определяющим для формирования закона распределения дискретной случайной величины.

*Законом распределения ДСВ* называют соответствие между возможными значениями величины и вероятностями, отвечающими этим значениям при условии равенства единице суммы этих вероятностей:  $\sum_{i=1}^n p_i = 1$ .

#### Пример 9.16

В коробке находятся пять белых и два черных шара. Случайным образом из коробки извлекают два шара. Составим закон распределения для величины  $X$  — числа белых шаров в выборке.

*Решение*

Предлагаемый состав шаров в коробке допускает, чтобы среди выбранных двух шаров оба были черными (0 белых), или оба — белыми, или же выборка состояла



из 1 белого и 1 черного шаров. Поэтому в качестве возможных значений величины  $X$  мы предлагаем 0, 1 и 2.

Соответствующие этим значениям вероятности будем вычислять как вероятности событий, связанных с принятием величиной определенного числового значения.

Вероятность события «Из двух выбранных из коробки шаров оба черные» равна

$$p_1 = P(X=0) = \frac{C_5^0 \cdot C_2^2}{C_7^2} = \frac{1}{21}.$$

Вероятность события «Из двух выбранных из коробки шаров один белый, один черный» равна

$$p_2 = P(X=1) = \frac{C_5^1 \cdot C_2^1}{C_7^2} = \frac{10}{21}.$$

Вероятность события «Из двух выбранных из коробки шаров оба белые» равна

$$p_3 = P(X=2) = \frac{C_5^2 \cdot C_2^0}{C_7^2} = \frac{10}{21}.$$

Условие  $\sum_{i=1}^n p_i = \frac{1}{21} + \frac{10}{21} + \frac{10}{21} = 1$  выполнено. Поэтому закон распределения имеет вид

Значение $X$	0	1	2
Вероятность $p_i$	$\frac{1}{21}$	$\frac{10}{21}$	$\frac{10}{21}$

Эту таблицу и можно считать ответом на вопрос задачи.

### Пример 9.17

Банк выдал три кредита предприятию, оценив вероятность возврата каждого кредита в 0,9. Составим закон распределения величины  $X$  — числа возвращенных банку кредитов.

*Решение*

В качестве возможных значений величины  $X$  мы предлагаем 0, 1, 2 и 3.

Соответствующие этим значениям вероятности будем вычислять как вероятности событий, связанных с принятием величиной определенного числового значения, по формуле Бернулли.

Вероятность события «Из трех выданных кредитов возвратятся 0» равна

$$p_1 = P(X=0) = P_3(0) = C_3^0 \cdot 0,9^0 \cdot 0,1^3 = 0,001.$$

Вероятность события «Из трех выданных кредитов возвратятся 1» равна

$$p_2 = P(X=1) = P_3(1) = C_3^1 \cdot 0,9^1 \cdot 0,1^2 = 0,027.$$

Вероятность события «Из трех выданных кредитов возвратятся 2» равна

$$p_3 = P(X=2) = P_3(2) = C_3^2 \cdot 0,9^2 \cdot 0,1^1 = 0,243.$$

Вероятность события «Из трех выданных кредитов возвратятся все 3» равна

$$p_4 = P(X=3) = P_3(3) = C_3^3 \cdot 0,9^3 \cdot 0,1^0 = 0,729.$$



Условие  $\sum_{i=1}^n p_i = 0,001 + 0,027 + 0,243 + 0,729 = 1$  выполнено. Поэтому закон рас-

пределения имеет вид

Значение $X$	0	1	2	3
Вероятность $p_i$	0,001	0,027	0,243	0,729

Эта таблица и определяет искомый закон распределения.

### 9.2.2. Арифметические операции над дискретными случайными величинами

Со случайными величинами можно выполнять целый ряд арифметических действий (операций), при этом должна формироваться новая случайная величина. Если речь идет о дискретных случайных величинах, то результат выполнения операции должен иметь свой закон распределения. При этом возможны как действия, при которых меняются только значения величины, а вероятности остаются неизменными, так и действия, в результате которых изменятся и значения, и вероятности. Рассмотрим подробнее возможности выполнения действий с дискретными случайными величинами.

Если  $X$  — случайная величина, то случайной величиной является и  $Y = g(X)$ , при условии что  $g(x)$  — непрерывная числовая функция. Под действием функции  $g(x)$  изменяются только значения величины  $X$ . Поэтому при известном законе распределения дискретной случайной величины  $X$

Значение величины $X$	$x_1$	$x_2$	...	$x_n$
Вероятность $p_i$	$p_1$	$p_2$	...	$p_n$

с условием  $\sum_{i=1}^n p_i = 1$  закон распределения дискретной случайной величины

$Y = g(X)$  легко определяется по правилу

Значение величины $Y = g(X)$	$g(x_1)$	$g(x_2)$	...	$g(x_n)$
Вероятность $p_i$	$p_1$	$p_2$	...	$p_n$

#### Пример 9.18

Известен закон распределения величины  $X$ :

Значение величины $X$	-2	-1	0	1	2
Вероятность $p_i$	0,1	0,1	0,2	0,3	0,3

Составим законы распределений для величин:

а)  $Y = X + 5$ ; б)  $Y = 3X$ ; в)  $Y = X^2$ .

*Решение*

а) Величина  $Y = X + 5$  определяется на основе функции  $g(x) = x + 5$ , под действием которой изменятся значения величины  $X$ . Найдем все возможные значения для величины  $Y = X + 5$ :



$$y_1 = x_1 + 5 = -2 + 5 = 3; \quad y_2 = x_2 + 5 = -1 + 5 = 4; \quad y_3 = x_3 + 5 = 0 + 5 = 5;$$

$$y_4 = x_4 + 5 = 1 + 5 = 6; \quad y_5 = x_5 + 5 = 2 + 5 = 7.$$

Поскольку вероятности при этом не меняются, закон распределения для новой величины  $Y = X + 5$  будет иметь вид

Значение величины $Y = X + 5$	3	4	5	6	7
Вероятность $p_i$	0,1	0,1	0,2	0,3	0,3

б) Величина  $Y = 3X$  определяется на основе функции  $g(x) = 3x$ , под действием которой изменятся значения величины  $X$ . Найдем все возможные значения для величины  $Y = 3X$ :

$$y_1 = 3x_1 = -6; \quad y_2 = 3x_2 = -3; \quad y_3 = 3x_3 = 0;$$

$$y_4 = 3x_4 = 3; \quad y_5 = 3x_5 = 6.$$

Соответствующий закон распределения примет вид

Значение величины $Y = 3X$	-6	-3	0	3	6
Вероятность $p_i$	0,1	0,1	0,2	0,3	0,3

в) Величина  $Y = X^2$  определяется на основе функции  $g(x) = x^2$ , под действием которой изменятся значения величины  $X$ . Найдем все возможные значения для величины  $Y = X^2$ :

$$y_1 = (x_1)^2 = (-2)^2 = 4; \quad y_2 = (x_2)^2 = (-1)^2 = 1; \quad y_3 = (x_3)^2 = 0^2 = 0;$$

$$y_4 = (x_4)^2 = 1^2 = 1; \quad y_5 = (x_5)^2 = 2^2 = 4.$$

Мы видим, что среди вычисленных значений есть одинаковые. В таблицу, определяющую закон распределения, заносят только различные значения. Поэтому среди возможных значений  $Y = X^2$  отметим только 0, 1 и 4. Вычислим теперь соответствующие этим значениям вероятности:

$$P(Y = 4) = P(X^2 = 4) = P(X = -2) + P(X = 2) = 0,1 + 0,3 = 0,4;$$

$$P(Y = 1) = P(X^2 = 1) = P(X = -1) + P(X = 1) = 0,1 + 0,3 = 0,4;$$

$$P(Y = 0) = P(X^2 = 0) = P(X = 0) = 0,2.$$

Закон распределения для  $Y = X^2$  в итоге принимает вид

Значение величины $Y = X^2$	0	1	4
Вероятность $p_i$	0,2	0,4	0,4

Выполнение операций сложения, умножения, вычитания и деления с дискретными случайными величинами позволяет получить новые дискретные случайные величины, называемые суммой, произведением, разностью и частным исходных ДСВ. Для формирования законов распределения этих новых ДСВ необходимо определять и новые значения, и соответствующие этим новым значениям вероятности. Проще всего задачи решаются в случае, когда исходные ДСВ являются независимыми.

Дискретные случайные величины  $X$  и  $Y$  являются *независимыми* в том случае, когда принятие величиной  $X$  какого-либо значения никак не влияет ни на возможные значения величины  $Y$ , ни на отвечающие им вероятности.



Именно для независимых величин  $X$  и  $Y$  выполняется равенство

$$P(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_i) \cdot P(Y = y_j) \quad (9.1)$$

для всех возможных значений  $i, j$ .

*Суммой независимых величин  $X$  и  $Y$*  называется новая величина  $Z = X + Y$ , значения которой определяются возможными значениями  $x_i + y_j$  и вероятностями, определяемыми условием (9.1) для всех возможных значений  $i, j$ .

*Разностью независимых величин  $X$  и  $Y$*  называется величина  $Z = X - Y$ , значения которой определяются возможными значениями  $x_i - y_j$  и вероятностями, определяемыми условием (9.1) для всех возможных значений  $i, j$ .

*Произведением независимых величин  $X$  и  $Y$*  называется величина  $Z = X \cdot Y$ , значения которой определяются возможными значениями  $x_i \cdot y_j$  и вероятностями, определяемыми условием (9.1) для всех возможных значений  $i, j$ .

Частное от деления независимых величин  $X$  и  $Y$  определяется аналогично, но при дополнительном условии, что среди возможных значений  $Y$  нет равных нулю:  $y_j \neq 0$  для всех возможных значений  $j$ .

### Пример 9.19

Даны законы распределений независимых величин  $X$  и  $Y$ :

Значение величины $X (x_i)$	-1	0	1	2
Вероятность $p_i$	0,2	0,2	0,3	0,3

Значение величины $Y (y_i)$	-1	0	1
Вероятность $p_i$	0,2	0,3	0,5

1. Составим законы распределения для их суммы, разности и произведения.
2. Какое из событий наиболее вероятно:  $A: \{X + Y = 2\}$ ,  $B: \{X - Y = 2\}$  или  $C: \{X \cdot Y = 2\}$ ?

*Решение*

1а) Составим закон распределения  $Z = X + Y$ .

Для этого найдем все возможные суммы  $x_i + y_j$  и соответствующие им вероятности по правилу  $P(X + Y = x_i + y_j) = P(X = x_i) \cdot P(Y = y_j)$ , следующему из условия независимости величин  $X$  и  $Y$ :

$x_i$	$y_j$	$x_i + y_j$	$P(X + Y = x_i + y_j)$
-1	-1	-2	$0,2 \cdot 0,2 = 0,04$
-1	0	-1	$0,2 \cdot 0,3 = 0,06$
-1	1	0	$0,2 \cdot 0,5 = 0,1$
0	-1	-1	$0,2 \cdot 0,2 = 0,04$
0	0	0	$0,2 \cdot 0,3 = 0,06$
0	1	1	$0,2 \cdot 0,5 = 0,1$
1	-1	0	$0,3 \cdot 0,2 = 0,06$
1	0	1	$0,3 \cdot 0,3 = 0,09$
1	1	2	$0,3 \cdot 0,5 = 0,15$
2	-1	1	$0,3 \cdot 0,2 = 0,06$
2	0	2	$0,3 \cdot 0,3 = 0,09$
2	1	3	$0,3 \cdot 0,5 = 0,15$



В выделенном столбце находятся суммы  $x_i + y_j$  для всех возможных значений индексов  $i, j$ . Мы видим, что среди значений есть одинаковые. В таблицу для закона распределения  $Z = X + Y$  заносим только различные значения, т.е.  $-2, -1, 0, 1, 2$  и  $3$ . При вычислении вероятностей для этих значений используем правило: для одинаковых значений суммы  $x_i + y_j$  вероятности складываются. Например:

$$P(X + Y = -1) = P(X = -1) \cdot P(Y = 0) + P(X = 0) \cdot P(Y = -1) = 0,06 + 0,04 = 0,1.$$

В итоге закон распределения величины  $Z = X + Y$  имеет вид

Значение величины $Z = X + Y$	-2	-1	0	1	2	3
Вероятности	0,04	0,1	0,22	0,25	0,24	0,15

Условие на закон распределения выполнено: сумма всех вероятностей во второй строке равна 1.

16) Составим закон распределения  $Z = X - Y$ .

Для этого найдем все возможные разности  $x_i - y_j$  и соответствующие им вероятности по правилу  $P(X - Y = x_i - y_j) = P(X = x_i) \cdot P(Y = y_j)$ , следующему из условия независимости величин  $X$  и  $Y$ :

$x_i$	$y_j$	$x_i - y_j$	$P(X - Y = x_i - y_j)$
-1	-1	0	$0,2 \cdot 0,2 = 0,04$
-1	0	-1	$0,2 \cdot 0,3 = 0,06$
-1	1	-2	$0,2 \cdot 0,5 = 0,1$
0	-1	1	$0,2 \cdot 0,2 = 0,04$
0	0	0	$0,2 \cdot 0,3 = 0,06$
0	1	-1	$0,2 \cdot 0,5 = 0,1$
1	-1	2	$0,3 \cdot 0,2 = 0,06$
1	0	1	$0,3 \cdot 0,3 = 0,09$
1	1	0	$0,3 \cdot 0,5 = 0,15$
2	-1	3	$0,3 \cdot 0,2 = 0,06$
2	0	2	$0,3 \cdot 0,3 = 0,09$
2	1	1	$0,3 \cdot 0,5 = 0,15$

В выделенном столбце теперь находятся разности  $x_i - y_j$  для всех возможных значений индексов  $i, j$ . Мы видим, что среди значений есть одинаковые. В таблицу для закона распределения  $Z = X - Y$ , как и прежде, заносим только различные значения, т.е.  $-2, -1, 0, 1, 2$  и  $3$ . При вычислении вероятностей для этих значений используем правило: для одинаковых значений разности  $x_i - y_j$  вероятности складываются. Например:

$$P(X - Y = -1) = P(X = -1) \cdot P(Y = 0) + P(X = 0) \cdot P(Y = 1) = 0,06 + 0,1 = 0,16.$$

В итоге закон распределения величины  $Z = X - Y$  имеет вид

Значение величины $Z = X - Y$	-2	-1	0	1	2	3
Вероятности	0,1	0,16	0,25	0,28	0,15	0,06

Условие на закон распределения и в этом случае выполнено: сумма всех вероятностей во второй строке равна 1.



1в) Составим закон распределения  $Z = X \cdot Y$ .

Для этого найдем все возможные произведения  $x_i \cdot y_j$  и соответствующие им вероятности по правилу  $P(X \cdot Y = x_i \cdot y_j) = P(X = x_i) \cdot P(Y = y_j)$ , следующему из условия независимости величин  $X$  и  $Y$ :

$x_i$	$y_j$	$x_i \cdot y_j$	$P(X \cdot Y = x_i \cdot y_j)$
-1	-1	1	$0,2 \cdot 0,2 = 0,04$
-1	0	0	$0,2 \cdot 0,3 = 0,06$
-1	1	-1	$0,2 \cdot 0,5 = 0,1$
0	-1	0	$0,2 \cdot 0,2 = 0,04$
0	0	0	$0,2 \cdot 0,3 = 0,06$
0	1	0	$0,2 \cdot 0,5 = 0,1$
1	-1	-1	$0,3 \cdot 0,2 = 0,06$
1	0	0	$0,3 \cdot 0,3 = 0,09$
1	1	1	$0,3 \cdot 0,5 = 0,15$
2	-1	-2	$0,3 \cdot 0,2 = 0,06$
2	0	0	$0,3 \cdot 0,3 = 0,09$
2	1	2	$0,3 \cdot 0,5 = 0,15$

В выделенном столбце теперь находятся произведения  $x_i \cdot y_j$  для всех возможных значений индексов  $i, j$ . Мы видим, что и среди этих значений есть одинаковые. В таблицу для закона распределения  $Z = X \cdot Y$  по-прежнему заносим только различные значения, т.е. -2, -1, 0, 1 и 2. При вычислении вероятностей для этих значений используем правило: для одинаковых значений произведений  $x_i \cdot y_j$  вероятности складываются. Например:

$$P(X \cdot Y = -1) = P(X = -1) \cdot P(Y = 1) + P(X = 1) \cdot P(Y = -1) = 0,1 + 0,06 = 0,16.$$

В итоге закон распределения величины  $Z = X \cdot Y$  имеет вид

Значение величины $Z = X \cdot Y$	-2	-1	0	1	2
Вероятности	0,06	0,16	0,44	0,19	0,15

Условие на закон распределения и в этом случае выполнено: сумма всех вероятностей во второй строке равна 1.

2. Из законов распределения  $X + Y$ ,  $X - Y$  и  $X \cdot Y$  определяем:

$$P(X + Y = 2) = 0,24; P(X - Y = 2) = 0,15; P(X \cdot Y = 2) = 0,15.$$

Поэтому наиболее вероятно событие  $A: \{X + Y\} = 2$ .

### 9.2.3. Числовые характеристики дискретных случайных величин

Для решения многих практических задач совсем не обязательно знать все возможные значения величины и соответствующие этим значениям вероятности, а вполне достаточно ориентироваться лишь на отдельные числовые параметры, выражающие наиболее важные свойства случайной величины. Эти параметры принято называть *числовыми характеристиками*



случайной величины. Мы перечислим основные характеристики дискретных случайных величин и сформулируем их основные свойства.

*Математическим ожиданием дискретной случайной величины с известным законом распределения*

Значение величины $X$	$x_1$	$x_2$	...	$x_n$
Вероятность $p_i$	$p_1$	$p_2$	...	$p_n$

при условии  $\sum_{i=1}^n p_i = 1$  называют сумму произведений значений величины на соответствующую вероятность:

$$E(X) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot p_i = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \dots + x_n \cdot p_n.$$

### Пример 9.20

Найдем математическое ожидание величины, закон распределения которой имеет вид

Значение величины $X$	-1	0	1	2
Вероятность $p_i$	0,2	0,2	0,3	0,3

*Решение*

$$E(X) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot p_i = -1 \cdot 0,2 + 0 \cdot 0,2 + 1 \cdot 0,3 + 2 \cdot 0,3 = 0,7.$$

*Ответ:*  $E(X) = 0,7$ .

Если множество возможных значений величины счетно, то закон распределения такой величины имеет вид

Значение величины $X$	$x_1$	$x_2$	...	$x_n$	...
Вероятность $p_i$	$p_1$	$p_2$	...	$p_n$	...

при условии  $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$ .

Существование математического ожидания  $E(X)$  в таком случае определяется абсолютной сходимостью числового ряда:

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_i \cdot p_i = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \dots + x_n \cdot p_n + \dots$$

Поэтому величины со счетным множеством значений могут и не иметь математического ожидания.

### Пример 9.21

Найдем математическое ожидание величины, закон распределения которой имеет вид

Значение величины $X$	3	$3^2$	$3^3$	...
Вероятность $p_i$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3^2}$	$\frac{2}{3^3}$	...



Решение

Вычислим  $\sum_{i=1}^{\infty} x_i \cdot p_i = 3 \cdot \frac{2}{3} + 3^2 \cdot \frac{2}{3^2} + 3^3 \cdot \frac{2}{3^3} + \dots = 2 + 2 + 2 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} 2 = \infty$  — ряд рас-

ходится, следовательно, математическое ожидание не существует.

Ответ:  $E(X)$  не существует.

Перечислим свойства математического ожидания, которые применяются при решении задач.

1. Математическое ожидание постоянной величины равно самой этой постоянной:

$$E(C) = C, C - \text{const.}$$

2. Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания:

$$E(kX) = k \cdot E(X).$$

3. Математическое ожидание от суммы или разности величин равно сумме или разности их математических ожиданий:

$$E(X \pm Y) = E(X) \pm E(Y).$$

4. Математическое ожидание произведения независимых величин равно произведению математических ожиданий этих величин:

$$E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y).$$

5. Если  $\varphi(x)$  — числовая функция, а  $X$  — дискретная случайная величина с известным законом распределения, то

$$E(\varphi(X)) = \varphi(x_1) \cdot p_1 + \varphi(x_2) \cdot p_2 + \dots$$

### Пример 9.22

Даны законы распределений независимых величин  $X$  и  $Y$ :

Значение величины $X (x_i)$	-1	0	1	2
Вероятность $p_i$	0,2	0,2	0,3	0,3

Значение величины $Y (y_i)$	-1	0	1
Вероятность $p_i$	0,2	0,3	0,5

Найдем  $E(X \cdot (3X - 5Y))$ .

Решение

Раскроем скобки под знаком математического ожидания и, используя свойства, преобразуем:

$$E(X \cdot (3X - 5Y)) = E(3X^2 - 5X \cdot Y) = 3E(X^2) - 5E(X \cdot Y) = 3E(X^2) - 5E(X) \cdot E(Y).$$

Вычислим:

$$E(X) = -1 \cdot 0,2 + 0 \cdot 0,2 + 1 \cdot 0,3 + 2 \cdot 0,3 = 0,7;$$

$$E(Y) = -1 \cdot 0,2 + 0 \cdot 0,3 + 1 \cdot 0,5 = 0,3;$$

$$E(X^2) = (-1)^2 \cdot 0,2 + 0^2 \cdot 0,2 + 1^2 \cdot 0,3 + 2^2 \cdot 0,3 = 1,7.$$



Теперь подставим:

$$E(X \cdot (3X - 5Y)) = 3E(X^2) - 5E(X) \cdot E(Y) = 3 \cdot 1,7 - 5 \cdot 0,7 \cdot 0,3 = 4,05.$$

Ответ:  $E(X \cdot (3X - 5Y)) = 4,05.$

*Дисперсией дискретной случайной величины* называют математическое ожидание квадрата отклонения величины от своего математического ожидания:

$$D(X) = E((X - E(X))^2).$$

При известном законе распределения случайной величины

Значение величины $X$	$x_1$	$x_2$	...	$x_n$
Вероятность $p_i$	$p_1$	$p_2$	...	$p_n$

с условием  $\sum_{i=1}^n p_i = 1$  получим формулу, по которой можно вычислять дисперсию:

$$D(X) = \sum_{i=1}^n (x_i - E(X))^2 \cdot p_i,$$

где  $E(X) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot p_i.$

Если воспользоваться свойствами математического ожидания, то можно получить еще одну формулу для вычисления дисперсии:

$$D(X) = E(X^2) - (E(X))^2,$$

которая при известном законе распределения принимает вид

$$D(X) = \sum_{i=1}^n x_i^2 p_i - \left( \sum_{i=1}^n x_i p_i \right)^2.$$

Прямым следствием из определения дисперсии является и равенство

$$E(X^2) = D(X) + (E(X))^2,$$

которое позволяет использовать числовые характеристики заданной величины  $X$  вычислить математическое ожидание новой величины  $X^2$ , не формируя для нее закон распределения.

### Пример 9.23

Найдем дисперсию величины, закон распределения которой имеет вид

Значение величины $X$	-1	0	1	2
Вероятность $p_i$	0,2	0,2	0,3	0,3

*Решение*

*Способ 1* (по определению).

Вычислим математическое ожидание:

$$E(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i = -1 \cdot 0,2 + 0 \cdot 0,2 + 1 \cdot 0,3 + 2 \cdot 0,3 = 0,7.$$



Составим закон распределения на квадрат отклонения величины от своего математического ожидания:

Значение величины $(X - E(X))^2$	$(-1 - 0,7)^2$	$(0 - 0,7)^2$	$(1 - 0,7)^2$	$(2 - 0,7)^2$
Вероятность $p_i$	0,2	0,2	0,3	0,3

Теперь вычислим математическое ожидание этой величины:

$$E((X - E(X))^2) = (-1 - 0,7)^2 \cdot 0,2 + (0 - 0,7)^2 \cdot 0,2 + (1 - 0,7)^2 \cdot 0,3 + (2 - 0,7)^2 \cdot 0,3 = \\ = 2,89 \cdot 0,2 + 0,49 \cdot 0,2 + 0,09 \cdot 0,3 + 1,69 \cdot 0,3 = 0,578 + 0,098 + 0,027 + 0,507 = 1,21.$$

По определению  $D(X) = E((X - E(X))^2)$ , поэтому  $D(X) = 1,21$ .

Способ 2. Воспользуемся расчетной формулой  $D(X) = \sum_{i=1}^n x_i^2 p_i - \left( \sum_{i=1}^n x_i p_i \right)^2$ :

$$D(X) = (-1)^2 \cdot 0,2 + 0^2 \cdot 0,2 + 1^2 \cdot 0,3 + 2^2 \cdot 0,3 - (-1 \cdot 0,2 + 0 \cdot 0,2 + 1 \cdot 0,3 + 2 \cdot 0,3)^2 = \\ = 1,7 - 0,7^2 = 1,7 - 0,49 = 1,21.$$

Видим, что значение дисперсии не зависит от способа вычисления, но второй способ значительно удобнее.

Ответ:  $D(X) = 1,21$ .

Для дисперсии случайной величины выполняются следующие свойства.

1. Дисперсия постоянной величины равна нулю:

$$D(C) = 0, C - \text{const.}$$

2. Постоянный множитель из-под знака дисперсии выносится в квадрат:

$$D(kX) = k^2 \cdot D(X).$$

3. Дисперсия суммы или разности независимых величин всегда равна сумме дисперсий этих величин:

$$D(X \pm Y) = D(X) \pm D(Y).$$

Дисперсия величины имеет размерность, не совпадающую с размерностью самой величины. Для того чтобы иметь характеристику для рассеивания величины той же размерности, что и сама величина, определили среднее квадратическое отклонение (стандартное) как квадратный корень из дисперсии:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

Понятно, что если для величины не существует математического ожидания, то не существует и дисперсии, а следовательно, и среднего квадратического (стандартного) отклонения.

К основным числовым характеристикам дискретной случайной величины относят начальные и центральные моменты порядка  $k$ .

Начальным моментом порядка  $k$  называют математическое ожидание  $k$ -й степени величины:  $\nu_k = E(X^k)$ .



Например, начальным моментом первого порядка является математическое ожидание величины:  $v_1 = E(X)$ , а начальным моментом второго порядка — математическое ожидание квадрата величины:  $v_2 = E(X^2)$ .

Центральным моментом порядка  $k$  называют математическое ожидание  $k$ -й степени отклонения величины от своего математического ожидания:  $\mu_k = E((X - E(X))^k)$ .

Центральный момент первого порядка всегда равен нулю:

$$\mu_1 = E((X - E(X))) = 0.$$

Центральным моментом второго порядка является дисперсия величины

$$\mu_2 = E((X - E(X))^2) = D(X).$$

Для вычисления центральных моментов более высоких порядков используют следующие тождества:

$$\mu_3 = v_3 - 3v_2v_1 + 2v_1^3;$$

$$\mu_4 = v_4 - 4v_3v_1 + 6v_2v_1^2 - 3v_1^4.$$

Центральные моменты третьего и четвертого порядка необходимы для определения асимметрии и эксцесса распределения величины.

Асимметрия определяется отношением вида  $As X = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$ , где  $\sigma = \sigma(X)$ .

Эксцесс определяется как:  $Ex X = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3$ , где, по-прежнему,  $\sigma = \sigma(X)$ .

При использовании некоторых свойств математического ожидания и дисперсии существенным условием являлась независимость величин. Поэтому нам осталось определить числовые характеристики, указывающие на зависимость величин, перечислить их свойства, а также уточнить свойства математического ожидания и дисперсии для зависимых величин.

Ковариацией величин  $X$  и  $Y$  называют математическое ожидание произведения отклонений величин от своих математических ожиданий:

$$\text{Cov cov}(X, Y) = E((X - E(X)) \cdot (Y - E(Y))).$$

Среди свойств ковариации отметим следующие:

- 1)  $\text{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$ ;
- 2)  $\text{cov}(X, X) = D(X)$ ;
- 3)  $D(X + Y) = D(X) + D(Y) + 2\text{cov}(X, Y)$ ;
- 4) Если  $X$  и  $Y$  независимы, то  $\text{cov}(X, Y) = 0$ ;
- 5)  $\text{cov}(X, Y) = \text{cov}(Y, X)$ ;
- 6)  $\text{cov}(aX, Y) = \text{cov}(X, aY) = a\text{cov}(X, Y)$ ;
- 7)  $\text{cov}(X + Y, Z) = \text{cov}(X, Z) + \text{cov}(Y, Z)$ ;
- 8)  $\text{cov}(X, Y + Z) = \text{cov}(X, Y) + \text{cov}(X, Z)$ .

Если  $\text{cov}(X, Y) = 0$ , то случайные величины  $X$  и  $Y$  называются *некоррелированными*. Таким образом, по свойству 4 из независимости  $X$  и  $Y$  следует их некоррелированность. Обратное неверно.



Ковариация имеет размерность произведения величин. Для характеристики зависимости удобнее использовать безразмерную числовую характеристику, называемую *коэффициентом корреляции*:

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}.$$

Из свойств коэффициента корреляции важными являются следующие:

- 1)  $\rho(X, Y) = \rho(Y, X)$ ;
- 2)  $|\rho(X, Y)| \leq 1$ ;
- 3)  $(|\rho(X, Y)| = 1) \Leftrightarrow (Y = aX + b, a, b - \text{const})$ .

Уточним теперь некоторые свойства математического ожидания и дисперсии для зависимых величин.

1. Математическое ожидание произведения зависимых величин равно сумме произведения математических ожиданий этих величин и их ковариации:

$$E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y) + \text{cov}(X, Y).$$

2. Дисперсия суммы зависимых величин вычисляется по формуле

$$D(X + Y) = D(X) + D(Y) + 2\text{cov}(X, Y).$$

3. Дисперсия разности зависимых величин вычисляется по формуле

$$D(X - Y) = D(X) + D(Y) - 2\text{cov}(X, Y).$$

#### Пример 9.24

Найдем  $D(2X - 3Y + 5)$ , если известны  $D(X) = 4$ ,  $D(Y) = 1$  и  $\rho(X, Y) = 0,2$ .

*Решение*

Используя свойства дисперсии и ковариации, а также определение коэффициента корреляции, преобразуем:

$$\begin{aligned} D(2X - 3Y + 5) &= D(2X - 3Y) = D(2X) + D(3Y) - 2\text{cov}(2X, 3Y) = \\ &= 2^2 D(X) + 3^2 D(Y) - 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \text{cov}(X, Y) = \\ &= 4D(X) + 9D(Y) - 12\rho(X, Y) \cdot \sigma(X) \cdot \sigma(Y) = \\ &= 4D(X) + 9D(Y) - 12\rho(X, Y) \cdot \sqrt{D(X)} \cdot \sqrt{D(Y)}. \end{aligned}$$

С учетом исходных данных задачи получим

$$D(2X - 3Y + 5) = 4 \cdot 4 + 9 \cdot 1 - 12 \cdot 0,2 \cdot \sqrt{4} \cdot \sqrt{1} = 16 + 9 - 4,8 = 20,2.$$

*Ответ:*  $D(2X - 3Y + 5) = 20,2$ .

#### 9.2.4. Непрерывные случайные величины

Если множество значений случайной величины представляет собой часть или даже все множество действительных чисел, то случайная величина определяется как *непрерывная*. Понятно, что закон распределения в виде таблицы для такой величины не составить, поэтому непрерывные случайные величины задаются с помощью функции, устанавливающей связь между возможными значениями величины и вероятностями, с которыми эти значения принимаются.



Функцией распределения случайной величины  $X$  называется функция, определяемая условием  $F(x) = P(X < x)$ .

Областью определения функции распределения является все множество действительных чисел. Среди свойств этой функции отметим наиболее важные:

- 1)  $F(x)$  — ограниченная функция:  $0 \leq F(x) \leq 1$ ;
- 2)  $F(x)$  — неубывающая функция:  $x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1) \leq F(x_2)$ ;
- 3) поведение на бесконечности определяется пределами:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1;$$

- 4)  $F(x)$  непрерывна слева в любой точке.

Для непрерывной случайной величины линия графика — сплошная.

Функцию распределения можно задавать и для дискретных случайных величин с известным законом распределения:

Значение величины $X$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	...	$x_n$
Вероятность $p_i$	$p_1$	$p_2$	$p_3$	$p_4$	...	$p_n$

с условием  $\sum_{i=1}^n p_i = 1$ .

В этом случае график функции распределения не будет сплошной линией, функция распределения дискретной случайной величины имеет разрывы в виде скачков (рис. 9.12).

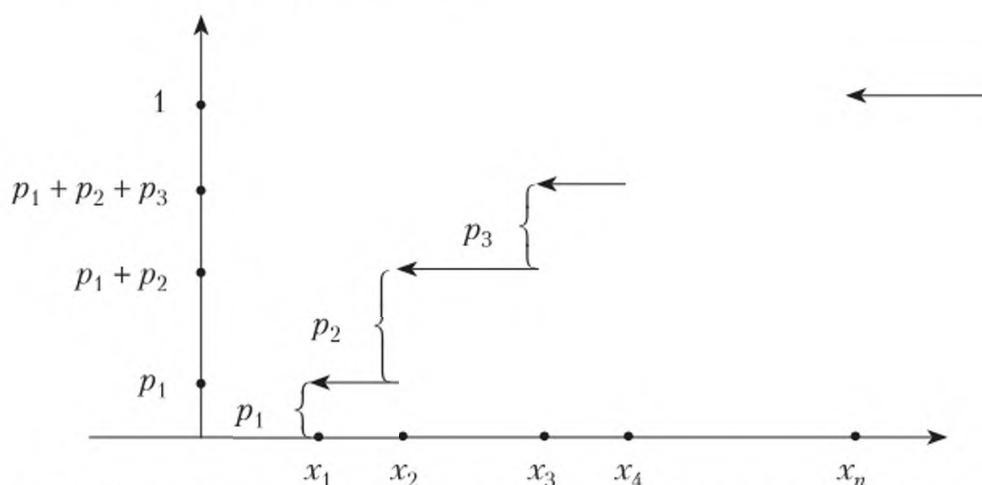


Рис. 9.12. График функции распределения дискретной случайной величины

Аналитически функция распределения дискретной случайной величины задается по принципу «накопленных вероятностей»:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq x_1, \\ p_1, & x_1 < x \leq x_2, \\ p_1 + p_2, & x_2 < x \leq x_3, \\ p_1 + p_2 + p_3, & x_3 < x \leq x_4, \\ \dots & \dots \\ 1, & x > x_n. \end{cases}$$



Конечно, при работе с дискретными случайными величинами удобнее использовать закон распределения в виде таблицы, но это не значит, что для таких величин функция распределения не определяется. Можно сказать, что общим способом задания случайной величины является указание вида ее функции распределения, и если эта функция имеет разрывы в виде скачков, то она определяет дискретную величину; если же функция распределения — непрерывная, то и определяет она непрерывную случайную величину.

### Пример 9.25

Для заданной дискретной случайной величины с известным законом распределения

Значение величины $X$	-1	0	1	2
Вероятность $p_i$	0,2	0,2	0,3	0,3

зададим функцию распределения.

*Решение*

Используем принцип «накопления вероятностей»:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1, \\ 0,2, & -1 < x \leq 0, \\ 0,2 + 0,2, & 0 < x \leq 1, \\ 0,2 + 0,2 + 0,3, & 1 < x \leq 2, \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

Функция распределения позволяет ответить на вопросы, связанные принятием величиной определенного числового значения или попаданием значения величины в определенный интервал:

- 1)  $P(X = x_1) = 0$ ;
- 2)  $P(x_1 < X < x_2) = P(x_1 \leq X \leq x_2) = P(x_1 \leq X < x_2) = P(x_1 < X \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1)$ ;
- 3)  $P(X < x_1) = F(x_1)$ ;
- 4)  $P(X > x_1) = 1 - P(X < x_1) = 1 - F(x_1)$ .

### Пример 9.26

Для непрерывной величины  $X$  функция распределения имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 4, \\ a(x - 4), & 4 < x \leq 8, \\ 1, & x > 8, \end{cases}$$

где  $a$  — некоторое число (параметр). Найдём значение параметра  $a$  и  $P(5 < X < 9)$ .

*Решение*

Для вычисления параметра используем непрерывность функции распределения:  $F(4) = 0$  и  $F(8) = 1$ .

В результате получаем:

$$F(4) = 0 \Rightarrow a(4 - 4) = 0 \text{ — тождество;}$$

$$F(8) = 1 \Rightarrow a(8 - 4) = 1 \Rightarrow 4a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{4}.$$



Для ответа на второй вопрос задачи воспользуемся условием 2. Тогда получим:

$$P(5 < X < 9) = F(9) - F(5) = 1 - \frac{1}{4} \cdot (5 - 4) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = 0,75.$$

Ответ:  $a = \frac{1}{4}$ ,  $P(5 < X < 9) = 0,75$ .

Непрерывная случайная величина  $X$  называется *абсолютно непрерывной*, если существует функция  $f(x)$ , удовлетворяющая условию

$$P(x_1 < X < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx.$$

Функция  $f(x)$  называется *плотностью* распределения  $X$  (или плотностью вероятности распределения  $X$ ).

Вспомнив геометрию определенного интеграла, можно наглядно представить условие из определения (рис. 9.13).

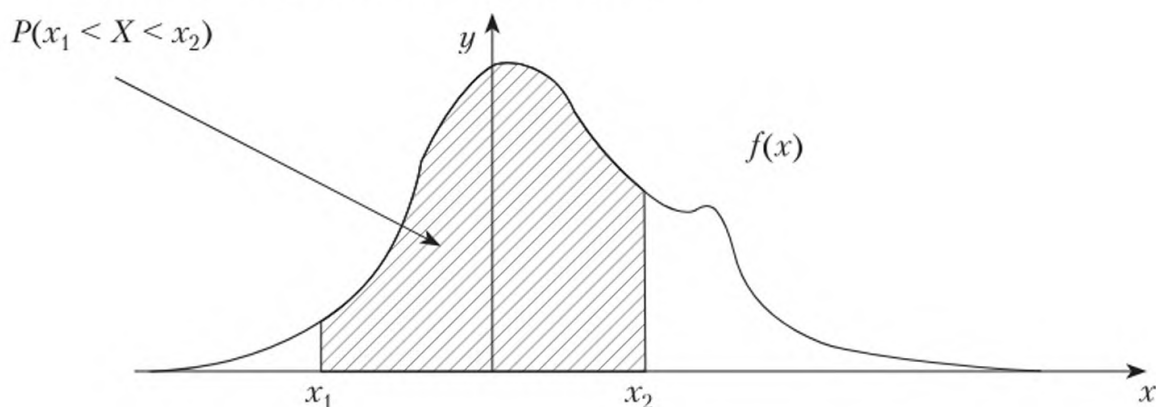


Рис. 9.13. Вероятность попадания непрерывной случайной величины в интервал

Из свойств плотности вероятности перечислим следующие:

- 1)  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$  — свойство нормированности плотности;
- 2)  $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$  — функцию распределения  $F(x)$  можно «восстанавливать», используя функцию плотности вероятности  $f(x)$ ;
- 3)  $\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = F(x_2) - F(x_1)$ .

### Пример 9.27

Для непрерывной величины  $X$  функция плотности вероятности имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 3, \\ a(x - 3), & 3 < x \leq 5, \\ 0, & x > 5, \end{cases}$$

где  $a$  — некоторое число (параметр). Найдём значение параметра  $a$  и  $P(4 < X < 8)$ .



*Решение*

Для вычисления параметра плотности вероятности используем свойство нормированности плотности:  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ . В нашем случае имеем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^3 f(x)dx + \int_3^5 f(x)dx + \int_5^{+\infty} f(x)dx = \int_3^5 a(x-3)dx = 1.$$

Вычисляя последний интеграл, получим

$$\int_3^5 a(x-3)dx = a \cdot \frac{(x-3)^2}{2} \Big|_3^5 = \frac{a}{2}(4-0) = 2a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2} = 0,5.$$

Для ответа на второй вопрос задачи используем определение плотности вероятности  $P(x_1 < X < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$ . В нашем случае получим

$$\begin{aligned} P(4 < X < 8) &= \int_4^8 f(x)dx = \int_4^5 f(x)dx + \int_5^8 f(x)dx = \int_4^5 \frac{1}{2}(x-3)dx = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{(x-3)^2}{2} \Big|_4^5 = \frac{1}{4} \cdot (4-1) = \frac{3}{4} = 0,75. \end{aligned}$$

Ответ:  $a = 0,5$ ,  $P(4 < X < 8) = 0,75$ .

---

Числовые характеристики непрерывных случайных величин находят, применяя интегрирование:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx;$$

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(X))^2 f(x)dx;$$

$$\nu_k = E(X^k) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x)dx;$$

$$\mu_k = E((X - E(X))^k) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(X))^k f(x)dx;$$

$$\text{cov}(X, Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(X)) \cdot (y - E(Y)) dx dy.$$

Все рассмотренные свойства математического ожидания, дисперсии и ковариации сохраняются. Уточним только свойство для математического ожидания величины, функционально зависящей от  $X$ :

$$E(\varphi(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \cdot f(x)dx.$$

Понятно, что эти числовые характеристики для непрерывной случайной величины существуют только в случае сходимости несобственных интегралов, на основе которых они определяются.



Для непрерывной величины  $X$  функция плотности вероятности имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 3, \\ \frac{1}{2} \cdot (x-3), & 3 < x \leq 5, \\ 0, & x > 5. \end{cases}$$

Найдем математическое ожидание и дисперсию величины  $X$ .

*Решение*

Для вычисления математического ожидания применим формулу

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx.$$

В нашем случае имеем

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_{-\infty}^3 xf(x)dx + \int_3^5 xf(x)dx + \int_5^{+\infty} xf(x)dx = \\ &= \int_3^5 \frac{1}{2}x(x-3)dx = \frac{1}{2} \int_3^5 (x^2 - 3x)dx = \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} \right) \Big|_3^5 = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left[ \left( \frac{125}{3} - \frac{75}{2} \right) - \left( \frac{27}{3} - \frac{27}{2} \right) \right] = \frac{13}{3}. \end{aligned}$$

Для вычисления дисперсии применим формулу  $D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(X))^2 f(x)dx$ .

В нашем случае получим

$$\begin{aligned} D(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(X))^2 \cdot f(x)dx = \\ &= \int_{-\infty}^3 \left( x - \frac{13}{3} \right)^2 f(x)dx + \int_3^5 \left( x - \frac{13}{3} \right)^2 f(x)dx + \int_5^{+\infty} \left( x - \frac{13}{3} \right)^2 f(x)dx = \int_3^5 \left( x - \frac{13}{3} \right)^2 \cdot \frac{1}{2}(x-3)dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_3^5 \left( x^2 - \frac{26}{3}x + \frac{169}{9} \right) \cdot (x-3)dx = \frac{1}{2} \int_3^5 \left( x^3 - \frac{26}{3}x^2 + \frac{169}{9}x - 3x^2 + 26x - \frac{169}{3} \right)dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_3^5 \left( x^3 - \frac{35}{3}x^2 + \frac{403}{9}x - \frac{169}{3} \right)dx = \frac{1}{2} \left( \frac{x^4}{4} - \frac{35x^3}{9} + \frac{403x^2}{18} - \frac{169}{3}x \right) \Big|_3^5 = \\ &= \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{625}{4} - \frac{35 \cdot 125}{9} + \frac{403 \cdot 25}{18} - \frac{169 \cdot 5}{3} \right) - \left( \frac{81}{4} - \frac{35 \cdot 27}{9} + \frac{403 \cdot 9}{18} - \frac{169 \cdot 3}{3} \right) \right] = \frac{2}{9}. \end{aligned}$$

Ответ:  $E(X) = \frac{13}{3}$ ,  $D(X) = \frac{2}{9}$ .

### 9.3. Основные законы распределений, наиболее употребляемые в социально-экономических приложениях

#### 9.3.1. Биномиальный закон распределения

Мы уже рассматривали ситуацию, когда осуществляется серия из  $n$  независимых испытаний с неизменной, равной  $p = p(A)$ , вероятностью наступ-



ления события  $A$  в каждом испытании, и говорили, что в таком случае испытания проходят по *схеме Бернулли*. Вероятность наступления события  $A$  в  $k$  испытаниях из  $n$  осуществленных вычисляют по формуле Бернулли:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k},$$

где  $C_n^k = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$ ,  $p = p(A)$ ,  $q = 1 - p$ .

Понятно, что число наступлений события  $A$  в серии из  $n$  независимых испытаний будет определять дискретную случайную величину  $X$ . Закон распределения этой величины задается таблицей, в первой строке которой указываются все возможные значения величины, а во второй — соответствующие этим значениям вероятности. В качестве возможных значений надо предлагать все целые числа от 0 до  $n$  включительно (ведь событие  $A$  может не наступить ни разу, а может наступить в каждом из  $n$  испытаний). Соответствующие вероятности при этом надо вычислять по формуле Бернулли. Таким образом, закон распределения примет вид

Значение величины $X$	0	1	2	3	...	$n$
Вероятность $p_i$	$P_n(0)$	$P_n(1)$	$P_n(2)$	$P_n(3)$	...	$P_n(n)$

Для того чтобы таблица рассматривалась как закон распределения, необходимо выполнение условия  $\sum_{i=1}^n p_i = 1$ . Проверим его выполнимость:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n p_i &= C_n^0 p^0 q^n + C_n^1 p^1 q^{n-1} + C_n^2 p^2 q^{n-2} + \dots + C_n^{n-1} p^{n-1} q^1 + C_n^n p^n q^0 = \\ &= (p + q)^n = 1^n = 1. \end{aligned}$$

Для преобразований была использована формула, которую называют *биномом Ньютона*:

$$(a + b)^n = C_n^0 a^0 b^n + C_n^1 a^1 b^{n-1} + C_n^2 a^2 b^{n-2} + \dots + C_n^{n-1} a^{n-1} b^1 + C_n^n a^n b^0,$$

поэтому распределение называли *биномиальным*.

Итак, величина  $X$ , определяющая число наступлений события в серии из  $n$  независимых испытаний, имеет биномиальный закон распределения.

### Пример 9.29

Тест состоит из пяти вопросов, на каждый из них предлагают три варианта ответа, из которых только один правильный. Составим закон распределения величины  $X$  — числа правильных ответов на вопросы теста (тест заполняется наугад: ответы выбираются случайным образом).

*Решение*

Для составления закона распределения необходимо указать все возможные значения величины и вычислить соответствующие этим значениям вероятности. Отметим, что условия опыта используют схему Бернулли: испытания независимы (в задаче не сказано, что вопросы теста связаны между собой), и в каждом из них с неизменной вероятностью  $p = \frac{1}{3}$  наступает событие  $A$ : «Выбран правильный ответ», поэтому



величина  $X$  — число правильных ответов на вопросы теста — имеет биномиальное распределение с параметрами  $n = 5$  и  $p = \frac{1}{3}$ :

Значение величины $X$	0	1	2	3	4	5
Вероятность $p_i$	$P_5(0)$	$P_5(1)$	$P_5(2)$	$P_5(3)$	$P_5(4)$	$P_5(5)$

Вычислим соответствующие вероятности по формуле Бернулли:

$$P_5(0) = C_5^0 p^0 q^5 = \frac{5!}{0! \cdot (5-0)!} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^0 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^5 = 1 \cdot 1 \cdot \frac{32}{243} = \frac{32}{243};$$

$$P_5(1) = C_5^1 p^1 q^4 = \frac{5!}{1! \cdot (5-1)!} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^1 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^4 = 5 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{16}{81} = \frac{80}{243};$$

$$P_5(2) = C_5^2 p^2 q^3 = \frac{5!}{2! \cdot (5-2)!} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 = 10 \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{8}{81} = \frac{80}{243};$$

$$P_5(3) = C_5^3 p^3 q^2 = \frac{5!}{3! \cdot (5-3)!} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 10 \cdot \frac{1}{27} \cdot \frac{4}{9} = \frac{40}{243};$$

$$P_5(4) = C_5^4 p^4 q^1 = \frac{5!}{4! \cdot (5-4)!} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^1 = 5 \cdot \frac{1}{81} \cdot \frac{2}{81} = \frac{10}{243};$$

$$P_5(5) = C_5^5 p^5 q^0 = \frac{5!}{5! \cdot (5-5)!} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^5 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^0 = 1 \cdot \frac{1}{243} \cdot 1 = \frac{1}{243}.$$

Закон распределения величины  $X$  принимает вид

Значение величины $X$	0	1	2	3	4	5
Вероятность $p_i$	$\frac{32}{243}$	$\frac{80}{243}$	$\frac{80}{243}$	$\frac{40}{243}$	$\frac{10}{243}$	$\frac{1}{243}$

Необходимое условие  $\sum_{i=1}^n p_i = 1$  выполнено.

Числовые характеристики величины  $X$ , имеющей биномиальный закон распределения, находят по формулам:

$$E(X) = np; \quad D(X) = npq; \quad \sigma(X) = \sqrt{npq}.$$

Мы видим, что если известны параметры опыта:  $n$  — число испытаний в серии и  $p = P(A)$  — вероятность наступления события  $A$  при однократном осуществлении испытания (а значит, и  $q = P(\bar{A}) = 1 - p$  — вероятность ненаступления события  $A$ ), то числовые характеристики легко находятся без составления самого закона распределения.

### Пример 9.30

Банк выдал 700 кредитов определенного вида, оценив вероятность возврата каждого в 84%. Найдем математическое ожидание и дисперсию числа возвращенных банку кредитов.



*Решение*

Величина  $X$  — число возвращенных банку кредитов — формируется в условиях серии испытаний, проходящих по схеме Бернулли, поэтому будет иметь биномиальное распределение с параметрами  $n = 700$  и  $p = 0,84$ . Зная эти параметры, числовые характеристики легко найти:

$$E(X) = np = 700 \cdot 0,84 = 588;$$

$$D(X) = npq = 700 \cdot 0,84 \cdot (1 - 0,84) = 94,08;$$

Ответ:  $E(X) = 588$ ;  $D(X) = 94,08$ .

### 9.3.2. Распределение Пуассона

Если испытания проходят по схеме Бернулли, но количество испытаний велико ( $n \rightarrow \infty$ ), а вероятность наступления события  $A$  очень мала ( $p \rightarrow 0$ ), то величина  $X$  — число наступлений события  $A$  в серии из  $n$  испытаний — будет иметь распределение Пуассона:

Значение величины $X$	0	1	2	3	...	$k$	...
Вероятность $p_i$	$P_n(0)$	$P_n(1)$	$P_n(2)$	$P_n(3)$	...	$P_n(k)$	...

Для величины, распределенной по закону Пуассона, вероятности, отвечающие определенным значениям, вычисляются по формуле Пуассона

$$P_n(k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda},$$

где  $\lambda = np$ . Проверим выполнимость необходимого условия  $\sum_{i=1}^n p_i = 1$  для закона распределения величины:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n p_i &= \frac{\lambda^0}{0!} \cdot e^{-\lambda} + \frac{\lambda^1}{1!} \cdot e^{-\lambda} + \frac{\lambda^2}{2!} \cdot e^{-\lambda} + \dots + \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} + \dots = \\ &= e^{-\lambda} \left( \frac{\lambda^0}{0!} + \frac{\lambda^1}{1!} + \frac{\lambda^2}{2!} + \dots + \frac{\lambda^k}{k!} + \dots \right) = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = 1. \end{aligned}$$

Для преобразований было использовано известное разложение функции  $y = e^x$  в степенной ряд  $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^k}{k!} + \dots$ .

Таким образом, условие  $\sum_{i=1}^n p_i = 1$  для распределения Пуассона выполнено.

#### Пример 9.31

При печати книги в типографии вероятность появления бракованной страницы равна 0,001. Составим закон распределения для величины  $X$  — числа бракованных страниц в книге из 700 страниц, и определим, что более вероятно: что книга выйдет без брака или что книга будет содержать не менее одной бракованной страницы.

*Решение.*

Величина  $X$  — число бракованных страниц в книге — формируется в условиях испытания, проходящего по схеме Бернулли при  $n = 700 \rightarrow \infty$  и  $p = 0,001 \rightarrow 0$ , поэтому будет иметь распределение Пуассона:



Значение величины $X$	0	1	2	...	$k$	...
Вероятность $p_i$	$P_{700}(0)$	$P_{700}(1)$	$P_{700}(2)$	...	$P_{700}(k)$	...

Соответствующие вероятности вычислим по формуле Пуассона. При  $n = 700$   
 $\lambda = np = 700 \cdot 0,001 = 0,7$ , поэтому

$$P_{700}(0) = \frac{0,7^0}{0!} \cdot e^{-0,7} = 0,4966; \quad P_{700}(1) = \frac{0,7^1}{1!} \cdot e^{-0,7} = 0,3476;$$

$$P_{700}(2) = \frac{0,7^2}{2!} \cdot e^{-0,7} = 0,1217; \dots; \quad P_{700}(k) = \frac{0,7^k}{k!} \cdot e^{-0,7}, \dots$$

Понятно, что все возможные значения числа бракованных страниц (от 0 до 700) в таблице просто не поместятся, тем не менее мы можем предложить искомый закон распределения в виде

Значение величины $X$	0	1	2	...
Вероятность $p_i$	0,4966	0,3476	0,1217	...

с условием  $\sum_{i=1}^n p_i = 1$ , используя который, теперь ответим на второй вопрос задачи.

Условие, что книга выйдет без брака, фактически означает, что число бракованных страниц в книге равно нулю, а вероятность этого в законе указана:  $P_{700}(0) = 0,4966$ .

Условие, что книга будет содержать не менее одной бракованной страницы, предполагает, что количество таких страниц может быть равно 1, 2, ..., 700; вероятность этого можно вычислить как  $1 - 0,4966 = 0,5034$ .

Таким образом, имеем следующий ответ.

*Ответ:* более вероятно то, что книга будет содержать не менее одной бракованной страницы.

Числовые характеристики величины  $X$ , распределенной по закону Пуассона, находят по формулам

$$E(X) = np = \lambda; \quad D(X) = np = \lambda; \quad \sigma(X) = \sqrt{np} = \sqrt{\lambda}.$$

### Пример 9.32

Для величины  $X$ , распределенной по закону Пуассона, известно, что  $\frac{P(X=8)}{P(X=7)} = 0,03$ . Найдём дисперсию величины  $X$ .

*Решение*

Если величина распределена по закону Пуассона, то  $D(X) = np = \lambda$ . Мы найдём неизвестное значение  $\lambda$  из условий

$$P_n(8) = \frac{\lambda^8}{8!} \cdot e^{-\lambda}, \quad P_n(7) = \frac{\lambda^7}{7!} \cdot e^{-\lambda} \quad \text{и} \quad \frac{P(X=8)}{P(X=7)} = 0,03 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{\lambda^8}{8!} e^{-\lambda}}{\frac{\lambda^7}{7!} e^{-\lambda}} = 0,03 \Rightarrow \frac{\lambda}{8} = 0,03 \Rightarrow \lambda = 0,24.$$

Следовательно,  $D(X) = \lambda = 0,24$ .

*Ответ:*  $D(X) = 0,24$ .



### 9.3.3. Геометрическое и гипергеометрическое распределения

Схема испытаний Бернулли позволяет проявиться случайной величине  $X$  — числу наступлений события  $A$ , вероятность которого в рамках опыта остается постоянной в серии из  $n$  испытаний. В зависимости от условий опыта  $X$  может формироваться как биномиальное распределение или как распределение Пуассона, с ними мы только что познакомились. Оставаясь в рамках схемы Бернулли, можно наблюдать еще за одной интересной величиной  $X$  — числом испытаний, осуществленных до первого наступления события  $A$ , вероятность которого по-прежнему остается постоянной.

Такая величина имеет следующий закон распределения:

Значение величины $X$	1	2	3	...	$k$	...
Вероятность $p_i$	$p$	$qp$	$q^2p$	...	$q^{k-1}p$	...

Равенство  $P(X=1)=p$  означает, что если величина  $X$  приняла значение, равное 1, то было осуществлено всего одно испытание, в результате которого событие  $A$  наступило с известной вероятностью  $p = p(A)$  и опыт закончился.

Равенство  $P(X=2)=qp$  означает, что если величина  $X$  приняла значение, равное 2, то было осуществлено два испытания: в результате первого  $A$  не наступило (с вероятностью  $q = 1 - p$ ), в результате второго  $A$  наступило с известной вероятностью  $p = p(A)$  и опыт закончился.

Равенство  $P(X=3)=q^2p$  означает, что если величина  $X$  приняла значение, равное 3, то было осуществлено три испытания: в результате первого и второго  $A$  не наступило (с вероятностями  $q = 1 - p$ ), в результате третьего  $A$  наступило с известной вероятностью  $p = p(A)$  и опыт закончился.

Понятно, что множество возможных значений величины  $X$  определяется множеством натуральных чисел, которое является бесконечным, но счетным. Поэтому  $X$  является дискретной случайной величиной.

Проверим выполнимость необходимого для закона распределения условия  $\sum_{i=1}^n p_i = 1$ :

$$\sum_{i=1}^n p_i = p + qp + q^2p + \dots + q^{k-1}p + \dots = \frac{p}{1-q} = \frac{p}{p} = 1.$$

Ряд  $p + qp + q^2p + \dots$  является геометрическим со знаменателем  $q < 1$ .

Такой ряд является сходящимся, и его сумма определяется по формуле

$$S = \frac{a_1}{1 - \frac{a_2}{a_1}},$$

которая в нашем случае принимает вид  $S = \frac{p}{1-q}$ , а поскольку  $q = 1 - p$ , то равенство единице становится очевидным.



Таким образом, условие  $\sum_{i=1}^n p_i = 1$  для геометрического распределения выполнено. В процессе доказательства появляется геометрический ряд, что и определяет название соответствующего распределения.

Для геометрического распределения числовые характеристики находят по формулам

$$E(X) = \frac{1}{p}; \quad D(X) = \frac{q}{p^2}; \quad \sigma(X) = \frac{\sqrt{q}}{p}.$$

### Пример 9.33

Вероятность выигрыша в лотерею составляет 0,01. Петя решил покупать по одному билету в неделю этой лотереи до тех пор, пока ему не попадет выигрышный билет. Как долго Пете придется ждать выигрыша?

*Решение*

Для ответа на вопрос задачи необходимо понять, что число купленных Петей билетов до первого выигрышного является случайной величиной, имеющей геометрическое распределение, и вычислить математическое ожидание этой величины:

$$E(X) = \frac{1}{p} = \frac{1}{0,01} = 100.$$

*Ответ:* ожидание для Пети может продлиться 100 недель.

### Пример 9.34

Пусть имеется коробка с  $n$  шарами, среди которых  $k$  белых, остальные — черные. Наугад из коробки извлекается один шар. Если извлеченный шар — белый, то опыт прекращается; если же извлеченный шар — черный, то он возвращается в коробку и опыт начинается снова. Величина  $X$  — количество извлечений шара из коробки до первого появления белого шара — имеет геометрическое распределение, а ее закон имеет вид

Значение величины $X$	1	2	3	...
Вероятность $p_i$	$\frac{k}{n}$	$\frac{n-k}{n} \cdot \frac{k}{n}$	$\left(\frac{n-k}{n}\right)^2 \cdot \frac{k}{n}$	...

с условием  $\sum_{i=1}^n p_i = 1$ .

Здесь существенную роль играет условие возвращения извлеченного шара в коробку, это позволяет каждый раз начинать опыт при неизменных начальных условиях, что является важным требованием для испытаний, проходящих по схеме Бернулли.

### Пример 9.35

Пусть теперь в коробке  $N$  шаров, из которых  $K$  — белых, остальные — черные. Наугад из коробки извлекают без возвращения  $n$  шаров. Составим закон распределения для величины  $X$  — числа белых шаров в выборке.

*Решение.*

По условию задачи естественны ограничения  $K \leq N$ ,  $n \leq N$ .



Обозначим  $k$  — число белых шаров в выборке, тогда естественно появляется еще одно ограничение:  $k \leq n$ . Значения величины  $X$  определяются возможными значениями  $k: 0, 1, 2, 3, 4, \dots, m = \min(K, n)$ . Для вычисления соответствующих вероятностей будем использовать классическую формулу и принцип выбора «белое — из белого, черное — из черного», тогда закон распределения примет вид

Значение величины $X$	0	1	2	...	$m$
Вероятность $p_i$	$\frac{C_K^0 \cdot C_{N-K}^n}{C_N^n}$	$\frac{C_K^1 \cdot C_{N-K}^{n-1}}{C_N^n}$	$\frac{C_K^2 \cdot C_{N-K}^{n-2}}{C_N^n}$	...	$\frac{C_K^m \cdot C_{N-K}^{n-m}}{C_N^n}$

Условие  $\sum_{i=1}^n p_i = 1$  для такого распределения выполнено.

Полученное в примере 9.35 распределение называется *гипергеометрическим*.

Числовые характеристики величины  $X$ , имеющей гипергеометрическое распределение, находят по формулам

$$E(X) = n \cdot \frac{K}{N}; \quad D(X) = n \cdot \frac{K}{N} \cdot \left(1 - \frac{K}{N}\right) \cdot \left(1 - \frac{n-1}{N-1}\right).$$

#### 9.3.4. Равномерное распределение

Перейдем к рассмотрению специальных видов распределений непрерывных случайных величин. Напомним, что абсолютно непрерывная случайная величина  $X$  задается не только функцией распределения  $F(x) = P(X < x)$ , но и плотностью вероятности  $f(x) = F'(x)$ . Специальный вид распределения  $X$  предполагает специальный вид плотности вероятности.

Величина  $X$  *равномерно распределена* на некотором отрезке  $[a; b]$ , если ее плотность вероятности имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b, \\ 0, & x > b. \end{cases}$$

График плотности вероятности равномерного распределения изображен на рис. 9.14.

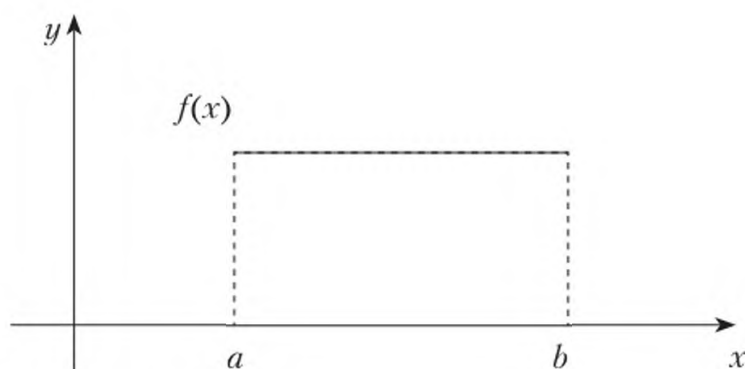


Рис. 9.14. График плотности вероятности равномерного распределения



Функция распределения  $F(x) = P(X < x)$  восстанавливается по функции плотности с использованием условия  $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$  и принимает вид

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b, \\ 1, & x > b. \end{cases}$$

Можно построить и график функции распределения (рис. 9.15).

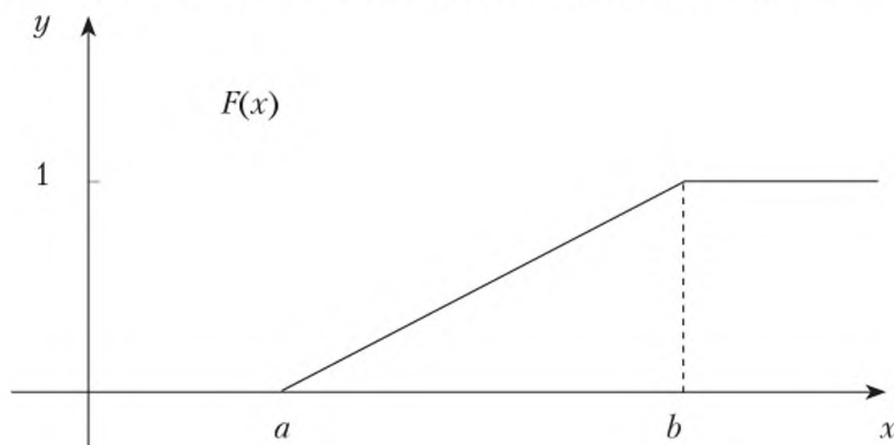


Рис. 9.15. График функции равномерного распределения

Числовые характеристики для равномерного распределения на отрезке находят по соответствующим формулам для непрерывных случайных величин:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_a^b \frac{1}{b-a} x dx = \frac{1}{b-a} \frac{x^2}{2} \Big|_a^b = \frac{1}{2(b-a)} (b^2 - a^2) = \frac{a+b}{2}.$$

$$\begin{aligned} D(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(X))^2 f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx - (E(X))^2 = \\ &= \int_a^b x^2 \cdot \frac{1}{b-a} dx - \left( \frac{a+b}{2} \right)^2 = \frac{b^2 + ab + a^2}{3} - \frac{a^2 + 2ab + b^2}{4} = \\ &= \frac{4b^2 + 4ab + 4a^2 - 3a^2 - 6ab - 3b^2}{12} = \frac{1}{b-a} \frac{x^3}{3} \Big|_a^b - \frac{a^2 + 2ab + b^2}{4} = \\ &= \frac{1}{3(b-a)} (b^3 - a^3) - \frac{a^2 + 2ab + b^2}{4} = \frac{(a-b)^2}{12}; \\ \sigma(X) &= \sqrt{\frac{(a-b)^2}{12}} = \frac{|a-b|}{2\sqrt{3}} = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

### Пример 9.36

Величины  $X$  и  $Y$  независимы и равномерно распределены на отрезках  $[-2; 4]$  и  $[5; 8]$  соответственно. Найдём математическое ожидание и дисперсию разности этих величин.



*Решение*

При вычислениях используем известные свойства математического ожидания и дисперсии, а также только что полученные числовые характеристики для равномерного распределения:

$$E(X - Y) = E(X) - E(Y) = \frac{-2+4}{2} - \frac{5+8}{2} = 1 - \frac{13}{2} = -\frac{11}{2} = -5,5;$$

$$D(X - Y) = D(X) + D(Y) = \frac{(-2-4)^2}{12} + \frac{(5-8)^2}{12} = \frac{36+9}{12} = \frac{45}{12} = \frac{15}{4} = 3,75.$$

Ответ:  $E(X) = -5,5$ ;  $D(X) = 3,75$ .

---

**Пример 9.37**

Величина  $X$  равномерно распределена на отрезке  $[-2; 4]$ . Найдем  $P(0 < X < 5)$ .

*Решение*

*Способ 1.* Для ответа на вопрос задачи можно использовать функцию распределения величины  $X$ , которая в нашем случае примет вид

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < -2, \\ \frac{x+2}{6}, & -2 \leq x \leq 6, \\ 1, & x > 6, \end{cases}$$

и соответствующее свойство  $P(x_1 < X < x_2) = F(x_2) - F(x_1)$ :

$$P(0 < X < 5) = F(5) - F(0) = 1 - \frac{0+2}{6} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

*Способ 2.* Для ответа на вопрос задачи можно использовать функцию плотности вероятности величины  $X$ , которая в нашем случае примет вид

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < -2, \\ \frac{1}{6}, & -2 \leq x \leq 4, \\ 0, & x > 4, \end{cases}$$

и соответствующее свойство  $P(x_1 < X < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$ :

$$P(0 < X < 5) = \int_0^5 f(x)dx = \int_0^4 f(x)dx + \int_4^5 f(x)dx = \int_0^4 \frac{1}{6}dx = \frac{1}{6}x \Big|_0^4 = \frac{4}{6} - \frac{0}{6} = \frac{2}{3}.$$

Ответ:  $P(0 < X < 5) = \frac{2}{3}$ .

---

### 9.3.5. Показательное распределение

Величина  $X$  имеет показательное распределение с параметром  $\lambda > 0$  в том случае, когда ее плотность вероятности имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0. \end{cases}$$



Можно построить график плотности вероятности для такой величины (рис. 9.16).

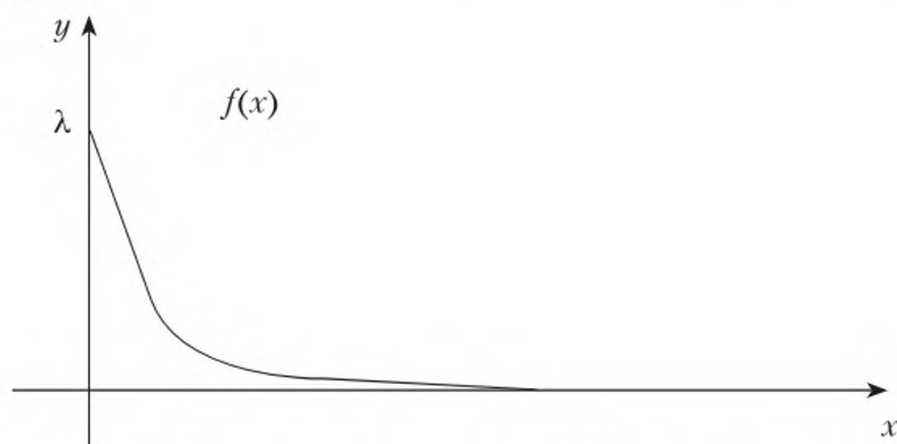


Рис. 9.16. График плотности вероятности показательного распределения

Функция распределения  $F(x) = P(X < x)$  восстанавливается по функции плотности с использованием условия  $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$ :

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt = \lambda \left( -\frac{1}{\lambda} \right) e^{-\lambda t} \Big|_0^x = -(e^{-\lambda x} - e^0) = 1 - e^{-\lambda x}.$$

Таким образом, в итоге получаем  $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0. \end{cases}$

График такой функции изображен на рис. 9.17.

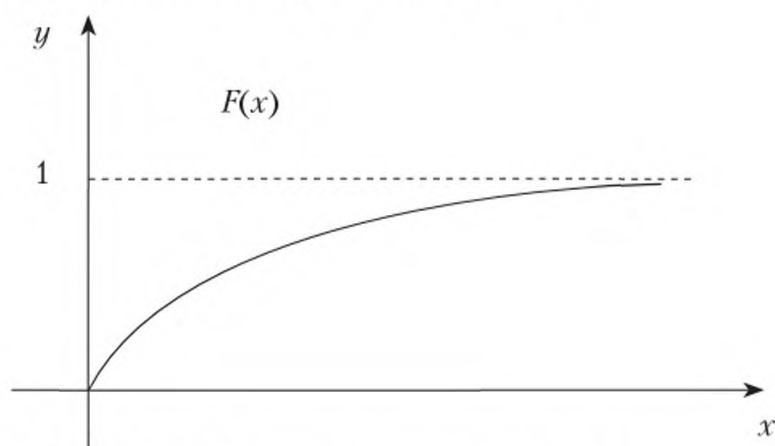


Рис. 9.17. График функции показательного распределения

Найдем числовые характеристики для величины  $X$ , имеющей показательное распределение, используя соответствующие определения:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b x\lambda e^{-\lambda x} dx = \left| \begin{array}{l} u = x \\ du = e^{-\lambda x} \\ du = dx \\ u = -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \end{array} \right| =$$



$$\begin{aligned}
&= (\text{используем интегрирование по частям и определение несобственного интеграла}) = \\
&= \lambda \lim_{b \rightarrow +\infty} \left( -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \Big|_0^b + \frac{1}{\lambda} \int_0^b e^{-\lambda x} dx \right) = \lambda \lim_{b \rightarrow +\infty} \left( -\frac{1}{\lambda} b e^{-\lambda b} - 0 - \frac{1}{\lambda^2} e^{-\lambda x} \Big|_0^b \right) = \\
&= \lambda \lim_{b \rightarrow +\infty} \left( 0 - \frac{1}{\lambda^2} (e^{-\lambda b} - e^0) \right) = \lambda \left( -\frac{1}{\lambda^2} \cdot (-1) \right) = \frac{1}{\lambda}.
\end{aligned}$$

Для нахождения дисперсии используем соотношение

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(X))^2 \cdot f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx - (E(X))^2.$$

Сначала вычислим  $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx = E(X^2)$ :

$$E(X^2) = \int_0^{\infty} x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx = \lambda \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b x^2 e^{-\lambda x} dx = \left. \begin{array}{l} u = x^2 \\ du = e^{-\lambda x} dx \\ du = 2x dx \\ u = -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \end{array} \right| =$$

= (дважды используем интегрирование по частям и определение несобственного интеграла) =

$$= \lambda \lim_{b \rightarrow +\infty} \left( -\frac{1}{\lambda} b^2 e^{-\lambda b} - 0 + \frac{2}{\lambda} \cdot \frac{1}{\lambda^2} \right) = \lambda \cdot \frac{2}{\lambda^3} = \frac{2}{\lambda^2}.$$

Теперь подставим в формулу дисперсии и получим

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx - (E(X))^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \left( \frac{1}{\lambda} \right)^2 = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Для среднего квадратического (стандартного) отклонения получим

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{\frac{1}{\lambda^2}} = \frac{1}{\lambda}.$$

### Пример 9.38

Величина  $X$  имеет показательное распределение и математическое ожидание, равное 2. Найдём  $P(-3 < X < 5)$ .

*Решение*

Если математическое ожидание для показательного распределения известно, то можно найти параметр  $\lambda$ , а затем плотность вероятности и функцию распределения случайной величины:

$$\begin{aligned}
E(X) = \frac{1}{\lambda} = 2 &\Rightarrow \lambda = \frac{1}{2}; \\
f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \end{cases} &= \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{1}{2} \cdot e^{-\frac{1}{2}x}, & x \geq 0; \end{cases}
\end{aligned}$$



$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1 - e^{-\frac{1}{2}x}, & x \geq 0. \end{cases}$$

Теперь найдем ответ на вопрос задачи.

*Способ 1.* Можно использовать функцию распределения величины  $X$  и соответствующее свойство  $P(x_1 < X < x_2) = F(x_2) - F(x_1)$ :

$$P(-3 < X < 5) = F(5) - F(-3) = \left(1 - e^{-\frac{1}{2} \cdot 5}\right) - 0 = 1 - e^{-\frac{5}{2}} = 1 - \frac{1}{e^{\frac{5}{2}}} = 0,9179.$$

*Способ 2.* Можно использовать функцию плотности вероятности величины  $X$  и соответствующее свойство  $P(x_1 < X < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx$ :

$$\begin{aligned} P(-3 < X < 5) &= \int_{-3}^5 f(x) dx = \int_{-3}^0 f(x) dx + \int_0^5 f(x) dx = \int_0^5 \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}x} dx = \\ &= \frac{1}{2} \cdot (-2) \cdot e^{-\frac{1}{2}x} \Big|_0^5 = - \left( e^{-\frac{5}{2}} - e^0 \right) = 1 - e^{-\frac{5}{2}} = 0,9179. \end{aligned}$$

Ответ:  $P(-3 < X < 5) = 0,9179$ .

### Пример 9.39

Величины  $X$  и  $Y$  независимы и распределены по показательному закону. Известны  $E(X) = 1$  и  $E(Y) = 2$ . Найдем  $E((X - Y)^2)$ .

*Решение*

Если математические ожидания для величин, имеющих показательное распределение, известны, то можно найти значения параметров  $\lambda$ , а также вычислить дисперсии этих величин:

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} = 1 \Rightarrow \lambda = 1; \quad D(X) = \frac{1}{\lambda^2} \Rightarrow D(X) = 1;$$

$$E(Y) = \frac{1}{\lambda} = 2 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{2}; \quad D(Y) = \frac{1}{\lambda^2} \Rightarrow D(Y) = 4.$$

Теперь найдем ответ на вопрос задачи, используя свойства числовых характеристик:

$$\begin{aligned} E((X - Y)^2) &= D(X - Y) + (E(X - Y))^2 = \\ &= D(X) + D(Y) + (E(X) - E(Y))^2 = 1 + 4 + (1 - 2)^2 = 6. \end{aligned}$$

Ответ:  $E((X - Y)^2) = 6$ .

### 9.3.6. Нормальное распределение

Величина  $X$  имеет нормальное распределение ( $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ) с параметрами  $\mu$  и  $\sigma$ , если ее плотность вероятности имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

Применив стандартную схему исследования, известную из курса математического анализа, можно определить экстремум, интервалы монотон-



ности, точки перегиба и построить график плотности вероятности для нормального распределения (рис. 9.18).

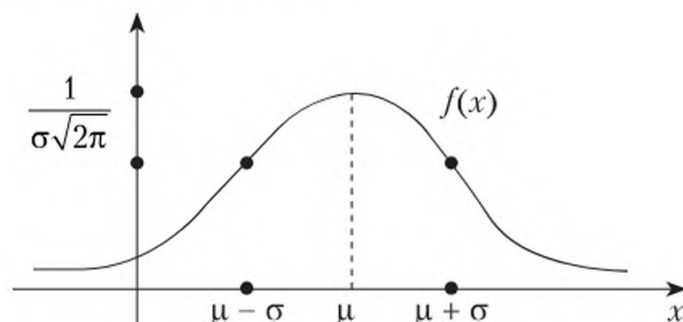


Рис. 9.18. График плотности вероятности нормального распределения

Если  $\mu = 0$ ,  $\sigma = 1$ , то распределение будет нормированным:  $X \sim N(0, 1)$ . При таких значениях параметров плотность вероятности становится известной нам функцией Гаусса:

$$f(x) = \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},$$

а ее график — симметричным относительно оси  $Oy$ .

Функция распределения  $F(x) = P(X < x)$  восстанавливается по функции плотности с использованием условия

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt.$$

После интегрирования на основе замены переменной получим

$$F(x) = 0,5 + \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right),$$

где  $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$  — известная нам функция Лапласа, для значений которой составлены таблицы.

Зная вид функции распределения и ее свойства, можно получить важную для нормального распределения формулу

$$P(x_1 < X < x_2) = F(x_2) - F(x_1) = \Phi\left(\frac{x_2 - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1 - \mu}{\sigma}\right).$$

#### Пример 9.40

Для величины  $X \sim N(1, 4)$  найдем  $P(-1 < X < 3)$ .

*Решение*

Из определения нормально распределенной величины и данных условия задачи можно найти значения параметров распределения:

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow \mu = 1, \sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{4} = 2.$$



Теперь по формуле  $P(x_1 < X < x_2) = \Phi\left(\frac{x_2 - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1 - \mu}{\sigma}\right)$  находим ответ на вопрос задачи:

$$\begin{aligned} P(-1 < X < 3) &= \Phi\left(\frac{3-1}{2}\right) - \Phi\left(\frac{-1-1}{2}\right) = \Phi(1) - \Phi(-1) = \\ &= \Phi(1) + \Phi(1) = 2\Phi(1) = 2 \cdot 0,34134 = 0,68268. \end{aligned}$$

При вычислениях использованы свойство нечетности функции Лапласа и таблица ее значений.

Ответ:  $P(-1 < X < 3) = 0,68268$ .

Параметры  $\mu$  и  $\sigma$  нормального распределения величины  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$  имеют совершенно определенный вероятностный смысл, а именно:  $\mu = E(X)$ ,  $\sigma = \sqrt{D(X)}$ .

Поэтому если известна плотность вероятности нормально распределенной величины, то фактически сразу известны и ее математическое ожидание, и дисперсия, и среднее квадратическое (стандартное) отклонение.

#### Пример 9.41

Величины  $X$  и  $Y$  независимы и распределены по нормальному закону с известными плотностями вероятностей:

$$f(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-5)^2}{8}}; \quad f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-2)^2}{2}}.$$

Найдем  $E(X^2 - Y^2)$ .

Решение

Найдем числовые характеристики величин  $X$  и  $Y$  исходя из вероятностного смысла параметров:

$$f(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-5)^2}{8}} \Rightarrow E(X) = \mu = 5, \quad D(X) = \sigma^2 = 4;$$

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-2)^2}{2}} \Rightarrow E(Y) = \mu = 2, \quad D(Y) = \sigma^2 = 1.$$

Теперь будем искать ответ на вопрос задачи, используя свойства числовых характеристик:

$$\begin{aligned} E(X^2 - Y^2) &= E(X^2) - E(Y^2) = D(X) + (E(X))^2 - [D(Y) + (E(Y))^2] = \\ &= (4 + 5^2) - (1 + 2^2) = 24. \end{aligned}$$

Ответ:  $E(X^2 - Y^2) = 24$ .

#### Пример 9.42

Величина  $X$  имеет нормальное распределение с известной плотностью вероятности  $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-5)^2}{8}}$ . Найдем  $P(|X - E(X)| > \sigma(X))$ .



### Решение

Исходя из вероятностного смысла параметров найдем числовые характеристики величины  $X$ :

$$f(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-5)^2}{8}} \Rightarrow E(X) = \mu = 5, \sigma = \sqrt{D(X)} = \sqrt{\sigma^2} = 2.$$

Теперь можно уточнить вопрос задачи:  $P(|X - E(X)| > \sigma(X)) = P(|X - 5| > 2)$  и найти на него ответ:

$$\begin{aligned} P(|X - 5| > 2) &= 1 - P(|X - 5| < 2) = 1 - P(-2 < X - 5 < 2) = 1 - P(3 < X < 7) = \\ &= 1 - \left( \Phi\left(\frac{7-5}{2}\right) - \Phi\left(\frac{3-5}{2}\right) \right) = 1 - (\Phi(1) - \Phi(-1)) = 1 - 2\Phi(1) = \\ &= 1 - 2 \cdot 0,34134 = 1 - 0,68268 = 0,31732. \end{aligned}$$

Ответ:  $P(|X - 5| > 2) = 0,31732$ .

Если  $X$  — нормально распределенная случайная величина, то и величина  $Y = aX + b$ , где  $a, b$  — const, тоже имеет нормальное распределение.

Линейная комбинация нормально распределенных величин сама является нормально распределенной величиной.

### 9.3.7. Логарифмически-нормальное распределение

Рассмотрим еще одно распределение, тесно связанное с нормальным, — так называемое логарифмически-нормальное (или логнормальное) распределение. Величина  $X$  имеет логарифмически-нормальное распределение, если ее логарифм  $\ln X$  имеет нормальное распределение с параметрами  $\mu$  и  $\sigma$ . Плотность вероятности для такой величины имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \frac{1}{\sigma x \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}}, & x > 0. \end{cases}$$

Функция распределения для логарифмически-нормальной случайной величины  $X$  стандартно определяется условием

$$F(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_0^{\ln x} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt.$$

Числовые характеристики находят по формулам

$$E(X) = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}; D(X) = e^{2\mu + \sigma^2} \cdot (e^{\sigma^2} - 1).$$

Произведение логарифмически-нормально распределенных случайных величин является логарифмически-нормально распределенной величиной. Это свойство является важнейшим для таких распределений.

Широкое применение логарифмически-нормальные случайные величины имеют в финансовой математике, а также в финансовой аналитике при изучении изменения цены актива в будущем. Для решения таких задач применение нормально распределенной величины нецелесообразно по причинам того, что относительно своей центральной оси оно может



иметь как положительные, так и отрицательные значения, а цена актива не может быть отрицательной. Кроме того, логарифмически-нормальное распределение асимметрично, имеет правостороннюю скошенность, что указывает на большую вероятность отклонения вверх. Это больше отвечает реалиям цены актива: инфляция оказывает давление на цены в сторону их повышения, да и временную сущность денег всегда надо иметь в виду — их вчерашняя стоимость меньше сегодняшней. Поэтому принято считать, что логарифмически-нормальное распределение лучше нормального дает первое приближение в случае активов, которыми торгуют на конкурентных рынках аукционного типа для длинных рассматриваемых периодов.

### Пример 9.43

Пусть  $S(n)$  обозначает цену акции к концу  $n$ -й недели,  $n \geq 1$ . Предполагая, что отношения цен  $\frac{S(n)}{S(n-1)}, n > 1$ , являются независимыми случайными величинами, имеющими логарифмически-нормальные распределения с параметрами  $\mu = 0,00331$  и  $\sigma = 0,0513$ , найдем вероятность того, что цена акции в конце четвертой недели будет выше, чем в конце первой недели.

*Решение*

Величины вида  $\frac{S(n)}{S(n-1)}$  имеют логарифмически-нормальные распределения, это

значит, что логарифмы этих величин  $\ln \frac{S(n)}{S(n-1)}$  распределены нормально с заданными параметрами  $\mu = 0,00331$  и  $\sigma = 0,0513$ . Кроме того, для разных значений  $n$  соответствующие величины будут независимы. Значит, можно записать

$$X = \ln \left( \frac{S(4)}{S(3)} \cdot \frac{S(3)}{S(2)} \cdot \frac{S(2)}{S(1)} \right) = \ln \left( \frac{S(4)}{S(3)} \right) + \ln \left( \frac{S(3)}{S(2)} \right) + \ln \left( \frac{S(2)}{S(1)} \right).$$

И эта сумма как сумма независимых нормально распределенных величин сама является нормально распределенной величиной. Параметры для этой новой величины найдем, используя свойства математического ожидания и дисперсии:

$$E(X) = \mu + \mu + \mu = 3 \cdot 0,00331 = 0,00993;$$

$$D(X) = \sigma^2 + \sigma^2 + \sigma^2 = 3 \cdot 0,0513^2 = 0,007895.$$

Теперь можем найти ответ на вопрос задачи:

$$\begin{aligned} P \left( \frac{S(4)}{S(1)} > 1 \right) &= P \left( \left( \frac{S(4)}{S(3)} \cdot \frac{S(3)}{S(2)} \cdot \frac{S(2)}{S(1)} \right) > 1 \right) = \\ &= P \left( \ln \left( \frac{S(4)}{S(3)} \right) + \ln \left( \frac{S(3)}{S(2)} \right) + \ln \left( \frac{S(2)}{S(1)} \right) > 0 \right) = \\ &= P(X > 0) = 1 - P(X < 0) = 1 - \left( 0,5 + \Phi \left( \frac{0 - 0,00993}{\sqrt{0,007895}} \right) \right) = \\ &= 0,5 - \Phi(-0,11) = 0,5 + \Phi(0,11) = 0,5 + 0,0438 = 0,5438. \end{aligned}$$

Ответ:  $P \left( \frac{S(4)}{S(1)} > 1 \right) = 0,5438.$



## 9.4. Многомерные случайные величины

### 9.4.1. Дискретные многомерные случайные величины

До сих пор мы изучали случайные величины, каждое возможное значение которых определялось одним числом. Такие величины принято называть одномерными. Однако часто приходится рассматривать испытания, результатом каждого возможного исхода которого является пара, тройка или более значений. В таких случаях определяется многомерная случайная величина, возможными значениями которой являются упорядоченные наборы чисел. Многомерные случайные величины еще принято называть векторами и обозначать  $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ , где  $X_1, X_2, \dots, X_n$  являются одномерными случайными величинами и определяются как компоненты многомерной случайной величины (вектора). Значения величины  $X$  определяются множеством наборов вида  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , где  $x_1$  — возможное значение величины  $X_1$ ,  $x_2$  — возможное значение величины  $X_2$ , ...,  $x_n$  — возможное значение величины  $X_n$ . Если все величины  $X_1, X_2, \dots, X_n$  являются дискретными, то и многомерная случайная величина  $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$  определяется как дискретная. Мы ограничимся рассмотрением двумерных дискретных случайных величин (векторов).

Упорядоченная пара случайных величин  $(X_1, X_2)$ , определенных на одном и том же пространстве элементарных событий  $\Omega$ , называется *двумерной случайной величиной*, или *системой случайных величин*, или *двумерным случайным вектором*.

Пара чисел  $(x, y)$  называется возможным значением случайного вектора  $(X_1, X_2)$ , если соответствует одному и тому же исходу в пространстве  $\Omega$ .

Двумерную случайную величину  $(X_1, X_2)$  можно интерпретировать как случайную точку на плоскости или как случайный вектор, поэтому для нее чаще используют обозначение  $(X, Y)$  вместо  $(X_1, X_2)$ . Мы тоже перейдем к такому обозначению.

Закон распределения двумерной дискретной случайной величины  $(X, Y)$  задается таблицей вида

	$X = x_1$	$X = x_2$	...	$X = x_n$
$Y = y_1$	$p_{11}$	$p_{21}$		$p_{n1}$
$Y = y_2$	$p_{12}$	$p_{22}$		$p_{n2}$
...	...	...		...
$Y = y_k$	$p_{1k}$	$p_{2k}$		$p_{nk}$

Здесь  $p_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j)$  для всех возможных значений  $i = 1, 2, \dots, n$  и  $j = 1, 2, \dots, k$ .

Необходимое условие на закон распределения выполнено:  $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k p_{ij} = 1$ .

При известном законе распределения двумерной величины  $(X, Y)$  можно составить законы распределений для величин  $X$  и  $Y$ . Для этого необходимо указать возможные значения этих величин и вычислить соответствующие этим значениям вероятности.



Закон распределения величины  $X$  имеет вид

Значения $X$	$X = x_1$	$X = x_2$	...	$X = x_n$
Вероятности $p_i$	$p_1$	$p_2$		$p_n$

Здесь

$$p_1 = P(X = x_1) = p_{11} + p_{12} + \dots + p_{1n};$$

$$p_2 = P(X = x_2) = p_{21} + p_{22} + \dots + p_{2n};$$

...

$$p_n = P(X = x_n) = p_{n1} + p_{n2} + \dots + p_{nn}.$$

Необходимое условие на закон распределения  $\sum_{i=1}^n p_i = 1$  выполнено.

Аналогично для величины  $Y$  будем иметь

Значения $Y$	$X = x_1$	$X = x_2$	...	$X = x_n$
Вероятности $p'_j$	$p'_1$	$p'_2$		$p'_k$

Здесь

$$p'_1 = P(Y = y_1) = p_{11} + p_{21} + \dots + p_{n1};$$

$$p'_2 = P(Y = y_2) = p_{12} + p_{22} + \dots + p_{n2};$$

...

$$p'_k = P(Y = y_k) = p_{1k} + p_{2k} + \dots + p_{nk}.$$

Необходимое условие на закон распределения  $\sum_{j=1}^k p'_j = 1$  и в этом случае

выполнено.

Для величин  $X$  и  $Y$  можно находить числовые характеристики, используя их законы распределения.

#### Пример 9.44

Известен закон распределения двумерной величины  $(X, Y)$ :

	$X = 10$	$X = 20$	$X = 30$	$X = 40$
$Y = 0$	0	0,2	0,1	0,1
$Y = 1$	0,3	0,2	0,1	0

Найдем  $E(X)$  и  $D(Y)$ .

*Решение*

Найдем закон распределения величины  $X$ :

Значения $X$	10	20	30	40
Вероятности $p_i$	0,3	0,4	0,2	0,1

Здесь

$$p_1 = P(X = 10) = P(X = 10, Y = 0) + P(X = 10, Y = 1) = 0 + 0,3 = 0,3;$$

$$p_2 = P(X = 20) = P(X = 20, Y = 0) + P(X = 20, Y = 1) = 0,2 + 0,2 = 0,4;$$



$$p_3 = P(X = 30) = P(X = 30, Y = 0) + P(X = 30, Y = 1) = 0,1 + 0,1 = 0,2;$$

$$p_4 = P(X = 40) = P(X = 40, Y = 0) + P(X = 40, Y = 1) = 0,1 + 0 = 0,1.$$

Необходимое условие на закон распределения  $\sum_{i=1}^n p_i = 1$  выполнено.

Зная закон распределения  $X$ , вычислим математическое ожидание  $E(X)$ :

$$E(X) = \sum_{i=1}^4 x_i p_i = 10 \cdot 0,3 + 20 \cdot 0,4 + 30 \cdot 0,2 + 40 \cdot 0,1 = 21.$$

Теперь найдем закон распределения величины  $Y$ :

Значения $Y$	0	1
Вероятности $p'_j$	0,4	0,6

Здесь

$$p'_1 = P(Y = 0) = P(X = 10, Y = 0) + P(X = 20, Y = 0) + P(X = 30, Y = 0) + \\ + P(X = 40, Y = 0) = 0 + 0,2 + 0,1 + 0,1 = 0,4;$$

$$p'_2 = P(Y = 1) = P(X = 10, Y = 1) + P(X = 20, Y = 1) + P(X = 30, Y = 1) + \\ + P(X = 40, Y = 1) = 0,3 + 0,2 + 0,1 + 0 = 0,6.$$

Необходимое условие  $\sum_{j=1}^k p'_j = 1$  и в этом случае выполнено.

Теперь можно вычислить дисперсию  $D(Y)$ :

$$D(Y) = 0^2 \cdot 0,4 + 1^2 \cdot 0,6 - (0 \cdot 0,4 + 1 \cdot 0,6)^2 = 0,6 - 0,36 = 0,24.$$

Ответ:  $E(X) = 21$ ;  $D(Y) = 0,24$ .

Если задан закон распределения двумерной величины  $(X, Y)$ , то можно составить закон распределения для любой величины, полученной в результате арифметических действий с составляющими  $X$  и  $Y$ .

#### Пример 9.45

Известен закон распределения двумерной величины  $(X, Y)$ :

	$X = 0$	$X = 1$	$X = 3$	$X = 4$
$Y = -1$	0,1	0	0,1	0,1
$Y = 0$	0,1	0,1	0,1	0,1
$Y = 1$	0,1	0,1	0,1	0

Составим закон распределения величины  $Z = X - Y$  и найдем  $E(Z)$ .

*Решение*

Найдем возможные значения разности  $Z = X - Y$ , это удобно выполнить, используя вспомогательную таблицу. В нижней части каждой клетки сохраняем вероятности из заданного двумерного закона распределения, в верхней части каждой клетки считаем разность, соответствующую выбранным значениям  $X$  и  $Y$  (выделено фоном):

$Z = X - Y$	$X = 0$	$X = 1$	$X = 3$	$X = 4$
$Y = -1$	$0 - (-1) = 1$	$1 - (-1) = 2$	$3 - (-1) = 4$	$4 - (-1) = 5$
	0,1	0	0,1	0,1



$Z = X - Y$	$X = 0$	$X = 1$	$X = 3$	$X = 4$
$Y = 0$	$0 - 0 = 0$	$1 - 0 = 1$	$3 - 0 = 3$	$4 - 0 = 4$
	0,1	0,1	0,1	0,1
$Y = 1$	$0 - 1 = -1$	$1 - 1 = 0$	$3 - 1 = 2$	$4 - 1 = 3$
	0,1	0,1	0,1	0

Закон распределения величины  $Z = X - Y$  имеет вид

Значения $Z = X - Y$	-1	0	1	2	3	4	5
Вероятности $p_i$	0,1	0,2	0,2	0,1	0,1	0,2	0,1

Здесь

$$p_1 = P(X - Y = -1) = P(X = 0, Y = 1) = 0,1;$$

$$p_2 = P(X - Y = 0) = P(X = 0, Y = 0) + P(X = 1, Y = 1) = 0,1 + 0,1 = 0,2;$$

$$p_3 = P(X - Y = 1) = P(X = 0, Y = -1) + P(X = 1, Y = 0) = 0,1 + 0,1 = 0,2;$$

$$p_4 = P(X - Y = 2) = P(X = 1, Y = -1) + P(X = 3, Y = 1) = 0 + 0,1 = 0,1;$$

$$p_5 = P(X - Y = 3) = P(X = 3, Y = 0) + P(X = 4, Y = 1) = 0,1 + 0 = 0,1;$$

$$p_6 = P(X - Y = 4) = P(X = 3, Y = -1) + P(X = 4, Y = 0) = 0,1 + 0,1 = 0,2;$$

$$p_7 = P(X - Y = 5) = P(X = 4, Y = -1) = 0,1.$$

Необходимое условие на закон распределения  $\sum_{i=1}^n p_i = 1$  выполнено.

Теперь можем найти математическое ожидание  $E(Z)$ , используя определение и полученный закон распределения:

$$E(Z) = \sum_{i=1}^7 z_i p_i = -1 \cdot 0,1 + 0 \cdot 0,2 + 1 \cdot 0,2 + 2 \cdot 0,1 + 3 \cdot 0,1 + 4 \cdot 0,2 + 5 \cdot 0,1 = 1,9.$$

Ответ:  $E(Z) = 1,9$ .

В пространстве  $\Omega$  можно рассматривать разные события, связанные с тем, что компоненты  $X$  и  $Y$  величины  $(X, Y)$  принимают значения, удовлетворяющие заданным условиям, и анализировать их зависимость.

Напомним, что для независимых событий всегда выполнено условие

$$P(AB) = P(A)P(B).$$

#### Пример 9.46

Известен закон распределения двумерной величины  $(X, Y)$ :

	$X = 0$	$X = 1$	$X = 3$	$X = 4$
$Y = -1$	0,1	0	0,1	0,1
$Y = 0$	0,1	0,1	0,1	0,1
$Y = 1$	0,1	0,1	0,1	0

Определим, будут ли зависимыми события  $A$ : « $Y < X$ » и  $B$ : « $X > 0$ ».



Решение

Отметим в заданной таблице области наступления событий  $A$ ,  $B$  (штриховками) и их произведения  $A \cdot B$  (выделено фоном):

	$X = 0$	$X = 1$	$X = 3$	$X = 4$
$Y = -1$	0,1	0	0,1	0,1
$Y = 0$	0,1	0,1	0,1	0,1
$Y = 1$	0,1	0,1	0,1	0

Вычислим вероятности этих событий:

$$\begin{aligned}P(A) &= P(Y < X) = P(Y = -1, X = 0) + P(Y = -1, X = 1) + \\&+ P(Y = -1, X = 3) + P(Y = -1, X = 4) + P(Y = 0, X = 1) + \\&+ P(Y = 0, X = 3) + P(Y = 0, X = 4) + P(Y = 1, X = 3) + P(Y = 1, X = 4) = \\&= 0,1 + 0 + 0,1 + 0,1 + 0,1 + 0,1 + 0,1 + 0,1 + 0 = 0,7;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P(B) &= P(X > 0) = P(X = 1, Y = -1) + P(X = 3, Y = -1) + \\&+ P(X = 4, Y = -1) + P(X = 1, Y = 0) + P(X = 3, Y = 0) + \\&+ P(X = 4, Y = 0) + P(X = 1, Y = 1) + P(X = 3, Y = 1) + P(X = 4, Y = 1) = \\&= 0 + 0,1 + 0,1 + 0,1 + 0,1 + 0,1 + 0,1 + 0,1 + 0 = 0,7;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P(AB) &= P(Y < X \text{ и } X > 0) = P(X = 1, Y = -1) + P(X = 3, Y = -1) + \\&+ P(X = 4, Y = -1) + P(X = 1, Y = 0) + P(X = 3, Y = 0) + \\&+ P(X = 4, Y = 0) + P(X = 3, Y = 1) + P(X = 4, Y = 1) = \\&= 0 + 0,1 + 0,1 + 0,1 + 0,1 + 0,1 + 0,1 + 0 = 0,6.\end{aligned}$$

Теперь проверим выполнимость равенства  $P(AB) = P(A)P(B)$ :  $0,7 \cdot 0,7 \neq 0,6 \Rightarrow$  условие независимости не выполнено, значит, события являются зависимыми.

Ответ: события  $A$ : « $Y < X$ » и  $B$ : « $X > 0$ » являются зависимыми.

Если задан закон распределения двумерной величины  $(X, Y)$ , то можно ответить и на вопрос о зависимости составляющих двумерную величину компонентов  $X$  и  $Y$ . Для этого считают ковариацию величин  $X$  и  $Y$ , и если ковариация не равна нулю, то величины  $X$  и  $Y$  являются зависимыми. Если же ковариация величин  $X$  и  $Y$  равна нулю, то перед тем, как сделать вывод о независимости величин  $X$  и  $Y$ , для каждой пары значений  $(X = x_i, Y = y_j)$  проверяют выполнимость равенства

$$P(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_i)P(Y = y_j).$$

**Пример 9.47**

Известен закон распределения двумерной величины  $(X, Y)$ :

	$X = 0$	$X = 1$	$X = 3$	$X = 4$
$Y = -1$	0,1	0	0,1	0,1
$Y = 0$	0,1	0,1	0,1	0,1
$Y = 1$	0,1	0,1	0,1	0

Вычислим ковариацию  $\text{cov}(X, Y)$ .



*Решение*

Для вычисления ковариации используем ее свойство

$$\text{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y).$$

Чтобы найти математическое ожидание произведения  $E(XY)$ , используем вспомогательную таблицу:

$XY$	$X = 0$	$X = 1$	$X = 3$	$X = 4$
$Y = -1$	$0 \cdot (-1) = 0$	$1 \cdot (-1) = -1$	$3 \cdot (-1) = -3$	$4 \cdot (-1) = -4$
	0,1	0	0,1	0,1
$Y = 0$	$0 \cdot 0 = 0$	$1 \cdot 0 = 0$	$3 \cdot 0 = 0$	$4 \cdot 0 = 0$
	0,1	0,1	0,1	0,1
$Y = 1$	$0 \cdot 1 = 0$	$1 \cdot 1 = 1$	$3 \cdot 1 = 3$	$4 \cdot 1 = 4$
	0,1	0,1	0,1	0

Для вычисления  $E(XY)$  просуммируем произведения полученных значений и соответствующих им вероятностей:

$$\begin{aligned} E(XY) &= 0 \cdot 0,1 + (-1) \cdot 0 + (-3) \cdot 0,1 + (-4) \cdot 0,1 + 0 \cdot 0,1 + \\ &+ 0 \cdot 0,1 + 0 \cdot 0,1 + 0 \cdot 0,1 + 1 \cdot 0,1 + 3 \cdot 0,1 + 4 \cdot 0 = -0,3. \end{aligned}$$

Чтобы найти  $E(X)$  и  $E(Y)$ , необходимо составить распределения для  $X$  и для  $Y$ , как мы это уже делали в примере 9.44.

Для  $X$  имеем

Значения $x$	$X = 0$	$X = 1$	$X = 3$	$X = 4$
Вероятности $p_i$	0,3	0,2	0,3	0,2

$$E(X) = 0 \cdot 0,3 + 1 \cdot 0,2 + 3 \cdot 0,3 + 4 \cdot 0,2 = 1,9.$$

Для  $Y$  имеем

Значения $Y$	$Y = -1$	$Y = 0$	$Y = 1$
Вероятности $p_j$	0,3	0,4	0,3

$$E(Y) = -1 \cdot 0,3 + 0 \cdot 0,4 + 1 \cdot 0,3 = 0.$$

Теперь ответим на вопрос задачи:

$$\text{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = -0,3 - 1,9 \cdot 0 = -0,3.$$

Ответ:  $\text{cov}(X, Y) = -0,3$ .

---

В рассмотренном примере ковариация величин  $X$  и  $Y$  не равна нулю, значит, величины  $X$  и  $Y$  являются зависимыми.

Если известен закон распределения дискретной двумерной величины  $(X, Y)$ , то, вычислив ковариацию величин  $X$  и  $Y$ , можно найти для них и коэффициент корреляции по известной формуле

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)},$$

где  $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$ ,  $\sigma(Y) = \sqrt{D(Y)}$ .



### 9.4.2. Непрерывные многомерные случайные величины

Как и прежде, при рассмотрении непрерывных многомерных величин мы ограничимся двумерным случаем. Если распределения величин  $X$  и  $Y$  непрерывны, то двумерная величина  $(X, Y)$  определяется как непрерывная и задается с помощью плотности вероятности — интегрируемой функции  $f_{X,Y}(x, y)$ , удовлетворяющей условию

$$P((X, Y) \in G) = \iint_G f_{X,Y}(x, y) dx dy.$$

Здесь  $G$  — некоторая область плоскости  $xOy$ , вероятность попадания в которую точки  $(X, Y)$  и вычисляют с помощью двойного интеграла.

Функция распределения двумерной непрерывной величины  $F_{X,Y}(x, y)$  определяется стандартно условием  $F_{X,Y}(x, y) = P(X < x, Y < y)$  и через плотность вероятности выражается как

$$F_{X,Y}(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f_{X,Y}(s, t) ds dt.$$

Для плотности вероятности двумерной  $f_{X,Y}(x, y)$  непрерывной случайной величины  $(X, Y)$  имеют место следующие свойства:

- 1)  $f_{X,Y}(x, y) \geq 0$ ;
- 2)  $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x, y) dx dy = 1$  (свойство нормированности плотности вероятности);
- 3)  $f_{X,Y}(x, y) = \frac{\partial^2 F_{X,Y}(x, y)}{\partial x \partial y}$ .

Для непрерывной двумерной случайной величины  $(X, Y)$  ее компоненты  $X$  и  $Y$  являются непрерывными величинами, и плотности вероятностей для них находят по формулам

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) dy; \quad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) dx.$$

#### Пример 9.48

Плотность вероятности непрерывной двумерной случайной величины  $(X, Y)$  имеет вид

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} a(x+y), & 0 \leq x \leq 5, 0 \leq y \leq 5, \\ 0, & \text{в остальных точках.} \end{cases}$$

Найдем значение параметра  $a$  и плотность вероятности величины  $X$ .

*Решение*

Для того чтобы найти параметр плотности вероятности, необходимо использовать свойство 2 (нормированности плотности).

С учетом данных условия задачи имеем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x, y) dx dy = \int_0^5 \int_0^5 a(x+y) dx dy = a \int_0^5 dx \left( \int_0^5 (x+y) dy \right) =$$



$$= a \int_0^5 \left( xy + \frac{y^2}{2} \right) \Big|_0^5 dx = a \int_0^5 \left( 5x + \frac{25}{2} \right) dx = a \left( 5 \cdot \frac{x^2}{2} + \frac{25}{2} x \right) \Big|_0^5 = a \left( \frac{125}{2} + \frac{125}{2} \right) = 125a.$$

$$125a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{125}.$$

Для того чтобы найти плотность вероятности величины  $X$ , воспользуемся условием

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) dy.$$

С учетом данных условия задачи и найденного значения параметра  $a = \frac{1}{125}$  получим

$$f_X(x) = \int_0^5 \frac{1}{125} (x + y) dy = \frac{1}{125} \left( xy + \frac{y^2}{2} \right) \Big|_0^5 = \frac{1}{125} \left( 5x + \frac{25}{2} \right) = \frac{x}{25} + \frac{1}{10} = 0,04x + 0,1.$$

$$\text{Ответ: } a = \frac{1}{125}, f_X(x) = \begin{cases} 0,04x + 0,1, & 0 \leq x \leq 5, \\ 0, & \text{в остальных точках.} \end{cases}$$

Понятно, что, имея возможность определить вид плотности вероятности отдельно для величин  $X$  и  $Y$ , дальше можно вычислять их математические ожидания и дисперсии, а также решать задачи, связанные вероятностями попадания в определенные области значений этих величин.

#### Пример 9.49

Плотность вероятности непрерывной двумерной случайной величины  $(X, Y)$  имеет вид

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{125} \cdot (x + y), & 0 \leq x \leq 5, 0 \leq y \leq 5, \\ 0, & \text{в остальных точках.} \end{cases}$$

Найдем математическое ожидание  $E(X)$  и  $P(X > 1)$ .

*Решение*

Для непрерывной величины  $X$  математическое ожидание вычисляют по формуле

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx.$$

Особенность нашего случая состоит в том, что  $X$  — одна из компонент случайной величины  $(X, Y)$ , поэтому ее плотность вероятности должна быть найдена из условия

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) dy.$$

Мы это уже сделали в предыдущем примере, поэтому воспользуемся полученным результатом

$$f_X(x) = \begin{cases} 0,04x + 0,1, & 0 \leq x \leq 5, \\ 0, & \text{в остальных точках} \end{cases}$$

и вычислим математическое ожидание величины  $X$ :

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_0^5 x \cdot (0,04x + 0,1) dx = \int_0^5 (0,04x^2 + 0,1x) dx = \\ &= 0,04 \cdot \frac{x^3}{3} + 0,1 \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^5 = \frac{1}{3} + \frac{25}{20} = \frac{20 + 75}{60} = \frac{95}{60} = \frac{19}{12} = 1,583. \end{aligned}$$



Ответ на второй вопрос задачи находим, используя определение плотности вероятности:  $P(x_1 < X < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$ , которое в нашем случае примет вид

$$\begin{aligned} P(X > 1) &= P(1 < X < +\infty) = \int_1^{+\infty} f(x)dx = \int_1^5 (0,04x + 0,1)dx = \\ &= 0,04 \cdot \frac{x^2}{2} + 0,1x \Big|_1^5 = (0,02 \cdot 25 + 0,5) - (0,02 + 0,1) = 1 - 0,12 = 0,88. \end{aligned}$$

Ответ:  $E(X) = 1,583$ ;  $P(X > 1) = 0,88$ .

Если двумерная непрерывная величина  $(X, Y)$  равномерно распределена в некоторой области  $G$ , то ее плотность вероятности имеет вид

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{S_G}, & (x, y) \in G, \\ 0, & \text{в остальных точках,} \end{cases}$$

где  $S_G$  — площадь области  $G$ .

Для равномерно распределенной в области  $G$  двумерной величины  $(X, Y)$  всегда выполнено условие

$$P((X, Y) \in D) = \frac{S_D}{S_G},$$

если  $D$  является некоторой частью области  $G$ , где  $S_D, S_G$  — площади области  $D$  и  $G$ .

### Пример 9.50

Непрерывная двумерная случайная величина  $(X, Y)$  равномерно распределена в области  $G: \{0 \leq x \leq 5; 0 \leq y \leq 5\}$ . Найдём плотность вероятности этой величины и  $P(X + 1 > Y)$ .

*Решение*

Область  $G$  является квадратом со стороной 5 см. Площадь такого квадрата равна 25 см<sup>2</sup>. Поэтому плотность вероятности сразу может быть записана как

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{25}, & (x, y) \in G, \\ 0, & \text{в остальных точках.} \end{cases}$$

Для ответа на второй вопрос задачи нам нужен рисунок (рис. 9.19).

Фоном выделена область  $D$ , отвечающая условию  $X + 1 > Y$ . Так как величина  $(X, Y)$  равномерно распределена в области  $G$ , то ответ можно искать по формуле

$$P((X, Y) \in D) = \frac{S_D}{S_G}:$$

$$P(X + 1 > Y) = \frac{25 - \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4}{25} = \frac{17}{25} = 0,68.$$

Площадь области  $D$  (в числителе дроби) мы нашли, вычитая из площади квадрата площадь прямоугольного треугольника, катеты которого равны 4 см.



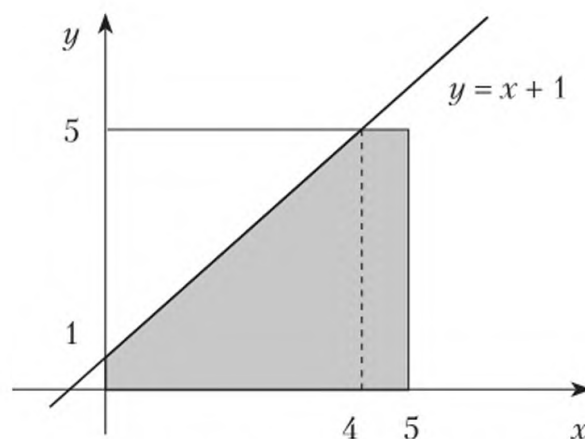


Рис. 9.19. График к примеру 9.50

Ответ:  $P(X + 1 > Y) = 0,68$ .

Для непрерывной двумерной случайной величины  $(X, Y)$  составляющие величины  $X$  и  $Y$  могут быть независимыми. Независимость величин  $X$  и  $Y$ , образующих двумерную величину  $(X, Y)$ , определяется выполнением равенств

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$$

или

$$F_{X,Y}(x,y) = F_X(x)F_Y(y).$$

В последнем условии функции распределения  $F_X(x) = P(X > x)$  и  $F_Y(y) = P(Y > y)$  находят по функции распределения  $F_{X,Y}(x,y) = P(X > x, Y > y)$ , используя пределы

$$\lim_{y \rightarrow \infty} F_{X,Y}(x,y) = F_X(x) \text{ и } \lim_{x \rightarrow \infty} F_{X,Y}(x,y) = F_Y(y).$$

### Пример 9.51

Известно, что величины  $X$  и  $Y$  независимы и равномерно распределены на отрезках  $[3; 5]$  и  $[2; 10]$  соответственно. Найдём плотность вероятности и функцию распределения величины  $(X, Y)$ .

*Решение*

Используя условие равномерной распределённости величин  $X$  и  $Y$ , получим сразу для них плотности вероятностей и функции распределения (см. подпараграф 9.3.4):

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{5-3} = \frac{1}{2}, & 3 \leq x \leq 5, \\ 0, & \text{в остальных точках;} \end{cases} \quad F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 3, \\ \frac{x-3}{5-3} = \frac{x-3}{2}, & 3 \leq x \leq 5, \\ 1, & x > 5; \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{10-2} = \frac{1}{8}, & 2 \leq y \leq 10, \\ 0, & \text{в остальных точках;} \end{cases} \quad F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 2, \\ \frac{y-2}{10-2} = \frac{y-2}{8}, & 2 \leq y \leq 10, \\ 1, & y > 10. \end{cases}$$



Из условия независимости находим

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{16}, & 3 \leq x \leq 5, 2 \leq y \leq 10, \\ 0, & \text{в остальных точках;} \end{cases}$$

$$F_{X,Y}(x,y) = F_X(x)F_Y(y) = \begin{cases} 0, & x < 3, y < 2, \\ \frac{x-3}{2} \cdot \frac{y-2}{8}, & 3 \leq x \leq 5, 2 \leq y \leq 10, \\ 1, & x > 5, y > 10. \end{cases}$$

### 9.4.3. Числовые характеристики двумерной случайной величины

В качестве характеристик двумерного распределения используют математические ожидания некоторых функций от рассматриваемых случайных величин.

Пусть заданы плотность вероятности  $f_{X,Y}(x,y)$  непрерывной двумерной случайной величины  $(X, Y)$  и некоторая функция двух аргументов  $z = \varphi(x, y)$ , под действием которой формируется новая величина  $Z = \varphi(X, Y)$ . Тогда для этой новой величины математическое ожидание находят по формуле

$$E(Z) = E(\varphi(X, Y)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x, y) f_{X,Y}(x, y) dx dy.$$

В частности, если  $Z = (X - E(X)) \cdot (Y - E(Y))$ , то

$$E(Z) = E((X - E(X)) \cdot (Y - E(Y))) = \text{cov}(X, Y),$$

и тогда

$$\text{cov}(X, Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(X))(y - E(Y)) f_{X,Y}(x, y) dx dy.$$

#### Пример 9.52

Плотность вероятности непрерывной двумерной случайной величины  $(X, Y)$  имеет вид

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{125} \cdot (x+y), & 0 \leq x \leq 5, 0 \leq y \leq 5, \\ 0, & \text{в остальных точках.} \end{cases}$$

Найдем ковариацию величин  $X$  и  $Y$ .

*Решение*

Для того чтобы использовать вышеприведенную формулу для вычисления ковариации, необходимо найти математические ожидания  $E(X)$  и  $E(Y)$ , а для этого, в свою очередь, нам понадобятся соответствующие плотности вероятностей  $f_X(x)$  и  $f_Y(y)$ . Частично мы эту задачу решили (см. примеры 9.48 и 9.49), поэтому будем использовать готовые результаты из этих примеров. Итак, имеем

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y) dy = \begin{cases} 0,04x + 0,1, & 0 \leq x \leq 5, \\ 0, & \text{в остальных точках} \end{cases}$$

$$\text{и } E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx = \int_0^5 x(0,04x + 0,1) dx = \frac{19}{12} = 1,58\bar{3}.$$



Аналогично для  $Y$  получим

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x, y) dx = \begin{cases} 0,04y + 0,1, & 0 \leq y \leq 5, \\ 0, & \text{в остальных точках} \end{cases}$$

$$\text{и } E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y) dy = \int_0^5 y \cdot (0,04y + 0,1) dy = \frac{19}{12} = 1,583.$$

Теперь ответим на вопрос задачи:

$$\begin{aligned} \text{cov}(X, Y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(X))(y - E(Y)) f_{X,Y}(x, y) dx dy = \\ &= \int_0^5 \int_0^5 \left(x - \frac{19}{12}\right) \cdot \left(y - \frac{19}{12}\right) \cdot \frac{1}{125} (x + y) dx dy = \\ &= \int_0^5 \int_0^5 xy \cdot \frac{1}{125} (x + y) dx dy - \frac{19}{12} \cdot \frac{19}{12} = \frac{1}{125} \int_0^5 \int_0^5 (x^2 y + xy^2) dx dy - \frac{361}{144} = \\ &= \frac{1}{125} \int_0^5 dx \left( \frac{x^2 y^2}{2} + \frac{xy^3}{3} \right) \Big|_0^5 - \frac{361}{144} = \frac{1}{125} \int_0^5 \left( \frac{25x^2}{2} + \frac{125x}{3} \right) dx - \frac{361}{144} = \\ &= \frac{1}{125} \left( \frac{25x^3}{6} + \frac{125x^2}{6} \right) \Big|_0^5 - \frac{361}{144} = \frac{1}{125} \left( \frac{25 \cdot 125}{6} + \frac{125 \cdot 25}{6} \right) - \frac{361}{144} = \\ &= \frac{25}{3} - \frac{361}{144} = \frac{25 \cdot 48 - 361}{144} = \frac{839}{144} = 5,826. \end{aligned}$$

В процессе решения мы использовали равенство

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(X))(y - E(Y)) f_{X,Y}(x, y) dx dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xy f_{X,Y}(x, y) dx dy - E(X)E(Y),$$

полученное на основе преобразований под знаком двойного интеграла и выражений для математических ожиданий непрерывных случайных величин  $X$  и  $Y$ :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{X,Y}(x, y) dx dy; \quad E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} y f_{X,Y}(x, y) dx dy.$$

Ответ:  $\text{cov}(X, Y) = 5,826$ .

При известной ковариации случайных величин вычисляется и их коэффициент корреляции по известной формуле

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)},$$

где  $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$ ,  $\sigma(Y) = \sqrt{D(Y)}$ , а дисперсии определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} D(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(X))^2 f_{X,Y}(x, y) dx dy; \\ D(Y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (y - E(Y))^2 f_{X,Y}(x, y) dx dy. \end{aligned}$$

При решении задач из финансовых приложений часто используются ковариационная и корреляционная матрицы, которые в двумерном случае имеют вид



$$C(X, Y) = \begin{pmatrix} D(X) & \text{cov}(X, Y) \\ \text{cov}(X, Y) & D(Y) \end{pmatrix} \text{ и } R(X, Y) = \begin{pmatrix} 1 & \rho(X, Y) \\ \rho(X, Y) & 1 \end{pmatrix}.$$

Эти матрицы являются симметричными, а их определители — неотрицательны, более того, для корреляционной матрицы определитель всегда  $\leq 1$ .

При изучении числовых характеристик двумерной случайной величины  $(X, Y)$  отдельное внимание должно быть уделено условным характеристикам, связанным с условными распределениями. Рассмотрим эти понятия подробнее.

Пусть задана двумерная случайная величина  $(X, Y)$ . Мы можем изучать одну из ее компонент при условии, что другая компонента приняла значение из определенного числового интервала (или даже просто определенное числовое значение). В этом случае говорят об *условном распределении*. Рассмотрим сначала ситуацию, когда  $(X, Y)$  — дискретная случайная величина с известным законом распределения

$(X, Y)$	$X = x_1$	$X = x_2$	...	$X = x_n$
$Y = y_1$	$p_{11}$	$p_{21}$		$p_{n1}$
$Y = y_2$	$p_{12}$	$p_{22}$		$p_{n2}$
...	...	...		...
$Y = y_k$	$p_{1k}$	$p_{2k}$		$p_{nk}$

где  $p_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j)$  и  $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k p_{ij} = 1$ .

*Условное распределение* формируется под влиянием дополнительного условия на одну из компонент и является случайной величиной со своим, условным, законом распределения. В этом законе распределения должны быть указаны все возможные при дополнительном условии значения и соответствующие этим значениям вероятности, которые в таком случае вычисляются как условные:

$$P(X = x_i | Y = y_j) = \frac{P(X = x_i, Y = y_j)}{P(Y = y_j)} = p_{ij} / \sum_i p_{ij},$$

если дополнительное условие связано с величиной  $Y$ , или

$$P(Y = y_j | X = x_i) = \frac{P(X = x_i, Y = y_j)}{P(X = x_i)} = p_{ij} / \sum_j p_{ij},$$

если дополнительное условие связано с величиной  $X$ .

### Пример 9.53

Дано распределение двумерной дискретной случайной величины  $(X, Y)$ :

$(X, Y)$	$X = -1$	$X = 0$	$X = 1$	$X = 2$
$Y = -1$	0	0,1	0,1	0,1
$Y = 0$	0,1	0	0,1	0,1
$Y = 1$	0,1	0,1	0	0,2



Составим условные законы распределений для величин  $Z = (Y | |X| < 2)$  и  $T = (X | Y \geq 0)$ .

*Решение*

Для того чтобы составить закон распределения величины  $Z = (Y | |X| < 2)$ , надо считать условие  $|X| < 2$  выполненным, при заданном законе распределения этому условию отвечают значения  $X = -1$ ,  $X = 0$  и  $X = 1$ .

Можем найти и  $P(|X| < 2)$ , просуммировав все соответствующие вероятности:

$$P(|X| < 2) = 0 + 0,1 + 0,1 + 0,1 + 0 + 0,1 + 0,1 + 0,1 + 0 = 0,6.$$

Условие  $|X| < 2$  для заданной двумерной величины  $(X, Y)$  не ограничивает возможных значений для  $Y$ , поэтому среди возможных значений для  $Z = (Y | |X| < 2)$  мы должны указать все возможные значения  $Y$ . Соответствующие определенным значениям вероятности мы вычисляем как условные:

$$\begin{aligned} P(Y = -1 | |X| < 2) &= \frac{P(Y = -1 \text{ и } |X| < 2)}{P(|X| < 2)} = \\ &= \frac{P(Y = -1, X = -1) + P(Y = -1, X = 0) + P(Y = -1, X = 1)}{P(|X| < 2)} = \frac{0 + 0,1 + 0,1}{0,6} = \frac{0,2}{0,6} = \frac{1}{3}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(Y = 0 | |X| < 2) &= \frac{P(Y = 0 \text{ и } |X| < 2)}{P(|X| < 2)} = \\ &= \frac{P(Y = 0, X = -1) + P(Y = 0, X = 0) + P(Y = 0, X = 1)}{P(|X| < 2)} = \frac{0,1 + 0 + 0,1}{0,6} = \frac{0,2}{0,6} = \frac{1}{3}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(Y = 1 | |X| < 2) &= \frac{P(Y = 1 \text{ и } |X| < 2)}{P(|X| < 2)} = \\ &= \frac{P(Y = 1, X = -1) + P(Y = 1, X = 0) + P(Y = 1, X = 1)}{P(|X| < 2)} = \frac{0,1 + 0,1 + 0}{0,6} = \frac{0,2}{0,6} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Таким образом, условный закон распределения  $Z = (Y | |X| < 2)$  имеет вид

Значения $Z = (Y    X  < 2)$	-1	0	1
Вероятности	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

Необходимое для закона распределения условие  $\sum_i p_i = 1$  выполнено.

Аналогично поступим и в случае  $T = (X | Y \geq 0)$ .

Будем считать условие  $Y \geq 0$  выполненным. Ему соответствуют две нижние строки исходной таблицы. Тогда

$$P(Y \geq 0) = 0,1 + 0 + 0,1 + 0,1 + 0,1 + 0,1 + 0 + 0,2 = 0,7.$$

Заданное условие  $Y \geq 0$  не ограничивает возможных значений  $X$ , но для нового закона соответствующие вероятности будем считать как условные:

$$\begin{aligned} P(X = -1 | Y \geq 0) &= \frac{P(X = -1 \text{ и } Y \geq 0)}{P(Y \geq 0)} = \\ &= \frac{P(X = -1, Y = 0) + P(X = -1, Y = 1)}{P(Y \geq 0)} = \frac{0,1 + 0,1}{0,7} = \frac{0,2}{0,7} = \frac{2}{7}; \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 P(X=0|Y \geq 0) &= \frac{P(X=0 \text{ и } Y \geq 0)}{P(Y \geq 0)} = \\
 &= \frac{P(X=0, Y=0) + P(X=0, Y=1)}{P(Y \geq 0)} = \frac{0+0,1}{0,7} = \frac{0,1}{0,7} = \frac{1}{7}; \\
 P(X=1|Y \geq 0) &= \frac{P(X=1 \text{ и } Y \geq 0)}{P(Y \geq 0)} = \\
 &= \frac{P(X=1, Y=0) + P(X=1, Y=1)}{P(Y \geq 0)} = \frac{0,1+0}{0,7} = \frac{0,1}{0,7} = \frac{1}{7}; \\
 P(X=2|Y \geq 0) &= \frac{P(X=2 \text{ и } Y \geq 0)}{P(Y \geq 0)} = \\
 &= \frac{P(X=2, Y=0) + P(X=2, Y=1)}{P(Y \geq 0)} = \frac{0,1+0,2}{0,7} = \frac{0,3}{0,7} = \frac{3}{7}.
 \end{aligned}$$

Таким образом, условный закон распределения величины  $T = (X|Y \geq 0)$  имеет вид

Значения $T = (X Y \geq 0)$	-1	0	1	2
Вероятности	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{3}{7}$

и условие  $\sum_i p_i = 1$  выполнено.

Особый интерес представляют условные распределения, в которых заданное условие связано с одним из значений величины.

#### Пример 9.54

Дано распределение двумерной дискретной случайной величины  $(X, Y)$ :

$(X, Y)$	$X = -1$	$X = 0$	$X = 1$	$X = 2$
$Y = -1$	0	0,1	0,1	0,1
$Y = 0$	0,1	0	0,1	0,1
$Y = 1$	0,1	0,1	0	0,2

Составим условный закон распределения для величины  $Z = (Y|X = -1)$ .

*Решение*

Поступая так, как показано в примере 9.53, без труда получаем соответствующее распределение:

Значения $Z = (Y X = -1)$	-1	0	1
Вероятности	$\frac{0}{0,2}$	$\frac{0,1}{0,2}$	$\frac{0,1}{0,2}$

Значения, для которых возможная вероятность равна 0, из закона распределения исключаем, поэтому в итоге будем иметь:

Значения $Z = (Y X = -1)$	0	1
Вероятности	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$



Новая величина имеет свои числовые характеристики — математическое ожидание и дисперсию, которые легко вычислить:

$$E(Y|X=-1) = 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = 0,5;$$

$$D(Y|X=-1) = 0^2 \cdot \frac{1}{2} + 1^2 \cdot \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} = 0,25.$$

Понятно, что при изменении условия изменится и распределение, а значит, и числовые характеристики. Поэтому условные математические ожидания и условные дисперсии ведут себя как случайные величины  $E(Y|X)$  и  $D(Y|X)$  соответственно, у которых есть свои законы распределений.

### Пример 9.55

Дано распределение двумерной дискретной случайной величины  $(X, Y)$ :

$(X, Y)$	$X = -1$	$X = 0$	$X = 1$	$X = 2$
$Y = -1$	0	0,1	0,1	0,1
$Y = 0$	0,1	0	0,1	0,1
$Y = 1$	0,1	0,1	0	0,2

Составим законы распределений  $E(Y|X)$  и  $D(Y|X)$ .

*Решение*

Чтобы составить искомые законы распределений  $E(Y|X)$  и  $D(Y|X)$ , необходимо перебрать все условия на возможные значения для  $X$ , задавая условные распределения и вычисляя их математические ожидания и дисперсии. Полученные значения этих числовых характеристик и будут возможными значениями  $E(Y|X)$  и  $D(Y|X)$ , а соответствующие вероятности будут определяться вероятностями условий.

Часть этой работы мы уже выполнили в примере 9.54, поэтому воспользуемся результатом:

Значения $Z = (Y X = -1)$	0	1
Вероятности	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

$$P(X = -1) = 0,2; E(Y|X = -1) = \frac{1}{2}; D(Y|X = -1) = \frac{1}{4}.$$

Поступая аналогично для условий  $X = 0$ ,  $X = 1$ ,  $X = 2$ , получим

Значения $Z = (Y X = 0)$	-1	1
Вероятности	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

$$P(X = 0) = 0,2; E(Y|X = 0) = 0; D(Y|X = 0) = 1;$$

Значения $Z = (Y X = 1)$	-1	0
Вероятности	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$



$$P(X=1)=0,2; E(Y|X=1)=-\frac{1}{2}; D(Y|X=1)=\frac{1}{4}.$$

Значения $Z=(Y X=2)$	-1	0	1
Вероятности	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$

$$P(X=2)=0,4; E(Y|X=2)=\frac{1}{4}; D(Y|X=2)=\frac{11}{16}.$$

Теперь у нас есть все возможные значения для условных математических ожиданий и условных дисперсий, поэтому составим искомые законы распределений.

Для условного математического ожидания

Значения $E(Y X)$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
Вероятности	0,2	0,2	0,4	0,2

Для условной дисперсии

Значения $D(Y X)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{11}{16}$	1
Вероятности	0,4	0,2	0,4

В таблице учтено, что значение, равное  $\frac{1}{4}$ , условная дисперсия принимает в двух случаях: при  $X=1$  (с вероятностью  $P(X=1)=0,2$ ) и при  $X=-1$  (с вероятностью  $P(X=-1)=0,2$ ). Соответствующие этим условиям вероятности необходимо сложить:  $P(D(Y|X)=0,25)=0,2+0,2=0,4$ .

Еще раз подчеркнем, что условное математическое ожидание  $E(Y|X)$  и условная дисперсия  $D(Y|X)$  являются случайными величинами, следовательно, для них можно находить числовые характеристики — математические ожидания и дисперсии.

Перечислим свойства условного математического ожидания:

- 1)  $E(c|X)=c$ , где  $c=\text{const}$ ;
- 2)  $E(aY+b|X)=aE(Y|X)+b$ , где  $a$  и  $b$  — постоянные;
- 3)  $E(X+Y|Z)=E(X|Z)+E(Y|Z)$ ;
- 4) для независимых величин  $X$  и  $Y$  выполняются равенства  $E(Y|X)=E(Y)$  и  $E(X|Y)=E(X)$ .

Имеют место и такие равенства:

$$E(X)=E(E(X|Y)); E(Y)=E(E(Y|X)),$$

т.е. математическое ожидание величины может быть найдено как математическое ожидание от условного математического ожидания.

Для решения задач будет полезно и такое равенство:

$$E(XY)=E(X \cdot E(Y|X))=E(Y \cdot E(X|Y)).$$



Для условной дисперсии имеют место следующие свойства:

- 1)  $D(c|X) = 0$ , где  $c = \text{const}$ ;
- 2)  $D(aX + b|Y) = a^2 D(X|Y)$ , где  $a$  и  $b$  — постоянные;
- 3) для независимых величин  $X$  и  $Y$  выполняются равенства  $D(X|Y) = D(X)$  и  $D(Y|X) = D(Y)$ .

Кроме того, имеет место формула полной дисперсии:

$$D(X) = E(D(X|Y)) + D(E(X|Y));$$

$$D(Y) = E(D(Y|X)) + D(E(Y|X)).$$

Для непрерывной двумерной случайной величины  $(X, Y)$  с известной плотностью вероятности  $f(x, y)$  условные распределения определяются на основе условных плотностей вероятностей:

$$f_{X|Y}(x|y) = f(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)}; \quad f_{Y|X}(y|x) = f(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)}.$$

Если случайные величины  $X$  и  $Y$  независимы, то их условные плотности равны безусловным:

$$f_{X|Y}(x|y) = f_X(x); \quad f_{Y|X}(y|x) = f_Y(y).$$

Условное математическое ожидание для непрерывной величины  $Y$  при условии  $X = x$  определяется соответствующим интегралом:

$$E(Y|X = x) = \int_{-\infty}^{+\infty} y \cdot f_{Y|X}(y|x) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} y \cdot \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_X(x)} dy.$$

Из общей теории известно, что это условное математическое ожидание определяет *регрессию*  $Y$  по  $X$ .

Аналогично можно определять и регрессию  $X$  по  $Y$ .

Условная дисперсия для непрерывной величины  $Y$  при условии  $X = x$  определяется соответствующим интегралом:

$$\begin{aligned} D(Y|X = x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} (y - E(Y|X = x))^2 \cdot f_{Y|X}(y|x) dy = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} (y - E(Y|X = x))^2 \cdot \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_X(x)} dy. \end{aligned}$$

Важным примером непрерывной двумерной случайной величины  $(X, Y)$  является двумерное нормальное распределение.

Для *двумерного нормального распределения*  $(X, Y)$  плотность вероятности имеет вид

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}} \cdot e^{-\frac{q(x, y)}{2}},$$

где  $q(x, y) = \frac{1}{1-\rho^2} \left( \frac{(x-\mu_X)^2}{\sigma_X^2} - \frac{2\rho(x-\mu_X)(y-\mu_Y)}{\sigma_X\sigma_Y} + \frac{(y-\mu_Y)^2}{\sigma_Y^2} \right)$  — квадратичная форма.



Параметры этого распределения определяют и его числовые характеристики:

$\mu_X = E(X)$  — математическое ожидание величины  $X$ ;

$\mu_Y = E(Y)$  — математическое ожидание величины  $Y$ ;

$\sigma_X = \sigma(X) = \sqrt{D(X)}$  — среднее квадратическое отклонение величины  $X$ ;

$\sigma_Y = \sigma(Y) = \sqrt{D(Y)}$  — среднее квадратическое отклонение величины  $Y$ ;

$\rho = \rho(X, Y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$  — коэффициент корреляции величин  $X$  и  $Y$ .

Стандартно непрерывное двумерное распределение записывают следующим образом:

$$(X, Y) \sim N(\mu_X, \mu_Y, \sigma_X^2, \sigma_Y^2, \rho).$$

Квадратичная форма  $q(x, y)$  может быть представлена в матричном виде:

$$q(x, y) = \begin{pmatrix} x - \mu_X \\ y - \mu_Y \end{pmatrix}^T \cdot C^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x - \mu_X \\ y - \mu_Y \end{pmatrix},$$

где  $C^{-1}$  — матрица, обратная к ковариационной матрице:

$$C = C(X, Y) = \begin{pmatrix} D(X) & \text{cov}(X, Y) \\ \text{cov}(X, Y) & D(Y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_X^2 & \text{cov}(X, Y) \\ \text{cov}(X, Y) & \sigma_Y^2 \end{pmatrix}.$$

Важно отметить, что компоненты  $X$  и  $Y$  двумерной нормальной величины  $(X, Y)$  имеют нормальные распределения:  $X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$ ;  $Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$ .

Более того, условные распределения тоже подчиняются нормальному закону:

$$\begin{aligned} (X|Y=y) &\sim N\left(\mu_X + \rho \frac{\sigma_X}{\sigma_Y}(y - \mu_Y), \sigma_X^2(1 - \rho^2)\right); \\ (Y|X=x) &\sim N\left(\mu_Y + \rho \frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x - \mu_X), \sigma_Y^2(1 - \rho^2)\right). \end{aligned}$$

Отсюда заключаем, что

$$E(X|Y=y) = \mu_X + \rho \frac{\sigma_X}{\sigma_Y}(y - \mu_Y); \quad D(X|Y=y) = \sigma_X^2(1 - \rho^2);$$

$$E(Y|X=x) = \mu_Y + \rho \frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x - \mu_X); \quad D(Y|X=x) = \sigma_Y^2(1 - \rho^2).$$

Доказательство этих красивых зависимостей выходит за рамки нашего курса.

#### 9.4.4. Функции от случайных величин

Многие задачи теории вероятностей и математической статистики предполагают изучение суммы независимых величин. Остановимся подробнее на задачах нахождения и изучения закона распределения суммы большого числа независимых слагаемых.

Пусть  $X$  и  $Y$  — две дискретные независимые величины, формирующиеся в результате некоторого испытания, и пусть  $Z = X + Y$ .



Возможные значения для величины  $Z = z$  определяются всеми возможными значениями  $x + y$  значений величин  $X = x$  и  $Y = y$ . Так как величины  $X$  и  $Y$  независимы, выполняется условие

$$P(Z = z) = P(Z = x + y) = P(X = x, Y = y) = P(X = x) \cdot P(Y = y).$$

Принимая во внимание, что  $y = z - x$ , можно записать

$$P(Z = z) = \sum_{x: x+y=z} P(X = x) \cdot P(Y = z - x).$$

Суммирование ведется по всем значениям  $x$  при выполненном условии  $y = z - x$ .

При аналогичном условии относительно  $P(X = z - y)$  можно записать

$$P(Z = z) = \sum_{y: x+y=z} P(Y = y) \cdot P(X = z - y).$$

Суммирование ведется по всем значениям  $y$  при выполненном условии  $x = z - y$ .

Полученные равенства определяют закон распределения  $Z = X + Y$ .

Мы уже рассматривали операции с независимыми дискретными величинами, поэтому просто напомним, как найти закон распределения суммы независимых величин, предложив для этого вспомогательную таблицу несколько иного вида.

#### Пример 9.56

Даны законы распределений независимых величин  $X$  и  $Y$ :

Значение величины $X (x_i)$	1	2	Значение величины $Y (y_j)$	-1	0
Вероятность $p_i$	0,3	0,7	Вероятность $p_j$	0,2	0,8

Составим законы распределения для их суммы  $Z = X + Y$ .

*Решение*

Составим вспомогательную таблицу, в которую включим данные распределения  $X$  и  $Y$ :

$Z = X + Y$		0,3	0,7
		$X = 1$	$X = 2$
0,2	$Y = -1$	$Z = 1 + (-1) = 0$	$Z = 2 + (-1) = 1$
		$0,3 \cdot 0,2 = 0,06$	$0,7 \cdot 0,2 = 0,14$
0,8	$Y = 0$	$Z = 1 + 0 = 1$	$Z = 2 + 0 = 2$
		$0,3 \cdot 0,8 = 0,24$	$0,7 \cdot 0,8 = 0,56$

Заполняем таблицу, вычисляя все возможные значения сумм значений  $X$  и  $Y$  (выделено фоном), а соответствующие найденным значениям вероятности находим, используя условие независимости величин  $X$  и  $Y$ :

$$P(Z = z) = P(Z = x + y) = P(X = x, Y = y) = P(X = x) \cdot P(Y = y).$$



В итоге закон распределения величины  $Z = X + Y$  примет вид

Значение величины $Z = X + Y$	0	1	2
Вероятности	0,06	0,38	0,56

Поясним:

$$P(Z = X + Y = 0) = P(X = 1, Y = -1) = P(X = 1) \cdot P(Y = -1) = 0,3 \cdot 0,2 = 0,06;$$

$$\begin{aligned} P(Z = X + Y = 1) &= P(X = 1, Y = 0 \text{ или } X = 2, Y = -1) = \\ &= P(X = 1) \cdot P(Y = 0) + P(X = 2, Y = -1) = 0,3 \cdot 0,8 + 0,7 \cdot 0,2 = 0,38; \end{aligned}$$

$$P(Z = X + Y = 2) = P(X = 2, Y = 0) = P(X = 2) \cdot P(Y = 0) = 0,7 \cdot 0,8 = 0,56.$$

Условие на закон распределения выполнено: сумма всех вероятностей во второй строке равна 1.

При составлении итоговой таблицы мы учли, что значение, равное 1, величина  $Z$  принимает два раза, поэтому применили условие  $P(Z = z) = \sum_{x: x+y=z} P(X = x) \cdot P(Y = z - x)$ , проще говоря, сложили вероятности, соответствующие одинаковым значениям суммы.

Рассмотрим теперь случай непрерывных независимых величин  $X$  и  $Y$ . Если известна плотность вероятности  $f_{X,Y}(x, y)$  двумерной величины  $(X, Y)$ , то условие независимости принимает вид

$$f_{X,Y}(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y),$$

$$\text{где } f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) dy; \quad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) dx.$$

Для величины  $Z = X + Y$  плотность вероятности определяется условием

$$f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x, z-x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(z-y, y) dy,$$

которое для независимых величин примет вид

$$f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z-x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y) f_Y(y) dy.$$

### Пример 9.57

Найдем плотность вероятности суммы независимых величин  $X$  и  $Y$ , если известно, что  $X \sim N(1, 9)$ , а  $Y$  — равномерно распределена на отрезке  $[-2; 2]$ .

*Решение*

Для заданных величин найдем их плотности вероятностей:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot 3}} e^{-\frac{(x-1)^2}{18}}.$$

Мы использовали стандартный вид плотности вероятности нормально распределенной величины и заданные по условию примера параметры распределения:

$$E(X) = \mu = 1 \text{ и } \sigma = \sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{9} = 3.$$

Для равномерно распределенной на отрезке  $[-2; 2]$  величины  $Y$  плотность вероятности имеет вид



$$f_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < -2, \\ \frac{1}{4}, & -2 \leq y \leq 2, \\ 0, & y > 2. \end{cases}$$

Так как величины независимы, то для плотности вероятности их суммы  $Z = X + Y$  применим условие

$$f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y) \cdot f_Y(y) dy$$

и учтем, что  $f_Y(y) \neq 0$  только на отрезке  $[-2; 2]$ , поэтому получим

$$\begin{aligned} f_{X+Y}(z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y) \cdot f_Y(y) dy = \int_{-2}^2 \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(z-y-1)^2}{18}} dy = \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-2}^2 \frac{1}{3} \cdot e^{-\frac{(z-y-1)^2}{18}} dy. \end{aligned}$$

Последний интеграл вычисляем подстановкой  $y = z - 1 + 3t$ ,  $dy = 3dt$  при  $z = \text{const}$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{2+z-1}{3}}^{\frac{2-z+1}{3}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt &= \frac{1}{4} \left[ \Phi\left(\frac{2-z+1}{3}\right) + \Phi\left(\frac{2+z-1}{3}\right) \right] = \\ &= \frac{1}{4} \left[ \Phi\left(\frac{3-z}{3}\right) + \Phi\left(\frac{1+z}{3}\right) \right]. \end{aligned}$$

*Ответ:* плотность вероятности  $Z = X + Y$  для заданных независимых величин  $X$  и  $Y$  имеет вид  $f_{X+Y}(z) = \frac{1}{4} \left[ \Phi\left(\frac{3-z}{3}\right) + \Phi\left(\frac{1+z}{3}\right) \right]$ .

Интересен пример с суммой независимых равномерно распределенных на отрезке  $[0; 1]$  величин  $X_i$ . Приведем примеры графиков плотностей вероятностей таких сумм (рис. 9.20–9.22).

С увеличением количества слагаемых закон распределения их суммы неограниченно приближается к нормальному закону распределения. Эти закономерности имеют общий характер, устанавливаемый законом больших чисел и центральной предельной теоремой, рассматриваемыми далее. Наш пример дает наглядное представление о том, как это происходит.

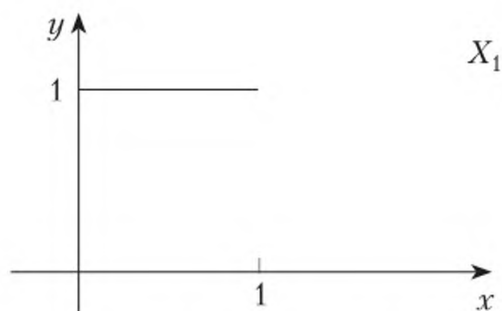


Рис. 9.20. График плотности вероятности равномерно распределенной случайной величины



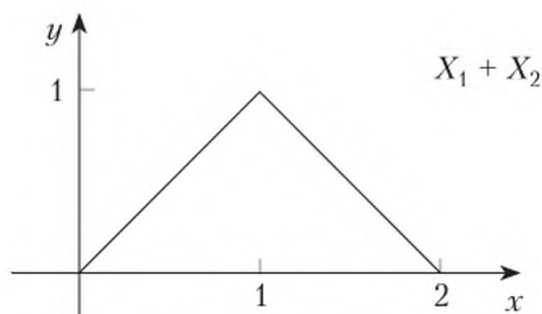


Рис. 9.21. График плотности вероятности суммы  $X_1 + X_2$

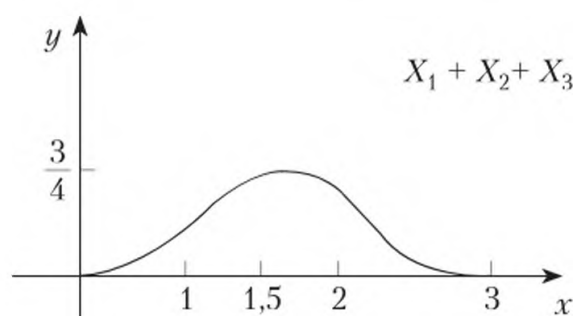


Рис. 9.22. График плотности вероятности суммы  $X_1 + X_2 + X_3$

## 9.5. Закон больших чисел и предельные теоремы

Закон больших чисел понимается как совокупность утверждений, в каждом из которых при различных условиях рассматривается факт приближения средних характеристик к некоторым определенным постоянным при неограниченно большом числе испытаний. Эти утверждения позволяют утверждать, что средний результат действия большого числа испытаний практически перестает быть случайным и его можно предсказать с достаточной определенностью.

### 9.5.1. Неравенство Маркова

Если случайная величина  $X$  принимает только неотрицательные значения и для нее существует математическое ожидание  $E(X)$ , то для любого числа  $\epsilon > 0$  имеет место неравенство

$$P(X \geq \epsilon) \leq \frac{E(X)}{\epsilon}.$$

Это неравенство называют *неравенством Маркова* и иногда записывают в другой форме:

$$P(X < \epsilon) \leq 1 - \frac{E(X)}{\epsilon}.$$

Неравенство Маркова позволяет получать первичные оценки на вероятности событий, связанных с тем, что значение случайной величины удовлетворяет известным ограничениям.



### Пример 9.58

Отделение банка обслуживает в среднем 100 клиентов в день. Оценим вероятность того, что за день в этом отделении банка будет обслужено не менее 150 клиентов.

*Решение*

Величина  $X$  — число клиентов, обслуживаемых банком за день, по условию задачи имеет математическое ожидание  $E(X) = 100$ . Для ответа на вопрос задачи применим

неравенство Маркова  $P(X \geq \epsilon) \leq \frac{E(X)}{\epsilon}$  при  $\epsilon = 150$ :

$$P(X \geq 150) \leq \frac{100}{150} = \frac{2}{3}.$$

*Ответ:* вероятность того, что за день в отделении банка будет обслужено не менее 150 клиентов, будет не более  $\frac{2}{3}$ .

Прямым следствием неравенства Маркова является *неравенство Чебышева*, которое выполняется для любой случайной величины  $X$ , имеющей математическое ожидание  $E(X)$  и дисперсию  $D(X)$ :

$$P(|X - E(X)| \geq \epsilon) \leq \frac{D(X)}{\epsilon^2}.$$

Как и в неравенстве Маркова,  $\epsilon$  является любым положительным числом. Неравенство Чебышева может быть записано и в следующем виде:

$$P(|X - E(X)| < \epsilon) \geq 1 - \frac{D(X)}{\epsilon^2}.$$

### Пример 9.59

Вероятность того, что средства, переданные клиентами на депозит банку, будут востребованы в течение полугода, равна 0,08 для каждого клиента. Оценим с помощью неравенства Чебышева вероятность того, из 1000 клиентов в течение полугода от 70 до 90 из них затребуют возвращения вложенных средств.

*Решение*

Величина  $X$  — число депозитов, открытых банком, — распределена по биномиальному закону, следовательно, мы можем найти ее числовые характеристики, используя известные формулы:

$$E(X) = np = 1000 \cdot 0,08 = 80;$$

$$D(X) = npq = 1000 \cdot 0,08 \cdot 0,92 = 73,6.$$

Заданный для значения величины  $X$  интервал от 70 до 90 симметричен относительно математического ожидания, следовательно, выполнено условие

$$P(70 < X < 90) = P(|X - 80| < 10),$$

поэтому значение  $\epsilon$  определяется и равно 10. Теперь можно применить неравенство Чебышева и найти ответ на вопрос задачи:

$$P(|X - 80| < 10) \geq 1 - \frac{73,6}{10^2} = 0,264.$$

*Ответ:* вероятность того, что из 1000 клиентов в течение полугода от 70 до 90 из них затребуют возвращения вложенных средств, составляет более 0,264.



### 9.5.2. Теорема Чебышева

Мы уже отметили, что закон больших чисел представляет собой совокупность утверждений. Для независимых случайных величин этот закон формулируется как следующая теорема.

**Теорема 9.1 (Чебышева).** Если случайные величины  $X_1, X_2, \dots, X_n$  независимы, имеют одинаковые математические ожидания ( $E(X_1) = E(X_2) = \dots = E(X_n) = a$ ) и дисперсии, ограниченные одним и тем же числом  $C$  ( $D(X_1) < C, D(X_2) < C, \dots, D(X_n) < C$ ), то для любого числа  $\varepsilon > 0$  будет выполнено условие

$$P\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} - a\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{C}{n\varepsilon^2},$$

и если  $n \rightarrow \infty$ , то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} - a\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

Смысл теоремы Чебышева состоит в следующем: при большом числе случайных величин  $X_1, X_2, \dots, X_n$  практически достоверно, что их среднее  $\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$ , по сути случайная величина, бесконечно мало отличается от неслучайной постоянной величины  $a$ , т.е. практически перестает быть случайной. Равный единице предел вероятности в общей теории означает сходимость по вероятности. В рассматриваемом случае можно утверждать, что среднее  $\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$  для независимых величин  $X_1, X_2, \dots, X_n$  сходится по вероятности к значению  $a$ .

#### Пример 9.60

Дисперсия каждой из 1000 независимых величин  $X_1, X_2, \dots, X_{1000}$ , имеющих одно и то же математическое ожидание, равна 4. Оценим вероятность того, что среднее арифметическое этих величин отклонится по модулю от среднего арифметического их математических ожиданий меньше, чем на 0,1.

*Решение*

По условию  $E(X_1) = E(X_2) = \dots = E(X_{1000}) = a = \text{const}$  и среднее арифметическое математических ожиданий этих величин тоже будет равно  $a$ :

$$\frac{E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_n)}{n} = \frac{\overbrace{a + a + \dots + a}^{n \text{ раз}}}{n} = \frac{na}{n} = a.$$

Для ответа на вопрос задачи даже необязательно знать значение  $a$ , достаточно воспользоваться теоремой Чебышева:

$$\begin{aligned} P\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} - a\right| < \varepsilon\right) &\geq 1 - \frac{C}{n\varepsilon^2} \Rightarrow \\ \Rightarrow P\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_{1000}}{1000} - a\right| < 0,1\right) &\geq 1 - \frac{4}{1000 \cdot 0,1^2} = 0,6. \end{aligned}$$

*Ответ:* вероятность того, что среднее заданных величин отклонится по модулю от среднего арифметического их математических ожиданий меньше, чем на 0,1, будет более 0,6.



Прямое следствие теоремы Чебышева является теорема Бернулли, которая дает теоретическое обоснование замене неизвестной вероятности события относительной частотой, полученной при  $n$  повторных независимых испытаниях, проводимых при одном и том же комплексе условий.

**Теорема 9.2 (Бернулли).** Если в каждом из  $n$  независимых испытаний вероятность  $p = P(A)$  появления некоторого события  $A$  постоянна, то вероятность отклонения по модулю относительной частоты  $\frac{k}{n}$  от вероятности  $p = P(A)$  удовлетворяет условию для любого числа  $\varepsilon > 0$ .

$$P\left(\left|\frac{k}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2},$$

и если  $n \rightarrow \infty$ , то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{k}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

Из условия теоремы Бернулли следует, что относительная частота наступления события  $\frac{k}{n}$  сходится по вероятности к теоретической вероятности  $p = P(A)$  этого события. Таким образом, обоснована замена неизвестной вероятности относительной частотой события.

#### Пример 9.61

Оценить вероятность того, что частота выпадения герба при 10 000 подбрасываниях монеты отклонится по модулю от 0,5 меньше, чем на 0,01.

*Решение*

Для ответа на вопрос задачи нам даже необязательно знать, сколько раз из 10 000 подбрасываний выпал герб. Чтобы точно определить относительную частоту выпадения герба, достаточно воспользоваться условием из теоремы Бернулли:

$$P\left(\left|\frac{k}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2} \Rightarrow P\left(\left|\frac{k}{n} - \frac{1}{2}\right| < 0,01\right) \geq 1 - \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}{10000 \cdot 0,01^2} = 1 - \frac{1}{4} = 0,75.$$

*Ответ:* вероятность того, что частота выпадения герба при 10 000 подбрасываниях монеты отклонится по модулю от 0,5 меньше, чем на 0,01, будет больше либо равна 0,75.

### 9.5.3. Центральная предельная теорема

Центральная предельная теорема определяется группой теорем, устанавливающих условия возникновения нормального закона распределения. Важнейшее место в этой группе занимает теорема Ляпунова. Мы сформулируем ее в наиболее простой форме.

**Теорема 9.3 (Ляпунова).** Если случайные величины  $X_1, X_2, X_n$  независимы, имеют одинаковые математические ожидания и дисперсии ( $E(X_1) = E(X_2) = \dots = E(X_n) = a$ ,  $D(X_1) = D(X_2) = \dots = D(X_n) = \sigma^2$ ), а также абсолютный центральный момент третьего порядка  $\mu_3 = E(|X - E(X)|^3)$ , то при



неограниченном увеличении  $n$  ( $n \rightarrow \infty$ ) закон распределения суммы этих величин  $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$  неограниченно приближается к нормальному закону.

Для решения задач удобно использовать «более аналитическую» формулировку этой теоремы, рассматривая переход от величины  $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$  к центрированной и нормированной величине

$$S'_n = \frac{S_n - E(S_n)}{\sigma(S_n)}.$$

После несложных преобразований с использованием свойств математического ожидания и дисперсии суммы независимых величин получим выражение для  $S'_n$ :

$$S'_n = \frac{S_n - na}{\sigma\sqrt{n}}.$$

Условие «неограниченно приближается к нормальному распределению» означает, что функция распределения величины  $S'_n$  в пределе даст функцию распределения нормально распределенной величины при  $\mu = 0$  и  $\sigma = 1$ :

$$F(x) = P(X < x) = 0,5 + \Phi\left(\frac{x-0}{1}\right) = 0,5 + \Phi(x).$$

В нашем случае имеем  $\lim_{n \rightarrow \infty} P(S'_n < x) = 0,5 + \Phi(x)$ , или подробнее

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n - na}{\sigma\sqrt{n}} < x\right) = 0,5 + \Phi(x).$$

### Пример 9.62

Для независимых случайных величин  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , равномерно распределенных на отрезке  $[0; 15]$ , найдем  $\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(X_1 + X_2 + \dots + X_n < \frac{15}{2}n + \sqrt{3n}\right)$ .

*Решение*

Рассмотрим величину  $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$  и найдем ее числовые характеристики, учитывая, что все величины равномерно распределены на отрезке  $[0; 15]$ :

$$E(S_n) = E(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = \underbrace{\frac{0+15}{2} + \frac{0+15}{2} + \dots + \frac{0+15}{2}}_n = \frac{15}{2} \cdot n;$$

$$D(S_n) = D(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = \underbrace{\frac{(15-0)^2}{12} + \frac{(15-0)^2}{12} + \dots + \frac{(15-0)^2}{12}}_n = \frac{15^2}{12} \cdot n;$$

$$\sigma(S_n) = \sqrt{D(S_n)} = \sqrt{\frac{15^2}{12} \cdot n} = \frac{15\sqrt{n}}{2\sqrt{3}}.$$

Теперь определим величину  $S'_n$ :

$$S'_n = \frac{S_n - E(S_n)}{\sigma(S_n)} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n - \frac{15}{2}n}{\frac{15\sqrt{n}}{2\sqrt{3}}}.$$



Для этой величины выполнена теорема Ляпунова:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n - na}{\sigma\sqrt{n}} < x\right) = 0,5 + \Phi(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n - \frac{15}{2}n}{\frac{15\sqrt{n}}{2\sqrt{3}}} < x\right) = 0,5 + \Phi(x).$$

Преобразуем выражение под знаком предела из вопроса задачи таким образом, чтобы стало возможным применение теоремы Ляпунова:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(X_1 + X_2 + \dots + X_n < \frac{15}{2}n + \sqrt{3n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(X_1 + X_2 + \dots + X_n - \frac{15}{2}n < \sqrt{3n}\right) =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n - \frac{15}{2}n}{\frac{15\sqrt{n}}{2\sqrt{3}}} < \frac{\sqrt{3n}}{\frac{15\sqrt{n}}{2\sqrt{3}}}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n - \frac{15}{2}n}{\frac{15\sqrt{n}}{2\sqrt{3}}} < \frac{2}{5}\right) =$$

$$= 0,5 + \Phi(0,4) = 0,5 + 0,15542 = 0,65542.$$

$$\text{Ответ: } \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(X_1 + X_2 + \dots + X_n < \frac{15}{2}n + \sqrt{3n}\right) = 0,65542.$$

### Задания для самостоятельной работы

**9.1.** Для любых событий  $A$ ,  $B$  и  $C$  необходимо доказать равенство:

- а)  $A + BC = (A + B) \cdot (A + C)$ ; б)  $AB + C = (A + C) \cdot (B + C)$ ;  
 в)  $A \cdot (B + C) = AB + AC$ ; г)  $(A + B) - C = (A - C) + (B - C)$ ;  
 д)  $A \cdot \overline{BC} = (A + B) + (A + C).$

**9.2.** Необходимо проверить выполнимость равенства при дополнительных условиях на события  $A$ ,  $B$  и  $C$ :

- а)  $C - B = (C - A) \cdot \overline{B}$ , если  $A$  благоприятствует  $B$  и  $B$  благоприятствует  $C$ ;  
 б)  $A + B = C \cdot (A + B)$ , если  $A$  благоприятствует  $C$ ,  $B$  благоприятствует  $C$ , а события  $A$  и  $B$  совместны;  
 в)  $A \cdot (B + C) = B + C$ , если  $B$  благоприятствует  $A$ ,  $C$  благоприятствует  $A$  и события  $B$  и  $C$  несовместны.

**9.3.** Решите, используя формулу классической вероятности.

- а) Из 50 деталей пять имеют дефект. Наугад выбирают три детали. Какова вероятность того, что среди выбранных деталей только одна будет иметь дефект?  
 б) Из 20 предприятий региональный банк кредитовал восемь предприятий. Пять предприятий объявили о банкротстве. Какова вероятность того, что все они брали кредиты в региональном банке?  
 в) Из всех возможных двузначных чисел наугад выбирают три числа. Какова вероятность того, что среди выбранных будет только одно четное число?

**9.4.** Решите, используя формулу геометрической вероятности.

- а) На отрезок длиной 10 см наугад брошена точка. Какова вероятность того, что она окажется не далее 1 см от середины отрезка?  
 б) В круг радиуса 5 см вписан квадрат, и в этот квадрат вписан еще один круг. Какова вероятность того, что брошенная наугад в большой круг точка попадет и в малый?



в) Мишень образована пятью концентрическими окружностями радиусами 2, 4, 6, 8 и 10 см. Какова вероятность того, что при одном выстреле по мишени не попадут в самый маленький круг? Какова вероятность того, что местом попадания при одном выстреле будет внешнее кольцо (границами являются окружности радиусами 8 см и 10 см)?

**9.5.** Решите, используя формулы для вычисления вероятностей суммы или произведения событий.

а) Вероятность успешного завершения первого проекта равна 0,8, второго — 0,9 и третьего — 0,95. Найдите вероятность того, что из трех проектов успешно завершится только один.

б) Имеются три коробки, в каждой из которых находятся по три белых и два черных шара. Из каждой коробки наугад выбирают по одному шару. Какова вероятность того, что среди выбранных шаров будет хотя бы один белый шар?

в) Известно, что события  $A$ ,  $B$  и  $C$  являются независимыми и  $P(A) = 0,9$ ,  $P(B) = 0,5$ ,  $P(C) = 0,6$ . Найдите  $P(AB + BC | AC)$ .

**9.6.** Решите, используя формулу полной вероятности или формулу Байеса.

а) Имеются две коробки. В первой содержится два белых и пять черных шаров, во второй — три белых и один черный. Из первой коробки извлекают один шар и перекладывают во вторую, после чего из второй коробки извлекают один шар. Какова вероятность того, что извлеченный из второй коробки шар окажется черным?

б) Каждая буква слова «вектор» написана на отдельной карточке. Две карточки потеряны. Из оставшихся карточек наугад извлекается одна. Какова вероятность того, что на извлеченной карточке будет написана гласная буква?

в) Каждое из трех любимых мест для рыбалки рыболов выбирает с равной вероятностью. На первом месте при однократном забрасывании удочки рыба клюет с вероятностью 0,6, на втором месте — с вероятностью 0,8, а на третьем — 0,5. Выйдя в очередной раз на рыбалку, рыболов трижды закидывал удочку, но рыба клюнула только один раз. Какова вероятность того, что рыбачил рыболов на втором месте?

**9.7.** Решите, используя формулу Бернулли или приближенные формулы.

а) Тест состоит из пяти вопросов, на каждый вопрос приведено четыре ответа, из которых только один является правильным. Студент выбирает ответы наугад. Какова вероятность того, что он правильно ответит только на три вопроса? Какова вероятность того, что студент правильно ответит на все вопросы?

б) Вероятность ошибочной транзакции для некоторого банка составляет 0,002. Найдите наиболее вероятное число ошибочных транзакций при проведении 4999 операций.

в) Вероятность укуса человека клещом определенного вида при прогулке по лесу в некотором регионе равна 0,01. Известно, что 10% клещей этого вида являются носителями вируса энцефалита. Какова вероятность того, что из 1000 человек, гулявших по лесу в этом регионе, энцефалитом заболеют 5?

**9.8.** Поясните, как определяется закон распределения искомой величины  $X$ .

а) Тест состоит из пяти вопросов, на каждый вопрос приведено четыре ответа, из которых только один является правильным. Студент выбирает ответы наугад. Составьте закон распределения случайной величины  $X$  — количества правильных ответов на вопросы теста.

б) Участнику викторины вопросы задают до тех пор, пока он на них правильно отвечает. Если участник ответил неправильно или количество правильных ответов стало равным пяти, вопросы задавать перестают. Составьте закон распределения случайной величины  $X$  — числа заданных участнику вопросов, если вероятность правильного ответа на каждый заданный вопрос викторины для участника равна 0,5.

в) Испытываются три независимо работающих прибора. Вероятность отказа первого прибора равна 0,1, второго — 0,2 и третьего — 0,15. Составьте закон распределения случайной величины  $X$  — числа отказавших в процессе испытания приборов.



**9.9.** Заданы законы распределений независимых величин  $X$  и  $Y$ . Необходимо составить закон распределения случайной величины  $Z$  и ответить на вопросы задачи:

а) Составьте закон распределения случайной величины  $Z = |X| + 2Y - 1$  и найдите  $P(Z > 0)$ :

Значение $X$	-2	-1	0	1
Вероятность	0,1	0,3	0,1	0,5

Значение $Y$	0	1	2
Вероятность	0,5	0,3	0,2

б) Составить закон распределения случайной величины  $Z = Y^2 - 3X - 2$  и найдите вероятность  $P(Z + 2 > 0)$ :

Значение $X$	1	2	3
Вероятность	0,1	0,2	0,7

Значение $Y$	-1	0	1	2
Вероятность	0,2	0,2	0,2	0,4

в) Составьте закон распределения случайной величины  $Z = X^2 - 5Y^2$  и найдите вероятность  $P(X^2 < 5Y^2)$ :

Значение $X$	-2	-1	0	1	2
Вероятность	0,1	0,3	0,1	0,3	0,2

Значение $Y$	0	1
Вероятность	0,8	0,2

**9.10.** Найдите математическое ожидание  $E(X)$  и математическое ожидание  $E(X^2)$

а)

Значение $X$	-3	-1	0	1	3
Вероятность	0,1	0,1	0,2	0,2	0,4

б)

Значение $X$	-1	0	1	2	3	4	5	6
Вероятность	0,1	0,1	0,1	0,1	0,2	0,2	0,1	0,1

б)

Значение $X$	-2	-1	0	1	2
Вероятность	0,1	0,2	0,2	0,2	0,3

**9.11.** Известно, что для случайных величин  $X$  и  $Y$   $\text{cov}(X, Y) = 2$ ,  $E(X) = -1$ ,  $E(Y) = 1$ . Найдите математическое ожидание произведения  $E(XY)$ .

**9.12.** Для случайных величин  $X$  и  $Y$  известно, что  $\text{cov}(X, Y) = -1$ ,  $D(X) = 2$ ,  $D(Y) = 3$ . Найдите дисперсию  $D(X + Y)$ .

**9.13.** Для случайных величин  $X$  и  $Y$  известно, что  $\text{cov}(X, Y) = 3$ ,  $D(X) = 1$ ,  $D(Y) = 2$ . Найдите дисперсию  $D(2X - 3Y)$ .

**9.14.** Используя данный закон распределения дискретной случайной величины  $X$ , задайте функцию распределения  $F(x)$  этой величины, постройте ее график и найдите значение  $F(x_0)$  в указанной точке  $x_0$ :

а) при  $x_0 = 4,3$  вычислите значение функции  $F(x)$ , если

Значение $X$	-1	0	1	2	3	4
Вероятность	0,1	0,2	0,2	0,2	0,2	0,1

б) при  $x_0 = -0,3$  вычислите значение функции  $F(x)$ , если

Значение $X$	-2	-1	0	1	2	3
Вероятность	0,2	0,2	0,1	0,2	0,1	0,2



в) при  $x_0 = -0,1$  вычислите значение функции  $F(x)$ , если

Значение $X$	-2	-1	-0,5	0	0,5	1
Вероятность	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,5

**9.15.** Найдите значение параметра (параметров) функции распределения  $F(x)$  случайной величины  $X$ , постройте график  $F(x)$ , найдите функцию плотности вероятности  $f(x)$ , постройте график  $f(x)$ , вычислите искомую вероятность:

$$\text{а) } F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 4, \\ a \cdot (x-4), & 4 < x \leq 8, \text{ } a - \text{ параметр; вычислите } P(5 < X < 9); \\ 1, & x > 8, \end{cases}$$

$$\text{б) } F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1, \\ a \cdot (x-1)^2, & 1 < x \leq 3, \text{ } a - \text{ параметр; вычислите } P(X > 2); \\ 1, & x > 3, \end{cases}$$

$$\text{в) } F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 3, \\ a(x-3)^3, & 3 < x \leq 4, \text{ } a - \text{ параметр; вычислите } P(-2 < X < 2). \\ 1, & x > 4, \end{cases}$$

**9.16.** Заданы функция распределения  $F(x)$  случайной величины  $X$  и плотность вероятности  $f(y)$  случайной величины  $Y$ . Считая величины  $X$  и  $Y$  независимыми, вычислите математическое ожидание и дисперсию заданной величины  $Z$ :

$$\text{а) } F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -2, \\ \frac{1}{4} \cdot (x+2)^2, & -2 < x \leq 0, \\ 1, & x > 0, \end{cases} \quad f(y) = \begin{cases} 0, & y \leq -2, \\ \frac{1}{2}, & -2 < y \leq 0, \\ 0, & y > 0, \end{cases} \quad Z = 2X - Y;$$

$$\text{б) } F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1, \\ \frac{1}{49} \cdot (x-1)^2, & 1 < x \leq 8, \\ 1, & x > 8, \end{cases} \quad f(y) = \begin{cases} 0, & y \leq 1, \\ \frac{1}{7}, & 1 < y \leq 8, \\ 0, & y > 8, \end{cases} \quad Z = X - 3Y;$$

$$\text{в) } F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -5, \\ \frac{1}{25} \cdot (x+5)^2, & -5 < x \leq 0, \\ 1, & x > 0, \end{cases} \quad f(y) = \begin{cases} 0, & y \leq -5, \\ \frac{1}{5}, & -5 < y \leq 0, \\ 0, & y > 0, \end{cases} \quad Z = 3X + 2Y.$$

**9.17.** Выполните задание, учитывая, что заданные случайные величины имеют распределения специального вида:

а) случайная величина  $X$  распределена по биномиальному закону с параметрами  $n = 5$  и  $p = 0,2$ ; найдите вероятность  $P(X < 3)$ ;

б) случайная величина  $X$  распределена по геометрическому закону с параметром  $p = 0,5$ ; найдите вероятность  $P(X > 4)$ ;

в) непрерывная случайная величина  $X$  равномерно распределена на отрезке  $[-5; 5]$ ; найдите вероятность  $P(-1 < X < 7)$ .

**9.18.** Известен закон распределения дискретной двумерной случайной величины  $(X, Y)$ . Необходимо вычислить математические ожидания  $E(X), E(Y)$ , дисперсии  $D(X), D(Y)$ , стандартные отклонения  $\sigma(X), \sigma(Y)$ , ковариацию  $\text{cov}(X, Y)$  и коэффициент корреляции  $\rho(X, Y)$ :



а)

	$X = 0$	$X = 1$	$X = 3$	$X = 4$
$Y = -1$	0,1	0	0,1	0,1
$Y = 0$	0,1	0,1	0,1	0,1
$Y = 1$	0,1	0,1	0,1	0

б)

	$X = 4$	$X = 5$	$X = 6$	$X = 7$
$Y = 0$	0,1	0	0,1	0,1
$Y = 1$	0	0,1	0	0,1
$Y = 2$	0,1	0,2	0,2	0

в)

	$X = -2$	$X = -1$	$X = 0$	$X = 1$
$Y = -1$	0,1	0,2	0,1	0,1
$Y = 0$	0	0,1	0	0,2
$Y = 2$	0,1	0	0,1	0

9.19. Известен закон распределения двумерной величины  $(X, Y)$ :

	$X = 0$	$X = 1$	$X = 3$	$X = 4$
$Y = -1$	0,1	0	0,1	0,1
$Y = 0$	0,1	0,1	0,1	0,1
$Y = 1$	0,1	0,1	0,1	0

Будут ли независимыми событие  $A$ : « $Y < X$ » и событие  $B$ : « $X = Y$ »?9.20. Известен закон распределения двумерной величины  $(X, Y)$ :

	$X = -3$	$X = -2$	$X = 0$	$X = 3$
$Y = -1$	0,1	0,2	0,1	0,2
$Y = 1$	0	0,1	0	0,2
$Y = 3$	0	0	0,1	0

Будут ли независимыми событие  $A$ : « $|X| = 3|Y|$ » и событие  $B$ : « $X > Y$ »?9.21. Известен закон распределения двумерной величины  $(X, Y)$ :

	$X = -2$	$X = -1$	$X = 0$	$X = 1$
$Y = -1$	0,2	0	0,1	0,2
$Y = 0$	0,1	0,1	0	0,1
$Y = 1$	0,1	0	0,1	0

Будут ли независимыми событие  $A$ : « $X \cdot Y > 0$ » и событие  $B$ : « $Y \neq 0$ »?



**9.22.** Известен закон распределения двумерной величины  $(X, Y)$ :

	$X = 0$	$X = 1$	$X = 3$	$X = 4$
$Y = -1$	0,1	0	0,1	0,1
$Y = 0$	0,1	0,1	0,1	0,1
$Y = 1$	0,1	0,1	0,1	0

Составьте условный закон распределения величины  $Z = (Y|X > 0)$  и найдите  $E(Z)$  и  $D(Z)$ . Составьте законы распределений  $E(Y|X)$  и  $D(Y|X)$ .

**9.23.** Известен закон распределения двумерной величины  $(X, Y)$ :

	$X = -3$	$X = -2$	$X = 0$	$X = 3$
$Y = -1$	0,1	0,2	0,1	0,2
$Y = 0$	0	0,1	0	0,2
$Y = 3$	0	0	0,1	0

Составьте условный закон распределения величины  $Z = (Y|X \leq 0)$  и найдите  $E(Z)$  и  $D(Z)$ . Составьте законы распределений  $E(X|Y)$  и  $D(X|Y)$ .

**9.24.** Известен закон распределения двумерной величины  $(X, Y)$ :

	$X = -5$	$X = -4$	$X = -3$	$X = -2$
$Y = -1$	0,1	0,2	0,1	0
$Y = 0$	0,1	0,1	0	0,1
$Y = 4$	0,1	0,1	0,1	0

Составьте условный закон распределения величины  $Z = (Y|X + Y < 0)$  и найдите  $E(Z)$  и  $D(Z)$ . Составьте законы распределений  $E(X|Y)$  и  $D(X|Y)$ .

**9.25.** Задана плотность вероятности  $f(x, y)$  двумерной непрерывной случайной величины  $(X, Y)$ . Найдите параметр  $a$  плотности вероятности  $f(x, y)$ , плотности вероятностей  $f_X(x)$  и  $f_Y(y)$  величин  $X$  и  $Y$ , вычислите  $E(X)$ ,  $E(Y)$ ,  $D(X)$ ,  $D(Y)$ ,  $\text{cov}(X, Y)$  и  $\rho(X, Y)$ , ответьте на вопрос о вероятности:

- а)  $f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} ax + y, & 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2, \\ 0, & \text{в остальных точках,} \end{cases}$   $a$  — параметр; вычислите  $P(X < 1)$ ;
- б)  $f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} x + ay, & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, \\ 0, & \text{в остальных точках,} \end{cases}$   $a$  — параметр; вычислите  $P\left(Y > \frac{1}{2}\right)$ ;
- в)  $f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} 1 + x - y, & 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq a, \\ 0, & \text{в остальных точках,} \end{cases}$   $a$  — параметр; вычислите  $P\left(Y > \frac{a}{3}\right)$ .

**9.26.** Используя условие равномерной распределенности в заданной области  $G$  двумерной непрерывной случайной величины  $(X, Y)$ , найдите плотность вероятности  $f(x, y)$ , вычислите  $E(X)$ ,  $E(Y)$ ,  $D(X)$ ,  $D(Y)$  и ответьте на вопрос о вероятности:

- а) непрерывная двумерная случайная величина  $(X, Y)$  равномерно распределена в области  $G: \{0 \leq x \leq 10; 0 \leq y \leq 5\}$ ; найдите вероятность  $P(X > Y)$ ;
- б) непрерывная двумерная случайная величина  $(X, Y)$  равномерно распределена в области  $G: \{x \geq 0, y \geq 0, 3x + 2y \leq 6\}$ ; найдите вероятность  $P(Y > 1)$ ;



в) компоненты  $X$  и  $Y$  непрерывной двумерной случайной величины  $(X, Y)$  независимы и равномерно распределены:  $X$  — на отрезке  $[2; 4]$ ,  $Y$  — на отрезке  $[3; 5]$ ; найдите вероятность  $P(X+Y < 8)$ .

**9.27.** Решите, используя закон больших чисел или центральную предельную теорему:

а) В среднем 150 сотрудников предприятия ежегодно посещают курсы повышения квалификации. Оцените вероятность того, что в следующем году курсы повышения квалификации посетят не более 100 человек.

б) Вероятность положительного исхода эксперимента составляет 0,8. Оцените вероятность того, что при проведении 1000 таких экспериментов отклонение доли положительных исходов от соответствующей вероятности по абсолютной величине не более чем на 0,05.

в) Независимые случайные величины  $X_1, X_2, \dots$  одинаково распределены по закону Пуассона с математическим ожиданием, равным 3, независимые величины  $Y_1, Y_2, \dots$  тоже одинаково распределены по закону Пуассона, но с математическим ожиданием, равным 2. При этом величины  $X_1, X_2, \dots$  независимы от величин  $Y_1, Y_2, \dots$ . Вычислите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} P(X_1 + X_2 + \dots + X_n + n > Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n + \sqrt{5n})$ .



## Глава 10

# МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

---

В результате изучения главы 10 студент должен:

**знать**

- основы математической статистики для решения задач анализа и интерпретации экспериментальных данных;
- принципы и методы статистического оценивания числовых характеристик и параметров распределений наблюдаемых случайных величин;
- принципы и методы проверки статистических гипотез о параметрах модели;

**уметь**

- строить статистические модели явлений и исследовать их на основе результатов измерительных экспериментов;

- делать статистические выводы;

**владеть**

- методами оптимального принятия статистических решений, статистического оценивания неизвестных законов распределений;
  - навыками применения современных методов математической статистики для решения задач анализа и интерпретации экспериментальных данных.
- 

### 10.1. Статистические методы обработки экспериментальных данных

#### 10.1.1. Эмпирические характеристики признаков

Основной задачей математической статистики является разработка методов получения научно обоснованных выводов о массовых явлениях и процессах на основе данных, собранных в результате наблюдений или экспериментов. Эти выводы и заключения должны относиться не к отдельным испытаниям, а представлять собой утверждения об общих вероятностных характеристиках процесса или явления. Использование фактических данных для такого прогнозирования и является главной отличительной чертой статистического метода.

Для решения задач прогнозирования необходимо планирование статистических наблюдений и сбор статистических данных с дальнейшим анализом для принятия решений или прогнозирования случайных явлений. Теоретической основой математической статистики является теория вероятностей. Чтобы качественно использовать теоретические положения теории вероятностей, в математической статистике вводят понятие *признака* — некоторой функции без фиксированной области определения. Например, в качестве признака  $X$  можно рассматривать размер заработной платы, значения которого могут определяться и на множестве работников бюджетной сферы, и на множестве менеджеров высшего звена компаний



как в пределах региона, так и в масштабах всей страны. Фиксированная область определения, связанная с признаком, называется *статистической совокупностью*, а количество ее элементов — *объемом*. Если  $X$  — это признак, заданный на совокупности  $\Omega = \{\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2, \dots, \bar{\omega}_n\}$ , то значения признака определяются как  $x_1 = X(\bar{\omega}_1), x_2 = X(\bar{\omega}_2), \dots, x_n = X(\bar{\omega}_n)$ .

Для признаков определяется целый ряд эмпирических характеристик.

*Средним значением признака (эмпирическим средним)* называют среднее арифметическое всех его значений в выбранной совокупности:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n},$$

где  $n$  — объем совокупности.

*Дисперсией признака  $X$*  в совокупности  $\Omega$  (эмпирической дисперсией) называется среднее арифметическое квадратов отклонений значений признака от эмпирического среднего:

$$D(X) = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n};$$

а *стандартным отклонением признака* называют  $\sigma = \sqrt{D(X)}$ .

*Эмпирический начальный момент  $k$ -го порядка признака  $X$*  определяется как

$$\nu_k(X) = \frac{x_1^k + x_2^k + \dots + x_n^k}{n}.$$

*Эмпирический центральный момент  $k$ -го порядка признака  $X$*  определяется соответственно:

$$\mu_k(X) = \frac{(x_1 - \bar{x})^k + (x_2 - \bar{x})^k + \dots + (x_n - \bar{x})^k}{n}.$$

Можно определить и *эмпирическую функцию распределения  $F(x)$* :

$$F(x) = \frac{\{\text{число элементов } \omega \in \Omega, \text{ для которых } X(\omega) < x\}}{n}.$$

Признак ведет себя как случайная величина (мы даже сохранили обозначение). Если возможные значения этой величины считать равновероятными, то все эмпирические характеристики совпадут с числовыми характеристиками случайной величины, которые мы рассматривали в теории вероятностей.

Значения признака  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , не обязательно различные, расположенные в неубывающем порядке (ранжированные), называют *вариационным рядом*. Сами значения признака часто называют *вариантами*.

Разность между наибольшей и наименьшей вариантой в вариационном ряду называют *размахом признака* или *размахом вариации*.

Порядковый номер середины (центра) вариационного ряда называется *эмпирической медианой*  $Me$  признака. В зависимости от количества вариантов  $n$  (нечетного или четного) в вариационном ряду медиану вычисляют по-разному:



$$\text{Me} = \begin{cases} x_{k+1}, & n = 2k + 1, \\ \frac{x_k + x_{k+1}}{2}, & n = 2k. \end{cases}$$

Например, для вариационного ряда 2; 2; 3; 4; 4; 5; 5 количество вариантов  $n = 7$  нечетное:  $n = 2k + 1 \Rightarrow 7 = 2 \cdot 3 + 1 \Rightarrow k = 3$ , и нас будет интересовать четвертое (по порядку) значение варианты в вариационном ряду, т.е.  $x_{k+1} = x_{3+1} = x_4 = 4$ , поэтому  $\text{Me} = x_{k+1} = 4$ .

Для вариационного ряда 2; 2; 4; 4; 5; 5 количество вариантов  $n = 6$  четное:  $n = 2k \Rightarrow 6 = 2 \cdot 3 \Rightarrow k = 3$ . Медиану в таком случае вычисляем по формуле  $\text{Me} = \frac{x_k + x_{k+1}}{2} = \frac{x_3 + x_4}{2} = \frac{4 + 4}{2} = 4$ .

Если в совокупности  $\Omega$  значение  $x_1$  наблюдалось  $n_1$  раз, значение  $x_2$  —  $n_2$  раза, ...,  $x_k$  —  $n_k$  раз, то числа  $n_1, n_2, \dots, n_k$  называются частотами вариантов ( $n_1 + \dots + n_k = n$ ). Таблица вида

Значения признака (варианты)	$x_1$	$x_2$	...	$x_k$
Частоты	$n_1$	$n_2$	...	$n_k$

определяет *частотное распределение* признака и называется статистическим распределением.

*Относительной частотой* варианты  $\omega_i$  называют отношение  $\frac{n_i}{n}$ , а таблица вида

Значения признака (варианты)	$x_1$	$x_2$	...	$x_k$
Относительные частоты $\omega_i$	$\frac{n_1}{n}$	$\frac{n_2}{n}$	...	$\frac{n_k}{n}$

определяется как распределение относительных частот и называется *эмпирическим распределением признака*. Понятно, что для распределения относительных частот выполняется условие  $\sum_{i=1}^k \omega_i = \frac{n_1 + n_2 + \dots + n_k}{n} = 1$ .

Эмпирические характеристики при известном частотном (а следовательно, и эмпирическом) распределении признака вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{x_1 \cdot n_1 + x_2 \cdot n_2 + \dots + x_k \cdot n_k}{n} = x_1 \omega_1 + x_2 \omega_2 + \dots + x_k \omega_k; \\ D(X) &= \frac{(x_1 - \bar{x})^2 \cdot n_1 + (x_2 - \bar{x})^2 \cdot n_2 + \dots + (x_k - \bar{x})^2 \cdot n_k}{n} = \\ &= (x_1 - \bar{x})^2 \cdot \omega_1 + (x_2 - \bar{x})^2 \cdot \omega_2 + \dots + (x_k - \bar{x})^2 \cdot \omega_k. \end{aligned}$$

Для эмпирической дисперсии верна формула

$$D(X) = \frac{x_1^2 \cdot n_1 + x_2^2 \cdot n_2 + \dots + x_k^2 \cdot n_k}{n} - (\bar{x})^2.$$



Формулы для вычисления моментов принимают вид

$$v_k = \frac{x_1^k \cdot n_1 + x_2^k \cdot n_2 + \dots + x_k^k \cdot n_k}{n},$$

$$\mu_k = \frac{(x_1 - \bar{x})^k \cdot n_1 + (x_2 - \bar{x})^k \cdot n_2 + \dots + (x_k - \bar{x})^k \cdot n_k}{n}.$$

Отношение  $\bar{x} = \frac{x_1 \cdot n_1 + x_2 \cdot n_2 + \dots + x_k \cdot n_k}{n_1 + n_2 + \dots + n_k}$  часто называют *взвешенным*

*средним* чисел  $x_1, x_2, \dots, x_k$ , а значение  $n_i$  — *весом* варианты  $x_i$ .

Наиболее распространенным графическим представлением вариационного ряда является полигон частот — ломаная, соединяющая точки с координатами  $(x_1; n_1), \dots, (x_k; n_k)$  (рис. 10.1).

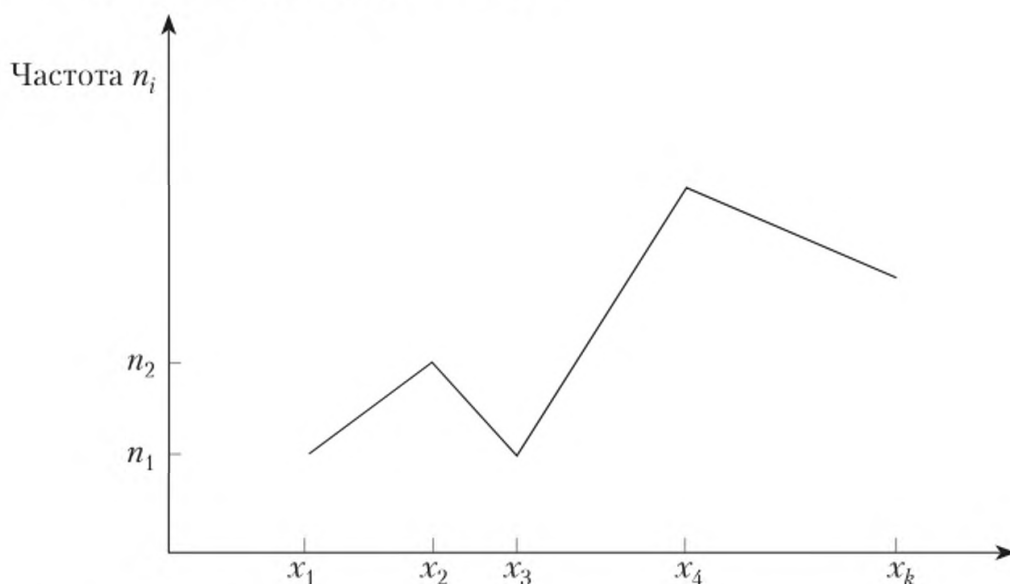


Рис. 10.1. Графическое представление вариационного ряда

Полигон частот дает наглядное представление о закономерности изменения значений наблюдаемого признака.

*Модой*  $M_o$  вариационного ряда называется значение варианты  $x_i$ , которому соответствует наибольшая частота  $n_i$ .

Моду вариационного ряда наряду с эмпирическим средним рассматривают как меру центральной тенденции вариационного ряда.

Для характеристики вариационного ряда привлекают асимметрию  $As = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$  и эксцесс  $Ex = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3$ . Если асимметрия равна нулю, то говорят о симметричности вариационного ряда.

#### Пример 10.1

Изучается признак  $X$  — процент по ипотечному кредитованию в банках Москвы и Московской области. Получены следующие результаты: 11; 10,5; 11; 11; 13; 10,5; 11; 10,5; 12; 10,5. Зададим частотное распределение признака и эмпирическую функцию распределения, построим полигон частот и вычислим эмпирические характеристики признака.



*Решение*

На основе полученных данных сформируем вариационный ряд, для этого наблюдаемые значения признака расположим в неубывающем порядке:

10,5; 10,5; 10,5; 10,5; 11; 11; 11; 11; 12; 13.

Теперь можно задать частотное распределение:

Значения признака (варианты)	10,5	11	12	13
Частоты	4	4	1	1

Имеем  $n = 4 + 4 + 1 + 1 = 10$ .

Построим полигон частот (рис. 10.2).

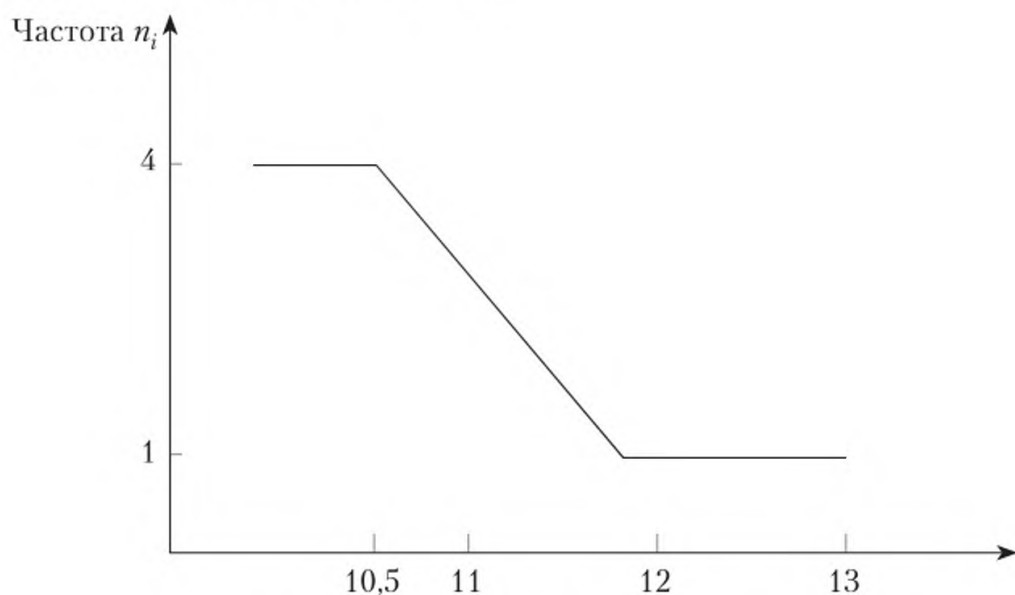


Рис. 10.2. Полигон частот для примера 10.1

Перед тем как задать эмпирическую функцию распределения, определим распределение относительных частот:

Значения признака (варианты)	10,5	11	12	13
Относительные частоты $\frac{n_i}{n}$	0,4	0,4	0,1	0,1

Имеем  $\sum_i \frac{n_i}{n} = 0,4 + 0,4 + 0,1 + 0,1 = 1$ .

Эмпирическая функция распределения имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 10,5, \\ 0,4, & 10,5 < x \leq 11, \\ 0,8, & 11 < x \leq 12, \\ 0,9, & 12 < x \leq 13, \\ 1, & x > 13. \end{cases}$$

Теперь вычислим эмпирические характеристики признака:

$$\bar{x} = \frac{x_1 \cdot n_1 + x_2 \cdot n_2 + \dots + x_k \cdot n_k}{n} = \frac{10,5 \cdot 4 + 11 \cdot 4 + 12 \cdot 1 + 13 \cdot 1}{10} = 11,1;$$



$$D(X) = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 \cdot n_1 + (x_2 - \bar{x})^2 \cdot n_2 + \dots + (x_k - \bar{x})^2 \cdot n_k}{n} =$$

$$= \frac{(10,5 - 11,1)^2 \cdot 4 + (11 - 11,1)^2 \cdot 4 + (12 - 11,1)^2 \cdot 1 + (13 - 11,1)^2 \cdot 1}{10} = 0,59;$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{0,59} = 0,768;$$

Mo = 10,5 и Mo = 11 — распределение бимодальное;

$$Me = \frac{x_k + x_{k+1}}{2} = \frac{x_5 + x_6}{2} = \frac{11 + 11}{2} = 11 \quad (\text{для четного значения } n = 10);$$

$$As = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = \frac{(x_1 - \bar{x})^3 \cdot n_1 + (x_2 - \bar{x})^3 \cdot n_2 + \dots + (x_k - \bar{x})^3 \cdot n_k}{n\sigma^3} =$$

$$= \frac{(10,5 - 11,1)^3 \cdot 4 + (11 - 11,1)^3 \cdot 4 + (12 - 11,1)^3 \cdot 1 + (13 - 11,1)^3 \cdot 1}{10 \cdot 0,768^3} = 1,485;$$

$$Ex = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 = \frac{(x_1 - \bar{x})^4 \cdot n_1 + (x_2 - \bar{x})^4 \cdot n_2 + \dots + (x_k - \bar{x})^4 \cdot n_k}{n\sigma^4} - 3 =$$

$$= \frac{(10,5 - 11,1)^4 \cdot 4 + (11 - 11,1)^4 \cdot 4 + (12 - 11,1)^4 \cdot 1 + (13 - 11,1)^4 \cdot 1}{10 \cdot 0,768^4} - 3 = 1,084.$$

Мы ответили на все вопросы примера.

Если количество значений вариант велико, то задается *интервальный вариационный ряд* распределения. Чтобы построить такой ряд, весь интервал варьирования значений признака разбивают на несколько интервалов и подсчитывают, какое количество значений признака попадает в каждый интервал.

Рекомендуемое количество интервалов вычисляют по формуле

$$k = 1 + 3,322 \lg n.$$

Длину интервалов в этом случае находят по формуле

$$h = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{k} = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{1 + 3,322 \lg n}.$$

Если получаемое число — дробное, то в качестве длины интервала рассматривают ближайшее целое число или простую дробь (обыкновенную или десятичную).

За начало первого интервала обычно берут величину  $a_1 = x_{\min} - \frac{h}{2}$ .

Интервальное статистическое распределение имеет вид

Интервалы	$[a_1; a_2]$	$(a_2; a_3]$	...	$[a_k; a_{k+1}]$
Частоты	$n_1$	$n_2$	...	$n_k$

Для вычисления эмпирических характеристик признака находят середину каждого интервала:

Интервалы	$[a_1; a_2]$	$(a_2; a_3]$	...	$[a_k; a_{k+1}]$
Средины интервалов $x_i^*$	$x_1^* = \frac{a_1 + a_2}{2}$	$x_2^* = \frac{a_2 + a_3}{2}$		$x_k^* = \frac{a_k + a_{k+1}}{2}$



и используют эти значения в качестве значений вариант с соответствующими частотами:

$$\bar{x} = \frac{x_1^* \cdot n_1 + x_2^* \cdot n_2 + \dots + x_k^* \cdot n_k}{n},$$

$$D(X) = \frac{(x_1^* - \bar{x})^2 \cdot n_1 + (x_2^* - \bar{x})^2 \cdot n_2 + \dots + (x_k^* - \bar{x})^2 \cdot n_k}{n},$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

Аналогично вычисляются эмпирические начальные и центральные моменты.

Для вычисления моды интервального вариационного ряда используют следующую формулу:

$$Mo = x_{Mo} + h \cdot \frac{n_{Mo} - n_{Mo-1}}{(n_{Mo} - n_{Mo-1}) + (n_{Mo} - n_{Mo+1})},$$

где  $x_{Mo}$  — нижняя граница модального интервала;  $h$  — длина (шаг) интервала;  $n_{Mo}$  — частота модального интервала;  $n_{Mo-1}$  — частота интервала, предшествующего модальному;  $n_{Mo+1}$  — частота интервала, следующего за модальным.

Модальным считается интервал с наибольшим количеством значений вариант.

Медиану интервального вариационного ряда вычисляют по формуле

$$Me = x_{Me} + h \cdot \frac{\frac{n}{2} - S_{Me-1}}{n_{Me}},$$

где  $x_{Me}$  — нижняя граница медианного интервала;  $h$  — длина (шаг) интервала;  $n_{Me}$  — частота медианного интервала;  $n$  — общее количество значений вариант;  $S_{Me-1}$  — сумма накопленных частот до медианного интервала.

Медианным считается интервал, которому принадлежит  $\frac{n}{2}$ -е (в случае четного значения  $n$ ) или  $\frac{n+1}{2}$ -е (в случае нечетного значения  $n$ ) значение варианты.

### Пример 10.2

Изучается признак  $X$  — среднемесячная заработная плата работников в целом по экономике в марте 2014 г. по 83 субъектам РФ. Получены следующие результаты:

Значение $X$ , тыс. руб.	18–25	25–32	32–39	39–46	46–53	53–60	60–67	67–74
Частота	44	22	5	2	2	4	2	2

Вычислим эмпирические характеристики признака.

*Решение*

Найдем середины каждого интервала:

Значение $X$ , тыс. руб.	18–25	25–32	32–39	39–46	46–53	53–60	60–67	67–74
Середина $x_i^*$	21,5	28,5	35,5	42,5	49,5	56,5	63,5	70,5



Проверяем:  $n = 44 + 22 + 5 + 2 + 2 + 4 + 2 + 2 = 83$ .

Найдем эмпирические характеристики признака:

$$\bar{x} = \frac{x_1^* \cdot n_1 + x_2^* \cdot n_2 + \dots + x_k^* \cdot n_k}{n} = \frac{21,5 \cdot 44 + \dots + 70,5 \cdot 2}{83} = 29,256;$$

$$D(X) = \frac{(x_1^* - \bar{x})^2 \cdot n_1 + (x_2^* - \bar{x})^2 \cdot n_2 + \dots + (x_k^* - \bar{x})^2 \cdot n_k}{n} =$$

$$= \frac{(21,5 - 29,256)^2 \cdot 44 + \dots + (70,5 - 29,256)^2 \cdot 2}{83} = 153,508201;$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = 12,39.$$

Для вычисления моды определим модальный интервал. Это интервал с наибольшей частотой, т.е. первый: от 18 до 25. Теперь воспользуемся формулой для вычисления моды:

$$Mo = x_{Mo} + h \cdot \frac{n_{Mo} - n_{Mo-1}}{(n_{Mo} - n_{Mo-1}) + (n_{Mo} - n_{Mo+1})} = 18 + 7 \cdot \frac{44 - 0}{(44 - 0) + (44 - 22)} = 22,67.$$

Для вычисления медианы найдем медианный интервал. Для этого определим, в каком интервале находится  $\frac{83+1}{2} = 42$ -е значение варианты (используем строку с частотами), приходим к выводу, что это тоже первый интервал: от 18 до 25. Воспользуемся формулой для вычисления медианы:

$$Me = x_{Me} + h \cdot \frac{\frac{n}{2} - S_{Me-1}}{n_{Me}} = 18 + 7 \cdot \frac{\frac{83}{2} - 0}{44} = 24,602.$$

Последние характеристики позволяют сделать выводы о том, что в половине субъектов РФ среднемесячная заработная плата работников в целом по экономике в марте 2014 г. была меньше 24,602 тыс. руб., что ниже эмпирического среднего значения 29,256; да и модальное значение среднемесячной заработной платы 22,67 тыс. руб. до него «не дотягивает».

Используя середины интервалов в качестве значений вариантов, вычисляем эмпирическую асимметрию

$$As = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = \frac{(21,5 - 29,256)^3 \cdot 44 + \dots + (70,5 - 29,256)^3 \cdot 2}{83 \cdot 12,39^3} = 0,953$$

и эмпирический эксцесс

$$Ex = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 = \frac{(21,5 - 29,256)^4 \cdot 44 + \dots + (70,5 - 29,256)^4 \cdot 2}{83 \cdot 12,39^4} - 3 = 0,353.$$

Ответ:  $\bar{x} = 29,256$ ;  $D(X) = 153,508201$ ;  $\sigma(X) = 12,39$ ;  $Mo = 22,67$ ;  $Me = 24,602$ ;  $As = 0,953$ ;  $Ex = 0,353$ .

В тех случаях, когда эмпирическая функция хорошо приближается функцией нормального распределения, для вычисления эмпирического стандартного отклонения применяют *поправку Шепарда*:

$$\sigma(X) \approx \sqrt{D(X)} - \frac{h^2}{12}.$$

Графическим изображением интервального статистического распределения является гистограмма. Для ее построения по оси  $Ox$  откладывают



интервалы шириной  $h$ , затем на каждом интервале строят прямоугольник высотой  $n_i$  — частотой, соответствующей выбранному интервалу.

Для интервального вариационного ряда из примера 10.2 гистограмма представлена на рис. 10.3.

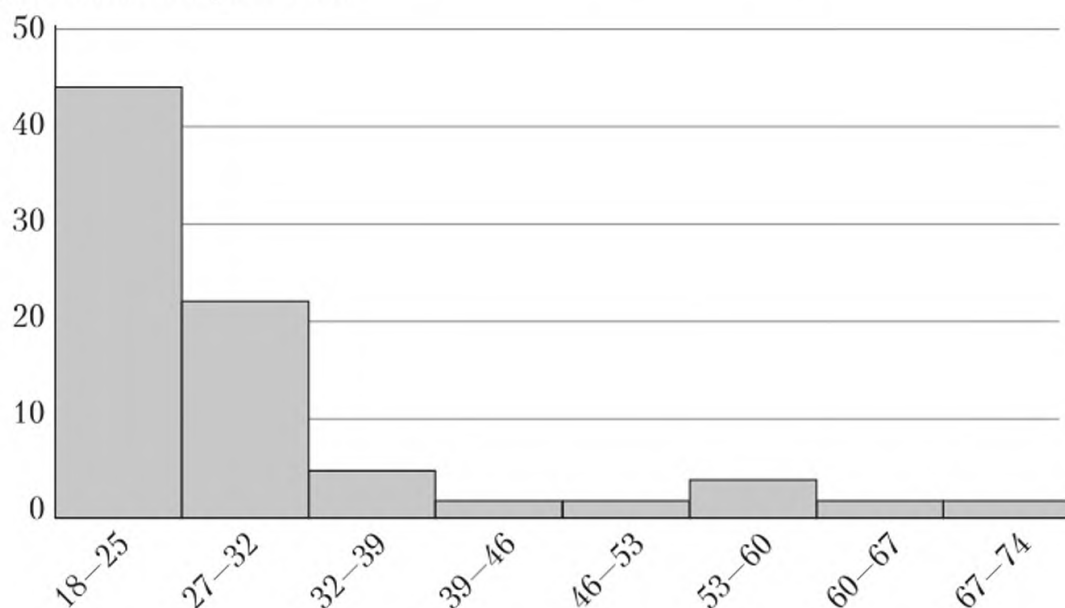


Рис. 10.3. Гистограмма к примеру 10.2

Рассмотрим признак  $X$ , наблюдаемый на совокупности  $\Omega$  объема  $n$ , разбитой на  $k$  групп заданных объемов  $n_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ . Обозначим через  $x_{ij}$  значение признака на  $j$ -м элементе  $i$ -й группы. Эмпирическое среднее и эмпирическую дисперсию в таком случае можно вычислять, используя соответствующие характеристики каждой группы.

Например, если  $\bar{x}_i = \frac{\sum_{j=1}^{n_i} x_{ij}}{n_i}$  — эмпирическое среднее в  $i$ -й группе, то общее среднее находят по формуле

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^k \bar{x}_i n_i}{n}.$$

Для общей дисперсии справедлива формула

$$\sigma^2 = \bar{\sigma}^2 + \delta^2,$$

где  $\sigma^2 = D(X)$  — эмпирическая дисперсия признака во всей совокупности  $\Omega$ ;

$\bar{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^k \sigma_i^2 n_i}{n}$  — средняя групповая дисперсия (из дисперсий  $D_i(X) = \sigma_i^2 =$

$= \frac{\sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - \bar{x}_i)^2}{n_i}$  в группах);  $\delta^2 = \frac{\sum_{i=1}^k (\bar{x}_i - \bar{x})^2 \cdot n_i}{n}$  — межгрупповая дисперсия (дисперсия средних).



Средняя групповая дисперсия характеризует изменчивость признака в каждой группе, поэтому иногда называется внутригрупповой дисперсией, а межгрупповая дисперсия характеризует разброс групповых средних от общего среднего.

Важной эмпирической характеристикой признака является *коэффициент детерминации*  $\eta = \frac{\delta^2}{\sigma^2}$ , определяющий долю межгрупповой дисперсии в общей дисперсии.

Если на совокупности  $\Omega$  объема  $n$  наблюдаются два признака  $X$  и  $Y$  и известно их совместное частотное распределение

	$X = x_1$	$X = x_2$	...	$X = x_k$
$Y = y_1$	$n_{11}$	$n_{21}$	...	$n_{k1}$
...	...	...	...	...
$Y = y_m$	$n_{1m}$	$n_{2m}$	...	$n_{km}$

(сумма всех частот  $n_{ij}$  равна объему совокупности  $n$ ), то для них может быть вычислена *эмпирическая ковариация* по формуле

$$\text{cov}(X, Y) = \frac{\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m (x_i - \bar{x}) \cdot (y_j - \bar{y}) \cdot n_{ij}}{n}.$$

Эмпирический коэффициент корреляции определяется формулой

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}.$$

### Пример 10.3

На 16 фермерских хозяйствах изучали два признака:  $X$  — количество прямых договоров о поставках продукции и  $Y$  — количество кредитов, взятых в банках. Было получено совместное статистическое распределение:

	$X = 2$	$X = 3$	$X = 4$	$X = 5$
$Y = 3$	1	0	1	0
$Y = 4$	2	4	4	2
$Y = 5$	0	1	0	1

Найдем эмпирический коэффициент корреляции  $\rho(X, Y)$ .

*Решение*

На основе заданного совместного статистического распределения найдем статистические распределения признака  $X$  и признака  $Y$ :

Варианты $x_i$	2	3	4	5
Частоты $n_i$	3	5	5	3

Варианты $y_j$	3	4	5
Частоты $n_j$	2	12	2

При составлении распределения частоты, соответствующие определенному значению варианты, суммируются.



Найдем эмпирические характеристики признаков  $X$  и  $Y$ :

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{2 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + 4 \cdot 5 + 5 \cdot 3}{16} = \frac{56}{16} = 3,5; \\ D(X) &= \frac{2^2 \cdot 3 + 3^2 \cdot 5 + 4^2 \cdot 5 + 5^2 \cdot 3}{16} - 3,5^2 = \frac{212}{16} - 12,25 = 1; \\ \sigma(X) &= \sqrt{D(X)} = 1; \\ \bar{y} &= \frac{3 \cdot 2 + 4 \cdot 12 + 5 \cdot 2}{16} = \frac{64}{16} = 4; \\ D(Y) &= \frac{3^2 \cdot 2 + 4^2 \cdot 12 + 5^2 \cdot 2}{16} - 4^2 = \frac{260}{16} - 16 = 0,25; \\ \sigma(Y) &= \sqrt{D(Y)} = 0,5.\end{aligned}$$

Из заданного совместного статистического распределения и с учетом средних значений признаков  $X$  и  $Y$  находим

$$\begin{aligned}\text{cov}(X, Y) &= \frac{\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m (x_i - \bar{x}) \cdot (y_j - \bar{y}) \cdot n_{ij}}{n} = \frac{\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m x_i y_j n_{ij}}{n} - \bar{x} \cdot \bar{y} = \\ &= \frac{2 \cdot 3 \cdot 1 + 4 \cdot 3 \cdot 1 + 2 \cdot 4 \cdot 2 + 3 \cdot 4 \cdot 4 + 4 \cdot 4 \cdot 4 + 5 \cdot 4 \cdot 2 + 3 \cdot 5 \cdot 1 + 5 \cdot 5 \cdot 1}{16} - 3,5 \cdot 4 = \\ &= 14,125 - 14 = 0,125.\end{aligned}$$

Теперь найдем ответ на вопрос задачи:

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)} = \frac{0,125}{1 \cdot 0,5} = 0,25.$$

Ответ:  $\rho(X, Y) = 0,25$ .

### 10.1.2. Выборочный метод

*Генеральной совокупностью* (ГС) называют все множество объектов или явлений, подлежащих изучению. Можно говорить о генеральной совокупности и как о совокупности всех возможных наблюдений, которые могли бы быть проведены при определенном комплексе условий. Прямое изучение генеральной совокупности очень трудоемко, да и не всегда возможно или оправдано. Генеральные совокупности изучаются на основе выборочных совокупностей, или *выборок*, которые должны достаточно хорошо отражать пропорции генеральной совокупности. В таком случае выборка называется *репрезентативной*. Одна из задач математической статистики состоит в том, чтобы на основе анализа выборочной совокупности сделать обоснованные выводы относительно всей генеральной совокупности. Существуют два способа формирования выборки: *повторный* и *бесповторный*. В первом случае выбираемый объект возвращается в генеральную совокупность (и может повторно попасть в выборку), во втором случае выбранный объект в генеральную совокупность уже не возвращается, поэтому бесповторная выборка состоит из различных объектов.

Генеральную совокупность принято обозначать  $\Omega$ . Объем генеральной совокупности будем обозначать  $N$ . Выборку объема  $n$  из генеральной сово-



купности принято обозначать  $\tilde{\Omega}$ . Пусть  $X$  — признак, заданный в генеральной совокупности, тогда  $x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0N}$  — все возможные значения этого признака в генеральной совокупности. Значения признака в выборочной совокупности ведут себя как случайные величины  $X_1, X_2, \dots, X_n$  с множеством возможных значений  $x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0N}$ . Характеристики признака в генеральной совокупности называют *генеральными характеристиками*, они не являются случайными величинами и определяются следующим образом:

$$\bar{x}_0 = \frac{x_{01} + x_{02} + \dots + x_{0N}}{N} \text{ — генеральное среднее;}$$

$$D(X) = \frac{\sum_{i=1}^N (x_{0i} - \bar{x}_0)^2}{N} \text{ — генеральная дисперсия;}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} \text{ — генеральное стандартное отклонение.}$$

Еще раз подчеркнем, что генеральные характеристики являются *числами*, а не случайными величинами.

Эмпирические характеристики признака в выборочной совокупности называются *выборочными характеристиками* признака  $X$ . Понятно, что выборочные характеристики являются *случайными величинами*:

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} \text{ — выборочное среднее;}$$

$$D_b(X) = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n} \text{ — выборочная дисперсия;}$$

$$\sigma_b(X) = \sqrt{D_b(X)} \text{ — выборочное стандартное отклонение.}$$

Закон больших чисел является теоретической основой для применения выборочного метода: при неограниченном увеличении объема выборки ее характеристики сколь угодно близко приближаются к характеристикам генеральной совокупности.

Существует доказанная связь между выборочными и генеральными характеристиками, при этом учитывается и способ формирования выборочной совокупности.

В случае *повторной* выборки имеют место равенства

$$E(\bar{X}) = \bar{x}_0; \quad D(\bar{X}) = \frac{D(X)}{n}.$$

Здесь  $\bar{X}$  — выборочное среднее, которое является случайной величиной, и поэтому можно найти его математическое ожидание и дисперсию. Мы видим, что математическое ожидание выборочного среднего для повторной выборки равно генеральному среднему, а дисперсия выборочного среднего повторной выборки определяется генеральной дисперсией, деленной на объем выборки.



В случае *бесповторной* выборки имеют место равенства

$$E(\bar{X}) = \bar{x}_0; D(\bar{X}) = \frac{D(X)}{n} \cdot \frac{N-n}{N-1}.$$

И здесь  $\bar{X}$  — выборочное среднее, которое является случайной величиной. Ее математическое ожидание и для бесповторной выборки равно генеральному среднему, а дисперсия выборочного среднего бесповторной выборки теперь определяется генеральной дисперсией, деленной на объем выборки и умноженной на отношение  $\frac{N-n}{N-1}$ , где  $N$  — объем генеральной совокупности.

Важно отметить, что при известных характеристиках генеральной совокупности с помощью указанных формул всегда можно оценить выборочное среднее, для этого необходимо знать только объем выборки и способ ее формирования.

*Средней ошибкой выборки* называют среднеквадратическую ошибку в равенстве  $\bar{x}_0 \approx \bar{X}$  и обозначают ее  $\sigma(\bar{X})$ . Понятно, что  $\sigma(\bar{X}) = \sqrt{D(\bar{X})}$ , поэтому среднюю ошибку выборки в случае повторного отбора можно вычислить следующим образом:

$$\sigma(\bar{X}) = \sqrt{D(\bar{X})} = \sqrt{\frac{D(X)}{n}} = \frac{\sigma(X)}{\sqrt{n}},$$

а в случае бесповторного отбора средняя ошибка выборки определяется по формуле

$$\sigma(\bar{X}) = \sqrt{D(\bar{X})} = \sqrt{\frac{D(X)}{n} \cdot \frac{N-n}{N-1}} = \sigma(X) \cdot \sqrt{\frac{N-n}{n \cdot (N-1)}}.$$

Напомним, что  $\sigma(X)$  — генеральное стандартное отклонение.

При *заданной* средней ошибке  $\sigma(\bar{X})$  и известных генеральных характеристиках из полученных равенств определяется *необходимый объем выборки*, при котором эта ошибка возможна.

В случае *повторной* выборки этот объем вычисляется как

$$n = \left( \frac{\sigma(X)}{\sigma(\bar{X})} \right)^2,$$

а в случае *бесповторного* отбора он определяется по формуле

$$n = \frac{D(X) \cdot N}{N \cdot (\sigma(\bar{X}))^2 + D(X)}.$$

Напомним, что генеральная дисперсия  $D(X) = \sigma^2(X)$ .

Можно утверждать, что независимо от способа формирования выборки выполняется неравенство

$$\sigma(\bar{X}) \leq \frac{\sigma(X)}{\sqrt{n}},$$

где по-прежнему  $\bar{X}$  — выборочное среднее;  $\sigma(X)$  — генеральное стандартное отклонение;  $n$  — объем выборочной совокупности.



Если в генеральной совокупности  $\Omega$  объема  $N$  изучать два признака  $X$  и  $Y$  по выборке объема  $n$ , то, обозначив значения признаков в выборке как  $X_1, X_2, \dots, X_n, Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ , можно получить выражение для ковариации выборочных средних  $\bar{X}$  и  $\bar{Y}$ :

$$\text{cov}(\bar{X}, \bar{Y}) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{n} \text{ в случае повторной выборки;}$$

$$\text{cov}(\bar{X}, \bar{Y}) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{n} \cdot \frac{N-n}{N-1} \text{ в случае бесповторной выборки.}$$

#### Пример 10.4

В генеральной совокупности из 100 торговых предприятий в течение месяца наблюдали за двумя признаками:  $X$  — количеством жалоб потребителей на качество продаваемой продукции и  $Y$  — количеством проверок торговой инспекции. Результаты оказались следующие:

	$X = 5$	$X = 10$	$X = 15$
$Y = 0$	10	20	40
$Y = 1$	5	10	15

Из генеральной совокупности случайным образом выбирают 10 предприятий. Найдём среднюю ошибку выборки для количества жалоб потребителей на качество продаваемой продукции, а также ковариацию выборочных средних  $\bar{X}$  и  $\bar{Y}$ . Рассмотрим условия повторной и бесповторной выборки.

*Решение*

Объём генеральной совокупности нам известен:  $N = 100$ .

Найдём генеральные характеристики:

$$\bar{x}_0 = \frac{x_{01} + x_{02} + \dots + x_{0N}}{N} = \frac{5 \cdot 15 + 10 \cdot 30 + 15 \cdot 55}{100} = 12 \text{ — генеральное среднее для } X;$$

$$D(X) = \frac{\sum_{i=1}^N (x_{0i} - \bar{x}_0)^2}{N} = \frac{5^2 \cdot 15 + 10^2 \cdot 30 + 15^2 \cdot 55}{100} - 12^2 = 13,5 \text{ — генеральная дисперсия для } X;$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{13,5} = 3,674 \text{ — генеральное стандартное отклонение для } X;$$

$$\bar{y}_0 = \frac{y_{01} + y_{02} + \dots + y_{0N}}{N} = \frac{0 \cdot 70 + 1 \cdot 30}{100} = 0,3 \text{ — генеральное среднее для } Y;$$

$$D(Y) = \frac{\sum_{i=1}^N (y_{0i} - \bar{y}_0)^2}{N} = \frac{0^2 \cdot 70 + 1^2 \cdot 30}{100} - 0,3^2 = 0,21 \text{ — генеральная дисперсия для } Y;$$

$$\sigma(Y) = \sqrt{D(Y)} = \sqrt{0,21} = 0,458 \text{ — генеральное стандартное отклонение для } Y;$$

$$\begin{aligned} \text{cov}(X, Y) &= \frac{\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m (x_{0i} - \bar{x}_0) \cdot (y_{0j} - \bar{y}_0) \cdot n_{ij}}{N} = \frac{\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m x_{0i} y_{0j} \cdot n_{ij}}{N} - \bar{x}_0 \cdot \bar{y}_0 = \\ &= \frac{0 + 0 + 0 + 5 \cdot 1 \cdot 5 + 10 \cdot 1 \cdot 10 + 15 \cdot 1 \cdot 15}{100} - 12 \cdot 0,3 = -0,1. \end{aligned}$$

Теперь ответим на вопросы задачи. Рассмотрим сначала условие повторной выборки.



Средняя ошибка для  $X$  определяется равенством  $\sigma(\bar{X}) = \frac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}$  и в нашем случае равна  $\sigma(\bar{X}) = \frac{3,674}{\sqrt{10}} = 1,162$ ; ковариация средних равна

$$\text{cov}(\bar{X}, \bar{Y}) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{n} = \frac{-0,1}{10} = -0,01.$$

Для бесповторной выборки имеем

$$\sigma(\bar{X}) = \sqrt{\frac{D(X)}{n} \cdot \frac{N-n}{N-1}} = \sigma(X) \cdot \sqrt{\frac{N-n}{n \cdot (N-1)}} = 3,674 \cdot \sqrt{\frac{100-10}{10 \cdot (100-1)}} = 1,108;$$

$$\text{cov}(\bar{X}, \bar{Y}) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{n} \cdot \frac{N-n}{N-1} = \frac{-0,1}{10} \cdot \frac{100-10}{100-1} = -0,009.$$

*Ответ:* для повторной выборки средняя ошибка выборки для количества жалоб потребителей на качество продаваемой продукции равна 1,162 и ковариация средних 0,01; для бесповторной выборки средняя ошибка выборки для количества жалоб потребителей на качество продаваемой продукции равна 1,108 и ковариация средних 0,009.

### Пример 10.5

Каким должен быть минимальный объем выборки из генеральной совокупности в примере 10.4, чтобы средняя ошибка выборки для количества жалоб потребителей на качество продаваемой продукции была не больше 0,8? Рассмотрим условия повторной и бесповторной выборки.

*Решение*

Нам известны генеральные характеристики и средняя ошибка выборки  $\sigma(\bar{X}) = 0,8$ . Для ответа на вопрос задачи воспользуемся соответствующими формулами.

В случае повторной выборки

$$n = \left( \frac{\sigma(X)}{\sigma(\bar{X})} \right)^2 = \left( \frac{3,674}{0,8} \right)^2 = 21,091,$$

т.е. начиная с  $n = 22$  условие на среднюю ошибку выборки выполняется (объем выборки не может быть дробным числом).

В случае бесповторной выборки

$$n = \frac{D(X) \cdot N}{N \cdot (\sigma(\bar{X}))^2 + D(X)} = \frac{13,5 \cdot 100}{100 \cdot 0,8^2 + 13,5} = 17,42,$$

т.е. уже начиная с  $n = 18$  условие на среднюю ошибку выборки будет выполняться.

*Ответ:* для средней ошибки, не превосходящей 0,8, минимальный объем повторной выборки равен 22, минимальный объем бесповторной выборки равен 18.

Генеральной долей  $p$  значения  $x_i$  признака  $X$  называется отношение  $\frac{N_i}{N}$ ;

выборочной долей  $\hat{p}$  значения  $x_i$  признака  $X$  называется отношение  $\frac{n_i}{n}$ , где,

как и прежде,  $N$  — объем генеральной совокупности;  $n$  — объем выборочной совокупности.



Так как выборочная доля ведет себя как случайная величина, можно вычислять для нее математическое ожидание и дисперсию. Имеют место следующие равенства:

$$E(\hat{p}) = p \text{ и } D(\hat{p}) = \frac{p \cdot (1-p)}{n} \text{ — для повторной выборки;}$$

$$E(\hat{p}) = p \text{ и } D(\hat{p}) = \frac{p \cdot (1-p)}{n} \cdot \frac{N-n}{N-1} \text{ — для бесповторной выборки.}$$

*Средней ошибкой выборки* называют среднеквадратическую ошибку в равенстве  $\hat{p} \approx p$  и обозначают ее  $\sigma(\hat{p})$ . Понятно, что  $\sigma(\hat{p}) = \sqrt{D(\hat{p})}$ , поэтому в случае повторного отбора среднюю ошибку выборки вычисляют следующим образом:

$$\sigma(\hat{p}) = \sqrt{D(\hat{p})} = \sqrt{\frac{pq}{n}}, \quad q = 1 - p,$$

а в случае бесповторного отбора средняя ошибка выборки определяется по формуле

$$\sigma(\hat{p}) = \sqrt{D(\hat{p})} = \sqrt{\frac{pq}{n} \cdot \frac{N-n}{N-1}}, \quad q = 1 - p.$$

При решении задач бывает полезно и приближенное равенство

$$\sigma(\hat{p}) \approx \sqrt{\frac{pq}{n} \cdot \left(1 - \frac{n}{N}\right)}, \quad q = 1 - p.$$

Например, если объем генеральной совокупности равен  $N = 1000$ , а генеральная доля признака составляет  $p = 0,25$ , то при объеме выборки  $n = 50$  средняя ошибка будет оцениваться как

$$\sigma(\hat{p}) \approx \sqrt{\frac{0,25 \cdot 0,75}{50} \cdot \left(1 - \frac{50}{1000}\right)} = 0,0597.$$

## 10.2. Статистические оценки параметров распределения

Мы уже отмечали, что одной из задач математической статистики является разработка методов, используя которые, можно по выборочным данным охарактеризовать изучаемую генеральную совокупность. Если генеральное распределение признака зависит от некоторого параметра, то поставленную задачу можно решать, оценивая значение этого параметра. Пусть  $\theta$  — параметр, от которого зависит генеральное распределение признака  $X$ .

*Статистической оценкой  $\hat{\theta}$  параметра  $\theta$*  является функция, зависящая от результатов наблюдений за выборочными значениями признака:  $\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ . Если статистическая оценка определяется одним числом, то она называется *точечной*, если же статистическая оценка определяется с помощью некоторого числового промежутка, то в таком случае говорят об *интервальной* оценке. Понятно, что статистическая оценка отличается от значения параметра  $\theta$  генеральной совокупности — ведь ее значение определяется выборочными данными, меняющимися от выборки к выборке. Поэтому актуальным становится вопрос: насколько каче-



ственной является полученная статистическая оценка  $\hat{\theta}$ ? Статистические оценки должны удовлетворять определенным требованиям, чтобы стать «хорошими» оценками параметров генеральной совокупности, а именно — быть состоятельными, эффективными и несмещенными.

Оценка  $\hat{\theta}$  называется *состоятельной*, если для любого сколь угодно малого числа  $\varepsilon > 0$  выполняется равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (P\{|\hat{\theta} - \theta| < \varepsilon\}) = 1.$$

Это условие означает сходимость по вероятности полученной оценки к оцениваемому параметру.

Оценка  $\hat{\theta}$  называется *эффективной* в классе оценок в том случае, когда в этом классе при фиксированном объеме выборки она имеет наименьшую дисперсию.

Оценка  $\hat{\theta}$  называется *несмещенной*, если ее математическое ожидание равно оцениваемому параметру:  $E(\hat{\theta}) = \theta$ .

Выполнимость этого условия гарантирует отсутствие систематических ошибок при проведении оценки параметра.

При решении задач математической статистики несостоятельные оценки никогда не применяются.

Для состоятельности оценки  $\hat{\theta}$  достаточно выполнимости условий

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D(\hat{\theta}) = 0; E(\hat{\theta}) = \theta.$$

Для несмещенности оценки  $\hat{\theta}$  достаточно, чтобы выполнялось только одно условие  $\lim_{n \rightarrow \infty} D(\hat{\theta}) = 0$ , потому что второе — требование из определения.

Для любой выборки  $X_1, X_2, \dots, X_n$  из генеральной совокупности *выборочное среднее*  $\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$  является *несмещенной* и *состоятельной* оцен-

кой генеральной средней  $\bar{x}_0 = \frac{x_{01} + x_{02} + \dots + x_{0N}}{N}$ , т.е. выполнены условия

$$E(\bar{X}) = \bar{x}_0; \lim_{n \rightarrow \infty} D(\bar{X}) = 0.$$

Если генеральная совокупность распределена по нормальному закону, то выборочное среднее является и эффективной оценкой генеральной средней.

Относительная частота  $\frac{k}{n}$  наступления события  $A$  в серии из  $n$  испытаний, проходящих по схеме Бернулли, является эффективной, состоятельной и несмещенной оценкой вероятности  $p = P(A)$ .

*Исправленная выборочная дисперсия*

$$S^2 = \frac{n}{n-1} D_b(X)$$

является состоятельной *несмещенной* оценкой генеральной дисперсии.



При вычислении  $S^2$  используют формулу

$$S^2 = \frac{n}{n-1} D_b(X) = \frac{n}{n-1} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{\infty} (X_i - \bar{X})^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{\infty} (X_i - \bar{X})^2}{n-1}.$$

Если известно генеральное среднее  $E(X) = \bar{x}_0$ , то несмещенная состоятельная оценка вычисляется по формуле

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{\infty} (X_i - \bar{x}_0)^2}{n}.$$

### Пример 10.6

Генеральная совокупность изучается по случайной выборке объема  $n = 100$ , результаты отражены в таблице:

Значения	$X = 5$	$X = 10$	$X = 15$
Частоты	15	30	55

Найдем несмещенные оценки генерального среднего и генеральной дисперсии.

*Решение*

Несмещенной оценкой генерального среднего является выборочное среднее, а несмещенной оценкой генеральной дисперсии — величина  $S^2$ , поэтому вычисляем:

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} = \frac{5 \cdot 15 + 10 \cdot 30 + 15 \cdot 55}{100} = 12;$$

$$\begin{aligned} S^2 &= \frac{n}{n-1} D_b(X) = \frac{100}{99} \cdot \frac{(5-12)^2 \cdot 15 + (10-12)^2 \cdot 30 + (15-12)^2 \cdot 55}{100} = \\ &= \frac{(5-12)^2 \cdot 15 + (10-12)^2 \cdot 30 + (15-12)^2 \cdot 55}{99} = \frac{1350}{99} = \frac{150}{11} = 13,636. \end{aligned}$$

*Ответ:* несмещенная оценка генерального среднего равна 12, несмещенная оценка генеральной дисперсии равна 13,636.

Для нахождения точечных оценок параметров заданного распределения генеральной совокупности используют два основных метода — метод моментов и метод максимального правдоподобия.

Суть *метода моментов* для оценивания неизвестных параметров распределения генеральной совокупности состоит в приравнивании теоретических моментов и соответствующих выборочных моментов с последующим решением полученного уравнения или системы уравнений.

Если теоретическое распределение имеет один параметр, то для его оценки методом моментов необходимо решить уравнение

$$E(X) = \bar{X},$$

приравняв начальные моменты первого порядка (для распределения генеральной совокупности — это теоретическое математическое ожидание, а для выборочной совокупности — это выборочное среднее).

Если теоретическое распределение имеет два параметра, то для их оценки методом моментов необходимо решить систему уравнений



$$\begin{cases} E(X) = \bar{X}, \\ D(X) = D_v(X), \end{cases}$$

приравняв не только начальные моменты первого порядка, но и центральные моменты второго порядка (для распределения генеральной совокупности — это теоретическая дисперсия, а для выборочной совокупности — это выборочная дисперсия).

Метод моментов наиболее прост при проведении оценки параметров, и получаемые в результате оценки всегда являются состоятельными, этого бывает достаточно для решения многих задач математической статистики.

### Пример 10.7

Величина  $X$  распределена по показательному закону с плотностью вероятности

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \end{cases} \text{ и изучается с помощью выборки}$$

Значения	$X = 0$	$X = 1$	$X = 2$	$X = 3$
Частоты	115	100	20	15

Найдем методом моментов точечную оценку значения  $\lambda$ .

*Решение*

Для показательного распределения  $\lambda$  является единственным параметром, поэтому при решении задачи будем использовать уравнение  $E(X) = \bar{X}$ .

Напомним, что математическое ожидание для величины, распределенной по показательному закону, вычисляется как  $E(X) = \frac{1}{\lambda}$ . Поэтому наше уравнение примет вид

$$\frac{1}{\lambda} = \bar{X}.$$

Выборочное среднее будем вычислять, используя данные условия задачи, а в уравнении заменим  $\lambda$  на  $\hat{\lambda}$  — оценку, получаемую по выборке:

$$\frac{1}{\hat{\lambda}} = \frac{0 \cdot 115 + 1 \cdot 100 + 2 \cdot 20 + 3 \cdot 15}{115 + 100 + 20 + 15} \Rightarrow \frac{1}{\hat{\lambda}} = \frac{185}{250} \Rightarrow \hat{\lambda} = \frac{250}{185} = 1,351.$$

Ответ:  $\hat{\lambda} = 1,351$ .

### Пример 10.8

Величина  $X$  распределена по биномиальному закону с параметрами  $n$  и  $p$ , изучается с помощью выборки

Значения	$X = 0$	$X = 1$	$X = 3$	$X = 4$	$X = 5$	$X = 7$
Частоты	2	8	10	10	6	1

Найдем методом моментов точечную оценку значений параметров.

*Решение*

Биномиальное распределение зависит от двух параметров, поэтому для решения задачи будем использовать систему

$$\begin{cases} E(X) = \bar{X}, \\ D(X) = D_v(X). \end{cases}$$



Мы знаем, как вычисляются математическое ожидание и дисперсия для величины, распределенной по биномиальному закону:  $E(X) = np$ ,  $D(X) = npq = np(1-p)$ .

Поэтому система примет вид

$$\begin{cases} np = \bar{X}, \\ np(1-p) = D_n(X). \end{cases}$$

По заданной выборке вычислим:

$$\bar{X} = \frac{0 \cdot 2 + 1 \cdot 8 + 3 \cdot 10 + 4 \cdot 10 + 5 \cdot 6 + 7 \cdot 1}{2 + 8 + 10 + 10 + 6 + 1} = \frac{115}{37};$$

$$D_n(X) = \frac{0^2 \cdot 2 + 1^2 \cdot 8 + 3^2 \cdot 10 + 4^2 \cdot 10 + 5^2 \cdot 6 + 7^2 \cdot 1}{37} - \left(\frac{115}{37}\right)^2 = \frac{3684}{1369}.$$

Подставим полученные значения в систему и переобозначим параметры:

$$\begin{cases} \hat{n}\hat{p} = \frac{115}{37}, \\ \hat{n}\hat{p}(1-\hat{p}) = \frac{3684}{1369} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \hat{n}\hat{p} = \frac{115}{37}, \\ \frac{115}{37} \cdot (1-\hat{p}) = \frac{3684}{1369} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \hat{n}\hat{p} = \frac{115}{37}, \\ \hat{p} = \frac{571}{4255} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \hat{n} = \frac{489325}{21127}, \\ \hat{p} = \frac{571}{4255}. \end{cases}$$

Параметр  $n$  биномиального распределения определяет количество независимых испытаний, проходящих по схеме Бернулли, поэтому не может быть дробным числом. Учтем это и ответим на вопрос задачи:

$$\begin{cases} \hat{n} = \frac{489325}{21127} = 23,161, \\ \hat{p} = \frac{571}{4255} = 0,134 \end{cases} \Rightarrow \hat{n} = 24; \hat{p} = 0,134.$$

Ответ:  $\hat{n} = 24$ ;  $\hat{p} = 0,134$ .

Еще одним методом получения точечных оценок параметров является *метод максимального правдоподобия*. В основе этого метода лежит функция правдоподобия. Если известна плотность вероятности  $f(x, \theta)$  генеральной совокупности, но не известен параметр  $\theta$  этого распределения, то при заданной выборке  $X_1, X_2, \dots, X_n$  функция правдоподобия определяется произведением вида

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n, \theta) = f(x_1, \theta) \cdot f(x_2, \theta) \cdot \dots \cdot f(x_n, \theta).$$

Если закон распределения генеральной совокупности — дискретный, то функция правдоподобия определяется произведением вида

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n, \theta) = p(x_1, \theta) \cdot p(x_2, \theta) \cdot \dots \cdot p(x_n, \theta),$$

здесь  $p(x_i, \theta) = P(X = x_i, \theta)$ .

Точечной оценкой  $\hat{\theta}$  параметра  $\theta$  называют значение  $\theta$ , при котором функция правдоподобия  $L(x_1, x_2, \dots, x_n, \theta)$  достигает максимума. Доказано, что функции  $L(x_1, x_2, \dots, x_n, \theta)$  и  $\ln L(x_1, x_2, \dots, x_n, \theta)$  достигают максимума в одних и тех же точках, поэтому удобнее исследовать на максимум функцию  $\ln L(x_1, x_2, \dots, x_n, \theta)$ .

Если распределение генеральной совокупности зависит от нескольких параметров, то функция правдоподобия исследуется на максимум как функция нескольких переменных.



Оценки параметров, полученные на основе метода максимального правдоподобия, являются состоятельными и эффективными, однако трудность решения уравнений правдоподобия является основным недостатком этого метода.

### Пример 10.9

Величина  $X$  распределена по показательному закону с плотностью вероятности

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \end{cases} \text{ и изучается с помощью выборки}$$

Значения	$X = 0$	$X = 1$	$X = 2$	$X = 3$
Частоты	115	100	20	15

Найдем методом максимального правдоподобия точечную оценку значения параметра  $\lambda$ .

*Решение*

Используя выборочные данные, составим функцию правдоподобия, при этом учитываем, что параметром распределения является  $\lambda$  ( $\theta = \lambda$ ):

$$\begin{aligned} L(x_1, x_2, \dots, x_n, \theta) &= f(x_1, \theta) \cdot f(x_2, \theta) \cdot \dots \cdot f(x_n, \theta) = \\ &= (\lambda e^{-\lambda \cdot 0})^{115} \cdot (\lambda e^{-\lambda \cdot 1})^{100} \cdot (\lambda e^{-\lambda \cdot 2})^{20} \cdot (\lambda e^{-\lambda \cdot 3})^{15} = \\ &= \lambda^{115+100+20+15} \cdot e^{-\lambda(0 \cdot 115 + 1 \cdot 100 + 2 \cdot 20 + 3 \cdot 15)} = \lambda^{250} \cdot e^{-185\lambda}. \end{aligned}$$

Найдем  $\ln L(x_1, x_2, \dots, x_n, \theta)$ :

$$\ln L(x_1, x_2, \dots, x_n, \theta) = \ln(\lambda^{250} \cdot e^{-185\lambda}) = 250 \ln \lambda - 185\lambda.$$

Исследуем  $\ln L(x_1, x_2, \dots, x_n, \theta)$  на максимум, для этого вычислим производную первого порядка и приравняем ее к нулю:

$$(\ln L(x_1, \dots, x_n, \lambda))'_\lambda = (250 \ln \lambda - 185\lambda)'_\lambda = \frac{250}{\lambda} - 185;$$

$$\frac{250}{\lambda} - 185 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{250}{185} = 1,351.$$

Используя известное из курса математического анализа достаточное условие экстремума, доказываем, что при  $\lambda = 1,351$  функция  $\ln L(x_1, x_2, \dots, x_n, \theta)$  достигает максимума, а значит, при этом значении достигает максимума и функция правдоподобия  $L(x_1, x_2, \dots, x_n, \theta)$ . Полученное значение и является искомой точечной оценкой неизвестного параметра  $\lambda$ .

*Ответ:*  $\hat{\lambda} = 1,351$ .

Точечные оценки параметров не позволяют говорить о том, какую ошибку мы совершаем, заменяя неизвестный параметр  $\theta$  найденной оценкой  $\hat{\theta}$ . При малых объемах выборки такие ошибки могут быть весьма существенными. Интервальные оценки параметров позволяют оценить ошибку при такой замене.

*Интервальной оценкой параметра  $\theta$*  называется числовой интервал  $(\theta_1; \theta_2)$ , накрывающий неизвестное значение параметра с заданной вероятностью  $\gamma$ . Границы интервала вычисляются по выборочным данным, поэтому ведут себя как случайные величины.



Интервал  $(\theta_1; \theta_2)$  называется *доверительным*, а соответствующая вероятность  $\gamma$  — *доверительной вероятностью*. Доверительная вероятность зависит от решаемой задачи и выбирается заранее, чаще всего используется  $\gamma = 0,95$  или  $\gamma = 0,99$ .

По условию  $\gamma = P(|\theta - \hat{\theta}| < \delta)$ , где  $\delta$  — точность оценки. Это условие преобразуется к виду  $\gamma = P(\hat{\theta} - \delta < \theta < \hat{\theta} + \delta)$  и при известном законе распределения генеральной совокупности позволяет формировать доверительные интервалы для оцениваемых параметров.

Напомним, что квантилем порядка (уровня)  $p$  называется такое значение  $q_p$  абсолютно непрерывной случайной величины, что

$$\int_{-\infty}^{q_p} f(x) dx = p.$$

Геометрически это условие изображено на рис. 10.4.

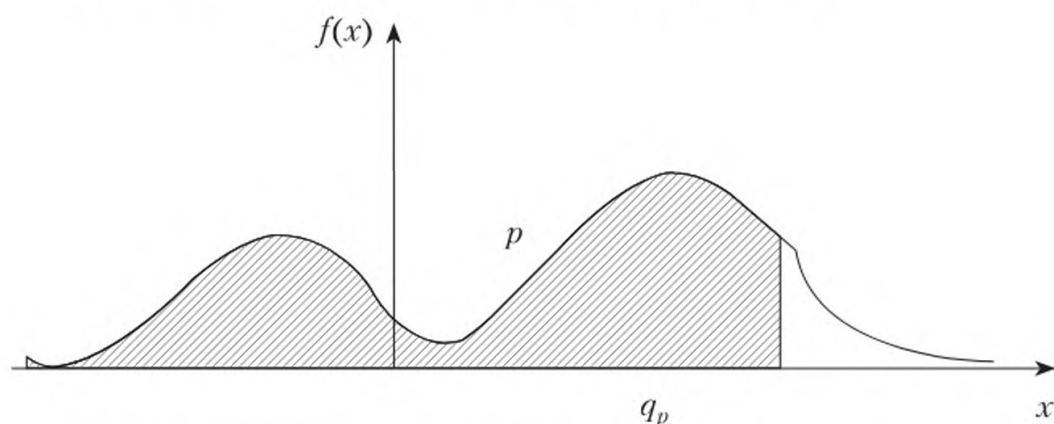


Рис. 10.4. Квантиль порядка  $p$

С понятием квантиля тесно связано понятие процентной точки. Например, 5%-ная точка является квантилем порядка 0,95.

Если  $q_p$  — квантиль распределения порядка  $p$ , то он также называется  $100 \cdot (1 - p)$ -процентной точкой распределения.

Если  $p = 0,95$ , то  $q_p$  — 5%-ная точка распределения (рис. 10.5).

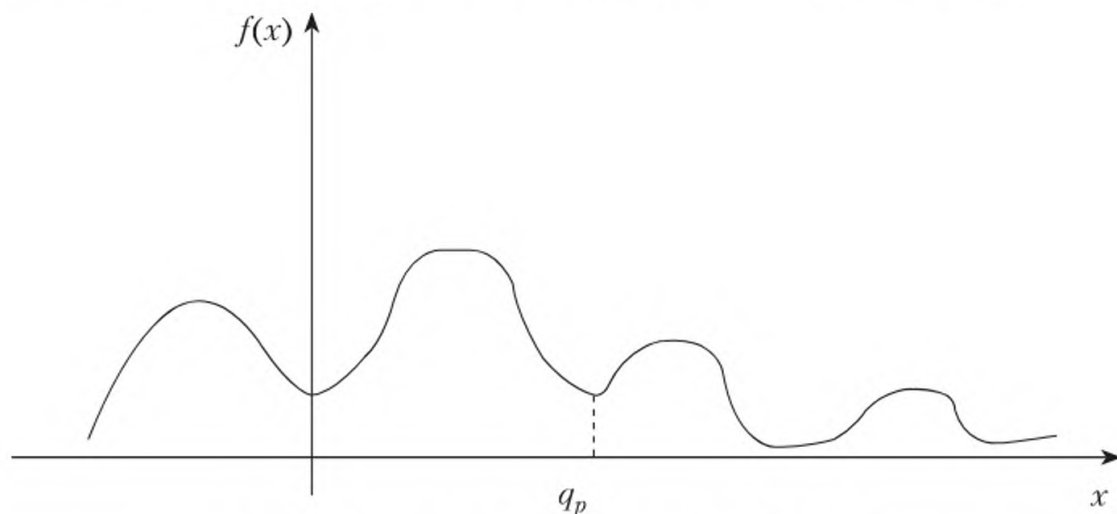


Рис. 10.5. Процентная точка распределения



Кроме нормального распределения генеральной совокупности с плотностью вероятности  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$  в математической статистике используют и другие законы распределения.

Рассмотрим распределения некоторых случайных величин, представляющих собой функции нормальных случайных величин, используемые в математической статистике.

*Распределением  $\chi^2$  (хи-квадрат)* с  $k = n$  степенями свободы называется распределение суммы квадратов  $n$  независимых случайных величин, распределенных по стандартному нормальному закону:  $Z = Y_1^2 + Y_2^2 + \dots + Y_n^2$ ,  $Y_i \sim N(0, 1)$ ,  $Z \sim \chi^2(n)$ .

График плотности распределения  $\chi^2$  представлен на рис. 10.6.

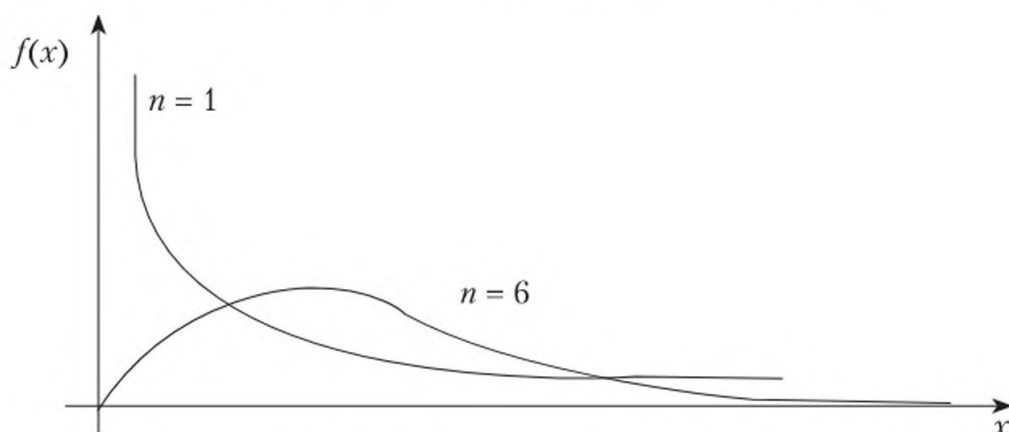


Рис. 10.6. График плотности распределения  $\chi^2$

Процентные точки распределения  $\chi^2$  табулированы.

Отметим, что  $\chi^2_{\alpha}(k) \approx (Z_{\alpha} + \sqrt{2k-1})^2 / 2$  при  $k > 30$ .

*Распределением Стьюдента* или  $t$ -распределением с  $k$  степенями свободы называется распределение случайной величины

$$Z = \frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{k}}},$$

где  $X$  и  $Y$  независимы,  $X \sim N(0, 1)$ ,  $Y \sim \chi^2(k)$ ; обозначение:  $Z \sim t(k)$ .

График плотности распределения Стьюдента представлен на рис. 10.7.

Кривая распределения Стьюдента по сравнению с кривой нормального распределения (вторая кривая на графике) является более полой.

Числовые характеристики распределения Стьюдента определяются следующим образом:

$$E(t) = 0; D(t) = \frac{k}{k-2} \text{ (при } k > 2\text{)}.$$

При  $k \rightarrow \infty$   $t$ -распределение приближается к стандартному нормальному. При  $k > 30$  они уже практически неразличимы.

Для процентных точек  $t$ -распределения также составлены таблицы.



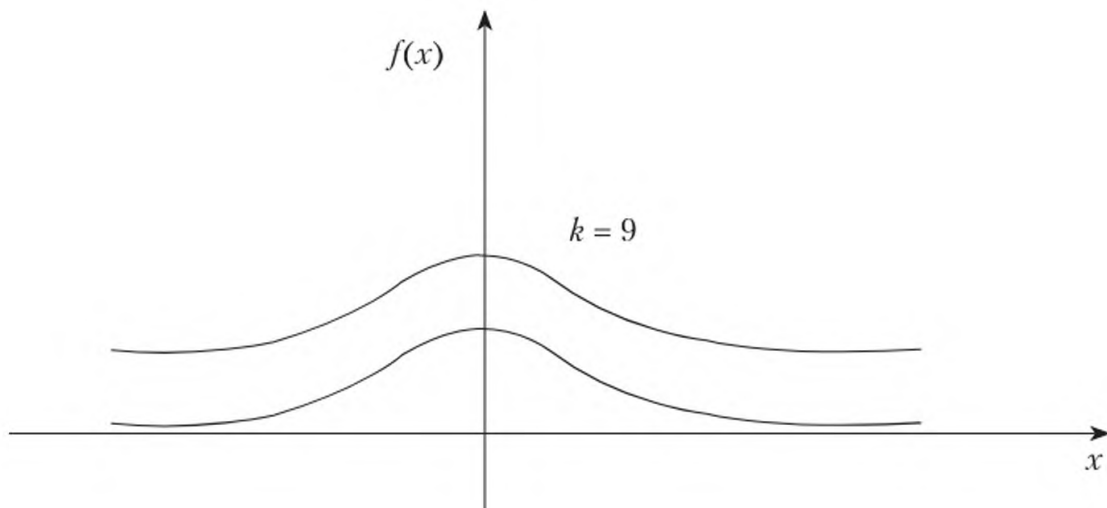


Рис. 10.7. График плотности распределения Стьюдента

Отметим, что  $t_{\alpha}(k) \approx Z_{\alpha}$  при  $k > 30$ ;  $t_{1-\alpha}(k) = -t_{\alpha}(k)$ .

Распределением Фишера — Снедекора или  $F$ -распределением с  $k_1, k_2$  степенями свободы называется распределение случайной величины

$$Z = \frac{X / k_1}{Y / k_2},$$

где  $X$  и  $Y$  — независимые случайные величины,  $X \sim \chi^2(k_1)$ ,  $Y \sim \chi^2(k_2)$ .

График плотности распределения Фишера — Снедекора представлен на рис. 10.8.

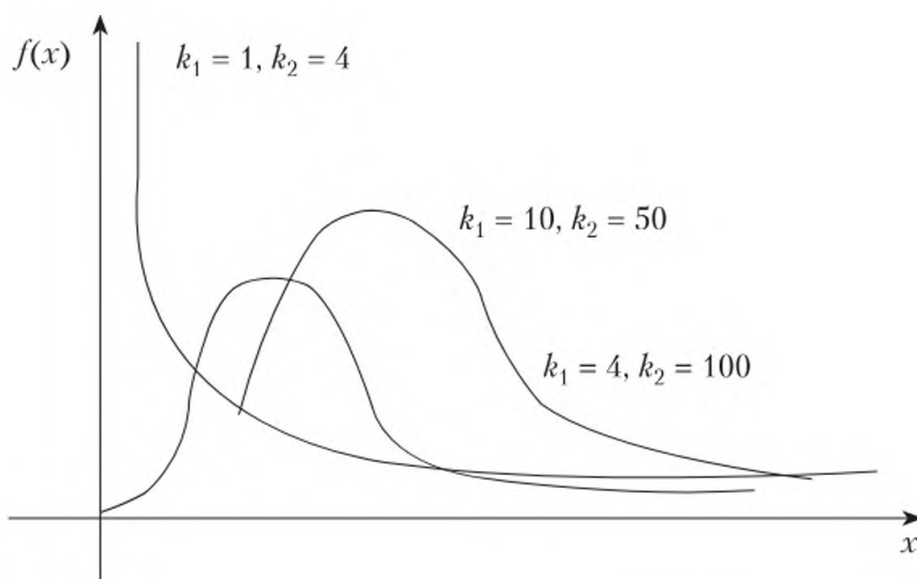


Рис. 10.8. График плотности распределения Фишера — Снедекора

С ростом числа степеней свободы распределение Фишера — Снедекора приближается к нормальному распределению.

Процентные точки распределения Фишера — Снедекора табулированы. Отметим, что

$$F_{1-\alpha}(k_1, k_2) = \frac{1}{F_{\alpha}(k_1, k_2)}; \quad F_{1-\alpha}(k_1, k_2) = (F_{\alpha}(k_1, k_2))^{-1}.$$



Доверительный интервал для оценки неизвестного математического ожидания нормально распределенной генеральной совокупности *при известной генеральной дисперсии*  $D(X) = \sigma^2$  имеет вид

$$\bar{X} - z_\gamma \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < E(X) < \bar{X} + z_\gamma \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}},$$

где  $\bar{X}$  — выборочное среднее;  $n$  — объем выборки;  $\sigma$  — известное стандартное отклонение генеральной совокупности;  $\Phi(z_\gamma) = \frac{\gamma}{2}$ ,  $\Phi(z)$  — функция Лапласа, значения которой табулированы.

#### Пример 10.10

Найдем доверительный интервал для неизвестного математического ожидания нормально распределенной генеральной совокупности с доверительной вероятностью 0,95, если дисперсия генеральной совокупности известна и равна 9, а выборочное среднее равно 1,1 при объеме выборки, равной 100.

*Решение*

Так как генеральная совокупность распределена по нормальному закону и известна ее дисперсия  $D(X) = \sigma^2 = 9$ , то для формирования искомого доверительного интервала воспользуемся формулой

$$\bar{X} - z_\gamma \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < E(X) < \bar{X} + z_\gamma \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}},$$

где  $\bar{X} = 1,1$ ,  $n = 100$ ,  $\sigma = \sqrt{D(X)} = 3$ ,  $\Phi(z_\gamma) = \frac{\gamma}{2} = \frac{0,95}{2} = 0,475 \Rightarrow z_\gamma = 1,96$ , и искомым доверительный интервал определяется следующим образом:

$$1,1 - 1,96 \cdot \frac{3}{\sqrt{100}} < E(X) < 1,1 + 1,96 \cdot \frac{3}{\sqrt{100}};$$

$$1,1 - 0,588 < E(X) < 1,1 + 0,588;$$

$$0,512 < E(X) < 1,688.$$

*Ответ:* искомым доверительный интервал (0,512; 1,688).

В рассмотренном примере доверительная вероятность  $\gamma = 0,95$  позволяет утверждать, что  $0,95 = P(|E(X) - \bar{X}| < 0,588)$ , где 0,588 — точность оценки.

#### Пример 10.11

Каким должен быть минимальный объем выборки из нормально распределенной генеральной совокупности с дисперсией, равной 9, чтобы с доверительной вероятностью 0,95 можно было утверждать, что выборочное среднее, равное 1,1, отклоняется от генерального среднего не более чем на 0,1?

*Решение*

Генеральная совокупность распределена по нормальному закону с известной дисперсией. Поэтому используем условия

$$0,95 = P(|E(X) - \bar{X}| < \delta) \Rightarrow 0,95 = P(\bar{X} - \delta < E(X) < \bar{X} + \delta);$$

$$\bar{X} - z_\gamma \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < E(X) < \bar{X} + z_\gamma \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$



Отсюда определим точность оценки (отклонение)  $\delta$  и необходимый нам минимальный объем выборки:

$$\delta = z_\gamma \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow n = \left( \frac{z_\gamma \cdot \sigma}{\delta} \right)^2.$$

Учитывая данные условия, получим

$$n = \left( \frac{z_\gamma \cdot \sigma}{\delta} \right)^2 = \left( \frac{1,96 \cdot 3}{0,1} \right)^2 = 3457,44.$$

Так как объем выборки не может быть дробным числом, в ответ запишем  $n = 3458$ . При этом не используют стандартные правила округления, а всегда выбирают ближайшее справа целое число.

*Ответ:* минимальный объем выборки, соответствующий заданному отклонению 0,1 и доверительной вероятности 0,95, равен  $n = 3458$ .

Доверительный интервал для оценки неизвестного математического ожидания нормально распределенной генеральной совокупности *при неизвестной генеральной дисперсии* имеет вид

$$\bar{X} - t_\gamma \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} < E(X) < \bar{X} + t_\gamma \cdot \frac{S}{\sqrt{n}},$$

где  $\bar{X}$  — выборочное среднее;  $n$  — объем выборки;  $S = \sqrt{S^2}$ ;  $S^2 = \frac{n}{n-1} D_v(X)$  — несмещенная оценка дисперсии генеральной совокупности («исправленная» дисперсия);  $t_\gamma$  —  $\alpha/2 \cdot 100\%$ -ная точка распределения Стьюдента с  $n - 1$  степенями свободы (рис. 10.9).

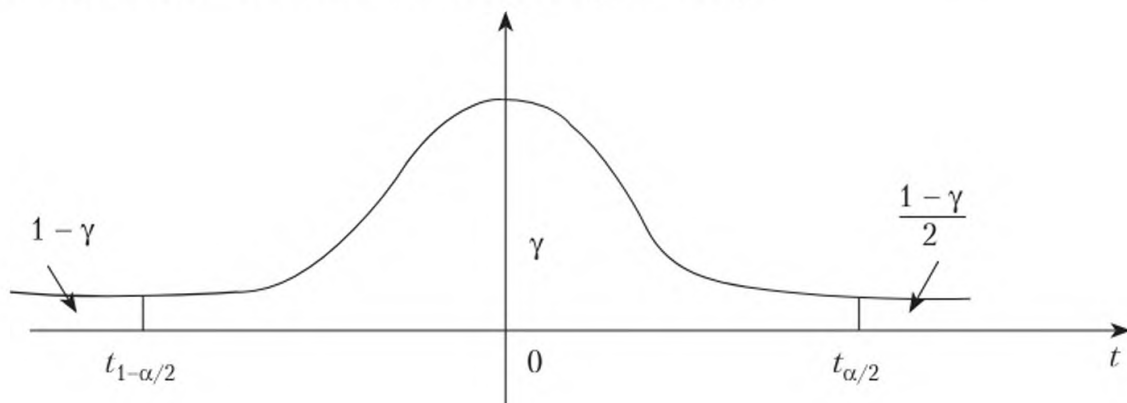


Рис. 10.9. Доверительный интервал оценки математического ожидания

При формировании доверительного интервала часто удобнее использовать таблицу значений  $t_\gamma$ , которые находят по заданным значениям  $n$  и  $\gamma$  (табл. 10.1).

Таблица 10.1

Таблица значений  $t_\gamma = t(\gamma, n)$

$\gamma \backslash n$	0,95	0,99	0,999	$\gamma \backslash n$	0,95	0,99	0,999
5	2,78	4,60	8,61	20	2,093	2,861	3,883
6	2,57	4,03	6,86	25	2,064	2,797	3,745



$n \backslash \gamma$	0,95	0,99	0,999	$n \backslash \gamma$	0,95	0,99	0,999
7	2,45	3,71	5,96	30	2,045	2,756	3,659
8	2,37	3,50	5,41	35	2,032	2,720	3,600
9	2,31	3,36	5,04	40	2,023	2,708	3,558
10	2,26	3,25	4,78	45	2,016	2,692	3,527
11	2,23	3,17	4,59	50	2,009	2,679	3,502
12	2,20	3,11	4,44	60	2,001	2,662	3,464
13	2,18	3,06	4,32	70	1,996	2,649	3,439
14	2,16	3,01	4,22	80	1,991	2,640	3,418
15	2,15	2,98	4,14	90	1,987	2,633	3,403
16	2,13	2,95	4,07	100	1,984	2,627	3,392
17	2,12	2,92	4,02	120	1,980	2,617	3,374
18	2,11	2,90	3,97	$\infty$	1,960	2,576	3,291
19	2,10	2,88	3,92	—	—	—	—

**Пример 10.12**

Найдем доверительный интервал для неизвестного математического ожидания нормально распределенной генеральной совокупности с доверительной вероятностью 0,99, если выборочное среднее и «исправленная» дисперсия  $S^2 = 2,56$  равны 1,1 и 2,56 соответственно при объеме выборки, равном 15.

*Решение*

Так как генеральная совокупность распределена по нормальному закону, но генеральная дисперсия неизвестна, применим формулу  $\bar{X} - t_\gamma \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} < E(X) < \bar{X} + t_\gamma \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$ , которая с учетом данных условия задачи и значения  $t_\gamma = 2,98$ , взятого из табл. 10.1 при  $n = 15$  и  $\gamma = 0,99$ , примет вид

$$1,1 - 2,98 \cdot \frac{1,6}{\sqrt{15}} < E(X) < 1,1 + 2,98 \cdot \frac{1,6}{\sqrt{15}};$$

$$1,1 - 1,231 < E(X) < 1,1 + 1,231;$$

$$-0,131 < E(X) < 2,331.$$

*Ответ:* искомый доверительный интервал  $(-0,131; 2,331)$ .

При формировании доверительного интервала для дисперсии генеральной совокупности при известном генеральном среднем  $\bar{x}_0 = E(X)$  используется несмещенная точечная оценка дисперсии  $S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{x}_0)^2}{n}$ . Случайная

величина  $\frac{nS^2}{\sigma^2}$  имеет распределение  $\chi^2$  с  $k = n$  степенями свободы.



При заданной доверительной вероятности  $\gamma$  имеем  $\chi^2_{1-\alpha/2}(n) < \frac{nS^2}{\sigma^2} < \chi^2_{\alpha/2}(n) \Rightarrow \frac{nS^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n)} < \sigma^2 < \frac{nS^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n)}$  — искомый доверительный интервал для генеральной дисперсии  $D(X) = \sigma^2$  (рис. 10.10).

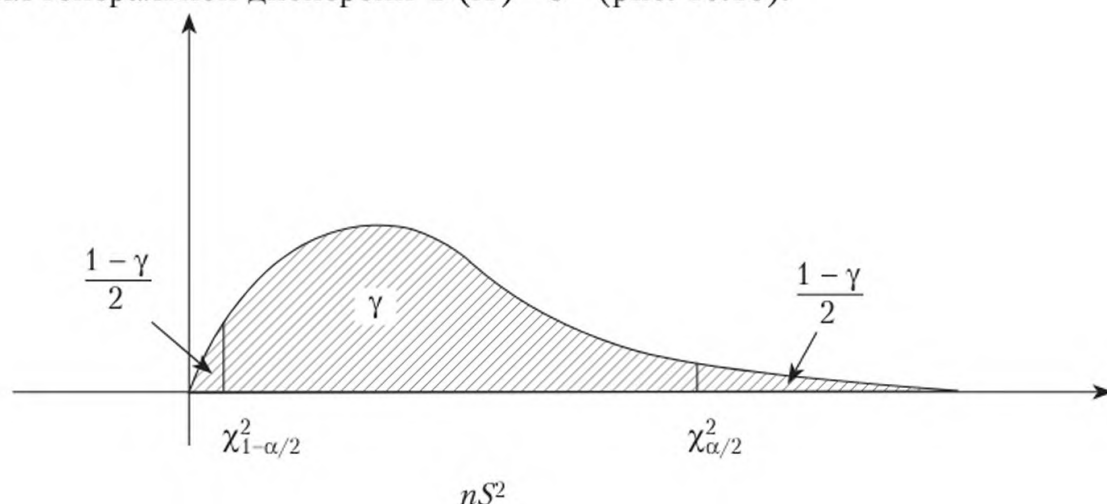


Рис. 10.10. Доверительный интервал генеральной дисперсии

При формировании доверительного интервала для дисперсии генеральной совокупности при *неизвестном генеральном среднем*  $\bar{x}_0 = E(X)$  используется несмещенная точечная оценка дисперсии

$$S^2 = \frac{n}{n-1} D_B(X) = \frac{\sum_{i=1}^{\infty} (X_i - \bar{X})^2}{n-1}.$$

Случайная величина  $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$  имеет распределение  $\chi^2$  с  $k = n - 1$  степенями свободы. В этом случае искомый доверительный интервал имеет вид

$$\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}.$$

При формировании доверительного интервала для среднего квадратического (стандартного) отклонения  $\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{D(X)}$  генеральной совокупности часто используют более удобные формулы (без непосредственного привлечения распределения  $\chi^2$ ):  $s(1-q) < \sigma < s(1+q)$ , если  $q < 1$ , или  $0 < \sigma < s(1+q)$ , если  $q > 1$ , где значение  $q$  находят по заданным значениям  $n$  и  $\gamma$  из табл. 10.2.

Таблица 10.2

Таблица значений  $q = q(\gamma, n)$

$\gamma \backslash n$	0,95	0,99	0,999	$\gamma \backslash n$	0,95	0,99	0,999
5	1,37	2,67	5,64	20	0,37	0,58	0,88
6	1,09	2,01	3,88	25	0,32	0,49	0,73



$n \backslash \gamma$	0,95	0,99	0,999	$n \backslash \gamma$	0,95	0,99	0,999
7	0,92	1,62	2,98	30	0,28	0,43	0,63
8	0,80	1,38	2,42	35	0,26	0,38	0,56
9	0,71	1,20	2,06	40	0,24	0,35	0,50
10	0,65	1,08	1,80	45	0,22	0,32	0,46
11	0,59	0,98	1,60	50	0,21	0,30	0,43
12	0,55	0,90	1,45	60	0,188	0,269	0,38
13	0,52	0,83	1,33	70	0,174	0,245	0,34
14	0,48	0,78	1,23	80	0,161	0,226	0,31
15	0,46	0,73	1,15	90	0,151	0,211	0,29
16	0,44	0,70	1,07	100	0,143	0,198	0,27
17	0,42	0,66	1,01	150	0,115	0,160	0,211
18	0,40	0,63	0,96	200	0,099	0,136	0,185
19	0,39	0,60	0,92	250	0,089	0,120	0,162

Например, если из нормально распределенной совокупности извлечена выборка объемом  $n = 25$  и «исправленная» дисперсия равна 4, то доверительный интервал для стандартного отклонения  $\sigma$  генеральной совокупности с доверительной вероятностью  $\gamma = 0,95$  будет определяться следующим образом:

$$\sqrt{4} \cdot (1 - 0,32) < \sigma < \sqrt{4} \cdot (1 + 0,32) \Rightarrow 1,36 < \sigma < 2,64.$$

Интервал (1,36; 2,64) покрывает стандартное отклонение генеральной совокупности с доверительной вероятностью 0,95.

Доверительный интервал для неизвестной вероятности  $p$  биномиального распределения формируется на основе относительной частоты  $\omega = \frac{m}{n}$  и имеет вид

$$\omega - z_{\gamma} \cdot \sqrt{\frac{\omega(1-\omega)}{n}} < p < \omega + z_{\gamma} \cdot \sqrt{\frac{\omega(1-\omega)}{n}},$$

где  $n$  — объем выборки и  $\Phi(z_{\gamma}) = \frac{\gamma}{2}$ ,  $\Phi(z)$  — функция Лапласа, значения которой табулированы.

Например, доверительный интервал для неизвестной вероятности при относительной частоте  $\omega = 0,07$  и объеме выборки  $n = 100$  будет вычисляться следующим образом:

$$0,07 - 1,96 \cdot \sqrt{\frac{0,07 \cdot (1 - 0,07)}{100}} < p < 0,07 + 1,96 \cdot \sqrt{\frac{0,07 \cdot (1 - 0,07)}{100}}$$

с доверительной вероятностью 0,95 и будет равен (0,02; 0,12).



Аналогично можно построить доверительный интервал для неизвестной доли признака в генеральной совокупности  $W$  по известной выборочной доле признака  $w = \frac{m}{n}$ : для повторной выборки

$$w - z_{\gamma} \cdot \sqrt{\frac{w(1-w)}{n}} < W < w + z_{\gamma} \cdot \sqrt{\frac{w(1-w)}{n}}$$

(здесь по-прежнему  $n$  — объем выборки и  $\Phi(z_{\gamma}) = \frac{\gamma}{2}$ ,  $\Phi(z)$  — функция Лапласа).

Для бесповторной выборки доверительный интервал определяется условием

$$w - z_{\gamma} \cdot \sqrt{\frac{w(1-w)}{n} \cdot \frac{N-n}{N-1}} < W < w + z_{\gamma} \cdot \sqrt{\frac{w(1-w)}{n} \cdot \frac{N-n}{N-1}},$$

где  $N$  — объем генеральной совокупности.

При интервальной оценке неизвестной вероятности (или доли признака в генеральной совокупности в случае повторной выборки) точность оценки определяется значением  $\delta = z_{\gamma} \cdot \sqrt{\frac{w(1-w)}{n}}$ , где  $w = \frac{m}{n}$  и  $\Phi(z_{\gamma}) = \frac{\gamma}{2}$ .

Если использовать заданные доверительную вероятность  $\gamma$  и точность оценки  $\delta$ , то можно определять минимально необходимый объем выборки

по формуле  $n = \frac{z_{\gamma}^2}{4\delta^2}$ . Например, чтобы относительная частота отклоня-

лась от вероятности не более чем на 0,001, при доверительной вероятности  $\gamma = 0,95$  минимально необходимый объем выборки должен составить

$\frac{1,96^2}{4 \cdot 0,001^2} = 960\,400$ , тогда как отклонение на 0,01 при той же доверительной

вероятности предполагает объем, равный  $\frac{1,96^2}{4 \cdot 0,01^2} = 9604$ .

### 10.3. Статистическая проверка гипотез

Мы уже не раз отмечали, что важнейшей задачей математической статистики является изучение генеральной совокупности по выборочным данным. Предположения о виде функции распределения генеральной совокупности или о параметре этой функции распределения принято называть *статистическими гипотезами*.

Если статистическая гипотеза содержит предположение о виде функции распределения генеральной совокупности, то она называется *непараметрической*, если же статистическая гипотеза содержит предположение о значении параметра, то она называется *параметрической*. Гипотеза, однозначно фиксирующая вид функции распределения или значение параметра, является *простой*, в противном случае статистическая гипотеза определяется как *сложная*.



В процессе решения задачи должны быть выдвинуты две гипотезы — основная  $H_0$  и альтернативная  $H_1$ . Альтернативная гипотеза является конкурирующей с основной гипотезой таким образом, что если принимается основная гипотеза, то отвергается альтернативная, и наоборот, альтернативная гипотеза отвергается в пользу основной. Понятно, что должны существовать обоснованные правила, позволяющие статистически значимо подтвердить или опровергнуть основную гипотезу.

Такие правила определяются как *статистические критерии*, они используют случайные величины, зависящие от значений выборки, называемых *статистиками*. Значение такой величины, вычисленное для определенной выборки, называют *наблюдаемым значением статистики*. Множество всех возможных значений статистики можно разбить на две области — область принятия основной гипотезы (для этих значений  $H_0$  выполняется) и *критическую область* (для этих значений  $H_0$  не выполняется). Значения статистики, отделяющие область принятия  $H_0$  от критической области, называют *критическими точками*.

Так как в основе рассуждений лежит применение случайных величин, то на этапе вывода можно совершить ошибку. При статистической проверке гипотез возможны ошибки первого и второго рода. *Ошибка первого рода* совершается в том случае, когда отвергается изначально верная основная гипотеза  $H_0$ , если же изначально неверная основная гипотеза принимается как верная, то говорят, что совершена *ошибка второго рода*.

Вероятность допустить ошибку первого рода называют *уровнем значимости критерия* и обозначают  $\alpha$ .

Вероятность допустить ошибку второго рода обозначают  $\beta$ . Число  $1 - \beta$  определяет *мощность критерия*. Мощность критерия определяет вероятность того, что ошибка второго рода не будет совершена.

Желание минимизировать значения  $\alpha$  и  $\beta$  при проверке статистических гипотез естественно, однако при фиксированном объеме выборки с уменьшением значения  $\alpha$  значение  $\beta$  растет, и наоборот, в этом случае обычно минимизируют уровень значимости  $\alpha$ . Уровень доверия при фиксированном  $\alpha$  определяется значением  $\gamma = 1 - \alpha$ .

При одном и том же уровне значимости можно использовать разные критерии. Оптимальным является тот, которому соответствует меньшее значение  $\beta$ , т.е. выбирается критерий наибольшей мощности. Задачи выбора критерия решены как самостоятельные задачи математической статистики, при проверке статистических гипотез мы будем использовать только те критерии, которым отвечает наибольшая мощность. Выбранный критерий при заданном уровне значимости позволяет определять критические точки и сформировать критическую область, а следовательно, и сделать вывод о подтверждении или отклонении основной гипотезы.

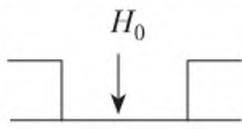
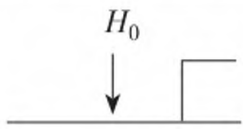
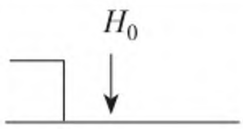
При проверке статистических гипотез мы будем придерживаться определенного плана, который включает:

- 1) выдвижение основной гипотезы  $H_0$  и альтернативной гипотезы  $H_1$ ;
- 2) выбор уровня значимости  $\alpha$  для проведения проверки;
- 3) выбор статистики (функции, значения которой зависят от выборки) и вычисление наблюдаемого значения статистики;



- 4) формирование критической области;
- 5) ответ на вопрос о принадлежности наблюдаемого значения статистики критической области;
- 6) вывод о принятии основной гипотезы или ее отклонении в пользу альтернативной.

Формирование критической области напрямую зависит от того, как выдвигается альтернативная гипотеза. Для большинства выбираемых статистик критическая область может быть как двусторонней, так и односторонней:

Знак отношения, используемого для $H_0$	=	$\leq$	$\geq$
Знак отношения, используемого для $H_1$	$\neq$	$>$	$<$
Критическая область	Двусторонняя	Правосторонняя	Левосторонняя
Изображение			

Правила, по которым вычисляются критические значения, зависят от выбранной статистики. Это могут быть  $Z$ -статистики,  $T$ -статистики,  $F$ -статистики и статистики  $\chi^2$ .  $Z$ -статистика имеет нормальный закон распределения,  $T$ -статистика имеет распределение Стьюдента,  $F$ -статистика имеет распределение Фишера — Снедекора, статистика  $\chi^2$  имеет распределение Пирсона (распределение  $\chi^2$ ).

Выбор статистики является важнейшей составляющей решения и диктуется поставленной задачей. Мы рассмотрим основные задачи, решаемые с помощью этих статистик.

В тех случаях, когда генеральная совокупность имеет нормальное распределение с известной дисперсией (в случае двух генеральных совокупностей это условие должно быть выполнено для каждой из них), при проверке статистических гипотез применяется  $Z$ -статистика. Кроме того,  $Z$ -статистика применима и в тех случаях, когда изучают теоретическую вероятность какого-либо события. Перечислим основные задачи, при решении которых применяется  $Z$ -статистика (табл. 10.3).

Таблица 10.3

#### Задачи, для решения которых применяется $Z$ -статистика

Задача	$Z$ -статистика
Сравнение выборочной средней с генеральной средней нормальной совокупности при известной дисперсии $D(X) = \sigma^2$	$Z = \frac{\bar{X} - \bar{x}_0}{\sqrt{\frac{D(X)}{n}}}$ <p><math>\bar{X}</math> — выборочное среднее; <math>\bar{x}_0</math> — генеральное среднее, задано по условию задачи; <math>D(X)</math> — генеральная дисперсия, задана по условию задачи; <math>n</math> — объем выборки</p>



Задача	Z-статистика
Сравнение наблюдаемой относительной частоты с теоретической вероятностью события	$Z = \frac{\omega - p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}},$ <p> <math>\omega = \frac{m}{n}</math> — наблюдаемая относительная частота; <math>p</math> — теоретическая вероятность, задана по условию; <math>q = 1 - p</math>; <math>n</math> — объем выборки         </p>
Сравнение двух средних нормальных совокупностей при известных дисперсиях $D(X) = \sigma_X^2$ и $D(Y) = \sigma_Y^2$	$Z = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\frac{D(X)}{n} + \frac{D(Y)}{m}}},$ <p> <math>\bar{X}</math> — выборочное среднее из первой ГС; <math>\bar{Y}</math> — выборочное среднее из второй ГС; <math>D(X)</math> — дисперсия для первой ГС, задана по условию задачи; <math>n</math> — объем выборки из первой ГС; <math>D(Y)</math> — дисперсия для второй ГС, задана по условию задачи; <math>m</math> — объем выборки из второй ГС         </p>
Сравнение двух вероятностей биномиальных распределений генеральных совокупностей	$Z = \frac{\varpi_1 - \varpi_2}{\sqrt{\omega(1-\omega)\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}, \quad \omega = \frac{m_1 + m_2}{n_1 + n_2},$ <p> <math>\varpi_1 = \frac{m_1}{n_1}</math> — наблюдаемая относительная частота для первой ГС; <math>n_1</math> — объем выборки из первой ГС; <math>\varpi_2 = \frac{m_2}{n_2}</math> — наблюдаемая относительная частота для второй ГС; <math>n_2</math> — объем выборки из второй ГС         </p>

Если решение предполагает использование Z-статистики, то для принятия или отклонения основной гипотезы  $H_0$  необходимо формирование критической области, а для этого надо вычислить критическое значение, используя функцию Лапласа, выбранный уровень значимости  $\alpha$  и определенные правила (табл. 10.4).

Таблица 10.4

**Правила вычисления критических точек  
при использовании Z-статистики**

Двусторонняя критическая область	По таблице значений функции Лапласа из условия $\Phi(z_{\text{крит}}) = \frac{1-\alpha}{2}; z_{\text{левое}} = -z_{\text{крит}}; z_{\text{правое}} = z_{\text{крит}}$
Правосторонняя критическая область	По таблице значений функции Лапласа из условия $\Phi(z_{\text{крит}}) = \frac{1-2\alpha}{2}; z_{\text{правое}} = z_{\text{крит}}$
Левосторонняя критическая область	По таблице значений функции Лапласа из условия $\Phi(z_{\text{крит}}) = \frac{1-2\alpha}{2}; z_{\text{левое}} = -z_{\text{крит}}$



Для проверки эффективности новой технологии отобраны две группы рабочих: в первой группе численностью  $n = 50$  человек, где применялась новая технология, выборочная средняя выработка составила  $\bar{X} = 85$  (изделий), во второй группе численностью  $n = 70$  человек, где технология осталась прежней, выборочная средняя составила  $\bar{Y} = 78$  (изделий). Генеральные дисперсии выработки известны и равны  $D(X) = 100$  и  $D(Y) = 74$  соответственно. На уровне значимости  $\alpha = 0,05$  выясним, влияет ли новая технология на среднюю производительность, считая генеральные совокупности нормально распределенными.

*Решение*

При решении задачи будем придерживаться нашего плана.

1. Выдвижение основной гипотезы  $H_0$  и альтернативной гипотезы  $H_1$ .

Основная гипотеза должна состоять в том, что средние выработки по старой и новой технологиям равны, альтернативную гипотезу можно выбирать направленной, а именно — выработка при новой технологии больше:

$$H_0: \bar{x}_0 = \bar{y}_0; H_1: \bar{x}_0 > \bar{y}_0.$$

2. Выбор уровня значимости  $\alpha$  для проведения проверки.

Уровень значимости нам задан по условию задачи:  $\alpha = 0,05$ .

3. Выбор статистики и вычисление наблюдаемого значения статистики.

Мы находимся в рамках стандартной задачи сравнения двух средних нормальных совокупностей при известных дисперсиях  $D(X) = 100$  и  $D(Y) = 74$ , поэтому выбираем статистику  $Z = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\frac{D(X)}{n} + \frac{D(Y)}{m}}}$ , для которой вычислим наблюдаемое значение,

$$Z = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\frac{D(X)}{n} + \frac{D(Y)}{m}}}$$

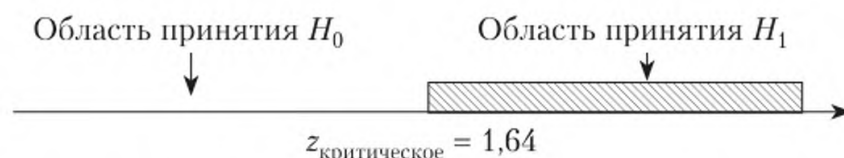
используя данные условия задачи:

$$Z_{\text{наблюдаемое}} = \frac{85 - 78}{\sqrt{\frac{100}{50} + \frac{74}{70}}} = 4,0035.$$

4. Формирование критической области.

Критическая область будет формироваться как правосторонняя (определяется альтернативной гипотезой  $H_1$ , рис. 10.11), при вычислении критического значения используем соответствующее правило:

$$\Phi(z_{\text{критическое}}) = \frac{1 - 2\alpha}{2} = \frac{1 - 2 \cdot 0,05}{2} = 0,45 \Rightarrow z_{\text{критическое}} = 1,64.$$



**Рис. 10.11. Критическая область для примера 10.13**

5. Ответ на вопрос о принадлежности наблюдаемого значения статистики критической области.

Наблюдаемое значение статистики  $Z_{\text{наблюдаемое}} = 4,0035$  принадлежит критической области ( $4,0035 > 1,64$ ).

6. Вывод о принятии основной гипотезы или ее отклонении в пользу альтернативной:



Из принадлежности наблюдаемого значения критической области следует, что основная гипотеза отвергается в пользу альтернативной: новая технология позволяет увеличить среднюю выработку.

*Ответ:* при уровне значимости  $\alpha = 0,05$  можно утверждать, что новая технология увеличивает среднюю выработку.

$T$ -статистика применяется для решения похожих задач, но на выборках малых объемов и при неизвестных дисперсиях генеральных совокупностей.  $T$ -статистики имеют распределение Стьюдента, для которого критические точки вычисляются по таблице с использованием уровня значимости  $\alpha$  (для двусторонней или односторонней критической области) и числа степеней свободы  $k$  (табл. 10.5).

Таблица 10.5

### Критические точки распределения Стьюдента

Число степеней свободы $k$	Уровень значимости $\alpha$ (двусторонняя критическая область)					
	0,10	0,05	0,02	0,01	0,002	0,001
1	6,31	12,7	31,82	63,7	318,3	637,0
2	2,92	4,30	6,97	9,92	22,33	31,6
3	2,35	3,18	4,54	5,84	10,22	12,9
4	2,13	2,78	3,75	4,60	7,17	8,61
5	2,01	2,57	3,37	4,03	5,89	6,86
6	1,94	2,45	3,14	3,71	5,21	5,96
7	1,89	2,36	3,00	3,50	4,79	5,40
8	1,86	2,31	2,90	3,36	4,50	5,04
9	1,83	2,26	2,82	3,25	4,30	4,78
10	1,81	2,23	2,76	3,17	4,14	4,59
11	1,80	2,20	2,72	3,11	4,03	4,44
12	1,78	2,18	2,68	3,05	3,93	4,32
13	1,77	2,16	2,65	3,01	3,85	4,22
14	1,76	2,14	2,62	2,98	3,79	4,14
15	1,75	2,13	2,60	2,95	3,73	4,07
16	1,75	2,12	2,58	2,92	3,69	4,01
17	1,74	2,11	2,57	2,90	3,65	3,95
18	1,73	2,10	2,55	2,88	3,61	3,92
19	1,73	2,09	2,54	2,86	3,58	3,88
20	1,73	2,09	2,53	2,85	3,55	3,85
21	1,72	2,08	2,52	2,83	3,53	3,82
	0,05	0,025	0,01	0,005	0,001	0,0005
	Уровень значимости $\alpha$ (односторонняя критическая область)					



Число степеней свободы $k$	Уровень значимости $\alpha$ (двусторонняя критическая область)					
	0,10	0,05	0,02	0,01	0,002	0,001
22	1,72	2,07	2,51	2,82	3,51	3,79
23	1,71	2,07	2,50	2,81	3,59	3,77
24	1,71	2,06	2,49	2,80	3,47	3,74
25	1,71	2,06	2,49	2,79	3,45	3,72
26	1,71	2,06	2,48	2,78	3,44	3,71
27	1,71	2,05	2,47	2,77	3,42	3,69
28	1,70	2,05	2,46	2,76	3,40	3,66
29	1,70	2,05	2,46	2,76	3,40	3,66
30	1,70	2,04	2,46	2,75	3,39	3,65
40	1,68	2,02	2,42	2,70	3,31	3,55
60	1,67	2,00	2,39	2,66	3,23	3,46
120	1,66	1,98	2,36	2,62	3,17	3,37
$\infty$	1,64	1,96	2,33	2,58	3,09	3,29
	0,05	0,025	0,01	0,005	0,001	0,0005
	Уровень значимости $\alpha$ (односторонняя критическая область)					

Поэтому при перечислении задач, решаемых с привлечением  $T$ -статистики (табл. 10.6), обязательно указывают число степеней свободы  $k$ .

Таблица 10.6

### Задачи, для решения которых применяется $T$ -статистика

Задача	$T$ -статистика
Сравнение выборочной средней с генеральной средней нормальной совокупности при неизвестной дисперсии	$T = \frac{\bar{X} - \bar{x}_0}{\sqrt{\frac{S^2}{n-1}}}$ ; число степеней свободы $k = n - 1$ ; $\bar{X}$ — выборочное среднее; $\bar{x}_0$ — генеральное среднее, задано по условию задачи; $S^2$ — «исправленная» дисперсия; $n$ — объем выборки
Сравнение двух средних нормальных совокупностей при неизвестных, но равных дисперсиях $D(X) = D(Y) = \sigma^2$ генеральных совокупностей	$T = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\frac{S^2}{n} + \frac{S^2}{m}}}, S^2 = \frac{(n-1)S_X^2 + (m-1)S_Y^2}{n+m-2}$ ; число степеней свободы $k = n + m - 2$ ; $\bar{X}$ — выборочное среднее из первой ГС; $\bar{Y}$ — выборочное среднее из второй ГС; $S_X^2$ — «исправленная» дисперсия для первой выборки; $n$ — объем выборки из первой ГС; $S_Y^2$ — «исправленная» дисперсия для второй выборки; $m$ — объем выборки из второй ГС



Задача	$T$ -статистика
Сравнение двух средних нормальных совокупностей при неизвестных и неравных дисперсиях $D(X) \neq D(Y)$ генеральных совокупностей	$T = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\frac{S_X^2}{n} + \frac{S_Y^2}{m}}}$ ; число степеней свободы $k = \min(n-1; m-1)$ ; $\bar{X}$ — выборочное среднее из первой ГС; $\bar{Y}$ — выборочное среднее из второй ГС; $S_X^2$ — «исправленная» дисперсия для первой выборки; $n$ — объем выборки из первой ГС; $S_Y^2$ — «исправленная» дисперсия для второй выборки; $m$ — объем выборки из второй ГС
Проверка значимости выборочного коэффициента корреляции	$T = \rho_v \cdot \frac{\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-\rho_v^2}}$ ; число степеней свободы $k = n-2$ ; $\rho_v$ — выборочный коэффициент корреляции; $n$ — объем выборки

При использовании  $T$ -статистики критические значения выбирают из табл. 10.5, используя выбранный уровень значимости  $\alpha$  и определенные правила (табл. 10.7).

Таблица 10.7

**Правила вычисления критических точек  
при использовании  $T$ -статистики**

Двусторонняя критическая область	По таблице критических точек распределения Стьюдента: $t_{\text{двустор. обл}}(\alpha, k)$ ; $\alpha$ — уровень значимости; $k$ — число степеней свободы; $t_{\text{левое}} = -t_{\text{крит}}$ ; $t_{\text{правое}} = t_{\text{крит}}$
Правосторонняя критическая область	По таблице критических точек распределения Стьюдента: $t_{\text{одностор. обл}}(\alpha, k)$ ; $\alpha$ — уровень значимости; $k$ — число степеней свободы; $t_{\text{правое}} = t_{\text{крит}}$
Левосторонняя критическая область	По таблице критических точек распределения Стьюдента: $t_{\text{одностор. обл}}(\alpha, k)$ ; $\alpha$ — уровень значимости; $k$ — число степеней свободы; $t_{\text{левое}} = -t_{\text{крит}}$

**Пример 10.14**

Менеджер предприятия, работающего в две смены, решил выяснить, существует ли различие в производительности труда рабочих дневной и вечерней смен. Случайно организованная выборка 10 рабочих дневной смены показала, что средний выпуск продукции составляет 74,3 ед/ч, а исправленная выборочная дисперсия оказалась равной  $S^2 = 16$  ед<sup>2</sup>/ч. Выборка же 10 рабочих вечерней смены выявила, что средний выпуск продукции равнялся 69,7 ед/ч, а  $S^2 = 18$  ед<sup>2</sup>/ч. При уровне значимости  $\alpha = 0,02$  определим, существуют ли различия в производительности труда рабочих дневной и вечерней смен, если дисперсии производительности дневной и вечерней смены предположительно равны.

*Решение*

При решении задачи будем придерживаться нашего плана.

1. Выдвижение основной гипотезы  $H_0$  и альтернативной гипотезы  $H_1$ .



Основная гипотеза должна состоять в том, что различия в производительности труда рабочих дневной и вечерней смены не существует, т.е. производительности равны, альтернативную гипотезу можно выбирать ненаправленной, а именно — производительности не равны:  $H_0: \bar{x}_0 = \bar{y}_0$ ;  $H_1: \bar{x}_0 \neq \bar{y}_0$ .

2. Выбор уровня значимости  $\alpha$  для проведения проверки.

Уровень значимости нам задан по условию задачи:  $\alpha = 0,02$ .

3. Выбор статистики и вычисление наблюдаемого значения статистики.

Мы находимся в рамках стандартной задачи сравнения двух средних нормальных совокупностей при неизвестных, но равных (по условию) дисперсиях

$$D(X) = D(Y) = \sigma^2, \text{ поэтому будем использовать статистику } T = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\frac{S^2}{n} + \frac{S^2}{m}}}, \text{ где}$$

$$S^2 = \frac{(n-1)S_X^2 + (m-1)S_Y^2}{n+m-2} \text{ и число степеней свободы равно } k = n + m - 2.$$

Вычислим наблюдаемое значение статистики:

$$S^2 = \frac{9 \cdot 16 + 9 \cdot 18}{10 + 10 - 2} = 17; \quad T_{\text{наблюдаемое}} = \frac{74,3 - 69,7}{\sqrt{\frac{17}{10} + \frac{17}{10}}} = 2,495.$$

Число степеней свободы  $k = n + m - 2 = 18$ .

4. Формирование критической области.

Критическая область будет формироваться как двусторонняя (определяется альтернативной гипотезой  $H_1$ , рис. 10.12), при вычислении критического значения используем соответствующее правило:  $t_{\text{крит}} = 2,55$  находят по таблице, используя двустороннюю область при значимости гипотезы  $\alpha = 0,02$  и числе степеней свободы  $k = 18$ .



Рис. 10.12. Критическая область для примера 10.14

5. Ответ на вопрос о принадлежности наблюдаемого значения статистики критической области.

Наблюдаемое значение статистики  $T_{\text{наблюдаемое}} = 2,495$  не принадлежит критической области ( $-2,55 < 2,495 < 2,55$ ).

6. Вывод о принятии основной гипотезы или ее отклонении в пользу альтернативной.

Из того что наблюдаемое значение статистики не принадлежит критической области, следует, что нет статистически значимых оснований отвергать основную гипотезу и она принимается.

*Ответ:* при уровне значимости  $\alpha = 0,02$  можно утверждать, что различий в производительности труда рабочих дневной и вечерней смены не существует, полученные по выборкам различия носят случайный характер.

---

При изучении двух нормально распределенных генеральных совокупностей часто возникает необходимость сравнения их стандартных отклонений или дисперсий. Для решения такой задачи применяется  $F$ -статистика (табл. 10.8).



Задачи, для решения которых применяется  $F$ -статистика

Задача	$F$ -статистика
Сравнение двух дисперсий нормально распределенных совокупностей	$F = \frac{S_1^2}{S_2^2}, S_1^2 > S_2^2;$ <p> <math>k_1 = n_1 - 1</math> — число степеней свободы числителя;  <math>k_2 = n_2 - 1</math> — число степеней свободы знаменателя;  <math>S_1^2</math> — «исправленная» дисперсия для выборки объема <math>n_1</math>; <math>S_2^2</math> — «исправленная» дисперсия для выборки объема <math>n_2</math> </p>

$F$ -статистика имеет распределение Фишера — Снедекора со степенями свободы  $k_1, k_2$ , для которого составлена таблица критических точек (табл. 10.9).

Таблица 10.9

**Критические точки распределения  $F$  (Фишера — Снедекора)**  
**( $k_1$  — число степеней свободы большей дисперсии,**  
 **$k_2$  — число степеней свободы меньшей дисперсии)**

$k_2 \backslash k_1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	Уровень значимости $\alpha = 0,01$											
1	4052	4999	5403	5625	5764	5859	5928	5982	6022	6056	6062	6106
2	98,50	99,00	99,17	99,25	99,30	99,33	99,36	99,37	99,39	99,40	99,41	99,42
3	34,12	30,82	29,46	28,71	28,24	27,91	27,67	27,49	27,35	27,23	27,13	27,05
4	21,20	18,00	16,69	15,98	15,52	15,21	14,98	14,80	14,66	14,55	14,45	14,37
5	16,26	13,27	12,06	11,39	10,97	10,67	10,46	10,29	10,16	10,05	9,96	9,89
6	13,75	10,92	9,78	9,15	8,75	8,47	8,26	8,10	7,98	7,87	7,79	7,72
7	12,25	9,55	8,45	7,85	7,46	7,19	6,99	6,84	6,72	6,62	6,54	6,47
8	11,26	8,65	7,59	7,01	6,63	6,37	6,18	6,03	5,91	5,81	5,74	5,67
9	10,56	8,02	6,99	6,42	6,06	5,80	5,61	5,47	5,35	5,26	5,18	5,11
10	10,04	7,56	6,55	5,99	5,64	5,39	5,20	5,06	4,94	4,85	4,78	4,71
11	9,65	7,21	6,22	5,67	5,32	5,07	4,89	4,74	4,63	4,54	4,40	4,40
12	9,33	6,93	5,95	5,41	5,06	4,82	4,64	4,50	4,39	4,30	4,22	4,16
13	9,07	6,70	5,74	5,21	4,86	4,62	4,44	4,30	4,19	4,10	4,02	3,96
14	8,86	6,51	5,56	5,04	4,69	4,46	4,28	4,14	4,03	3,94	3,80	3,80
15	8,68	6,36	5,42	4,89	4,56	4,32	4,14	4,00	3,89	3,80	3,73	3,67
16	8,53	6,23	5,29	4,77	4,44	4,20	4,03	3,89	3,78	3,69	3,61	3,55
17	8,40	6,11	5,18	4,67	4,34	4,10	3,93	3,79	3,68	3,59	3,52	3,46



$k_2 \backslash k_1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Уровень значимости $\alpha = 0,05$												
1	161	200	216	225	230	234	237	239	240	242	243	244
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,36	19,37	19,38	19,39	19,40	19,41
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,89	8,85	8,81	8,79	8,76	8,74
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,93	5,91
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,77	4,74	4,70	4,68
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	4,03	4,00
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,64	3,60	3,57
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,35	3,31	3,28
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,14	3,10	3,07
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,98	2,94	2,91
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,85	2,82	2,79
12	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,91	2,85	2,80	2,75	2,72	2,69
13	4,67	3,81	3,41	3,18	3,03	2,92	2,83	2,77	2,71	2,67	2,63	2,60
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,76	2,70	2,65	2,60	2,50	2,53
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,71	2,64	2,59	2,54	2,51	2,48
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49	2,45	2,42
17	4,45	3,59	3,20	2,90	2,81	2,70	2,61	2,55	2,49	2,45	2,41	2,38

Для формирования критической области при использовании  $F$ -статистики критические значения выбирают из табл. 10.9, используя выбранный уровень значимости  $\alpha$  и определенные правила (табл. 10.10).

Таблица 10.10

**Правила вычисления критических точек  
при использовании  $F$ -статистики**

Двусторонняя критическая область	По таблице критических точек распределения Фишера — Снедекора: $F_{\text{крит}}\left(\frac{\alpha}{2}, k_1, k_2\right);$ $\alpha$ — уровень значимости; $k_1, k_2$ — число степеней свободы большей и меньшей дисперсии
Правосторонняя критическая область	По таблице критических точек распределения Фишера: $F_{\text{крит}}(\alpha, k_1, k_2);$ $\alpha$ — уровень значимости; $k_1, k_2$ — число степеней свободы большей и меньшей дисперсии
Левосторонняя критическая область	Не рассматривается



### Пример 10.15

По выборкам объемов  $n_X = 12$  и  $n_Y = 11$  из двух нормально распределенных совокупностей получены «исправленные» дисперсии  $S_X^2 = 6,3$  и  $S_Y^2 = 8,5$ . Можно ли на основе этих данных утверждать, что генеральные совокупности имеют равные дисперсии?

*Решение*

При решении задачи будем придерживаться нашего плана.

1. Выдвижение основной гипотезы  $H_0$  и альтернативной гипотезы  $H_1$ .

Основная гипотеза должна состоять в том, что дисперсии генеральных совокупностей равны, альтернативную гипотезу можно выбрать направленной:

$$H_0: D(X) = D(Y); H_1: D(Y) > D(X).$$

2. Выбор уровня значимости  $\alpha$  для проведения проверки.

Уровень значимости нам не задан по условию задачи, в таких случаях стандартно выбирают  $\alpha = 0,05$ .

3. Выбор статистики и вычисление наблюдаемого значения статистики.

Мы находимся в рамках стандартной задачи сравнения двух дисперсий нормальных совокупностей, поэтому будем использовать  $F$ -статистику  $F = \frac{S_1^2}{S_2^2}$ ,  $S_1^2 > S_2^2$ .

По условию  $S_Y^2 = 8,5 > S_X^2 = 6,3$ , поэтому  $S_1^2 = 8,5$ ,  $k_1 = 11 - 1 = 10$  и  $S_2^2 = 6,3$ ,  $k_2 = 12 - 1 = 11$ .

Вычислим наблюдаемое значение статистики:

$$F_{\text{наблюдаемое}} = \frac{S_1^2}{S_2^2} = \frac{8,5}{6,3} = 1,349.$$

4. Формирование критической области.

Критическая область будет формироваться как правосторонняя (определяется альтернативной гипотезой  $H_1$ , рис. 10.13), при вычислении критического значения используем соответствующее правило и таблицу критических точек распределения Фишера:

$$F_{\text{крит}}(\alpha, k_1, k_2) = F_{\text{крит}}(0,05, 10, 11) = 2,86.$$

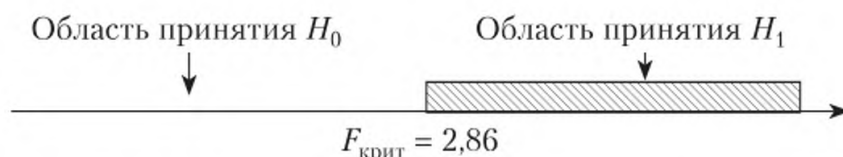


Рис. 10.13. Критическая область для примера 10.15

5. Ответ на вопрос о принадлежности наблюдаемого значения статистики критической области.

Наблюдаемое значение статистики  $F_{\text{наблюдаемое}} = 1,349$  не принадлежит критической области ( $1,349 < 2,86$ ).

6. Вывод о принятии основной гипотезы или ее отклонении в пользу альтернативной.

Из того что наблюдаемое значение статистики не принадлежит критической области, следует, что основная гипотеза принимается.

*Ответ:* при уровне значимости  $\alpha = 0,05$  можно утверждать, что дисперсии генеральных совокупностей равны.



Если имеется выборка из нормально распределенной генеральной совокупности и вычислена «исправленная» дисперсия, то, применяя статистику  $\chi^2$ , можно ответить на вопрос о соответствии выборочного значения дисперсии значению дисперсии генеральной совокупности. Статистика  $\chi^2$  применяется и в качестве критерия согласия — статистического критерия о предполагаемом виде закона распределения генеральной совокупности. Напомним, что одной из задач математической статистики является установление теоретического закона распределения по эмпирическому (выборочному) распределению. Статистика  $\chi^2$  имеет распределение Пирсона (распределение  $\chi^2$ ), поэтому обязательно указывается число степеней свободы (табл. 10.11).

Таблица 10.11

### Задачи, для решения которых применяется $\chi^2$ -статистика

Задача	Статистика $\chi^2$
Сравнение выборочной дисперсии с дисперсией генеральной совокупности $D(X) = \sigma^2$	$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ ; число степеней свободы $k = n - 1$ ; $S^2$ — «исправленная» дисперсия выборки; $n$ — объем выборки; $D(X) = \sigma^2$ — дисперсия генеральной совокупности (задана по условию)
Критерий согласия — проверка гипотезы о законе распределения генеральной совокупности	$\chi^2 = \sum_i \frac{(n_i - n'_i)^2}{n'_i}$ ; число степеней свободы $k = r - l - 1$ ; $n_i$ — эмпирические частоты; $n'_i$ — теоретические частоты; $r$ — количество групп (интервалов) наблюдений, наполняемость более 5 вариантов; $l$ — количество параметров теоретического распределения

Критические точки распределения  $\chi^2$  находят по таблице по уровню значимости  $\alpha$  и числу степеней свободы  $k$  (табл. 10.12).

Таблица 10.12

### Критические точки распределения $\chi^2$

Число степеней свободы $k$	Уровень значимости $\alpha$					
	0,01	0,025	0,05	0,95	0,975	0,99
1	6,63490	5,02389	3,84146	0,00393	0,00098	0,00016
2	9,21034	7,37776	5,99146	0,10259	0,05064	0,02010
3	11,34487	9,34840	7,81473	0,35185	0,21580	0,11483
4	13,2767	11,14329	9,48773	0,71072	0,48442	0,29711
5	15,08627	12,8325	11,0705	1,14548	0,83121	0,55430
6	16,81189	14,44938	12,59159	1,63538	1,23734	0,87209
7	18,47531	16,01276	14,06714	2,16735	1,68987	1,23904
8	20,09024	17,53455	15,50731	2,73264	2,17973	1,64650
9	21,66599	19,02277	16,91898	3,32511	2,70039	2,08790



Число степеней свободы $k$	Уровень значимости $\alpha$					
	0,01	0,025	0,05	0,95	0,975	0,99
10	23,20925	20,48318	18,30704	3,94030	3,24697	2,55821
11	24,72497	21,92005	19,67514	4,57481	3,81575	3,05348
12	26,21697	23,33666	21,02607	5,22603	4,40379	3,57057
13	27,68825	24,7356	22,36203	5,89186	5,00875	4,10692
14	29,14124	26,11895	23,68479	6,57063	5,62873	4,66043
15	30,57791	27,48839	24,99579	7,26094	6,26214	5,22935
16	31,99993	28,84535	26,29623	7,96165	6,90766	5,81221
17	33,40866	30,19101	27,58711	8,67176	7,56419	6,40776
18	34,80531	31,52638	28,86930	9,39046	8,23075	7,01491
19	36,19087	32,85233	30,14353	10,11701	8,90652	7,63273
20	37,56623	34,16961	31,41043	10,85081	9,59078	8,26040
21	38,93217	35,47888	32,67057	11,59131	10,2829	8,89720
22	40,28936	36,78071	33,92444	12,33801	10,98232	9,54249
23	41,63840	38,07563	35,17246	13,09051	11,68855	10,19572
24	42,97982	39,36408	36,41503	13,84843	12,40115	10,85636
25	44,31410	40,64647	37,65248	14,61141	13,11972	11,52398
26	45,64168	41,92317	38,88514	15,37916	13,84391	12,19815
27	46,96294	43,19451	40,11327	16,15140	14,57338	12,87850
28	48,27824	44,46079	41,33714	16,92788	15,30786	13,56471
29	49,58788	45,72229	42,55697	17,70837	16,04707	14,25645
30	50,89218	46,97924	43,77297	18,49266	16,79077	14,95346

При формировании критической области используют табл. 10.12 и соответствующие правила (табл. 10.13).

Таблица 10.13

**Правила вычисления критических точек  
при использовании статистики  $\chi^2$**

Двусторонняя критическая область	По таблице критических точек распределения $\chi^2$ : $\chi^2_{\text{левое крит}} \left( 1 - \frac{\alpha}{2}, k \right)$ , $\chi^2_{\text{правое крит}} \left( \frac{\alpha}{2}, k \right)$ , $\alpha$ — уровень значимости; $k$ — число степеней свободы
Правосторонняя критическая область	По таблице критических точек распределения $\chi^2$ : $\chi^2_{\text{крит}} (\alpha, k)$ , $\alpha$ — уровень значимости; $k$ — число степеней свободы
Левосторонняя критическая область	По таблице критических точек распределения $\chi^2$ : $\chi^2_{\text{крит}} (1 - \alpha, k)$ , $\alpha$ — уровень значимости; $k$ — число степеней свободы



Отметим, что при проверке гипотезы на соответствие закону распределения альтернативная гипотеза явно не выдвигается, а критическая область стандартно выбирается правосторонней.

### Пример 10.16

Проверим, согласуется ли предположение о нормальном распределении генеральной совокупности с эмпирическим распределением следующей выборки, полученной из этой совокупности:

$x_i$	190–200	200–210	210–220	220–230	230–240	240–250
$n_i$	10	26	56	64	30	14

#### Решение

При решении задачи будем придерживаться нашего плана.

1. При использовании критерия согласия в основной гипотезе  $H_0$  утверждается, что эмпирическое и теоретическое распределения согласованы, альтернативная гипотеза  $H_1$  по умолчанию предполагает противоположное — распределения не согласованы.

2. Уровень значимости выбираем стандартно  $\alpha = 0,05$ .

3. Будем использовать статистику  $\chi^2$ :  $\chi^2 = \sum_i \frac{(n_i - n'_i)^2}{n'_i}$ , где  $n_i$  — эмпирические частоты;  $n'_i$  — теоретические частоты.

Эмпирические частоты берем из данного эмпирического распределения, теоретические вычисляем по формуле  $n'_i = np_i$ , где  $n$  — объем выборки;  $p_i$  — теоретическая вероятность попадания значения величины в  $i$ -й интервал. Так как мы проверяем гипотезу о соответствии нормальному распределению, то теоретическую вероятность  $p_i$  будем вычислять по формуле

$$p_i = P(x_i < X < x_{i+1}) = \Phi\left(\frac{x_{i+1} - \bar{X}}{\sigma_B}\right) - \Phi\left(\frac{x_i - \bar{X}}{\sigma_B}\right).$$

Вычислим выборочное среднее  $\bar{X}$  и выборочное стандартное отклонение  $\sigma_B$ :

$$\bar{X} = \frac{195 \cdot 10 + 205 \cdot 26 + 215 \cdot 56 + 225 \cdot 64 + 235 \cdot 30 + 245 \cdot 14}{10 + 26 + 56 + 64 + 30 + 14} = 221;$$

$$D_B(X) = \frac{195^2 \cdot 10 + 205^2 \cdot 26 + 215^2 \cdot 56 + 225^2 \cdot 64 + 235^2 \cdot 30 + 245^2 \cdot 14}{200} - 221^2 = 152;$$

$$\sigma_B = \sqrt{D_B(X)} = \sqrt{152} = 12,33.$$

Теперь вычислим теоретические вероятности, учитывая, что нормальное распределение определено на всей числовой прямой  $(-\infty; +\infty)$ :

$$\begin{aligned} p_1 &= P(-\infty < X < 200) = \Phi\left(\frac{200 - 221}{12,33}\right) - \Phi(-\infty) = \\ &= \Phi(-1,7) - (-0,5) = -0,45543 + 0,5 = 0,04457; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_2 &= P(200 < X < 210) = \Phi\left(\frac{210 - 221}{12,33}\right) - \Phi\left(\frac{200 - 221}{12,33}\right) = \\ &= \Phi(-0,89) - \Phi(-1,7) = -0,31327 + 0,45543 = 0,14216; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_3 &= P(210 < X < 220) = \Phi\left(\frac{220 - 221}{12,33}\right) - \Phi\left(\frac{210 - 221}{12,33}\right) = \\ &= \Phi(-0,08) - \Phi(-0,89) = -0,03188 + 0,31327 = 0,28139; \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 p_4 &= P(220 < X < 230) = \Phi\left(\frac{230-221}{12,33}\right) - \Phi\left(\frac{220-221}{12,33}\right) = \\
 &= \Phi(0,73) - \Phi(-0,08) = 0,26730 + 0,03188 = 0,29919; \\
 p_5 &= P(230 < X < 240) = \Phi\left(\frac{240-221}{12,33}\right) - \Phi\left(\frac{230-221}{12,33}\right) = \\
 &= \Phi(1,54) - \Phi(0,73) = 0,43822 - 0,26730 = 0,17092; \\
 p_6 &= P(240 < X < +\infty) = \Phi(+\infty) - \Phi\left(\frac{240-221}{12,33}\right) = \\
 &= 0,5 - \Phi(1,54) = 0,5 - 0,26730 = 0,06178.
 \end{aligned}$$

Условие  $\sum_i p_i = 1$  выполняется.

Для того чтобы вычислить наблюдаемое значение статистики, заполним вспомогательную таблицу (табл. 10.14).

Таблица 10.14

Вспомогательная таблица для решения примера 10.16

$x_i$	190—200	200—210	210—220	220—230	230—240	240—250	$\Sigma$
$n_i$	10	26	56	64	30	14	200
$p_i$	0,04457	0,14216	0,28139	0,29918	0,17092	0,06178	1
$np_i = 200p_i$	8,914	28,432	56,278	59,836	34,184	12,356	200
$(n_i - np_i)^2$	$(10 - 8,914)^2 = 1,179$	5,914	0,077	17,339	17,506	2,703	
$\frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}$	$\frac{1,179}{8,914} = 0,132$	0,208	0,001	0,290	0,512	0,219	1,362

Наблюдаемое значение статистики выделено в таблице как сумма:

$$\chi^2_{\text{наблюдаемое}} = \chi^2 = \sum_i \frac{(n_i - n'_i)^2}{n'_i} = \sum_i \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i} = 1,362.$$

#### 4. Формирование критической области.

Критическая область в таких задачах всегда правосторонняя, при вычислении критического значения используем соответствующее правило и таблицу критических точек распределения  $\chi^2$ :

$$\chi^2_{\text{крит}}(\alpha, k) = \chi^2_{\text{крит}}(0,05; 3) = 7,8.$$



Рис. 10.14. Критическая область для примера 10.16

Число степеней свободы мы вычисляли по формуле  $k = r - l - 1$  при  $r = 6$  (число интервалов в выборочной совокупности),  $l = 2$  (число параметров нормального распределения).



5. Ответ на вопрос о принадлежности наблюдаемого значения статистики критической области: наблюдаемое значение статистики  $\chi^2_{\text{наблюдаемое}} = 1,362$  не принадлежит критической области ( $1,362 < 7,8$ ).

6. Вывод о принятии основной гипотезы или ее отклонении в пользу альтернативной.

Из того что наблюдаемое значение статистики не принадлежит критической области, следует, что основная гипотеза принимается.

*Ответ:* при уровне значимости  $\alpha = 0,05$  можно утверждать, что данное эмпирическое распределение согласуется с нормальным законом распределения.

---

В рассмотренном примере мы проверяли гипотезу о соответствии выборочных данных нормальному распределению, поэтому теоретические вероятности вычисляли с применением формул, имеющих место для нормального распределения. Если проверять гипотезы на соответствие другим видам распределений, то и соответствующие вычисления теоретических вероятностей необходимо выполнять, опираясь на те формулы, которые имеют место для проверяемого закона распределения. Кроме того, при вычислении критического значения важно помнить о количестве параметров проверяемого закона распределения — это позволит правильно определить число степеней свободы.

#### 10.4. Элементы корреляционно-регрессионного анализа

При рассмотрении величин особое внимание уделяют изучению зависимости между ними. Если какая-либо величина определяется как *однозначная* функция каких-либо величин, то говорят о *функциональной* зависимости между этими величинами. Всем известны, например, зависимости между производительностью труда, объемом выпускаемой продукции и временем, в течение которого эта продукция была выпущена, или между скоростью движения, временем и расстоянием. Функциональная зависимость возникает всякий раз, когда существует функция  $y = f(x_1, x_1, \dots, x_n)$ , и значение  $y$  однозначно определяется для каждого возможного набора значений  $(x_1, x_1, \dots, x_n)$ . Между случайными величинами тоже могут возникать функциональные зависимости, и мы о них уже говорили.

Однако между случайными величинами чаще возникает вероятностная, или *стохастическая*, зависимость.

Стохастическая зависимость между двумя величинами  $Y$  и  $X$  обычно возникает в том случае, когда имеются как общие случайные факторы, влияющие на обе величины, так и другие факторы, неодинаковые для обеих случайных величин. В этом случае фиксированному значению величины  $X$  соответствует множество возможных значений величины  $Y$ , причем заранее неизвестно, какое именно из этих значений будет принято величиной.

Стохастические зависимости в рамках математико-статистического исследования изучаются с использованием законов распределений рассматриваемых величин, вероятностей, с которыми встречаются те или иные комбинации значений исследуемых величин, и т.д. Можно говорить о том, что изучение стохастических зависимостей без разработанного в курсе тео-



рии вероятностей математического аппарата невозможно. Мы рассмотрим один из примеров стохастической зависимости — корреляционную зависимость между величинами. Теория корреляции позволяет решать задачи обоснованного прогноза: когда указаны пределы, в которых с заданной надежностью будут содержаться значения интересующей нас величины, если связанные с ней величины принимают определенные значения.

Если имеется стохастическая зависимость  $Y$  от  $X$ , то прежде всего обращают внимание на изменения условного математического ожидания  $E(Y|X=x)$  при изменении значения  $X=x$ . Если при изменении  $x$  условные математические ожидания  $E(Y|X=x)$  меняются, то говорят о наличии корреляционной зависимости  $Y$  от  $X$ . Функция, которая описывает эти изменения, называется *функцией регрессии*.

### Пример 10.17

Известно распределение двумерной случайной величины  $(X, Y)$ :

$(X, Y)$	$X = 2$	$X = 3$	$X = 5$
$Y = 0,3$	0,15	0,2	0,01
$Y = 0,5$	0,05	0,45	0,14

Определим, существует ли между величинами  $Y$  и  $X$  стохастическая зависимость.  
*Решение*

О наличии стохастической зависимости будет говорить изменение значений условных математических ожиданий  $E(Y|X=x)$  при изменении значений  $X=x$ .

Найдем условные законы распределений  $(Y|X=x)$  при всех возможных значениях  $X=x$  ( $X=2, X=3, X=5$ ) и вычислим соответствующие условные математические ожидания с использованием определения условной вероятности.

1.  $X = 2$ .

Вычисляем вероятности:

$$P(Y = 0,3|X = 2) = \frac{P(Y = 0,3; X = 2)}{P(X = 2)} = \frac{0,15}{0,15 + 0,05} = \frac{0,15}{0,20} = \frac{3}{4} = 0,75;$$

$$P(Y = 0,5|X = 2) = \frac{P(Y = 0,5; X = 2)}{P(X = 2)} = \frac{0,05}{0,15 + 0,05} = \frac{0,05}{0,20} = \frac{1}{4} = 0,25.$$

Получаем таблицу

Значения $(Y X=2)$	0,3	0,5
Вероятности	0,75	0,25

Найдем условное математическое ожидание:

$$E(Y|X=2) = 0,3 \cdot 0,75 + 0,5 \cdot 0,25 = 0,35.$$

2.  $X = 3$ .

Вычисляем вероятности:

$$P(Y = 0,3|X = 3) = \frac{P(Y = 0,3; X = 3)}{P(X = 3)} = \frac{0,2}{0,2 + 0,45} = \frac{0,2}{0,65} = \frac{4}{13};$$

$$P(Y = 0,5|X = 3) = \frac{P(Y = 0,5; X = 3)}{P(X = 3)} = \frac{0,45}{0,2 + 0,45} = \frac{0,45}{0,65} = \frac{9}{13}.$$



Получаем таблицу

Значения ( $Y X=3$ )	0,3	0,5
Вероятности	$\frac{4}{13}$	$\frac{9}{13}$

Найдем условное математическое ожидание:

$$E(Y|X=3) = 0,3 \cdot \frac{4}{13} + 0,5 \cdot \frac{9}{13} = \frac{57}{130}.$$

3.  $X=5$ .

Вычисляем вероятности:

$$P(Y=0,3|X=5) = \frac{P(Y=0,3; X=5)}{P(X=5)} = \frac{0,01}{0,01+0,14} = \frac{0,01}{0,15} = \frac{1}{15};$$

$$P(Y=0,5|X=5) = \frac{P(Y=0,5; X=5)}{P(X=5)} = \frac{0,14}{0,01+0,14} = \frac{0,14}{0,15} = \frac{14}{15}.$$

Получаем таблицу

Значения ( $Y X=5$ )	0,3	0,5
Вероятности	$\frac{1}{15}$	$\frac{14}{15}$

Найдем условное математическое ожидание:

$$E(Y|X=5) = 0,3 \cdot \frac{1}{15} + 0,5 \cdot \frac{14}{15} = \frac{73}{150}.$$

Таким образом, зависимость между величинами  $Y$  и  $X$  является стохастической, потому что величина  $Y$  может принимать значения 0,3 или 0,5 и нельзя сказать заранее — какое именно значение она примет, более того, вероятность  $P(Y=0,3)$  изменяется при изменении значения  $X=x$ .

Мы видим, что с изменением значения  $X$  меняется и значение условного математического ожидания:

$X$	2	3	5
$E(Y X=x)$	$\frac{7}{20}$	$\frac{57}{130}$	$\frac{73}{150}$

Это означает, что стохастическая зависимость между величинами  $Y$  и  $X$  является корреляционной, а составленная таблица задает функцию регрессии  $Y$  по  $X$ . Так как величины  $X$  и  $Y$  по условию дискретные и принимают только определенные значения, то функция регрессии определяется только для допустимых значений  $X$  и  $Y$ .

*Ответ:* между величинами  $Y$  и  $X$  существует стохастическая зависимость, являющаяся корреляционной.

Информацию о связи величин  $X$  и  $Y$  дает и коэффициент корреляции

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}.$$

Если коэффициент корреляции равен 1 или -1, то между величинами существует линейная зависимость вида  $Y = \alpha + \beta X$ , где  $\alpha, \beta$  — некоторые постоянные.

Чем ближе значение  $|\rho|$  к 1, тем сильнее корреляционная связь между величинами.



Принято считать, что при  $|\rho| < 0,3$  связь между величинами является слабой, при условии  $0,3 \leq |\rho| \leq 0,7$  такая связь является средней, а при  $|\rho| > 0,7$  корреляционная связь между величинами определяется как сильная.

При неизвестном двумерном распределении  $(X, Y)$  прибегают к выборочным оценкам. Если доказано, что корреляционная связь между величинами средняя или сильная, то можно составить уравнение линейной регрессии  $Y$  по  $X$ :

$$y = \bar{Y} + \rho_{\text{в}}(X, Y) \cdot \frac{\sigma_{\text{в}}(Y)}{\sigma_{\text{в}}(X)}(x - \bar{X}).$$

Коэффициентом регрессии  $\beta_{Y|X}$  называют коэффициент при аргументе  $x$ :

$$\beta_{Y|X} = \rho_{\text{в}}(X, Y) \cdot \frac{\sigma_{\text{в}}(Y)}{\sigma_{\text{в}}(X)}.$$

Аналогично можно составлять уравнение линейной регрессии  $X$  по  $Y$ :

$$x = \bar{X} + \rho_{\text{в}}(X, Y) \cdot \frac{\sigma_{\text{в}}(X)}{\sigma_{\text{в}}(Y)}(y - \bar{Y}).$$

Коэффициент регрессии  $\beta_{X|Y}$  в этом случае имеет вид

$$\beta_{X|Y} = \rho_{\text{в}}(X, Y) \cdot \frac{\sigma_{\text{в}}(X)}{\sigma_{\text{в}}(Y)}.$$

Коэффициент регрессии фактически является угловым коэффициентом прямой и определяет тангенс угла наклона прямой регрессии к положительному направлению оси  $Ox$ .

#### Пример 10.18

Для изучения двумерной случайной величины  $(X, Y)$  из генеральной совокупности извлечена выборочная совокупность объема  $n = 10$  и получено эмпирическое распределение

	$X = 8$	$X = 9$	$X = 11$	$X = 12$
$Y = 5$	2	1	0	0
$Y = 6$	2	1	0	0
$Y = 7$	0	1	0	0
$Y = 8$	0	0	0	1
$Y = 10$	0	0	1	1

Проверим наличие корреляционной зависимости между величинами и в случае средней или сильной связи составим уравнение линейной регрессии  $Y$  по  $X$ .

*Решение*

Для того чтобы установить наличие корреляционной зависимости между величинами, вычислим выборочный коэффициент корреляции по формуле

$$\rho_{\text{в}}(X, Y) = \frac{\text{cov}_{\text{в}}(X, Y)}{\sigma_{\text{в}}(X)\sigma_{\text{в}}(Y)},$$

$$\text{где } \text{cov}_{\text{в}}(X, Y) = \frac{\sum_i \sum_j x_i y_j n_{ij}}{n} - \bar{X} \cdot \bar{Y}.$$



Найдем:

$$\begin{aligned}\bar{X} &= \frac{8 \cdot 4 + 9 \cdot 3 + 11 \cdot 1 + 12 \cdot 2}{10} = 9,4; \\ D_{\text{в}}(X) &= \frac{8^2 \cdot 4 + 9^2 \cdot 3 + 11^2 \cdot 1 + 12^2 \cdot 2}{10} - 9,4^2 = 2,44; \\ \sigma_{\text{в}}(X) &= \sqrt{2,44} = 1,562; \\ \bar{Y} &= \frac{5 \cdot 3 + 6 \cdot 3 + 7 \cdot 1 + 8 \cdot 1 + 10 \cdot 2}{10} = 6,8; \\ D_{\text{в}}(Y) &= \frac{5^2 \cdot 3 + 6^2 \cdot 3 + 7^2 \cdot 1 + 8^2 \cdot 1 + 10^2 \cdot 2}{10} - 6,8^2 = 6,36; \\ \sigma_{\text{в}}(Y) &= \sqrt{6,36} = 2,522; \\ \text{cov}_{\text{в}}(X, Y) &= \frac{\sum_i \sum_j x_i y_j n_{ij}}{n} - \bar{X} \cdot \bar{Y} = \\ &= \frac{8 \cdot 5 \cdot 2 + 8 \cdot 6 \cdot 2 + 9 \cdot 5 \cdot 1 + 9 \cdot 6 \cdot 1 + 9 \cdot 7 \cdot 1 + 11 \cdot 10 \cdot 1 + 12 \cdot 8 \cdot 1 + 12 \cdot 10 \cdot 1}{10} - 9,4 \cdot 6,8 = 2,48. \\ \rho_{\text{в}}(X, Y) &= \frac{\text{cov}_{\text{в}}(X, Y)}{\sigma_{\text{в}}(X) \sigma_{\text{в}}(Y)} = \frac{2,48}{1,562 \cdot 2,522} = 0,63.\end{aligned}$$

Полученный коэффициент корреляции говорит о средней связи между величинами, поэтому можно составить уравнение линейной регрессии  $Y$  по  $X$ :

$$\begin{aligned}y &= \bar{Y} + \rho_{\text{в}}(X, Y) \cdot \frac{\sigma_{\text{в}}(Y)}{\sigma_{\text{в}}(X)} (x - \bar{X}) \Rightarrow y = 6,8 + 0,63 \cdot \frac{2,522}{1,562} (x - 9,4) \Rightarrow \\ &\Rightarrow y = 1,017x - 2,7598 \text{ — искомое уравнение линейной регрессии.}\end{aligned}$$

Ответ:  $y = 1,017x - 2,7598$ .

Используя составленное уравнение, можно рассчитать по заданным значениям величины  $X$  соответствующие значения величины  $Y$ :

$$\begin{aligned}X = 8 &\Rightarrow y = 1,017 \cdot 8 - 2,7598 = 5,3762; \\ X = 9 &\Rightarrow y = 1,017 \cdot 9 - 2,7598 = 6,3932; \\ X = 11 &\Rightarrow y = 1,017 \cdot 11 - 2,7598 = 8,4272; \\ X = 12 &\Rightarrow y = 1,017 \cdot 12 - 2,7598 = 9,4442.\end{aligned}$$

Мы видим, что вычисленные значения не совпадают с теми значениями  $Y$ , которые получены по выборке, однако коэффициенты в уравнение регрессии подбираются таким образом, чтобы все отклонения эмпирических значений от теоретических являлись минимальными (рис. 10.15).

Более того, прямая регрессии обязательно проходит через центр распределения — точку с координатами  $(\bar{X}, \bar{Y})$ , в примере 10.18 это точка  $(9,4; 6,8)$ .

Уравнение линейной регрессии составляется для прогнозирования зависимости величин  $Y$  и  $X$  в генеральной совокупности. Для обоснования такого прогноза необходимо удостовериться в значимости выборочного коэффициента корреляции. Такая задача решается с привлечением  $T$ -статистики

$$T = \rho_{\text{в}} \cdot \frac{\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-\rho_{\text{в}}^2}},$$



где число степеней свободы  $k = n - 2$ ;  $\rho_v$  — выборочный коэффициент корреляции;  $n$  — объем выборки. Если соответствующая проверка подтвердит значимость выборочного коэффициента корреляции, то его значение можно «перенести» в генеральную совокупность и формулировать выводы о зависимости величин  $Y$  и  $X$  в генеральной совокупности, предлагая для описания такой зависимости уравнение линейной регрессии.

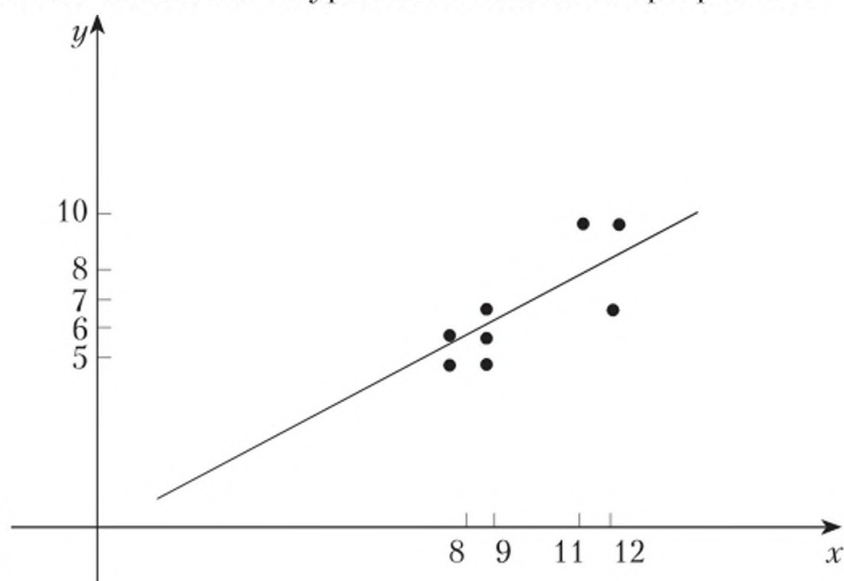


Рис. 10.15. Графическое изображение корреляционной и регрессионной зависимости

#### Пример 10.19

Проверим значимость выборочного коэффициента корреляции, полученного при решении примера 10.18.

*Решение*

Проверка значимости выборочного коэффициента корреляции является стандартной задачей на проверку статистической гипотезы, поэтому при решении будем придерживаться уже известного нам плана решения таких задач.

1. Выдвижение основной гипотезы  $H_0$  и альтернативной гипотезы  $H_1$ .

Основная гипотеза  $H_0$  состоит в том, что коэффициент корреляции в генеральной совокупности равен нулю, альтернативную гипотезу можно выбирать ненаправленной, а именно — коэффициент корреляции не равен нулю:

$$H_0: \rho(X, Y) = 0; H_1: \rho(X, Y) \neq 0.$$

2. Выбор уровня значимости  $\alpha$  для проведения проверки:

Уровень значимости выбираем  $\alpha = 0,01$ .

3. Выбор статистики и вычисление наблюдаемого значения статистики.

Мы уже отметили, что для решения такого типа задачи применяется  $T$ -статистика

$$\text{с числом степеней свободы } k = n - 2: T = \rho_v \cdot \frac{\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-\rho_v^2}}.$$

Вычислим наблюдаемое значение статистики:

$$T_{\text{наблюдаемое}} = \rho_v \cdot \frac{\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-\rho_v^2}} = 0,63 \cdot \frac{\sqrt{10-2}}{\sqrt{1-0,63^2}} = 2,29.$$

Число степеней свободы  $k = n - 2 = 8$ .



#### 4. Формирование критической области.

Критическая область будет формироваться как двусторонняя (определяется альтернативной гипотезой  $H_1$ , рис. 10.16), при вычислении критического значения используем соответствующее правило:  $t_{\text{крит}} = 2,31$  находим по табл. 10.5, используя двустороннюю область при уровне значимости гипотезы  $\alpha = 0,05$  и числе степеней свободы  $k = 8$ .



Рис. 10.16. Критическая область для примера 10.19

5. Ответ на вопрос о принадлежности наблюдаемого значения статистики критической области.

Наблюдаемое значение статистики  $T_{\text{наблюдаемое}} = 2,29$  не принадлежит критической области ( $-2,31 < 2,29 < 2,31$ ).

6. Вывод о принятии основной гипотезы или ее отклонении в пользу альтернативной.

Наблюдаемое значение статистики не принадлежит критической области, следовательно, основная гипотеза принимается.

*Ответ:* при уровне значимости  $\alpha = 0,05$  можно утверждать, что выборочный коэффициент корреляции не является значимым: корреляционная зависимость, установленная по выборочным данным, носит случайный характер.

Полученный вывод позволяет нам теперь утверждать, что уравнение регрессии из примера 10.18 не «работает» для прогнозирования в генеральной совокупности на уровне  $\alpha = 0,05$ . Однако если уровень значимости определить  $\alpha = 0,1$ , то критическое значение будет равно 1,86 и наблюдаемое значение статистики  $T_{\text{наблюдаемое}} = 2,29$  попадает в критическую область. Это уже позволяет сделать вывод о значимости выборочного коэффициента корреляции и существующей в генеральной совокупности зависимости, которую можно задать уравнением линейной регрессии.

Объяснить это можно тем, что значение выборочного коэффициента корреляции из примера 10.18 указывало на среднюю связь между величинами  $X$  и  $Y$ , наблюдаемые значения оказались «разбросанными» относительно прямой регрессии, в такой ситуации исследователь может настаивать на линейной зависимости в генеральной совокупности, но только с надежностью  $\gamma = 1 - \alpha = 0,9$  и меньше.

### Задания для самостоятельной работы

**10.1.** Даны результаты, полученные при изучении признака  $X$ . Задайте частотное распределение признака и эмпирическую функцию распределения, постройте полигон частот и вычислите эмпирические характеристики признака:

- 4; 2; 3; 2; 2; 3; 4; 5; 4; 4; 5; 5; 4; 4; 5;
- 0,2; 0,1; 0,1; 0,3; 0,2; 0,1; 0,2; 0,4; 0,5; 0,3; 0,4; 0,3; 0,5; 0,1; 0,1; 0,2;
- 41; 42; 43; 42; 42; 43; 44; 45; 44; 44; 45; 45; 44; 44; 45.



**10.2.** Дано интервальное распределение признака  $X$ . Постройте гистограмму и задайте эмпирическую функцию распределения, а также вычислите эмпирические характеристики признака:

а)

Значение признака $X$	12–15	15–18	18–21	21–24	24–27	27–30
Частота	15	12	11	8	5	2

б)

Значение признака $X$	1–5	5–10	10–15	15–20	20–25	25–30
Частота	2	3	7	8	7	3

в)

Значение признака $X$	2–4	4–6	6–8	8–10	10–12	12–14
Частота	10	8	6	8	9	10

**10.3.** Дано совместное статистическое распределение двух признаков  $X$  и  $Y$ , изученных в генеральной совокупности. Вычислите эмпирическую ковариацию  $\text{cov}(X, Y)$  и эмпирический коэффициент корреляции  $\rho(X, Y)$ :

а)

	$X = -2$	$X = -1$	$X = 0$	$X = 1$
$Y = -4$	25	11	0	12
$Y = -3$	14	20	0	13
$Y = -2$	0	10	15	0

б)

	$X = 10$	$X = 15$	$X = 20$	$X = 25$
$Y = 5$	15	10	0	0
$Y = 10$	20	10	0	20
$Y = 15$	0	0	15	10

в)

	$X = 11$	$X = 12$	$X = 13$	$X = 14$
$Y = 1$	0	10	0	25
$Y = 2$	20	0	10	30
$Y = 3$	0	15	0	10

**10.4.** Из заданного совместного статистического распределения двух признаков  $X$  и  $Y$ , изученных в генеральной совокупности объема  $N$ , извлекается выборка заданного объема  $n$ . Найдите средние ошибки выборки для признаков  $X$  и  $Y$ , а также ковариацию выборочных средних  $\bar{X}$  и  $\bar{Y}$  (рассмотрите условия, когда выборка повторная и когда — бесповторная):

а)

	$X = -2$	$X = -1$	$X = 0$	$X = 1$
$Y = -4$	25	11	0	12
$Y = -3$	14	20	0	13
$Y = -2$	0	10	15	0

$N = 120, n = 20$ ;



б)

	$X = 10$	$X = 15$	$X = 20$	$X = 25$
$Y = 5$	15	10	0	0
$Y = 10$	20	10	0	20
$Y = 15$	0	0	15	10

$N = 100, n = 15;$

в)

	$X = 11$	$X = 12$	$X = 13$	$X = 14$
$Y = 1$	0	10	0	25
$Y = 2$	20	0	10	30
$Y = 3$	0	15	0	10

$N = 110, n = 20.$

**10.5.** Значения признака в генеральной совокупности заданы распределением

Значение признака $X$	10	11	12	13	14	15
Частота	15	12	8	8	5	2

Из этой генеральной совокупности извлекается повторная выборка объема 10. Найдите среднюю ошибку выборки.

**10.6.** Значения признака в генеральной совокупности заданы распределением

Значение признака $X$	1–5	5–10	10–15	15–20	20–25	25–30
Частота	2	3	7	8	7	3

Из этой генеральной совокупности извлекается повторная выборка объема 5. Найдите среднюю ошибку выборки.

**10.7.** Значения признака в генеральной совокупности заданы распределением

Значение признака $X$	1–5	5–10	10–15	15–20	20–25	25–30
Частота	2	3	7	8	7	3

Из этой генеральной совокупности извлекается бесповторная выборка объема 5. Найдите среднюю ошибку выборки.

**10.8.** Значения признака в генеральной совокупности заданы распределением

Значение признака $X$	10–14	14–18	18–22
частота	5	9	11

Каким должен быть минимальный объем повторной выборки, чтобы ее средняя ошибка была не больше 4?

**10.9.** Значения признака в генеральной совокупности заданы распределением

Значение признака $X$	10–14	14–18	18–22
Частота	5	9	11

Каким должен быть минимальный объем бесповторной выборки, чтобы ее средняя ошибка была не больше 4?

**10.10.** Из генеральной совокупности, имеющей генеральную дисперсию  $D(X) = 45$ , извлекли повторную выборку объемом  $n = 15$ . Какая при этом получается сред-



ная ошибка выборки  $\sigma(\bar{X})$ ? Каким должен быть минимальный объем повторной выборки, чтобы ее средняя ошибка была не больше 1,5?

**10.11.** Средняя ошибка повторной выборки объема  $n = 15$  из генеральной совокупности оказалась равной 4. Чему равна дисперсия этой генеральной совокупности? Каким должен быть объем повторной выборки из этой генеральной совокупности, чтобы ее ошибка не превосходила 3?

**10.12.** Генеральная совокупность изучается по заданной выборке. Используя выборочные данные, найдите несмещенные оценки генерального среднего и генеральной дисперсии:

а)

Значение признака $X$	5	10	15	20	25	30
Частота	5	7	7	8	7	5

б)

Значение признака $X$	3	4	8	11	15	17
Частота	11	9	8	8	9	8

в)

Значение признака $X$	0	1	2	4	5	6
Частота	124	98	72	15	12	8

**10.13.** Случайная величина  $X$  распределена по биномиальному закону с параметрами  $n$  и  $p$  и изучается с помощью выборочной совокупности

Значение $X$	0	1	3	4	5	6
Частота	11	18	22	23	16	8

Используя метод моментов и выборочные данные, найдите точечные оценки параметров.

**10.14.** Случайная величина  $X$  распределена равномерно на отрезке  $[a; b]$  и изучается с помощью выборочной совокупности

Значение $X$	3	4	6	7	8	10	11	15
Частота	34	37	28	33	30	28	36	33

Используя метод моментов и выборочные данные, найдите точечные оценки параметров  $a$  и  $b$  равномерного распределения.

**10.15.** Случайная величина  $X$  распределена по закону Пуассона с параметром  $\lambda$  и изучается с помощью выборочной совокупности

Значение $X$	0	1	2	3	4	5
Частота	112	89	63	24	12	5

Используя метод моментов и выборочные данные, найдите точечную оценку параметра  $\lambda$ .

**10.16.** Случайная величина  $X$  распределена по геометрическому закону с параметром  $p$  и изучается с помощью выборочной совокупности

Значение $X$	1	2	3	4	5	6
Частота	12	11	9	8	5	2

Используя метод моментов и выборочные данные, найдите точечную оценку параметра  $p$ .



**10.17.** Случайная величина  $X$  распределена по показательному закону с параметром  $\lambda$  и изучается с помощью выборочной совокупности

Значение $X$	1	2	3	4	5	6
Частота	125	100	94	82	61	48

Используя метод моментов и выборочные данные, найдите точечную оценку параметра  $\lambda$ .

**10.18.** Случайная величина  $X$  распределена по закону Пуассона с параметром  $\lambda$  и изучается с помощью выборочной совокупности

Значение $X$	0	1	2	3	4	5
Частота	15	12	8	5	3	1

Используя метод максимального правдоподобия и выборочные данные, найдите точечную оценку параметра  $\lambda$ .

**10.19.** Случайная величина  $X$  распределена по показательному закону с параметром  $\lambda$  и изучается с помощью выборочной совокупности

Значение $X$	1	2	3	4	5	6
Частота	125	100	94	82	61	48

Используя метод максимального правдоподобия и выборочные данные, найдите точечную оценку параметра  $\lambda$ .

**10.20.** Случайная величина  $X$  распределена по показательному закону с параметром  $\lambda$  и изучается с помощью выборочной совокупности:

Значение $X$	0–2	2–4	4–6	6–8	8–10	10–12
Частота	140	112	95	79	65	32

Используя метод максимального правдоподобия и выборочные данные, найдите точечную оценку параметра  $\lambda$ .

**10.21.** Случайная величина  $X$  распределена по биномиальному закону с параметрами  $n$  и  $p$  и изучается с помощью выборочной совокупности

Значение $X$	0	1	3	4	5	6
Частота	11	18	22	23	16	8

Используя метод максимального правдоподобия и выборочные данные, найдите точечные оценки параметров  $n$  и  $p$ .

**10.22.** Случайная величина  $X$  распределена по нормальному закону с параметрами  $\mu$  и  $\sigma$  и изучается с помощью выборочной совокупности

Значение $X$	10–20	20–30	30–40	40–50	50–60	60–70	70–80
Частота	14	17	24	30	28	19	15

Используя метод максимального правдоподобия и выборочные данные, найдите точечные оценки параметров  $\mu$  и  $\sigma$ .

**10.23.** Генеральная совокупность распределена по нормальному закону с дисперсией  $D(X) = 4$ . Определите доверительный интервал для неизвестного математического ожидания с доверительной вероятностью  $\gamma = 0,99$  по выборочному среднему  $\bar{X} = 2,1$  при объеме выборки  $n = 25$ .

**10.24.** Средний стаж  $X$  работников на предприятиях некоторой отрасли подчиняется нормальному закону, дисперсия для которого известна и равна  $D(X) = 25$ .



Случайная выборка объема  $n = 80$  показала, что средний стаж работников, попавших в выборку, равен 16 годам. Укажите доверительный интервал для среднего стажа работников в целом по отрасли с доверительной вероятностью  $\gamma = 0,94$ .

**10.25.** Каким должно быть минимальное количество выбираемых участков площадью 0,5 га каждый, чтобы с доверительной вероятностью  $\gamma = 0,95$  можно было утверждать, что выборочная средняя урожайность 25 ц/га отклонится от средней урожайности по всей площади (500 га) не более чем на 4 ц/га? Дисперсия средней урожайности по всей площади равна  $D(X) = 16$ .

**10.26.** Определите доверительный интервал при  $\gamma = 0,99$  для неизвестной вероятности возврата в срок кредита определенного вида, если из 1500 взятых кредитов в срок были возвращены 1470.

**10.27.** Какой минимальный объем выборки необходим, чтобы доля признака в генеральной совокупности отклонялась от выборочной доли признака не более чем на 0,05 при доверительной вероятности  $\gamma = 0,95$ ?

**10.28.** Генеральная совокупность распределена по нормальному закону с известными числовыми характеристиками  $E(X) = 12$  и  $D(X) = 16$ . Из генеральной совокупности извлекается выборка объема  $n = 25$ , для которой выборочное среднее  $\bar{X} = 10,4$ . На уровне значимости  $\alpha = 0,01$  проверьте гипотезу о соответствии выборочных данных данным генеральной совокупности.

**10.29.** Вероятность выпуска бракованного изделия на предприятии составляет 0,03. Из 1000 взятых на проверку изделий предприятия бракованными оказались 38. На уровне значимости  $\alpha = 0,05$  проверьте гипотезу на соответствие наблюдаемой относительной частоты появления бракованного изделия теоретической вероятности.

**10.30.** Из 2000 выбранных изделий, выпускаемых первым предприятием, бракованными оказались 60, а из 1500 выбранных изделий, выпускаемых вторым предприятием, бракованными оказались 48. Можно ли на уровне значимости  $\alpha = 0,03$  утверждать, что вероятности выпуска бракованных изделий на первом и втором предприятиях совпадают?

**10.31.** Известно, что генеральная совокупность распределена по нормальному закону с математическим ожиданием  $E(X) = 11$ . Из нее извлекается выборка объема  $n = 15$ , для которой вычислены выборочное среднее  $\bar{X} = 12$  и выборочная дисперсия  $D_v(X) = 4,5$ . На уровне значимости  $\alpha = 0,01$  проверьте гипотезу о соответствии выборочных данных данным генеральной совокупности.

**10.32.** Из двух независимых генеральных совокупностей, распределенных по нормальному закону, извлечены выборки объемов  $n = 10$  и  $m = 9$ , для которых вычислены выборочные дисперсии  $D_v(X) = 60$  и  $D_v(Y) = 64$  соответственно. Проверьте гипотезу о равенстве дисперсий генеральных совокупностей на уровне значимости  $\alpha = 0,05$ .

**10.33.** Проверьте на уровне значимости  $\alpha = 0,01$ , согласуется ли предположение о показательном распределении генеральной совокупности с эмпирическим распределением следующей выборки, полученной из этой совокупности:

Значение $X$	1	2	3	4	5	6
Частота	125	100	94	82	61	48

**10.34.** Изучив данное распределение двумерной величины  $(X, Y)$ , определите наличие стохастической зависимости между величинами  $X$  и  $Y$ :

а)

$(X, Y)$	$X = -2$	$X = -1$	$X = 0$	$X = 1$
$Y = -4$	0,2	0,1	0	0,1
$Y = -3$	0,1	0	0,1	0,1
$Y = -2$	0	0,1	0,1	0,1



б)

(X, Y)	X = 10	X = 15	X = 20	X = 25
Y = 10	0	0	0,2	0,1
Y = 15	0,2	0,3	0,1	0,1

в)

(X, Y)	X = 11	X = 12	X = 13	X = 14
Y = 1	0	0,1	0	0,1
Y = 2	0,3	0	0,2	0,1
Y = 3	0	0,1	0	0,1

**10.35.** Для изучения двумерной величины  $(X, Y)$  сформировали выборочную совокупность, распределение которой задано. Составьте уравнение линейной регрессии  $Y$  по  $X$  и проверьте значимость выборочного коэффициента корреляции:

а)

(X, Y)	X = -2	X = -1	X = 1	X = 4
Y = -100	8	10	14	0
Y = 150	12	8	6	5
Y = 300	0	22	0	15

б)

(X, Y)	X = 2	X = 4	X = 8	X = 32
Y = -1	0	0	7	28
Y = 0	0	15	15	10
Y = 10	25	0	0	0

в)

(X, Y)	X = 0	X = 1	X = 2	X = 3
Y = 2	11	15	0	0
Y = 4	12	26	14	10
Y = 6	2	0	10	0



## Литература

1. *Борцова, Т. В.* Математический анализ. Ч. 3. Интегральное исчисление : учеб. пособие / Т. В. Борцова [и др.] ; под ред. В. Б. Гисина, Е. Н. Орла ; ФГОУ ВПО «Финансовая академия при Правительстве РФ», кафедра математики и финансовых приложений. — М. : Финакадемия, 2009.

2. *Васенкова, Е. К.* Математика. Ч. 1. Введение в анализ : учеб. пособие / Е. К. Васенкова [и др.] ; ФГОУ ВПО «Финансовая академия при Правительстве РФ», кафедра математики и финансовых приложений. — М. : Финакадемия, 2008.

3. *Васенкова, Е. К.* Математика. Ч. 2. Дифференциальное исчисление функций одной переменной : учеб. пособие / Е. К. Васенкова, Г. А. Постовалова, Е. В. Райкина ; ФГОУ ВПО «Финансовая академия при Правительстве РФ», кафедра математики и финансовых приложений. — М. : Финакадемия, 2006.

4. *Васенкова, Е. К.* Математика. Ч. 3. Интегральное исчисление: неопределенный интеграл : учеб. пособие / Е. К. Васенкова, Г. А. Постовалова, Е. В. Райкина ; ФГОУ ВПО «Финансовая академия при Правительстве РФ», кафедра математики и финансовых приложений. — М. : Финакадемия, 2006.

5. *Васенкова, Е. К.* Математика. Ч. 6. Дифференциальные уравнения : учеб. пособие / Е. К. Васенкова [и др.] ; ФГОУ ВПО «Финансовая академия при Правительстве РФ», кафедра математики и финансовых приложений. — М. : Финакадемия, 2009.

6. *Винюков, И. А.* Линейная алгебра. Ч. 2. Многочлены и комплексные числа. Собственные значения и собственные векторы. Модель Леонтьева : учеб. пособие / И. А. Винюков, В. Ю. Попов, С. В. Пчелинцев ; под ред. В. Б. Гисина, С. В. Пчелинцева ; ФГОУ ВПО «Финансовая академия при Правительстве РФ», кафедра математики и финансовых приложений. — М. : Финакадемия, 2009.

7. *Винюков, И. А.* Линейная алгебра. Ч. 4. Линейное программирование : учеб. пособие / И. А. Винюков, В. Ю. Попов, С. В. Пчелинцев ; под ред. В. Б. Гисина, С. В. Пчелинцева ; ФГОУ ВПО «Финансовая академия при Правительстве РФ», кафедра математики и финансовых приложений. — М. : Финакадемия, 2009.

8. *Волкова, Е. С.* Элементы теории вероятностей : учеб. пособие / Е. С. Волкова, С. А. Посашков ; ФГОУ ВПО «Финансовая академия при Правительстве РФ», кафедра математики и финансовых приложений. — М. : Финакадемия, 2009.

9. *Гончаренко, В. М.* Математический анализ. Ч. 5—6. Ряды. Дифференциальные уравнения : учеб. пособие / В. М. Гончаренко, С. Р. Свир-



щевский ; под ред. В. Б. Гисина, Е. Н. Орла ; ФГОУ ВПО «Финансовая академия при Правительстве РФ», кафедра математики и финансовых приложений. — М. : Финакадемия, 2009.

10. *Калачев, Н. В.* Линейная алгебра. Ч. 1. Линейные и евклидовы пространства : учеб. пособие / Н. В. Калачев ; под ред. В. Б. Гисина, С. В. Пчелинцева ; ФГОУ ВПО «Финансовая академия при Правительстве РФ», кафедра математики и финансовых приложений. — М. : Финакадемия, 2009.

11. *Калачев, Н. В.* Математика: готовьтесь к поступлению в вуз : учеб. пособие / Н. В. Калачев ; ФГОУ ВПО «Финансовая академия при Правительстве РФ», кафедра математики и финансовых приложений. — М. : Финакадемия, 2008.

12. *Клюшин, В. Л.* Высшая математика для экономистов: задачи, тесты, упражнения : учеб. пособие для бакалавров / В. Л. Клюшин. — М. : Юрайт, 2013.

13. *Кремер, Н. Ш.* Высшая математика для экономистов : учебник для вузов / Н. Ш. Кремер [и др.] ; под ред. Н. Ш. Кремера. — 4-е изд., перераб. и доп. — М. : Юнити-Дана, 2014.

14. *Липагина, Л. В.* Математический анализ. Ч. 2. Дифференциальное исчисление функции одной переменной : учеб. пособие / Л. В. Липагина ; под ред. В. Б. Гисина, Е. Н. Орла ; ФГОУ ВПО «Финансовая академия при Правительстве РФ», кафедра математики и финансовых приложений. — М. : Финакадемия, 2009.

15. Математика в экономике. Ч. 1 : учебник : в 2 ч. / А. С. Солодовников [и др.]. — 2-е изд., перераб. и доп. — М. : Финансы и статистика, 2007.

16. Математика в экономике. Ч. 2 : учебник : в 2 ч. / А. С. Солодовников [и др.]. — 2-е изд., перераб. и доп. — М. : Финансы и статистика, 2007.

17. Математика в экономике. Ч. 3. Теория вероятностей и математическая статистика : учебник / А. С. Солодовников, В. А. Бабайцев, А. В. Браилов. — М. : Финансы и статистика, 2008.

18. *Орел, О. Е.* Математический анализ. Ч. 1. Введение в анализ : учеб. пособие / О. Е. Орел ; под ред. В. Б. Гисина, Е. Н. Орла ; ФГОУ ВПО «Финансовая академия при Правительстве РФ», кафедра математики и финансовых приложений. — М. : Финакадемия, 2009.

19. Сборник задач по курсу «Математика в экономике». Ч. 1. Линейная алгебра, аналитическая геометрия и линейное программирование : учеб. пособие / С. В. Пчелинцев [и др.] ; под ред. В. А. Бабайцева, В. Б. Гисина. — М. : Финансы и статистика ; ИНФРА-М, 2010.

20. Сборник задач по курсу «Математика в экономике». Ч. 2. Математический анализ : учеб. пособие / Е. Н. Орел, А. А. Рылов, В. А. Бабайцев ; под ред. В. А. Бабайцева, В. Б. Гисина. — М. : Финансы и статистика ; ИНФРА-М, 2010.

21. Сборник задач по курсу «Математика в экономике». Ч. 3. Теория вероятностей : учеб. пособие / А. В. Браилов, А. С. Солодовников ; под ред. В. А. Бабайцева, В. Б. Гисина. — М. : Финансы и статистика ; ИНФРА-М, 2010.



22. *Тищенко, А. В.* Линейная алгебра. Ч. 3. Элементы аналитической геометрии : учеб. пособие / А. В. Тищенко ; под ред. В. Б. Гисина, С. В. Пчелинцева ; ФГОУ ВПО «Финансовая академия при Правительстве РФ», кафедра математики и финансовых приложений. — М. : Финакадемия, 2009.

23. *Шипачев, В. С.* Высшая математика. Полный курс : учебник для академического бакалавриата / В. С. Шипачев. — М. : Юрайт, 2014.

24. *Ягодовский, П. В.* Математический анализ. Ч. 4. Функции нескольких переменных : учеб. пособие / П. В. Ягодовский ; под ред. В. Б. Гисина, Е. Н. Орла ; ФГОУ ВПО «Финансовая академия при Правительстве РФ», кафедра математики и финансовых приложений. — М. : Финакадемия, 2009.

25. *Bray, M.* Mathematical economics / M. Bray, R. Razin, A. Sarychev. — London : London University Press, 2014 (URL: [www.londoninternational.ac.uk/sites/default/files/programme\\_resources/lse/lse\\_pdf/subject\\_guides/ec3120\\_ch1-3.pdf](http://www.londoninternational.ac.uk/sites/default/files/programme_resources/lse/lse_pdf/subject_guides/ec3120_ch1-3.pdf)).

26. *Dowling, E. T.* Mathematical economics / E. T. Dowling. — New York : McGraw-Hill, 2006.

27. *Simon, C. P.* Mathematics for economists / C. P. Simon, L. Blume. — New York ; London : W. W. Norton & Company, Inc., 1994. (URL: [http://www.icesi.edu.co/e\\_portafolio/artefact/file/download.php?file=5522&view=344](http://www.icesi.edu.co/e_portafolio/artefact/file/download.php?file=5522&view=344)).



## Приложение. Таблицы значений функций

Справочная таблица значений тригонометрических функций

$\alpha$	$0^\circ$ (0)	$30^\circ$ $\left(\frac{\pi}{6}\right)$	$45^\circ$ $\left(\frac{\pi}{4}\right)$	$60^\circ$ $\left(\frac{\pi}{3}\right)$	$90^\circ$ $\left(\frac{\pi}{2}\right)$	$180^\circ$ ( $\pi$ )	$270^\circ$ $\left(\frac{3\pi}{2}\right)$	$360^\circ$ ( $2\pi$ )
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—	0	—	0
$\operatorname{ctg} \alpha$	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	—	0	—

Таблица значений функции  $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

$x$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	0,3989	0,3989	0,3988	0,3986	0,3984	0,3982	0,3980	0,3977	0,3973
0,1	0,3970	0,3965	0,3961	0,3956	0,3951	0,3945	0,3939	0,3932	0,3925	0,3918
0,2	0,3910	0,3902	0,3894	0,3885	0,3876	0,3867	0,3857	0,3847	0,3836	0,3825
0,3	0,3814	0,3802	0,3790	0,3778	0,3765	0,3752	0,3739	0,3726	0,3712	0,3698
0,4	0,3683	0,3668	0,3652	0,3637	0,3621	0,3605	0,3589	0,3572	0,3555	0,3538
0,5	0,3521	0,3503	0,3485	0,3467	0,3448	0,3429	0,3410	0,3391	0,3372	0,3352
0,6	0,3332	0,3312	0,3292	0,3271	0,3251	0,3230	0,3209	0,3187	0,3166	0,3144
0,7	0,3123	0,3101	0,3079	0,3056	0,3034	0,3011	0,2989	0,2966	0,2943	0,2920
0,8	0,2897	0,2874	0,2850	0,2827	0,2803	0,2780	0,2756	0,2732	0,2709	0,2685
0,9	0,2661	0,2637	0,2613	0,2589	0,2565	0,2541	0,2516	0,2492	0,2468	0,2444
1,0	0,2420	0,2396	0,2371	0,2347	0,2323	0,2299	0,2275	0,2251	0,2227	0,2203
1,1	0,2179	0,2155	0,2131	0,2107	0,2083	0,2059	0,2036	0,2012	0,1989	0,1965
1,2	0,1942	0,1919	0,1895	0,1872	0,1849	0,1826	0,1804	0,1781	0,1758	0,1736



<i>x</i>	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,3	0,1714	0,1691	0,1669	0,1647	0,1626	0,1604	0,1582	0,1561	0,1539	0,1518
1,4	0,1497	0,1476	0,1456	0,1435	0,1415	0,1394	0,1374	0,1354	0,1334	0,1315
1,5	0,1295	0,1276	0,1257	0,1238	0,1219	0,1200	0,1182	0,1163	0,1145	0,1127
1,6	0,1109	0,1092	0,1074	0,1057	0,1040	0,1023	0,1006	0,0989	0,0973	0,0957
1,7	0,0940	0,0925	0,0909	0,0893	0,0878	0,0863	0,0848	0,0833	0,0818	0,0804
1,8	0,0790	0,0775	0,0761	0,0748	0,0734	0,0721	0,0707	0,0694	0,0681	0,0669
1,9	0,0656	0,0644	0,0632	0,0620	0,0608	0,0596	0,0584	0,0573	0,0562	0,0551
2,0	0,0540	0,0529	0,0519	0,0508	0,0498	0,0488	0,0478	0,0468	0,0459	0,0449
2,1	0,0440	0,0431	0,0422	0,0413	0,0404	0,0395	0,0387	0,0379	0,0371	0,0363
2,2	0,0353	0,0347	0,0339	0,0332	0,0325	0,0317	0,0310	0,0303	0,0297	0,0290
2,3	0,0283	0,0277	0,0270	0,0264	0,0258	0,0252	0,0246	0,0241	0,0235	0,0229
2,4	0,0224	0,0219	0,0213	0,0208	0,0203	0,0198	0,0194	0,0189	0,0184	0,0180
2,5	0,0175	0,0171	0,0167	0,0163	0,0158	0,0154	0,0151	0,0147	0,0143	0,0139
2,6	0,0136	0,0132	0,0129	0,0126	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110	0,0107
2,7	0,0104	0,0101	0,0099	0,0096	0,0093	0,0091	0,0088	0,0086	0,0084	0,0081
2,8	0,0079	0,0077	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0067	0,0065	0,0063	0,0061
2,9	0,0060	0,0058	0,0056	0,0055	0,0053	0,0051	0,0050	0,0048	0,0047	0,0046
3,0	0,0044	0,0043	0,0042	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036	0,0035	0,0034
3,1	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026	0,0025	0,0025
3,2	0,0024	0,0023	0,0022	0,0022	0,0021	0,0020	0,0020	0,0019	0,0018	0,0018
3,3	0,0017	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014	0,0013	0,0013
3,4	0,0012	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010	0,0010	0,0009	0,0009
3,5	0,0009	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008	0,0007	0,0007	0,0007	0,0007	0,0006
3,6	0,0006	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0004
3,7	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003
3,8	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
3,9	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0001
4,0	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001
4,1	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001
4,2	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001



Таблица значений функции  $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

$x$	$\Phi(x)$	$x$	$\Phi(x)$	$x$	$\Phi(x)$	$x$	$\Phi(x)$	$x$	$\Phi(x)$	$x$	$\Phi(x)$
0,00	0,00000	0,50	0,19146	1,00	0,34134	1,50	0,43319	2,00	0,47725	3,00	0,49865
0,01	0,00399	0,51	0,19497	1,01	0,34375	1,51	0,43448	2,02	0,47831	3,05	0,49886
0,02	0,00798	0,52	0,19847	1,02	0,34614	1,52	0,43574	2,04	0,47932	3,10	0,49903
0,03	0,01197	0,53	0,20194	1,03	0,34849	1,53	0,43699	2,06	0,48030	3,15	0,49918
0,04	0,01595	0,54	0,20540	1,04	0,35083	1,54	0,43822	2,08	0,48124	3,20	0,49931
0,05	0,01994	0,55	0,20884	1,05	0,35314	1,55	0,43943	2,10	0,48214	3,25	0,49942
0,06	0,02392	0,56	0,21226	1,06	0,35543	1,56	0,44062	2,12	0,48300	3,30	0,49952
0,07	0,02790	0,57	0,21566	1,07	0,35769	1,57	0,44179	2,14	0,48382	3,35	0,49960
0,08	0,03188	0,58	0,21904	1,08	0,35993	1,58	0,44295	2,16	0,48461	3,40	0,49966
0,09	0,03586	0,59	0,22240	1,09	0,36214	1,59	0,44408	2,18	0,48537	3,45	0,49972
0,10	0,03983	0,60	0,22575	1,10	0,36433	1,60	0,44520	2,20	0,48610	3,50	0,49977
0,11	0,04380	0,61	0,22907	1,11	0,36650	1,61	0,44630	2,22	0,48679	3,55	0,49981
0,12	0,04776	0,62	0,23237	1,12	0,36864	1,62	0,44738	2,24	0,48745	3,60	0,49984
0,13	0,05172	0,63	0,23565	1,13	0,37076	1,63	0,44845	2,26	0,48809	3,65	0,49987
0,14	0,05567	0,64	0,23891	1,14	0,37286	1,64	0,44950	2,28	0,48870	3,70	0,49989
0,15	0,05962	0,65	0,24215	1,15	0,37493	1,65	0,45053	2,30	0,48928	3,75	0,49991
0,16	0,06356	0,66	0,24537	1,16	0,37698	1,66	0,45154	2,32	0,48983	3,80	0,49993



Продолжение таблицы

$x$	$\Phi(x)$	$x$	$\Phi(x)$	$x$	$\Phi(x)$	$x$	$\Phi(x)$	$x$	$\Phi(x)$	$x$	$\Phi(x)$
0,17	0,06749	0,67	0,24857	1,17	0,37900	1,67	0,45254	2,34	0,49036	3,85	0,49994
0,18	0,07142	0,68	0,25175	1,18	0,38100	1,68	0,45352	2,36	0,49086	3,90	0,49995
0,19	0,07535	0,69	0,25490	1,19	0,38298	1,69	0,45449	2,38	0,49134	3,95	0,49996
0,20	0,07926	0,70	0,25804	1,20	0,38493	1,70	0,45543	2,40	0,49180	4,00	0,49997
0,21	0,08317	0,71	0,26115	1,21	0,38686	1,71	0,45637	2,42	0,49224	4,05	0,49997
0,22	0,08706	0,72	0,26424	1,22	0,38877	1,72	0,45728	2,44	0,49266	4,10	0,49998
0,23	0,09095	0,73	0,26730	1,23	0,39065	1,73	0,45818	2,46	0,49305	4,15	0,49998
0,24	0,09483	0,74	0,27035	1,24	0,39251	1,74	0,45907	2,48	0,49343	4,20	0,49999
0,25	0,09871	0,75	0,27337	1,25	0,39435	1,75	0,45994	2,50	0,49379	4,25	0,49999
0,26	0,10257	0,76	0,27637	1,26	0,39617	1,76	0,46080	2,52	0,49413	4,30	0,49999
0,27	0,10642	0,77	0,27935	1,27	0,39796	1,77	0,46164	2,54	0,49446	4,35	0,49999
0,28	0,11026	0,78	0,28230	1,28	0,39973	1,78	0,46246	2,56	0,49477	4,40	0,49999
0,29	0,11409	0,79	0,28524	1,29	0,40147	1,79	0,46327	2,58	0,49506	4,45	0,50000
0,30	0,11791	0,80	0,28814	1,30	0,40320	1,80	0,46407	2,60	0,49534	4,50	0,50000
0,31	0,12172	0,81	0,29103	1,31	0,40490	1,81	0,46485	2,62	0,49560	4,55	0,50000
0,32	0,12552	0,82	0,29389	1,32	0,40658	1,82	0,46562	2,64	0,49585	4,60	0,50000
0,33	0,12930	0,83	0,29673	1,33	0,40824	1,83	0,46638	2,66	0,49609	4,65	0,50000
0,34	0,13307	0,84	0,29955	1,34	0,40988	1,84	0,46712	2,68	0,49632	4,70	0,50000
0,35	0,13683	0,85	0,30234	1,35	0,41149	1,85	0,46784	2,70	0,49653	4,75	0,50000



Окончание таблицы

$x$	$\Phi(x)$	$x$	$\Phi(x)$	$x$	$\Phi(x)$	$x$	$\Phi(x)$	$x$	$\Phi(x)$	$x$	$\Phi(x)$
0,36	0,14058	0,86	0,30511	1,36	0,41309	1,86	0,46856	2,72	0,49674	4,80	0,50000
0,37	0,14431	0,87	0,30785	1,37	0,41466	1,87	0,46926	2,74	0,49693	4,85	0,50000
0,38	0,14803	0,88	0,31057	1,38	0,41621	1,88	0,46995	2,76	0,49711	4,90	0,50000
0,39	0,15173	0,89	0,31327	1,39	0,41774	1,89	0,47062	2,78	0,49728	4,95	0,50000
0,40	0,15542	0,90	0,31594	1,40	0,41924	1,90	0,47128	2,80	0,49744	5,00	0,50000
0,41	0,15910	0,91	0,31859	1,41	0,42073	1,91	0,47193	2,82	0,49760	—	—
0,42	0,16276	0,92	0,32121	1,42	0,42220	1,92	0,47257	2,84	0,49774	—	—
0,43	0,16640	0,93	0,32381	1,43	0,42364	1,93	0,47320	2,86	0,49788	—	—
0,44	0,17003	0,94	0,32639	1,44	0,42507	1,94	0,47381	2,88	0,49801	—	—
0,45	0,17364	0,95	0,32894	1,45	0,42647	1,95	0,47441	2,90	0,49813	—	—
0,46	0,17724	0,96	0,33147	1,46	0,42785	1,96	0,47500	2,92	0,49825	—	—
0,47	0,18082	0,97	0,33398	1,47	0,42922	1,97	0,47558	2,94	0,49836	—	—
0,48	0,18439	0,98	0,33646	1,48	0,43056	1,98	0,47615	2,96	0,49846	—	—
0,49	0,18793	0,99	0,33891	1,49	0,43189	1,99	0,47670	2,98	0,49856	—	—

Таблица значений функции  $P_n(k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}$

$k \backslash \lambda$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,8	1	1,5	2
0	0,904837	0,818731	0,740818	0,670320	0,606531	0,548812	0,449329	0,367879	0,22313	0,135335
1	0,090484	0,163746	0,222245	0,268128	0,303265	0,329287	0,359463	0,367879	0,334695	0,270671



Продолжение таблицы

$k \backslash \lambda$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,8	1	1,5	2
2	0,004524	0,016375	0,033337	0,053626	0,075816	0,098786	0,143785	0,18394	0,251021	0,270671
3	0,000151	0,001092	0,003334	0,007150	0,012636	0,019757	0,038343	0,061313	0,125511	0,180447
4	0,000004	0,000055	0,000250	0,000715	0,001580	0,002964	0,007669	0,015328	0,047067	0,090224
5	0	0,000002	0,000015	0,000057	0,000158	0,000356	0,001227	0,003066	0,014120	0,036089
6	0	0	0,000001	0,000004	0,000013	0,000036	0,000164	0,000511	0,003530	0,012030
7	0	0	0	0	0,000001	0,000003	0,000019	0,000073	0,000756	0,003437
8	0	0	0	0	0	0	0,000002	0,000009	0,000142	0,000859
9	0	0	0	0	0	0	0	0,000001	0,000024	0,000191
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0,000004	0,000038
11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,000007
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,000001
13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

$k \backslash \lambda$	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6	6,5	7
0	0,082085	0,049787	0,030197	0,018316	0,011109	0,006738	0,004087	0,002479	0,001503	0,000912
1	0,205212	0,149361	0,105691	0,073263	0,04999	0,033690	0,022477	0,014873	0,009772	0,006383
2	0,256516	0,224042	0,184959	0,146525	0,112479	0,084224	0,061812	0,044618	0,03176	0,022341
3	0,213763	0,224042	0,215785	0,195367	0,168718	0,140374	0,113323	0,089235	0,068814	0,052129
4	0,133602	0,168031	0,188812	0,195367	0,189808	0,175467	0,155819	0,133853	0,111822	0,091226



$k \backslash \lambda$	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6	6,5	7
5	0,066801	0,100819	0,132169	0,156293	0,170827	0,175467	0,171401	0,160623	0,145369	0,127717
6	0,027834	0,050409	0,077098	0,104196	0,12812	0,146223	0,157117	0,160623	0,157483	0,149003
7	0,009941	0,021604	0,038549	0,059540	0,082363	0,104445	0,123449	0,137677	0,146234	0,149003
8	0,003106	0,008102	0,016865	0,029770	0,046329	0,065278	0,084871	0,103258	0,118815	0,130377
9	0,000863	0,002701	0,006559	0,013231	0,023165	0,036266	0,051866	0,068838	0,085811	0,101405
10	0,000216	0,00081	0,002296	0,005292	0,010424	0,018133	0,028526	0,041303	0,055777	0,070983
11	0,000049	0,000221	0,000730	0,001925	0,004264	0,008242	0,014263	0,022529	0,032959	0,045171
12	0,000010	0,000055	0,000213	0,000642	0,001599	0,003434	0,006537	0,011264	0,017853	0,026350
13	0,000002	0,000013	0,000057	0,000197	0,000554	0,001321	0,002766	0,005199	0,008926	0,014188
14	0	0,000003	0,000014	0,000056	0,000178	0,000472	0,001087	0,002228	0,004144	0,007094
15	0	0,000001	0,000003	0,000015	0,000053	0,000157	0,000398	0,000891	0,001796	0,003311
16	0	0	0,000001	0,000004	0,000015	0,000049	0,000137	0,000334	0,00073	0,001448
17	0	0	0	0,000001	0,000004	0,000014	0,000044	0,000118	0,000279	0,000596
18	0	0	0	0	0,000001	0,000004	0,000014	0,000039	0,000101	0,000232
19	0	0	0	0	0	0,000001	0,000004	0,000012	0,000034	0,000085
20	0	0	0	0	0	0	0,000001	0,000004	0,000011	0,00003
21	0	0	0	0	0	0	0	0,000001	0,000003	0,000010
22	0	0	0	0	0	0	0	0	0,000001	0,000003
23	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,000001
24	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0



## **Новые издания по дисциплине «Высшая математика» и смежным дисциплинам**

1. *Аксенов, А. П.* Математический анализ в 2 ч. Часть 1 в 2 т : учебник и практикум для академического бакалавриата / А. П. Аксенов. — М. : Издательство Юрайт, 2016.
2. *Аксенов, А. П.* Математический анализ в 4 ч. Часть 1 : учебник и практикум для академического бакалавриата / А. П. Аксенов. — М. : Издательство Юрайт, 2016.
3. *Аксенов, А. П.* Математический анализ в 4 ч. Часть 2 : учебник и практикум для академического бакалавриата / А. П. Аксенов. — М. : Издательство Юрайт, 2016.
4. *Аксенов, А. П.* Математический анализ в 4 ч. Часть 3 : учебник и практикум для академического бакалавриата / А. П. Аксенов. — М. : Издательство Юрайт, 2016.
5. *Аксенов, А. П.* Математический анализ в 4 ч. Часть 4 : учебник и практикум для академического бакалавриата / А. П. Аксенов. — М. : Издательство Юрайт, 2016.
6. *Баврин, И. И.* Высшая математика для педагогических направлений : учебник для бакалавров / И. И. Баврин. — 2-е изд., перераб. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2016.
7. *Баврин, И. И.* Высшая математика для химиков, биологов и медиков : учебник и практикум для прикладного бакалавриата / И. И. Баврин. — 2-е изд., испр. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2016.
8. *Баврин, И. И.* Математический анализ для педагогических вузов : учебник и практикум для прикладного бакалавриата / И. И. Баврин. — 2-е изд., испр. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2016.
9. *Богомолов, Н. В.* Математика : учебник для прикладного бакалавриата / Н. В. Богомолов, П. И. Самойленко. — 5-е изд., перераб. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2015.
10. *Богомолов, Н. В.* Математика. Задачи с решениями в 2 ч. Часть 1 : учеб. пособие для прикладного бакалавриата / Н. В. Богомолов. — 2-е изд., испр. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2016.
11. *Богомолов, Н. В.* Математика. Задачи с решениями в 2 ч. Часть 2 : учеб. пособие для прикладного бакалавриата / Н. В. Богомолов. — 2-е изд., испр. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2016.
12. *Богомолов, Н. В.* Практические занятия по математике : учеб. пособие для прикладного бакалавриата / Н. В. Богомолов. — 11-е изд., перераб. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2016.



13. Богомолов, Н. В. Практические занятия по математике в 2 ч. Часть 1 : учеб. пособие для прикладного бакалавриата / Н. В. Богомолов. — 11-е изд., перераб. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2016.
14. Богомолов, Н. В. Практические занятия по математике в 2 ч. Часть 2 : учеб. пособие для прикладного бакалавриата / Н. В. Богомолов. — 11-е изд., перераб. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2016.
15. Бугров, Я. С. Высшая математика в 3 т. Т. 1 в 2 книгах. Дифференциальное и интегральное исчисление : учебник для академического бакалавриата / Я. С. Бугров, С. М. Никольский. — 7-е изд., стер. — М. : Издательство Юрайт, 2016.
16. Бугров, Я. С. Высшая математика в 3 т. Т. 1. Дифференциальное и интегральное исчисление в 2 кн. Книга 1 : учебник для академического бакалавриата / Я. С. Бугров, С. М. Никольский. — 7-е изд., стер. — М. : Издательство Юрайт, 2016.
17. Бугров, Я. С. Высшая математика в 3 т. Т. 1. Дифференциальное и интегральное исчисление в 2 кн. Книга 2 : учебник для академического бакалавриата / Я. С. Бугров, С. М. Никольский. — 7-е изд., стер. — М. : Издательство Юрайт, 2016.
18. Бугров, Я. С. Высшая математика. Задачник : учеб. пособие для академического бакалавриата / Я. С. Бугров, С. М. Никольский. — М. : Издательство Юрайт, 2016.
19. Высшая математика для экономического бакалавриата : учебник и практикум / отв. ред. Н. Ш. Кремер. — 4-е изд., перераб. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2016.
20. Глотова, М. Ю. Математическая обработка информации : учебник и практикум для академического бакалавриата / М. Ю. Глотова, Е. А. Самохвалова. — М. : Издательство Юрайт, 2016.
21. Дорофеева, А. В. Высшая математика для гуманитарных направлений : учебник для бакалавров / А. В. Дорофеева. — 3-е изд., перераб. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2016.
22. Бугров, Я. С. Высшая математика в 3 т. Т. 2. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии : учебник для академического бакалавриата / Я. С. Бугров, С. М. Никольский. — 7-е изд., стер. — М. : Издательство Юрайт, 2016.
23. Бугров, Я. С. Высшая математика в 3 т. Т. 3 в 2 книгах. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного : учебник для академического бакалавриата / Я. С. Бугров, С. М. Никольский. — 7-е изд., стер. — М. : Издательство Юрайт, 2016.
24. Бугров, Я. С. Высшая математика в 3 т. Том 3. В 2 кн. Книга 1. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы : учебник для академического бакалавриата / Я. С. Бугров, С. М. Никольский. — 7-е изд., стер. — М. : Издательство Юрайт, 2016.
25. Бугров, Я. С. Высшая математика в 3 т. Том 3. В 2 кн. Книга 2. Ряды. Функции комплексного переменного : учебник для академического бакалавриата / Я. С. Бугров, С. М. Никольский. — 7-е изд., стер. — М. : Издательство Юрайт, 2016.



26. Высшая математика для экономистов : учебник и практикум для прикладного бакалавриата / И. А. Александрова [и др.] ; под общ. ред. М. Б. Хрипуновой, И. И. Цыганок. — М. : Издательство Юрайт, 2015.

27. Далингер, В. А. Информатика и математика. Решение уравнений и оптимизация в mathcad и maple : учебник и практикум для прикладного бакалавриата / В. А. Далингер, С. Д. Симонженков. — 2-е изд., испр. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2016.

28. Далингер, В. А. Методика обучения математике в начальной школе : учеб. пособие для академического бакалавриата / В. А. Далингер, Л. П. Борисова. — 2-е изд., испр. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2016.

29. Далингер, В. А. Методика обучения математике. Изучение дробей и действий над ними : учеб. пособие для прикладного бакалавриата / В. А. Далингер. — 2-е изд., испр. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2016.

30. Далингер, В. А. Методика обучения началам математического анализа : учебник и практикум для академического бакалавриата / В. А. Далингер. — 2-е изд., испр. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2016.

31. Далингер, В. А. Теория функций действительного переменного : учебник и практикум для академического бакалавриата / В. А. Далингер, С. Д. Симонженков. — 2-е изд., перераб. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2016.

32. Дорофеева, А. В. Высшая математика для гуманитарных направлений. Сборник задач : учебно-практическое пособие / А. В. Дорофеева. — 2-е изд. — М. : Издательство Юрайт, 2016.

33. Ильин, В. А. Математический анализ в 2 ч. Часть 1 в 2 кн. Книга 1 : учебник для академического бакалавриата / В. А. Ильин, В. А. Садовничий, Б. Х. Сендов. — 4-е изд., перераб. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2016.

34. Ильин, В. А. Математический анализ в 2 ч. Часть 1 в 2 кн. Книга 2 : учебник для академического бакалавриата / В. А. Ильин, В. А. Садовничий, Б. Х. Сендов. — 4-е изд., перераб. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2016.

35. Ильин, В. А. Математический анализ ч. 1 : учебник для бакалавров / В. А. Ильин, В. А. Садовничий, Б. Х. Сендов. — 4-е изд., перераб. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2016.

36. Ильин, В. А. Математический анализ ч. 2 : учебник для бакалавров / В. А. Ильин, В. А. Садовничий, Б. Х. Сендов. — 3-е изд. — М. : Издательство Юрайт, 2016.

37. Информатика и математика : учебник и практикум для академического бакалавриата / Т. М. Беляева [и др.] ; под ред. В. Д. Элькина. — М. : Издательство Юрайт, 2016.

38. Касьянов, В. И. Руководство к решению задач по высшей математике : учеб. пособие для прикладного бакалавриата / В. И. Касьянов. — М. : Издательство Юрайт, 2015.

39. Кацман, Ю. Я. Теория вероятностей и математическая статистика. Примеры с решениями : учебник для прикладного бакалавриата / Ю. Я. Кацман. — М. : Издательство Юрайт, 2016.

40. Ключин, В. Л. Высшая математика для экономистов : учеб. пособие для бакалавров / В. Л. Ключин. — 2-е изд., испр. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2016.



41. *Клюшин, В. Л.* Высшая математика для экономистов. Задачи, тесты, упражнения : учебник и практикум / В. Л. Клюшин. — 5-е изд., перераб. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2016.

42. *Константинова, О. Г.* Математика для колледжей : учеб. пособие для поступающих в вузы / О. Г. Константинова, М. Н. Фридман ; под ред. Н. Ш. Кремера. — 10-е изд., перераб. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2016.

43. *Краснова, С. А.* Математический анализ для экономистов в 2 ч. Часть 1 : учебник и практикум для прикладного бакалавриата / С. А. Краснова, В. А. Уткин. — М. : Издательство Юрайт, 2016.

44. *Краснова, С. А.* Математический анализ для экономистов в 2 ч. Часть 2 : учебник и практикум для прикладного бакалавриата / С. А. Краснова, В. А. Уткин. — М. : Издательство Юрайт, 2016.

45. *Красс, М. С.* Математика в экономике. Базовый курс : учебник для бакалавров / М. С. Красс. — 2-е изд., испр. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2016.

46. *Кремер, Н. Ш.* Математика. Практикум : учебник и практикум для бакалавриата и магистратуры / Н. Ш. Кремер, В. Б. Гисин. — М. : Издательство Юрайт, 2017.

47. *Кудрявцев, Л. Д.* Курс математического анализа в 3 т. Том 1 : учебник для бакалавров / Л. Д. Кудрявцев. — 6-е изд., перераб. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2016.

48. *Кудрявцев, Л. Д.* Курс математического анализа в 3 т. Том 2 в 2 книгах. Книга 1 : учебник для академического бакалавриата / Л. Д. Кудрявцев. — 6-е изд., перераб. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2016.

49. *Кудрявцев, Л. Д.* Курс математического анализа в 3 т. Том 2 в 2 книгах. Книга 2 : учебник для академического бакалавриата / Л. Д. Кудрявцев. — 6-е изд., перераб. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2016.

50. *Кудрявцев, Л. Д.* Курс математического анализа в 3 т. Том 3 : учебник для бакалавров / Л. Д. Кудрявцев. — 6-е изд., перераб. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2016.

51. *Кучер, Т. П.* Математика. Тесты : учеб. пособие для прикладного бакалавриата / Т. П. Кучер. — 2-е изд., испр. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2016.

52. *Кытманов, А. М.* Математический анализ : учебное пособие для бакалавров / А. М. Кытманов. — М. : Издательство Юрайт, 2016.

53. *Малугин, В. А.* Математический анализ для экономического бакалавриата : учебник и практикум / В. А. Малугин. — 3-е изд., перераб. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2016.

54. Математика для экономистов : учебник для академического бакалавриата / Р. В. Сагитов [и др.] ; под общ. ред. О. В. Татарникова. — М. : Издательство Юрайт, 2016.

55. Математика для экономистов. Практикум : учеб. пособие для академического бакалавриата / Л. Г. Бирюкова [и др.] ; под общ. ред. О. В. Татарникова. — М. : Издательство Юрайт, 2016.



56. *Мойзес, О. Е.* Информатика. Углубленный курс : учеб. пособие для прикладного бакалавриата / О. Е. Мойзес, Е. А. Кузьменко. — М. : Издательство Юрайт, 2016.

57. *Никитин, А. А.* Математический анализ. Углубленный курс : учебник и практикум для академического бакалавриата / А. А. Никитин, В. В. Фомичев. — 2-е изд., испр. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2016.

58. Основы математической обработки информации : учебник и практикум для академического бакалавриата / отв. ред. Н. Л. Стефанова. — М. : Издательство Юрайт, 2016.

59. *Пахомова, Е. Г.* Линейная алгебра и аналитическая геометрия. Сборник заданий : учеб. пособие для прикладного бакалавриата / Е. Г. Пахомова, С. В. Рожкова. — М. : Издательство Юрайт, 2016.

60. *Попов, А. М.* Высшая математика для экономистов : учебник для бакалавров / А. М. Попов, В. Н. Сотников. — М. : Издательство Юрайт, 2016.

61. *Привалов, И. И.* Интегральные уравнения : учебник для вузов / И. И. Привалов. — 4-е изд., стер. — М. : Издательство Юрайт, 2016.

62. *Привалов, И. И.* Ряды Фурье : учебник для вузов / И. И. Привалов. — 5-е изд., стер. — М. : Издательство Юрайт, 2016.

63. *Павлюченко, Ю. В.* Высшая математика для гуманитарных направлений : учебное пособие для бакалавров / Ю. В. Павлюченко, Н. Ш. Хассан, В. И. Михеев. — 4-е изд., перераб. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2015.

64. *Потапов, А. П.* Математический анализ. Дифференциальное и интегральное исчисление функций одной переменной : учебник и практикум для академического бакалавриата / А. П. Потапов. — М. : Издательство Юрайт, 2017.

65. *Путко, Б. А.* Математика для экономистов: от арифметики до эконометрики. Учебно-справочное пособие : для академического бакалавриата / Б. А. Путко, И. М. Тришин ; отв. ред. Н. Ш. Кремер. — 4-е изд., перераб. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2016.

66. *Путко, Б. А.* Математический анализ в 2 ч. Часть 1 : учебник и практикум для академического бакалавриата / Б. А. Путко, И. М. Тришин ; отв. ред. Н. Ш. Кремер. — М. : Издательство Юрайт, 2016.

67. *Путко, Б. А.* Математический анализ в 2 ч. Часть 2 : учебник и практикум для академического бакалавриата / Б. А. Путко, И. М. Тришин ; отв. ред. Н. Ш. Кремер. — М. : Издательство Юрайт, 2016.

68. *Рейзлин, В. И.* Математическое моделирование : учеб. пособие для магистратуры / В. И. Рейзлин. — 2-е изд., перераб. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2016.

69. *Садовничий, В. А.* Лекции по математическому анализу. Часть 1. Дифференциальное исчисление : учебник для академического бакалавриата / В. А. Садовничий, В. Н. Чубариков, Г. И. Архипов. — 6-е изд., перераб. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2016.

70. *Садовничий, В. А.* Лекции по математическому анализу. Часть 2. Интегральное исчисление : учебник для академического бакалавриата / В. А. Садовничий, В. Н. Чубариков, Г. И. Архипов. — 6-е изд., перераб. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2016.



71. Сборник задач по высшей математике в 4 ч. Часть 1 : учеб. пособие для прикладного бакалавриата / под ред. А. С. Пospelова. — М. : Издательство Юрайт, 2016.

72. Сборник задач по высшей математике в 4 ч. Часть 2 : учеб. пособие для прикладного бакалавриата / под ред. А. С. Пospelова. — М. : Издательство Юрайт, 2016.

73. Сборник задач по высшей математике в 4 ч. Часть 3 : учеб. пособие для прикладного бакалавриата / под ред. А. С. Пospelова. — М. : Издательство Юрайт, 2016.

74. Сборник задач по высшей математике в 4 ч. Часть 4 : учеб. пособие для прикладного бакалавриата / под ред. А. С. Пospelова. — М. : Издательство Юрайт, 2016.

75. Сборник задач по высшей математике. Ч. 1 : учеб. пособие для бакалавров / под ред. А. С. Пospelова. — М. : Издательство Юрайт, 2016.

76. Сборник задач по высшей математике. Ч. 2 : учеб. пособие для бакалавров / отв. ред. А. С. Пospelов. — М. : Издательство Юрайт, 2016.

77. *Сухотин, А. М.* Высшая математика. Альтернативная методология преподавания : учеб. пособие для прикладного бакалавриата / А. М. Сухотин, Т. В. Тарбокова. — М. : Издательство Юрайт, 2016.

78. *Чупрынов, Б. П.* Математика в экономике: математические методы и модели : учебник для бакалавров / Б. П. Чупрынов ; под ред. М. С. Красса. — 2-е изд., испр. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2016.

79. *Шагин, В. Л.* Математический анализ. Базовые понятия : учеб. пособие для прикладного бакалавриата / В. Л. Шагин, А. В. Соколов. — М. : Издательство Юрайт, 2016.

80. *Шипачев, В. С.* Высшая математика : учебник и практикум / В. С. Шипачев. — 8-е изд., перераб. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2016.

81. *Шипачев, В. С.* Высшая математика. Полный курс : учебник для академического бакалавриата / В. С. Шипачев, А. Н. Тихонов ; под ред. А. Н. Тихонова. — 4-е изд., испр. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2016.

82. *Шипачев, В. С.* Высшая математика. Полный курс в 2 т. Том 1 : учебник для академического бакалавриата / В. С. Шипачев, А. Н. Тихонов ; под ред. А. Н. Тихонова. — 4-е изд., испр. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2016.

83. *Шипачев, В. С.* Высшая математика. Полный курс в 2 т. Том 2 : учебник для академического бакалавриата / В. С. Шипачев, А. Н. Тихонов ; под ред. А. Н. Тихонова. — 4-е изд., испр. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2016.



**Наши книги можно приобрести:**

**Учебным заведениям и библиотекам:**  
в отделе по работе с вузами  
тел.: (495) 744-00-12, e-mail: [vuz@urait.ru](mailto:vuz@urait.ru)

**Частным лицам:**  
список магазинов смотрите на сайте [urait.ru](http://urait.ru)  
в разделе «Частным лицам»

**Магазинам и корпоративным клиентам:**  
в отделе продаж  
тел.: (495) 744-00-12, e-mail: [sales@urait.ru](mailto:sales@urait.ru)

**Отзывы об издании присылайте в редакцию**  
e-mail: [gred@urait.ru](mailto:gred@urait.ru)

Новые издания и дополнительные материалы доступны  
на образовательной платформе «Юрайт» [urait.ru](http://urait.ru),  
а также в мобильном приложении «Юрайт.Библиотека»

*Учебное издание*

## **ВВЕДЕНИЕ В ВЫСШУЮ МАТЕМАТИКУ**

Учебник и практикум для вузов

Под общей редакцией М. Б. Хрипуновой, И. И. Цыганок

Формат 70×100 1/16.

Гарнитура «Charter». Печать цифровая.

Усл. печ. л. 37,09

**ООО «Издательство Юрайт»**

111123, г. Москва, ул. Плеханова, д. 4а.

Тел.: (495) 744-00-12. E-mail: [izdat@urait.ru](mailto:izdat@urait.ru), [www.urait.ru](http://www.urait.ru)