

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ СЛОЖНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ
МОДЕЛИ
ПРИ
ИЗМЕРЕНИЯХ**

2

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ
ОБЕСПЕЧЕНИЕ
СЛОЖНОГО
ЭКСПЕРИМЕНТА**

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ
МОДЕЛИ
ПРИ
ИЗМЕРЕНИЯХ**

2

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ
ОБЕСПЕЧЕНИЕ
СЛОЖНОГО
ЭКСПЕРИМЕНТА**

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ

ИЗДАНИЕ
В ПЯТИ
ТОМАХ

КИЕВ НАУКОВА ДУМКА 1983

ОБЕСПЕЧЕНИЕ

СЛОЖНОГО

ЭКСПЕРИМЕНТА

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ
МОДЕЛИ
ПРИ
ИЗМЕРЕНИЯХ**

2

УДК 519.95:518.0

Математическое обеспечение сложного эксперимента. Т. 2. Математические модели при измерениях / Белов Ю. А., Диденко В. П., Козлов Н. Н., Ляшко И. И., Макаров В. Л., Цитрицкий О. Е.— Киев : Наук. думка, 1983.— 264 с.

В книге рассматриваются математические модели, описывающие функционирование сложного измерительно-вычислительного комплекса (ИВК) и реализующие некоторые методы определения параметров движения летящего объекта (ЛО) по траекторным измерениям. Эти модели предназначены как для математического отображения основных процессов в радиотехнических устройствах, используемых в ИВК, так и для прогнозирования движения ЛО при различных режимах внешнего воздействия на него.

Для специалистов в области теоретической и прикладной кибернетики, радиотехники, вычислительной техники и всех, интересующихся вопросами использования математики при анализе и синтезе сложных систем.

Ил. 53. Табл. 11. Библиогр.: с. 257—262 (146 назв.).

Авторы

Ю. А. БЕЛОВ, В. П. ДИДЕНКО, Н. Н. КОЗЛОВ,
И. И. ЛЯШКО, В. Л. МАКАРОВ, О. Е. ЦИТРИЦКИЙ

Рецензенты В. И. Гостев, И. В. Сергиенко

Под общей редакцией акад. АН УССР И. И. Ляшко

Редакция физико-математической литературы

М 1502000000-148 136-82
М221(04)-83

© Издательство «Наукова думка», 1983

ПРЕДИСЛОВИЕ

Одной из основных задач современной теории и практики математического обеспечения эксперимента является построение моделей как исследуемого объекта, так и различных устройств, предназначенных для измерения, сбора информации об объекте и управления ходом эксперимента. На основе имеющихся математических моделей решаются разнообразные задачи планирования эксперимента: определяются структуры и параметры системы управления, выбираются технические средства обеспечения экспериментальной работы и т. д. При этом все возрастающая роль в практике экспериментальных исследований отводится вычислительному эксперименту, позволяющему с помощью ЭВМ «проигрывать» на моделях многие ситуации, в которых может оказаться объект. Тем самым облегчается проведение натурного эксперимента. Наличие математических моделей, при посредстве которых поступающая информация может обрабатываться в реальном времени, предоставляет экспериментатору широкие возможности непосредственного влияния на ход эксперимента в зависимости от полученных результатов.

Знание математических моделей необходимо при выборе и использовании тех или иных методов обработки измерений. Так, изложенные в первом томе настоящего издания некоторые методы устойчивого оценивания параметров движения исследуемого объекта существенно опираются на априорные предположения о статистических зависимостях изучаемых величин, виде уравнений, описывающих состояние динамической системы, и т. п. Однако вопросы восстановления этих априорных характеристик представляют сложную самостоятельную проблему. Ее решение требует комплексного учета как физико-технических свойств объекта, так и различных математических условий (выбор определенного типа уравнений, более полное и точное описание статистических зависимостей и т. д.).

В данной книге описываются математические модели, отражающие функционирование ряда основных элементов сложного измерительно-вычислительного комплекса (ИВК), предназначенного для обеспечения испытания объектов, и реализующие некоторые методы определения параметров движения летящего объекта (ЛО) на

основании траекторных измерений. При построении этих моделей широко использовались методологические посылки, обсужденные в первом томе. Полученные модели предназначены как для математического отображения основных процессов в радиотехнических устройствах, используемых в ИВК, так и для прогнозирования движения ЛО при различных режимах внешнего воздействия на него.

В главе I настоящей книги подробно рассматривается проблема устранения неоднозначности циклических измерений. Как известно, при проведении траекторных измерений, обеспечивающих высокую точность, широко применяются фазовые радиотехнические устройства и системы. Одной из характерных особенностей фазометрических систем является использование в них периодических сигналов, что приводит к неоднозначности измеряемых параметров. Для устранения такой неоднозначности применяется способ многошкальных измерений. Описываемые эффективные вычислительные алгоритмы обработки соответствующей информации по существу и являются моделями фазометрических систем. Приводятся новые решения указанной проблемы. Дается сравнительный анализ применяемых методов и алгоритмов.

Вторая глава посвящена построению и исследованию нелинейных математических моделей радиотехнических систем ИВК на этапах проектирования и испытания комплексов. Проведены построение, исследование и идентификация параметров нелинейных математических моделей дискретных систем. Дано описание имитационной модели ИВК для различных вариантов его построения. Модель служит для прогнозирования состояний ИВК при разных режимах внешнего воздействия, оптимизации его структуры по заданным критериям, а также решения других научно-технических задач.

В третьей главе раскрыт и на конкретных примерах проиллюстрирован подход к моделированию траекторий движения ЛО. Приведены модели в виде систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Рассмотрен порядок построения аналитических моделей в виде функций времени для параметров положения, скорости, ускорения центра масс управляемого ЛО, а также углов ориентации. Проанализированы особенности моделирования движения в терминах переменных пространства состояния.

Четвертая глава посвящена вопросам восстановления основных априорных статистических характеристик в задачах оценивания, а также обсуждению проблемы построения нелинейной математической модели по входным и выходным сигналам системы и проблемы влияния неточностей в априорных данных на результат оценивания. Показано, что эти вопросы относятся к некорректно поставленным математическим проблемам в смысле А. Н. Тихонова. Описаны пути преодоления неустойчивости, рассмотрены вопросы управления наблюдениями при проведении траекторных измерений.

Считаем своим приятным долгом выразить благодарность Ю. Д. Попову, В. В. Хлобыстову, В. Б. Шульженко и А. П. Шуляку за полезное обсуждение ряда результатов и помощь при подготовке рукописи, а также В. И. Гостеву и И. В. Сергиенко за критические замечания, сделанные ими при рецензировании.

Авторы

МЕТОДЫ УСТРАНЕНИЯ НЕОДНОЗНАЧНОСТИ ПРИ ЦИКЛИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЯХ

§ 1. Алфавитный метод

В настоящее время при проведении высокоточных траекторных измерений широко применяются фазовые радиотехнические устройства и системы. Они используются при определении местоположения, скорости и других параметров траектории ракет, космических аппаратов, самолетов, кораблей, а также для навигации и управления движением указанных объектов.

Из всех радиотехнических средств, использующих при измерении параметров траектории фазовый метод, в книге будут рассмотрены лишь фазовые угломерные системы интерференционного типа, хотя многие полученные результаты можно применять и в других системах.

Постановка проблемы устранения неоднозначности при циклических измерениях

Как известно, при использовании в фазометрических системах периодических сигналов измеряемые параметры существенно неоднозначны. Для устранения такой неоднозначности на практике применяется способ многошкальных измерений, математическую модель которого для угломерных систем можно описать следующим образом (рис. 1).

Пусть l — заданное направление, на котором в точках O, O_1, \dots, O_m расположены измерительные средства; g и g_i — направления на объект из точек O и O_i соответственно ($i = \overline{1, m}$). В предположении, что объект удален от O и O_i на значительное расстояние, можно считать направления g и g_i параллельными. Опустим из точек O_i перпендикуляры на направление g (их основания — точки R_i) и введем следующие обозначения и терминологию:

$OO_i = d_i$ — масштабный коэффициент i -й шкалы (m -я шкала будет называться точной);

$OR_i = \Phi_i$ — полная разность фаз сигнала на i -й шкале;

$\varphi_i = \{\Phi_i\}^+$ — дробная часть Φ_i , фаза сигнала на i -й шкале;

$k_i = [\Phi_i]^+$ — целая часть Φ_i , номер интервала однозначности на i -й шкале;

γ — угол между направлениями l и g .

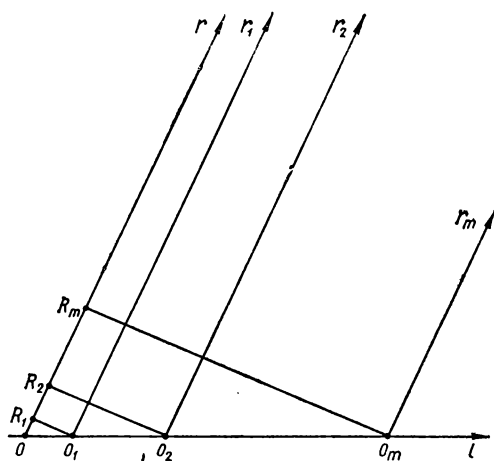


Рис. 1. Модель многошкальных измерений.

Между γ , d_i , Φ_i и k_i справедливы следующие соотношения (разумеется, при условии параллельности направлений \mathbf{r} и \mathbf{r}_i):

$$u = \cos \gamma = \frac{k_1 + \Phi_1}{d_1} = \dots = \frac{k_m + \Phi_m}{d_m}. \quad (1.1)$$

Нетрудно видеть, что в (1.1) любая из величин $(k_i + \Phi_i)/d_i$ ($i = 1, m$)

точно и однозначно определяет параметр u , если полные фазы Φ_i измеряются безошибочно. Более того, параметр u можно определить точно и однозначно и в том случае, когда измеряются без ошибок лишь фазы Φ_i , если только на масштабные коэффициенты d_i наложить некоторые простые ограничения (например, $d_1 < 1$ или d_1, \dots, d_m — взаимно простые числа и т. п.). На практике ситуация осложняется тем, что не известны не только k_i , но и точные значения Φ_i . Для большей определенности будем предполагать, что на фазы Φ_i накладываются аддитивные помехи ψ_i , причем известна их совместная плотность распределения вероятностей $f(\psi_1, \dots, \psi_m)$. Случай, когда возмущениям подвергаются также и масштабные коэффициенты d_i , рассматривается особо.

Таким образом, в окончательной постановке основная проблема устранения неоднозначности в циклических фазовых многошкальных измерениях заключается в следующем: оценить параметр u по измеренным значениям $\hat{\Phi}_i$ фаз $\Phi_i(\hat{\Phi}_i = \{\Phi_i + \psi_i\}^+)$ при заданных значениях масштабных коэффициентов d_i . Здесь u — восстанавливаемая величина, принимающая значения из интервала $[0; 1 - \epsilon)$, $0 \leq \epsilon < 1$; $k_i = [d_i u]^+$, $\Phi_i = \{d_i u\}^+ \equiv d_i u - [d_i u]^+$ — соответственно целая и дробная части числа $d_i u$; $\psi_i = \{\hat{\Phi}_i - \Phi_i + 1/2\}^+ - 1/2$ — ошибка измерения i -й дробной части ($|\psi_i| < 1/2$); d_i — масштабный коэффициент i -шкалы. Основная задача, возникающая при восстановлении величины, состоит в определении целого числа k_m в шкале с наибольшим масштабом по результатам измерений дробных частей $\hat{\Phi}_1, \dots, \hat{\Phi}_m$. Такая постановка основной проблемы устранения неоднозначности предложена Ю. В. Глобенко и Г. И. Скрыпником [26]. Изложение в данном параграфе алфавитного метода решения проблемы устранения неоднозначности основано на данных этой работы. Кроме того, в настоящей главе использованы результаты работ Ю. Д. Попова [73—79] (§ 2, 4, 5), Ю. Д. Попо-

ва, В. В. Хлобыстова [80, 81] (§ 3, 4), В. В. Хлобыстова [107] (§ 7) и Ю. А. Белова, В. В. Хлобыстова, Д. В. Усовского (§ 8).

С формальной точки зрения устранение многозначности можно рассматривать как процесс решения неполной системы уравнений (1.1) относительно целых чисел k_1, \dots, k_m при заданном характере ошибок измерений. Очевидно, в силу соотношений (1.1) достаточно разрешить неоднозначность измерений по одной шкале, например m . В этом случае

$$\hat{u}_m = \frac{\hat{k}_m + \hat{\varphi}_m}{d_m},$$

где \hat{k}_m ($\hat{\varphi}_1, \dots, \hat{\varphi}_m$) — оценка числа циклов по m -шкале.

В современных радиоизмерительных системах, как правило, используются упрощенные методы устранения многозначности, состоящие в последовательном пересчете измерений из менее точной шкалы в более точную. При этом осуществляется формирование однозначной шкалы и в каждой ступени устранения многозначности участвуют два уравнения из системы (1.1). Сравнение подобных измерительных средств и оценка оптимальности используемых алгоритмов и принимаемых технических решений затруднены из-за отсутствия достаточно разработанной теории многошкальных систем.

Информационная схема измерений. Для ступени разрешения (i, m) имеем

$$\frac{d_i}{d_m} k_m = \hat{\varphi}_i - \frac{d_i}{d_m} \hat{\varphi}_m + k_i.$$

После выделения дробной части получаем

$$\begin{aligned} a_m^{(i)} &= \left\{ \frac{d_i}{d_m} k_m \right\}^+; \quad \hat{b}_m^{(i)} = \left\{ \hat{\varphi}_i - \frac{d_i}{d_m} \hat{\varphi}_m \right\}^+; \\ a_m^{(i)} &\equiv b_m^{(i)}, \quad i = 1, \dots, m-1. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Подставляя в (1.2) выражения для $\hat{\varphi}_i$ и $\hat{\varphi}_m$ и принимая во внимание равенство $a_m^{(i)}(k_m) \equiv \left\{ \frac{d_i}{d_m} k_m \right\}^+ \equiv \hat{b}_m^{(i)}$, после несложных преобразований находим

$$\hat{b}_m^{(i)} = \{a_m^{(i)}(k'_m) + \psi_m^{(i)}\}^+, \quad i = 1, \dots, m-1, \quad (1.3)$$

где

$$a_m^{(i)}(k'_m) = \left\{ \frac{d_i k'_m}{d_m} \right\}^+; \quad k'_m = k_m + [\varphi_m + \psi_m]^+; \quad \psi_m^{(i)} = \psi_i - \frac{d_i}{d_m} \psi_m.$$

Заметим, что замена k_m величиной $k'_m = k_m + [\varphi_m + \psi_m]^+$ обусловлена перебросами на ± 1 , вызванными ошибками в m -шкале.

С помощью соотношений (1.3) можно построить информационную схему — источник информации, кодирование, канал, декодирова-

ние, — по которой производится решение задачи о восстановлении величины u . Она включает источник информации $N'_m(\psi_m)$ целых чисел $k'_m = k_m + [\varphi_m + \psi_m]^+$, который определяется при $0 \leq u < 1 - \varepsilon$ и $\psi_m = \text{const}$. Нетрудно проследить, что отклонение множества $N'_m(\psi_m)$ от $N_m(0)$ на $\Delta k = [\varphi_m + \psi_m]^+ = \pm 1$ проявляется на концах интервала $[0, 1 - \varepsilon]$. Алфавит A'_m определяется в пространстве символов Λ_m в виде дискретного множества, составленного из различных значений вектор-функции $a_m(k'_m) = (a_m^{(1)}(k'_m), \dots, a_m^{(m-1)}(k'_m))$, рассматриваемой на множестве $\tilde{N}'_m = N'_m(\hat{\psi}_m)$ с наибольшим числом элементов. Кодер при фиксированном значении ошибки ψ_m устанавливает взаимно однозначное соответствие между элементами множеств N'_m и A'_m и посылает символ $a_m(k'_m) \in A'_m$ в канал. Входом в канал служит дискретное множество A'_m , а выходом — непрерывное множество, содержащееся внутри $(m - 1)$ -мерного единичного куба Θ_{m-1} пространства Λ_m . Канал характеризуется условной плотностью вероятностей $w(\hat{b}_m/a(k'_m))$. Декодер в соответствии с решающей схемой определяет по $\hat{b}_m = (\hat{b}_m^{(1)}, \dots, \hat{b}_m^{(m-1)})$ конкретное значение числа $\hat{k}_m = k'_m + \Delta k$. Далее в информационной схеме осуществляются операции, в результате которых получаются величины

$$\hat{u}_m = \frac{\hat{k}'_m + \hat{\varphi}_m}{d_m} = \frac{\hat{k}_m + \varphi_m + \psi_m}{d_m}. \quad (1.4)$$

Анализируя данное соотношение, можно заключить, что перебросы в m -шкале проявляются при определении \hat{k}_m лишь на концах интервалов $[0; 1 - \varepsilon]$. Концевой эффект можно исключить из рассмотрения соответствующим выбором числа ε . Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1.1. При $\varepsilon = 1/d_m$, $|\psi_m| < 1/2$, $\{d_m\}^+ = 0$ условие однозначности имеет вид

$$d_m = q_m = \text{НОК}(q_m^{(1)}, \dots, q_m^{(m-1)}); \quad \frac{q_i^{(m)}}{q_m^{(i)}} \equiv \frac{d_i}{d_m}; \quad (q_i^{(m)}, q_m^{(i)})^+ = 1, \quad (1.5)$$

а множество A'_m совпадает с алфавитом A_m , отвечающим изменению u в интервале $[0; 1)$ при отсутствии ошибок по m -шкале.

Доказательство. Представим восстанавливаемую по m -шкале величину в виде $u_m = u + \psi_m/d_m$. Поскольку $0 \leq u < 1 - 1/d_m$, то при $\psi_m = \text{const}$ величина u_m принимает значения из замкнутого промежутка $[\psi_m/d_m, \hat{e} - 1/d_m + \psi_m/d_m]$. Концам интервала отвечают целые числа $k'_m = [\psi_m]^+$, $\hat{k}_m = [\hat{e} - 1/d_m + \psi_m]^+$. Здесь $\hat{e} = 1 - \delta/d_m$, $\hat{d}_m = d_m - \delta$ и бесконечно малая положитель-

ная величина δ обеспечивает включение правого конца в замкнутый промежуток. Очевидно, число элементов множества $N'_m(\psi_m)$

$$Q'_m(\psi_m) = \bar{k}_m - \underline{k}_m + 1 = [d'_m - 1 + \psi_m]^+ - [\psi_m]^+ + 1.$$

Можно показать, что при $\{d_m\}^+ = 0$ и $-1/2 \leq \psi_m < 1/2$

$$Q'_m(\psi_m) = \begin{cases} d_m & \text{при } \psi_m \neq 0; \\ d_m - 1 & \text{при } \psi_m = 0. \end{cases}$$

Выделим множества $\tilde{N}'_m = N'_m(\tilde{\psi}_m)$ с наибольшим числом элементов $\tilde{Q}'_m = d_m$. Точно такое же число элементов имеет множество N_m : 0, 1, ..., $d_m - 1$, образованное при $\psi_m = 0$, $0 \leq u < 1$ ($\varepsilon = 0$). Легко заметить, что если $0 < \psi_m < 1/2$, то $\tilde{N}'_m = N_m$. Если же $-1/2 \leq \psi_m < 0$, то множество \tilde{N}'_m можно перевести в N_m сдвигом всех его элементов вправо на 1. Функция $a_m(k_m)$ — периодическая с периодом, равным наименьшему общему кратному $q_m^{(1)}, \dots, q_m^{(m-1)}$. Это можно установить, рассматривая систему сравнений. При $d_m = q_m = \text{НОК}(q_m^{(1)}, \dots, q_m^{(m-1)})$ алфавиты A'_m и A_m совпадают. Отсюда непосредственно следует условие однозначности (1.5). Таким образом, можно сохранить основные представления идеальной схемы измерений, если уменьшить однозначный интервал восстанавливаемой величины. Ниже предполагается, что условия теоремы 1.1 выполнены.

Отметим одно важное свойство алфавита A_m . Введем следующее преобразование масштабных коэффициентов:

$$\left\{ \frac{d_i^*}{d_m^*} \right\}^+ = \left\{ \frac{d_i t}{d_m} \right\}^+, \quad i = 1, \dots, m-1; \quad d_m^* = d_m = q_m, \quad (1.6)$$

где t — любое целое число, взаимно простое с q_m .

Теорема 1.2. Алфавит A_m , отвечающий масштабам d_1, \dots, d_m , инвариантен относительно преобразования (1.6). Переход к новым масштабам приводит к перенумерации элементов множества A_m .

До к а з а т е л ь с т в о. Покажем инвариантность алфавита A_m относительно преобразования масштабов. Элемент трансформированного алфавита A_m^* находим по формуле

$$\begin{aligned} a_m^{*(t)} &= \left\{ \frac{d_i^*}{d_m^*} k_m^* \right\}^+ = \left\{ \left(\frac{d_i^*}{d_m^*} - \left[\frac{d_i^*}{d_m^*} \right]^+ \right) k_m^* \right\}^+ = \left\{ \left\{ \frac{d_i t}{d_m} \right\}^+ k_m^* \right\}^+ = \\ &= \left\{ \frac{d_i t}{d_m} k_m^* \right\}^+ = \left\{ \frac{d_i}{d_m} \tilde{k}_m \right\}^+, \quad i = 1, \dots, m-1, \quad k_m^* = \\ &= 0, 1, \dots, q_m - 1, \end{aligned}$$

где $\tilde{k}_m = tk_m^* \in \tilde{N}_m$. Нужно показать, что для любых двух чисел $\tilde{k}_{m_1} \neq \tilde{k}_{m_2} \in \tilde{N}_m$ имеет место $a_m^*(\tilde{k}_{m_1}) \neq a_m^*(\tilde{k}_{m_2})$. Если это не так, то в силу периодичности $a_m^*(k_m)$

$$\tilde{k}_{m_1} \equiv \tilde{k}_{m_2} \pmod{q_m}.$$

Учитывая $(t, q_m)^+ = 1$, можно записать

$$k_{m_1}^* \equiv k_{m_2}^* \pmod{q_m}; \quad k_{m_1}^* \neq k_{m_2}^*.$$

Приходим к противоречию, поскольку $0 \leq k_m \leq q_m - 1$ и сравнение не выполняется. Таким образом, множество A_m^* содержит q_m различных элементов, которые составлены по масштабам d_1, d_2, \dots, d_m . Отсюда заключаем, что $A_m^* = A_m$ и преобразование (1.6) приводит к перенумерации элементов множества A_m .

Алгоритм разрешения неоднозначности. Построим информационный канал, предполагая совместное распределение вероятностей ошибок измерений известным. Введем многомерную случайную величину

$$z_m^{(i)} = \{\psi_m^{(i)} + 1/2\}^+ - 1/2, \quad i = 1, \dots, m-1,$$

с плотностью вероятностей $g(z_m^{(1)}, \dots, z_m^{(m-1)})$. Тогда из соотношения (1.3) следует

$$z_m^{(i)} = \{\hat{b}_m^{(i)} - a_m^{(i)}(k_m) + 1/2\}^+ - 1/2, \quad i = 1, \dots, m-1. \quad (1.7)$$

Учитывая, далее, что $dz_m^{(i)}/db_m^{(i)} = 1$ (за исключением дискретного множества $\hat{b}_m^{(i)} - a_m^{(i)}(k_m) + 1/2 = j$ ($j = 0; 1$) меры 0), нетрудно получить следующее выражение для условной плотности вероятностей канала:

$$w(\hat{b}_m/a_m(k_m)) = g(\{\hat{b}_m^{(1)} - a_m^{(1)}(k_m) + 1/2\}^+ - 1/2, \dots, \{\hat{b}_m^{(m-1)} - a_m^{(m-1)}(k_m) + 1/2\}^+ - 1/2).$$

Данное распределение определяет полунепрерывный аддитивный канал с дискретным входом $a_m(k_m) \in A_m = A_m$ и непрерывным выходом $\hat{b}_m \in \theta_{m-1}$. Аддитивность канала проявляется в том, что энтропия $H(\theta_{m-1}/A_m)$ не зависит от распределения $p(a_m)$ на входе. Это означает, что шум в канале в одинаковой степени нарушает передачу каждого из возможных входных символов $a_m(k_m)$.

Как известно, одним из критериев для оптимальной решающей схемы, разбивающей в соответствии с алфавитом выходное множество θ_{m-1} на q_m непересекающихся множеств $B^{(0)}, \dots, B^{(k_m)}, \dots$

..., $B^{(q_m-1)}$, является максимум апостериорной вероятности $P(a_m \times (k'_m)/b_m)$. Оптимальное правило декодирования имеет вид

$$\sup_{a_m \in A_m} p(a_m) g(\{\hat{b}_m^{(1)} - a_m^{(1)} + 1/2\}^+ - 1/2, \dots, \{\hat{b}_m^{(m-1)} - a_m^{(m-1)} + 1/2\}^+ - 1/2) = p(\hat{a}_m) g(\{\hat{b}_m^{(1)} - \hat{a}_m^{(1)} + 1/2\}^+ - 1/2, \dots, \{\hat{b}_m^{(m-1)} - \hat{a}_m^{(m-1)} + 1/2\}^+ - 1/2); \quad \hat{a}_m \rightarrow \hat{k}'_m. \quad (1.8)$$

Если вероятности входных сообщений $p(a_m)$ неизвестны, то решающая схема строится по максимуму правдоподобия $L(a_m) = w(\hat{b}_m/a_m)$. В рассматриваемом случае можно определить следующий алгоритм разрешения неоднозначности:

$$\begin{aligned} \sup_{a_m \in A_m} g(\{\hat{b}_m^{(1)} - a_m^{(1)} + 1/2\}^+ - 1/2, \dots, \{\hat{b}_m^{(m-1)} - a_m^{(m-1)} + 1/2\}^+ - 1/2) = g(\{\hat{b}_m^{(1)} - \hat{a}_m^{(1)} + 1/2\}^+ - 1/2, \dots, \{\hat{b}_m^{(m-1)} - \hat{a}_m^{(m-1)} + 1/2\}^+ - 1/2), \\ \hat{a}_m \rightarrow \hat{k}'_m. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Декодирование по максимуму апостериорной вероятности (или по максимуму правдоподобия при равномерных входных сообщениях) является оптимальным в том смысле, что оно минимизирует среднее значение вероятности ошибки:

$$P(e) = 1 - \sum_{a_m \in A_m} p(a_m) P(B^{(k'_m)}/a_m(k'_m)).$$

Здесь вероятность попадания символа b_m в $(m-1)$ -мерную область $B^{(k'_m)}$ имеет вид

$$P(B^{(k'_m)}/a_m(k'_m)) = \int_{B^{(k'_m)}} w(\hat{b}_m/a_m) d\hat{b}_m.$$

Правило (1.9), в свою очередь, минимизирует вероятность ошибки $p(e) = 1 - P(B^{(k'_m)}/a_m(k'_m))$, возникающей при определении посылаемого сообщения $a_m(k'_m)$.

Таким образом, соотношения (1.8) и (1.9) дают общее решение задачи устранения неоднозначности. Решающую схему $B^{(0)}, \dots, B^{(k'_m)}, \dots, B^{(q_m-1)}$, необходимую для расчета вероятности ошибки, можно рассматривать как эквивалентную форму представления алгоритмов, в ряде случаев более удобную для реализации. Следует подчеркнуть, что никакая решающая схема не в состоянии

устранить априорную неопределенность между k'_m и a_m , возникающую при нарушении условия однозначности.

Установим некоторые общие свойства решающей схемы, построенной с помощью алгоритма (1.9). Нетрудно показать, что

$$P(B^{(k'_m)}/a_m(k'_m)) = \int_{B^{(k'_m)}} w(\hat{b}_m/a_m) d\hat{b}_m = \int_{R^{(k'_m)}} g(z_m) dz_m. \quad (1.10)$$

Здесь $z_m = (z_m^{(1)}, \dots, z_m^{(m-1)}) \in \Lambda_m$, $R^{(k'_m)}$ — отображение в Λ_m множества $B^{(k'_m)}$ с помощью преобразования (1.7). Будем называть решающую схему равномерной, если вероятность $P(B^{(k'_m)}/a_m(k'_m)) = 1 - p(e)$ не зависит от k'_m . Из соотношения (1.10) следует, что решающая схема равномерна при выполнении равенств $R^{(0)} = R^{(1)} = \dots = R^{(q_m-1)}$.

Теорема 1.3. *Разбиение единичного куба θ_{m-1} с помощью алгоритма (1.9) на q_m непересекающихся множеств $B^{(0)}, \dots, B^{(k'_m)}, \dots, B^{(q_m-1)}$ образует при $d_m = q_m$ равномерную решающую схему. При этом*

$$P(e) = p(e) = 1 - \int_R g(z_m) dz_m. \quad (1.11)$$

Доказательство теоремы 1.3 основано на следующей лемме.

Лемма 1.1. *Для любой пары точек $\hat{b}_m(k_m) \in \theta_{m-1}$, $a_m(k_m) \gamma \in A_m$, имеющей отображение (1.7), всегда найдутся при $d_m = q_m$ пары*

$$\begin{aligned} & \hat{b}_m(0), a_m(0); \\ & \dots \dots \dots \\ & \hat{b}_m(k_m - 1), a_m(k_m - 1); \\ & \hat{b}_m(k_m + 1), a_m(k_m + 1); \\ & \dots \dots \dots \\ & \hat{b}_m(q_m - 1), a_m(q_m - 1) \end{aligned}$$

с тем же самым отображением z_m в Λ_m .

Доказательство. Действительно, примем

$$z_m^{(i)}(k_m) = \{\hat{b}_m^{(i)}(k_m) - a_m^{(i)}(k_m) + 1/2\}^+ - 1/2, \quad i = 1, \dots, m-1.$$

Далее положим

$$\hat{b}_m^{(i)}(k_l) = \{\hat{b}_m^{(i)}(k_l) - a_m^{(i)}(k_l) + a_m^{(i)}(k_m)\}^+, \quad i = 1, \dots, m-1.$$

Тогда

$$z_m^{(i)}(k_m) \equiv \{\hat{b}_m^{(i)}(k_l) - a_m^{(i)}(k_l) + 1/2\}^+ - 1/2 = z_m^{(i)}(k_l),$$

что и требовалось доказать.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 1.3 проведем от противного. Допустим, что $R^{(k_m)} \neq R^{(k_l)}$. Тогда существует точка z , принадлежащая только множеству $R^{(k_m)}$ ($z \notin R^{(k_l)}$). Согласно лемме существуют две пары элементов $\hat{b}_m(k_m)$, $a_m(k_m)$ и $\hat{b}_m(k_l)$, $a_m(k_l)$, отвечающие одному и тому же z . Свойство выбранной точки z таково, что при первой паре достигается, а при второй не достигается максимум функции $g(\hat{b}_m, a_m)$. Но, с другой стороны, функция правдоподобия зависит только от z , а $z(k_m) = z(k_l)$. Возникшее противоречие, рассматриваемое при $k_l = 0, 1, \dots, q_m - 1, k_l \neq k_m$, доказывает теорему.

Из изложенного выше также следует, что независимо от k'_m объем фигур $B^{(0)}, \dots, B^{(q_m-1)}$ один и тот же, т. е. $V_R = V_B^{(k'_m)}$. Поскольку множества $B^{(0)}, \dots, B^{(k'_m)}, \dots, B^{(q_m-1)}$ содержатся внутри $(m-1)$ -мерного куба θ_{m-1} единичного объема, суммарный объем данных фигур не может превышать 1, т. е.

$$q_m V_R \leq 1. \quad (1.12)$$

Значение $q_m V_R = 1$ соответствует плотной упаковке фигур в кубе. Очевидно, решающая схема плотно упакована, если алгоритм (1.9) любому $\hat{b}_m \in \theta_{m-1}$ всегда приписывает некоторое число $a_m(k'_m) \in A_m$.

Предположим, что ошибки в m -шкале отсутствуют ($\psi_m = 0$) и определена совместная плотность вероятностей ошибок измерений в остальных шкалах $\omega(\psi_1, \dots, \psi_{m-1})$. Тогда $z_m^{(i)} = \psi_i$ и в алгоритме (1.9) необходимо положить $g(z_m) = \omega(z_m^{(1)}, \dots, z_m^{(m-1)})$.

Теорема 1.4. Если ошибки в m -шкале отсутствуют ($\psi_m = 0$), а в остальных шкалах зависят только от номера шкалы, то при любом характере ошибок фигура R и вероятность $p(e)$ инвариантны относительно преобразования (1.6).

Трансформация масштабов приводит к перенумерации множеств $B^{(k'_m)}$ решающей схемы. Утверждение этой теоремы непосредственно вытекает из теоремы 1.2, так как по условию функция $g(z_m)$, а следовательно, и оптимальная решающая схема не зависят от преобразования масштабов (1.6).

Допустим теперь, что ошибки измерений ограничены. Тогда функция $g(z_m)$ отлична от нуля внутри некоторой области $\Delta \in A_m$. Очевидно, можно произвести безошибочное устранение многозначности, если существует решающая схема с отображением R , плотностью содержащим фигуру Δ . В этом случае $P(B^{(k'_m)} | a(k_m)) = 1$,

$p(e) = 0$. Но любая решающая схема задает допустимую область изменения ошибок R , которая может быть определена в виде совокупности условий, обеспечивающих безошибочное нахождение чисел k_m .

Дискреты алфавита. Рассмотрим равномерную решающую схему, образованную простейшими фигурами-брусками. Отображение R данной схемы представляет $(m - 1)$ -мерный параллелепипед с гранями, параллельными координатным плоскостям. Под i -координатной плоскостью понимается гиперплоскость в $\Lambda_m \hat{b}_m^{(i)} = 0$, ортогональная i -координате. С помощью (1.9) можно показать, что данная схема оптимальна, если $\psi_m = 0$ ($z_m^{(i)} = \psi_i$) и функция $\omega(\psi_1, \dots, \psi_{m-1})$ постоянна на бруске $-\Delta_1 \leq \psi_1 < \Delta_1, \dots, -\Delta_{m-1} \leq \psi_{m-1} < \Delta_{m-1}$, подобном R , а вне его равна нулю. Следовательно, все результаты предыдущего раздела справедливы для данного случая.

Для построения решающей схемы необходимо определить расстояние между элементами $a_m^{(i)} \in A_m^{(i)}$ и $\hat{b}_m^{(i)} \in \Lambda_m^{(i)}$ ступени. Исходя из преобразования (1.7) его можно ввести единственным образом:

$$r_i(\hat{b}_m^{(i)} - a_m^{(i)}) = |\{\hat{b}_m^{(i)} - a_m^{(i)} + 1/2\}^+ - 1/2|. \quad (1.13)$$

Будем называть дискретами алфавита A_m бруски $D^{(0)}, D^{(q_{m1})}$, удовлетворяющие следующим требованиям: 1) внутри бруска находится только одна точка алфавита, совпадающая с его центром; 2) отображение R любого бруска образует $(m - 1)$ -мерный параллелепипед; 3) соприкасающиеся грани брусков делят пополам ортогональную проекцию r_i между двумя соответствующими точками алфавита; 4) минимальное ребро дискрета является наибольшим при всевозможных разбиениях θ_{m-1} на бруски; 5) при выполнении п. 4 объем параллелепипеда V_R является наибольшим.

Зафиксируем некоторую точку $a_m^{(i)}(k_m') \in A_m^{(i)}$; тогда расстояние от нее до произвольной точки $a_m^{(i)}(k_m^*)$ определяется по формуле

$$r_i(s) = |\{a_m^{*(i)} - a_m^{(i)} + 1/2\}^+ - 1/2| = \left| \left\{ \frac{q_i^{(m)}}{q_m^{(i)}} s + 1/2 \right\}^+ - 1/2 \right|,$$

где параметр $s = k_m^* - k_m'$ принимает значения из множества $H(s) : -k_m', -k_m' + 1, \dots, -1, 1, \dots, q_m - k_m' - 1$. При этом ребра дискрета могут быть определены по следующей схеме.

1. Из $H(s)$ выделяем подмножество $H_i(s)$, на котором выполняется система неравенств

$$r_i(s) \geq r_l(s), \quad l = 1, \dots, m - 1. \quad (1.14)$$

2. Находим величину

$$r_i(s_i) = \min_{s \in H_i(s)} r_i(s), \quad i = 1, \dots, m - 1. \quad (1.15)$$

3. Отождествляем с длиной ребра дискрета $2\delta_i$ по i -координате величину $r_i(s_i)$, удовлетворяющую системе неравенств

$$r_i(s_i) > r_l(s_l), \quad l = 1, \dots, m-1, \quad l \neq i. \quad (1.16)$$

Здесь s_i — точка $H_i(s)$, в которой достигается минимум r_i .

4. Если при некоторых i и l соотношение (1.16) нарушается, то точка s_l из множества $H_l(s)$ выбрасывается и процедура нахождения ребра $2\delta_i$ повторяется. Расчет заканчивается, если все ребра дискрета удовлетворяют неравенствам (1.16).

5. Если в результате перебора трансформированное множество $\tilde{H}_i(s)$ оказывается пустым, то принимается $2\delta_i = 1$.

В данной схеме совокупность операций (1.14) и (1.15) обусловлена выполнением требований п. 3 и 4. Ограничение (1.16) и следующая за ним процедура обеспечивают формирование параллелепипеда R наибольшего объема. При этом все точки алфавита, в которых достигается минимум в соотношении (1.15), находятся на поверхности бруска с длиной ребер $4\delta_i$ ($i = 1, \dots, m-1$).

Можно показать, что дискрет определяется единственным образом в том случае, когда множества $H_i(s)$ ($i = 1, \dots, m-1$) не имеют общих точек. В противном случае ребра дискрета могут зависеть от направления перебора. При этом, однако, минимальное ребро дискрета $\min 2\delta_i$ будет одним и тем же. Заметим, что $2\delta_i = t_i/q_m^{(i)}$. Здесь $t_i, q_m^{(i)}$ — целые числа и $t_i \leq q_m^{(i)}/2$ (в схеме доопределяется значение $t_i = q_m^{(i)}$).

В общем случае нахождение ребер дискрета требует перебора на конечном множестве A_m , осуществляемого на ЭВМ при конкретных числовых значениях масштабных коэффициентов. Однако при плотной упаковке дискретов в кубе Θ_{m-1} процедуру расчета ребер можно упростить и в ряде случаев выполнить в общем виде.

Сформулируем несколько теорем.

Теорема 1.5. Если в представлении $d_i/d_m \equiv q_i^{(m)}/q_m^{(i)}, (q_i^{(m)}, q_m^{(i)})^+ = 1$ числа $q_m^{(1)}, \dots, q_m^{(m-1)}$ попарно простые и $d_m = q_m = \prod_{i=1}^{m-1} q_m^{(i)}$, то независимо от чисел $q_i^{(m)}$ величина дискрета

$$2\delta_i = 1/q_m^{(i)}, \quad i = 1, \dots, m-1. \quad (1.17)$$

Теорема 1.6. Если $q_m^{(i)} = [q_m^{(1)}]^i$ и $d_m = q_m = [q_m^{(1)}]^{m-1}$, то независимо от чисел $q_i^{(m)}$ величина дискрета

$$2\delta_i = 1/q_m^{(1)}, \quad i = 1, \dots, m-1. \quad (1.18)$$

Легко проверить, что суммарный объем брусков с ребрами (1.17) и (1.18) равен 1. Доказательства теорем проводились по схеме (1.14) — (1.16) с помощью аппарата сравнений теории чисел и ввиду громоздкости опущены. Теория чисел позволяет также найти условие существования брусков, удовлетворяющих равенству (1.12).

Теорема 1.7. Если для некоторого набора чисел $\mu^{(\alpha)} = (\mu_1^{(\alpha)}, \dots, \mu_{m-1}^{(\alpha)})$, удовлетворяющего условиям

$$q_m^{(i)} \mid \mu_i^{(\alpha)}, \quad \prod_{i=1}^{m-1} \mu_i^{(\alpha)} = q_m,$$

найдется такое j_α , что

$$\Gamma_{j_\alpha}^{(i)} = \left(\mu_i^{(\alpha)}, \frac{q_m^{(j_\alpha)}}{\left(q_m^{(j_\alpha)}, \frac{q_m^{(i)}}{\mu_i^{(\alpha)}} \right)^+} \right) = 1, \quad i = 1, \dots, m-1, i \neq j_\alpha,$$

то независимо от $q_i^{(m)}$ существуют бруски с ребрами $1/\mu_i^{(\alpha)}$ ($i = 1, \dots, m-1$), плотно упакованные в кубе Θ_{m-1} . Дискретны алфавита образованы такими брусками, для которых

$$\max_{\alpha} \min_i \frac{1}{\mu_i^{(\alpha)}} = 2\delta_i^{(*)}. \quad (1.19)$$

Здесь вертикальная черта характеризует свойство делимости числа $q_m^{(i)}$ на $\mu_i^{(\alpha)}$, а символом $(\dots)^+$ обозначен наибольший общий делитель двух чисел. Заметим, что соотношения (1.17) и (1.18) являются частным случаем (1.19). Однако теорема 1.7 не дает достаточных условий существования плотно упакованных дискретов. Следует также подчеркнуть, что величина дискрета при плотной упаковке не зависит от чисел $q_i^{(m)}$, взаимно простых с $q_m^{(i)}$. Следовательно, одному и тому же дискрету отвечают разные наборы масштабных коэффициентов. Легко заметить, что данное множество включает наборы масштабов, удовлетворяющие преобразованию (1.16).

Решающую схему, составленную по дискретам алфавита, можно записать в виде системы неравенств

$$-\delta_i \leq (\hat{b}_m^{(i)} - a_m^{(i)} + 1/2)^+ - 1/2 < \delta_i, \quad i = 1, \dots, m-1, a_m \rightarrow \hat{k}_m'. \quad (1.20)$$

Если покоординатное «рассогласование» символов a_m и \hat{b}_m , вызванное ошибками измерений, не превышает величины дискрета, то, очевидно, решающая схема (1.20) безошибочна. Последнее возможно, если

$$\Delta_m^{(i)} = \left| \left\{ \Delta_i + \frac{d_i}{d_m} \Delta_m + 1/2 \right\}^+ - 1/2 \right| \leq \delta_i, \quad i = 1, \dots, m-1. \quad (1.21)$$

Здесь Δ_i — наибольшее абсолютное значение ошибки ψ_i в i -шкале.

Свойства некоторых решающих схем. Рассмотрим в качестве примера фазовый канал. Плотность вероятностей ошибок в l -шкале имеет вид

$$\omega_l(\psi_l) = \left[\exp\left(-\frac{U_l^2}{2}\right) + \sqrt{2\pi} U_l \cos(2\pi\psi_l) F \times \right. \\ \left. \times (U_l \cos(2\pi\psi_l)) \exp\left\{-\frac{U_l^2 \sin^2(2\pi\psi_l)}{2}\right\} \right], \quad |\psi_l| \leq \frac{1}{2}, \quad (1.22)$$

где $U_l^2 = E_l/N_l$; E_l , N_l — энергия соответственно сигнала и шума;

$F(x) = 1/\sqrt{2\pi} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt$ — функция Лапласа.

Предположим, что в m -шкале ошибок нет (или их вклад мал, т. е. $d_l U_l \ll d_m U_m$), а в остальных измерения независимы. Тогда $z_m^{(l)} \approx \psi_l$ и в алгоритме (1.9) необходимо положить $g(z_m) = \prod_{l=1}^{m-1} \omega_l(z_m^{(l)})$.

Заметим, что при малом отношении сигнала к шуму ($U_l \ll 1$) плотность вероятностей $\omega_l(\psi_l)$ стремится к постоянной величине 1 и алгоритм (1.9) дает разбиение θ_{m-1} на бруски. В противном случае $U_l \geq 3$ и при малом значении аргумента закон распределения (1.22) близок к нормальному:

$$\omega_l(\psi_l) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_l} \exp\left(-\frac{\psi_l^2}{2\sigma_l^2}\right), \quad (1.23)$$

где $\sigma_l = 1/2\pi U_l$. Подставляя (1.23) в (1.9), после несложных преобразований получаем

$$\inf_{a_m \in A_m} \sum_{l=1}^{m-1} \left[\frac{r_l(\hat{b}_m^{(l)} - a_m^{(l)})}{\sigma_l} \right]^2 = \sum_{l=1}^{m-1} \left[\frac{r_l(\hat{b}_m^{(l)} - \hat{a}_m^{(l)})}{\sigma_l} \right]^2, \quad \hat{a}_m \rightarrow \hat{k}_m. \quad (1.24)$$

В соответствии с (1.13) можно в A_m и θ_{m-1} определить метрику

$$\rho(a_m, \hat{b}_m) = \left\{ \sum_{l=1}^{m-1} \left[\frac{r_l(a_m^{(l)} - \hat{b}_m^{(l)})}{\sigma_l} \right]^2 \right\}^{1/2}. \quad (1.25)$$

Правило (1.24) всегда выбирает то значение \hat{a}_m , которое ближе всего к принимаемому символу \hat{b}_m . Данная решающая схема осуществляет декодирование по «минимуму» расстояния (1.25).

Наличие ошибок измерений в m -шкале вызывает зависимость случайных величин $z_m^{(1)}$, ..., $z_m^{(m-1)}$ даже тогда, когда измерения по шкале независимы. Это приводит к усложнению алгоритма. Расчет показывает, что в случае независимых измерений по шкалам с законом ошибок (1.23) и при $\sigma_m^2 \neq 0$ в (1.24) необходимо заменить $\rho^2(\hat{a}_m, \hat{b}_m)$ положительно определенной квадратичной формой.

Заметим, что декодированию по минимуму расстояния отвечает в решающей схеме фигура R , ограниченная плоскостями. При этом число сторон $(m-1)$ -мерного многогранника должно быть больше или равно $2(m-1)$:

$$Q^2(a_m, \hat{b}_m) = \sum_{i,k=1}^{m-1} \left(\frac{\delta_{ik}}{\sigma_i^2} - \frac{d_i d_k}{\Omega d_m^2 \sigma_i^2 \sigma_k^2} \right) [\hat{b}_m^{(i)} - a_m^{(i)} + 1/2]^+ - 1/2] \times \\ \times [(\hat{b}_m^{(k)} - a_m^{(k)} + 1/2)^+ - 1/2]. \quad (1.26)$$

Здесь δ_{ik} — символ Кронекера, $\Omega = \sum_{i=1}^m d_i^2/d_m^2 \sigma_i^2$. При $\sigma_m \rightarrow 0$ $Q^2 \rightarrow \rho^2$.

Рассмотрим распространенный в инженерной практике метод устранения многозначности, состоящий в последовательном пересчете измерений из одной шкалы в другую. Предположим, что $d_1 \leq 1$ ($k_1 = 0$) и $d_1 < d_2 < \dots < d_m$. Тогда исходя из соотношений (1.1) составим следующую процедуру пересчета:

$$\hat{k}_1 = 0; \quad \hat{k}_2 = \left[\frac{d_2}{d_1} \hat{\varphi}_1 - \hat{\varphi}_2 + 1/2 \right]^+; \quad \hat{k}_3 = \left[\frac{d_3}{d_2} (\hat{k}_2 + \hat{\varphi}_2) - \right. \\ \left. - \hat{\varphi}_3 + 1/2 \right]^+; \quad \dots; \quad \hat{k}_m = \left[\frac{d_m}{d_{m-1}} (\hat{k}_{m-1} + \hat{\varphi}_{m-1}) - \hat{\varphi}_m + 1/2 \right]^+. \quad (1.27)$$

Число $1/2$ введено здесь для симметризации целой части. Если исключить перебросы в шкалах, то решающую схему, отвечающую алгоритму (1.27), можно рассматривать в θ_{m-1} как совокупность условий безошибочного определения чисел $k_m = k_m + [\varphi_m + \psi_m]^+$. Подставим в (1.27) выражение $\hat{\varphi}_i = \varphi_i + \psi_i - [\varphi_i + \psi_i]^+$ и потребуем выполнения равенства $[\varphi_1 + \psi_1]^+ = 0$. Нетрудно убедиться, что перебросы в промежуточных шкалах исключаются автоматически, и условие безошибочности имеет вид

$$-1/2 \leq \frac{d_2}{d_1} \psi_1 - \psi_2 < 1/2; \quad -1/2 \leq \frac{d_3}{d_2} \psi_2 - \psi_3 < 1/2; \quad \dots; \\ -1/2 \leq \frac{d_m}{d_{m-1}} \psi_{m-1} - \psi_m < 1/2. \quad (1.28)$$

Допустим, что ошибок в m -шкалах нет ($\psi_m = 0$). Тогда $z_m^{(i)} = \psi_i$, и совокупность неравенств (1.28) определяет в пространстве Λ_m лежащий в основе решающей схемы алгоритма (1.27) многогранник R :

$$-1/2 \leq \frac{d_2}{d_1} z_m^{(1)} - z_m^{(2)} < 1/2; \quad -1/2 \leq \frac{d_3}{d_2} z_m^{(2)} - z_m^{(3)} < \\ < 1/2; \quad \dots; \quad -1/2 \leq \frac{d_m}{d_{m-1}} z_m^{(m-1)} < 1/2. \quad (1.29)$$

Если теперь в (1.29) выразить z_m с помощью соотношения (1.7) через a_m и \hat{b}_m , то получим искомую решающую схему $B^{(0)}$, ..., $B^{(q_m-1)}$.

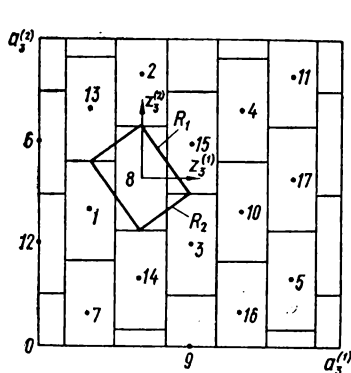


Рис. 2. Геометрические представления алфавита и решающих схем при $m = 3$, $d_1 = 3$, $d_2 = 8$, $d_3 = 18$.

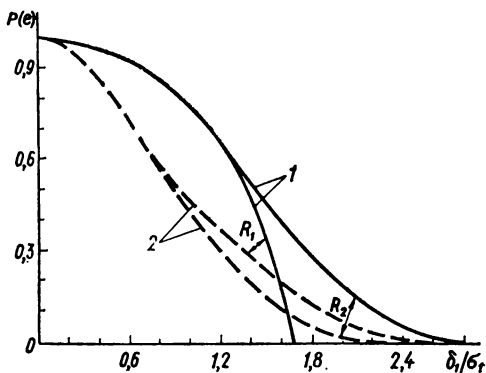


Рис. 3. Зависимость вероятности ошибки от параметра δ_1/σ_1 для решающих схем рис. 2.

Исходя из выражения (1.9) можно показать, что данная схема оптимальна, если плотность вероятностей ошибок измерений $\omega(\psi_1, \dots, \psi_{m-1})$ постоянна в области Δ , подобной R , а вне ее равна нулю. Следовательно, предыдущие утверждения (за исключением теоремы 1.4) остаются справедливыми и для схемы (1.29). Данная схема равномерна и плотно упакована в θ_{m-1} (т. е. $V_{Rq_m} = 1$), поскольку алгоритм (1.27) любому $\hat{b}_m \in \theta_{m-1}$ всегда приписывает некоторое значение $a_m \in A_m$. Вероятность ошибки находится по формуле (1.11). Теорема 1.4 нарушается, так как при любом изменении масштабов промежуточных шкал (кроме $d_1 = 1$ и $d_m = \text{const}$) область $\Delta \sim R$, а следовательно, и функция $W(\psi_1, \dots, \psi_{m-1})$ трансформируются.

Пример

А. Выберем следующие масштабы: $d_1 = 3$, $d_2 = 8$, $d_3 = 18$. Тогда

$$m = 3, k_3 \in N'_3: 0, 1, \dots, 17, a_3^{(1)} = \left\{ \frac{1}{6} k'_3 \right\}^+, a_3^{(2)} = \left\{ \frac{4}{9} k'_3 \right\}^+,$$

$$q_3^{(1)} = 2 \cdot 3, q_3^{(2)} = 3^2, q_3 = 18.$$

В соответствии с теоремой 1.7 существуют два набора брусков, плотно упакованных в θ_2 :

$$\alpha = 1, \mu_1^{(1)} = 2, \mu_2^{(1)} = 3^2, \Gamma_2^{(1)} = \left(2, \frac{3^2}{\left(3^2, \frac{2 \cdot 3}{2} \right)^+} \right)^+ = 1;$$

$$\alpha = 2, \mu_1^{(2)} = 2 \cdot 3, \mu_2^{(2)} = 3, \Gamma_1^{(2)} = \left(3, \frac{2 \cdot 3}{\left(2 \cdot 3, \frac{3^2}{3} \right)^+} \right)^+ = 1.$$

По формуле (1.19) находим $2\delta_1 = \frac{1}{2} \cdot 3$, $2\delta_2 = 1/3$. На рис. 2 изображены точки алфавита A_3 , разбиение квадрата θ_2 на дискеты (R_1) и фигура R_2 , лежащая в основе решающей схемы алгоритма (1.24) при $\sigma_1 = \sigma_2$ ($\sigma_3 = 0$). На рис. 3

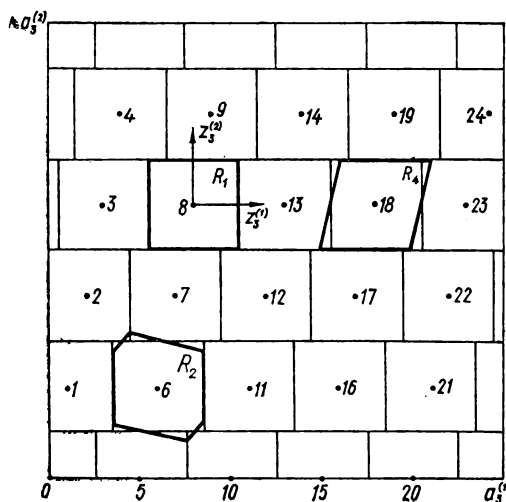
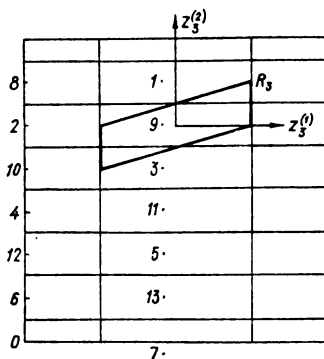
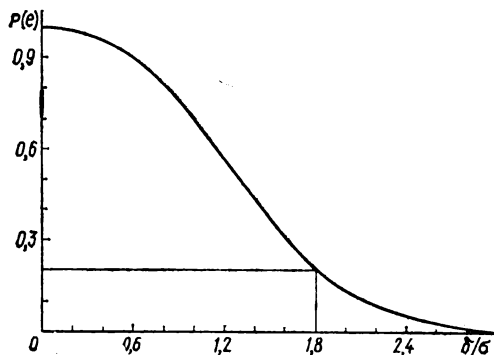


Рис. 4. Геометрические представления алфавита и решающих схем при $m = 3$, $d_1 = 1$, $d_2 = 5$, $d_3 = 25$.

Рис. 5. Зависимость вероятности ошибки от параметра δ/σ для решающих схем рис. 4.

Рис. 6. Геометрические представления алфавита и решающих схем при $m = 3$, $d_1 = 7$, $d_2 = 12$, $d_3 = 14$.



приведены результаты расчета по формуле (1.11) вероятности ошибки схем R_1 и R_2 для различных значений параметра δ_1/σ_1 . Серия кривых 1 отвечает равномерному распределению ошибок на прямоугольнике $-\Delta_1 \leq \psi_1 < \Delta_1$, $-\Delta_2 \leq \psi_2 < \Delta_2$ ($\Delta_2 = 2\Delta_1$, $\sigma_1 = \Delta_1 \sqrt{3}$), подобном дискрету R_1 ; серия кривых 2 получена для нормального закона при $\sigma_1 = \sigma_2$, $\sigma_3 = 0$.

Б. Примем следующие значения масштабных коэффициентов: $d_1 = 1$, $d_2 = 5$, $d_3 = 25$. Основные характеристики системы: $m = 3$, $k'_3 = 0, 1, \dots, 24$, $a'_3 = \{1/25 \times k'_3\}^+$, $a_3^{(2)} = \{1/5 k'_3\}^+$, $q_3 = 25$, $2\delta_1 = 2\delta_2 = 1/5$. На рис. 4 изображены алфавит A_3 , разбиение квадрата θ_3 на дискреты (R_1), фигуры R_2 и R_4 , лежащие в основе решающих схем алгоритмов (1.24) ($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$, $\sigma_3 = 0$) и (1.27). Расчет показывает, что для нормального закона ($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$, $\sigma_3 = 0$) вероятность ошибки $p(e)$ данных схем примерно одинакова и описывается кривой, приведенной на рис. 5. Заметим, что тот же дискрет отвечает масштабам: $d_1^* = q_1$, $d_2^* = 5q_2$, $d_3^* = d_3 = 25$; числа q_1 и q_2 не кратны 5. В соответствии с (1.6) схема R_2 инварианта относительно преобразования масштабов $d_1^* = 25 \{t/25\}^+$, $d_2^* = 25 \{t/5\}^+$, $d_3^* = 25$; t не кратно 5. Фигура R_4 трансформируется при любом изменении масштабов.

В. Положим $d_1 = 7$, $d_2 = 12$, $d_3 = 14$. Тогда $m = 3$, $k'_3 \in N'_3: 0, 1, \dots, 13$, $a_3^{(1)} = \{1/2 \cdot k_3\}^+$, $a_3^{(2)} = \{1/7 \cdot k'_4\}^+$, $q_3 = 14$, $2\delta_1 = 1/2$, $2\delta_2 = 1/7$. Геометрические представления алгоритмов (1.20) (фигура R_1), (1.24) ($R_2 = R_1$, $\sigma_1 = \sigma_2$) и (1.26) (R_3 , $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$) даны на рис. 6.

Таким образом, общее решение задачи устранения многозначности по критериям максимума апостериорной вероятности и максимума правдоподобия дает соответственно алгоритмы (1.16) и (1.19). Им отвечает эквивалентная геометрическая форма представлений в виде решающей схемы $B^{(0)}, \dots, B^{(k_m)}, \dots, B^{(q_m-1)}$, разбивающей единичный $(m-1)$ -мерный куб θ_{m-1} на q_m непересекающихся фигур. Решающая схема, построенная по максимуму правдоподобия, равномерна; фигуры $B^{(k_m)}$ имеют одинаковый объем, и вероятность ошибки не зависит от номера цикла. Установленные выше свойства алфавита и решающих схем могут быть использованы для выбора соотношений масштабов и числа шкал системы. Следует отметить, что решающая схема допускает восстановление величины по формуле (1.4) в аналоговом виде, если информация о дробных частях $\hat{\varphi}_1, \dots, \hat{\varphi}_m$ содержится в непрерывных периодических процессах. Решающую схему можно реализовать также с помощью операции многомерного интервального сравнения. Алгоритмическое решение задачи, как правило, предполагает цифровую форму представления измерений.

Оптимальный выбор масштабных коэффициентов

Рассмотрим задачу нахождения оптимальных (по минимуму вероятности аномальной ошибки) значений масштабных коэффициентов трехшкальных фазометрических систем при устранении неоднозначности циклических измерений алфавитным методом.

В системе уравнений

$$u = (k_1 + \varphi_1)/d_1 = (k_2 + \varphi_2)/d_2 = (k_3 + \varphi_3)/d_3$$

u — восстанавливаемая величина; $k_i = [d_i u]^+$, $\varphi_i = \{d_i u\}^+$ — соответственно целая и дробная части $d_i u$; на фазы φ_i накладываются погрешности ψ_i так, что измеренное значение фазы $\hat{\varphi}_i$ определяется соотношением $\varphi_i = (\hat{\varphi}_i + \psi_i)^+$, $i = 1, 2, 3$.

Предположим, что случайные величины ψ_1 и ψ_2 независимы и распределены по нормальному закону с параметрами $(0, \sigma)$; $\psi_3 \equiv 0$ (случайная величина ψ_3 входит в соответствующие формулы с малыми весовыми коэффициентами); d_1, d_2, d_3 — целые числа, расположенные в возрастающем порядке; d_3 — фиксированное простое число (в конце параграфа рассмотрен случай, когда d_3 — составное число). Из приведенных выше результатов следует, что в этом

случае вероятность правильной оценки параметра k_3 определяется формулой

$$P\{\hat{k}_3 = k_3\} = \int_{B(k_3)} \int g\{(x - a_3^{(1)}(k_3) + 1/2)^+ - 1/2, \\ \{y - a_3^{(2)}(k_3) + 1/2\}^+ - 1/2\} dx dy, \quad (1.30)$$

где

$$g(u, v) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(u^2 + v^2)\right\}; \quad (1.31)$$

$a_3^{(i)}(k_3) = \left\{\frac{d_i}{d_3} k_3\right\}^+$, $i = 1, 2$ — координаты точек (обозначим их через $a(k_3)$), образующих алфавит A_3 и соответствующих одному из значений параметра $k_3 = 0, d_3 - 1$; $B^{(k_3)}$ — область, в которой подынтегральная функция $q(\cdot, \cdot)$ в выражении (1.30) принимает при соответствующем k_3 значения, большие, чем при других величинах k_3 .

Задача состоит в выборе d_1 и d_2 , максимизирующих вероятность $P\{\hat{k}_3 = k_3\}$. С этой целью преобразуем (1.30) к более удобному для анализа виду. Дополним лежащий в 1-й координатной четверти единичный квадрат θ_2 с алфавитом A_3 , содержащимся в нем, аналогичными квадратами, перенесенными параллельно во 2, 3, 4-ю четверти. Полученный таким образом расширенный квадрат обозначим $\bar{\theta}_2$, а расширенный алфавит — \bar{A}_3 (его точки $\bar{a}(k_3)$ могут совпадать с точками $a(k_3)$).

Выше доказано, что при некоторых предположениях, выполненных здесь, вероятность $P\{\hat{k}_3 = k_3\}$ не зависит от выбора значения k_3 . В силу этого можно положить $k_3 = 0$. Данному значению параметра при любом наборе d_1, d_2, d_3 соответствует точка алфавита, совпадающая с началом координат. В свою очередь, этой точке соответствует в квадрате θ_2 область $B^{(0)}$, состоящая из четырех частей, лежащих в углах данного квадрата. В квадрате $\bar{\theta}_2$ вместо $B^{(0)}$ можно рассматривать связную область $\bar{B}^{(0)}$, лежащую в окрестности точки $O(0, 0)$. В этом случае подынтегральная функция в выражении (1.30) упрощается. Она принимает вид $q(x, y)$ и не зависит от параметров d_1, d_2, d_3 . Теперь заметим, что алфавит A_3 в силу теоремы 1.2 инвариантен относительно преобразования параметров d_i вида

$$\left\{\frac{d_i^*}{d_3^*}\right\} = \left\{\frac{d_i t}{d_3}\right\}^+, \quad i = 1, 2, \quad d_3^* = d_3, \quad t = \overline{2, d_3 - 1},$$

или в эквивалентной форме

$$d_i t \equiv d_i^* \pmod{d_3}. \quad (1.32)$$

Данное преобразование меняет лишь соответствие точек алфавита значениям параметра k_3 , но так как при вычислении вероятности (1.30) используются лишь точки алфавита, а не указанное соответствие, то вероятность $P\{\hat{k}_3 = k_3\}$ также инвариантна относительно преобразования (1.32). С помощью этого преобразования перейдем от набора параметров d_1, d_2, d_3 к набору $1, d_2^*, d_3^*$ (далее параметры d_2^* и d_3^* будут записываться без звездочек).

Приведем простые леммы, устанавливающие свойства инвариантности алфавита и полезные в дальнейшем изложении.

Лемма 1.2. Пусть алфавитам A_3' и A_3'' отвечают наборы шкал соответственно $1, d_2', d_3'$ и $1, d_2'', d_3''$, причем $d_2' + d_2'' = d_3'$. Тогда A_3' и A_3'' эквивалентны с точностью до поворота θ_2 относительно оси $a_3^{(2)} = 1/2$ на 180° .

Доказательство. По определению координаты точек алфавита $a_3^{(i)}(k) = \left\{ \frac{d_i}{d_3} k \right\}^+$, $i = 1, 2, k = \overline{0, d_3 - 1}$. Очевидно, что $a_3^{(1)'}(k) = a_3^{(1)''}(k)$. Далее,

$$\begin{aligned} a_3^{(2)'}(k) &= \left\{ \frac{d_2'}{d_3} k \right\}^+ = \left\{ \frac{d_3 - d_2''}{d_3} k \right\}^+ = \left\{ -\frac{d_2''}{d_3} k \right\}^+ = 1 - \\ &\quad - \left\{ \frac{d_2''}{d_3} k \right\}^+ = 1 - a_3^{(2)''}(k), \end{aligned}$$

что и доказывает лемму.

Заметим, что приведенное утверждение позволяет ограничить-ся анализом изменения d_2 в области $2, \dots, (d_3 - 1)/2, d_3 - 1$.

Лемма 1.3. Если $d_2 d_2'' \equiv 1 \pmod{d_3}$, то алфавиты A_3' и A_3'' симметричны относительно биссектрисы первого координатного угла. Если $d_2 d_2'' \equiv -1 \pmod{d_3}$, то алфавиты A_3' и A_3'' «ортогональны» (повернуты один относительно другого на 90° вокруг центра квадрата θ_2).

Доказательство ради краткости проведем лишь для случая $d_2 d_2'' = d_3 + 1$. Очевидны следующие соотношения:

$$\begin{aligned} a_3^{(1)'}(k) &= \left\{ \frac{1}{d_3} k \right\}^+ = \left\{ \frac{d_2''}{d_3} \frac{k}{d_2''} \right\}^+; \\ a_3^{(2)'}(k) &= \left\{ \frac{d_2'}{d_3} k \right\}^+ = \left\{ \frac{d_3 + 1}{d_2' d_3} k \right\}^+ = \left\{ \frac{k}{d_2'} + \frac{1}{d_3} \frac{k}{d_2'} \right\}^+. \end{aligned}$$

Согласно теореме 1.2 для точек алфавита A_3' в качестве значений k можно выбрать $0, d_2'', 2d_2'', \dots, (d_3 - 1) d_2''$ (при этом получатся все

точки алфавита). Но в этом случае $k/d_2' = l$, где l — целое число, принимающее значения $0, 1, \dots, d_3 - 1$, и

$$a_3^{(1)'}(k) = \left\{ \frac{d_2'}{d_3} l \right\}^+ = a_3^{(2)''}(l);$$

$$a_3^{(2)''}(k) = \left\{ \frac{1}{d_3} l \right\}^+ = a_3^{(1)'}(l),$$

что и требовалось доказать.

Опишем теперь точно область $\bar{B}^{(0)}$, по которой производится интегрирование функции $g(x, y)$ с целью максимизации вероятности $P\{k_3 = k_3, k_3 = 0\}$ правильного устранения неоднозначности в зависимости от d_2 .

Прежде всего укажем простой графический способ получения алфавита A_3 , отвечающего набору шкал $1, d_2, d_3$. Соединим точки с координатами $(0, -(d_2 - 1))$ и $(1, 1)$ отрезком прямой и разделим его на d_3 равных частей (рис. 7). Расположенные между прямыми $y = -l$ и $y = -(l - 1)$ ($l = \overline{1, d_2 - 1}$) части отрезка с лежащими на них точками деления перенесем в направлении оси Oy в квадрат θ_2 . Перенесенные таким образом точки деления и будут составлять алфавит A_3 . Нетрудно заметить, что они лежат на d_2 параллельных прямых, первая из которых с угловым коэффициентом d_2 проходит через точку $O(0, 0)$. В общем случае уравнения указанных прямых имеют вид

$$y = d_2 x - (i - 1), \quad i = \overline{1, d_2}, \quad (1.33)$$

причем расстояния между соседними точками алфавита, лежащими на них, равны $d_3^{-1} \sqrt{d_2^2 + 1}$.

Опишем теперь процедуру нахождения точек расширенного алфавита \bar{A}_3 , участвующих в образовании области $\bar{B}^{(0)}$ (рис. 8, а). Рассмотрим прямую $y = d_2 x - 1$, которая находится на кратчайшем расстоянии от точки $O(0, 0)$ и не проходит через нее. На этой прямой выберем точки $\bar{a}(k)$ и $\bar{a}(k + 1)$, ближайшие к началу координат. При этом

$$k = \left[\frac{d_2 d_3}{d_2^2 + 1} \right]^+ \quad (1.34)$$

и точки $\bar{a}(k)$ и $\bar{a}(k + 1)$ имеют координаты $x_k = k/d_3$, $y_k = d_2 x_k - 1$ и $x_{k+1} = (k + 1)/d_3$, $y_{k+1} = d_2 x_{k+1} - 1$ соответственно (новые обозначения x_k, y_k аналогичны старым $a_3^{(1)}(k), a_3^{(2)}(k)$).

Рассмотрим теперь семейство параллельных прямых, одна из которых проходит через начало координат и выделенную ранее точку $\bar{a}(k)$. Их уравнения имеют вид

$$y = (d_2 k - d_3) x/k + (j - 1)/k, \quad j = 1, 2, \dots, \quad (1.35)$$

где, как и ранее, k определяется соотношением (1.34).

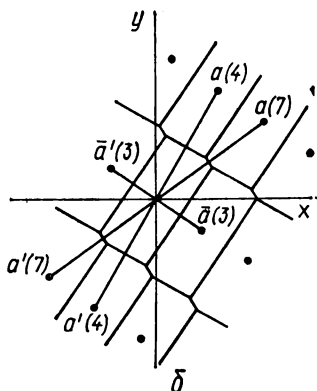
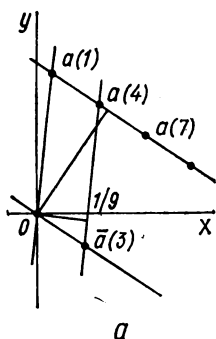
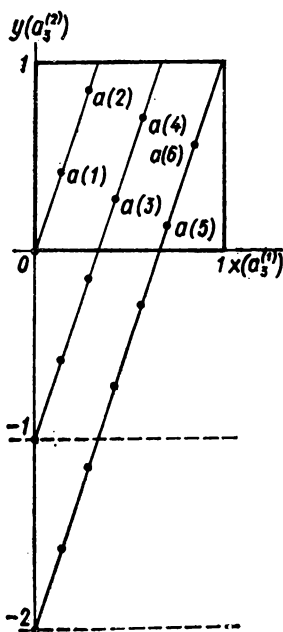


Рис. 7. Графический способ получения алфавита A_3 при $d_1 = 1$, $d_2 = 3$, $d_3 = 7$.

Рис. 8. Геометрическое представление решающей схемы, использующей расширенный алфавит: a — нахождение точек расширенного алфавита A_3 , участвующих в образовании области $\bar{B}^{(0)}$; δ — построение области $\bar{B}^{(0)}$ ($d_1 = 1$, $d_2 = 9$, $d_3 = 29$).

Возьмем ту из прямых семейства (1.35), которая ближе всего к точке $O(0, 0)$, но не проходит через нее. Очевидно, уравнение этой прямой имеет вид

$$y = (d_2 k - d_3) x / k + 1/k \quad (1.36)$$

и на ней лежат точки $\bar{a}(1)$, $\bar{a}(k+1)$, $\bar{a}(2k+1)$, ... На указанной прямой определим точки $\bar{a}((r-1)k+1)$ и $\bar{a}(rk+1)$, ближайшие к началу координат. При этом, как нетрудно показать,

$$r = \left[\frac{d_2(d_3 - d_2 k) - k}{(d_3 - d_2 k)^2 + k^2} \right]^+ + 1 \quad (1.37)$$

и абсциссы точек $\bar{a}((r-1)k+1)$, $\bar{a}(rk+1)$ равны соответственно $((r-1)k+1)/d_3$ и $(rk+1)/d_3$, а их координаты определяются уравнением (1.36).

Процедура нахождения точек расширенного алфавита \bar{A}_3 , участвующих в образовании области $\bar{B}^{(0)}$, закончена. Этими точками являются 0 , $\bar{a}(k)$, $\bar{a}((r-1)k+1)$, $\bar{a}(rk+1)$ (k и r определяются соотношениями (1.34) и (1.37)) и симметричные трем последним относительно начала координат точки $\bar{a}'(k)$, $\bar{a}'((r-1)k+1)$, $\bar{a}'(rk+1)$ (рис. 8, б).

Легко видеть, что область $\bar{B}^{(0)}$ задается неравенствами

$$g(x, y) \geq g(\{x - x_{k_s} + 1/2\}^+ - 1/2, \{y - y_{k_s} + 1/2\}^+ - 1/2),$$

где x_{k_3} , y_{k_3} — координаты точек $\bar{a}(k)$, $a((r-1)k+1)$, $\bar{a}(rk+1)$ и точек, симметричных им. Из метода построения указанных точек следует также, что любые другие точки алфавита \bar{A}_3 не будут влиять на $\bar{B}^{(0)}$. Если функция $g(x, y)$ имеет вид (1.31), то геометрически область $\bar{B}^{(0)}$ представляет собой шестиугольник, образованный перпендикулярами, проведенными к серединам отрезков $O\bar{a}(k)$, $O\bar{a}((r-1)k+1)$, $O\bar{a}(rk+1)$, $O\bar{a}'((r-1)k+1)$, $O\bar{a}'(rk+1)$, $O\bar{a}'(k)$. Заметим, что фигура $\bar{B}^{(0)}$ центрально-симметрична относительно начала координат, любые две ее противоположные стороны служат сторонами прямоугольника и, кроме того, площадь $\bar{B}^{(0)}$ при любом d_2 постоянна и равна $1/d_3$. Нетрудно показать также, что для всякого d_2 полученный шестиугольник можно вписать в круг, радиус R которого назовем радиусом шестиугольника. Этот радиус равен радиусу окружности, описанной вокруг точек O , $\bar{a}(k)$ и $\bar{a}(rk+1)$. Последние замечания и полученные ранее выражения для координат точек $\bar{a}(k)$ и $\bar{a}(rk+1)$ позволяют без труда вычислить этот радиус:

$$R = \frac{(1/2 d_3^2) \sqrt{[k^2 + (d_2 k - d_3)^2] \{(rk+1)^2 + [r(d_2 k - d_3) + \dots + d_2]^2\} \{[(r-1)k+1]^2 + [(r-1)(d_2 k - d_3) + d_2]^2\}}}{\dots}$$

где k и r определяются соотношениями (1.34) и (1.37).

Итак, вероятность правильного восстановления параметра k_3 дается формулой

$$P_{a_3} \{ \hat{k}_3 = k_3, k = 0 \} = \iint_{\bar{B}^{(0)}} g(x, y) dx dy, \quad (1.38)$$

где $g(x, y)$ определяется соотношением (1.31), а $\bar{B}^{(0)}$ обладает только что описанными свойствами.

Следующее утверждение дает возможность существенно упростить отыскание значения d_2 , максимизирующего вероятность (1.38).

Теорема 1.8. Вероятность правильного восстановления параметра k_3 , задаваемая формулой (1.38), является монотонно убывающей функцией радиуса R области $\bar{B}^{(0)}$.

Доказательство. Рассмотрим половины областей $\bar{B}_R^{(0)}$ и $\bar{B}_{R'}^{(0)}$, соответствующих радиусам R' и R'' , причем $R' < R''$ (рис. 9); нетрудно видеть, что $\bar{B}_R^{(0)}$ и $\bar{B}_{R'}^{(0)}$ можно рассматривать именно в таком повернутом состоянии. Ясно, что сумма площадей C_1 и C_2' равна площади C'' . Отобразив C_1 симметрично относительно OL и C_2' относительно OK , заметим, что эти области лежат «ближе» к началу координат, чем область C'' . Отсюда, принимая во внимание вид подынтегральной функции $q(x, y)$, получаем требуемое.

Замечание. График функции $R(P\{\hat{k}_3 = k_3\})$ от d_2 обладает симметрией: при $d_2' + d_2'' = d_3$ $R_{d_2'} = R_{d_2''}$ ($P_{d_2'}\{\hat{k}_3 = k_3\} = P_{d_2''}\{\hat{k}_3 =$

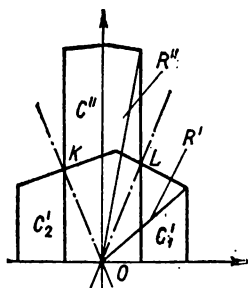


Рис. 9. Сравнение областей $\bar{B}_R^{(0)}$ и $\bar{B}_{R''}^{(0)}$ решающих схем, соответствующих различным d_2 (R' отвечает набору шкал 1, 5, 29; R'' — 1, 14, 29).

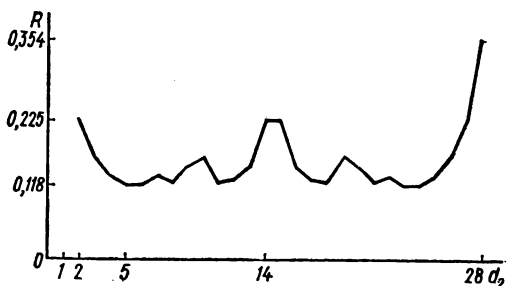


Рис. 10. Зависимость радиуса R области $B^{(0)}$ от изменения шкалы d_2 ($d_1 = 1$, $d_3 = 29$).

$= k_3\}^2)$. Другие значения d_2' и d_2'' , при которых выполняются последние неравенства, даются леммой 1.2.

Пример

Пусть $d_3 = 29$. Выбирая вначале $d_1 = 1$, получаем зависимость радиуса R области $\bar{B}^{(0)}$ решающей схемы рассматриваемого алфавитного метода от изменения масштабного коэффициента d_2 (рис. 10). Интересно заметить, что наибольших значений R достигает на концах области определения $d_2 = 2$, $d_3 = 1$. Следующий по величине локальный максимум находится в середине интервала изменения d_2 , еще меньшие — вблизи точек $d_3/3$ и $2d_3/3$ и т. д. Наименьшее значение R соответствует точкам d_2 , равным 5, 6, 23, 24. При этом согласно доказанной теореме вероятность $P_{d_2}\{k_3 = k_3\}$ правильного восстановления параметра k_3 максимальна. Таким образом, в рассматриваемом примере оптимальным набором масштабных коэффициентов будут, например, числа 1, 5, 29. В силу изложенного ранее оптимальными являются также наборы масштабных коэффициентов, полученные из указанного с помощью преобразования (1.32), например 9, 16, 29; 10, 21, 29 и др.

Для оптимальных наборов масштабных коэффициентов вероятность правильного восстановления параметра k_3 (устранения неоднозначности) при $\sigma = 0,04$ равна 0,96, в то время как для набора 1, 14, 29 она составляет 0,68.

Есть основания предполагать, что минимум R (или максимум $P\{\hat{k}_3 = k_3\}$) достигается при значении d_2 , лежащем вблизи $\sqrt{d_3}$ (при условии, что $d_1 = 1$). Однако установить этот факт аналитически не удалось ввиду весьма сложной зависимости R от d_2 .

Итак, решена задача оптимального выбора масштабных коэффициентов для трехшкальных измерений алфавитным методом при условии, что d_3 — простое число.

Предположим, что масштабный коэффициент d_3 — составное число. В зависимости от соотношений между числами d_1 , d_2 и d_3 решение поставленной оптимизационной задачи имеет два варианта.

В а р и а н т 1. Если хотя бы один из масштабных коэффициентов d_1 , d_2 является взаимно простым с d_3 (пусть для определенности $(d_1, d_3)^+ = 1$), то поиск оптимальных масштабных коэффициентов

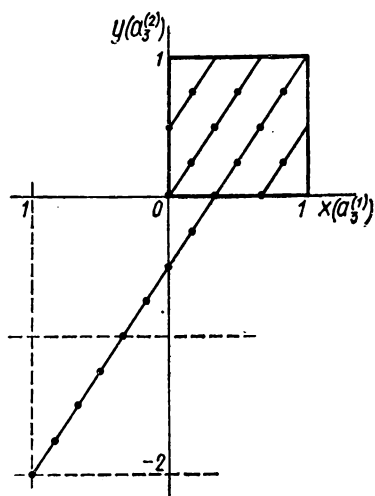


Рис. 11. Графический способ получения алфавита A_3 ($d_1 = 2$, $d_2 = 3$, $d_3 = 12$).

осуществляется с помощью метода, предложенного выше, после перехода от набора d_1, d_2, d_3 к набору $1, d_2^*, d_3$ с использованием преобразования (1.32). Указанный переход возможен, так как при условии $(d_1, d_3)^+ = 1$ существует единственное значение t , удовлетворяющее сравнению $d_1 t \equiv 1 \pmod{d_3}$.

В а р и а н т 2. Пусть теперь масштабные коэффициенты (d_1 и d_2) не являются взаимно простыми с d_3 . Тогда справедливо представление

$$d_1 = \alpha_1 q_1; \quad d_2 = \alpha_2 q_2; \quad d_3 = \alpha_3 q_1 q_2. \quad (1.39)$$

В (1.39) $(\alpha_1, \alpha_3)^+ = 1$. Если это не так, то НОД (α_1, α_3) может быть включен в q_1 . Из тех же соображений $(\alpha_2, \alpha_3)^+ = 1$. Потребуем также, чтобы $(q_1, q_2)^+ = 1$, $(\alpha_1, q_2)^+ = 1$, $(\alpha_2, q_1)^+ = 1$. Если хотя бы одно из последних требований нарушено, то $(d_1, d_2, d_3)^+ \neq 1$, и, следовательно, условие взаимно однозначного соответствия между значениями параметра k_3 и точками $a(k_3)$ алфавита A_3 не выполняется, а значит, последний, а вместе с ним и соответствующий набор масштабных коэффициентов d_1, d_2, d_3 не могут быть использованы при оценивании k_3 . Наконец, можно потребовать, чтобы $(\alpha_1, \alpha_2)^+ = 1$. Действительно, если $\alpha_1^* = \gamma \alpha_1$, $\alpha_2^* = \gamma \alpha_2$ и $\gamma \neq 1$, то от набора масштабных коэффициентов $\alpha_1^* q_1, \alpha_2^* q_2, \alpha_3 q_1 q_2$ с помощью преобразования (1.32) можно перейти к набору $\alpha_1 q_1, \alpha_2 q_2, \alpha_3 q_1 q_2$ и при этом алфавит не изменится. Следует заметить лишь, что γ должно быть попарно взаимно простым с q_1, q_2 и α_3 (в противном случае алфавит неоднозначен).

Теперь в случае, если d_3 — простое число, для варианта 2 проведем модификацию указанного выше метода поиска точек расширенного алфавита \bar{A}_3 , участвующих в образовании области $\bar{B}^{(0)}$, интегрируя по которой совместную плотность распределения вероятностей погрешностей ψ_1 и ψ_2 , можно получить $P\{\hat{k}_3 = k_3\}$.

Укажем вначале графический способ получения алфавита A_3 для масштабных коэффициентов вида (1.39). Соединим точки с координатами $(-d_1 + 1, -d_2 + 1)$ и $(1, 1)$ отрезком прямой и разделим его на d_3 равных частей (рис. 11). Части отрезка, расположенные в квадратах, образованных прямыми $x = -l_1$, $x = -l_1 + 1$, $y = -l_2$, $y = -l_2 + 1$ ($l_1 = 1, d_1 - 1, l_2 = 1, d_2 - 1$), перенесем параллельно в квадрат θ_2 . Перенесенные вместе с ними точки деления

будут составлять алфавит A_3 . Заметим, что согласно определению координаты точек алфавита равны:

$$a_3^{(1)} = \left\{ \frac{d_1}{d_3} k \right\}^+ = \left\{ \frac{d_1}{d_3 q_2} k \right\}^+, \quad a_3^{(2)} = \left\{ \frac{d_2}{d_3} k \right\}^+ = \left\{ \frac{d_2}{d_3 q_1} k \right\}^+, \quad (1.40)$$

$$k = \overline{0, d_3 q_1 q_2 - 1}.$$

Из графического способа построения алфавита A_3 следует, что точки расширенного алфавита \bar{A}_3 лежат на параллельных прямых $y = (d_2/d_1)(x - i/d_2)$, где i — целое число, на расстоянии $\sqrt{d_1^2 + d_2^2}/d_3$ друг от друга (их абсциссы — на расстоянии d_1/d_3). На прямой $y = (d_2/d_1)(x - 1/d_2)$ выберем точки $\bar{a}(k)$ и $\bar{a}(k+1)$ расширенного алфавита A_3 , ближайšie к точке $O(0, 0)$. Их координаты, как нетрудно показать, соответственно $x_k = kd_1/d_3$, $y_k = (d_2/d_1)(x_k - 1/d_2)$, $x_{k+1} = (k+1)d_1/d_3$, $y_{k+1} = (d_2/d_1)(x_{k+1} - 1/d_2)$, где

$$k = \left[\frac{d_2 d_3}{d_1 (d_1^2 + d_2^2)} \right]^+. \quad (1.41)$$

Через точки $a(1) = (d_1/d_3, d_2/d_3)$ и $\bar{a}(k+1) = (x_{k+1}, y_{k+1})$ проведем прямую, уравнение которой имеет вид

$$y = \frac{d_1 d_2 k - d_3}{d_1^2 k} x + \frac{1}{d_1 k}. \quad (1.42)$$

Заметим, что расстояние между абсциссами соседних точек алфавита на этой прямой равно kd_1/d_3 . На прямой (1.42) найдем ближайšie к началу координат точки алфавита $\bar{a}((r-1)k+1)$ и $\bar{a}(rk+1)$. Их абсциссы соответственно равны $(d_1/d_3) \times ((r-1)k+1)$ и $(d_1/d_3)(rk+1)$, где

$$r = \left[\frac{d_1 (d_2 (d_3 - d_1 d_2 k) - d_1^3 k)}{(d_3 - d_1 d_2 k)^2 + d_1^4 k^2} \right]^+ + 1, \quad (1.43)$$

а ординаты определяются из уравнения (1.42). Заметим, что (1.41) и (1.42) обобщают формулы (1.34) и (1.37).

Процедура нахождения точек расширенного алфавита \bar{A}_3 , участвующих в образовании области $\bar{B}^{(0)}$ для масштабных коэффициентов вида (2.23), закончена. Этими точками являются 0 , $\bar{a}(k)$, $\bar{a}((r-1)k+1)$, $\bar{a}(rk+1)$ и точки, симметричные трем последним относительно начала координат.

Теперь для отыскания значений d_1 и d_2 , максимизирующих вероятность $P\{\hat{k}_3 = k_3\}$ правильного устранения неоднозначности, можно полностью использовать результаты, полученные выше для случая, когда d_3 — простое число.

§ 2. Метод последовательного пересчета

В этом параграфе ставится задача нахождения оптимальных (по минимуму вероятности аномальной ошибки) значений масштабных коэффициентов фазометрической системы при устранении неоднозначности циклических измерений методом последовательного пересчета. Приводятся точная и приближенная методики решения поставленной задачи.

Как и в § 1, рассмотрим систему равенств

$$u = (k_1 + \varphi_1)'d_1 = \cdots = (k_m + \varphi_m)'d_m, \quad (2.1)$$

где u — восстанавливаемая величина, принимающая значения из интервала $[0, 1]$; $k_i = [d_i u]^+$, $\varphi_i = \{d_i u\}^+$ — соответственно целая и дробная части $d_i u$; масштабные коэффициенты d_i — заданные числа, удовлетворяющие соотношению $0 < d_1 < \dots < d_m$. Величина u подлежит оценке по наблюдаемым значениям $\hat{\varphi}_1, \dots, \hat{\varphi}_m$, при этом k_1, \dots, k_m неизвестны. Предполагается, что $\hat{\varphi}_i = \{\varphi_i + \psi_i\}^+$.

Как указывалось, метод последовательного пересчета задается следующим алгоритмом. В качестве оценки u в $(i + 1)$ -й итерации выбирают

$$\hat{u}_{i+1} = \frac{1}{d_{i+1}} [d_{i+1} \hat{u}_i - \varphi_{i+1} + 0,5]^+ + \frac{\hat{\varphi}_{i+1}}{d_{i+1}}; \quad (2.2)$$

$$\hat{u}_1 = \hat{\phi}_1/d_1, \quad i = \overline{1, m-1}, \quad d_1 \leq 1.$$

Формулы, аналогичные приведенным, изучались ранее в работах [97—99, 102, 103]. Полагая $\hat{u}_i = u + \delta_i$ и подставляя это выражение в (2.2), получаем последовательную формулу для определения ошибки δ_{i+1} в $(i + 1)$ -й итерации оценки \hat{u}_{i+1} через δ_i :

$$\delta_{i+1} = \frac{1}{d_{i+1}} [d_{i+1}\delta_i - \psi_{i+1} + 0,5]^+ + \frac{\psi_{i+1}}{d_{i+1}}; \quad (2.3)$$

$$\delta_i = -\frac{1}{d_i} [\varphi_i + \psi_i]^+ + \frac{\psi_i}{d_i}, \quad i = \overline{1, m-1}.$$

Решив (2.3), найдем ошибку δ_m оценки u с помощью \hat{u}_m :

$$\delta_m = \frac{1}{d_m} \left[\frac{d_m}{d_{m-1}} \left(\left[\frac{d_{m-1}}{d_{m-2}} \left(\dots \left(\left[\frac{d_3}{d_2} \left(\left[\frac{d_2}{d_1} (-[\varphi_1 + \psi_1]^+ + \psi_1) - [\psi_2 + 0,5]^+ + \psi_2 \right) - \psi_2 + 0,5 \right]^+ + \psi_3 \right) \dots \right) - \psi_{m-1} + 0,5 \right]^+ + \psi_{m-1} \right) - \psi_m + 0,5 \right]^+ + \psi_m/d_m. \quad (2.4)$$

Заметим, что (2.4) принимает простой вид, если отношение d_{l+1}/d_l — целое число. Тогда

$$\delta_m = -\frac{1}{d_1} [\varphi_1 + \psi_1]^+ + \sum_{i=1}^{m-1} \frac{1}{d_{i+1}} \left[\frac{d_{i+1}}{d_i} \psi_i - \psi_{i+1} + 0,5 \right]^+ + \frac{\psi_m}{d_m}. \quad (2.5)$$

Представим формулы (2.4) и (2.5) в виде

$$\delta_m = \Delta_m/d_m + \psi_m/d_m, \quad (2.6)$$

где Δ_m/d_m — ошибка, связанная с неоднозначностью восстановления u (аномальная ошибка), и ψ_m/d_m определяет точность оценки u с помощью \hat{u}_m .

Для ошибки, выраженной в форме (2.4) и (2.5), величина Δ_m имеет соответственно вид

$$\Delta_m = \left[\frac{d_m}{d_{m-1}} \left(\left[\frac{d_{m-1}}{d_{m-2}} \left(\dots \left(\left[\frac{d_3}{d_2} \left(\left[\frac{d_2}{d_1} (-[\varphi_1 + \psi_1]^+ + \psi_1) - [\psi_2 + 0,5]^+ + \psi_2 \right) - \psi_3 + 0,5 \right]^+ + \psi_3 \right) \dots \right) - \psi_{m-1} + 0,5 \right]^+ + \psi_{m-1}) - \psi_m + 0,5 \right] \right)^+ \quad (2.7)$$

И

$$\Delta_m = d_m \left(-\frac{1}{d_1} [\varphi_1 + \psi_1]^+ + \sum_{i=1}^{m-1} \frac{1}{d_{i+1}} \left[\frac{d_{i+1}}{d_i} \psi_i - \psi_{i+1} + 0,5 \right]^+ \right). \quad (2.8)$$

Теперь нетрудно заметить, что слагаемое 0,5 в соотношениях (2.2) вводится для существенного уменьшения вероятности ошибки неоднозначности восстановления u и соответствует тому случаю, когда величины ψ_i симметрично распределены и имеют среднее значение $M\psi_i = 0$.

Анализируя полученные представления ошибки δ_m , приходим к следующей естественной постановке задачи анализа и синтеза фазометрической системы.

Исходя из требуемой точности оценки u , задаем d_m . Выбираем $d_1 \leq 1$ и значение α , близкое к нулю. При фиксированных d_1 , d_m и α , используя совместное распределение вектора ошибок (ψ_1, \dots, ψ_m) , находим t и d_2, \dots, d_{m-1} так, чтобы выполнялось соотношение

$$P_{d_2, \dots, d_{m-1}} \{ \Delta_m = 0 \} \geq 1 - \alpha.$$

При этом, естественно, погрешность в оценке u с помощью \hat{u}_m равна ψ_m/d'_m с вероятностью, не меньшей $1 - \alpha$. Если наперед задается и

m , то задача сводится к отысканию значений d_2, \dots, d_{m-1} , максимизирующих $P_{d_2, \dots, d_{m-1}} \{ \Delta_m = 0 \}$ (здесь α задавать не нужно).

Заметим, что если существует совместная плотность вероятностей $f(t_1, \dots, t_m)$ вектора ошибок (ψ_1, \dots, ψ_m) , то

$$P_{d_2, \dots, d_{m-1}} \{ \Delta_m = 0 \} = \int_D \dots \int f(t_1, \dots, t_m) dt_1 \dots dt_m, \quad (2.9)$$

где

$$D = \left\{ (t_1, \dots, t_m) : \left[\frac{d_m}{d_{m-1}} \left(\left[\frac{d_{m-1}}{d_{m-2}} \left(\dots \left(\left[\frac{d_3}{d_2} \left(\left[\frac{d_2}{d_1} (-[\varphi_1 + t_1]^+ + t_1) - t_2 + 0,5 \right]^+ + t_2 \right) - t_3 + 0,5 \right]^+ + t_3 \right) \dots \right) - t_{m-1} + 0,5 \right]^+ + t_{m-1} \right) - t_m + 0,5 \right]^+ = 0 \right\}.$$

Явное задание области D через ограничения, налагаемые непосредственно на каждое t_i (типа $a_i \leq t_i < b_i$), покажем на следующем примере.

Пример

Заданы $m = 3$, d_1 и d_3 . Случайные величины ψ_i , $i = 1, 2, 3$, независимы и распределены по нормальному закону с параметрами $(0, \sigma_i)$. Предположим также, что переброс в первой шкале отсутствует ($[\varphi_1 + \psi_1]^+ = 0$). Это так, если φ_1 близко к $d_1/2$, а ψ_1 невелико. К тому же указанный переброс может быть легко обнаружен, если рассматривать φ_1 не из интервала $(0, d_1)$, а из более узкого интервала $(\varepsilon, d_1 - \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$. При этом

$$\Delta_3 = \left[\frac{d_3}{d_2} \left[\frac{d_2}{d_1} \psi_1 - \psi_2 + 0,5 \right]^+ + \frac{d_3}{d_2} \psi_2 - \psi_3 + 0,5 \right]^+$$

и область D будет иметь вид

$$D = \left\{ (t_1, t_2, t_3) : \left[\frac{d_3}{d_2} \left[\frac{d_2}{d_1} t_1 - t_2 + 0,5 \right]^+ + \frac{d_3}{d_2} t_2 - t_3 + 0,5 \right]^+ = 0 \right\}.$$

Нетрудно видеть, что можно также записать $D = \bigcup_{k=-\infty}^{\infty} D_k$, где D_k задается системой неравенств

$$\begin{aligned} k - 0,5 &\leq \frac{d_2}{d_1} t_1 - t_2 < k + 0,5; \\ -\frac{d_3}{d_2} k - 0,5 &\leq \frac{d_3}{d_2} t_2 - t_3 < -\frac{d_3}{d_2} k + 0,5. \end{aligned}$$

Теперь, принимая во внимание, что

$$f(t_1, t_2, t_3) = \prod_{i=1}^3 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i} \exp \left\{ -\frac{t_i^2}{2\sigma_i^2} \right\},$$

Рис. 12. Зависимость вероятности правильного устранения неоднозначности от изменения шкалы d_2 при фиксированных шкалах d_1 и d_3 .

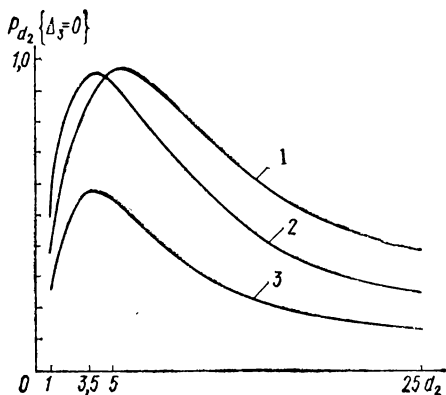
из соотношения (2.9) после несложных преобразований получаем

$$P_{d_2} \{ \Delta_3 = 0 \} = H \sum_{k=-\infty}^{\infty} \times$$

$$\times \int_{k-0,5}^{k+0,5} -\frac{d_3}{d_2} k+0,5 \exp \times$$

$$\times \int_{-\frac{d_2}{d_1} k-0,5}^{-\frac{d_2}{d_1} k+0,5} \exp \times$$

$$\times \left\{ -\frac{1}{2} [A u_1^2 + B u_1 u_2 + C u_2^2] \right\} du_1 du_2, \quad (2.10)$$



где H, A, B, C — функции d_2 и параметров $d_1, d_3, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ и определяются соотношениями

$$H = \frac{d_1}{2\pi \sqrt{Q}}; \quad A = \frac{d_1^2 (d_2^2 \sigma_3^2 + d_3^2 \sigma_2^2)}{d_2^2 Q}; \quad B = \frac{2d_1^2 d_3 \sigma_2^2}{d_2 Q};$$

$$C = \frac{d_1^2 \sigma_2^2 + d_2^2 \sigma_1^2}{Q}; \quad Q = d_1^2 \sigma_2^2 \sigma_3^2 + d_2^2 \sigma_1^2 \sigma_3^2 + d_3^2 \sigma_1^2 \sigma_2^2.$$

Заметим, что (2.10) представляет собой интеграл двухмерной нормальной плотности с координатами центра рассеивания $(0, 0)$, средними квадратичными отклонениями

$$\Sigma_1 = -\frac{d_2 \sqrt{Q}}{d_1} [(d_2^2 \sigma_3^2 + d_3^2 \sigma_2^2) (1 + d_1^2 d_3^2 \sigma_2^4)]^{-1/2},$$

$$\Sigma_2 = \sqrt{Q} [(d_1^2 \sigma_2^2 + d_2^2 \sigma_1^2) (1 + d_1^2 d_3^2 \sigma_2^4)]^{-1/2}$$

и коэффициентом корреляции

$$R = -d_1 d_3 \sigma_2^2 [1 + d_1^2 d_3^2 \sigma_2^4]^{-1/2}.$$

Отсюда следует, в частности, что в выражении (2.10) главное значение имеет слагаемое при $k = 0$, а остальные с ростом $|k|$ быстро убывают. Заметим, что вычисление интегралов типа (2.10) представляет определенные сложности, так как подынтегральная функция имеет большой пик в нуле.

Таблица 1

$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	$\sigma_1 = 0,02,$ $\sigma_2 = 0,04,$ $\sigma_3 = 0,06$
$d_{2\max}$	3,5	3,5	3,5	3,5	3,5	3,5	5,0
$\max P_{d_2} \{ \Delta_3 = 0 \}$	1,000	0,999	0,961	0,847	0,705	0,575	0,970

Значение d_2 , при котором вероятность отсутствия аномальной ошибки $P_{d_2} \{\Delta_3 = 0\}$ достигает максимума, удовлетворяет довольно сложному уравнению, в которое, помимо рациональных функций от d_2 , входят и функции, представляющие собой нормальную плотность и интегралы от нее. Поэтому данное уравнение не выписывается здесь явно, а задача максимизации (2.10) решается численно.

В табл. 1 приводятся вероятности $P_{d_2} \{\Delta_3 = 0\}$, соответствующие оптимальному значению d_2 , и само это значение масштабного коэффициента для $d_1 = 0,5$, $d_2 = 25$ при некоторых значениях σ_1 , σ_2 и σ_3 .

На рис. 12 приведена зависимость вероятности отсутствия аномальной ошибки $P_{d_2} \{\Delta_3 = 0\}$ от d_2 при $\sigma_1 = 0,02$; $\sigma_2 = 0,04$; $\sigma_3 = 0,06$ (кривая 1), $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 0,03$ (кривая 2) и $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 0,06$ (кривая 3). Заметим, что при значительных отклонениях d_2 от оптимального значения вероятность $P_{d_2} \{\Delta_3 = 0\}$ существенно уменьшается.

Рассмотрим приближенное решение примера с иной точки зрения. Пока не будем искать оптимальное значение параметра d_2 , а оценим лишь вероятность $P \{\Delta_3 = 0\}$ того, что параметр k_3 определяется правильно (аномальной ошибки нет). Дополнительно сделаем следующие предположения, незначительно ограничивающие общность рассуждений.

1. Дисперсии случайных величин ψ_i совпадают ($\sigma_i = \sigma$, $i = 1, 2, 3$).

2. Отношение d_{i+1}/d_i , $i = 1, 2$, постоянно и равно целому числу ($d_2/d_1 = d_3/d_2 = h$). Последнее условие (h — целое число), как указывалось ранее, приводит к тому, что Δ_3 имеет вид

$$\Delta_3 = h[h\psi_1 - \psi_2 + 0,5]^+ + [h\psi_2 - \psi_3 + 0,5]^+.$$

Вычислим теперь приближенно вероятность отсутствия аномальной ошибки:

$$\begin{aligned} P \{\Delta_3 = 0\} &= P \{h[h\psi_1 - \psi_2 + 0,5]^+ + [h\psi_2 - \psi_3 + 0,5]^+ = 0\} = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} P \{[h\psi_1 - \psi_2 + 0,5]^+ = n\}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [h\psi_2 - \psi_3 + 0,5]^+ = -hn &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} P \{n - 0,5 \leq \xi_1 < n + 0,5; \\ &\quad -hn - 0,5 \leq \xi_2 < -hn + 0,5\}, \end{aligned}$$

где $\xi_1 = h\psi_1 - \psi_2$, $\xi_2 = h\psi_2 - \psi_3$ представляют собой нормально распределенные случайные величины с параметрами 0 и $\sigma \sqrt{h^2 + 1} \approx h\sigma$. Заметим также, что при достаточно большом h ξ_1 определяется в основном случайной величиной ψ_1 , а ξ_2 — соответственно случайной величиной ψ_2 . Так как ψ_1 и ψ_2 независимы, то можно считать независимыми и случайные величины ξ_1 и ξ_2 . Нетрудно заметить, что коэффициент корреляции ξ_1 и ξ_2

$$r_{\xi_1, \xi_2} = -h/(h^2 + 1) \approx -1/h.$$

Учитывая сказанное, находим

$$P\{\Delta_3 = 0\} \approx \sum_{n=-\infty}^{\infty} P\{n - 0,5 \leq \xi_1 < n + 0,5\} P\{-hn - 0,5 \leq \xi_2 < -hn + 0,5\}.$$

В последней сумме при σ , достаточно малом, и h , достаточно большом,

$$P\{-hn - 0,5 \leq \xi_2 < -hn + 0,5\} \approx 0$$

для всех $n \neq 0$, и поэтому

$$P\{\Delta_3 = 0\} \approx [P\{-0,5 \leq \xi < 0,5\}]^2,$$

где ξ имеет то же распределение, что и ξ_1 и ξ_2 , а именно нормальное с параметрами 0 и $h\sigma$.

Переходя к стандартному распределению с параметрами (0, 1), получаем

$$P\{\Delta_3 = 0\} \approx [2\Phi(0,5/h\sigma)]^2$$

(аналогичная формула указывалась в работе [98]), где

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-z^2/2} dz.$$

Рассуждая подобным образом, можно получить следующую приближенную формулу для случая m шкал:

$$P\{\Delta_m = 0\} \approx [2\Phi(0,5/h\sigma)]^{m-1}. \quad (2.11)$$

В табл. 2 приведена зависимость вероятности $P\{\Delta_m = 0\}$ правильного восстановления параметра k_m как функции среднеквадратической ошибки σ случайных величин $\psi_i, i = \overline{1, m}$, при $d_1 = 0,5, h = 7, m = 3; 4$. Результаты получены с использованием приближенной формулы (2.11) и достаточно хорошо совпадают с данными табл. 1.

Таблица 2

σ	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06
$P\{\Delta_3 = 0\}$	1	0,9992	0,966	0,859	0,718	0,587
$P\{\Delta_4 = 0\}$	1	0,9988	0,949	0,796	0,608	0,450

Таблица 3

σ	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06
$P\{\Delta_3 = 0\}$	1	0,996	0,927	0,778	0,662	0,494
$P\{\Delta_4 = 0\}$	1	1	1	0,995	0,963	0,892

Используя только что описанную приближенную методику, покажем на примере, как добавление промежуточной шкалы увеличивает надежность правильного восстановления параметра k_m . Для оценки $P \{ \Delta_3 = 0 \}$ выберем $h = 8$, а для оценки $P \{ \Delta_4 = 0 \}$ — $h = 4$. Тогда в обоих вариантах последние шкалы совпадают и при $d_1 = 0,5$ равны 32. Зависимость указанных вероятностей от σ приведена в табл. 3.

Пусть теперь $d_{i+1}/d_i = h_i$ и $\sqrt{D}\psi_i = \sigma_i$, $i = \overline{1, m-1}$. Тогда формула (2.11) приобретает вид

$$P \{ \Delta_m = 0 \} \approx 2^{m-1} \prod_{i=1}^{m-1} \Phi(0,5/h_i \sigma_i). \quad (2.12)$$

Нетрудно видеть, что вероятность $P \{ \Delta_m = 0 \}$, задаваемая последним соотношением, достигает максимума при

$$h_k = \frac{1}{\sigma_k} \left(H \prod_{i=1}^{m-1} \sigma_i \right)^{1/(m-1)}, \quad k = \overline{1, m-1}, \quad (2.13)$$

где $H = \prod_{i=1}^{m-1} h_i = d_m/d_1 = \text{const}$. Формула (2.13) может быть использована в качестве первого приближения при выборе оптимального соотношения шкал. В частности, если $\sigma_i = \sigma$ для всех $i = \overline{1, m-1}$, то

$$h_k = H^{1/m-1} \quad \text{и} \quad d_k = (d_m/d_1)^{(k-1)/(m-1)} d_1.$$

Вычисленное по указанной приближенной методике при $\sigma_1 = 0,02$; $\sigma_2 = 0,04$; $\sigma_3 = 0,06$ и $d_1 = 0,5$; $d_3 = 25$ оптимальное значение d_2 равно 5, при этом $P \{ \Delta_3 = 0 \} = 0,975$, что хорошо согласуется с данными табл. 1.

Более подробно о погрешностях, связанных с применением приближенной формулы (2.12), сказано в § 3.

Заметим, что если d_1 не фиксировать, а лишь ограничиться условием $d_1 \leq 1$, то (2.12) принимает максимальное значение, если $d_1 = 1$ и d_2, \dots, d_{m-1} выбираются по формуле (2.13).

§ 3. Приближенные формулы вероятности правильного устранения неоднозначности для методов последовательного пересчета и алфавитного

Выше были приведены точные формулы вероятности правильного устранения неоднозначности с помощью методов последовательного пересчета и алфавитного. Существенным недостатком при практическом использовании этих формул является значительный объем вычислений при их реализации. Далее предлагаются простые приближенные формулы для подсчета указанной вероятности и дается оценка их погрешностей. Большинство результатов

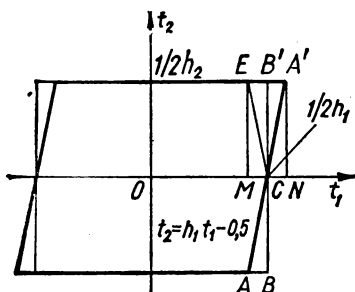


Рис. 13. Область D_0 .

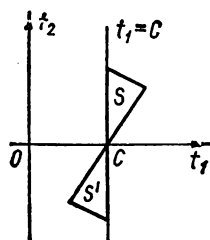


Рис. 14. Расположение областей S и S' .

получено для $m = 3$, хотя некоторые из них легко обобщаются на случай $m > 3$. Предполагается, что погрешности измерений в шкалах ψ_i , $i = 1, m-1$, — нормальные с параметрами 0 и σ_i — независимые случайные величины, а $\psi_m \equiv 0$. Последнее предположение не очень сильное, так как случайная величина ψ_m входит в соответствующие формулы с меньшим весом, чем остальные ψ_i .

Метод последовательного пересчета. Обозначим через $P\{\hat{k}_m = k_m\}$ вероятность правильного устранения неоднозначности циклических измерений. Как показано выше, для метода последовательного пересчета и рассматриваемых погрешностей ψ_i имеет место формула

$$P\{\hat{k}_3 = k_3\} = \iint_D \varphi(t_1, t_2) dt_1 dt_2, \quad (3.1)$$

где

$$\varphi(t_1, t_2) = \varphi_1(t_1) \varphi_2(t_2); \quad \varphi_i(t_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i} \exp\left\{-\frac{t_i^2}{2\sigma_i^2}\right\}; \quad (3.2)$$

$D = \bigcup_{k=-\infty}^{\infty} D_k$; D_k задается системой неравенств

$$\begin{aligned} k - 0,5 &\leq h_1 t_1 - t_2 < k + 0,5, \\ -h_2 k - 0,5 &\leq h_2 t_2 < -h_2 k + 0,5; \end{aligned}$$

$h_i = d_{i+1}/d_i$, d_i — масштабный коэффициент i -й шкалы. Чертеж области D_0 приведен на рис. 13. Заменим область D_0 на $\tilde{D}_0 = \{(t_1, t_2) : |t_1| \leq 1/2 h_1; |t_2| \leq 1/2 h_2\}$, и в качестве приближенной формулы вычисления вероятности $P\{\hat{k}_3 = k_3\}$ для метода последовательного пересчета запишем формулу

$$\tilde{P}\{\hat{k}_3 = k_3\} = \iint_{\tilde{D}_0} \varphi(t_1, t_2) dt_1 dt_2,$$

где $\varphi(t_1, t_2)$ определяется соотношениями (3.2).

Так как \tilde{D}_0 представляет собой прямоугольник со сторонами, параллельными главным осям рассеивания двумерной нормальной случайной величины ψ_1, ψ_2 , причем указанные оси совпадают с осями координат, то

$$\tilde{P} \{ \hat{k}_3 = k_3 \} = 4\Phi(1/2h_1\sigma_1) \Phi(1/2h_2\sigma_2), \quad (3.3)$$

где $\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z e^{-x^2/2} dx$ — нормированная функция Лапласа.

Оценим теперь погрешность вычисления вероятности правильного устранения неоднозначности для метода последовательного пересчета с помощью формулы (3.3).

Лемма 3.1. Пусть область S лежит в верхней полуплоскости правее линии $t_1 = C$, S' симметрична ей относительно точки C (рис. 14). Тогда

$$\int_S \int \varphi(t_1, t_2) dt_1 dt_2 < \int_{S'} \int \varphi(t_1, t_2) dt_1 dt_2,$$

где $\varphi(t_1, t_2)$ определяется соотношениями (3.2).

Доказательство леммы очевидно и потому не приводится.

Величина $\Delta^{(3)} = |P \{ \hat{k}_3 = k_3 \} - \tilde{P} \{ \hat{k}_3 = k_3 \}|$ представляет собой погрешность, возникающую при замене точной формулы (3.1) приближенной (3.3). Нетрудно видеть, что

$$0 < \Delta^{(3)} < \Delta_0^{(3)} + \Delta_1^{(3)}, \text{ где } \Delta_0^{(3)} = \tilde{P} \{ \hat{k}_3 = k_3 \} - P_0 \{ \hat{k}_3 = k_3 \}$$

(в силу леммы $\Delta_0^{(3)} > 0$);

$$P_0 \{ \hat{k}_3 = k_3 \} = \iint_{D_0} \varphi(t_1, t_2) dt_1 dt_2;$$

$$\Delta_1^{(3)} = P_1 \{ \hat{k}_3 = k_3 \} = \iint_{D'} \varphi(t_1, t_2) dt_1 dt_2; \quad D' = \bigcup_{k \neq 0} D_k.$$

Оценим $\Delta_0^{(3)}$. Очевидно (см. рис. 13), что

$$\begin{aligned} \Delta_0^{(3)} &= 2 \left[\iint_{\Delta ABC} \varphi(t_1, t_2) dt_1 dt_2 - \iint_{\Delta A'B'C'} \varphi(t_1, t_2) dt_1 dt_2 \right] \leq \\ &\leq 2 \left[\iint_{\square B'EMG} \varphi(t_1, t_2) dt_1 dt_2 - \iint_{\square A'B'CN} \varphi(t_1, t_2) dt_1 dt_2 \right] = \\ &= 2\Phi\left(\frac{1}{2h_2\sigma_2}\right) \left[2\Phi\left(\frac{1}{2h_1\sigma_1}\right) - \Phi\left(\frac{1}{2h_1\sigma_1} \left(1 - \frac{1}{h_2}\right)\right) - \right. \\ &\quad \left. - \Phi\left(\frac{1}{2h_1\sigma_1} \left(1 + \frac{1}{h_2}\right)\right) \right] = \Delta_0^{(3)*}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Для $\Delta_1^{(3)}$ справедлива следующая оценка:

$$\begin{aligned} \Delta_1^{(3)} &= \sum_{k \neq 0} \int_{-k-1/2h_2}^{-k+1/2h_2} \int_{1/h_1(t_2+k-0,5)}^{1/h_1(t_2+k+0,5)} \varphi(t_1, t_2) dt_1 dt_2 < \\ &< \sum_{k \neq 0} \int_{-k-1/2h_2}^{-k+1/2h_2} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t_1, t_2) dt_1 dt_2 < 2 \int_{1-1/2h_2}^{\infty} \varphi_2(t_2) dt_2 = \\ &= 2 [1/2 - \Phi((1 - 1/2h_2)/\sigma_2)] = \Delta_1^{(3)*}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Заметим, что даже при $h_2 = 1$ и $\sigma_2 = 0,1$ $\Delta_1^{(3)*} = 1 - 2\Phi(5) = 0$ с точностью до семи знаков после запятой.

Сформулируем полученный результат в виде теоремы.

Теорема 3.1. *Приближенная формула вероятностей правильного устранения неоднозначности циклических измерений для метода последовательного пересчета имеет вид (3.3), а ее погрешность удовлетворяет оценке $\Delta^{(3)} < \Delta_0^{(3)*} + \Delta_1^{(3)*} = \Delta^{(3)*}$, где $\Delta_0^{(3)*}$ и $\Delta_1^{(3)*}$ задаются соотношениями (3.4) и (3.5).*

Пример

Пусть $h_1 = h_2 = 10$, $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$. В табл. 4 приводятся значения вероятности $P\{\hat{k}_3 = k_3\}$ и верхней грани $\Delta^{(3)*}$ погрешности $\Delta^{(3)}$ в зависимости от σ .

Заметим, что формула (3.3) может использоваться не только для приближенного вычисления вероятности правильного устранения неоднозначности, но и для выбора оптимальных значений масштабных коэффициентов.

Обобщение (3.3) на m -мерный случай ($m > 3$) указывалось в § 2; оно имеет вид

$$\tilde{P}\{\hat{k}_m = k_m\} = 2^{m-1} \prod_{i=1}^{m-1} \Phi(1/2h_i\sigma_i), \quad (3.6)$$

Погрешность от замены $P\{\hat{k}_m = k_m\}$ на $\tilde{P}\{\hat{k}_m = k_m\}$ может быть вычислена последовательным применением результатов, полученных выше для случая $m = 3$. Укажем, например, процедуру оценивания $\Delta^{(4)} = |P\{\hat{k}_4 = k_4\} - \tilde{P}\{\hat{k}_4 = k_4\}|$. Как и ранее, $0 < \Delta^{(4)} \leq \Delta_0^{(4)} + \Delta_1^{(4)}$, где теперь

$$\Delta_0^{(4)} = \tilde{P}\{\hat{k}_4 = k_4\} - P_0\{\hat{k}_4 = k_4\} \quad (\Delta_0^{(4)} > 0);$$

Таблица 4

σ	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05
$\tilde{P}\{\hat{k}_3 = k_3\}$	1,0000	0,9754	0,8179	0,6222	0,4659
$\Delta^{(3)*}$	0,0000	0,0028	0,0042	0,0029	0,0016

$$P_0 \{ \hat{k}_4 = k_4 \} = \int \int \int_{D_0} \varphi(t_1, t_2, t_3) dt_1 dt_2 dt_3;$$

$$\varphi(t_1, t_2, t_3) = \varphi_1(t_1) \varphi_2(t_2) \varphi_3(t_3)$$

($\varphi_i(t_i)$ задаются соотношениями (3.2));

$$\Delta_1^{(4)} = P_1 \{ \hat{k}_4 = k_4 \} = \int \int \int_{D'} \varphi(t_1, t_2, t_3) dt_1 dt_2 dt_3, \quad D' = \bigcup_{(k,l) \neq (0,0)} D_{kl}$$

и D_{kl} определяется системой неравенств

$$\begin{aligned} k - 0,5 &\leq h_1 t_1 - t_2 < k + 0,5, \\ l - h_2 k - 0,5 &\leq h_2 t_2 - t_3 < l - h_2 k + 0,5, \\ -h_3 l - 0,5 &\leq h_3 t_3 < -h_3 l + 0,5. \end{aligned}$$

Заметим, что

$$P \{ \hat{k}_4 = k_4 \} = \int \int \int_D \varphi(t_1, t_2, t_3) dt_1 dt_2 dt_3, \quad (3.7)$$

где $D = \bigcup_{k,l=-\infty}^{\infty} D_{kl}$.

Для $\Delta^{(4)}$ имеем следующие оценки:

$$\begin{aligned} \Delta_0^{(4)} &= \int_{-1/2h_3}^{1/2h_3} \varphi_3(t_3) dt_3 \int_{-1/2h_2}^{1/2h_2} \varphi_2(t_2) dt_2 \int_{-1/2h_1}^{1/2h_1} \varphi_1(t_1) dt_1 - \\ &- \int_{-1/2h_3}^{1/2h_3} \varphi_3(t_3) dt_3 \int_{-1/2h_2+t_3/h_2}^{1/2h_2+t_3/h_2} \varphi_2(t_2) dt_2 \int_{-1/2h_1+t_2/h_1}^{1/2h_1+t_2/h_1} \varphi_1(t_1) dt_1. \end{aligned}$$

Добавляя и вычитая в последнем соотношении

$$\int_{-1/2h_3}^{1/2h_3} \varphi_3(t_3) dt_3 \int_{-1/2h_2+t_3/h_2}^{1/2h_2+t_3/h_2} \varphi_2(t_2) dt_2 \int_{-1/2h_1}^{1/2h_1} \varphi_1(t_1) dt_1$$

и оценивая полученные разности с помощью неравенства (3.4), находим

$$\begin{aligned} \Delta_0^{(4)} &\leq 4 \int_0^{1/2h_3} \varphi_3(t_3) \left\{ \Phi \left(\frac{1}{2h_2\sigma_2} + \frac{t_3}{h_2\sigma_2} \right) \left[2\Phi \left(\frac{1}{2h_1\sigma_1} \right) - \Phi \left(\frac{1}{2h_1\sigma_1} - \right. \right. \right. \\ &- \left. \left. \frac{1}{h_1\sigma_1} \left(\frac{1}{2h_2} + \frac{t_3}{h_2} \right) \right) - \Phi \left(\frac{1}{2h_1\sigma_1} + \frac{1}{h_1\sigma_1} \left(\frac{1}{2h_2} + \frac{t_3}{h_2} \right) \right) \right] \right\} dt_3. \end{aligned}$$

Функция, стоящая в фигурных скобках в правой части последнего неравенства, как нетрудно убедиться, монотонно возрастает при $0 \leq t_3 \leq 1/2h_3$, поэтому

$$\Delta_0^{(4)} \leq \Delta_0^{(4)*} = 4\Phi \left(\frac{1}{2h_3\sigma_3} \right) \Phi \left(\frac{1}{2h_2\sigma_2} + \frac{1}{2h_2h_3\sigma_2} \right) \left[2\Phi \left(\frac{1}{2h_1\sigma_1} \right) - \right.$$

$$\begin{aligned}
& -\Phi\left(\frac{1}{2h_1\sigma_1} - \frac{1}{2h_1h_2\sigma_1} - \frac{1}{2h_1h_2h_3\sigma_1}\right) - \\
& -\Phi\left(\frac{1}{2h_1\sigma_1} + \frac{1}{2h_1h_2\sigma_1} + \frac{1}{2h_1h_2h_3\sigma_1}\right)\Big]. \quad (3.8)
\end{aligned}$$

Оценка для $\Delta_1^{(4)}$ находится по аналогии со случаем $m = 3$ и имеет вид

$$\Delta_1^{(4)} < \Delta_1^{(4)*} = 2\left[1 - \Phi\left(\frac{1 - 1/2h_3}{\sigma_3}\right) - \Phi\left(\frac{1 - 1/2h_2 - 1/2h_2h_3}{\sigma_2}\right)\right]. \quad (3.9)$$

Заметим, что $\Delta_1^{(4)*} = 0$ с точностью до семи знаков после запятой даже при $h_2 = h_3 = 2$ и $\sigma_2 = \sigma_3 = 0,1$.

Итак, при $m = 4$ имеет место оценка $0 < \Delta^{(4)} < \Delta^{(4)*} + \Delta_1^{(4)*}$, где $\Delta_0^{(4)*}$ и $\Delta_1^{(4)*}$ определяются соотношениями (3.8) и (3.9).

Пример

При $h_1 = h_2 = h_3 = 10$, $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma$ и $m = 4$ табл. 5 дает значения верхней границы $\Delta^{(4)*}$ погрешности $\Delta^{(4)}$ при вычислении вероятности (3.7) с помощью формулы (3.6) в зависимости от σ .

Алфавитный метод. В § 1 указана точная формула вероятности правильного устранения неоднозначности этим методом при $m = 3$. Для нормальных независимых погрешностей ψ_1 и ψ_2 эта формула имеет вид

$$P\{\hat{k}_3 = k_3\} = \int\limits_{\bar{B}^{(0)}} \varphi_1(t_1) \varphi_2(t_2) dt_1 dt_2, \quad (3.10)$$

где $\varphi_i(t_i)$ определяются соотношениями (3.2), а область интегрирования $\bar{B}^{(0)}$ представляет собой вписанный в окружность шестиугольник $ABCA'B'C'$, противолежащие вершины которого симметричны относительно начала координат, а противоположные стороны могут служить таковыми же сторонами прямоугольника (рис. 15). Заметим также, что стороны шестиугольника AB , BC , CA' перпендикулярны к серединам отрезков $O\bar{a}(k)$, $O\bar{a}(rk + 1)$, $O\bar{a}((r - 1)k + 1)$, где $\bar{a}(k)$, $\bar{a}(rk + 1)$, $\bar{a}((r - 1)k + 1)$ — точки расширенного алфавита (их координаты приведены в § 1), и укажем, что $k = = [d_2d_3/(1 + d_2^2)]^+$.

Через середины AC' , $B'C'$ и BC , $A'C$ проведем соответственно прямые MN' и $M'N$. Получим прямоугольный четырехугольник

Таблица 5

σ	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05
$\Delta^{(4)*}$	0,0000	0,0061	0,0085	0,0052	0,0025

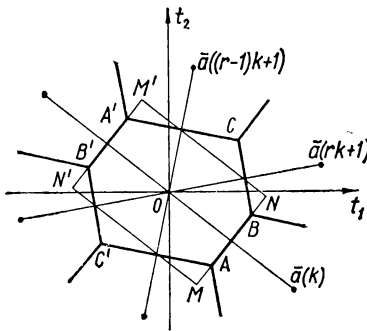


Рис. 15. Область интегрирования.

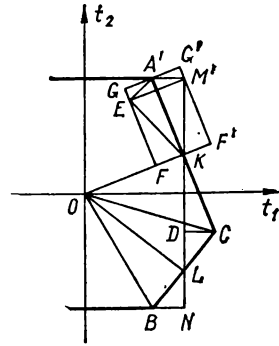


Рис. 16. Геометрические представления решающей схемы.

$MNM'N'$. Обозначим его через $\tilde{B}^{(0)}$ и, заменяя в (3.10) $\bar{B}^{(0)}$ на $\tilde{B}^{(0)}$, при $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ найдем приближенную формулу для вычисления вероятности правильного устранения неоднозначности с помощью алфавитного метода:

$$\tilde{P}\{\hat{k}_3 = k_3\} = \int\int_{\tilde{B}^{(0)}} \Phi_1(t_1) \Phi_2(t_2) dt_1 dt_2 = 4\Phi\left(\frac{l_1}{2\sigma}\right)\Phi\left(\frac{l_2}{2\sigma}\right). \quad (3.11)$$

В этой формуле

$$\begin{aligned} l_1 &= |MN'| = |O\bar{a}(k)| = \sqrt{(d_2 k - d_3)^2 + k^2/d_3}, \\ l_2 &= |MN| = 1/\sqrt{(d_2 k - d_3)^2 + k^2}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Соотношения (3.12) получены с использованием явных выражений координат точки $\bar{a}(k)$ и того факта, что $l_1 l_2 = 1/d_3$. Заметим, что при достаточно больших h_1 и h_2

$$k = \left[\frac{h_2}{1 + 1/h_1^2} \right]^+ \sim h_2, \quad \sqrt{(d_2 k - d_3)^2 + k^2} \sim h_2,$$

откуда следует, что $l_1 \sim 1/h_1$, а $l_2 \sim 1/h_2$. Поэтому формула (3.11) принимает вид

$$\tilde{P}\{\hat{k}_3 = k_3\} \simeq 4\Phi(1/2h_1\sigma)\Phi(1/2h_2\sigma). \quad (3.13)$$

Нетрудно заметить, что (3.13) в точности соответствует (3.3) при $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$, другими словами, при достаточно больших h_1 и h_2 приближенные формулы вероятности правильного устранения неоднозначности для обоих методов (последовательного пересчета и алфавитного) практически совпадают.

Найдем теперь оценку погрешности приближенной формулы (3.11). Рассмотрим $\delta = P\{\hat{k}_3 = k_3\} - \tilde{P}\{\hat{k}_3 = k_3\}$. В силу приведенной выше леммы $\delta \geq 0$. Рассмотрим элемент $\bar{B}^{(0)}$ решающей схе-

мы алфавитного метода и его приближение $\widetilde{B}^{(0)}$ и проведем дополнительные очевидные построения (рис. 16). Ради удобства введем также новые параметры: $\angle t_1OB = \theta$, $\angle t_1OC = x$, $OB = OC = OA' = R$. Заметим, что они легко могут быть выражены через старые параметры d_2, d_3 (или l_1, l_2), в частности, $R = (l_1^2 + 4l_2^2)/8l_2$, $\sin \theta/2 = l_1/\sqrt{l_1^2 + 4l_2^2}$. Нетрудно видеть, что

$$\delta = 2 \left[\iint_{\triangle DKC} \varphi_1(t_1) \varphi_2(t_2) dt_1 dt_2 - \iint_{\triangle A'M'K} \varphi_1(t_1) \varphi_2(t_2) dt_1 dt_2 + \right. \\ \left. + \iint_{\triangle DCL} \varphi_1(t_1) \varphi_2(t_2) dt_1 dt_2 - \iint_{\triangle LBN} \varphi_1(t_1) \varphi_2(t_2) dt_1 dt_2 \right].$$

Аналогично тому, как это было проделано для метода последовательного пересчета, получим

$$\begin{aligned} & \iint_{\triangle DKC} \varphi_1(t_1) \varphi_2(t_2) dt_1 dt_2 - \iint_{\triangle A'M'K} \varphi_1(t_1) \varphi_2(t_2) dt_1 dt_2 = \\ & = \iint_{\triangle EKA'} \varphi_1(t_1) \varphi_2(t_2) dt_1 dt_2 - \iint_{\triangle A'M'K} \varphi_1(t_1) \varphi_2(t_2) dt_1 dt_2 < \\ & < \iint_{\square G'A'KF} \varphi_1(t_1) \varphi_2(t_2) dt_1 dt_2 - \iint_{\square G'A'KF'} \varphi_1(t_1) \varphi_2(t_2) dt_1 dt_2 = \\ & = \Phi\left(\frac{R}{\sigma} |KA'| \right) \left\{ 2\Phi\left(\frac{R}{\sigma} |OK| \right) - \Phi\left[\frac{R}{\sigma} (|OK| - |FK|) \right] - \right. \\ & - \Phi\left[\frac{R}{\sigma} (|OK| + |FK|) \right] \Big\} = \Phi\left(\frac{R}{\sigma} \sin \frac{\theta+x}{2} \right) \left\{ 2\Phi\left(\frac{R}{\sigma} \cos \frac{\theta+x}{2} \right) - \right. \\ & - \Phi\left[\frac{R}{\sigma} \left(\cos \frac{\theta+x}{2} - \frac{1}{2} \sin \frac{\theta+x}{2} \sin(\theta-x) \right) \right] - \\ & \left. - \Phi\left[\frac{R}{\sigma} \left(\cos \frac{\theta+x}{2} + \frac{1}{2} \sin \frac{\theta+x}{2} \sin(\theta-x) \right) \right] \right\}. \end{aligned}$$

Таким же образом оценивается и разность

$$\iint_{\triangle DCL} \varphi_1(t_1) \varphi_2(t_2) dt_1 dt_2 - \iint_{\triangle LBN} \varphi_1(t_1) \varphi_2(t_2) dt_1 dt_2,$$

с тем лишь отличием, что x заменяется на $-x$, и поэтому

$$\begin{aligned} \delta & < 2\Phi\left(\frac{R}{\sigma} \sin \frac{\theta+x}{2} \right) \left\{ 2\Phi\left(\frac{R}{\sigma} \cos \frac{\theta+x}{2} \right) - \right. \\ & - \Phi\left[\frac{R}{\sigma} \left(\cos \frac{\theta+x}{2} - \frac{1}{2} \sin \frac{\theta+x}{2} \sin(\theta-x) \right) \right] - \\ & - \Phi\left[\frac{R}{\sigma} \left(\cos \frac{\theta+x}{2} + \frac{1}{2} \sin \frac{\theta+x}{2} \sin(\theta-x) \right) \right] \Big\} + \\ & + 2\Phi\left(\frac{R}{\sigma} \sin \frac{\theta-x}{2} \right) \left\{ 2\Phi\left(\frac{R}{\sigma} \cos \frac{\theta-x}{2} \right) - \right. \end{aligned}$$

$$- \Phi \left(\frac{R}{\sigma} \left[\cos \frac{\theta - x}{2} - \frac{1}{2} \sin \frac{\theta - x}{2} \sin (\theta + x) \right] \right) - \\ - \Phi \left(\frac{R}{\sigma} \left[\cos \frac{\theta - x}{2} + \frac{1}{2} \sin \frac{\theta - x}{2} \sin (\theta + x) \right] \right) \Bigg\}.$$

Можно показать, что функция, стоящая в правой части последнего неравенства, достигает максимального значения при $x = 0$, и, следовательно,

$$\delta < 4\Phi \left(\frac{R}{\sigma} \sin \frac{\theta}{2} \right) \left\{ 2\Phi \left(\frac{R}{\sigma} \cos \frac{\theta}{2} \right) - \Phi \left(\frac{R}{\sigma} \cos^3 \frac{\theta}{2} \right) - \right. \\ \left. - \Phi \left[\frac{R}{\sigma} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \right] \right\}.$$

Принимая во внимание связь между R , φ и l_1 , l_2 , указанную выше, имеем окончательно

$$\delta < \delta^* = 4\Phi \left(\frac{l_1 \sqrt{l_1^2 + 4l_2^2}}{8\sigma l_2} \right) \left[2\Phi \left(\frac{\sqrt{l_1^2 + 4l_2^2}}{4\sigma} \right) - \right. \\ \left. - \Phi \left(\frac{\sqrt{l_1^2 + 4l_2^2}}{4\sigma} - \frac{l_1^2}{4\sigma \sqrt{l_1^2 + 4l_2^2}} \right) - \Phi \left(\frac{\sqrt{l_1^2 + 4l_2^2}}{4\sigma} + \frac{l_1^2}{4\sigma \sqrt{l_1^2 + 4l_2^2}} \right) \right], \quad (3.14)$$

где l_1 и l_2 даются формулами (3.12).

Заметим, что полученные оценки погрешностей приближенных формул вероятности правильного устранения неоднозначности для методов последовательного пересчета и алфавитного идентичны по структуре.

Итак, доказано следующее утверждение.

Теорема 3.2. *Приближенная формула вероятности правильного устранения неоднозначности для алфавитного метода имеет вид (3.11), а ее погрешность оценивается неравенством (3.14).*

Таблица 6

σ	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05
$\tilde{P} \{ \hat{k}_3 = k_3 \}$ δ^*	1,0000 0,0000	0,9746 0,0134	0,8147 0,0236	0,6187 0,0164	0,4627 0,0098

Таблица 7

σ	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05
δ^*	0,0000	0,0000	0,0005	0,0027	0,0051

Пример

Пусть $d_1 = 1, d_2 = 10, d_3 = 101, \sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$. Тогда $h_1 = 10, h_2 = 10,1$, а вероятность $P\{\hat{k}_3 = k_3\}$ и оценка δ^* ее погрешности в зависимости от σ представлены в табл. 6 (ср. с табл. 4).

В табл. 7 приведены значения δ^* для случая $d_1 = 1, d_2 = 6, d_3 = 29 (h_i \sim 5)$ в зависимости от $\sigma = \sigma_1 = \sigma_2$.

Используя формулу (3.11), можно найти величину \tilde{d}_2^* , максимизирующую вероятность правильного устранения неоднозначности для алфавитного метода (разумеется, приближенно). Очевидно, чем ближе прямоугольник $MNM'N'$ (см. рис. 16) к квадрату, тем больше $\tilde{P}\{\hat{k}_3 = k_3\}$. Поэтому значение \tilde{d}_2^* может быть найдено из условия

$$|l_1 - l_2| \rightarrow \min_{d_2 = 2, d_3 - 1}.$$

Нахождение \tilde{d}_2^* (квазиоптимального значения масштабного коэффициента d_2) из последнего соотношения значительно проще, чем поиск d_2^* , дающего максимум точной вероятности $P\{\hat{k}_3 = k_3\}$. И хотя для алфавитного метода \tilde{d}_2^* может сильно отличаться от d_2^* , все же $\tilde{P}(\tilde{d}_2^*) \sim P(d_2^*)$, что справедливо в силу очевидных соотношений $P(d_2^*) \geq P(\tilde{d}_2^*) \geq \tilde{P}(\tilde{d}_2^*) \geq \tilde{P}(d_2^*)$ и близости $P(d_2^*)$ к $\tilde{P}(d_2^*)$. Заметим также, что при $d_3 = d_2^2 + 1$ выполняется $|l_1 - l_2| = 0$, поэтому если $d_2 = \sqrt{d_3 - 1}$ — целое число, то оно дает максимум вероятности (3.11), на что указывалось в конце § 1.

Некоторые родственные вопросы, рассматриваемые с точки зрения теории кодирования (безотносительно к проблеме устранения неоднозначности), обсуждались в работе [23].

§ 4. Надежность устранения неоднозначности при наличии возмущений масштабных коэффициентов шкал

Приведем точные и приближенные формулы для вычисления вероятности правильного устранения неоднозначности методом последовательного пересчета для случая, когда возмущениям подвержены не только фазы φ_i , но и масштабные коэффициенты d_i . При этом рассмотрим задачу оптимального выбора масштабных коэффициентов шкал. Аналогичные вопросы обсуждаются для алфавитного метода.

В системе уравнений

$$x = (k_1 + \varphi_1)/d_1 = \dots = (k_m + \varphi_m)/d_m \quad (4.1)$$

величины k_i, φ_i, d_i определяются так же, как и ранее. Обозначим измеренные значения φ_i и d_i через $\hat{\varphi}_i$ и \hat{d}_i соответственно и

предположим, что $\hat{\varphi}_i = \varphi_i + \psi_i$, $\hat{d}_i = d_i + \delta_i$, ψ_i и δ_i ($i = \overline{1, m}$) представляют собой независимые случайные величины, распределенные по нормальному закону, причем ψ_i имеет параметры $(0, \sigma(\varphi_i))$, а δ_i — $(0, \sigma(d_i))$.

Для оценки параметра k_m применим метод последовательного пересчета, задаваемый рекуррентными соотношениями, которые для рассматриваемого случая запишем в виде

$$\hat{k}_{i+1} = [\hat{h}_i(\hat{k}_i + \hat{\varphi}_i) - \hat{\varphi}_{i+1} + \varepsilon]^+, \quad \hat{k}_1 = 0, \quad (4.2)$$

где $\varepsilon \in [0, 1]$ — величина, о выборе которой будет сообщено ниже, а $\hat{h}_i = \hat{d}_{i+1}/\hat{d}_i$.

Основная цель задачи в том, чтобы при сформулированных выше предположениях найти надежность устранения неоднозначности, выражаемую вероятностью $P\{\hat{k}_m = k_m\}$ правильного восстановления параметра k_m , и решить задачу оптимального выбора масштабных коэффициентов d_i с целью максимизации указанной надежности. Аналогичные задачи были решены выше, но при $\delta_i \equiv 0$, $i = \overline{1, m}$.

Сначала рассмотрим простейший случай, когда $m = 2$ и $\psi_i \equiv 0$. Из соотношений (4.1) следует

$$k_2 = [h_1\varphi_1 - \varphi_2 + \varepsilon]^+,$$

где $h_1 = d_2/d_1$, а из формул (4.2) находим

$$\begin{aligned} \hat{k}_2 &= [\hat{h}_1\varphi_1 - \varphi_2 + \varepsilon]^+ = [(\hat{h}_1 - h_1)\varphi_1 + h_1\varphi_1 - \varphi_2 + \varepsilon]^+ = \\ &= [(\hat{h}_1 - h_1)\varphi_1 + k_2 + \varepsilon]^+ = k_2 + [(\hat{h}_1 - h_1)\varphi_1 + \varepsilon]^+; \end{aligned}$$

поэтому

$$P\{\hat{k}_2 = k_2\} = P\{-\varepsilon \leq \eta < 1 - \varepsilon\} = \int_{-\varepsilon}^{1-\varepsilon} f_\eta(t) dt. \quad (4.3)$$

В выражении (4.3) $\eta = (\hat{h}_1 - h_1)\varphi_1$, а $f_\eta(t)$ представляет собой плотность распределения вероятностей случайной величины η и, как нетрудно заметить, зависит от параметров x , d_1 , d_2 , $\sigma(d_1)$, $\sigma(d_2)$. Можно показать, что

$$f_\eta(t) = [Kx/\varphi(t)] [1 + \sqrt{2\pi} \alpha(t) \Phi(\alpha(t)) \exp\{\alpha^2(t)/2\}], \quad (4.4)$$

Таблица 8

x	σ				
	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05
0	1	1	1	1	1
0,5	1	1	0,999	0,985	0,951
1	1	0,987	0,904	0,788	0,683

где

$$K = \frac{\sigma_1(d_1) \sigma(d_2) d_1}{\pi} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[\frac{d_1^2}{\sigma^2(d_1)} + \frac{d_2^2}{\sigma^2(d_2)} \right] \right\};$$

$$\varphi(t) = \sigma^2(d_1) (t + xd_2)^2 + x^2 \sigma^2(d_2) d_1^2;$$

$$\alpha(t) = \frac{1}{\sigma(d_1) \sigma(d_2)} \frac{\sigma^2(d_1) d_2 (t + xd_2) + \sigma^2(d_2) d_1^2 x}{\sqrt{\sigma^2(d_1) (t + xd_2)^2 + \sigma^2(d_2) d_1^2 x^2}};$$

$$\Phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^u e^{-t^2/2} dt.$$

Итак, при $m = 2$ и $\psi_i \equiv 0$ вероятность правильного устранения неоднозначности дается формулой (4.3), где $f_\eta(t)$ определяется выражением (4.4). Ясно, что даже в этом простом случае оптимальный выбор ε и подсчет вероятности $P\{\hat{k}_2 = k_2\}$ сопряжены с некоторыми трудностями. В табл. 8 приведены значения указанной вероятности при $\varepsilon = 0,5$, $d_1 = 1$, $d_2 = 10$, $\sigma(d_1) = \sigma(d_2) = \sigma$ в зависимости от x и σ . При $x = 0$ плотность $f_\eta(t)$ является δ -функцией Дирака и $P\{\hat{k}_2 = k_2\}_{x=0} = 1$. Кроме того, можно показать, что с точностью по крайней мере до 10^{-4} при указанных ранее значениях параметров

$$\int_{-0,5}^{0,5} f_\eta(t) dt = \Phi\left(\frac{C_1(x)}{\sigma}\right) + \Phi\left(\frac{C_2(x)}{\sigma}\right),$$

где $C_1(1) = 0,0476$; $C_2(1) = 0,0525$; $C_1(0,5) = 0,0905$; $C_2(0,5) = 0,1104$.

Учитывая сложность вычислений по формулам (4.3) и (4.4), попытаемся упростить нахождение вероятности правильного восстановления параметра k_m для случая $m = 2$, $\psi_i \equiv 0$.

Представим случайную величину η в виде

$$\eta = (\hat{h}_1 - h_1) \varphi_1 = ((d_2 + \delta_2)/(d_1 + \delta_1) - d_2/d_1) \varphi_1.$$

С точностью до $O(\delta_i)$ находим

$$\eta \approx \left(-\frac{d_2}{d_1^2} \delta_1 + \frac{1}{d_1} \delta_2 \right) \varphi_1 = (-h_1 \delta_1 + \delta_2) x$$

и, следовательно,

$$f_\eta(t) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma(d)} \exp \left\{ -\frac{t^2}{2\sigma^2(d)} \right\}, \quad (4.5)$$

где $\sigma(d) = x \sqrt{h_1^2 \sigma^2(d_1) + \sigma^2(d_2)} \approx x h_1 \sigma(d_1)$, если $\sigma(d_1) \approx \sigma(d_2)$.

Ясно, что для нормальной с параметрами $(0, \sigma(d))$ плотности $f_{\eta}(t)$, задаваемой формулой (4.5), вероятность $P\{\hat{k}_2 = k_2\}$ максимальна при $\varepsilon = 0,5$:

$$P\{\hat{k}_2 = k_2\} \approx 2\Phi(0,5/\sigma(d)) \simeq 2\Phi(0,5/xh_1\sigma(d_1)). \quad (4.6)$$

Интересно сравнить формулу (4.6) с аналогичной формулой при $m = 2$, полученной выше, для случая, когда $\delta_i \equiv 0$, $\psi_i \neq 0$. Очевидно, что влияние, оказываемое возмущением величины ψ_1 на надежность правильного устранения неоднозначности, имеет тот же порядок (по крайней мере, при $x \approx 1$), что и влияние возмущения масштабного коэффициента d_1 .

В табл. 9 приведены значения $P\{\hat{k}_2 = k_2\}$, вычисленные по формуле (4.6) при тех же значениях параметров, что и в табл. 8. Сопоставление данных табл. 8 и 9 показывает весьма высокую степень совпадения значений вероятности правильного устранения неоднозначности, полученных по точной и приближенной методикам.

Рассмотрим теперь общий случай ($m > 2$, $\psi_i \neq 0$) отыскания надежности устранения неоднозначности и решим задачу оптимального выбора масштабных коэффициентов d_i . Ввиду указанных ранее трудностей аналитического вывода и численного расчета точных соотношений воспользуемся приближенной методикой вывода простых формул вероятности правильного устранения неоднозначности, позволяющих, однако, получать нужные результаты с большой степенью точности.

Итак, пусть предварительно $m = 3$ и $\psi_i \neq 0$. Из соотношений (4.1) и (4.2) нетрудно определить

$$P\{\hat{k}_3 = k_3\} = P\{[\hat{h}_2[z_1 + \varepsilon]^+ + z_2 + \varepsilon]^+ = 0\},$$

где $z_1 = (\hat{h}_1 - h_1)xd_1 + \hat{h}_1\psi_1 - \psi_2$, $z_2 = (\hat{h}_2 - h_2)xd_2 + \hat{h}_2\psi_2 - \psi_3$, $h_i = d_{i+1}/d_i$, $h_i = \hat{d}_{i+1}/\hat{d}_i$, $i = 1, 2$. Далее найдем

$$\begin{aligned} P\{\hat{k}_3 = k_3\} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} P\{[z_1 + \varepsilon]^+ = n, 0 \leq \hat{h}_2 n + z_2 + \varepsilon < 1\} = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} P\{n - \varepsilon \leq z_1 < n + 1 - \varepsilon, -\varepsilon \leq z_2 + \hat{h}_2 n < 1 - \varepsilon\}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Таблица 9

x	σ				
	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05
0	1	1	1	1	1
0,5	1	1	0,999	0,988	0,954
1	1	0,988	0,904	0,789	0,683

С точностью до членов первого порядка малости относительно δ_i и ψ_i случайные величины z_1 и $z_2 + \hat{h}_2 n$ представим в виде

$$z_1 \approx \eta_1 = -h_1 x \delta_1 + x \delta_2 + h_1 \psi_1 - \psi_2;$$

$$z_2 + \hat{h}_2 n \approx \eta_2(n) + h_2 n; \quad (4.8)$$

$$\eta_2(n) = -h_2(x + n/d_2)\delta_2 + (x + n/d_2)\delta_3 + h_2\psi_2 - \psi_3.$$

В предположении, что величины h_i достаточно велики, а δ_i и ψ_i достаточно малы, из (4.7) и (4.8) получим

$$\begin{aligned} P\{\hat{k}_3 = k_3\} &\approx \sum_{n=-\infty}^{\infty} P\{n - \varepsilon \leq \eta_1 < n + 1 - \varepsilon, -h_2 n - \varepsilon \leq \eta_2(n) < \\ &< -h_2 n + 1 - \varepsilon\} \approx \sum_{n=-\infty}^{\infty} P\{n - \varepsilon \leq \eta_1 < n + 1 - \varepsilon\} P\{-h_2 n - \\ &- \varepsilon \leq \eta_2(n) < -h_2 n + 1 - \varepsilon\} \approx P\{-\varepsilon \leq \eta_1 < 1 - \varepsilon\} \times \\ &\times P\{-\varepsilon \leq \eta_2(0) < 1 - \varepsilon\}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Здесь η_1 и $\eta_2(n)$ будем считать практически независимыми (η_1 определяется в основном случайными величинами δ_1 и ψ_1 , $\eta_2(n)$ — величинами δ_2 и ψ_2 , а величины δ_i и ψ_i независимы по предположению), кроме того, при $n \neq 0$

$$P\{-h_2 n - \varepsilon \leq \eta_2(n) < -h_2 n + 1 - \varepsilon\} \approx 0.$$

Поскольку величины η_1 и $\eta_2(0)$ распределены нормально, из (4.9) следует, что вероятность правильного восстановления параметра k_3 максимальна при $\varepsilon = 0,5$:

$$P\{\hat{k}_3 = k_3\} \approx 4\Phi(0,5/\bar{\sigma}_1)\Phi(0,5/\bar{\sigma}_2),$$

где

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_i &= \sqrt{(h_i^2 \sigma^2(d_i) + \sigma^2(d_{i+1}))x^2 + h_i^2 \sigma^2(\varphi_i) + \sigma^2(\varphi_{i+1})} \approx \\ &\approx h_i \sqrt{\sigma^2(d_i)x^2 + \sigma^2(\varphi_i)}, \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

Рассуждая аналогично, при производном $m \geq 2$ получаем

$$P\{\hat{k}_m = k_m\} \approx 2^{m-1} \prod_{i=1}^{m-1} \Phi(0,5/h_i \bar{\sigma}_i), \quad (4.10)$$

где

$$\bar{\sigma}_i = \sqrt{\sigma^2(d_i)x^2 + \sigma^2(\varphi_i)}, \quad i = 1, m-1.$$

Формула (4.10) проста и, как показывают вычисления, характеризуется высокой степенью точности. Кроме того, она позволяет (в предположении, что $\sigma(d_i) = \sigma(d)$, $\sigma(\varphi_i) = \sigma(\varphi)$, а d_1 и d_m заданы) решить вопрос об оптимальном выборе масштабных коэффициентов d_2, \dots, d_{m-1} . Нетрудно убедиться, что справедливо такое

утверждение: максимальное значение вероятности $P \{ \hat{k}_m = k_m \}$ достигается при $h_i = h = \text{const}$, другими словами, если d_1, \dots, d_m образуют геометрическую прогрессию

$$d_k = (d_m/d_1)^{(k-1)/(m-1)} d_1, \quad k = \overline{2, m-1}.$$

Анализируя формулу (4.10), можно сделать следующие выводы. При наличии возмущений масштабных коэффициентов шкал надежность устранения неоднозначности методом последовательного пересчета убывает с возрастанием x . Соответствующие вычисления при определенных наборах параметров приведены в табл. 10 ($m = 2$, $h = 10$, $\sigma(d_i) = \sigma(\varphi_i) = \sigma$) и 11 ($m = 4$, $h_i = 10$, $\sigma(d_i) = \sigma(\varphi_i) = \sigma$).

Согласно формуле (4.10) метод последовательного пересчета разбивается на $m - 1$ этапов, в некотором смысле независимых друг от друга. На каждом из этих этапов, связанных с парами d_i, d_{i+1} , вероятность устранения неоднозначности уменьшается в γ_i раз, где $\gamma_i = 2\Phi(0,5/h_i\bar{\sigma}_i)$. Если при этом $\bar{\sigma}_i$ увеличится в некоторое число раз, то для неизменности $P \{ \hat{k}_m = k_m \}$ величина h_i должна быть уменьшена во столько же раз.

При $\sigma(d_i) = 0$, т. е. при отсутствии возмущений масштабных коэффициентов шкал, формула (4.10) совпадает с (2.12).

Заметим, что если математические ожидания $M\hat{d}_i = d_i$ известны, то вместо формулы (4.2) можно пользоваться формулой

$$\hat{k}_{i+1} = [h_i(\hat{k}_i + \tilde{\varphi}_i) - \tilde{\varphi}_{i+1} + \varepsilon]^+, \quad \hat{k}_1 = 0, \quad (4.11)$$

где $\tilde{\varphi}_i = \varphi_i + \psi_i - x\delta_i$. При этом в отличие от формулы (4.2), где возмущения δ_i масштабных коэффициентов d_i входят в \hat{h}_i , в формуле (4.11) эти возмущения влияют на погрешности, накладываемые на φ_i . Это можно объяснить следующим образом. Из (4.1) имеем

Таблица 10

x	σ				
	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05
0	1	0,988	0,904	0,789	0,683
0,5	1	0,975	0,864	0,736	0,629
1	1	0,923	0,762	0,623	0,520

Таблица 11

x	σ				
	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05
0	1	0,964	0,739	0,491	0,319
0,5	1	0,926	0,645	0,399	0,248
1	0,999	0,786	0,442	0,242	0,141

$k_i + \varphi_i = d_i x$. Подставив сюда вместо φ_i и d_i их наблюдаемые значения, получим $k_i + \varphi_i + \psi_i = d_i x + \delta_i x$. Последнее соотношение и позволяет считать, что d_i не возмущены, а погрешности ψ_i — $\delta_i x$ накладываются на φ_i . Отсюда, используя результаты § 2, сразу получим формулу (4.10) и для оценки величины \hat{k}_m , задаваемой соотношением (4.11).

В предыдущем параграфе был сделан вывод о том, что вероятности правильного устранения неоднозначности для методов последовательного пересчета и алфавитного практически одинаковы. В настоящем параграфе показано, что влияние возмущений масштабных коэффициентов на надежность устранения неоднозначности с помощью метода последовательного пересчета эквивалентно влиянию погрешностей, накладываемых на фазы. Сказанное позволяет сделать вывод, что возмущения масштабных коэффициентов аналогичным образом действуют и в методе последовательного пересчета, и в алфавитном.

§ 5. Декодирование по минимуму расстояния

Вначале рассмотрим данный алгоритм применительно к трехшкальной измерительной системе. Пусть

$$u = (k_1 + \varphi_1)/d_1 = (k_2 + \varphi_2)/d_2 = (k_3 + \varphi_3)/d_3,$$

где k_i и φ_i ($i = 1, 2, 3$) определяются как и ранее.

Найдем формулы оценки параметра k_3 , выражающиеся через измеренные значения $\hat{\varphi}_1, \hat{\varphi}_2, \hat{\varphi}_3$ фаз $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ ($\hat{\varphi}_i = \{\varphi_i + \psi_i\}^+$, $i = 1, 2, 3$) и масштабные коэффициенты d_1, d_2, d_3 при некоторых предположениях относительно d_i и ψ_i с использованием алфавитных решающих схем.

Предположим, что масштабные коэффициенты d_1, d_2, d_3 представляют собой целые числа, расположенные в возрастающем порядке, d_3 — фиксированное простое число, $d_1 = 1$. Последнее требование лишь упрощает рассуждения, но не ограничивает общности результатов (см. по этому поводу § 1). Случай, когда d_3 — составное число, будет рассмотрен во второй части параграфа.

Как указывалось, метод максимального правдоподобия, применяемый для отыскания оценки \hat{k}_3 , разбивает квадрат θ_2 — область значений двухмерной статистики \hat{b}_3 и точек $a(k_3)$ алфавита A_3 на те либо иные (в зависимости от распределения вероятностей случайных величин ψ_i) элементы решающей схемы $B^{(k_3)}$, $k_3 = 0, \overline{d_3 - 1}$. Само решающее правило кратко записывается в виде

$$\hat{b}_3 \Rightarrow B^{(\hat{k}_3)} \Rightarrow a(\hat{k}_3) \Rightarrow \hat{k}_3. \quad (5.1)$$

Сформулируем эквивалентную постановку задачи оценки параметра k_3 и правила, решающего эту задачу. Метод максимального правдоподобия, распределение вероятностей погрешностей ψ_i

и алфавит порождают в Θ_2 метрику с расстоянием между точками $\rho(\cdot, \cdot)$ такую, что отыскание \hat{k}_3 равносильно минимизации в целых числах функционала $\rho(\hat{b}_3, a(k_3))$. Последняя задача — это задача целочисленного программирования. Решающее правило задается при этом соотношением

$$\rho(\hat{b}_3, a(\hat{k}_3)) = \min_{k_3=\overline{0, d_3-1}} \rho(\hat{b}_3, a(k_3)). \quad (5.2)$$

Например, если ψ_1, ψ_2 — независимые нормально распределенные случайные величины с параметрами $(0, \sigma)$, $\psi_3 \equiv 0$, то $B^{(k_3)}$ — это шестиугольники, метод построения и свойства которых описаны в § 1, а выражение (5.2) или (5.1) описывает принцип декодирования по минимуму евклидова расстояния. Если ψ_1 и ψ_2 — равномерно распределенные случайные величины со специальными параметрами, зависящими от d_1 , то $B^{(k_3)}$ представляют собой прямоугольники со сторонами, параллельными координатным осям.

Для дальнейшего изложения понадобятся следующие леммы.

Лемма 5.1. Для набора масштабных коэффициентов $1, d_2, d_3$ (d_3 — простое число) точки алфавита A_3 совпадают с точками пересечения прямых семейств вида

$$\alpha_l x + \beta_l y = i_l, \quad l = 1, 2, 3, \quad (5.3)$$

где $i = 0, \pm 1, \dots$, а коэффициенты α_l и β_l — целые числа:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= d_3 - d_2 k, \quad \alpha_2 = d_3 r - d_2 (kr + 1), \quad \alpha_3 = d_3 (r + 1) - \\ &\quad - d_2 (k(r + 1) + 1), \\ \beta_1 &= k, \quad \beta_2 = kr + 1, \quad \beta_3 = k(r + 1) + 1, \end{aligned} \quad (5.4)$$

величины k и r определяются формулами

$$k = \left[\frac{d_2 d_3}{d_2^2 + 1} \right]^+, \quad r = \left[\frac{d_2 (d_3 - d_2 k) - k}{(d_3 - d_2 k)^2 + k^2} \right]^+ \quad (5.5)$$

Доказательство следует из рассмотренных в § 1 геометрических свойств алфавитов. Заметим лишь, что прямые каждого из трех семейств, проходящие через точку $a(k_3)$, проходят также через точки алфавита, участвующие в образовании области $B^{(k_3)}$.

Лемма 5.2. Пусть i_l -я прямая задана уравнением $\alpha_l x + \beta_l y = i_l$, а координатами точки C являются C_1 и C_2 . Тогда номер ближайшей к точке C прямой определяется формулой

$$\hat{i}_l = [\alpha_l C_1 + \beta_l C_2 + 0,5]^+. \quad (5.6)$$

Доказательство следует из того, что всегда существует номер i_l^* такой, что $i_l^* \leq \alpha_l C_1 + \beta_l C_2 < i_l^* + 1$. Выбор ближайшей прямой (с номером i_l^* или $i_l^* + 1$) осуществляется с помощью очевидной операции (5.6).

Сформулируем и докажем теорему, дающую простой, основанный на принципе декодирования по минимуму расстояния, метод отыскания оценки параметра k_3 для случая, когда погрешности ψ_i нормально распределены.

Теорема 5.1. Пусть $d_1 = 1$, d_3 — простое число, ψ_1 и ψ_2 — нормально распределенные с параметрами $(0, \sigma)$ случайные величины, $\psi_3 \equiv 0$. Предположим, что (x_{mn}, y_{mn}) , $m, n = 1, 2, 3$, $m \neq n$, являются решением систем уравнений

$$\begin{aligned}\alpha_m x + \beta_m y &= \hat{i}_m, \\ \alpha_n x + \beta_n y &= \hat{i}_n,\end{aligned}\tag{5.7}$$

где α_i, β_i определяются соотношениями (5.4), а \hat{i}_i — формулой (5.6), в которой $C = \hat{b}_3$. Пусть также \hat{x}_{mn} такое, что для евклидова расстояния $\rho(., .)$ выполняется соотношение

$$\begin{aligned}\rho(\hat{b}_3, (\hat{x}_{mn}, \hat{y}_{mn})) &= \min \rho(\hat{b}_3, (x_{mn}, y_{mn})), \\ m, n &= 1, 2, 3, \quad m \neq n.\end{aligned}\tag{5.8}$$

Тогда оценка параметра k_3 решающего правила (5.1), полученная методом декодирования по минимуму расстояния, имеет вид

$$\hat{k}_3 \equiv d_3 \hat{x}_{mn} \pmod{d_3}.\tag{5.9}$$

Доказательство. В силу сделанного ранее замечания задача нахождения оценки \hat{k}_3 по статистике \hat{b}_3 , зависящей от наблюдаемых значений $\hat{\varphi}_i$, в случае нормальных погрешностей ψ_i заключается в отыскании точки алфавита $a(\hat{k}_3)$, ближайшей (в смысле евклидова расстояния ρ) к точке \hat{b}_3 . Для решения последней задачи найдем вначале прямые семейств (5.3), на которых расположены точки алфавита и к которым точка \hat{b}_3 ближе всего. В силу леммы 5.2 их номера даются формулой (5.6). Уравнения (5.7), таким образом, определяют три точки алфавита, лежащие на кратчайшем расстоянии от \hat{b}_3 . Та из них, которая ближе других к \hat{b}_3 (обозначим ее через $a(\hat{k}_3)$), и является, очевидно, искомой точкой. Ее абсцисса $a^{(1)}(\hat{k}_3)$ равна \hat{x}_{mn} (5.8), а так как по определению $a^{(1)}(\hat{k}_3) = \{d_1 \hat{k}_3 / d_3\}^+ = \hat{k}_3 / d_3$, то справедливость формулы (5.9) установлена.

Замечание. Сравнение по модулю d_3 в (5.9) необходимо, так как некоторые точки пересечения рассматриваемых выше прямых могут выходить за края квадрата θ_2 и приходится расширять алфавит.

Укажем, что системы уравнений (5.7) могут иметь одно и то же решение. Это соответствует тому, что ближайшие к \hat{b}_3 прямые пере-

секаются в одной точке. В этом случае процедура (5.8), естественно, излишня. Нетрудно показать также, что справедливо равенство

$$x_{ml} = (\beta_n \hat{i}_m - \beta_m \hat{i}_n) / d_3.$$

Пример

Пусть $d_1 = 1$, $d_2 = 5$, $d_3 = 29$, $\hat{b}_2^{(1)} = 9/29$, $\hat{b}_3^{(2)} = 5/29$. Согласно теореме 5.1 процедура нахождения оценки \hat{k}_3 выполняется следующим образом. По формулам (5.3) — (5.5) находим уравнения прямых $4x + 5y = i_1$, $-5x + y = i_2$, $-x + 6y = i_3$. По формуле (5.6) определяем номера ближайших к точке $(9/29, 5/29)$ прямых:

$$\begin{aligned}\hat{i}_1 &= [4 \cdot 9/29 + 5 \cdot 5/29 + 1/2]^+ = 2, \\ \hat{i}_2 &= [-5 \cdot 9/29 + 5/29 + 1/2]^+ = -1, \\ \hat{i}_3 &= [-9/29 + 6 \cdot 5/29 + 1/2]^+ = 1.\end{aligned}$$

Система уравнений $4x + 5y = 2$, $-5x + y = -1$, $-x + 6y = 1$ совместна и определяет точку алфавита с абсциссой $7/29$. Следовательно, в силу (5.9) $\hat{k}_3 = 7$.

Полученные результаты справедливы, если масштабный коэффициент d_3 точной шкалы — простое число. Предположим, что d_3 — составное число, и решим приведенные выше задачи для этого случая.

Как указывалось в § 1, для составного d_3 достаточно рассмотреть масштабные коэффициенты d_i , $i = 1, 2, 3$, вида

$$d_1 = \gamma_1 q_1, \quad d_2 = \gamma_2 q_2, \quad d_3 = \gamma_3 q_1 q_2, \quad (5.10)$$

где $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, q_1, q_2$ — целые числа; $(\gamma_1, \gamma_2)^+ = 1$; $(\gamma_1, \gamma_3)^+ = 1$; $(\gamma_2, \gamma_3)^+ = 1$; $(\gamma_1, q_2)^+ = 1$; $(\gamma_2, q_1)^+ = 1$; $(q_1, q_2)^+ = 1$.

Справедливо следующее вспомогательное утверждение, аналогичное лемме 5.1.

Лемма 5.3. Для набора масштабных коэффициентов (5.10) точки алфавита A_3 совпадают с точками пересечения прямых семейств

$$\alpha_l x + \beta_l y = i_l, \quad l = 1, 2, 3, \quad (5.11)$$

где $i_l = 0, \pm 1, \dots$, а коэффициенты α_l и β_l определяются соотношениями

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= (d_3 - k d_1 d_2) / d_1, \quad \alpha_2 = (d_3 r - d_1 d_2 (kr + 1)) / d_1, \\ \alpha_3 &= (d_3 (r + 1) - d_1 d_2 (k(r + 1) + 1)) / d_1, \quad \beta_1 = k d_1, \\ \beta_2 &= (kr + 1) d_1, \quad \beta_3 = (k(r + 1) + 1) d_1\end{aligned} \quad (5.12)$$

и

$$k = \left[\frac{d_2 d_3}{d_1 (d_1^2 + d_2^2)} \right]^+, \quad r = \left[\frac{d_1 (d_2 (d_3 - d_1 d_2 k) - d_1^3 k)}{(d_3 - d_1 d_2 k)^2 + d_1^4 k^2} \right]^+. \quad (5.13)$$

Доказательство следует из рассмотренных в § 1 свойств алфавитов, соответствующих набору масштабных коэффициентов

(5.10) и вытекающих из геометрического способа их получения. Заметим, что прямые каждого из трех семейств (5.11), проходящие через точку $a_3(k_3)$, проходят также через точки алфавита, участвующие в образовании области $B_0^{(k_3)}$. Область $B_0^{(k_3)}$ — это элемент $B^{(k_3)}$ решающего правила (5.1), соответствующего случаю, когда погрешности ψ_1 и ψ_2 нормальны с параметрами $(0, \sigma)$ и независимы, а $\psi_3 \equiv 0$. Способ построения $B_0^{(k_3)}$ дан в § 1.

Следующее утверждение аналогично теореме 5.1.

Теорема 5.2. Пусть масштабные коэффициенты d_1, d_2, d_3 удовлетворяют соотношениям (5.10), а ψ_1 и ψ_2 — нормально распределенные с параметрами $(0, \sigma)$ случайные величины и $\psi_3 \equiv 0$. Предположим, что (x_{mn}, y_{mn}) , $m, n = 1, 2, 3, m \neq n$, являются решениями систем уравнений

$$\begin{aligned}\alpha_m x + \beta_m y &= \hat{i}_m, \\ \alpha_n x + \beta_n y &= \hat{i}_n,\end{aligned}\tag{5.14}$$

где α_i, β_i определяются соотношениями (5.12), а \hat{i}_i — формулой

$$\hat{i}_i = [\alpha_i \hat{b}_3^{(1)} + \beta_i \hat{b}_3^{(2)} + 0,5]^+.$$

Пусть также $(\hat{x}_{mn}, \hat{y}_{mn})$ — ближайшая точка (из указанных выше трех) к точке \hat{b}_3 . Тогда оценка \hat{k}_3 параметра k_3 решающей схемы, построенной по $B_0^{(k_3)}$ (принцип декодирования по минимуму расстояния), находится из системы сравнений

$$\begin{aligned}d_1 \hat{k}_3 &\equiv d_3 \hat{x}_{mn} \pmod{d_3}, \\ d_2 \hat{k}_3 &\equiv d_3 \hat{y}_{mn} \pmod{d_3}.\end{aligned}\tag{5.15}$$

Доказательство основано на леммах 5.2, 5.3 и проводится по схеме, предложенной при доказательстве теоремы 5.1.

Заметим, что с учетом (5.12) и (5.14)

$$x_{mn} = (\beta_n \hat{i}_m - \beta_m \hat{i}_n) / d_3, \quad y_{mn} = (\alpha_n \hat{i}_m - \alpha_m \hat{i}_n) / d_3,$$

поэтому (5.15) может быть переписано в виде

$$\begin{aligned}d_1 \hat{k}_3 &\equiv (\beta_n \hat{i}_m - \beta_m \hat{i}_n) \pmod{d_3}, \\ d_2 \hat{k}_3 &\equiv (\alpha_n \hat{i}_m - \alpha_m \hat{i}_n) \pmod{d_3},\end{aligned}$$

где $\hat{\alpha}_i$ и $\hat{\beta}_i$ соответствуют точке $(\hat{x}_{mn}, \hat{y}_{mn})$. При сделанных выше предположениях относительно масштабных коэффициентов вида (5.10) эта система совместна и имеет единственное решение.

Пример

Пусть $d_1 = 3$, $d_2 = 4$, $d_3 = 24$. Тогда $k = 1$, $r = 0$ и семейства прямых (5.11) имеют вид

$$4x + 3y = i_1, \quad -4x + 3y = i_2, \quad 6y = i_3.$$

Для $\hat{b}_3 (3/4, 9/16)$ получим

$$\hat{i}_1 = [4 \cdot 3/4 + 3 \cdot 9/16 + 0,5]^+ = 5, \quad \hat{i}_2 = [-4 \cdot 3/4 + 3 \cdot 9/16 + 0,5]^+ = -1, \\ \hat{i}_3 = [6 \cdot 9/16 + 0,5]^+ = 3.$$

Из систем уравнений (5.14), принимающих вид

$$\begin{cases} 4x + 3y = 5, \\ -4x + 3y = -1, \end{cases} \quad \begin{cases} 4x + 3y = 5, \\ 6y = 3, \end{cases} \quad \begin{cases} -4x + 3y = -1, \\ 6y = 3, \end{cases}$$

находим три точки $(3/4, 2/3)$, $(7/8, 1/2)$, $(5/8, 1/2)$, ближайшая из которых к точке $\hat{b}_3 (3/4, 9/16)$ имеет координаты $x = 3/4$, $y = 2/3$. Таким образом, система уравнений (5.15) имеет вид

$$3\hat{k}_3 \equiv 18 \pmod{24},$$

$$4\hat{k}_3 \equiv 16 \pmod{24},$$

откуда $\hat{k}_3 = 22$.

Выше предложен метод устранения неоднозначности циклических измерений в трехшкальных фазометрических системах, использующий принцип декодирования по минимуму расстояния, и приведены простые формулы оценки параметра k_3 для случая нормальных погрешностей измерений фаз. Непосредственное перенесение полученных результатов на m -шкальные ($m \geq 3$) системы затруднено ввиду громоздкости аналитических формул, используемых для записи соответствующего решающего правила (в частности, формул (5.4), (5.5), (5.12), (5.13), определяющих коэффициенты α_i и β_i систем уравнений (5.7) и (5.14), по сути задающих эти правила). Далее приводятся простые алгоритмы, позволяющие выводить решающие правила, реализующие принцип декодирования по минимуму расстояния для произвольных m -шкальных фазометрических систем.

Пусть измеренные значения $\hat{\varphi}_i$ фаз φ_i выражаются формулой $\hat{\varphi}_i = \{\varphi_i + \psi_i\}^+$, где ψ_i — независимые случайные величины, распределенные по нормальному закону. Не ограничивая существенно общности рассуждений, предположим, что $M\psi_i = 0$, $D\psi_i = \sigma^2$, $i = 1, m-1$, $\psi_m = 0$.

Как указывалось, принцип декодирования по минимуму расстояния, с помощью которого находится оценка \hat{k}_m параметра k_m , основан на алфавитных схемах и состоит в следующем. По статистике \hat{b}_m находим точку алфавита $\hat{a}_m(k_m)$, ближайшую в смысле евклидова расстояния к точке \hat{b}_m , а затем по $\hat{a}_m(k_m)$ — соответствующее ей

значение параметра \hat{k}_m . Это и будет оценка для k_m . Выше показано, что при сделанных предположениях относительно погрешностей ψ_i оценка \hat{k}_m , полученная декодированием по минимуму расстояния, является оценкой максимального правдоподобия.

Далее будет предложен эффективный метод поиска точки алфавита $\hat{a}_m(k_m)$, ближайшей к точке \hat{b}_m для произвольного m , и на основании этого будут построены простые решающие правила оценки параметра k_m .

Ради простоты изложения рассмотрим вначале случай $m = 3$, а затем перенесем полученные результаты на произвольное число шкал. Так же, как и в § 1, перейдем от алфавита A_3 к расширенному алфавиту \bar{A}_3 . Введем в рассмотрение исходный минимальный треугольник и определим его следующим образом. Среди точек алфавита \bar{A}_3 находим точку A , ближайшую к точке $O(0, 0)$. Затем из точек алфавита \bar{A}_3 , не лежащих на прямой OA , выбираем точку B такую, что сумма расстояний $\rho(B, O) + \rho(B, A)$ минимальна. Треугольник OAB и есть исходный минимальный. Остальные минимальные треугольники получаем так. Проводим семейства прямых, параллельных OA, OB, AB , на расстояниях, кратных соответственно $\rho(B, OA), \rho(A, OB), \rho(O, AB)$. Зная координаты точек O, A, B , можно записать их уравнения:

$$\alpha_l x + \beta_l y = i_l, \quad l = 1, 2, 3, \quad (5.16)$$

где d_l, β_l, i_l — целые числа. Нетрудно видеть, что точки расширенного алфавита \bar{A}_3 совпадают с точками пересечения прямых указанных семейств. Минимальные треугольники — это треугольники наименьшей площади, образованные прямыми семейств (5.16).

Чем интересны минимальные треугольники? Это выясняется следующими утверждениями.

Лемма 5.4. *Минимальные треугольники сплошь покрывают квадрат θ_2 , в котором расположены точки $a_3(k_3)$ алфавита A_3 и точки \hat{b}_3 .*

Плотная упаковка минимальных треугольников следует из приведенного выше способа их построения.

Лемма 5.5. *Для любой внутренней точки P минимального треугольника $\min \rho(P, a_3(k_3)), k_3 = 0, d_3 = 1$, достигается для точки алфавита $a_3(k_3)$, совпадающей с одной из его вершин.*

Доказательство. Пусть $\triangle ABC$ (рис. 17) минимален ($\rho(AB) \rightarrow \min, \rho(CA) + \rho(CB) \rightarrow \min$) и P — его внутренняя точка. Из минимальности $\triangle ABC$ следует, что он остроугольный. Это вытекает из возможного способа нахождения точки C : она лежит на одной из образующих алфавита прямых, ближайшей к прямой AB , и, кроме того, проектируется внутрь отрезка AB . Этот способ эквивалентен тому, что $\rho(CA) + \rho(CB) \rightarrow \min$. Так как точка C проектируется на AB , то $\angle A$ и $\angle B$ в $\triangle ABC$ острые. Но

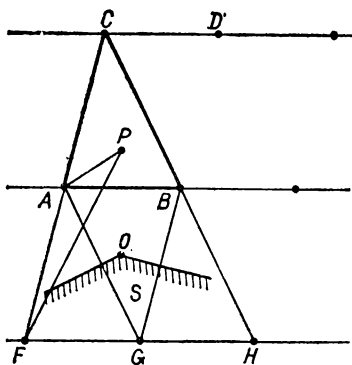


Рис. 17. Минимальные треугольники.

$AB < AC$ и $AB < BC$, следовательно, угол C также острый.

Докажем теперь, что если $\angle C$ острый, то ближайшими к точке P могут быть лишь точки A и B , но не точки алфавита, лежащие ниже прямой AB . Из последних рассмотрим лишь точки F и G . Очевидно, что $\rho(PF) > \rho(PA)$, так как $\angle PAF$ — тупой ($\angle PAF = \angle PAB + \angle BAF = \angle PAB + 180^\circ - \angle BAC$, а $\angle BAC$ — острый). Для остальных точек алфавита, лежащих на прямой FH и отличных от G , рассуждения аналогичны. Покажем теперь, что и точка G не может быть ближе к P , чем точки A и B . Для этого рассмотрим заштрихованную область S , образованную перпендикулярами, проведенными к серединам отрезков AG и BG . Так как $\triangle ABG$ остроугольный, точка O (центр окружности, описанной около ABG) лежит внутри него, а значит, область S (совокупность точек, которые ближе к G , чем к A и B) не пересекается с $\triangle ABC$. Это и означает, что ближайшими к точке P из ранее указанных могут быть лишь точки A и B . Повторив рассуждения с использованием острых углов A и B , получим, что ближайшими к точке P могут быть только точки A , B или C , что и составляет утверждение леммы 5.5.

Из свойств рассмотренных минимальных треугольников вытекает следующая простая процедура нахождения точки алфавита $\hat{a}_3(k_3)$, ближайшей к статистике \hat{b}_3 . (Подробно эта процедура описана в предыдущем параграфе.) С помощью операции $\hat{i}_1 = [\alpha_1 \hat{b}_3^{(1)} + \beta_1 \hat{b}_3^{(2)} + 0,5]^+$ находим номера прямых семейств (5.16), ближайших к точке \hat{b}_3 , а значит, образующих минимальный треугольник, в который попадает \hat{b}_3 . Решая системы уравнений

$$\alpha_m x + \beta_m y = \hat{i}_m, \quad (5.17)$$

$$\alpha_n x + \beta_n y = \hat{i}_n, \quad m, n = 1, 2, 3, \quad m \neq n,$$

находим вершины этого треугольника, а из них выбираем ту точку алфавита $\hat{a}_3(k_3)$, которая ближе других к \hat{b}_3 . Остается лишь по координатам $\hat{a}_3(k_3)$ найти соответствующее им значение \hat{k}_3 . Это можно сделать следующим образом. Используя определение алфавита, получаем $\hat{a}_3^{(i)} = d_i k_3 / d_3 - [d_i k_3 / d_3]^+$ или $d_3 \hat{a}_3^{(i)} = d_i k_3 - d_3 [d_i k_3 / d_3]^+$. Из последнего соотношения вытекает

$$d_i k_3 \equiv d_3 \hat{a}_3^{(i)} \pmod{d_3}, \quad i = 1, 2, \quad (5.18)$$

причем $d_3 \hat{a}_3^{(t)}$ — целое число. Из определения алфавита следует, что система сравнений (5.18) совместна и, если масштабные коэффициенты d_1, d_2, d_3 взаимно просты, имеет единственное решение. В случае, когда какой-либо из масштабных коэффициентов d_1 или d_2 взаимно прост с d_3 , достаточно решить одно из сравнений (5.18), соответствующее d_i , взаимно простому с d_3 .

Рассмотрим указанные процедуры для случая $m > 3$.

Построение исходного минимального гипертетраэдра. Среди точек расширенного алфавита \bar{A}_m находим C_1 , ближайшую к $O(0, 0)$. Из точек алфавита \bar{A}_m , не лежащих на прямой OC_1 , выбираем точку C_2 такую, что $\rho(C_2, 0) + \rho(C_2, C_1) \rightarrow \min$. Среди точек \bar{A}_m , не лежащих в плоскости OC_1C_2 , отыскиваем точку C_3 так, чтобы $\rho(C_3, 0) + \rho(C_3, C_1) + \rho(C_3, C_2) \rightarrow \min$.

Аналогично находим точки C_4, \dots, C_{m-1} . Полученные таким образом точки $0, C_1, \dots, C_{m-1}$ и являются вершинами исходного минимального гипертетраэдра.

Построение минимальных гипертетраэдров. Через каждые $m - 1$ точек $0, C_1, \dots, C_{m-1}$ проводим гиперплоскости, а параллельно им — семейства гиперплоскостей на расстояниях, кратных длинам соответствующих высот гипертетраэдра. Пусть уравнения указанных семейств гиперплоскостей имеют вид

$$\alpha_l x_1 + \dots + \alpha_{l,m-1} x_{m-1} = i_l, \quad l = \overline{1, m}, \quad (5.19)$$

где α_{lk}, i_l — целые числа. Эти уравнения и задают, как и в трехмерном случае, произвольные минимальные гипертетраэдры.

Леммы 5.4 и 5.5 очевидным образом обобщаются для $m > 3$, откуда вытекает решающее правило оценки параметра k_m с помощью декодирования по минимуму расстояния, даваемое следующей теоремой.

Теорема 5.3. Пусть

$$\hat{i}_l = [\alpha_{l1} \hat{b}_m^{(1)} + \dots + \alpha_{l,m-1} \hat{b}_m^{(m-1)} + 0,5]^+ \quad (5.20)$$

и $\hat{a}_m^{(t)}$ — координаты точки, ближайшей к \hat{b}_m и выбираемой из совокупности точек, которые задаются системами уравнений

$$\alpha_l x_1 + \dots + \alpha_{l,m-1} x_{m-1} = \hat{i}_l, \quad (5.21)$$

$$l = 1, \dots, j-1, j+1, \dots, m, \quad j = \overline{1, m}.$$

Тогда оценка \hat{k}_m параметра k_m , задаваемая методом декодирования по минимуму расстояния, определяется как решение системы сравнений

$$d_i k_m \equiv d_m \hat{a}_m^{(i)} \pmod{d_m}, \quad i = \overline{1, m-1}. \quad (5.22)$$

Доказательство аналогично доказательству для трехмерного случая. Заметим только, что (5.20) представляет собой номера гиперплоскостей семейства (5.19), ближайших к точке \hat{b}_m и образующих минимальный гипертетраэдр, в который попадает \hat{b}_m . Решения систем уравнений (5.21) задают вершины этого гипертетраэдра. Наконец, система сравнений (5.22) определяет соответствие между точкой алфавита \hat{a}_m , ближайшей к \hat{b}_m , и значением параметра k_m . Заметим также, что система (5.22) совместна и имеет единственное решение, если масштабные коэффициенты d_1, \dots, d_m взаимно просты. Если же для некоторых коэффициентов $d_{i_j}, j = \overline{1, r}$ ($d_{i_1}, \dots, d_{i_r}, d_m$)⁺ = 1, то вместо (5.22) достаточно рассмотреть систему

$$d_{i_j} k_m \equiv d_m a_m^{(i_j)} \pmod{d_m}, \quad j = \overline{1, r}.$$

В частности, если d_m — простое число, то для нахождения \hat{k}_m достаточно решить лишь одно (любое) из сравнений (5.22).

Укажем, что построение минимальных гипертетраэдров и, в конечном счете, нахождение уравнений семейств гиперплоскостей (5.19), задающих по сути решающее правило оценки параметра k_m , при больших значениях m и d_m — весьма трудоемкий процесс, который может быть выполнен с использованием ЭВМ. В то же время для заданного набора масштабных коэффициентов d_1, \dots, d_m эта процедура выполняется лишь один раз, после чего для устранения неоднозначности (оценки параметра k_m) по наблюдаемым значениям $\hat{\varphi}_1, \dots, \hat{\varphi}_m$ надо пользоваться только правилом, описанным в теореме 5.3.

Заметим также, что при построении оптимальных решающих схем, для которых вероятность $P\{\hat{k}_m = k_m\}$ правильного устранения неоднозначности максимальна, следует при заданном значении d_m надлежащим образом выбрать остальные масштабные коэффициенты. Эта задача может быть выполнена перебором вариантов на ЭВМ. При этом можно показать, что, как и в трехмерном случае, справедлива следующая теорема.

Теорема 5.4. Вероятность $P\{\hat{k}_m = k_m\}$ правильного устранения неоднозначности с помощью метода декодирования по минимуму расстояния максимальна, если радиус гипертетраэдра, описанной около минимального гипертетраэдра, минимален.

Отметим, наконец, что результаты параграфа остаются в силе, если среднеквадратические отклонения σ_i случайных погрешностей измерений $\psi_i, i = \overline{1, m-1}$, не совпадают. Для этого случая необходимо вычислять $\rho(a, b)$ по формуле

$$\rho^2(a, b) = \sum_{i=1}^{m-1} \sigma_i^{-2} (a^{(i)} - b^{(i)})^2,$$

где $a^{(i)}$ и $b^{(i)}$ — координаты точек a и b соответственно. Если же $\sigma_m^2 \neq 0$ ($\psi_m \equiv 0$), то

$$\rho^2(a, b) = \sum_{i,j=1}^{m-1} \left(\frac{\delta_{ij}}{\sigma_i^2} - \frac{d_i d_j}{\Omega d_m^2 \sigma_i^2 \sigma_j^2} \right) (a^{(i)} - b^{(i)}) (a^{(j)} - b^{(j)}),$$

где δ_{ij} — символ Кронекера, $\Omega = \sum_{i=1}^m d_i^2 / d_m^2 \sigma_i^2$.

Пример

Пусть $m = 4$, $d_1 = 3$, $d_2 = 4$, $d_3 = 6$, $d_4 = 12$. Тогда вершины исходного минимального тетраэдра имеют координаты $(0, 0, 0)$, $(0, 1/3, 0)$, $(1/2, 0, 0)$, $(1/4, 0, 1/2)$, а семейства плоскостей, задающих остальные минимальные тетраэдры, определяются уравнениями $2x - z = i$, $3y = j$, $2x + 3y + z = k$, $2z = l$; $i, j, k, l = 0, 1, \dots$

Для $\hat{\varphi}_1 = 0,81$, $\hat{\varphi}_2 = 0,39$, $\hat{\varphi}_3 = 0,61$, $\hat{\varphi}_4 = 0,19$ имеем $\hat{b}_4^{(1)} = 0,7625$, $\hat{b}_4^{(2)} = 0,3267$, $\hat{b}_4^{(3)} = 0,515$, $\hat{i} = \hat{j} = \hat{l} = 1$, $\hat{k} = 3$. Решением систем уравнений

$$\begin{cases} 2x - z = 1, \\ 3y = 1, \\ 2x + 3y + z = 3, \end{cases} \begin{cases} 2x - z = 1, \\ 3y = 1, \\ 2z = 1, \end{cases} \begin{cases} 2x - z = 1, \\ 2x + 3y + z = 3, \\ 2z = 1, \end{cases} \begin{cases} 3y = 1, \\ 2x + 3y + z = 3, \\ 2z = 1 \end{cases}$$

является единственная точка $(3/4, 1/3, 1/2)$ (вырожденный тетраэдр). Решая систему уравнений

$$\begin{cases} 3k_4 \equiv 12 \cdot 3/4 \pmod{12}, \\ 4k_4 \equiv 12 \cdot 1/3 \pmod{12}, \end{cases}$$

получаем $k_4 = 7$. Заметим, что $\varphi_1 = 0,8$, $\varphi_2 = 0,4$, $\varphi_3 = 0,6$, $\varphi_4 = 0,2$ соответствуют значению $k_4 = 7$.

§ 6. Декодирование по наклонным дискретам

В этом параграфе предложены простые формулы оценки параметра k_m с помощью вводимых здесь наклонных дискретов двух типов. В некотором смысле эти формулы приближают соответствующие формулы методов декодирования по минимуму расстояния и по прямым дискретам. Использование наклонных дискретов существенно упрощает процедуру нахождения и сами формулы оценки параметра при циклических измерениях. В качестве частного случая предложен модифицированный метод последовательного пересчета. Следует заметить, что решающие схемы, построенные по наклонным дискретам, являются алфавитными, причем они оптимальны, если распределение вероятностей погрешностей ψ_i имеет специальный вид. Для каждой из предложенных решающих схем обсуждается вопрос оптимального выбора масштабных коэффициентов, максимизирующих вероятность правильного устранения неоднозначности.

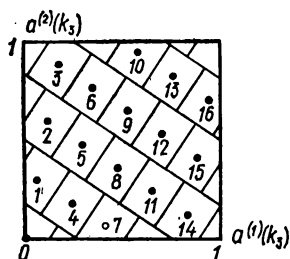


Рис. 18. Решающая схема, построенная по наклонным дискретам $B_1^{(k_3)}$ ($d_1 = 1$, $d_2 = 5$, $d_3 = 17$).

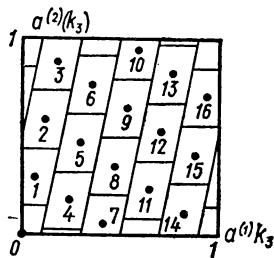


Рис. 19. Решающая схема, построенная по наклонным дискретам $\tilde{B}_2^{(k_3)}$ ($d_1 = 1$, $d_2 = 5$, $d_3 = 17$).

Ради простоты рассматривается случай трехшкальных измерений. Вначале предполагается, что масштабный коэффициент точной шкалы d_3 — простое число, затем — составное.

Введем определение одного из возможных вариантов наклонных дискретов (рис. 18). Посередине между линиями первого семейства (6.2) ($l = 1$) проведем прямые. До встречи с ними через середины отрезков, соединяющих соседние точки алфавита, лежащие на одной из линий указанного семейства, проведем перпендикуляры. Полученные прямоугольники назовем наклонными дискретам и обозначим через $\tilde{B}_1^{(k_3)}$. В некотором смысле такие наклонные дискреты, как и обычные, приближают рассмотренные выше элементы $B^{(k_3)}$ решающих схем, построенных для нормальных погрешностей измерений фаз. Для последних схем в § 3 наклонные дискреты были использованы при выводе приближенной формулы вероятности правильного устранения неоднозначности. Заметим, что из построения наклонных дискретов следует, что они плотно упакованы в θ_2 , в центре каждого из них находится точка алфавита $a(k_3)$ и, наконец, длины их сторон равны:

$$h_1 = 1/\sqrt{(d_3 - d_2 k)^2 + k^2} \quad \text{и} \quad h_2 = \sqrt{(d_3 - d_2 k)^2 + k^2}/d_3.$$

Последнее замечание может быть использовано при выборе масштабных коэффициентов, максимизирующих вероятность правильного устранения неоднозначности, которая для решающей схемы, построенной по $\tilde{B}_1^{(k_3)}$ и $\psi_i: N(0, \sigma)$, $i = 1, 2$, $\psi_3 \equiv 0$, имеет вид

$$P\{\hat{k}_3 = k_3\} = 4\Phi(h_1/2\sigma)\Phi(h_2/2\sigma),$$

где, как и ранее, $\Phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^u e^{-t^2/2} dt$. Ясно, что в последнем

случае вероятность $P\{\hat{k}_3 = k_3\}$ тем больше, чем ближе h_1 к h_2 . Отметим также, что решающая схема, построенная по наклонным ди-

скретам $\tilde{B}_1^{(k_3)}$, оптимальна (может быть получена методом максимального правдоподобия), если погрешности ψ_i измерений фаз имеют плотность, равную постоянной величине на прямоугольнике, подобном указанному дискрету (эквивалентное утверждение сформулировано выше для обычных дискретов).

Приведем теорему, указывающую простое решающее правило для алфавитной схемы устранения неоднозначности, построенной по наклонным дискретам.

Теорема 6.1. *Формула для оценки k_3 решающей схемы, построенной по $\tilde{B}_1^{(k_3)}$, имеет вид*

$$\hat{k}_3 \equiv \hat{i} + k\hat{n} \pmod{d_3}, \quad (6.1)$$

где

$$\hat{i} = [(d_3 - d_2 k) \hat{b}_3^{(1)} + k \hat{b}_3^{(2)} + 0,5]^+; \quad (6.2)$$

$$\hat{n} = \left[\frac{(d_2 (d_3 - d_2 k) - k) \hat{i} + d_3 (k \hat{b}_3^{(1)} - (d_3 - d_2 k) \hat{b}_3^{(2)})}{(d_3 - d_2 k)^2 + k^2} + 0,5 \right]. \quad (6.3)$$

Доказательство. Из леммы 5.2 следует, что номер прямой первого семейства (5.3), ближайшей к точке \hat{b}_3 , определяется соотношением (6.2). Чтобы доказать формулу (6.1), необходимо найти значение \hat{k}_3 , соответствующее точке алфавита, лежащей на \hat{i} -й прямой и ближайшей к основанию перпендикуляра, опущенного из точки \hat{b}_3 на эту прямую. Нетрудно видеть, что указанное основание перпендикуляра имеет абсциссу

$$\hat{x} = ((d_3 - d_2 k) \hat{i} + k \hat{b}_3^{(1)} - k (d_3 - d_2 k) \hat{b}_3^{(2)}) / ((d_3 - d_2 k)^2 + k^2).$$

Можно показать, что на выбранной \hat{i} -й прямой лежат точки алфавита $a(k_3)$, где $k_3 = \hat{i} + kn$, n — целое, абсциссы которых равны $(\hat{i} + kn)/d_3$. Сравнивая последнее выражение с \hat{x} , находим \hat{n} , совпадающее с (6.3), такое, что \hat{k}_3 удовлетворяет перечисленным выше условиям.

Заметим, что формулы оценки \hat{k}_3 по наклонным дискретам упростятся, если при построении последних вместо прямых первого семейства (5.3) взять прямые семейства $y = d_2 x - i$, $i = 0, 1, \dots$, на которых также лежат точки алфавита. В этом случае

$$\hat{k}_3 = \left[\frac{d_3}{d_2^2 + 1} (d_2 \hat{i} + \hat{b}_3^{(1)} + d_2 \hat{b}_3^{(2)}) + 0,5 \right]^+,$$

где

$$\hat{i} = [d_2 \hat{b}_3^{(1)} - \hat{b}_3^{(2)} + 0,5]^+.$$

Пример

Пусть $d_1 = 1$, $d_2 = 9$, $d_3 = 29$. Тогда формула для определения \hat{k}_3 с помощью решающей схемы, построенной по $\tilde{B}_1^{(k_3)}$, имеет вид

$$\hat{k}_3 = \hat{i} + 3\hat{n} \pmod{29},$$

где

$$\hat{i} = [2\hat{b}_3^{(1)} + 3\hat{b}_3^{(2)} + 0,5]^+;$$

$$\hat{n} = [(1/13) (15\hat{i} + 87\hat{b}_3^{(1)} - 58\hat{b}_3^{(2)} + 0,5)]^+.$$

Для $\hat{b}_3^{(1)} = 18/29$, $\hat{b}_3^{(2)} = 10/29$ получим согласно приведенным формулам $\hat{i} = 2$, $\hat{n} = 5$, $\hat{k}_3 = 17$.

Рассмотрим еще один из естественных вариантов наклонных дискретов (рис. 19), которые с точки зрения построения формул для \hat{k}_3 проще, чем $\tilde{B}_1^{(k_3)}$. Проведем посередине между линиями семейства $y = d_2x - i$ прямые. До встречи с ними через середины отрезков, соединяющих соседние точки алфавита, которые лежат на одной из линий указанного семейства, проведем прямые, параллельные оси абсцисс. Полученные параллелограммы обозначим через $\tilde{B}_2^{(k_3)}$. Их геометрические свойства очевидны.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 6.2. Формула для оценки \hat{k}_3 с помощью решающей схемы, построенной по наклонным дискретам $\tilde{B}_2^{(k_3)}$, имеет вид

$$\hat{k}_3 = \left[\frac{d_3}{d_2} ([d_2\hat{b}_3^{(1)} - \hat{b}_3^{(2)} + 0,5]^+ + \hat{b}_3^{(2)}) + 0,5 \right]^+. \quad (6.4)$$

Доказательство этой теоремы во многом аналогично доказательству теоремы 6.1 и поэтому опускается.

Замечание к теоремам 6.1 и 6.2. Ранее предполагалось, что $d_1 = 1$. Если от набора масштабных коэффициентов $1, d_2, d_3$ с помощью преобразования $d_i t \equiv d_i^* \pmod{d_3}$, $d_3^* = d_3$ (см. § 1), изменяющего лишь соответствие между точками алфавита и значениями параметра k_3 (но не сам алфавит), перейти к набору d_1^*, d_2^*, d_3^* , то результаты теорем 6.1 и 6.2 останутся справедливыми, с тем лишь отличием, что оценка параметра заменяется по формуле $\hat{t}k_3^* \equiv \hat{k}_3 \pmod{d_3}$. При этом, конечно, пересчитываются и значения $\hat{b}_3^{(i)}$ по формуле $\hat{b}_3^{(i)*} = \{t\hat{b}_3^{(i)}\}^+$, но характер этой операции отличается от характера процесса формирования шкал. В связи с этим формула (6.4), представляющая собой модификацию соответствующей формулы метода последовательного пересчета (см. § 2), имеет очевидные преимущества.

Предположим теперь, что масштабный коэффициент d_3 точной шкалы является составным числом. Как указывалось выше, в этом

Рис. 20. Геометрический способ получения алфавита A_3 и элементы решающих схем $B_0^{(k_3)}$, $\tilde{B}_1^{(k_3)}$, $\tilde{B}_2^{(k_3)}$ ($d_1 = 3$, $d_2 = 4$, $d_3 = 24$).

случае достаточно рассмотреть масштабные коэффициенты d_i , $i = 1, 2, 3$, вида

$$\begin{aligned} d_1 &= \gamma_1 q_1, & d_2 &= \gamma_2 q_2, \\ d_3 &= \gamma_3 q_1 q_2, \end{aligned} \quad (6.5)$$

где $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, q_1, q_2$ — целые числа; $(\gamma_1, \gamma_2)^+ = 1$;
 $(\gamma_1, \gamma_3)^+ = 1$; $(\gamma_2, \gamma_3)^+ = 1$;
 $(\gamma_1, q_2)^+ = 1$; $(\gamma_2, \gamma_1)^+ = 1$;
 $(q_1, q_2)^+ = 1$.

Далее, в предположении, что масштабные коэффициенты d_i имеют вид (6.5), построим простые формулы оценки параметра k_3 , соот-

ветствующие решающим правилам (5.1), где в качестве $B^{(k_3)}$ выбрано одно из следующих двух множеств (рис. 20).

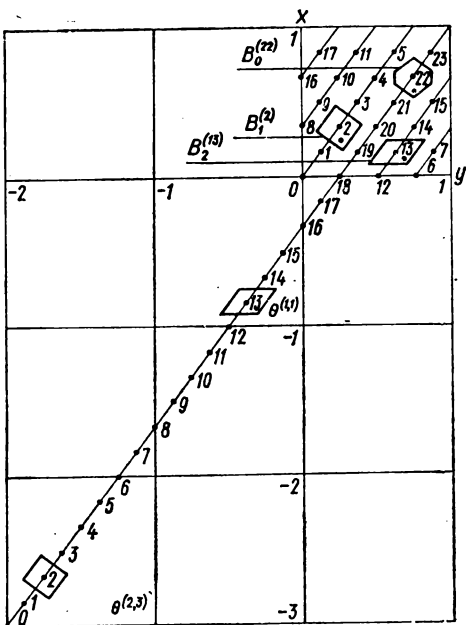
$\tilde{B}_1^{(k_3)}$ — наклонный дискрет первого типа, который строится, как и ранее, таким образом. Если точки алфавита лежат на прямых семейства

$$\alpha x + \beta y = i, \quad i — \text{целое}, \quad (6.6)$$

то посередине между ними проводим прямые. До встречи с ними через середины отрезков, соединяющих соседние точки алфавита, лежащие на одной из линий указанного семейства, проводим перпендикуляры. Полученные прямоугольники и образуют наклонные дискреты $\tilde{B}_1^{(k_3)}$ первого типа.

$\tilde{B}_2^{(k_3)}$ — наклонный дискрет второго типа. Строится аналогично предыдущему, но вместо перпендикуляров проводятся отрезки, параллельные оси абсцисс.

Будем говорить, что наклонный дискрет $\tilde{B}_l^{(k_3)}$, $l = 1, 2$, порождается семейством прямых (6.6), а его точки являются ближайшими к точке алфавита $a_3(k_3)$ в смысле расстояния, порождаемого этим дискретом. Другими словами, чтобы найти точку алфавита $a_3(k_3)$ согласно решающему правилу (5.1), построенному по наклонному дискрету $\tilde{B}_l^{(k_3)}$, $l = 1, 2$, нужно найти вначале прямую семейства (6.6), ближайшую к точке \hat{b}_3 , а затем, опуская на эту прямую



перпендикуляр из точки \hat{b}_3 (или проводя прямую, параллельную оси абсцисс), определить на этой прямой ближайшую к точке пересечения точку алфавита.

Напомним геометрический способ получения алфавита A_3 (см. § 1 и рис. 20), соответствующего набору масштабных коэффициентов (6.5), и укажем его дополнительные геометрические свойства.

Соединим точки с координатами $(1, 1)$ и $(-d_1 + 1, -d_2 + 1)$ отрезком прямой, уравнение которой имеет вид

$$d_2x - d_1y = d_2 - d_1. \quad (6.7)$$

Назовем эту прямую основной, порождающей алфавит. Разделим указанный отрезок на d_3 равных частей. Координаты точек деления, как нетрудно видеть, равны

$$(-d_1 + 1 + d_1k_3/d_3, -d_2 + 1 + d_2k_3/d_3), \quad k_3 = \overline{0, d_3 - 1}. \quad (6.8)$$

Рассмотрим квадраты $\theta_2^{(m,n)}$, $-m \leq x \leq -m + 1$, $-n \leq y \leq -n + 1$, $m = \overline{0, d_1 - 1}$, $n = \overline{0, d_2 - 1}$. Очевидно, что $\theta_2^{(0,0)}$ совпадает с θ_2 . Квадраты $\theta_2^{(m,n)}$, в которых лежат части указанного выше отрезка основной прямой (6.7), перенесем вместе с точками разбиения (6.8) в квадрат θ_2 . Эти точки и образуют в квадрате θ_2 алфавит A_3 , в чем нетрудно убедиться непосредственно проверкой.

Лемма 6.1. *Для набора масштабных коэффициентов (6.5) уравнения частей основной прямой (6.7), перенесенных из $\theta_2^{m,n}$ в θ_2 , имеют вид*

$$d_2x - d_1y = i, \quad i = \overline{-d_1 + 1, d_2 - 1}, \quad (6.9)$$

а соответствие между i и (m, n) задается сравнениями

$$d_2(m + 1) \equiv i \pmod{d_1}, \quad d_1(n + 1) \equiv -i \pmod{d_2}. \quad (6.10)$$

Для доказательства леммы надо найти номер (m, n) квадрата $\theta_2^{(m,n)}$, из которого перенесена часть основной прямой (6.7), описывающейся в квадрате θ_2 уравнением (6.9). Произведем обратный перенос отрезка прямой (6.9) из квадрата θ_2 в квадрат $\theta_2^{(m,n)}$. В последнем квадрате его уравнение будет иметь вид

$$d_2(x + m) - d_1(y + n) = i \text{ или } d_2x - d_1y = i - d_2m + d_1n.$$

Но по предположению этот отрезок должен совпадать с частью основной прямой $d_2x - d_1y = d_2 - d_1$. Тогда для нахождения соответствия между i и (m, n) получаем уравнение

$$d_2(m + 1) - d_1(n + 1) = i, \quad (6.11)$$

откуда немедленно следует (6.10). Обратно, если из квадратов $\theta_2^{(m,n)}$ с номерами (m, n) , определяемыми сравнениями (6.10), перенести в квадрат θ_2 части основной прямой (6.7), то получим, что здесь они будут описываться уравнениями $d_2(x - m) - d_1(y - n) = d_2 - d_1$ или $d_2x - d_1y = d_2(m + 1) - d_1(n + 1)$, откуда в силу (6.11) вытекает $d_2x - d_1y = i$. Тот факт, что i изменяется от $-d_1 + 1$ до

$d_2 - 1$, следует из соотношений (6.10) и того, что отрезки прямых (6.9) лежат в квадрате θ_2 , где $0 \leq x < 1$, $0 \leq y < 1$.

Следующая теорема дает простые формулы оценки параметра k_3 решающей схемы, построенной по наклонным дискретам $\tilde{B}_1^{(k_3)}$ первого типа, порожденным семейством прямых (6.9).

Теорема 6.3. Пусть масштабные коэффициенты d_1, d_2, d_3 удовлетворяют соотношениям (6.5), \hat{m} и \hat{n} — решение сравнений

$$\begin{aligned} d_2(m+1) &\equiv \hat{i} \pmod{d_1}, & m &= \overline{0, d_1-1}; \\ d_1(n+1) &\equiv -\hat{i} \pmod{d_2}, & n &= \overline{0, d_2-1}, \end{aligned} \quad (6.12)$$

где

$$\hat{i} = [d_2\hat{b}_3^{(1)} - d_1\hat{b}_3^{(2)} + 0,5]^+; \quad \hat{i} = \overline{-d_1+1, d_2-1}. \quad (6.13)$$

Тогда формула оценки \hat{k}_3 параметра k_3 решающей схемы, построенной по наклонным дискретам $\tilde{B}_1^{(k_3)}$, порожденным семейством прямых $d_2x - d_1y = i$, $i = 0, \pm 1, \dots$, имеет вид

$$\begin{aligned} \hat{k}_3 = \left[\frac{d_3}{d_1^2 + d_2^2} (d_1\hat{b}_3^{(1)} + d_2\hat{b}_3^{(2)} - d_1\hat{m} + d_2^2 - d_2\hat{n} - d_2 - d_1 + \right. \\ \left. + d_1^2) + 0,5 \right]^+. \end{aligned} \quad (6.14)$$

Доказательство. По \hat{b}_3 , используя лемму 5.2, находим номер \hat{i} ближайшей к точке \hat{b}_3 в квадрате θ_2 прямой $d_2x - d_1y = \hat{i}$. Он вычисляется по формуле (6.13). Прямую $d_2x - d_1y = \hat{i}$ переносим в квадрат $\theta_2^{(\hat{m}, \hat{n})}$ так, чтобы она совпала с основной прямой $d_2x - d_1y = d_2 - d_1$. В силу леммы 6.1 \hat{m} и \hat{n} определяются из сравнений (6.12). В квадрат $\theta_2^{(\hat{m}, \hat{n})}$ переносим также и точку \hat{b}_3 . Обозначим ее там через $\hat{b}_3^{(\hat{m}, \hat{n})}$. Ее координатами являются $\hat{b}_3^{(1)} - \hat{m}$ и $\hat{b}_3^{(2)} - \hat{n}$. Теперь найдем точку алфавита, ближайшую (в смысле расстояния, порожденного $\tilde{B}_1^{(k_3)}$) к точке \hat{b}_3 в квадрате $\theta_2^{(\hat{m}, \hat{n})}$ (а не в квадрате θ_2). Для этого опустим перпендикуляр из точки $\hat{b}_3^{(\hat{m}, \hat{n})}$ на прямую $d_2x - d_1y = d_2 - d_1$. Основание перпендикуляра (точка P), как нетрудно видеть, имеет абсциссу

$$x_P = \frac{1}{d_1^2 + d_2^2} (d_1^2\hat{b}_3^{(1)} + d_1d_2\hat{b}_3^{(2)} - d_1^2\hat{m} - d_1d_2\hat{n} + d_2^2 - d_1d_2). \quad (6.15)$$

Сравнивая ее с абсциссами ближайших точек алфавита (6.8) на основной прямой, получаем

$$-d_1 + 1 + d_1 k_3^*/d_3 \leq x_P < -d_1 + 1 + d_1 (k_3^* + 1)/d_3,$$

или

$$k_3^* \leq (d_3/d_1) (x_P + d_1 - 1) < k_3^* + 1.$$

Номер ближайшей к точке $\hat{b}_3^{(\hat{m}, \hat{n})}$ (а значит, и к \hat{b}_3) точки алфавита, очевидно, равен $\hat{k}_3 = [(d_3/d_1) (x_P + d_1 - 1) + 0,5]^+$, что с учетом (6.15) дает формулу (6.14).

Заметим, что при $d_1 = 1$ получим $\hat{m} = 0$, $\hat{n} = d_2 - 1 - \hat{i}$, поэтому

$$\hat{k}_3 = \left[\frac{d_3}{1 + d_2^2} (\hat{b}_3^{(1)} + d_2 \hat{b}_3^{(2)} + d_2 [d_2 \hat{b}_3^{(1)} - \hat{b}_3^{(2)} + 0,5]^+) + 0,5 \right]^+,$$

что совпадает с \hat{k}_3 для решающей схемы, построенной выше по наклонным дискретам $\tilde{B}_1^{(k_3)}$ с использованием семейства прямых $y = d_2 x - i$.

Пример

Пусть $d_1 = 3$, $d_2 = 4$, $d_3 = 24$ и $\hat{b}_3^{(1)} = 13/48$, $\hat{b}_3^{(2)} = 1/4$. Тогда, используя формулы (6.12) — (6.14), получаем $\hat{i} = 0$, $\hat{m} = 2$, $\hat{n} = 3$ и $\hat{k} = 2$ (см. рис. 20).

Сформулируем, наконец, теорему, дающую простые формулы оценки параметра k_3 решающей схемы, построенной по наклонным дискретам $\tilde{B}_2^{(k_3)}$ второго типа, порожденным семейством прямых (6.9).

Теорема 6.4. Пусть масштабные коэффициенты d_1 , d_2 , d_3 определяются соотношениями (6.5), \hat{n} удовлетворяет сравнению

$$d_1 (\hat{n} + 1) \equiv -\hat{i} \pmod{d_2}, \quad \hat{n} = \overline{0, d_2 - 1},$$

где

$$\hat{i} = [d_2 \hat{b}_2^{(1)} - d_1 \hat{b}_3^{(2)} + 0,5]^+, \quad \hat{i} = \overline{-d_1 + 1, d_2 - 1}.$$

Тогда формула оценки \hat{k}_3 параметра k_3 решающей схемы, построенной по наклонным дискретам $\tilde{B}_2^{(k_3)}$, порожденным семейством прямых $d_2 x - d_1 y = i$, $i = 0, \pm 1, \dots$, имеет вид

$$\hat{k}_3 = \left[\frac{d_3}{d_2} (\hat{b}_3^{(2)} - \hat{n} + d_2 - 1) + 0,5 \right]^+. \quad (6.16)$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 6.3 и потому не приводится. Заметим лишь, что при $d_1 = 1$ $\hat{n} = d_2 -$

— 1 — \hat{i} , поэтому

$$\hat{k}_3 = [(d_3/d_2) (\hat{b}_3^{(2)} + [d_2 \hat{b}_3^{(1)} - d_1 \hat{b}_3^{(2)} + 0,5]^+) + 0,5]^+,$$

что совпадает с соответствующей формулой (6.4) модифицированного метода последовательного пересчета.

Пример

Пусть $d_1 = 3$, $d_2 = 4$, $d_3 = 24$ и $\hat{b}_3^{(1)} = 33/48$, $\hat{b}_3^{(2)} = 1/8$. Тогда согласно теореме 6.4 $i = 2$, $\hat{n} = 1$ и $\hat{k}_3 = 13$ (см. рис. 20).

Замечания к теоремам 6.3 и 6.4. Для каждой из полученных выше решающих схем целесообразно рассмотреть задачу оптимального выбора масштабных коэффициентов d_1 и d_2 при фиксированном d_3 . Набор масштабных коэффициентов d_1 , d_2 , d_3 и соответствующие им элементы $\tilde{B}_l^{(k_s)}$, $l = 1, 2$, назовем оптимальными, если при них достигается максимум вероятности правильной оценки параметра k_3 с помощью \hat{k}_3 . Нетрудно заметить, что эта вероятность

$$P\{\hat{k}_3 = k_3\} = \iint_{\tilde{B}_l^{(k_s)}} f(x, y) dx dy,$$

где $f(x, y)$ — плотность распределения вероятностей случайного вектора $(\hat{b}_3^{(1)}, \hat{b}_3^{(2)})$, которая, в свою очередь, может быть легко выражена через плотность распределения случайных погрешностей ψ_1, ψ_2, ψ_3 . Можно показать, что для нормальных с параметрами $(0, \sigma)$ независимых ψ_1 и ψ_2 ($\psi_3 \equiv 0$) наклонные дискреты $\tilde{B}_1^{(k_s)}$, построенные по прямым $d_2 x - d_1 y = i$, оптимальны среди всех возможных дискретов, если только $d_1^2 + d_2^2 = d_3$. Это следует из того, что указанные дискреты представляют собой прямоугольники со сторонами $\sqrt{d_1^2 + d_2^2/d_3}$ и $1/\sqrt{d_1^2 + d_2^2}$. Опять-таки для нормальных независимых ψ_1 и ψ_2 ($\psi_3 \equiv 0$) наклонными дискретами $\tilde{B}_2^{(k_s)}$ можно пользоваться, если d_2/d_1 достаточно велико, а $d_1^2 + d_2^2 \sim d_3$. В противном случае дискрет $\tilde{B}_2^{(k_s)}$ либо очень скошен, либо чересчур растянут (это следует из простых геометрических соображений), и вероятность правильной оценки параметра k_3 может оказаться малой. Вместе с тем, так как формулы оценки параметра k_3 решающих схем, построенных по наклонным дискретам $\tilde{B}_l^{(k_s)}$, $l = 1, 2$, просты, имеет смысл пользоваться ими, даже если соответствующие условия оптимальности, наложенные на d_i , не выполняются. В этом случае целесообразно от дискретов, порожденных прямыми $d_2 x - d_1 y = i$, перейти к дискретам, порождаемым каким-либо иным семейством, на котором лежат точки алфавита A_3 . Наконец, решающие правила, использующие наклонные дискреты $\tilde{B}_l^{(k_s)}$, $l = 1, 2$,

оптимальны (могут быть получены из метода максимального правдоподобия), если плотность распределения вероятностей погрешностей ψ_i измерений фаз равна константе в областях, подобных указанным наклонным дискретам.

§ 7. Декодирование по пересечению

Еще раз рассмотрим неполную систему уравнений

$$u = (k_1 + \varphi_1)/d_1 = \dots = (k_m + \varphi_m)/d_m, \quad (7.1)$$

где $k_i = [d_i u]^+$, $\varphi_i = \{d_i u\}^+$ — соответственно целая и дробная части числа $d_i u$, d_i — масштабные коэффициенты измерительных шкал, представляющие собой возрастающую последовательность натуральных чисел. Задача устранения неоднозначности циклических измерений заключается в оценке неизвестного параметра k_m (и соответственно u) по измеренным значениям $\hat{\varphi}_i = \{\varphi_i + \psi_i\}^+$, где ψ_i — погрешности, носящие случайный характер.

Идея метода декодирования по пересечению заключается в следующем [107]. Вместо системы (7.1) рассмотрим эквивалентную ей систему

$$(n_i + \hat{\varphi}_i - \psi_i)/d_i = (n_m + \hat{\varphi}_m - \psi_m)/d_m \quad (7.2)$$

$$(i = \overline{1, m-1}, \quad n_i = k_i + \delta k_i, \quad \delta k_i = [\varphi_i + \psi_i]^+),$$

которую представим в виде

$$n_i d_m - n_m d_i + (\hat{\varphi}_i - \psi_i) d_m - (\hat{\varphi}_m - \psi_m) d_i = 0, \quad (7.3)$$

$$i = \overline{1, m-1}.$$

Из (7.3) следует

$$(\hat{\varphi}_i - \psi_i) d_m - (\hat{\varphi}_m - \psi_m) d_i = N_i, \quad i = \overline{1, m-1}, \quad (7.4)$$

где N_i — некоторые целые числа. Пусть $\psi_i \in [-\Delta_i, \Delta_i]$. Тогда

$$N_i \in [\alpha_i - \beta_i, \alpha_i + \beta_i],$$

$$\alpha_i = \hat{\varphi}_i d_m - \hat{\varphi}_m d_i, \quad (7.5)$$

$$\beta_i = \Delta_i d_m + \Delta_m d_i, \quad i = \overline{1, m-1},$$

и

$$n_m^{(i)} d_i - n_i d_m = N_i, \quad i = \overline{1, m-1}, \quad (7.6)$$

где N_i — множество целых чисел из (7.5). Решение линейного диофантова уравнения (7.6) можно записать в виде

$$n_m^{(i)} = (-1)^{n-1} P_{n-1}^{(i)} N_i + t_i d_m,$$

$$n_i = (-1)^{n-1} Q_{n-1}^{(i)} N_i + t_i d_i, \quad (7.7)$$

$$0 \leq n_m^{(i)} \leq d_m, \quad 0 \leq n_i \leq d_i.$$

Здесь $P_{n-1}^{(i)}$ и $Q_{n-1}^{(i)}$ — соответственно числитель и знаменатель предпоследней подходящей дроби при разложении d_m/d_i в цепную дробь; t_i — некоторые числа из множества $0, \pm 1, \pm 2, \dots$. В качестве оценки параметра n_m выбираем величину

$$\hat{n}_m = \bigcap_{i=1}^{m-1} n_m^{(i)}. \quad (7.8)$$

В последнее время удалось усовершенствовать алгоритм таким образом, что процедура последовательных приближений заменяется эквивалентной ей процедурой, реализующейся за конечное число шагов. При этом алгоритм метода декодирования по пересечению состоит из следующих этапов:

1) по заданным Δ_i из соотношения (7.5) определяем множество N_i ;

2) находим множество $n_m^{(i)}$ по формуле (7.7);

3) вычисляем оценку \hat{n}_m по формуле (7.8) (пусть \hat{n}_m состоит из r элементов; элемент $\hat{n}_m^{(k)} \in \hat{n}_m$ порождается вектором $N^{(k)} = (N_1^{(k)}, \dots, N_{m-1}^{(k)})$, $k = \overline{1, r}$, где $N_i^{(k)}$ — это N_i в формуле (7.7) при $n_m^{(i)} = \hat{n}_m^{(k)}$; по вектору $\hat{\varphi} = (\hat{\varphi}_1, \dots, \hat{\varphi}_m)$ формируем статистику $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{m-1})$;

4) решаем задачу

$$\|\alpha - N^{(k)}\| \rightarrow \min, \quad 1 \leq k \leq r$$

где $\|\cdot\|$ — обозначение нормы, порождаемой статистикой α .

Так, если вектор α распределен по нормальному закону (Δ_i выбираем при этом равным $3\sigma_i$), то $\|\cdot\|$ — обозначение евклидовой нормы вектора, если же α имеет равномерное распределение, то $\|\cdot\|$ означает первую норму вектора. Пусть этот минимум достигается на векторе $N^{(k_0)}$. Тогда в качестве оценки n_m выбираем элемент $\hat{n}_m^{(k_0)}$, порождаемый вектором $N^{(k_0)}$. Следует отметить, что процедура, описанная в п. 4, эквивалентна процедуре последовательных приближений, однако с точки зрения алгоритма она более эффективна, поскольку позволяет получить оценку определяемого параметра без итерационного процесса. При этом вероятность правильного устранения неоднозначности циклических измерений определяется формулой

$$P(\hat{n}_m^{(k_0)} = n_m) = \int \dots \int_{(D)} W(t_1, t_2, \dots, t_{m-1}) dt_1 \dots dt_{m-1}, \quad (7.9)$$

где W — плотность распределения вероятностей вектора α , а D — множество точек, ближайших (в смысле указанной выше метрики) к точке $N^{(k_0)}$. Область D , как нетрудно заметить, ограничена гипер-

плоскостями, проходящими через середины отрезков $N^{(k_0)}N^{(k)}$, $k \neq k_0$, $k = \overline{1, r}$, перпендикулярно к ним.

При «равномерном» распределении точек $N^{(k)}$, $k = \overline{1, r}$, в пространстве R_{m-1} целесообразно ставить задачу об оптимальном выборе масштабных коэффициентов d_1, d_2, \dots, d_m .

Действительно, вероятность $P(\hat{n}_m^{(k_0)} = n_m)$ в этом случае не будет зависеть от точки $\hat{n}_m^{(k_0)}$, а оптимальный набор коэффициентов d_1, d_2, \dots, d_m является решением следующей задачи:

$$\int \dots \int_{(D)} W(t_1, t_2, \dots, t_{m-1}) dt_1 dt_2 \dots dt_{m-1} \rightarrow \max_{d_1, d_2, \dots, d_m} \quad (7.10)$$

$$d_* \leq d_1, \quad d_m \leq d^*, \quad d_{i+1} - d_i \geq \tilde{D},$$

где d_* , d^* и \tilde{D} — заданные константы.

Пусть теперь $\pi = \{\psi \in R_m, -\bar{\Delta}_i \leq \psi_i \leq \bar{\Delta}_i, i = \overline{1, m}\}$ — такое множество, при котором \hat{n}_m состоит из одной точки $n_m^{(k_0)}$.

Теорема 7.1. Для существования однозначной оценки и с оценкой надежности (7.9) необходимо и достаточно наличие не более одной точки $\psi \in R_m$, для которой система уравнений

$$\psi_m d_i - \psi_i d_m = N_i^{(k_0)} - \alpha_i, \quad i = \overline{1, m-1}, \quad (7.11)$$

имела бы в области π единственное решение.

Доказательство. Итак, пусть множество π такое, при котором существует единственное значение параметра \hat{n}_m и соответственно единственная точка $\hat{n} = (\hat{n}_1, \hat{n}_2, \dots, \hat{n}_m)$, удовлетворяющая системе уравнений (7.2) при $\psi \in \pi$. Ясно, что определяемый параметр $u = (\hat{n}_m + \hat{\phi}_m - \psi_m)/d_m$ будет единственным, если прямая (7.2) с текущими координатами $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_m$ пересечет гиперпараллелепипед π в одной точке. Найдем необходимые для этого аналитические соотношения. Систему (7.3), эквивалентную системе (7.2) с учетом (7.6), перепишем в виде (7.11), заменяя при этом N_i на $N_i^{(k_0)}$ и используя второе соотношение в (7.2). Поскольку, как было показано ранее, для получения однозначной оценки u прямая (7.2) должна пересечь гиперпараллелепипед π в одной точке, это означает, что система линейных уравнений (7.11) должна иметь в области π единственное решение. Оценка (7.9) при этом остается в силе. Теорема доказана.

Пример 1

Рассмотрим трехшальную систему (7.2) при $d_1 = 3, d_2 = 5, d_3 = 8, \hat{\phi}_1 = 0,21, \hat{\phi}_2 = 0,01, \hat{\phi}_3 = 0,2, \psi = (\psi_1, \psi_2, 0)$, где ψ_i — независимые случайные величины с усеченной гауссовой плотностью распределения вероятностей на отрезке $[-0,5;$

0,5] с параметрами $m_1 = m_2 = 0$, $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma = 0,01$, $\psi_3 = 0$. Выберем область $\pi = [-3\sigma, 3\sigma] \times [-3\sigma, 3\sigma]$. По формуле (7.5) находим $\bar{N}_1 = 1$, $\bar{N}_2 = -1$, $n_3^{(1)} = 3$, $n_3^{(2)} = 3$, $\hat{n}_3 = k_3 = 3$. Система уравнений (7.11) имеет в области π единственное решение $\psi_1 = 0,01$, $\psi_2 = 0,01$. В рассматриваемом случае система (7.1) принимает вид

$$u = (1 + 0,2)/3 = (2 + 0)/5 = (3 + 0,2)/8 = 0,4.$$

Пример 2

Пусть $m = 3$, $d_1 = 3$, $d_2 = 52$, $d_3 = 301$, $\hat{\varphi}_1 = 0,21$, $\hat{\varphi}_2 = -0,19$, $\hat{\varphi}_3 = 0,38$, ψ_i , $i = 1, 2, 3$, — независимые случайные величины с усеченной гауссовой плотностью распределения вероятностей на отрезке $[-0,5, 0,5]$ с параметрами $m_i = 0$, $\sigma_i = \sigma = 0,01$, $i = 1, 2, 3$. При $\Delta_i = 3\sigma_i = 3\sigma = 0,03$ по формулам (7.6) находим $\bar{N}_1 = 53,71$, $\bar{N}_2 = -87, -67$; $n_1^{(1)} = 118, 18, 219, 119, 19, 220, 120, 20, 221, 21, 222, 122, 22, 223, 123, 23, 224, 124$; $n_3^{(2)} = 236, 126, 16, 207, 197, 87, 288, 178, 68, 259, 149, 39, 230, 120, 10, 201, 91, 282, 172, 62, 265, 155, 45$; $\hat{n}_3 = \bigcap_{i=1}^2 n_3^{(i)} = 120$.

Значению параметра $\hat{n}_3 = 120$ соответствуют числа $N_1^{(k_0)} = 59$, $N_2^{(k_0)} = -81$, и система уравнений (7.11) принимает вид

$$\begin{aligned} 3\psi_3 - 301\psi_1 &= -3,07, \\ 52\psi_3 - 301\psi_2 &= -4,05; \end{aligned} \quad (7.12)$$

$$\pi \equiv \{\psi \mid \psi \in R_3, -0,03 \leq \psi_i \leq 0,03, \quad i = 1, 2, 3\}. \quad (7.13)$$

Ясно, что система (7.12) в области (7.13) обладает множеством решений, а оценка параметра u принадлежит к отрезку $[0,4 - 0,05/301, 0,4 + 0,01/301]$. Так, точка $\psi = (0,01, 0,01 - 0,02)$ является решением системы (7.12), $\psi \in \pi$. При этом на основании (7.1)

$$u = (1 + 0,2)/3 = (21 - 0,2)/52 = (120 + 0,4)/301 = 0,4.$$

Замечание. Если погрешность по какой-либо шкале отсутствует, т. е. для некоторого i одна из $\psi_i = 0$, то система (7.11) в любом случае имеет единственное решение в области π . Это означает, что единственной оценке параметра n_m всегда соответствует единственная оценка определяемого параметра u .

§ 8. Сравнительный анализ вычислительных алгоритмов устранения неоднозначности циклических измерений

В настоящем параграфе проведен на качественном уровне сравнительный анализ эффективности алгоритмов для следующих трех методов: последовательного пересчета, алфавитного и декодирования по пересечению. Критериями эффективности, на наш взгляд, могут быть следующие:

$$P(\hat{k}_m = k_m) \rightarrow \max_A, \quad T \leq T_0; \quad (8.1)$$

$$T \rightarrow \min_A, \quad P(\hat{k}_m = k_m) \geq 1 - \varepsilon. \quad (8.2)$$

Здесь \hat{k}_m — оценка параметра k_m ; $P(\hat{k}_m = k_m)$ — вероятность правильного устранения неоднозначности; A — множество алгоритмов указанных выше методов; T_0 — допустимое время реализации алгоритма; ε — заданное достаточно малое положительное число. Прежде чем проводить сравнительный анализ эффективности алгоритмов по критериям (8.1), (8.2), изложим кратко суть этих алгоритмов, а также остановимся на недостатках и преимуществах каждого из них.

Наиболее распространенным в инженерной практике является метод последовательного пересчета из шкалы в шкалу. Алгоритм его заключается в реализации следующей рекуррентной процедуры:

$$\hat{k}_{i+1} = \left[\frac{d_{i+1}}{d_i} (\hat{k}_i + \hat{\varphi}_i) - \hat{\varphi}_{i+1} + 0,5 \right]^+,$$

$$i = \overline{2, m-1}, \quad \hat{k}_1 = 0, \quad d_1 \leq 1.$$

Основное преимущество этого алгоритма — быстроедействие. Кроме того, решается задача оптимального выбора масштабных коэффициентов и получаются простые формулы для оценки вероятности $P(\hat{k}_m = k_m)$. Однако существенным недостатком алгоритма является то, что его можно применять лишь при $d_1 \leq 1$. На практике это, как правило, не соблюдается, поэтому приходится формировать искусственно новые шкалы, что, в свою очередь, уменьшает вероятность $P(\hat{k}_m = k_m)$, а следовательно, и эффективность этого алгоритма.

Алфавитный метод для получения оценки \hat{k}_m основан на алфавитных схемах и состоит в следующем. По статистике $\hat{b}_m = (\hat{b}_m^{(1)}, \dots, \hat{b}_m^{(m-1)})$, $\hat{b}_m^{(i)} = \{\hat{\varphi}_i - d_i \hat{\varphi}_m / d_m\}^+$ находится точка алфавита

$$\hat{a}_m(k_m) = (\hat{a}_m^{(1)}(k_m), \dots, \hat{a}_m^{(m-1)}(k_m)),$$

$$\hat{a}_m^{(i)}(k_m) = \{d_i k_m / d_m\}^+, \quad k_m = \overline{0, d_m - 1},$$

ближайшая к точке \hat{b}_m в смысле нормы, порождаемой статистикой \hat{b}_m , а затем по $\hat{a}_m(k_m)$ определяется оценка \hat{k}_m . Наиболее эффективным алгоритмом поиска точки $\hat{a}_m(k_m)$, ближайшей к \hat{b}_m , является алгоритм декодирования по минимуму расстояния. Он заключается в реализации следующих этапов.

1. Построение минимального гипертетраэдра. Среди точек расширенного алфавита \bar{A}_m находим точку C_1 , ближайшую к началу координат $O(0, 0)$. Из точек алфавита \bar{A}_m , не лежащих на прямой OC_1 , выбираем точку C_2 такую, что $\rho(C_2, O) + \rho(C_2, C_1) \rightarrow \min$, и т. д. Получаем точки C_1, C_2, \dots, C_{m-1} , а вершинами исходного минимального гипертетраэдра будут точки $O, C_1, C_2, \dots, C_{m-1}$.

2. Построение минимальных гипертетраэдров. Через каждые $m - 1$ точек из набора $O, C_1, C_2, \dots, C_{m-1}$ проводим гиперплоскости и параллельно — семейства гиперплоскостей на расстояниях, кратных длинам соответствующих высот гипертетраэдра. Уравнения соответствующих семейств гиперплоскостей записываем в виде

$$\alpha_{i1}x_1 + \alpha_{i2}x_2 + \dots + \alpha_{i,m-1}x_{m-1} = i_l, \quad i = \overline{1, m},$$

где α_{ik}, i_l — целые числа.

3. По формуле

$$\hat{i}_l = [\alpha_{i1}\hat{b}_m^{(1)} + \alpha_{i2}\hat{b}_m^{(2)} + \dots + \alpha_{i,m-1}\hat{b}_m^{(m-1)} + 0,5]^+$$

находим номера гиперплоскостей, ближайших к точке \hat{b}_m , которые и образуют минимальный гипертетраэдр, содержащий точку \hat{b}_m . Затем решаем системы уравнений

$$\alpha_{i1}x_1 + \alpha_{i2}x_2 + \dots + \alpha_{i,m-1}x_{m-1} = \hat{i}_l,$$

$$l = 1, \dots, j-1, j+1, \dots, m, \quad j = \overline{1, m},$$

и находим вершины этого гипертетраэдра.

4. Определяем вершину гипертетраэдра, ближайшую к точке \hat{b}_m . Обозначим ее координаты через $\hat{a}_m^{(i)}, i = \overline{1, m-1}$.

5. Вычисляем оценку параметра k_m , решая систему сравнений

$$d_i k_m \equiv d_m \hat{a}_m^{(i)} \pmod{d_m}, \quad i = \overline{1, m-1}.$$

Данная система имеет единственное решение, если d_1, d_2, \dots, d_m взаимно просты.

Основное преимущество приведенного алгоритма по сравнению с алгоритмом последовательного пересчета — снятие ограничения $d_1 \leq 1$ и, значит, повышение вероятности правильного устранения неоднозначности. Кроме того, неоднократное применение этого алгоритма для различных наборов масштабных коэффициентов позволяет получить оптимальные значения последних (вероятность $P(\hat{k}_m = k_m)$ будет при этом максимальной).

Алгоритм декодирования по пересечению, идеи которого изложены выше, так же, как и алгоритм декодирования по минимуму расстояния, применим при любом натуральном d_1 , т.е. не требует формирования новых шкал. Кроме того, он позволяет выделить те шкалы, погрешность измерения фаз по которым вносит наиболее существенный вклад в неоднозначность определения параметра k_m , и указать область изменения погрешностей, при которой соответствующая система уравнений имеет единственное решение. Реализация этого алгоритма намного проще реализации алгоритма декодирования по минимуму расстояния (это нетрудно заметить, сравнивая соответственно этапы этих алгоритмов). Естественно, число операций данного алгоритма велико по сравнению с числом операций алгоритма последовательного пересчета.

Проведем теперь сравнительный анализ описанных выше алгоритмов по критериям эффективности (8.1), (8.2) при условии, что d_i — заданные числа. Прежде всего отметим, что по быстродействию эти алгоритмы располагаются следующим образом: последовательного пересчета, декодирования по пересечению и декодирования по минимуму расстояния. Далее, поскольку для последних двух алгоритмов могут быть получены лишь оценки вероятности $P(\hat{k}_m = k_m)$, то, на наш взгляд, целесообразно провести предварительное исследование на статистической модели для различных функций $u(t)$, законов распределения погрешностей ψ_i и параметров этих распределений с целью сравнения этих алгоритмов по точности (в качестве критерия точности можно взять частоту правильного устранения неоднозначности). Результаты таких исследований будем считать как априори известную информацию.

Проведем сравнительный анализ алгоритмов по критерию эффективности (8.1). Ограничение $T \leq T_0$ может дать следующие ситуации: 1) все три алгоритма удовлетворяют данному ограничению, 2) ограничению $T \leq T_0$ удовлетворяют алгоритмы последовательного пересчета и декодирования по пересечению, 3) ограничение выполняется лишь для алгоритма последовательного пересчета.

Рассмотрим каждую ситуацию в отдельности. В первом случае конкурентоспособными оставляем алгоритмы декодирования по пересечению и декодирования по минимуму расстояния, не требующие формирования новых шкал и имеющие соответственно более высокую вероятность $P(\hat{k}_m = k_m)$ по сравнению с алгоритмом последовательного пересчета. По данной априорной информации о точности этих алгоритмов при заданном законе распределения погрешностей ψ_i предпочтение отдаем алгоритму с более высокой точностью. Если же точности одинаковы, то выбираем алгоритм декодирования по пересечению. Во второй ситуации также выбираем алгоритм декодирования по пересечению (как более точный). И, наконец, в третьей ситуации ответ однозначен — алгоритм последовательного пересчета.

Проведем теперь аналогичное сравнение алгоритмов по критерию эффективности (8.2). Рассмотрим следующие ситуации: 1) все три алгоритма удовлетворяют ограничению $P(\tilde{k}_m = k_m) \geq 1 - \varepsilon$ (в этом случае оптимальным по быстродействию будет алгоритм последовательного пересчета); 2) ограничению $P(\hat{k}_m = k_m) \geq 1 - \varepsilon$ удовлетворяют алгоритмы декодирования по минимуму расстояния и декодирования по пересечению (при этом предпочтение отдаем алгоритму декодирования по пересечению); 3) ограничению $P(\hat{k}_m = k_m) \geq 1 - \varepsilon$ удовлетворяет либо алгоритм декодирования по пересечению, либо алгоритм декодирования по минимуму расстояния (в этом случае ответ однозначен).

Замечание. Представляет также теоретический и практический интерес проведение сравнительного анализа эффективности рассмот-

ренных выше алгоритмов по критериям (8.1) — (8.2) с учетом оптимального выбора масштабных коэффициентов шкал. Кроме того, следует отметить, что уже проведен вычислительный эксперимент на статистической модели для задачи устранения неоднозначности при циклических измерениях с целью получения дополнительной априорной информации о точности описанных алгоритмов, а также решения вопросов анализа и синтеза современных фазометрических систем.

В заключение этой главы приведем результаты В. В. Хлобystова по постановке и решению задачи определения координат объекта для случая сферического фронта волны. Математическая модель этой задачи имеет вид

$$u = \cos \gamma = \frac{\Phi_1 + \varepsilon (d_1^2 - \Phi_1^2)}{d_1} = \dots = \frac{\Phi_m + \varepsilon (d_m^2 - \Phi_m^2)}{d_m}, \quad (8.3)$$

где $u \geq \varepsilon d_m$, $\varepsilon = 1/2R$, R — расстояние от опорного измерителя до объекта. Модель (1.1) представляет собой частный случай модели (8.3) при $R \rightarrow \infty$. Система (8.3) — это система $m - 1$ уравнений с $m + 1$ неизвестными k_1, \dots, k_m, R . Таким образом, задача определения координат (R, γ) объекта эквивалентна задаче определения параметров k_m и R по известной информации относительно d_i и $\Phi_i = \{\Phi_i\}^+$, $i = 1, m$. Рассмотрим решение системы (8.3) методом последовательного пересчета при ограничении $d_1 \leq 1$. Без ограничения общности проведем иллюстрацию этого метода для $d_1 = 1$ и $m = 2$. Из (8.3) получим

$$\Phi_2 = R - \sqrt{D}, \quad D = R^2 + d^2 - (2R\Phi_1 + 1 - \Phi_1^2) d, \quad d = d_2 > 1. \quad (8.4)$$

Пусть априори известно, что объект находится в полосе $R_0 \leq R \leq R_1$. Из (8.4) следует, что при фиксированных d_1, Φ_1, d и $R \in [R_0, R_1]$ задача определения имеет в общем случае не единственное решение. Однако можно показать, что существует такое множество значений d , при каждом из которых система (8.3) имеет единственное решение относительно k_2, R, γ .

При неточно заданной информации $\hat{\Phi}_i = \{\varphi_i + \psi_i\}^+$, $i = 1, m$, вместо величин k_2 , можно получить их оценки $\hat{k}_2, \hat{R}, \hat{\gamma}$, а характеристикой точности этих оценок может служить вероятность правильного их определения. Применение описанной выше методики для произвольного m не вызывает никаких затруднений.

ПОСТРОЕНИЕ И ИССЛЕДОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ СЛОЖНОГО ИВК

§ 1. Построение математических моделей угломерного канала¹

В качестве объекта моделирования рассмотрим угломерный канал моноимпульсной амплитудной суммарно-разностной радиолокационной станции (РЛС) [60]. Структурная схема угломерного канала с использованием ЦВМ для автоматизации работы РЛС [58] может иметь вид, представленный на рис. 21 [12]. Элементами множества $F = \{F_i\}$, $i = \overline{1, m}$, — множества базисных элементов моделируемой системы [7] — являются следующие.

F_1 — приемное устройство (угловой дискриминатор), предназначенное для селективного усиления ответного ретранслированного или отраженного сигнала. В этом устройстве осуществляются преобразование пространственно-временного процесса (электромагнитная волна) во временной процесс, фильтрация полученных сигналов в усилителях высокой и промежуточной частот, преобразование несущих частот сигнала, амплитудно-фазовое детектирование.

F_2 — устройство обработки радиолокационной информации (ЦВМ), решающее задачи обнаружения и оценки координат целей, вычисления параметров движения целей и нахождения на их основе сглаженных и упрежденных значений угловых координат [55].

F_3 — исполнительное устройство (привод антенны), динамические характеристики которого обеспечивают минимальность ошибок слежения.

F_4, F_5 — быстродействующие аналого-цифровой и цифроаналоговый преобразователи, предназначенные для сопряжения ЦВМ с аналоговой аппаратурой РЛС.

F_6 — цифровой датчик углов, задача которого — цифровое кодирование углового положения оси антенны (располагается непосредственно на осях антенны).

F_7 — аппаратура сопряжения, предназначенная для передачи данных внешнего целеуказания.

F_8 — регистратор выходной информации угломерного канала.

Каждый из элементов F_i характеризуется вектором параметров $\omega_i \in \Omega$, где Ω — множество значений параметров угломерного ка-

¹ Данный параграф написан совместно с В. Б. Шульженко.

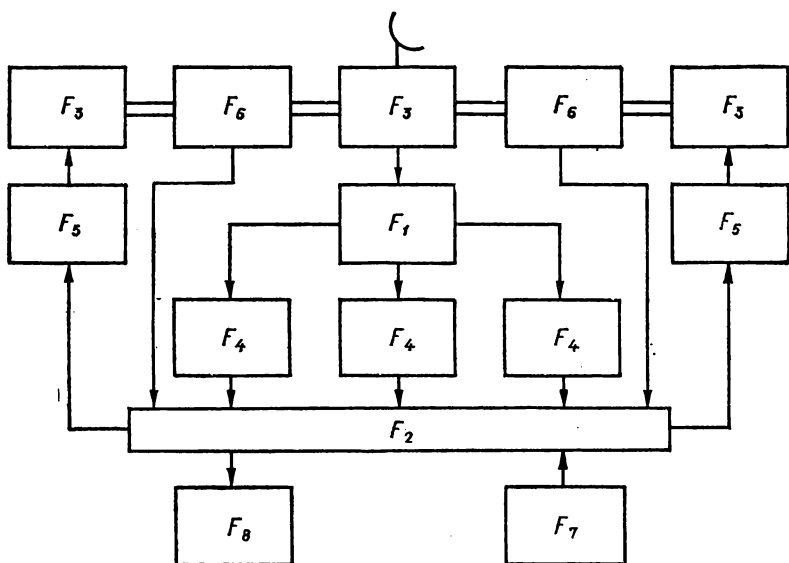


Рис. 21. Структурная схема угломерного канала.

нала и характеристик f_i , которые могут быть заданы графически, аналитически, в виде таблиц, описаний и т. д.

Таким образом, объектом моделирования является

$$G = \{F = \{F_i\}, \quad i = \overline{1, 8}, E, X, \Omega, \mu\}, \quad (1.1)$$

где X описывает коммутацию базисных элементов согласно правилам из множества E ; μ — целевая функция системы (показатели качества угломерного канала). При рассмотрении функционирования угломерного канала во времени можно выделить три характерных периода: наведение антенны в заданную точку пространства по данным внешнего целеуказания, автоматическое слежение за целью при одновременном измерении ее угловых координат после обнаружения; наведение антенны на цель при временном прерывании связи с ней по данным внешнего целеуказания или — в их отсутствие — по экстраполированным данным.

В каждом из выделенных периодов решаются свои специфические задачи, каждому из них соответствует своя организация угломерного канала, т. е. он представляет собой сложную систему с переменной структурой, выбор которой в уравнении (1.1) определяется конкретным заданием X .

При моделировании объекта с ним ассоциируется семейство моделей

$$G_l = \{F^l, E^l, X^l, \Omega^l, \mu^l\}, \quad (1.2)$$

где l — выбранный уровень детализации описания системы; F^l — функциональный базис математической модели (ММ) на выбранном

уровне детализации; E^l — композиции базисных элементов на соответствующем уровне детализации; $X^l = (F^l \times E^l)$ — реализованные коммутации ММ согласно композициям E^l ; Ω^l — множество значений параметров элементов функционального базиса ММ; μ^l — показатели качества, на определение которых ориентирована ММ на выбранном уровне детализации.

Такое представление о семействе математических моделей, соответствующем объекту моделирования, позволяет построить обобщенную функциональную схему алгоритма ММ без конкретизации вида операторов F_k^l , $k = \overline{1, k_l}$, где k_l — число базисных элементов ММ на уровне детализации l .

На рис. 22 приведена структурная схема обобщенного алгоритма ММ угломерного канала, каждый элемент которой принадлежит множеству базисных элементов или их коммутаций. Здесь F_k^l — функциональный базис ММ; F_1^l — F_8^l — математические модели базисных элементов объекта моделирования (1.1), F_9^l — ММ движения цели, F_{10}^l — математические модели случайных воздействий угломерного канала; НУ — блок алгоритма формирования начальных условий и исходных данных модели; К — блок алгоритма выбора вида коммутации базисных элементов: аналогового сопровождения, программного наведения (по данным внешнего целеуказания), автоматического слежения за целью при одновременном измерении угловых координат, сопровождения по экстраполированным данным и т. п.; ПМ — блок алгоритма формирования параметров базисных элементов модели при их фиксированной коммутации; ДС — блок алгоритма формирования и оценки достоверности сигналов рассогласования; ДВ — блок алгоритма формирования системного времени и моментов времени изменения коммутации базисных элементов; ФО, ИК — блоки алгоритмов формирования оценок и принятия решений по изменению коммутации; С — блок алгоритма статистической обработки результатов моделирования и вычисления показателей качества угломерного канала.

Рассмотрим построение функционального базиса ММ угломерного канала. Такому построению предшествует, во-первых, выбор уровня детализации (описания) системы для моделирования и, во-вторых, выбор математического описания. Уровень детализации системы определяется установлением компромисса между двумя противоречивыми требованиями к ММ: точностью представления моделируемых процессов и простотой их математического описания, что определяет в конечном счете время и точность вычислительного эксперимента.

Уровни организации радиотехнических систем можно представить в виде схемы на рис. 23. В соответствии с ней построение функционального базиса ММ угломерного канала как составной части измерительного средства проводится на двух уровнях детализации: α (базисными элементами являются следующие тракты угломера:

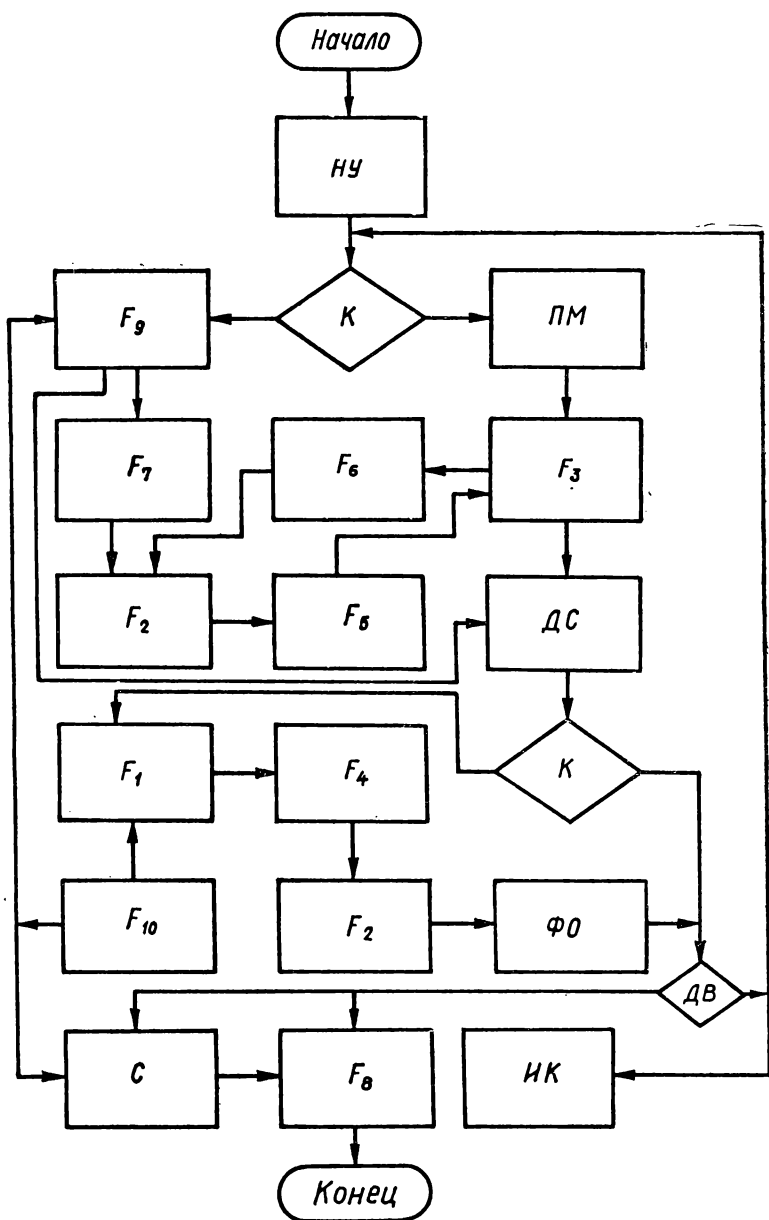


Рис. 22. Структурная схема обобщенного алгоритма математической модели угломерного канала.

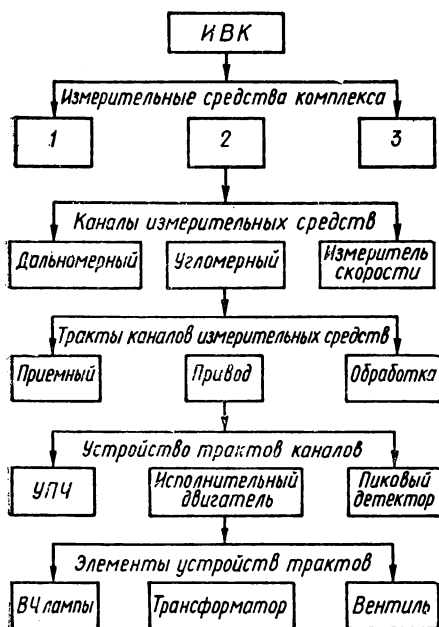


Рис. 23. Структурная схема уровней организации ИВК.

приемный, привода антенны и обработки) и β (базисные элементы — устройства соответствующих трактов). Таким образом, объекту моделирования (1.1) ставятся в соответствие семейства математических моделей

$$G_{\alpha} = \{F_k^{\alpha}, E_{\alpha}, X_{\alpha}, \Omega_{\alpha}, \mu^{\alpha}, k = \overline{1, k_{\alpha}}\};$$

$$G_{\beta} = \{F_k^{\beta}, E_{\beta}, X_{\beta}, \Omega_{\beta}, \mu^{\beta}, k = \overline{1, k_{\beta}}\},$$

(1.3)

где k_{α} и k_{β} — числа базисных элементов ММ на уровнях детализации α и β ; X_{α} ,

X_{β} — коммутации математических моделей, соответствующие организации угломерного канала в выделенных периодах его функционирования; $\omega_{\alpha} \in \Omega_{\alpha}$, $\omega_{\beta} \in \Omega_{\beta}$ — векторы значений параметров математических моделей.

Построение функционального базиса ММ угломерного канала на двух уровнях детализации позволяет создать семейство математических проблемно-ориентированных моделей с согласованными точностью моделирования и сложностью модели в рамках единого моделирующего алгоритма.

При моделировании углового дискриминатора на уровне детализации α будем предполагать следующее: 1) спектр флуктуаций выходного сигнала значительно шире полосы пропускания угломерного дискриминатора; 2) случайные воздействия распределены по нормальному закону и имеют известные спектральные характеристики; 3) отношение сигнала к шуму велико и медленно меняется во времени; 4) величина угловой ошибки $x(t)$ лежит в пределах главного лепестка диаграммы направленности антенны. Такие предположения позволяют построить нелинейный статистический эквивалент углового дискриминатора [17] в виде

$$F_1^{\alpha}: y(t) = C_1(t) \sin C_2(x(t)) + C_3(t),$$

где

$$C_1(t) = \frac{\omega_1^{\alpha}}{\sin \frac{\pi}{2} \frac{\omega_2^{\alpha}}{\omega_3^{\alpha}}} \left[1 + \frac{\xi_1(t)}{\omega_4^{\alpha}} (x_1(t) - \omega_5^{\alpha}) + \xi_2(t) \right]; \quad (1.4)$$

$C_2 = \pi/2\omega_3^\alpha$; $x_1(t)$ — сигнал системы АРУ:

$$x_1(t) = \begin{cases} 1 + (x_2(t) - \omega_6^\alpha)/\omega_4^\alpha, & \omega_6^\alpha < |x_2| < \omega_9^\alpha, \\ 1 + (x_2(t) - \omega_7^\alpha)/\omega_4^\alpha, & \omega_8^\alpha < |x_2|; \end{cases}$$

$x_2(t)$ — сигнал в суммарном канале углового дискриминатора:

$$x_2(t) = \omega_{10}^\alpha \exp(-\omega_{11}^\alpha (x_2^2(t)));$$

$C_3(t)$ — аддитивный шум:

$$C_3(t) = f(x_2(t)) \xi_3(t) + \xi_4(t);$$

$\xi_1 - \xi_4$ — модели случайных воздействий, определяющие флуктуации крутизны и дрейф нуля дискриминационной характеристики.

Стационарный нормальный случайный процесс с экспоненциальной корреляционной функцией

$$R(\tau) = \sigma^2 \exp(-\omega_*^\alpha \tau)$$

и соответствующим энергетическим спектром

$$G(\omega) = \frac{2\sigma^2}{\omega_*^\alpha} \frac{1}{1 + (\omega/\omega_*^\alpha)^2}$$

может быть получен из белого шума с помощью линейной фильтрации [21]. Особенностью моделирования шумов в угломерном канале является необходимость формирования реализаций случайного процесса с переменным шагом, определяющаяся структурой входного сигнала угломерного канала, который представляет собой последовательность импульсных кодированных посылок с неравномерной расстановкой импульсов в пачках. Момент времени поступления j -го импульса i -й пачки на n -м интервале T определяется как

$$t = (n-1)T + (i-1)\varepsilon + j\varepsilon'(j), \quad n = \overline{1, n_0}, \quad i = \overline{1, i_0}, \quad j = \overline{1, j_0}.$$

Используя результаты работы [21], получаем моделирующий алгоритм

$$\xi(n, i, j) = a_i \xi(n, i, j-1) + \sigma \sqrt{1 - a_i^2} \kappa(n, i, j), \quad (1.5)$$

где $\kappa(n, i, j)$ — дискретный белый шум; $a_i = \exp(-\omega_*^\alpha \varepsilon'(j))$.

Определенный таким образом нелинейный статистический эквивалент хорошо описывает функционирование углового дискриминатора при сделанных допущениях, определяя выходное напряжение в зависимости от величины угловой ошибки и шумов системы. Такая модель удобна при установлении свойств угломерного канала в целом, но недостаточна для изучения процессов в самом угловом дискриминаторе. Учет параметров входного сигнала и преобразование его в устройствах углового дискриминатора можно осуществить на уровне детализации β . На основе типовой структурной схемы углового дискриминатора амплитудного суммарно-разностного угломера (см., например, работы [60, 58]) построим структурную

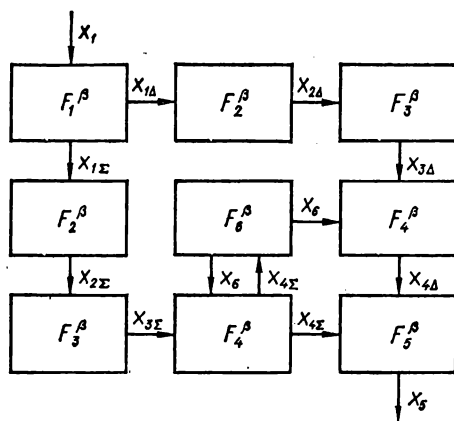


Рис. 24. Структурная схема модели углового дискриминатора на уровне детализации β .

схему математической модели в виде, представленном на рис. 24. Будем предполагать следующее: используется амплитудно-импульсная модуляция входного сигнала, тогда для одиночного импульса

$$x(t) = A(t) \cos \omega_1^\beta t, \quad (1.6)$$

где

$$A(t) = \begin{cases} \omega_2^\beta, & |t| \leq \omega_3^\beta/2, \\ 0, & |t| > \omega_3^\beta/2, \end{cases}$$

ω_3^β — длительность радиоимпульса с частотой ω_1^β ; амплитудные (парциальные) диаграммы направленности считаются известными и идентичными для каждого канала; волноводный мост — идеальное суммарно-разностное устройство [60]; обработка сигналов осуществляется мгновенно с нормировкой идеальной системой автоматической регулировки усиления (АРУ); УВЧ — линейный усилитель, полоса пропускания которого шире спектра входного сигнала; гетеродинный генератор и смеситель — линейные устройства, меняющие частоту полезного сигнала [69]; УПЧ — линейный усилитель промежуточной частоты с гауссовой частотной характеристикой, его резонансная частота совпадает с несущей частотой ω_5^β , которая намного больше полосы пропускания УПЧ ω_4^β ; фазовый детектор — идеальный перемножитель [60, 69].

При сделанных предположениях функциональный базис ММ углового дискриминатора на уровне детализации β имеет вид

$$\begin{aligned} F_1^\beta : \langle x_{1\Delta}, x_{1\Sigma} \rangle &= F_1(x_1, x, t), \\ F_1^{(1)} : x_{1\Delta}(t) &= \Phi_\Delta(x) \cdot x_1(t), \\ F_1^{(2)} : x_{1\Sigma}(t) &= \Phi_\Sigma(x) \cdot x_1(t), \end{aligned} \quad (1.7)$$

где $\Phi_\Delta(x)$ и $\Phi_\Sigma(x)$ — разностная и суммарная диаграммы антенны, формируемые из парциальных диаграмм $\Phi_i(x)$;

$$\begin{aligned} F_2^\beta : \langle x_{2\Delta}, x_{2\Sigma} \rangle &= F_2(x_{1\Delta}, x_{1\Sigma}, t), \\ F_2^{(1)} : x_{2\Delta}(t) &= k_1(t) x_{1\Delta}(t), \\ F_2^{(2)} : x_{2\Sigma}(t) &= k_2(t) x_{1\Sigma}(t), \end{aligned} \quad (1.8)$$

где $k_1 = k_2 = 1$ при нормированной амплитудно-частотной характеристике УВЧ;

$$\begin{aligned} F_3^\beta : \langle x_{3\Delta}, x_{3\Sigma} \rangle &= F_3(x_{2\Delta}, x_{2\Sigma}, t), \\ F_3^{(1)} : x_{3\Delta}(t) &= A(t) \Phi_\Delta(x) \cos(\omega_5^\beta t), \\ F_3^{(2)} : x_{3\Sigma}(t) &= A(t) \Phi_\Sigma(x) \cos(\omega_5^\beta t), \end{aligned} \quad (1.9)$$

где ω_5^β — несущая частота сигнала;

$$\begin{aligned} F_4^\beta : \langle x_{4\Delta}, x_{4\Sigma} \rangle &= F_4(x_{3\Delta}, x_{3\Sigma}, x_6, t), \\ F_4^{(1)} : x_{4\Delta}(t) &= \frac{1}{A(t) \Phi_\Sigma(x)} (x_{3\Delta}(t) \varphi(t) + A_1(t) \cos \omega_5^\beta t + \\ &\quad + A_2(t) \sin \omega_5^\beta t), \\ F_4^{(2)} : x_{4\Sigma}(t) &= \frac{1}{A(t) \Phi_\Sigma(x)} (x_{3\Sigma}(t) \varphi(t) + B_1(t) \cos \omega_5^\beta t + \\ &\quad + B_2(t) \sin \omega_5^\beta t), \end{aligned} \quad (1.10)$$

где

$$\varphi(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \exp(-z^2) dz, \quad z = \omega_4^\beta t / \sqrt{2\pi},$$

$A_1(t)$, $A_2(t)$, $B_1(t)$, $B_2(t)$ — квадратурные составляющие шумов разностного и суммарного каналов с заданными статистическими характеристиками;

$$\begin{aligned} F_5^\beta : \langle x_6 \rangle &= F_5(x_{4\Delta}, x_{4\Sigma}, t), \\ F_5 : x_6(t) &= x_{4\Delta}(t) x_{4\Sigma}(t). \end{aligned} \quad (1.11)$$

Подставим (1.6) — (1.10) в (1.11) и, учтя, что отношение сигнала к шуму велико и выходной фильтр низких частот — идеальный интегратор со сбросом, получим уравнение математической модели в виде

$$\begin{aligned} x_5(x) &= \frac{\varphi_1(\omega_3^\beta \omega_4^\beta / \sqrt{\pi}) \Phi_\Delta(x)}{\Phi_\Sigma(x)} + \\ &+ \frac{\Phi_\Delta(x) A_1 + \Phi_\Sigma(x) B_1}{\omega_2^\beta \Phi_\Sigma^2(x)} \varphi_2(\omega_3^\beta \omega_4^\beta / \sqrt{\pi}), \end{aligned} \quad (1.12)$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_1(\omega_3^\beta \omega_4^\beta / \sqrt{\pi}) &= 1/2 \omega_3^\beta \int_0^{\omega_3^\beta} \varphi^2(\tau) d\tau, \\ \varphi_2(\omega_3^\beta \omega_4^\beta / \sqrt{\pi}) &= 1/2 \omega_3^\beta \int_0^{\omega_3^\beta} \varphi(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

При малых угловых ошибках $\Phi_{\Sigma}(x)$ можно считать постоянным, и, пронормировав (1.12) на величину $\frac{\Phi_1(\omega_3^{\beta}\omega_4^{\beta}/\sqrt{\pi})}{\Phi_{\Sigma}(x)}$, получим

$$x_{\beta}(x) = \Phi_{\Delta}(x) + \frac{\Phi_{\Delta}(x) A_1 + \Phi_{\Sigma}(x) B_1}{\omega_2^{\beta}\Phi_{\Sigma}(x)} \frac{\Phi_2(\omega_3^{\beta}\omega_4^{\beta}/\sqrt{\pi})}{\Phi_1(\omega_3^{\beta}\omega_4^{\beta}/\sqrt{\pi})}.$$

Значение амплитуды принятого сигнала ω_2^{β} определим аналогично тому, как это сделано в работе [59]:

$$\omega_2^{\beta} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\omega_6^{\beta}} \sqrt{\prod_{i=7}^{10} \omega_i^{\beta}}, \quad (1.13)$$

где ω_6^{β} — расстояние между точками излучения и приема; ω_7^{β} — скважность сигнала; ω_8^{β} — мощность передатчика; ω_9^{β} — коэффициент направленного действия передающей антенны; ω_{10}^{β} — эффективная площадь приемной антенны.

Таким образом, полученная математическая модель углового дискриминатора учитывает его структуру и определяет выходное напряжение в зависимости от параметров входного сигнала, шумов, пересчитанных на выход УПЧ, полосы пропускания УПЧ и т. д. Меняя функциональный базис F_k^{β} модели углового дискриминатора на уровне детализации β (с использованием характеристик вход — выход, полученных экспериментально), можно в рамках единой схемы алгоритма получить семейство проблемно-ориентированных моделей углового дискриминатора, каждой из которых будет соответствовать своя математическая модель (1.12).

Рассмотрим моделирование устройств обработки радиолокационной информации. Одним из способов моделирования является использование реальных программ, представляющих собой математическое обеспечение устройств обработки совместно с математическими моделями устройств угломерного канала. Такие модели называются комплексными [58]. Другой способ — построение модели устройств обработки информации. Как было отмечено ранее, с помощью ЭВМ решаются задачи обнаружения траектории цели по совокупности измерений, вычисление параметров движения цели и нахождение на этой основе сглаженных и упрежденных на некоторый отрезок времени координат.

Детальное изложение задач и методов цифровой обработки радиолокационной информации содержится в работе [55]. Истинное значение координаты цели определяется как средневзвешенное по m ее измерениям:

$$\hat{x}(t) = \sum_{k=0}^q \frac{\sum_{i=0}^m P_{k,m}(i) x_i}{\sum_{i=0}^m P_{k,m}^2(i)} P_{k,m}(t),$$

где $P_{k,m}$ — ортонормированные степенные полиномы; q — порядок полиномиальной аппроксимации траектории. В работе [25] приводится рекуррентный алгоритм, формирующий измеренные значения параметров аппроксимирующего полинома

$$\hat{x}(n) = \{\hat{x}(n), \widehat{\nabla}x(n), \widehat{\nabla^2}x(n), \dots, \widehat{\nabla^q}x(n)\}$$

на основе измеренных в угловом дискриминаторе и преобразованных в цифровую форму в аналого-цифровом преобразователе значений угловой ошибки $y(t)$:

$$F_4: y(n, i, j) = F_4(y(t)).$$

Для $q = 3$ рекуррентный алгоритм может быть представлен в виде

$$\hat{x}(n) = A\hat{x}(n-1) + \rho_m y(n), \quad (1.14)$$

где

$$y(n) = \frac{1}{i_0} \sum_{i=1}^{i_0} \frac{1}{j_0} \sum_{j=1}^{j_0} y(n, i, j);$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \rho_m = \{\rho_{m1}, \rho_{m2}, \rho_{m3}, \rho_{m4}\};$$

$$\rho_{m1} = \frac{8(2m+1)(m^2+m+3)}{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)};$$

$$\rho_{m2} = \frac{120(m^2-m+1)}{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)};$$

$$\rho_{m3} = \frac{120(4m-5)}{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)};$$

$$\rho_{m4} = \frac{840}{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)}.$$

Для формирования упрежденных значений угловой координаты используется интерполяционная формула Ньютона

$$x(n+\tau) = \hat{x}(n) + \tau \widehat{\nabla}x(n) + \frac{\tau(\tau+1)}{2} \widehat{\nabla^2}x(n) + \frac{\tau(\tau+1)(\tau+2)}{6} \widehat{\nabla^3}x(n),$$

где τ — интервал экстраполяции.

Таким образом, ММ устройства обработки радиолокационной информации можно представить в следующем виде:

$$F_2: \langle x \rangle = F_2(y, t),$$

$$F_2^{(1)}: \hat{x}(n) = A\hat{x}(n-1) + (\rho_m/i_0j_0) \sum_{i=1}^{i_0} \sum_{j=1}^{j_0} y(n, i, j),$$

$$F_2^{(2)}: \hat{x}(n, i) = (B(i), x(n-1)), \quad i = \overline{1, i_0},$$

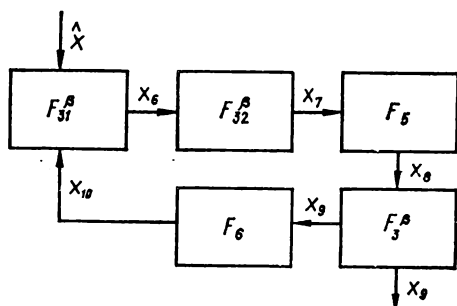


Рис. 25. Структурная схема модели тракта управления движением антенны.

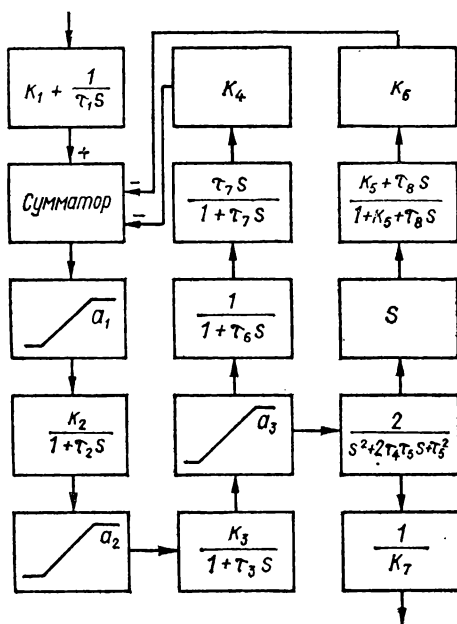


Рис. 26. Структурная схема привода антенны моделируемой системы.

где

$$B(i) = \{1, i\varepsilon, i\varepsilon(i\varepsilon + 1)/2, i\varepsilon(i\varepsilon + 1)(i\varepsilon + 2)/6\}.$$

Рассмотрим моделирование исполнительного устройства — привода антенны (блок F_3 на рис. 21). Структурная схема модели тракта управления движением антенны для случая автосопровождения целей приведена на рис. 25. Здесь F_{31}^B — блок формирования ошибки:

$$F_{31}^B: \langle x_6 \rangle = F_{31}(\hat{x}, x_{10}),$$

$$F_{31}: x_6(\bar{t}) =$$

$$= \hat{x}(n, i) - x_{10}(n, i),$$

$$\bar{t} \quad n, i,$$

где $\hat{x}(n, i)$ — упрежденные значения угловой координаты, рассчитанные в устройстве обработки; $x_{10}(n, i)$ — значение угловой координаты оси антенны, полученные цифровым датчиком углов; F_{32}^B — блок масштабирования ошибок:

$$F_{32}^B: \langle x_7 \rangle = P_0(x_6, t);$$

$P_0(x_6, t)$ — нелинейная масштабирующая функция; F_5 — цифроаналоговый преобразо-

ватель; F_6 — цифровой датчик углов; F_3^B — модель привода антенны, являющегося нелинейной динамической системой со сложными цепями корреляции и стабилизирующими обратными связями, обеспечивающими требуемые значения показателей качества [58].

Динамические системы, как правило, задаются в виде передаточных функций или импульсных переходных характеристик. Рассмотрим структурную схему привода, имеющего две местные обратные связи с известными передаточными функциями элементов и нелинейностью типа ограничителей (рис. 26). Уравнения динами-

ки привода могут быть получены в виде системы нелинейных уравнений в переменных состояниях [11]

$$\frac{du}{dt} = f(t, u), \quad u(t_0) = u_0, \quad (1.15)$$

где u — вектор переменных состояний. Таким образом, исследование динамики привода сводится к решению задачи Коши для систем нелинейных дифференциальных уравнений.

Будем предполагать, что условия существования и единственности решения задачи (1.15) выполнены. Для этого достаточно, например, чтобы функция $f(t, u)$ была непрерывна и удовлетворяла условию Липшица по u , т. е.

$$\|f(t, u) - f(t, v)\| \leq \|u - v\|,$$

где $\|\cdot\|$ — одна из норм векторов.

Классы уравнений, для которых разработаны методы нахождения точных решений, охватывают лишь малую часть практических задач. Поэтому прибегают к приближенным методам. Аналитические приближенные методы — Пикара, рядов Тейлора и др. — не нашли широкого распространения главным образом из-за трудностей автоматизации аналитических преобразований. Основным универсальным средством решения задачи (1.15) стали численные методы, позволяющие получить приближенные значения u_n искомого решения $u(t_n)$ в некоторых точках $t = t_n$, $n = 0, 1, \dots$

На практике используют в основном численные методы двух типов: Рунге — Кутта и конечно-разностные. Они лежат в основе алгоритмов большинства стандартных программ численного решения задач Коши на ЭВМ.

Методы типа Рунге — Кутта относятся к классу одношаговых, когда решение y_{n+1} в точке t_{n+1} вычисляется по значению только в одной точке t_n :

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{i=1}^m p_i k_i(h), \quad h = t_{n+1} - t_n, \quad (1.16)$$

$$k_i(h) = f\left(t_n + \alpha_i h, y_n + h \sum_{j=1}^{i-1} \beta_{ij} k_j(h)\right), \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Коэффициенты p_i , α_i , β_{ij} подбираются из условия заданного или максимально возможного порядка точности формул (1.16) при заданном числе m этапов метода Рунге — Кутта. Конкретные схемы, отвечающие тем или иным значениям параметров метода, можно найти в любом пособии по численным методам. Высокая точность метода достигается при достаточно большом числе этапов ($m \geq 4$) и, следовательно, достаточно большом числе обращений к вычислению функций $f(t, u)$. Это является одним из главных недостатков методов типа Рунге — Кутта, особенно при решении систем высоких порядков. К преимуществам метода следует отнести явный характер вычислений и гибкость по отношению к изменению шага.

Конечно-разностные методы являются многошаговыми — для вычисления y_{n+1} используются значения в нескольких соседних с t_{n+1} точках. Так, формулы

$$\sum_{i=0}^k \alpha_i y_{n+1-i} = h \sum_{i=0}^k \beta_i f(t_{n+1-i}, y_{n+1-i}) \quad (1.17)$$

соответствуют k -шаговому методу. Коэффициенты α_i, β_i подбираются из условия максимальной точности метода. В частности, семейству (1.17) принадлежат явные и неявные методы Адамса. Главное преимущество конечно-разностных методов по сравнению с методами Рунге — Кутты — меньшее число обращений к вычислению правых частей уравнений при той же точности. Недостатками являются следующие: необходимость вычисления дополнительных начальных условий по формулам, отличным от (1.17), что нарушает однородность вычислений и усложняет структуру программ для ЭВМ, и трудности, связанные с изменением шага интегрирования.

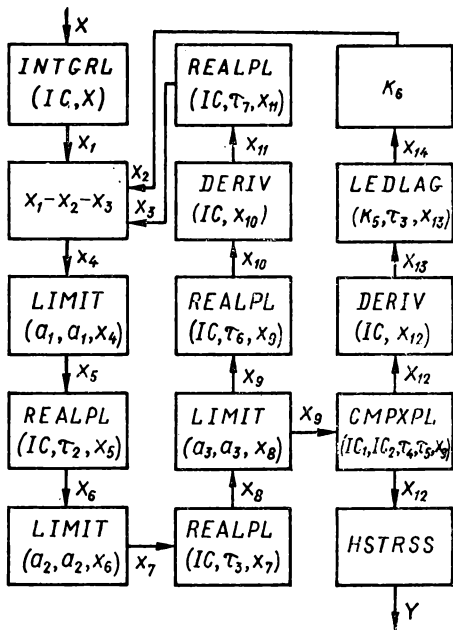
Успех применения любого численного метода во многом определяется возможностью учета резкого локального изменения решения. Поэтому численные методы применяются в режиме с автоматическим выбором шага интегрирования h . Шаг выбирается на основе оценки главного члена погрешности, произведенной тем или иным способом. Из методов оценки погрешности на шаге упомянем способ Рунге, основанный на вычислении решения с целым и половинным шагом, и известные формулы различного порядка точности. Методы выбора шага интегрирования, а также методика изменения шага для многошаговых методов рассмотрены в монографии [108].

Большое внимание в этой книге уделено также методам решения так называемых жестких систем дифференциальных уравнений. Система (1.15) называется жесткой, если $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$ и $S(t) = \frac{\max |\lambda_i|}{\min |\lambda_i|} \gg 1$, где $\lambda_i = \lambda_i(t)$ — локальные собственные значения матрицы Якоби $A = \partial f_i / \partial u_i$. Практически задачу все еще можно считать жесткой, если $S(t)$ принимает значения порядка нескольких десятков, хотя зачастую она может достигать и значений порядка 10^6 .

Применение явных методов Рунге — Кутты или Адамса приводит к жестким ограничениям на шаг сетки h , обусловленным требованием устойчивости дискретных моделей системы (1.15). Жесткость этих ограничений объясняется тем, что соображения точности позволяют выбрать шаг интегрирования гораздо большим, чем условие устойчивости. Для того чтобы устранить требование ограниченности шага, связанное с устойчивостью численного метода для решения жестких систем, необходимо применение абсолютно устойчивых (A -устойчивых) методов, т. е. таких, которые устойчивы при любых шагах h для класса задач (1.15) с $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$. Как известно, линейный явный

Для многошаговых методов требование A -устойчивости оказалось слишком сильным. Ослабление требования устойчивости и введение Гиром понятия жесткой устойчивости позволило применить линейные многошаговые программ интегрирования к

Эффективным при реализации неявных схем для решения жестких систем оказался итерационный метод Ньютона и его модификации. При условии хорошего выбора начального приближения, например с помощью явной многошаговой схемы, метод Ньютона сходится практически без ограничений на шаг интегрирования. Для экономии затрат арифметических операций обращения матрицы системы линейных уравнений матрица Якоби в методе Ньютона вычисляется лишь на первой итерации (метод Ньютона — Рафсона — Канторовича) или даже принимается постоянной для нескольких шагов интегрирования, пока сходимость итерационного метода не станет очень медленной. Эти и другие приемы применения неявных схем решения задачи Коши рассмотрены в монографии [108].



В линейном случае точное решение задачи (1.15) можно записать с помощью интеграла свертки

$$x_9(t) = \int_{t_0}^t K(t-s) x_8(s) ds + \sum_{l=1}^m C_l \exp(\lambda_l(t-t_0)), \quad (1.18)$$

где $K(t)$ — импульсная переходная характеристика привода; λ_l — собственные значения характеристической матрицы линеаризованной системы (1.15).

Если напряжение $x_8(t)$, формируемое цифроаналоговым преобразователем, представляет собой кусочно-постоянную функцию времени, что имеет место при использовании в преобразователе фиксатора нулевого порядка, т. е.

$$x_8(t) = u(n, i) \quad \text{при } t_{i-1} \leq t < t_i, \quad i = \overline{1, i_0},$$

то для моментов времени, соответствующих импульсам в i -й пачке, получаем

$$\begin{aligned} x_9(n, i, j) &= R^*(j) z(n, i-1) + M^*(j) u(n, i), \\ z(n, i) &= Rz(n, i-1) + Mu(n, i), \quad z(0, 0) = z_0, \end{aligned} \quad (1.19)$$

где $x_9(n, i, j) = \{x_9(n, i, 1), \dots, x_9(n, i, j_0)\}$ — вектор, компонентами которого являются значения угловой координаты оси антенны; $z = \{x_9, \dot{x}_9, \dots, x_9^{(m)}\}$. Элементы матрицы $R = [R_{\mu\rho}]_{\mu=1, \overline{m}}^{\rho=1, \overline{m}}$ и вектора $M = \{M_\rho\}_{\rho=1, \overline{m}}$ определяются значениями λ_l и могут быть рассчитаны заранее при выбранном векторе параметров:

$$\begin{aligned} R^*(j) &= \begin{bmatrix} R_{11}(1), \dots, R_{1m}(1) \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ R_{11}(j_0), \dots, R_{1m}(j_0) \end{bmatrix}; \\ M^*(j) &= \{M_1(1), \dots, M_1(j_0)\}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} F_3^\beta: \langle x_9 \rangle &= F_3^\beta(u, z, t); \\ F_3^\beta: x_9(n, i, j) &= R^*(j) z(n, i-1) + M^*(j) u(n, i); \\ z(n, i) &= Rz(n, i-1) + Mu(n, i); \\ z(0, 0) &= z_0. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Эффективным средством моделирования динамических систем, заданных с помощью передаточных характеристик их элементов, является CSMP — пакет прикладных программ для моделирования на ЭВМ аналоговых систем и непрерывных процессов. Преобразованная в терминах CSMP структурная схема привода представлена на рис. 27. Рассмотрим моделирование блока F_7 — аппаратуры сопряжения, предназначенной для передачи данных внешним целеуказаний (ЦУ). В модели должно быть отображено запаздывание полученных значений угловой координаты цели от внешнего источ-

ника и наличие в них разного рода ошибок. Таким образом,

$$F_{\tau} : \eta(n) = f(n - h) + \xi_{\tau}(n),$$

где h — время запаздывания; $\xi_{\tau}(n)$ — модель ошибок данных внешних ЦУ.

Моделирование движения цели (блок) F_0 описано в гл. 3. Сформировав таким образом функциональный базис модели, получим семейство математических моделей, описывающих функционирование угломерного канала во всех выделенных временных периодах, и моделирующий алгоритм для реализации его в виде пакета программ на ЭВМ.

§ 2. Исследование математических моделей угломерного канала

Первый этап вычислительного эксперимента — построение ММ системы и ее исследование аналитическими методами. Важным достоинством этих методов является возможность получения результата исследования в зависимости от начальных условий, внешних случайных воздействий, параметров системы и ее структуры в замкнутом виде. Аналитическое установление таких зависимостей и исследование их в большинстве случаев возможно только при введении соответствующих ограничений и допущений, упрощающих ММ. Это может быть переход от стохастической системы к детерминированной, от нестационарной — к стационарной, от нелинейной — к линейной и т. п. Однако любые количественные и качественные результаты, полученные на этом этапе, играют чрезвычайно важную роль при тестировании и доводке исходной нелинейной математической модели.

В § 1 получена ММ угломерного канала в виде системы нелинейных конечно-разностных уравнений. В настоящем параграфе исследуется качественный характер этой модели, позволяющий построить ряд теоретически обоснованных тестов.

Предполагая детерминированность и стационарность системы и рассматривая только две временных дискретности — по n и i , — получаем уравнения математической модели угломерного канала в виде

$$\begin{aligned} x(n) &= Ax(n-1) + \Phi_1(x(n-1), z(n, i)), \\ z(n, i) &= Rz(n, i-1) + \Phi_2(x(n-1), z(n, i)), \\ x(0) &= x_0, \quad z(0, 0) = z_0, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где $\Phi_1(x(n-1), z(n, i))$, $\Phi_2(x(n-1), z(n, i))$ определяются различным образом для выделенных периодов (режимов) функционирования угломерного канала. Первый шаг аналитического исследования — нахождение простейших решений для типовых входных воздействий (например, полиномиального вида), которые в дальнейшем могут служить тестовыми примерами при отладке численного

алгоритма ММ и его программной реализации. Кроме того, такие решения позволяют привести систему нелинейных конечно-разностных уравнений к стандартному виду, принятому при исследовании одной из основных характеристик этой системы — ее устойчивости.

Пусть ММ имеет вид

$$y_{n+1} = f_n(y_n),$$

где y_n — m -мерный вектор состояний; $f_n(y_n)$ — заданная m -мерная вектор-функция. Под стандартным видом данной системы уравнений понимают такой, при котором $f_n(0) = 0$, или, что то же самое, $y_n \equiv 0$, является ее решением. Как правило, на практике «характерные» точные решения такой системы известны, и в дальнейшем исследователя интересует устойчивость именно этих характерных решений. Пусть известно, что $\eta_n \neq 0$ — одно из частных решений, о которых речь шла выше, т. е.

$$\eta_{n+1} \equiv f_n(\eta_n).$$

Вычтя из первого уравнения второе, для новой переменной $x_n = y_n - \eta_n$ получим систему нелинейных конечно-разностных уравнений

$$x_{n+1} = F_n(x_n),$$

где $F_n(x_n) \equiv f_n(x_n + \eta_n) - f_n(\eta_n)$. Функция $F_n(x_n)$ уже удовлетворяет условию $F_n(0) = 0$ и, следовательно, является стандартной. Если математическая модель автономна, т. е. $y_{n+1} = f(y_n)$, то отыскание характерных точных стационарных решений можно свести к задаче отыскания неподвижных точек отображения $f: R_m \rightarrow R_m$, или, что то же самое, к решению нелинейной системы уравнений

$$\eta = f(\eta).$$

Далее, используя известные результаты теории устойчивости, проверяют выполнимость условий теорем об устойчивости тривиального решения системы.

Возвращаясь к математической модели (2.1), вводим новые переменные состояния системы

$$V(n) = x(n) - x^T(n), \quad W(n, i) = z(n, i) - z^T(n, i),$$

где x^T и z^T — точные решения системы (2.1) при полиномиальном входном воздействии, не равном тождественно нулю. Тогда математическая модель принимает вид

$$\begin{aligned} V(n) &= AV(n-1) + \Phi_1[V(n-1), W(n, i-1)], \\ W(n, i) &= RW(n, i-1) + \Phi_2[V(n-1), W(n, i-1)], \\ V(0) &= V_0, \quad W(0, 0) = W_0. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Рассмотрим автосопровождение угломерным каналом цели, движущейся с постоянной угловой скоростью a . В этом случае Φ_1 и Φ_2

определяются следующим образом:

$$\begin{aligned}
 & \Phi_1 [\mathbf{V} (n-1), \mathbf{W} (n, i-1)] \equiv \\
 & \equiv (\rho_m / i_0) \sum_{i=1}^{i_0} \{F_4 (C_1 \sin C_2 [-\mathbf{L}, \mathbf{W} (n, i-1)]) + \\
 & + [\mathbf{L}, \mathbf{W} (n, i-1)] - [B (i), V (n-1)]\}; \\
 & \Phi_2 [\mathbf{V} (n-1), \mathbf{W} (n, i-1)] \equiv \\
 & \equiv F_5 M P_0 [(B (i), \mathbf{V} (n-1)) - F_6 (\mathbf{L}, \mathbf{W} (n, i-1))]; \quad (2.3) \\
 & \mathbf{L} = \{1, 0, \dots, 0\}.
 \end{aligned}$$

Точные решения системы уравнений имеют вид

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}^T (n) &= \{b + an, a, 0, 0\}; \\
 \mathbf{z}^T (n, i) &= \{b + a(n-1 + i\varepsilon), a, 0, \dots, 0\}. \quad (2.4)
 \end{aligned}$$

Подставив (2.4) и (2.3) в (2.2), получим математическую модель

$$\begin{aligned}
 \mathbf{V} (n) &= A' \mathbf{V} (n-1) + (\rho_m / i_0) \sum_{i=1}^{i_0} F_4 \{C_1 \sin C_2 (-[\mathbf{L}, \mathbf{W} (n, i-1)]) + \\
 & + [\mathbf{L}, \mathbf{W} (n, i-1)]\}; \quad (2.5)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{W} (n, i) &= (R')^i \mathbf{W} (n, 0) + F_5 P_0 \sum_{j=1}^i (R')^{i-j} [\mathbf{B} (j+1) \mathbf{V} (n-1)] \mathbf{M}; \\
 \mathbf{V} (0) &= \mathbf{V}_0; \quad \mathbf{W} (0, 0) = \mathbf{W}_0,
 \end{aligned}$$

где $\mathbf{W} (n-1, i_0) = \mathbf{W} (n, 0)$;

$$A' = \begin{bmatrix} 1 - \rho_{m1} a_1 & 1 - \rho_{m1} a_2 & 1 - \rho_{m1} a_3 & 1 - \rho_{m1} a_4 \\ -\rho_{m2} a_1 & 1 - \rho_{m2} a_2 & 1 - \rho_{m2} a_3 & 1 - \rho_{m2} a_4 \\ -\rho_{m3} a_1 & -\rho_{m3} a_2 & 1 - \rho_{m3} a_3 & 1 - \rho_{m3} a_4 \\ -\rho_{m4} a_1 & -\rho_{m4} a_2 & -\rho_{m4} a_3 & 1 - \rho_{m4} a_4 \end{bmatrix};$$

$$a_1 = 1, \quad a_2 = \frac{\varepsilon}{2} (i_0 + 1), \quad a_3 = \frac{\varepsilon}{4} (i_0 + 1) \left(\frac{\varepsilon}{3} (2i_0 + 1) + 1 \right),$$

$$a_4 = \frac{\varepsilon}{6} (i_0 + 1) \left(\frac{\varepsilon^2}{4} i_0 (i_0 + 1) + \frac{\varepsilon}{2} (2i_0 + 1) + 1 \right);$$

матрица R' определяется соотношением

$$R' \mathbf{W} (n, i) = R \mathbf{W} (n, i) - M F_5 P_0 [\mathbf{L}, \mathbf{W} (n, i)].$$

Если начальные условия в (2.5) нулевые: $\mathbf{V}_0 = 0$, $\mathbf{W}_0 = 0$, то $\forall n$ справедливы равенства

$$\mathbf{W} (n) = (R')^{i_0-1} \mathbf{W} (n, 0), \quad \mathbf{W} (n) = \mathbf{W} (n, i_0 - 1),$$

и, следовательно, $\mathbf{V} (n) = 0$, $\mathbf{W} (n) = 0$, т. е. решение системы (2.5) совпадает с точным решением. Тогда угломерный канал в режиме автосопровождения будет точно сопровождать цель, летящую с

постоянной угловой скоростью, если в начальный или произвольный момент времени $n - 1$ ошибка равна нулю.

Для изучения устойчивости систему (2.5) необходимо предварительно преобразовать к виду

$$\mathbf{W}_{n+1} = A_n \mathbf{W}_n + \mathbf{f}_n(\mathbf{W}_n), \quad \mathbf{f}_n(0) = 0, \quad (2.5')$$

где вектор $\mathbf{f}_n(\mathbf{W}_n)$, включающий нелинейности, должен обладать свойством

$$\|\mathbf{f}_n(\mathbf{W}_n)\| \leq \delta(n) \|\mathbf{W}_n\|^r, \quad r > 1 \quad (2.5'')$$

(r — порядок возмущения).

Приведение произвольной исследуемой дискретной математической модели к виду (2.5'), (2.5'') и, в частности (2.5), можно осуществить путем разложения нелинейностей в ряд Тейлора и включения линейных частей этих разложений в матрицу A_n . При этом порядок возмущения r оказывается большим или равным двум. Для его повышения можно использовать метод Пуанкаре. После того как математическая модель приведена к виду (2.5'), (2.5''), переходим к проверке выполнения условий устойчивости.

Теорема 2.1. Пусть система $\mathbf{W}_{n+1} = A_n \mathbf{W}_n$ является правильной и ее максимальный характеристический показатель α отрицателен. Тогда, если порядок возмущения $r \geq 1$, сходимость ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \exp \{[(\alpha + \varepsilon)(r - 1) + 2\varepsilon]n\} \delta(n),$$

где $\varepsilon > 0$ — произвольное число, является достаточным условием асимптотической устойчивости тривиального решения системы (2.5').

Рассмотрим математическую модель угломерного канала при наведении по данным внешнего целеуказания. При сделанных выше допущениях она имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(n) &= A\mathbf{x}(n-1) + \rho_m \{f(n) - [E, \mathbf{x}(n-1)]\}; \\ \mathbf{z}(n, i) &= R\mathbf{z}(n, n-1) + MF_6 P_0 \{[B(i), \mathbf{x}(n-i)] - \\ &\quad - F_6 [L, \mathbf{z}(n, i-1)]\}; \\ \mathbf{x}_0 &= \mathbf{x}_0; \quad \mathbf{z}(0, 0) = \mathbf{z}_0, \end{aligned} \quad (2.6)$$

где $E = \{1, 1, 1, 1\}$, $f(m) = b + a(n-1)$. Введя переменные $V(n)$ и $W(n)$, преобразуем (2.6) таким образом:

$$\begin{aligned} V(n) &= A''V(n-1) - \rho_m a; \\ W(n) &= (R')^{i_0-1} W(n-1) + \\ &+ F_6 P_0 \sum_{j=1}^{i_0-1} (R')^{i_0-j} [B(j+1), V(n-1)] M; \\ V(0) &= V_0; \quad W(0) = W_0, \end{aligned} \quad (2.7)$$

где

$$A'' = \begin{bmatrix} 1 - \rho_{m1} & 1 - \rho_{m1} & 1 - \rho_{m1} & 1 - \rho_{m1} \\ -\rho_{m2} & 1 - \rho_{m2} & 1 - \rho_{m2} & 1 - \rho_{m2} \\ -\rho_{m3} & -\rho_{m3} & 1 - \rho_{m3} & 1 - \rho_{m3} \\ -\rho_{m4} & -\rho_{m4} & -\rho_{m4} & 1 - \rho_{m4} \end{bmatrix}.$$

Рассмотрим частные случаи различных значений m . При $m = 1$ и $m = 2$ собственные значения матрицы A'' лежат вне круга единичного радиуса и, следовательно, система неустойчива. При $m = 3$ (2.7) преобразуется к виду

$$V(n) = A''V(n-1), \quad (2.8)$$

где

$$A'' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Нетрудно видеть, что поскольку все собственные значения матрицы A'' лежат внутри круга единичного радиуса ($\alpha_i(A'') = 0$, $i = \overline{1, 4}$), системы (2.8), а следовательно, и (2.7) экспоненциально асимптотически устойчивы. При $m = 4$ система уравнений (2.8) может быть приведена к виду

$$V(n) = \tilde{A}V(n-1) - D[E, V(n-1)], \quad (2.9)$$

где

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1/2 & -1/2 & -1/2 & -1/2 \end{bmatrix}, \quad D = \{-1/70, -1/14, -3/14, 0\}.$$

Собственные значения матрицы \tilde{A} также лежат в круге единичного радиуса ($\alpha_i(\tilde{A}) = 0$, $i = \overline{1, 3}$; $\alpha_4 = 1/2$). Воспользуемся следующим утверждением.

Теорема 2.2. Пусть порядок возмущения r системы (2.5'), (2.5'') равен единице и $\delta(n) < \gamma \forall n$. Тогда если тривиальное решение линейной системы первого приближения $W_{n+1} = A_n W_n$ экспоненциально устойчиво ($\|A_{n-1} A_{n-2} \dots A_k\| \leq Lq^{n-k}$, $0 < q < 1$), то при выполнении условия $q + L\gamma < 1$ тривиальное решение уравнения (2.5') также экспоненциально устойчиво.

Так как $\gamma = \|D\|_2 = 1/70$, $\|\tilde{A}^n\|_2 = 1/2^n$, $n > 3$, $L = 1$, $q = 1/2$, то, следовательно, утверждение теоремы 2.2 для системы (2.9) справедливо.

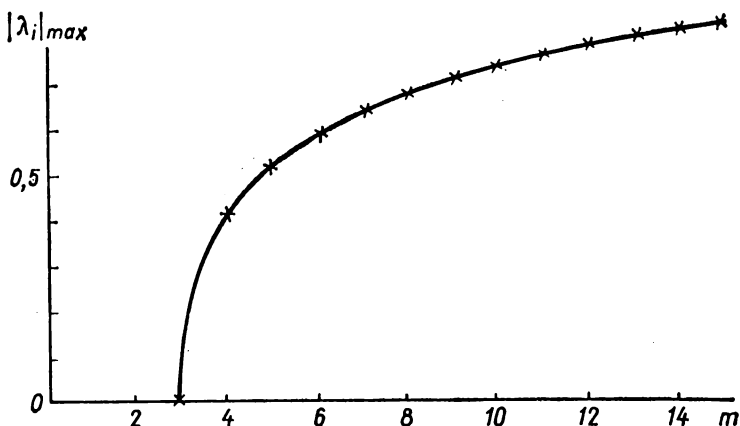


Рис. 28. Зависимость максимального модуля собственных значений матрицы \tilde{A} от значений m .

Аналитические исследования устойчивости системы (2.7) при других значениях m вызывают технические затруднения. Проведенные на ЭВМ вычисления собственных значений матрицы \tilde{A} показали, что максимальные модули ее собственных значений с ростом m возрастают и стремятся к единице (рис. 28). Следовательно, при любом конечном значении m система (2.7) будет экспоненциально устойчивой.

При аналоговом сопровождении целей ММ угломерного канала может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(n) &= A\mathbf{V}(n-1) + \Phi_1[\mathbf{V}(n-1); \mathbf{W}(n, i-1)]; \\ \mathbf{W}(n, i) &= R\mathbf{W}(n, i-1) + M\mathbf{F}_5(-F_4[C_1 \sin C_2\{\mathbf{L}, \mathbf{W}(n, i-1)\}]); \\ &\quad (2.10) \\ \mathbf{V}(0) &= \mathbf{V}_0; \quad \mathbf{W}(0, 0) = \mathbf{W}_0. \end{aligned}$$

При начальных условиях $\mathbf{V}_0 = \mathbf{W}_0 = 0$ справедливы равенства

$$\mathbf{V}(n) = 0, \quad \mathbf{W}(n, i) = 0 \quad \forall n, i.$$

Вопрос об устойчивости системы (2.10), как и ранее, сводится к приведению ее к виду (2.5), (2.5') и проверке выполнения условий теоремы 2.1. Сложность угломерного канала и аналогичных ему радиотехнических систем, определяющая сложность их математических моделей, приводит к необходимости привлечения для исследования их устойчивости ЭВМ. Процесс машинной проверки условий устойчивости, как было отмечено выше, может быть автоматизирован. Приведем возможную структурную схему алгоритма автоматизированной проверки устойчивости математических моделей, представляющих собой системы линейных конечно-разностных уравнений (рис. 29). Организация такой схемы основана на следующем утверждении.

Рис. 29. Структурная схема алгоритма автоматизированной проверки устойчивости математических моделей в виде систем конечноразностных уравнений.

Теорема 2.3 (модифицированная теорема устойчивости [33]). Пусть система

$$x_{n+1} = Ax_n, \quad (2.11)$$

где A — постоянная $(m \times m)$ -матрица, экспоненциально устойчива. Тогда система

$$x_{n+1} = (A + B_n)x_n \quad (2.12)$$

также экспоненциально устойчива при условии

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\|B_n\| n \ln n) = \bar{k},$$

$$0 \leq \bar{k} < \infty. \quad (2.12')$$

Доказательство. С помощью нормальной фундаментальной матрицы системы (2.11)

$$Y_{n,v} = A^{n-v}$$

представим решение системы (2.12) в виде

$$x_n = A^n x_0 + \sum_{v=1}^n A^{n-v} B_{v-1} x_{v-1}. \quad (2.13)$$

Поскольку система (2.11) экспоненциально устойчива, то

$$\|A^n\| \leq Lq^n, \quad 0 < q < 1, \quad (2.14)$$

и из (2.13) следует

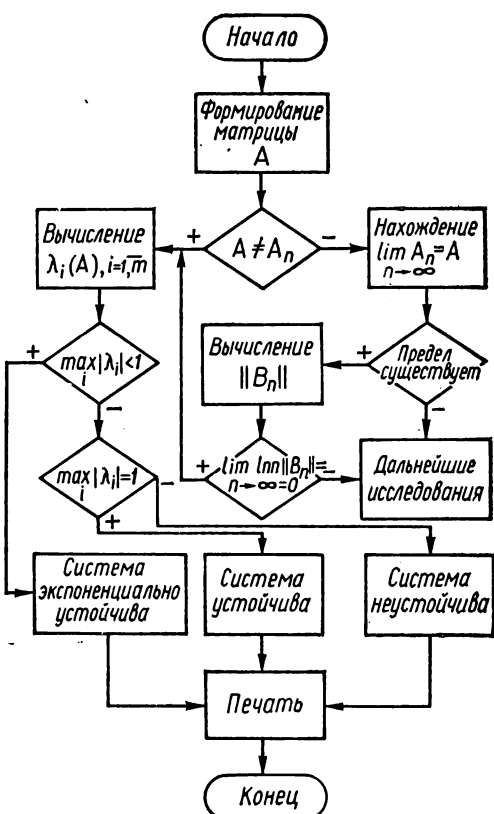
$$\|x_n\| \leq Lq^n \|x_0\| + L \sum_{v=1}^n q^{n-v} \|B_{v-1}\| \|x_{v-1}\|. \quad (2.15)$$

Введя обозначение $u_k = q^{-k} \|x_k\|$, из (2.15) получим

$$u_n \leq L \|x_0\| + (L/q) \sum_{v=1}^n \|B_{v-1}\| u_{v-1}.$$

Положим

$$V_n = L \|x_0\| + (L/q) \sum_{v=1}^n \|B_{v-1}\| u_{v-1},$$



тогда

$$V_{n+1} - V_n = \frac{L \|B_n\|}{q} u_n \leq V_n \frac{L \|B_n\|}{q},$$

или

$$V_{n+1} \leq \left(1 + \frac{L \|B_n\|}{q}\right) V_n \leq \dots \leq \left[\prod_{v=1}^n \left(1 + \frac{L \|B_v\|}{q}\right)\right] V_1.$$

С учетом введенного обозначения из последнего неравенства находим

$$q^{-(n+1)} \|x_{n+1}\| = u_{n+1} \leq V_{n+1} \leq \left[\prod_{v=1}^n \left(1 + \frac{L \|B_v\|}{q}\right)\right] L \left(1 + \frac{\|B_0\|}{q}\right) \|x_0\|,$$

или

$$\|x_{n+1}\| \leq q^{n+1} \left[\prod_{v=1}^n \left(1 + \frac{L \|B_v\|}{q}\right)\right] L \left(1 + \frac{\|B_0\|}{q}\right) \|x_0\|. \quad (2.16)$$

Рассмотрим произведение

$$P_n = \prod_{v=1}^n (1 + q_v) = \prod_{v=1}^n \left(1 + \frac{L \|B_v\|}{q}\right). \quad (2.17)$$

Так как $a_v > 0$, то для того чтобы существовал

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = P, \quad 0 < P < \infty,$$

необходимо и достаточно, чтобы ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (2.18)$$

сходился. Для этого должно выполняться условие

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n n \ln n) = k, \quad 0 \leq k < \infty,$$

или, что то же самое,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\|B_n\| n \ln n) = \bar{k}, \quad 0 \leq \bar{k} < \infty.$$

Но последнее соотношение выполняется на основании условия (2.12') теоремы 3. Следовательно, из (2.16) получаем

$$\|x_{n+1}\| \leq M q^{n+1} \|x_0\|,$$

и теорема доказана.

Следствие. Если матрица A устойчива ($|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \dots \leq |\lambda_{m+1}| < |\lambda_m| = 1$), то при выполнении условия (2.12') система (2.12) также устойчива.

На следующем этапе вычислительного эксперимента необходимо исследовать адекватность разработанной ММ исходному физиче-

скому описанию объекта моделирования. В работах [13, 14] изложен подход, позволяющий осуществить такое исследование и установить отсутствие ошибок в моделирующем алгоритме. В [7] изложена процедура проверки адекватности структурной схемы моделирующего алгоритма исходному описанию угломерного канала.

§ 3. Исследование математических моделей дальномерного канала

Ниже проводится построение и исследование математических моделей дальномерного канала, позволяющие моделировать прохождение сигналами аппаратурных трактов и, таким образом, имитировать на ЭВМ функционирование системы при типовых и критических воздействиях.

В качестве объекта моделирования рассмотрим следящий измеритель дальности, предназначенный для отслеживания задержки $\tau = 2R/C$, пропорциональной текущей дальности $R(t)$ до цели. Он включает кольцо слежения, состоящее из временного дискриминатора, экстраполятора и синтезатора задержки, схему поиска и захвата и другие элементы, обеспечивающие его работу. Структурная схема следящего измерителя дальности, сопряженного с приемопередающим трактом РЛС, приведена на рис. 30. Принимаемые ответные импульсы искажены шумами, поэтому следящий измеритель дальности служит сглаживающим фильтром для функции $\tau(t) = 2R(t)/C$. Отсчет дальности по сформированным измерителем следящим импульсам обеспечивает высокую точность измерений. Как и в случае угломерного канала, для следящего измерителя дальности можно выделить характерные режимы функционирования. Таковыми являются режим слежения с одновременным измерением дальности и предшествующий ему режим поиска и захвата (обнаружения). Каждому из режимов соответствует своя организация измерителя. Таким образом, следящий измеритель дальности представляет собой сложную систему с переменной структурой.

Рассмотрим построение ММ следящего измерителя дальности в режиме слежения. В структурную схему кольца слежения входят следующие элементы $F_i \in F$ (F — множество базисных элементов объекта моделирования).

F_1 — временной дискриминатор (коррелятор), предназначенный для формирования сигнала рассогласования между поступающим на вход ответным импульсом с выхода приемника и опорным сигналом. Для преобразования импульсов рассогласования в непрерывное напряжение на выходе временного дискриминатора служит пиковый детектор.

F_2 — экстраполятор, являющийся основным логическим элементом следящего измерителя, вырабатывающим оценку процесса $\tau(t)$. Главные элементы экстраполятора — это интеграторы, число которых определяет астатизм оптимального измерителя $m = n + 1$ (n — число интеграторов).

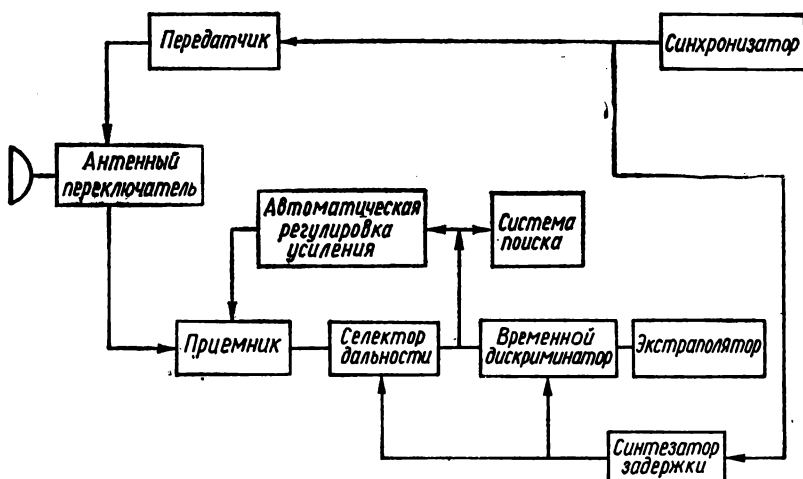


Рис. 30. Структурная схема слеящего измерителя дальности.

F_3 — комбинированный синтезатор задержки с управляемым генератором синусоидальных колебаний. В отсутствие управляющего воздействия частота колебаний управляемого генератора равна частоте колебаний задающего генератора, из которых формируются запросные импульсы. В контур управляемого генератора включена переменная емкость, изменяющая частоту генерируемых колебаний в зависимости от управляющего воздействия. Изменения частоты относительно исходного значения приводят к нарастанию фазового сдвига колебаний управляемого генератора по сравнению с колебаниями задающего. Набег фазы пропорционален интегралу частотного сдвига. Из колебаний формируются следящие импульсы, сдвинутые относительно запросных на время, пропорциональное их фазовому сдвигу и характеризующее значениями фазы синусоидальных колебаний $\varphi(n\Delta + \tau_n)$. Входным сигналом является последовательность импульсов с выхода приемника, временное положение которых по отношению к зондирующим импульсам задает текущее значение измеряемой дальности. Момент времени прихода n -го импульса определяется как

$$t_n = n\Delta + \tau_n.$$

Следует заметить, что рассмотренная уже на данном уровне детализации дискретная система, работающая в режиме автосопровождения, позволяет построить математическую модель, которая обеспечит детальное исследование, например, слеящего дальности в таких режимах:

1) автосопровождение с любым начальным значением дальности неподвижного и стартующего объектов с произвольными (в пределах практических возможностей) динамическими характеристиками;

2) сбои и срывы автосопровождения, т. е. имитация потери сигнала летящего объекта на произвольные промежутки времени, следующие друг за другом на траектории любой допустимой конфигурации;

3) автосопровождение с учетом флуктуаций энергетического центра ответного сигнала, эквивалентных наличию в тракте автосопровождения разнохарактерных нестабильностей и помех;

4) автосопровождение с возможным изменением во времени всех основных внутренних рабочих параметров канала, таких, как коэффициент усиления, время интегрирования, начальная скорость, крутизна рабочих характеристик основных каскадов и т. д.

При построении ММ используем следующие обозначения и допущения: τ_n — время запаздывания ответного сигнала в n -м периоде напряжения опорного генератора; Δ — период следования частоты опорного генератора; $\varphi(t)$ — значение фазы «следящего» генератора в текущий момент времени t ; $V[u]$ — типовая характеристика непрерывного элемента (в линейном случае $V[u] = ku + c$); $u_x(\cdot)$ — функция, характеризующая реакцию временного дискриминатора на рассогласование в момент сравнения (в линейном случае $u_x[u] = u_x \cdot u$); $u_c(\cdot)$, $u_{\text{инт}}(\cdot)$, α , ρ — соответственно функции и константы, характеризующие работу остальных блоков системы автоматического регулирования (САР). Тогда основные соотношения, описывающие ММ системы автоматического слежения за непрерывной фазой и ее коррекцию в дискретные моменты времени, можно представить в виде

$$\begin{aligned} \varphi[(n+1)\Delta + \tau_{n+1}] &= \varphi(n\Delta + \tau_n) + \int_{n\Delta + \tau_n}^{(n+1)\Delta + \tau_{n+1}} V[u_{\text{инт}}(n\Delta + \tau_n) + \\ &+ (\tau/\alpha) u_c(n\Delta + \tau_n + 0) (1 + e^{-\alpha(t - n\Delta - \tau_n)})] dt; \\ \dot{u}_{\text{инт}}[(n+1)\Delta + \tau_{n+1}] &= u_{\text{инт}}(n\Delta + \tau_n) + \frac{\rho}{\alpha} u_c(n\Delta + \tau_n + 0) \times \\ &\times (1 + e^{-\alpha(\Delta + \tau_{n+1} - \tau_n)}); \\ u_c[(n+1)\Delta + \tau_{n+1} + 0] &= u_c[n\Delta + \tau_n + 0] e^{-\alpha(\Delta + \tau_{n+1} - \tau_n)} + u_x \times \\ &\times \{\tau_{n+1} - \varphi[(n+1)\Delta + \tau_{n+1}]\}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

В векторной форме система (3.1) принимает вид

$$\mathbf{W}_{n+1} = A_n \cdot \mathbf{W}_n + \mathbf{f}_n(\mathbf{W}_n), \quad \mathbf{W}_0 = \gamma_0, \quad (3.2)$$

где

$$A_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{\rho}{\alpha} (1 + e^{-\alpha(\Delta + \tau_{n+1})}) \\ 0 & 0 & e^{-\alpha(\Delta + \tau_{n+1})} \end{bmatrix};$$

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_n(\mathbf{W}_n) &= \{g_n^*(u_n, v_n); 0; u_x[\tau_{n+1} - \varphi_n - g_n^*(u_n, v_n)]\}; \\ \mathbf{W}_n &= (\varphi_n, u_n, v_n), \quad \gamma_0 = (\varphi_0, u_0, v_0) - \text{трехмерные векторы}; \\ u_n &= u_{\text{инт}}(n\Delta + \tau_n); \quad v_n = u_c(n\Delta + \tau_n + 0); \quad \nabla \tau_{n+1} = \tau_{n+1} - \tau_n; \\ g_n^*(u_n, v_n) &= \int_{n\Delta + \tau_n}^{(n+1)\Delta + \tau_{n+1}} V \left[u_n + \frac{p}{\alpha} (1 + e^{-\alpha(t - n\Delta - \tau_n)}) v_n \right] dt. \end{aligned}$$

Нетрудно показать, что при линейном входном сигнале ($\tau_n = \tau_0 + sn$, $n = 0, 1, \dots, s$ — известный параметр), если начальные условия задать соотношениями $\varphi_0 = \tau_0$, $v_0 = 0$ и u_0 определить из уравнения

$$V[u_0] = (\Delta + s), \quad (3.3)$$

решением системы (3.2) будет вектор

$$\mathbf{W}_n = (\tau_n, u_0, 0). \quad (3.4)$$

В дальнейшем вектор $\mathbf{g}_n = (\tau_n, u_0, 0)$ играет важную роль, так как по нему оценивается качество работы САР. При этом следует заметить, что вектор \mathbf{g}_n представляет решение системы только в случае, если $\tau_n = \tau_0 + sn$, $\varphi_0 = \tau_0$, $v_0 = 0$, а u_0 определяется из уравнения (3.3). Решение в виде (3.4) означает, что при выборе смещения на реактивной лампе в соответствии с условиями (3.3), при отсутствии шумов, САР будет идеально отслеживать линейную входную траекторию.

Для исследования работы САР введем ряд определений.

Определение 3.1. Решение y_n уравнения

$$y_{n+1} = f_n(y_n) \quad (3.5)$$

называется устойчивым, если для любых $\varepsilon > 0$ и n_0 существует $\delta = \delta(n_0, \varepsilon)$ такое, что при любом другом решении g_{n_0} , удовлетворяющем условию $\|y_{n_0} - g_{n_0}\| < \delta$, $\|y_n - g_n\| < \varepsilon$ для любого $n \geq n_0$.

Определение 3.2. Вектор \mathbf{g}_n называется устойчивым по отношению к системе (3.5), если для любых $\varepsilon > 0$ и n_0 существует $\delta = \delta(n_0, \varepsilon)$ такое, что при $\|y_{n_0} - g_{n_0}\| < \delta(n_0, \varepsilon)$ $\|y_n - g_n\| < \varepsilon$ для всех $n \geq n_0$, где y_n — решение системы (3.5).

Определение 3.3. Система (3.5) называется устойчивой, если все ее решения устойчивы.

Определение 3.4. САР функционирует устойчиво, если соответствующая конечно-разностная система (3.2) устойчива и вектор $\mathbf{g}_n = (\tau_n, u_0, 0)$ устойчив по отношению к системе (3.2).

Наибольший интерес представляет вывод условий, налагаемых на параметры САР, обеспечивающие ее устойчивое функционирование.

Аналитическое исследование линейной модели. Рассмотрим сначала линейный режим работы САР данного класса. Очевидно, для этого случая систему (3.2) следует преобразовать к виду

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_{n+1} &= \tilde{A}_n \mathbf{W}_n + \mathbf{F}_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \\ \mathbf{W}_0 &= \gamma_0, \end{aligned} \quad (3.6)$$

где

$$\tilde{A}_n = \begin{bmatrix} 1 & a_n & b_n \\ 0 & 1 & d_{n+1} \\ -u_x & -u_x a_n & -u_x b_n + e_{n+1} + 1 \end{bmatrix};$$

$$F_n = (c_n, 0, -u_x c_n + u_x \tau_{n+1});$$

$$a_n = k(\Delta + \nabla \tau_{n+1}); \quad b_n = \frac{pk}{\alpha} \left[\Delta + \nabla \tau_{n+1} + \frac{1}{\alpha} (1 - e^{-\alpha(\Delta + \nabla \tau_{n+1})}) \right];$$

$$c_n = (c - u_0 k)(\Delta + \nabla \tau_{n+1}); \quad d_n = \frac{p}{\alpha} (1 + e^{-\alpha(\Delta + \nabla \tau_n)});$$

$$e_n = e^{-\alpha(\Delta + \nabla \tau_n)} - 1.$$

Теорема 3.1. Если для уравнения (3.6), описывающего работу САР в линейном приближении, выполняются следующие условия: 1) $\lambda_1(\tilde{A}_n^* \tilde{A}_n) < 1$, где $\lambda_1(\tilde{A}_n)$ — максимальное по модулю собственное значение матрицы \tilde{A}_n , и 2) начальное значение для u_0 выбрано равным $u_0(1 + c)/k$, то параметры Δ и u_x можно подобрать так, чтобы САР функционировала устойчиво.

Доказательство. С помощью вектора $g_n(\tau_n, u_0, 0)$ введем в рассмотрение новый вектор \tilde{F}_n , определяемый выражением

$$\tilde{F}_n = g_{n+1} - \tilde{A}_n g_n = (\nabla \tau_{n+1} - u_0 a_n, 0, u_x \tau_n + u_x u_0 a_n).$$

Тогда

$$g_{n+1} - W_{n+1} = \tilde{A}_n(g_n - W_n) + \tilde{F}_n - F_n,$$

или

$$z_{n+1} = \tilde{A}_n z + \hat{F}_n, \quad (3.7)$$

где

$$z_{n+1} = g_{n+1} - W_{n+1}, \quad \hat{F}_n = (-\Delta, 0, u_x \Delta).$$

При вычислении \hat{F}_n использовалось условие 2. Решение уравнения (3.7) имеет вид

$$z_n = K_{n,n_0} z_{n_0} + \sum_{m=n_0}^{n-1} K_{n,m+1} \hat{F}_m, \quad (3.8)$$

где $K_{n,m} = \prod_{i=m+1}^{n=n_0+1, n_0+2, \dots} \tilde{A}_{n+i-m-1}$ ($m \leq n-1$) — так называемая матрица Коши. Из выражения (3.8) следует неравенство

$$\|z_n\| \leq \|K_{n,n_0}\| \|z_{n_0}\| + \Delta \sqrt{1 + u_x^2} \sum_{m=n_0}^{n-1} \|K_{n,m+1}\|. \quad (3.9)$$

Принимая во внимание, что условие 1 приводит к неравенству $\|\tilde{A}_n\| < 1$, из (3.9) получаем

$$\|z_n\| \leq \|z_{n_0}\| + \Delta(n - n_0) \sqrt{1 + u_x^2}. \quad (3.10)$$

Выберем для заданного ε и произвольного n_0 $\delta(n_0, \varepsilon) = \varepsilon/2$. Тогда, приведя параметры Δ и u_x к условию

$$\Delta(n - n_0) \sqrt{1 + u_x^2} < \varepsilon/2,$$

из выражения (3.10) получим $\|z_n\| < \varepsilon$, $n \geq n_0$. Этим доказано, что вектор $g_n = (\tau_n, u_0, 0)$ устойчив по отношению к системе (3.6). Устойчивость конечно-разностной системы (3.6) следует из свойств матрицы \tilde{A}_n , чем и завершается доказательство теоремы.

Теорема 3.2. Пусть $\nabla \tau_n = \nabla \tau = \text{const}$ и начальное значение определяется формулой

$$u_0 = \frac{1}{k} \left(\frac{\nabla \tau}{\Delta + \nabla \tau} - c \right).$$

Тогда, для того чтобы САР функционировала устойчиво, достаточно выполнения следующих неравенств:

$$\begin{aligned} 2 + e^{-\alpha(\Delta + \nabla \tau)} - u_x b &> 0; \\ e^{-2\alpha(\Delta + \nabla \tau)} + 2e^{-\alpha(\Delta + \nabla \tau)} + \frac{u_x p k}{\alpha} (\Delta + \nabla \tau) (1 + e^{-\alpha(\Delta + \nabla \tau)}) &< \\ < [2 + e^{-\alpha(\Delta + \nabla \tau)} - u_x b] e^{-\alpha(\Delta + \nabla \tau)}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Доказательство. Для случая $\nabla \tau_n = \nabla \tau = \text{const}$ матрица \tilde{A}_n в уравнении (3.6) не зависит от n . Положим для удобства $\tilde{A}_n = A$ и запишем характеристическое уравнение для матрицы: $P(\lambda) = \lambda^3 - [2 + e^{-\alpha(\Delta + \nabla \tau)} - u_x b] \lambda^2 + [1 + 2e^{-\alpha(\Delta + \nabla \tau)} + k(\Delta + \nabla \tau) \times$
 $\times \frac{u_x p}{\alpha} (1 + e^{-\alpha(\Delta + \nabla \tau)}) - u_x b] \lambda - e^{-\alpha(\Delta + \nabla \tau)} = 0$, (3.12)

где

$$b = \frac{pk}{\alpha} \left[\Delta + \nabla \tau + \frac{1}{\alpha} (1 - e^{-\alpha(\Delta + \nabla \tau)}) \right].$$

Покажем, что все корни характеристического многочлена $P(\lambda)$ по модулю меньше единицы. Для этого преобразуем $P(\lambda)$ к виду

$$\begin{aligned} P(\lambda) = (\lambda - 1)^2 (\lambda - e^{-\alpha(\Delta + \nabla \tau)}) + \lambda u_x \left[b(\lambda - 1) + \frac{pk}{\alpha} (\Delta + \nabla \tau) + \right. \\ \left. + (1 + e^{-\alpha(\Delta + \nabla \tau)}) \right]. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Из (3.13) с учетом условий (3.11) следует, что $P(\lambda) > 0$ для всех $\lambda \geq 1$. Если через λ_i обозначить корни многочлена $P(\lambda)$, совпадаю-

щие с собственными значениями матрицы \tilde{A} , то для одного из корней, например λ_1 , с учетом (3.11) будет выполняться неравенство

$$e^{-\alpha(\Delta + \nabla \tau)} < \lambda_1 < 1. \quad (3.14)$$

Таким образом, произведение $\lambda_2 \lambda_3$ двух других корней согласно (3.12) удовлетворяет неравенству $0 < \lambda_2 \lambda_3 < 1$, следовательно, один из корней λ_2 или λ_3 по модулю строго меньше единицы. Здесь возможно несколько случаев: а) λ_2, λ_3 — комплексно-сопряженные корни, тогда $|\lambda_2| = |\lambda_3| < 1$; б) λ_2, λ_3 вещественны, тогда они оба либо отрицательны, либо положительны. Это на основании условия (3.11) позволяет сделать заключение, что оба корня по модулю меньше единицы. Таким образом, во всех случаях доказано, что $|\lambda_i| < 1, i = 1, 2, 3$.

Согласно общей теории линейных конечно-разностных уравнений условия (3.14) обеспечивают устойчивость решений вектора $g_n = (\tau_n, u_0, 0)$ по отношению к системе (3.6). Для вектора $z_n = g_n - W_n$ в рассматриваемом случае за счет выбора получим однородную систему

$$z_{n+1} = \tilde{A}z_n,$$

устойчивую на основании только что доказанных свойств матрицы \tilde{A} . Теорема полностью доказана.

Заметим, что применительно к САР рассматриваемого класса условия теоремы 2 означают, что между характером задаваемой входной функции, дискретностью работы и основными техническими параметрами САР существует определенная взаимосвязь, которая обеспечивает устойчивое функционирование каждой конкретной САР путем подбора ее параметров в соответствии с характером входной функции.

Аналитическое исследование нелинейной модели. Исследуем теперь асимптотическую устойчивость нелинейной ММ дальномерного канала при условии, что входное воздействие является линейным. Систему (3.1) запишем в виде

$$W_{n+1} = \tilde{A}_n \tilde{W}_n + \tilde{f}_n(W_n), \quad n = 0, 1, \dots; \quad (3.15)$$

$$\tilde{W}_0 = \gamma_0,$$

где

$$\tilde{A}_n = \begin{bmatrix} 1 & a_n & b_n \\ 0 & 1 & d_{n+1} \\ -u_x & -u_x d_n & -u_x b_n + e_{n+1} + 1 \end{bmatrix};$$

$$\tilde{f}_n(\tilde{W}_n) = \{g_n(u_n, v_n) - g_n(u_0, 0) - a_n(u_n - u_0) - b_n v_n; 0;$$

$$u_x [\tau_{n+1} - \varphi_n - g_n^*(u_n, v_n)] - u_x [\nabla \tau_{n+1} - g_n^*(u_0, 0)] + u_x (\varphi_n - \tau_n) + \\ + u_x a_n (u_n - u_0) + u_x b_n v_n \},$$

$$\tilde{W}_n = (\varphi_n - \tau_n, u_n - u_0, v_n), \quad \gamma_0 = (\varphi_0, u_0, v_0)$$

— трехмерные векторы;

$$g_n^*(u_n, v_n) = \int_{n\Delta + \tau_n}^{(n+1)\Delta + \tau_{n+1}} V \left[u_n + \frac{p}{\alpha} (1 + e^{-\alpha(t - n\Delta - \tau_n)}) v_n \right] dt$$

и

$$\nabla \tau_{n+1} = \tau_{n+1} - \tau_n, \quad a_n = k (\Delta + \nabla \tau_{n+1}), \quad b_n = \frac{pk}{\alpha} \left[\Delta + \nabla \tau_{n+1} + \right. \\ \left. + \frac{1}{\alpha} (1 - e^{-\alpha(\Delta + \nabla \tau_{n+1})}) \right],$$

$$d_n = \frac{p}{\alpha} (1 + e^{-\alpha(\Delta - \nabla \tau_n)}), \quad e_n = e^{-\alpha(\Delta + \nabla \tau_n)} - 1.$$

Заметим, что для системы (3.15) вектор $\tilde{W}_n \equiv 0$ является решением.

Для исследования работы САР в этом случае необходимы следующие определения [62].

Определение 3.5. Систему $y_{n+1} = A_n y_n$ ($n = 0, 1, \dots$), где y_n — p -вектор, A_n — невырожденная ($p \times p$)-матрица, будем называть правильной, если:

1) существует строгий предел

$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4} \sum_{m=0}^{n-1} \ln |\det A_m|,$$

2) выполняется равенство $\hat{\sigma} = s$, где $\hat{\sigma}$ — сумма характеристических показателей данной системы.

Определение 3.6. Решение \tilde{y}_n системы

$$\tilde{y}_{n+1} = f_n(\tilde{y}_n) \quad (n = 0, 1, \dots) \quad (3.16)$$

называется асимптотически устойчивым, если оно устойчиво и, кроме того, существует $\Delta > 0$ такое, что все решения y_n этой системы, удовлетворяющие условию $\|y(0) - \tilde{y}(0)\| \leq \Delta$, обладают свойством $\lim_{n \rightarrow \infty} \|y_n - \tilde{y}_n\| = 0$.

Определение 3.7. Будем говорить, что квазилинейная система конечно-разностных уравнений

$$y_{n+1} = A_n y_n + f_n(y_n) \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

имеет возмущение r -го порядка, если выполняются условия

$$f_n(0) \equiv 0, \quad \|f_n(y_n)\| \leq \delta_n \|y_n\| \quad (r \geq 1),$$

где A_n — невырожденная $(p \times p)$ -матрица; \mathbf{f} и \mathbf{z} — p -векторы; δ_n — положительная скалярная последовательность.

Ограничимся изучением асимптотической устойчивости квазилинейной системы (3.15). Для этого потребуется следующая теорема.

Теорема 3.3. *Предположим, что система*

$$\tilde{\mathbf{W}}_{n+1} = \tilde{A}_n \tilde{\mathbf{W}}_n \quad (n = 0, 1, \dots) \quad (3.17)$$

правильна, α — ее максимальный (центральный) характеристический показатель и квазилинейная система (3.15) имеет возмущения r -го порядка ($r > 1$). Тогда если система (3.17) асимптотически устойчива, причем $\alpha < 0$, то для асимптотической устойчивости тривиального решения системы (3.15) достаточно, чтобы ряд

$$\sum_{m=0}^{\infty} e^{[(\alpha+\varepsilon)(r-1)+2\varepsilon]m} \delta_m < \infty, \quad (3.18)$$

где ε — произвольное число, сходиллся.

Перейдем теперь к выяснению требований к характеристикам основных блоков САР, при выполнении которых выполнялись бы условия теоремы 3.3, чем была бы доказана асимптотическая устойчивость рассматриваемой ММ.

Пусть нелинейные характеристики временного дискриминатора $u_x(\cdot)$ и реактивной лампы $V(\cdot)$ удовлетворяют следующим условиям:

$$\begin{aligned} |V'(a)| &\leq C_1, & |V''(a)| &\leq C_2, \\ |u'_x(a)| &\leq C_3, & |u''_x(a)| &\leq C_4 \end{aligned} \quad (3.19)$$

для любых a . Тогда нетрудно показать, что справедлива оценка

$$\|\tilde{\mathbf{f}}_n^* (\tilde{\mathbf{W}}_n)\|_3 \leq \delta_n \|\tilde{\mathbf{W}}_n\|_3^2, \quad (3.20)$$

где

$$\begin{aligned} \delta_n &= \max_{1 \leq i \leq 5} |M_i|; \\ M_1 &= \frac{C_2}{2} \left[(\Delta + \nabla \tau_{n+1}) \left(1 + \frac{p}{\alpha} \right) + \frac{1}{\alpha} (1 - e^{-\alpha(\Delta + \nabla \tau_{n+1})}) \right]; \\ M_2 &= \frac{C_2 p^2}{\alpha^2} \left\{ \Delta + \nabla \tau_{n+1} - \frac{1}{2} \left[2e^{-\alpha(\Delta + \nabla \tau_{n+1})} + \frac{1}{2} e^{-2\alpha(\Delta + \nabla \tau_{n+1})} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 2,5 \right] \right\}; \\ M_3 &= \frac{C_4}{2} \left\{ 1 + C_1 \left[\Delta + \nabla \tau_{n+1} + \frac{p}{\alpha} \left(\Delta + \nabla \tau_{n+1} + \frac{1}{\alpha} \left(1 - \right. \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. - e^{-\alpha(\Delta + \nabla \tau_{n+1})} \right) \right) \right] \right\}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_4 &= \frac{C_4 C_1^2}{2} (\Delta + \nabla \tau_{n+1}) \left\{ \Delta + \nabla \tau_{n+1} + \frac{p}{\alpha} \left[\Delta + \nabla \tau_{n+1} + \frac{1}{\alpha} (1 - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - e^{-\alpha(\Delta + \nabla \tau_{n+1})} \right] + 1 \right\} + \frac{C_2 C_3}{2} \left[(\Delta + \nabla \tau_{n+1}) \left(1 + \frac{p}{\alpha} \right) + \frac{1}{\alpha} \times \right. \\
&\quad \left. \times (1 - e^{-\alpha(\Delta + \nabla \tau_{n+1})}) \right]; \\
M_5 &= \frac{C_4 C_1 p}{2\alpha} \left[\Delta + \nabla \tau_{n+1} + \frac{1}{\alpha} (1 - e^{-\alpha(\Delta + \nabla \tau_{n+1})}) \right] \left\{ \frac{C_1 p}{\alpha} \left[\Delta + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \nabla \tau_{n+1} + \frac{1}{\alpha} (1 - e^{-\alpha(\Delta + \nabla \tau_{n+1})}) \right] + C_1 (\Delta + \nabla \tau_{n+1}) + 1 \right\} + \frac{C_2 C_3}{2} \times \\
&\quad \times \frac{p^2}{\alpha^2} \left[\Delta + \nabla \tau_{n+1} - \frac{1}{\alpha} \left(2e^{-\alpha(\Delta + \nabla \tau_{n+1})} + \frac{1}{\alpha} e^{-2\alpha(\Delta + \nabla \tau_{n+1})} + 2,5 \right) \right].
\end{aligned}$$

Следует отметить, что, как правило, типовые характеристики реальных физических элементов удовлетворяют условиям (3.19), откуда следует, что эти требования не являются достаточно жесткими.

Итак, при выполнении условий (3.19) согласно определению 7 квазилинейная система (3.15) имеет возмущения второго порядка. Поскольку рассматривается класс прямых входных траекторий, все константы не зависят от n и, следовательно, коэффициент δ_n в (3.20) также не зависит от n , т. е. $\delta_n \equiv \delta$.

Таким образом, для асимптотической устойчивости тривиального решения системы (3.15) необходимо проверить ее правильность и отрицательность максимального характеристического показателя.

То, что однородная система $\tilde{W}_{n+1} = \tilde{A}_n \tilde{W}_n$ ($n = 0, 1, \dots$), соответствующая (3.15), является правильной, следует из соотношения

$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} \ln |\det \tilde{A}_n| = \ln |\det \tilde{A}| = \ln |\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3| = \hat{\sigma}.$$

Здесь λ_i ($i = 1, 2, 3$) — собственные значения матрицы $\tilde{A}_n = A$. Но при выполнении условий (3.11) все λ_i ($i = 1, 2, 3$) по модулю меньше единицы, а значит, максимальный характеристический показатель отрицателен. Отсюда следует сходимость ряда (3.18), так как ε — сколь угодно малое положительное число. Таким образом, доказана

Теорема 3.4. Если характеристики $u_x(\cdot)$ и $V(\cdot)$ дальномерного канала удовлетворяют условиям (3.19), то его математическая модель (3.15) асимптотически устойчива при линейном входном воздействии.

Следует заметить, что если класс входных траекторий относительно n на бесконечности имеет порядок роста не выше первого, то полученные результаты остаются в силе.

§ 4. Идентификация параметров дальномерного канала

При изучении вероятностных систем разнообразной природы (технических, биологических и др.) характерна ситуация, когда зависимость между входом, выходом и возмущением перестает быть обозримой и поддающейся аналитическим методам исследования. В этих случаях целесообразно применять имитационное моделирование — численный метод, ставящий в соответствие определенному входу и возмущению выходные данные системы в виде чисел. Однако очевидно, что имитационное моделирование не должно ограничиваться пассивным наблюдением выходных характеристик, а является средством активного изменения входных данных с целью получения желаемого выхода. Вопросами подбора с определенной целью входных параметров занимается теория планирования эксперимента в имитационном моделировании. К настоящему времени разработаны некоторые методы планирования эксперимента в имитационном моделировании (факторный и неполный факторный анализ, движение по градиенту), однако из рассмотрения даже простых ситуаций следует, что указанные методы имеют существенные ограничения. Кардинальным подходом в планировании эксперимента в имитационном моделировании является применение методов стохастического программирования. Впервые на это обратили внимание Ю. М. Ермольев и Т. П. Марьянович [40].

Рассмотрим имитационную модель дискретной системы сложного ИВК и продемонстрируем преимущества методов стохастического программирования при планировании численного эксперимента.

Описанная ниже модель является развитием модели, описанной в § 1, на случай, когда основные параметры имеют вероятностный характер. Как показано выше, основные соотношения, представляющие собой математическую модель, описываются системой нелинейных конечно-разностных уравнений вида

$$\mathbf{W}_{n+1} = A_n \mathbf{W}_n + \mathbf{f}_n(\mathbf{W}_n), \quad \mathbf{W}_0 = \gamma_0, \quad (4.1)$$

где

$$A_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{p + \omega_p}{\alpha + \omega_\alpha} (1 + e^{-(\alpha + \omega_\alpha)(\Delta + \nabla \tau_{n+1})}) \\ 0 & 0 & e^{-(\alpha + \omega_\alpha)(\Delta + \nabla \tau_{n+1})} \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{f}_n(\mathbf{W}_n) = [g_n^*(u_n, v_n); 0; u_x(\tau_{n+1} - \varphi_n - g_n^*(u_n, v_n), \pi_{u_x}, \omega_{u_x})], \quad (4.2)$$

$$\mathbf{W}_n = (\varphi_n, u_n, v_n), \quad \gamma_0 = (\varphi_0, u_0, v_0)$$

— трехмерные векторы;

$$\dot{g}_n(u_n, v_n) = \int_{n\Delta + \tau_n}^{(n+1)\Delta + \tau_{n+1}} V \left[u_n + \frac{p + \omega_p}{\alpha + \omega_\alpha} (1 + e^{-(\alpha + \omega_\alpha)(t - n\Delta - \tau_n)}) v_n, \right. \\ \left. \pi_V, \omega_V \right] dt;$$

π_{u_x} , π_V — векторы параметров функций; ω_α , ω_p , ω_V , ω_{u_x} — случайные помехи, накладываемые на параметры α , p и функции $V(\cdot)$, $u_x(\cdot)$. Кроме того, случайна, вообще говоря, и последовательность $\{\tau_n\}$.

При заданных значениях α , p , π_V и π_{u_x} , моделируя с помощью датчиков случайных чисел ω_α , ω_p , ω_V , ω_{u_x} и τ , можно имитировать динамику функционирования системы W_n и, в частности, вычислить рассогласование $\sum_{n=1}^N (\varphi_n - \tau_n)^2$. Здесь φ_n — случайные величины, распределение которых неявно зависит от параметров, поэтому естественно поставить задачу подбора параметров α , p , π_V , π_{u_x} таким образом, чтобы минимизировать математическое ожидание суммарного рассогласования, т. е.

$$F(\alpha, p, \pi_V, \pi_{u_x}) = M \left(\sum_{n=1}^N (\varphi_n(\alpha, p, \pi_V, \pi_{u_x}, \omega) - \tau_n)^2 \right) = \\ = \int \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n=1}^N (\varphi_n(\alpha, p, \pi_V, \pi_{u_x}, y) - \tau_n)^2 dH(y) \rightarrow \min, \quad (4.3)$$

где

$$\omega = (\omega_\alpha, \omega_p, \omega_V, \omega_{u_x}, \tau_1, \dots, \tau_n);$$

$$H(y) = H(y_1, y_2, \dots, y_i) = P(\omega_\alpha < y_1; \omega_p < y_2; \omega_V < y_3;$$

$$\omega_{u_x} < y_4; \tau_1 < y_5; \dots; \tau_n < y_{n+5})$$

— функция распределения ω . Таким образом, видим, что, с одной стороны, можно достаточно эффективно имитировать функционирование системы, а с другой — практически невозможно найти аналитическое выражение для функционала $F(\alpha, p, \pi_V, \pi_{u_x})$ и, следовательно, применять для оптимизации методы градиентного типа.

Выходом из этого положения является применение прямых вероятностных методов стохастического программирования, основная особенность которых в данном случае — конструирование оптимизирующей последовательности по результатам отдельных имитаций [38]. Более точно это можно сформулировать так: движение осуществляется не в направлении градиента, а в случайном, являющем-

ся его статистической оценкой. Это направление носит название стохастического градиента.

Задача (4.1) — (4.3) отличается от известной задачи программного управления [38] тем, что в связи с физическими соображениями управление не изменяется со временем. Однако для нее метод стохастических градиентов, предложенный в работе [38], легко модифицируется. Будем считать, что $V(\cdot)$ и $u_x(\cdot)$ — дифференцируемые функции и, кроме того, выполнены достаточные условия для внесения градиента под знак интеграла, фигурирующего в определении функции g_n^* .

Найдем стохастический градиент для функционала F . Обозначим правые части системы конечно-разностных уравнений через $g_n^i(W_n, \alpha, p, \pi, \omega)$, $i = \overline{1, 3}$, где $\pi = (\pi_V, \pi_{u_x})$. Системой, сопряженной с (4.1), будет следующая:

$$\lambda(n) = \begin{pmatrix} D(g_n^1, g_n^2, g_n^3) \\ D(\varphi_n, u_n, v_n) \end{pmatrix}^T \lambda(n+1) - \begin{pmatrix} 2(\varphi_n - \tau_n) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad (4.4)$$

$$\lambda(N) = - \begin{pmatrix} 2(\varphi_N - \tau_N) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (4.5)$$

где

$$\frac{D(\cdot, \dots, \cdot)}{D(\cdot, \dots, \cdot)} \text{ — якобиан, } \lambda(W) = \begin{pmatrix} \lambda_1(n) \\ \lambda_2(n) \\ \lambda_3(n) \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим случайный вектор, распределение которого зависит от $\alpha, p, \pi_V, \pi_{u_x}$:

$$\xi(\alpha, p, \pi_V, \pi_{u_x}) = - \sum_{n=0}^{N-1} \begin{pmatrix} D(g_n^1, g_n^2, g_n^3) \\ D(\pi, p, \pi_V, \pi_{u_x}) \end{pmatrix}^T \lambda(n+1), \quad (4.6)$$

где $\lambda(n)$ удовлетворяет (4.4) и (4.5). Применяя выкладки, аналогичные приведенным в работе [38], можно доказать, что

$$M \xi(\alpha, p, \pi_V, \pi_{u_x}) = \nabla F(a, p, \pi_V, \pi_{u_x}),$$

т. е. $\xi(\alpha, p, \pi_V, \pi_{u_x})$ является стохастическим градиентом для функции F .

Опишем s -ю итерацию метода стохастических градиентов применительно к задаче в предположении, что на управляемые параметры не накладываются ограничения.

Пусть приближения управляющих параметров являются $\alpha^s, p^s, \pi_V^s, \pi_{u_x}^s$. С помощью датчика случайных чисел в соответствии с $H(y)$ — совместной функцией распределения случайных параметров — моделируется независимое наблюдение над случайными

параметрами $\omega_\alpha^s, \omega_p^s, \omega_v^s, \omega_{u_x}^s, \tau^s$. Затем при этих значениях параметров решается система (4.1) и сопряженная с ней система (4.4), (4.5):

$$\begin{aligned}\lambda_1(n) &= \lambda_1(n+1) - \frac{\partial}{\partial y^2} u_x(y_2, \pi_{u_x}^s, \omega_{u_x}^s) \lambda_3(n+1) - 2(\varphi_n^s - \tau_n^s); \\ \lambda_2(n) &= \left[\int_{n\Delta + \tau_n^s}^{(n+1)\Delta + \tau_{n+1}^s} \frac{\partial}{\partial y_1} V(y_1^s, \pi_v^s, \omega_v^s) dt \right] \lambda_1(n+1) + \lambda_2(n+1) + \\ &+ \left[\frac{\partial}{\partial y^2} u_x(y_2^s, \pi_{u_x}^s, \omega_{u_x}^s) \int_{n\Delta + \tau_n^s}^{(n+1)\Delta + \tau_{n+1}^s} \frac{\partial}{\partial y_1} V(y_1^s, \pi_v^s, \omega_v^s) dt \right] \lambda_3(n+1); \\ \lambda_3(n) &= \left[\int_{n\Delta + \tau_n^s}^{(n+1)\Delta + \tau_{n+1}^s} \frac{\partial}{\partial y_1} V(y_1^s, \pi_v^s, \omega_v^s) (1 + e^{-(\alpha^s + \omega_\alpha^s)(t - n\Delta - \tau_n^s)}) dt \right] \times \\ &\times \lambda_1(n+1) + \frac{p^s + \omega_p^s}{\alpha^s + \omega_\alpha^s} (1 + e^{-(\alpha^s + \omega_\alpha^s)(\Delta + \tau_{n+1}^s)}) \lambda_2(n+1) + \\ &+ \left[e^{-(\alpha^s + \omega_\alpha^s)(\Delta + \tau_{n+1}^s)} - \frac{\partial}{\partial y_2} u_x(y_2^s, \pi_{u_x}^s, \omega_{u_x}^s) \int_{n\Delta + \tau_n^s}^{(n+1)\Delta + \tau_{n+1}^s} \frac{\partial}{\partial y_1} \times \right. \\ &\times V(y_1^s, \pi_v^s, \omega_v^s) e^{-(\alpha^s + \omega_\alpha^s)(t - n\Delta - \tau_n^s)} dt \left. \right] \lambda_3(n+1); \\ \lambda_1(N) &= -2(\varphi_N^s - \tau_N^s), \quad \lambda_2(N) = 0, \quad \lambda_3(N) = 0,\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}y_1^s &= u_n^s + \frac{(p^s + \omega_p^s)}{(\alpha^s + \omega_\alpha^s)} (1 + e^{-(\alpha^s + \omega_\alpha^s)(t - n\Delta - \tau_n^s)}); \\ y_2^s &= \tau_{n+1}^s - \varphi_n^s - g_n^s(u_n^s, v_n^s, \omega^s).\end{aligned}$$

Определим стохастический градиент по формуле (4.6), которую можно конкретизировать следующим образом:

$$\begin{aligned}\xi_\alpha^s(\alpha^s, p^s, \pi_v^s, \pi_{u_x}^s) &= - \sum_{n=0}^{N-1} \int_{n\Delta + \tau_n^s}^{(n+1)\Delta + \tau_{n+1}^s} \left\{ \frac{\partial}{\partial y_1} V(y_1^s, \pi_v^s, \omega_v^s) \times \right. \\ &\times \left[\frac{(p^s + \omega_p^s)}{(\alpha^s + \omega_\alpha^s)} (1 + e^{-(\alpha^s + \omega_\alpha^s)(t - n\Delta - \tau_n^s)}) v_n^s - \frac{(p^s + \omega_p^s)}{(\alpha^s + \omega_\alpha^s)} \times \right.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times e^{-(\alpha^s + \omega_\alpha^s)(t - n\Delta - \tau_n^s)} dt \Big\} \lambda_1^s(n+1) - \left\{ e^{-(\alpha^s + \omega_\alpha^s)(\Delta + \nabla \tau_{n+1}^s)} v_n^s - \right. \\
& - \frac{\partial}{\partial y_2} u_x(y_2^s, \pi_{u_x}^s, \omega_{u_x}^s) \int_{n\Delta + \tau_n^s}^{(n+1)\Delta + \tau_{n+1}^s} \left[\frac{\partial}{\partial y_1} V(y_1^s, \pi_V^s, \omega_V^s) \times \right. \\
& \times \frac{(p^s + \omega_p^s)}{(\alpha^s + \omega_\alpha^s)^2} (1 + e^{-(\alpha^s + \omega_\alpha^s)(t - n\Delta - \tau_n^s)} v_n^s) - \frac{(p^s + \omega_p^s)}{(\alpha^s + \omega_\alpha^s)} \times \\
& \left. \left. \times e^{-(\alpha^s + \omega_\alpha^s)(t - n\Delta - \tau_n^s)} v_n^s \right] dt \right\} \lambda_3^s(n+1); \\
& \xi_p^s(\alpha^s, p^s, \pi_V^s, \pi_{u_x}^s) = - \sum_{n=0}^{N-1} \int_{n\Delta + \tau_n^s}^{(n+1)\Delta + \tau_{n+1}^s} \left[\frac{\partial}{\partial y_1} V(y_1^s, \pi_V^s, \omega_V^s) \times \right. \\
& \times \frac{v_n^s}{\alpha^s + \omega_\alpha^s} (1 + e^{-(\alpha^s + \omega_\alpha^s)(\Delta + \nabla \tau_{n+1}^s)}) dt \Big] \lambda_2^s(n+1) + \frac{v_n^s}{\alpha^s + \omega_\alpha^s} \times \\
& \times (1 + e^{-(\alpha^s + \omega_\alpha^s)(\Delta + \nabla \tau_{n+1}^s)}) \lambda_2^s(n+1) - \left\{ \frac{\partial}{\partial y^2} u_x(y_2^s, \pi_{u_x}^s, \omega_{u_x}^s) \times \right. \\
& \times \int_{n\Delta + \tau_n^s}^{(n+1)\Delta + \tau_{n+1}^s} \left[\frac{\partial}{\partial y_1} V(y_1^s, \pi_V^s, \omega_V^s) \frac{v_n^s}{\alpha^s + v_n^s} (1 + e^{-(\alpha^s + \omega_\alpha^s)(t - n\Delta - \tau_n^s)}) \right] \times \\
& \left. \times dt \right\} \lambda_3^s(n+1); \\
& \xi_{\pi_V}^s(\alpha^s, p^s, \pi_V^s, \pi_{u_x}^s) = - \sum_{n=0}^{N-1} \left[\int_{n\Delta + \tau_n^s}^{(n+1)\Delta + \tau_{n+1}^s} \nabla_{\pi_V} V(y_1^s, \pi_V^s, \omega_V^s) dt \right] \times \\
& \times \lambda_1^s(n+1) + \left[\frac{\partial}{\partial y_2} u_x(y_2^s, \pi_{u_x}^s, \omega_{u_x}^s) \int_{n\Delta + \tau_n^s}^{(n+1)\Delta + \tau_{n+1}^s} \nabla_{\pi_V} V(y_1^s, \pi_V^s, \omega_V^s) dt \right] \times \\
& \times \lambda_3^s(n+1); \\
& \xi_{\pi_{u_x}}^s(\alpha^s, p^s, \pi_V^s, \pi_{u_x}^s) = - \sum_{n=0}^{N-1} \nabla_{\pi_{u_x}} u_x(y_2^s, \pi_{u_x}^s, \omega_{u_x}^s) \lambda_3^s(n+1).
\end{aligned}$$

В соответствии с методом стохастических квазиградиентов новые приближения α^{s+1} , p^{s+1} , π_V^{s+1} , $\pi_{u_x}^{s+1}$ вычисляются по следующим рекуррентным формулам:

$$\begin{aligned}\alpha^{s+1} &= \alpha^s - \rho_s \xi_s^\alpha; \\ p^{s+1} &= p^s - \rho_s \xi_s^p; \\ \pi_V^{s+1} &= \pi_V^s - \rho_s \xi_s^{\pi_V}; \\ \pi_{u_x}^{s+1} &= \pi_{u_x}^s - \rho_s \xi_s^{\pi_{u_x}},\end{aligned}$$

где ρ_s выбирается из условий

$$\sum_{s=0}^{\infty} \rho_s = \infty, \quad \sum_{s=0}^{\infty} \rho_s^2 < \infty.$$

В работе [38] доказано, что последовательность, порожденная рекуррентными соотношениями типа (4.7), с вероятностью единицы сходится к локальному минимуму.

Если на параметры α , p , π_V , π_{u_x} наложены ограничения, то целесообразно применять стохастический метод линеаризации [38], также основанный на вычислении стохастического градиента.

Следует заметить, что рассмотренный метод оптимизации сложных систем со случайными параметрами достаточно универсален и его нетрудно применить также для оптимизации параметров дискретно-непрерывных систем, рассматриваемых выше.

§ 5. Объединенная имитационная система сложного ИВК

В данном параграфе кратко рассматривается имитационная модель, описывающая функционирование сложного ИВК — центра управления — для различных вариантов его построения, а также приводятся математические модели и вычислительные алгоритмы всей системы в целом и отдельных ее блоков.

Модель, описывающая функционирование ИВК и реализующая различные методы определения параметров движения летящего объекта (ЛО) по траекторным измерениям, предназначена как для математического отображения основных процессов в ИВК, так и для прогнозирования движения ЛО, вследствие чего может служить для имитации состояния ИВК и ЛО при различных режимах внешнего воздействия на них, оптимизации структуры ИВК по заданным критериям, а также для получения выводов естественно-научного характера.

В практике получения измерительной информации, необходимой для достоверного определения характеристик пространственного перемещения ЛО, возможен целый ряд вариантов функционального построения ИВК, основанных на использовании различных методов

определения параметров движения ЛО по траекторным измерениям, различных типов конкретных измерительных средств, схем их тактического использования, ожидаемого характера траекторий ЛО и т. д.

Основой построения ИВК являются современные средства измерительной техники и цифровые ЭВМ с соответствующим программным обеспечением. Несмотря на большое разнообразие возможных структурных решений при построении ИВК, в настоящее время можно выделить четыре уровня организации последних, определяемых различными уровнями автоматизации эксперимента [46].

ИВК первого уровня является сочетанием ЭВМ с информационно-измерительной системой (ИИС), выполняющей функции устройства связи с объектом испытаний.

На втором уровне ЭВМ может использоваться в автономном режиме обработки информации, а ее программное обеспечение отражает не только алгоритмы обработки данных, но и структуру ИИС и предусматривает управление блоками устройств связи с объектом.

На третьем уровне весь комплекс аппаратуры строится как замкнутая автоматизированная система.

На четвертом уровне в программном обеспечении ИВК могут предусматриваться автоматическая или автоматизированная (с участием оператора) перестройка структуры комплекса и изменение характеристик функциональных блоков в зависимости от хода и результатов эксперимента.

Как уже отмечалось выше, исходя из необходимости решения конкретных практических задач, структурный состав ИВК может существенным образом меняться, что должно быть учтено при создании имитационной модели. При этом необходимо так построить модульную структуру каждого из моделируемых параметрических каналов и таким образом сформировать управляющую программу, чтобы возможная их перестройка для моделирования каждого из конкретных вариантов ИВК занимала минимальное время, требовала минимума экономических затрат и машинного оборудования. Кроме того, имитационная модель должна обеспечить возможность детального исследования функционирования как всего ИВК в целом, так и каждого из параметрических каналов с учетом применяемых методов получения измерительной информации, точностных характеристик, тактико-технических параметров канала и характера траектории ЛО.

В качестве моделируемого комплекса была выбрана система, используемая при испытании ракет и космических аппаратов и решающая задачу прогнозирования и управления движением ЛО. Приведем одну из возможных его схем. В центре управления полетом имеется вычислительный комплекс, состоящий из нескольких ЭВМ. Две машины осуществляют управление полетом и две используются для его моделирования. Еще одна машина обеспечивает новые разработки. Моделирующая программная система осуществляет

моделирование всех сигналов, поступающих в центр управления от станций слежения и полигонного комплекса, включая соответствующие тренажеры. Устройства управления через вычислительный комплекс управляют как вычислительным процессом, так и полетом ЛО путем выдачи команд и запросов в командно-измерительный комплекс и в бортовые системы корабля. Средства отображения обеспечивают информацией центр управления. Информация в каналы связи передается с помощью специальной аппаратуры передачи данных. Данные передаются на командно-измерительный комплекс, который состоит из измерительной системы и коммутационного центра. Измерительная система представляет собой совокупность территориально разнесенных измерительных пунктов, оборудованных наземными многопараметрическими и оптическими системами траекторных измерений, а также средствами радиотелеметрии, обеспечивающими получение измерений на борту объекта. В рассматриваемой системе траекторных измерений определяются следующие основные величины: наклонная дальность до объекта d ; разность дальностей Δd ; радиальная скорость объекта \dot{d} ; угловые координаты объекта, к которым относятся азимут β и угол места ϵ , либо косинусы направляющих углов K_x и K_z ; скорости изменения угловых координат $\dot{\beta}$ и $\dot{\epsilon}$ (либо \dot{K}_x и \dot{K}_z). Для повышения надежности, как правило, используются также дублирующие центры.

Исходными данными для имитационной системы послужили конкретные варианты построения ИВК, реализующие различные методы определения параметров движения ЛО (метод n -дальностей, пеленгационный, дальномерно-угломерный, разностно-дальномерный и др.), а также нелинейные математические модели, описывающие движение ЛО и функционирование дискретных и дискретно-непрерывных подсистем ИВК и подсистемы фазовой пеленгации. Опишем некоторые из моделируемых методов определения параметров движения ЛО по траекторным измерениям. Дальномерный метод основан на использовании n дискретных систем и при имитационном моделировании ИВК, реализующего этот метод, необходимо синхронное и функциональное объединение n моделей дальномеров с учетом геодезических координат точек их стояния. Структурная схема построения объединенной модели ИВК в данном случае может иметь вид, представленный на рис. 31. Здесь блок формирования входных координат обеспечивает непрерывное формирование входной информации для каждого из n дальномерных следящих каналов с учетом геодезических координат точек стояния станций. На выходе этого блока формируется входная информация для параметрических каналов автосопровождения разнесенных в пространстве дальномеров. На выходах блоков автосопровождения по дальностям обеспечивается непрерывное формирование их измеренных значений, которые поступают в блок обработки и вычисления траекторных параметров. В этом блоке решается задача определения пространственного положения ЛО и формируется оценка местоположения объекта относительно всего ИВК.

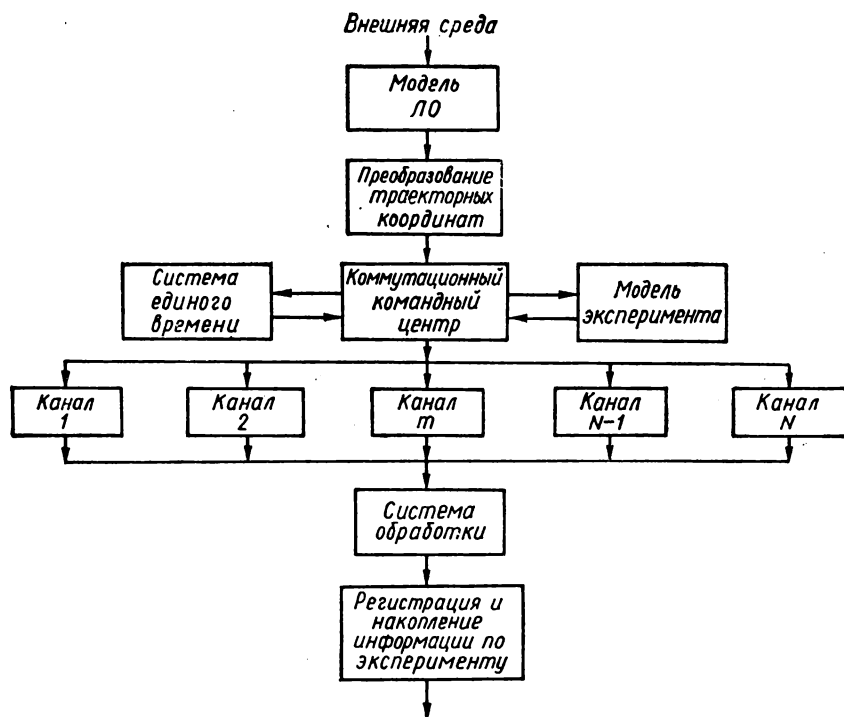


Рис. 31. Структурная схема объединенной модели ИБК.

Основные соотношения, представляющие собой математическую модель каждого из параметрических каналов автосопровождения, описываются стохастической системой нелинейных конечно-разностных уравнений вида

$$W_j(n+1) = A_j(n, \theta) W_j(n) + f_{nj}[W_j(n), x_j(n), \theta]; \quad (5.1)$$

$$\begin{aligned} W_j(0) &= W_j^0, \quad n = 0, 1, \dots, N-1, \quad j = 1, 2, \dots, J, \\ x_j(n) &\in X_j(n), \quad n = 0, 1, \dots, N-1, \quad j = 1, 2, \dots, J, \end{aligned} \quad (5.2)$$

где

$$A_j(n, \theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{p_j + \omega_{pj}}{\alpha_j + \omega_{\alpha j}} (1 + e^{-(\alpha_j + \omega_{\alpha j})(\Delta_j + \nabla \tau_j(n+1)}) \\ 0 & 0 & e^{-(\alpha_j + \omega_{\alpha j})(\Delta_j + \nabla \tau_j(n+1))} \end{bmatrix};$$

$$\begin{aligned} f_{nj}[W_j(n), x_j(n), \theta] &= \{g_{nj}^*(u_{nj}, v_{nj}), 0, u_{xj}[\tau_j(n+1) - \varphi_j(n) - \\ &\quad - g_{nj}^*(u_{nj}, v_{nj})], \pi_{u_{xj} \omega_{u_{xj}}} x_j(n)\}; \end{aligned}$$

$W_j(n) = (\varphi_{nj}, u_{nj}, v_{nj})$ — состояние j -го канала в момент времени n ; $x_j(n) = (x_j^1(n), x_j^2(n), x_j^3(n))$ — управление в этот же момент времени; θ — состояние природы или набор случайных возмущений;

$$g_{nj}^*(u_{nj}, v_{nj}) = \int_{n\Delta_j + \tau_j(n)}^{(n+1)\Delta_j + \tau_j(n+1)} V_j \left[u_{nj} + \frac{p_j + \omega_{pj}}{\alpha_j + \omega_{\alpha j}} (1 + \right. \\ \left. + e^{-(\alpha_j + \omega_{\alpha j})(t - n\Delta_j - \tau_j(n))}) v_{nj}, \pi_{vj}, \omega_{vj} \right] dt.$$

Здесь π_{u_x}, π_{v_j} — векторы параметров функций; $\omega_{\alpha_j}, \omega_{p_j}, \omega_{v_j}, \omega_{u_{xj}}$ — случайные помехи, которые накладываются на параметры α_j, p_j и функции $V_j(\cdot)$ и $u_j(\cdot)$. Кроме того, случайна, вообще говоря, и входная последовательность $\{\tau_j(n)\}$, характеризующая наклонную дальность до ЛО.

В блоках имитационной системы ИВК, моделирующих функционирование параметрических каналов автосопровождения, решается также задача подбора параметров $\alpha_j, p_j, \pi_{v_j}, \pi_{u_{xj}}$, минимизирующих функционал

$$F(\alpha_j, p_j, \pi_{v_j}, \pi_{u_{xj}}) = M \left\{ \sum_{n=1}^{N-1} [\varphi_{nj}(\alpha_j, p_j, \pi_{v_j}, \pi_{u_{xj}}, \omega_j) - \tau_j(n)]^2 \right\} = \\ = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n=1}^{N-1} [\varphi_{nj}(\alpha_j, p_j, \pi_{v_j}, \pi_{u_{xj}}, \omega_j) - \tau_j(n)]^2 dH_j(y), \quad (5.3)$$

где

$$\omega_j = [\omega_{\alpha_j}, \omega_{p_j}, \omega_{v_j}, \omega_{u_{xj}}, \tau_j(1), \tau_j(2), \dots, \tau_j(n)];$$

$$H_j(y) = H_j(y_1, y_2, \dots, y_r) = P(\omega_{\alpha_j} < y_1, \omega_{p_j} < y_2, \omega_{v_j} < y_3,$$

$$\omega_{u_{xj}} < y_4, \tau_j(1) < y_5, \dots, \tau_j(n) < y_{n+5}).$$

— функция распределения ω . Кроме того, с помощью процедур разложения решается задача оптимального выбора параметров управления сложного ИВК, состоящего из J параметрических каналов автосопровождения, в предположении, что управление осуществляется всеми каналами централизованно. Последнее требование характеризуется условием

$$\sum_{i=1}^J x_i \leq x_0. \quad (5.4)$$

С учетом всего изложенного задача формулируется следующим образом: определить такую последовательность управлений, которая при ограничениях (5.1), (5.2), (5.4) минимизирует функционал

$$F = \sum_{i=1}^J \gamma_i M f_i(x_i(0), x_i(1), \dots, x_i(N-1), W(0), \dots, W(N), \theta); \quad (5.5)$$

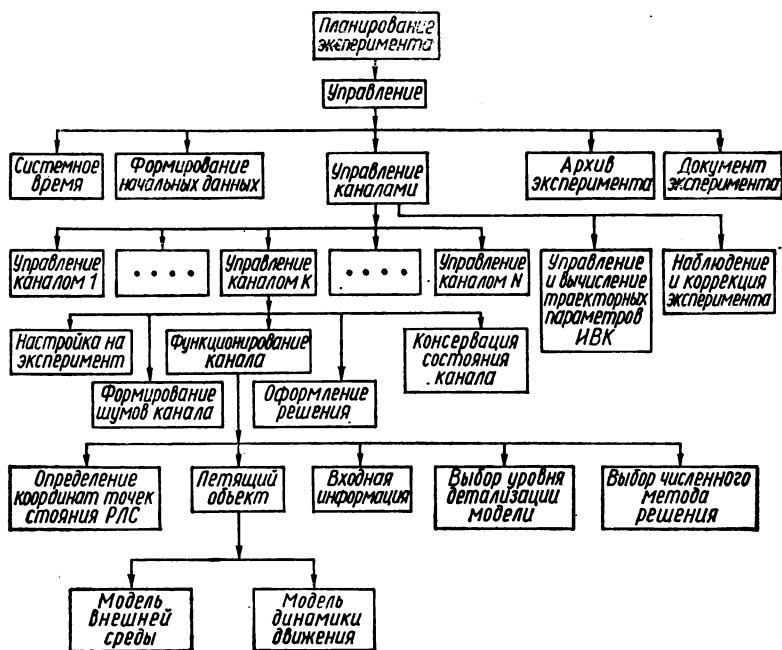


Рис. 32. Структурная схема объединенной модели ИВК.

здесь $f_j(W, x, \theta)$ — некоторые функции, например:

$$f_j(W, x, \theta) = \max_{0 \leq n \leq N} \|W_j(n) - W_j^*(n)\|^2,$$

где $W_j^*(n)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, — заданная траектория; $\|\cdot\|$ — норма (евклидово расстояние по модулю уклонения координат).

Структурная схема алгоритма имитационной системы ИВК, в основу которой положен метод n -дальностей, приведена на рис. 32.

При построении имитационной системы ИВК, реализующей дальномерно-угломерный метод, используется функциональное объединение минимум одного дальномерного и двух угломерных каналов, дающих значения двух угловых координат во взаимно перпендикулярных плоскостях. В этом случае возможны два варианта данного метода. В первом угловые координаты определяются пеленгационным способом, во втором углы измеряются так называемым вырожденным разностно-дальномерным методом. При имитационном моделировании ИВК, реализующем первый вариант, необходимо функциональное объединение одной дискретной и двух дискретно-непрерывных систем. Если в этом случае имитационные модели соответствующих дискретно-непрерывных систем представляют собой пеленгационные системы, реализующие метод равносигнальной зоны, то структурная схема имитационной системы ИВК может иметь вид, представленный на рис. 32. При этом изменяется только напол-

нение блока функционирования каналов. Блок пересчета координат обеспечивает каналы автосопровождения по дальности, азимуту и углу места входной информацией, причем каждой координате соответствуют качественные характеристики в определенных пределах, задаваемые характером пространственного перемещения ЛО. Следует заметить, что при практической реализации имитационной системы этого варианта ИВК возникают определенные трудности из-за неодинаковой точности задания траекторных параметров по каждой из координат. Если в этом случае направление на ЛО определяется с помощью текущих значений косинусов направляющих углов, которые измеряются фазометрической системой, структурная схема не меняется. Так как точки стояния дальномера и пеленгатора имеют свои геодезические координаты, то в блоке формирования входных координат необходимо осуществлять также соответствующий пересчет.

Основные соотношения, представляющие математическую модель угломерного канала, описываются следующей нелинейной системой конечно-разностных уравнений:

$$\begin{aligned} V_n &= AV_{n-1} + (\rho/i_0) x_n; \\ x_n &= \sum_{q=1}^{i_0} P_1 \{C_1 [(n-2) i_0 + q] * \sin [C_2 (n-2) i_0 + q] [f (n-2) i_0 + \\ &+ q - L * z (n-1, q)] + C_3 [(n-2) i_0 + q]\} - B (q) V_{n-1} + P_3 \times \\ &\times [L * z (n-1, q)]; \\ z (n, i) &= \begin{cases} R \times z (n, i-1) + Mu (n, i), & i = 2, 3, \dots, i_0, \\ R \times z (n-1, i_0) + Mu (n, 1), & i = 1; \end{cases} \\ u (n, i) &= P_2 P_0 [B (i) \times V_n] - P_3 \left(L \times \begin{cases} z (n, i-1), & i = 2, 3, \dots, i_0, \\ z (n-1, i_0), & i = 1 \end{cases} \right) \\ V (0) &= V_0, \quad z (0, i) = z_0. \end{aligned}$$

Здесь V_0, z_0 — начальные значения векторов и состояний привода; $L = (1, 0, 0, \dots, 0)$; $C_j (t)$ — случайные возмущения с известными характеристиками; t — дискретное время в системе; величины A, ρ, B, M, R определяются параметрами системы; P_1, P_2, P_3 — нелинейные характеристики цифроаналоговых и аналого-цифровых преобразователей. Как отмечалось выше, для устранения неоднозначности на практике применяется способ многошкальных измерений, математическая модель которого описывается неполной системой целочисленных уравнений

$$x = (k_1 + \varphi_1)/d_1 = (k_2 + \varphi_2)/d_2 = \dots = (k_m + \varphi_m)/d_m, \quad (5.6)$$

где $k_i = [d_i x]^+$, $\varphi_i = \{d_i x\}^+$ — соответственно целая и дробная части числа $d_i x$; d_i — масштабные коэффициенты измерительных шкал, представляющие собой возрастающую последовательность натуральных чисел; m — число шкал; x — определяемый параметр (направляющий косинус), $x \in [0, 1]$.

Задача устранения неоднозначности циклических измерений заключается в оценке неизвестного параметра k_m (и соответственно x) по измеренным значениям $\varphi_i = \{\varphi_i + \psi_i\}^+$, где ψ_i — случайные гауссовы величины с параметрами $(0, \sigma_i)$.

Для решения сформулированной выше задачи в инженерной практике разработан ряд алгоритмов. Проведен сравнительный анализ эффективности вычислительных алгоритмов для следующих основных методов: последовательного пересчета из шкалы в шкалу, алфавитного, декодирования по минимуму расстояния и декодирования по пересечению. В качестве критериев эффективности выбирались следующие:

$$P(\hat{k}_m = k_m) \rightarrow \max_A, \quad T \leq T_0;$$

$$T \rightarrow \min_A, \quad P(\hat{k}_m = k_m) \geq 1 - \varepsilon. \quad (5.7)$$

Здесь \hat{k}_m — оценка параметра k_m ; $P(\hat{k}_m = k_m)$ — вероятность правильного устранения неоднозначности; A — множество алгоритмов указанных выше методов; T_0 — допустимое время реализации алгоритма; ε — заданное достаточно малое положительное число.

Необходимость проведения сравнительного анализа алгоритмов вызвана тем, что задача определения параметров движения ЛО по траекторным измерениям решается в реальном времени и в связи с этим в имитационной модели каждому из моделируемых алгоритмов необходимо присвоить некоторый приоритет. В имитационной модели ИВК для раскрытия неоднозначности фазовых измерений реализованы различные алгоритмы устранения неоднозначности циклических измерений.

Сделаем несколько замечаний о моделировании на ЭВМ входных данных и вычислении некоторых величин для задачи устранения неоднозначности циклических измерений. Обозначим погрешности, накладываемые на фазы $\Phi_i(t) = d_i x(t)$, через $\psi_i(t)$ и предположим, что они имеют вид

$$\psi_i(t) = \varepsilon_i(t) + m_i(t) + \xi_i(t),$$

где $\varepsilon_i(t)$ — нормальный белый шум ($M\varepsilon_i(t) = 0$, $D\varepsilon_i(t) = \sigma_i^2$, $\varepsilon_i(t_j)$ независимы по i и j , $t_j = t_0 + (j-1)\tau$); $m_i(t) = a_i \cos(\alpha_i t + \beta_i)$ — систематическая погрешность; $\xi_i(t)$ — «выбросы», т. е. независимые по t случайные величины, при фиксированном t имеющие распределение

$$P_0 = P\{\xi_i(t) = 0\}, \quad P_j = P\{\xi_i(t) = s_j\}, \quad P_0 \sim 1$$

(s_j ($j = \overline{1, n}$) — достаточно «большие» числа); $\sum_i p_i = 1$. Вычисления $\hat{\Phi}_i(t)$ производится следующим образом. По заданной траектории¹

$$\gamma(t) = \gamma_1 t^3 + \gamma_2 t^2 + \gamma_3 t + \gamma_4$$

в каждый момент времени $t_j = t_0 + (j - 1)\tau$, $j = \overline{1, J}$, вычислялись функции

$$\Phi_i(t), \hat{\Phi}_i(t) = \Phi_i(t) + \Psi_i(t), \hat{\Phi}_i = \{\hat{\Phi}_i(t)\}^+.$$

Вероятность правильного устранения неоднозначности оценивалась с помощью частоты. Для этого при фиксированных значениях параметров погрешностей фаз и масштабных коэффициентов производилось устранение неоднозначности (оценка \hat{k}_m) в каждый момент времени t_j и вычислялась частота

$$\nu(\hat{k}_m = k_m) = \frac{n(\gamma : \hat{k}_m(t_j) = k_m(t_j))}{J},$$

где $n(j : k_m(t_j) = k_m(t_j))$ — число моментов времени, в которые $\hat{k}_m(t_j) = k_m(t_j)$. Частота $\nu(\hat{k}_m = k_m)$ подсчитывалась для различных значений параметров погрешностей $\Psi_i(t)$ и δ_i .

Для моделирования произвольного пространственного движения тела с массой m относительно Земли использовалась система уравнений движения тела, полученная в рамках следующих предположений. Система координат $OXYZ$ жестко связана с телом, с началом в точке O и осью OX , направленной к передней части тела. Тензор инерции относительно центра масс тела имеет вид

$$I_c = \begin{bmatrix} I_x & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_y & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_z \end{bmatrix}.$$

Вектор, характеризующий положение центра масс тела, $r_c = [x_c, y_c, z_c]^T$. Земля — сфера с радиусом $R_3 = 6,371 \cdot 10^6$ м. Поле тяготения — центральное, с гравитационным параметром $\mu_0 = 3,986032 \cdot 10^{14}$ м³/с². Наряду с системой координат $OXYZ$ вводится инерциальная система координат $O_n X_n Y_n Z_n$, с помощью которой характеризуется абсолютное движение. Вращение Земли и движение относительно не описываются в геоцентрической системе координат (жестко связанной с Землей) $O_0 X_0 Y_0 Z_0$ с началом в центре земного шара O_0 и осью $O_0 Y_0$, ориентированной на север вдоль оси вращения Земли. Все введенные системы координат — декартовы, правые.

¹ Если заданная траектория была решением системы уравнений движения, то фазы в соответствующие моменты времени пересчитывались по простым формулам.

Введем дополнительно следующие обозначения: $R = (X_0, Y_0, Z_0)$ — вектор, характеризующий положение точки O в системе координат $O_0X_0Y_0Z_0$, где

$$X_0 = (R_3 + H) \cos \varphi_{\text{ш}} \sin \lambda,$$

$$Y_0 = (R_3 + H) \sin \varphi_{\text{ш}},$$

$$Z_0 = (R_3 + H) \cos \varphi_{\text{ш}} \cos \lambda;$$

H — высота полета тела; $\varphi_{\text{ш}}$ и λ — соответственно геоцентрическая широта и долгота положения тела (точки O). Движение тела и движение Земли будем характеризовать такими параметрами: V_c — вектор относительной скорости движения центра масс тела (относительно Земли) в проекциях на оси системы $OXYZ$; V — вектор относительной скорости движения точки O (относительно Земли) в проекциях на оси системы OXY ; ω_0 — вектор абсолютной угловой скорости вращения Земли в проекциях на оси системы $O_0X_0Y_0Z_0$: $\omega_0 = [0, \omega_{y_0}, 0]$, где $\omega_{y_0} = 2\pi / (24 \cdot 3600) \text{ с}^{-1}$; ω — вектор абсолютной угловой скорости вращения тела в проекциях на оси системы $OXYZ$.

При записи уравнений будем использовать оператор $*$ преобразования произвольного вектора $a = [a_x, a_y, a_z]^T$ в кососимметрическую матрицу

$$a^* = \begin{bmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{bmatrix}.$$

Тогда векторное умножение $\bar{a} \times \bar{b}$ в матричной записи будет иметь вид $a \times b$. Приведем систему уравнений, моделирующую пространственное движение тела:

$$\begin{aligned} \frac{dV_c}{dt} &= -\frac{\pi_0}{|R|^3} CR + \frac{qS}{m} C_R - (\omega + C\omega_0)^* V_c - (C\omega_0)^* (C\omega_0)^* \times \\ &\quad \times (CR + r_c); \\ V &= V_c - (\omega - C\omega_0)^* r_c; \\ \frac{d\omega}{dt} &= I_c^{-1} [qS (l m_R - r_c^* C_R) - \omega^* I_c \omega]; \\ \frac{d(C\omega_0)}{dt} &= (C\omega_0 - \omega)^* C\omega_0; \\ \frac{d(CR)}{dt} &= V + (C\omega_0 - \omega)^* CR; \\ \frac{dR}{dt} &= C^{-1} V. \end{aligned} \tag{5.8}$$

Здесь на тело действуют такие силы в проекциях на оси системы $OXYZ$: сила тяжести $R_g = -m\pi_0 CR / |R|^3$ и аэродинамическая сила $R_a = qSC_R$, где $q = \rho |V|^2 / 2$ — скоростной напор; S — характерная площадь; C_R — вектор аэродинамических коэффициентов сил ($C_R = [-C_x, C_y, C_z]^T$). Момент относительно точки O , дейст-

вующий на тело, в проекциях на оси системы $OXYZ$ определяется формой

$$M_R = qS(lm_R - \dot{r}_c C_R),$$

где l — характерный размер; m_R — вектор коэффициентов аэродинамических моментов ($m_R = [m_x, m_y, m_z]^T$).

Сделаем несколько замечаний об алгоритме численного интегрирования системы уравнений движения (5.8). При интегрировании этой системы вместо обычно применяемой зависимой системы (уравнения Пуассона)

$$\frac{dC}{dt} = -(\omega - C\omega_0) * C \quad (5.9)$$

нами использовались четвертое и пятое уравнения системы (5.8). Это связано с тем, что при численном интегрировании (5.9) отличия от единицы значений детерминанта матрицы C (уход нормы кватерниона) обуславливают необходимость ортогонализации матрицы C . Если же вместо (5.9) оперировать с четвертым и пятым уравнениями системы (5.8), то после вычисления вектора $C\omega_0$ легко найти три элемента матрицы C :

$$C_{i2} = (C\omega_0)_i / \omega_{y_0}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Определив затем вектор CR , получим три соотношения, связывающих элементы матрицы C :

$$C_{i1}X_0 + C_{i3}Z_0 = (CR)_i - C_{i2}y_0, \quad i = 1, 2, 3.$$

которые и являются условиями ортогональности.

Замечание. Предложенный алгоритм вычисления элементов матрицы C исключает необходимость ортогонализации. Шаг интегрирования Δt при этом обусловлен только градиентами искомых функций. Правая часть шестого уравнения системы (5.8) определяется значениями элементов вектора V , полученными в результате интегрирования первого уравнения системы (5.8), а правая часть первого уравнения определяется значениями элементов остальных искомых векторов. Поэтому становится возможным эффективно контролировать качество результатов вычислительного эксперимента с помощью соотношения $R = C^{-1}(CR)$.

Имитационная модель ИВК и ЛО реализована в виде пакета программ на языке ФОРТРАН-4 для серии ЕС ЭВМ, что потребовало создания специального математического и программного обеспечения, позволяющего вести работу в режиме диалога человек — машина с детерминированным и вероятностным заданием внешних факторов. При проверке адекватности модели использовались реальные данные и разработанная методика проверки адекватности ММ реальному объекту.

Как показали натурные эксперименты, достигнутая степень адекватности модели достаточна для практического использования и проведения вычислительных экспериментов естественно-научного плана.

МОДЕЛИ ТРАЕКТОРИЙ ДВИЖЕНИЯ УПРАВЛЯЕМЫХ ОБЪЕКТОВ

§ 1. Математическая постановка задачи

Моделирование движения управляемых объектов может выполняться с различными целями, определяемыми конкретным содержанием решаемых задач. Среди задач, предполагающих использование моделей движения управляемых объектов, рассмотрим следующие:

1) идентификация параметров и состояний ЛО по результатам их измерений, которая может рассматриваться как самостоятельная задача или задача, связанная с управлением движения ЛО;

2) планирование процесса измерений и управление измерительными средствами в ходе эксперимента;

3) имитация эталонных траекторий и результатов измерений с целью оценки эффективности и определения области применения алгоритмов обработки измерительной информации.

Модель движения при решении этих задач играет роль компактной и однозначно понимаемой формы представления априорных сведений о движении объекта. Ни одна из перечисленных выше задач не может быть решена без той или иной модели изменения параметров движения ЛО. Полнота учета этих сведений и степень их детализации даже при решении одной и той же задачи могут быть различными. В каждом конкретном случае необходимо учитывать время, отведенное на реализацию модели, возможности применяемого вычислителя по объему памяти и быстродействию, метод решения задачи.

Точностные требования при моделировании можно считать продиктованными содержанием решаемой задачи. Временные ограничения существенны и конкретны в основном при необходимости управления объектом. Соблюдение точностных и временных ограничений во многом зависит от вычислителя.

Время, затрачиваемое на идентификацию движения объекта по результатам летного эксперимента, может быть очень большим. Во многих случаях выгодно сокращать его, поскольку на обработку данных чаще всего требуется времени не меньше, чем на подготовку и проведение летного эксперимента. Таким образом, в целях сокращения сроков получения окончательных результатов экспери-

мента желательно всемерно уменьшать количество вычислительных операций на реализацию модели. Безусловно, нужно учитывать особенности ЭВМ, используемой при решении задачи, по набору реализуемых операций и быстродействие вычислителя.

Модельное исследование алгоритмов обработки измерительной информации, на первый взгляд, не сопряжено с наличием жестких ограничений на время реализации моделей движения управляемого объекта на ЭВМ. Однако это исследование чаще всего осуществляется методом статистических экспериментов, который предполагает наличие случайных составляющих в параметрах движения объекта, а также случайных погрешностей, возникающих при измерениях. В подобной ситуации для получения достаточной статистики число реализаций модели движения может достигать тысяч и более. Каждая реализация в отдельности может содержать тысячи точек на шкале времени. Движение объекта может описываться набором в десять и более параметров. Таким образом, оценка и всемерное сокращение временных затрат на реализацию модели движения управляемого объекта на ЭВМ и в данном случае является вопросом далеко не второстепенным. Сокращение времени моделирования при исследовании алгоритмов обработки всегда осложнено тем, что ценность результатов подобных экспериментов может заметно снижаться при упрощении модели методом исключения из нее ряда факторов, влияющих на характер движения, или приближенного (огрубленного) их учета. В результате время эксперимента может быть заметно сокращено, но смысл его проведения в основном потерян.

Таким образом, решая задачу моделирования траекторий движения управляемых объектов, всегда следует считаться с фактором времени на реализацию модели на ЭВМ как с одним из основных факторов ее решения.

Любая из моделей, используемых при решении перечисленных выше задач, является математической идеализацией реального движения. Поэтому при моделировании, естественно, возникает специальный вопрос об адекватности математического описания реальному движению объекта. Адекватность модели находится в прямой зависимости от степени доверия априорным данным, полноты их учета при моделировании и точности воспроизведения модели на ЭВМ.

К априорным данным о движении объекта относят законы кинематики и динамики ЛО, его параметры (например, сила тяги, характер ее изменения во времени и время работы двигателя, аэродинамические коэффициенты), характеристики окружающего пространства (например, модель атмосферы, гравитационный потенциал), характеристики взаимодействия объекта с окружающей средой. Иногда возникает возможность использования данных о программной траектории (программных параметрах) движения объекта. В состав априорных сведений могут быть включены закон управления аппаратом (например, метод параллельного сближе-

ния) и особенности его реализации системой управления (запаздывание, другие ошибки управления).

Наиболее достоверными чаще всего являются законы динамики и кинематики движения объектов. Справедливость кинематических связей типа «вектор линейной скорости движения объекта есть первая производная по времени от вектора его положения» не вызывает сомнений. В то же время использование соотношений динамики должно выполняться с учетом того, что они достаточно близки к реальному движению только при соблюдении условий их формулировки. Во многих практических приложениях объект идеализируется как материальная точка, размещенная в его центре масс.

Если по условиям решения задачи это допущение является сравнительно грубым, то степень доверия к описанию траектории движения объекта как материальной точки может оказаться низкой. При необходимости объект можно рассматривать как систему жестких тел и уточнить описание. Если требуется учет более тонких эффектов, оказывающих заметное влияние на представляющие интерес компоненты движения объекта, например, на ориентацию в пространстве, то могут быть смоделированы перемещения компонент топлива в магистралях подачи и т. п.

Степень доверия к математической модели определяется не только характером идеализации объекта (материальная точка, агрегат жестко связанных тел и т. п.), но и тщательностью учета при моделировании отдельных факторов, влияющих на движение аппарата. Адекватность модели зависит также от точности знания параметров, фигурирующих в формулах (баллистический коэффициент, аэродинамические коэффициенты). Данные величины определяются, как правило, экспериментально и поэтому известны с некоторыми погрешностями. Следует остерегаться большого количества таких параметров в модели движения ЛО, поскольку недостаточно точные данные об их значениях могут существенно снизить ее адекватность.

Решение вопросов оценки адекватности модели реальному движению, сравнения математических описаний в указанном плане, что необходимо при оценке качества результатов моделирования, основывается во многом на интуиции исследователя, базирующейся на практическом опыте. Во многих случаях данным уровнем анализа организоваться непозволительно. Может потребоваться реализация количественного подхода при сравнении и оценке моделей. Тогда назначается тот или иной критерий близости модельного изменения параметров движения реальному. Точно такими же критериями можно пользоваться при сравнении различных моделей изменения одних и тех же параметров движения, например, некоторой базовой модели, которой характерен сравнительно широкий и глубокий учет различных факторов движения, и упрощенных моделей.

В качестве критериев сравнения и оценки моделей движения ЛО целесообразно применять те или иные функционалы ошибок моделирования. Обозначим $\lambda(t)$ — реальное изменение параметра

движения на интервале времени $[0, T]$, $\lambda_m(t)$ — процесс, моделирующий это движение. Тогда абсолютное отклонение модельного движения от реального является функцией времени $\Delta\lambda_m(t) = \lambda_m(t) - \lambda(t)$, описывающей погрешности моделирования во времени. В качестве величин, обобщающих такие погрешности, могут использоваться экстремальные, усредненные и доверительные показатели.

Под экстремальными показателями понимают наибольшие (наименьшие) значения некоторых характеристик функции $\Delta\lambda_m(t)$, например, модуля $\Delta\lambda_m(t)$:

$$\alpha_1 [\lambda_m(t)] = \max_{t \in [0, T]} |\Delta\lambda_m(t)|.$$

При реализации осредненного показателя та или иная характеристика функции $\Delta\lambda_m(t)$ осредняется на интервале времени $[0, T]$. Примером усредненного показателя качества моделирования может служить средний квадрат ошибки моделирования:

$$\alpha_2 [\lambda_m(t)] = \int_0^T [\Delta\lambda_m(t)]^2 dt.$$

Введение доверительных показателей качества связано со случайным характером погрешностей моделирования, вызванных, например, наличием случайных компонент в движении объекта. Появление таких составляющих обусловлено флуктуациями свойств среды, окружающей ЛО, параметров различных элементов системы управления полетом и т. п.

Доверительные показатели являются комплексными и объединяют в себе доверительный интервал и доверительную вероятность.

Доверительный интервал — это область значений некоторой характеристики β функции $\Delta\lambda_m(t)$: $B = [\beta_{\min}, \beta_{\max}]$.

Доверительная вероятность P — это вероятность попадания вычисленного значения характеристики $\beta = \beta[\Delta\lambda_m(t)]$ в доверительный интервал B .

Под доверительным показателем качества моделирования понимается интервал B , в который характеристика ошибок попадает с доверительной вероятностью.

Указанные показатели качества моделирования применимы в конкретных точках шкалы и на интервале времени, для одного и группы параметров движения, для одной и многих реализаций модели на одном и том же интервале времени или в заданный момент времени.

Выбор того или иного показателя адекватности модели определяется спецификой решаемой задачи. Наиболее жесткими показателями являются экстремальные. Усредненные показатели можно отнести к группе наименее критичных. Промежуточное место в этой градации занимают доверительные показатели.

Для оценки качества разработанной модели выбирают тот или иной показатель адекватности, и если его конкретное значение для этой модели удовлетворяет наперед заданным ограничениям, то это

можно рассматривать как указание на применимость модели к решению задачи (управление, планирование и т. п.).

Информация об истинном изменении параметров движения не всегда доступна. В то же время она сама по себе может иметь приближенный характер. В связи с этим в практике моделирования широко распространен прием формирования вначале сложной базовой модели, в которой наиболее широко представлен учет факторов, оказывающих влияние на изменение рассматриваемых параметров движения объекта. В дальнейшем эта модель упрощается, причем на каждом этапе упрощения оценивается потеря адекватности. Такая процедура упрощения модели осуществляется в направлении всемерного сокращения количества вычислительных операций на реализацию при как можно меньших потерях адекватности.

Без учета возможностей ЭВМ этот процесс упрощения математического описания завершается на уровне, допускаемом требуемой точностью решения задачи, для которой создается модель движения объекта. В то же время иногда вследствие существенных временных ограничений, например при решении задач управления, эта грань упрощения модели пренебрегается. Тогда модель движения делается адаптивной. В частности, она может содержать настраиваемые по поступающим данным коэффициенты. Распространен метод рандомизации моделей. В этом случае ряд факторов, определяющих движение объекта, но являющихся несущественными, объединяется и заменяется в модели шумовой составляющей («полезный шум»). Таким образом, возможными причинами применения адаптивных моделей может быть следующее:

- 1) недостаточная точность или отсутствие используемых в модели априорных сведений об объекте, которые приводят к превышению допустимого уровня погрешностей в окончательных результатах решения задачи (управление, оценивание и т. п.);

- 2) упрощенный учет или исключение из рассмотрения тех или иных факторов в модели, что чаще всего связано с возможностями и целесообразностью их подробного представления при решении задачи.

Наиболее простым подходом к упрощению моделей является сравнительный, основанный на физических соображениях анализ факторов, влияющих на изменение рассматриваемых параметров движения. Факторы движения оцениваются по их значимости в модели. Исключение их из модели начинается с наименее существенных. Если параметр движения представляется при моделировании в виде суммы ряда компонент, то можно установить их процентное соотношение в «формировании» параметра движения. Исключение компонент описания осуществляется и в этом случае в порядке возрастания их значимости.

При моделировании параметров движения ЛО очень часто наблюдается противоречие между степенью адекватности модели и ее сложностью и временем, затрачиваемым на реализацию. При этом, выделив явно цели моделирования, можно судить о точности

представления моделью реального исследуемого движения. Уточнение соответствия объект — модель должно выполняться по целевым критериям.

На первом этапе построения модели следует определить совокупность факторов, проявляющихся при полете аппарата. Набор таких факторов определяется как содержанием решаемой задачи, так и классом рассматриваемых объектов: самолет, ракета, искусственный спутник Земли и т. п. При моделировании могут учитываться в той или иной степени влияние атмосферы на ЛО, вращение Земли, реактивные силы и т. д. Моделирование сводится к получению, как правило, систем обыкновенных дифференциальных уравнений движения объекта и их интегрированию тем или иным методом для получения зависимостей параметров движения ракеты от времени при заданных начальных условиях. Указанные уравнения являются формой представления законов динамики и кинематики ЛО и могут дополняться уравнениями управления.

Получаемое решение уравнений представляет собой детерминированную основу моделируемого движения. Она может быть дополнена случайными специально имитируемыми составляющими, вводимыми в модель аддитивно, мультипликативно или аддитивно-мультипликативно [70].

§ 2. Дифференциальные уравнения пространственного движения ракет

Рассмотрим систему уравнений поступательного и вращательного движений ракет. Первая подгруппа уравнений характеризует перемещение центра масс, а вторая — ориентацию объекта в пространстве.

При этом воспользуемся нормальной земной системой координат $Ox_g y_g z_g$. Для простоты считаем, что ускорение силы тяжести постоянно по величине и направлению, кориолисово ускорение отсутствует; кривизной Земли пренебрегаем, ветер не учитываем.

Можно показать [35], что проще всего скорость поступательного движения центра масс ракеты относительно Земли описывается в проекциях на оси траекторной системы координат $Ox_k y_k z_k$, так как в данном случае $v_{x_k} = v$, $v_{y_k} = v_{z_k} = 0$. Тогда

$$\dot{V} = \Sigma F_x / m; \quad \dot{V}_{\omega_{z_k}} = \Sigma F_{y_k} / m; \quad \dot{V}_{\omega_{y_k}} = -\Sigma F_{z_k} / m, \quad (2.1)$$

где ΣF_x , ΣF_{y_k} , ΣF_{z_k} — проекции на оси указанной системы координат результирующей силы, действующей на центр масс объекта; ω_{y_k} , ω_{z_k} — проекции угловой скорости вращения траекторной системы координат $Ox_k y_k z_k$ относительно неподвижной системы $Ox_g y_g z_g$ на оси траекторной системы координат. Для их определения воспользуемся соотношениями, раскрывающими связь

указанных компонент угловой скорости с углами ориентации траекторной системы координат относительно нормальной:

$$\omega_{x_k} = \dot{\Psi} \sin \theta, \omega_{y_k} = \dot{\Psi} \cos \theta, \omega_{z_k} = \dot{\theta}. \quad (2.2)$$

Здесь Ψ и θ — углы пути и наклона траектории. В результате подстановки (2.2) в (2.1) получим систему уравнений вида

$$\dot{V} = \Sigma F_{x_k}/m; \quad V\dot{\theta} = \Sigma F_{y_k}/m; \quad V\dot{\Psi} \cos \theta = \Sigma F_{z_k}/m. \quad (2.3)$$

В правые части уравнений (2.3) включим составляющие силы тяги, силы тяжести, аэродинамических и управляющих сил.

При получении выражения для аэродинамической силы воспользуемся скоростной системой координат $Ox_a y_a z_a$, а затем от нее перейдем к траекторной. Проекция этой силы на оси координат последней системы представляются в виде

$$\begin{aligned} R_{Ax_k} &= -x_k = -x_a; \\ R_{Ay_k} &= y_k = y_a \cos \gamma_a - z_a \sin \gamma_a; \\ R_{Az_k} &= z_k = y_a \sin \gamma_a + z_a \cos \gamma_a, \end{aligned} \quad (2.4)$$

где γ_a — угол поворота скоростной системы координат относительно траекторной.

Пусть тяга задана проекциями на оси связанной системы координат P_x, P_y, P_z . Это удобно при расчетах характеристик движения ракеты для учета газодинамических управляющих сил, возникающих при отклонении вектора силы тяги от продольной оси ракеты. Использование связанной системы координат дает также возможность учесть влияние эксцентриситета тяги на полет объекта.

Рассмотрим выражения для управляющих аэродинамических сил, создаваемые однотипными аэродинамическими органами управления $\Sigma x_P, \Sigma y_P, \Sigma z_P$.

Проекция тяги и управляющих сил на оси траекторной системы координат могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned} P_{x_k} - \Sigma x_{P,k} &= (P_x - \Sigma x_P) \cos \alpha \cos \beta - (P_y + \Sigma y_P) \sin \alpha \sin \beta + \\ &\quad + (P_z + \Sigma z_P) \sin \beta; \\ P_{y_k} + \Sigma y_{P,k} &= (P_x - \Sigma x_P) (\sin \alpha \cos \gamma_a + \sin \gamma_a \cos \alpha \sin \beta) + (P_y + \\ &\quad + \Sigma y_P) (\cos \gamma_a \cos \alpha - \cos \gamma_a \sin \alpha \sin \beta) - (P_z + \Sigma z_P) \sin \gamma_a \cos \beta; \\ P_{z_k} + \Sigma z_{P,k} &= (P_x - \Sigma x_P) (\sin \gamma_a \sin \alpha - \cos \gamma_a \cos \alpha \sin \beta) + (P_y + \Sigma y_P) \times \\ &\quad \times (\sin \gamma_a \cos \alpha + \cos \gamma_a \sin \alpha \sin \beta) + (P_z + \Sigma z_P) \cos \gamma_a \cos \beta. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Поскольку сила тяжести считается постоянной, а поверхность Земли — плоской, то проекции силы тяжести на траекторные оси координат можно записать так:

$$Q_{x_k} = -Q \sin \theta; \quad Q_{y_k} = -Q \cos \theta; \quad Q_{z_k} = 0. \quad (2.6)$$

Подставляя (2.5), (2.6) и (2.2) в основные уравнения (2.3), получаем систему уравнений, описывающую движение центра масс ракеты в траекторной системе координат:

$$\begin{aligned}\dot{V} &= \frac{1}{m} (P_{x_k} + \Sigma x_{p.k} - x_k + Q_{x_k}); \\ V\dot{\theta} &= \frac{1}{m} (P_{y_k} + \Sigma y_{p.k} + y_k + Q_{y_k}); \\ V\dot{\Psi} \cos \theta &= -\frac{1}{m} (P_{z_k} + \Sigma z_{p.k} + z_k).\end{aligned}\quad (2.7)$$

При записи уравнений вращательного движения ракет и самолетов обычно используют связанную систему координат. Любая другая, не связанная с ракетой, система координат перемещается относительно ракеты, а это приводит к необходимости учитывать при исследовании движения ракет переменность моментов инерции, что вносит излишние усложнения. Уравнения вращательного движения объекта в проекциях на связанные оси координат в предположении, что они совпадают с главными центральными осями инерции, имеют вид

$$\begin{aligned}J_x \dot{\omega}_x + (J_z - J_y) \omega_y \omega_z &= \Sigma M_x + \Sigma M_{Px}; \\ J_y \dot{\omega}_y + (J_x + J_z) \omega_x \omega_z &= \Sigma M_y + \Sigma M_{Py}; \\ J_z \dot{\omega}_z + (J_y - J_x) \omega_x \omega_y &= \Sigma M_z + \Sigma M_{Pz}.\end{aligned}\quad (2.8)$$

Здесь ΣM_x , ΣM_y , ΣM_z — суммы проекций моментов внешних сил и тяги на связанные оси координат (без учета управляющих сил); ΣM_{Px} , ΣM_{Py} , ΣM_{Pz} — суммы проекций моментов управляющих сил на те же оси координат; J_x , J_y , J_z — моменты инерции ракеты относительно указанных осей.

Предположим, что рассматриваются осесимметрические ракеты. Тогда уравнения имеют упрощенный вид

$$\begin{aligned}J_x \dot{\omega}_x &= \Sigma M_x + \Sigma M_{Px}; \\ J_y \dot{\omega}_y + (J_x + J_z) \omega_x \omega_z &= \Sigma M_y + \Sigma M_{Py}; \\ J_z \dot{\omega}_z + (J_y - J_x) \omega_x \omega_y &= \Sigma M_z + \Sigma M_{Pz}.\end{aligned}\quad (2.9)$$

При работающем двигателе моменты инерции будут величинами переменными вследствие изменения массы ракеты из-за расхода топлива. Значения J_x , J_y , J_z вычисляются на основании подробных чертежей ракеты и при известном законе изменения ее масс в полете. Поэтому при приближенных баллистических расчетах их выбирают постоянными. При более точных расчетах, связанных с исследованием устойчивости и управляемости, переменность моментов инерции необходимо учитывать. Экспериментальные методы определения моментов инерции сложных тел, дающие более точные результаты по сравнению с расчетными, достаточно подробно разработаны в механике и здесь рассматриваться не будут.

Величины $\dot{\theta}$, $\dot{\psi}$, $\dot{\gamma}$ и ω_x , ω_y , ω_z связаны между собой следующими зависимостями:

$$\omega_x = \dot{\psi} \sin \theta + \dot{\gamma}; \quad \omega_y = \dot{\psi} \cos \theta \cos \gamma + \dot{\theta} \sin \gamma; \quad (2.10)$$

$$\omega_z = -\dot{\psi} \cos \theta \sin \gamma + \dot{\theta} \cos \gamma.$$

Решая уравнения (2.10), получаем

$$\dot{\theta} = \omega_y \sin \gamma + \omega_z \cos \gamma;$$

$$\dot{\psi} = \frac{1}{\cos \theta} (\omega_y \cos \gamma - \omega_z \sin \gamma); \quad (2.11)$$

$$\dot{\gamma} = \omega_x - \operatorname{tg} \theta (\omega_y \cos \gamma - \omega_z \sin \gamma).$$

Для расчета аэродинамических сил нужно знать величины углов α , β и γ .

Определяя направляющие косинусы последовательного перехода от связанных осей к скоростным, от скоростных к траекторным, от траекторных к земным и приравнявая их к направляющим косинусам непосредственного перехода от связанных осей к земным, получаем следующие соотношения между углами:

$$\sin \theta = \sin \theta \cos \alpha \cos \beta + \cos \theta (\sin \alpha \cos \gamma_a + \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma);$$

$$\begin{aligned} \sin \psi \cos \gamma = \sin \psi \cos \beta \cos \gamma_a + \cos \psi (\sin \beta \cos \theta + \sin \gamma_a \sin \theta \cos \beta) - \\ - \cos \psi \sin \theta \sin \gamma; \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$\cos \theta \sin \gamma = \sin \gamma_a \cos \beta \cos \theta - \sin \beta \sin \theta.$$

Таким образом,

$$\gamma_a = \arcsin \frac{\cos \theta \sin \gamma + \sin \beta \sin \theta}{\cos \beta \cos \theta}. \quad (2.13)$$

Решив сложные квадратные тригонометрические уравнения, определим углы α и β .

Проекция вектора скорости центра масс ракеты на оси системы координат $Ox_g y_g z_g$ находятся с помощью соотношений

$$\frac{dx_g}{dt} = V \cos \theta \cos \Psi; \quad \frac{dz_g}{dt} = -V \cos \theta \sin \Psi; \quad \frac{dy_g}{dt} = V \sin \theta. \quad (2.14)$$

Расстояние от начала системы координат до центра масс ракеты (наклонная дальность) $r = \sqrt{x_g^2 + y_g^2 + z_g^2}$. (2.15)

Уравнения (2.7), (2.8), (2.11), (2.12), (2.14) и (2.15) вместе с уравнением

$$m = m_0 - \int_0^t |\dot{m}| dt, \quad (2.16)$$

определяющим изменение массы, составляют систему из 17 уравнений, описывающую пространственное движение ракеты.

Решая эту систему уравнений, находим все характеристики движения ракеты:

$$V(t); \theta(t); \Psi(t); x_g(t); y_g(t); r(t); \vartheta(t); \gamma(t); \alpha(t); \beta(t); \\ \gamma_a(t); \omega_x(t); \omega_y(t); \omega_z(t); m(t); z_g(t); \psi(t).$$

Естественно, должны быть заданы начальные условия интегрирования.

Решение полной системы уравнений, описывающей пространственный полет управляемой ракеты, является весьма сложным и трудоемким; чаще всего при решении практических задач систему упрощают.

Обратимся к получению упрощенной системы уравнений, описывающих пространственное движение управляемой ракеты в плотных слоях атмосферы.

При движении по траектории ракеты с хорошо спроектированной и правильно работающей системой управления углы α , β , γ , γ_a и угловые скорости ω_x , ω_y и ω_z , как правило, невелики. Это дает возможность пренебречь как величинами второго порядка малости, так и членами, содержащими произведения синусов названных углов и произведения угловых скоростей; при этом система уравнений имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \frac{1}{m} [(P_x - x_p) \cos \alpha \cos \beta - (P_y - y_p) \sin \alpha \cos \beta + (P_z + z_p) \times \\ &\quad \times \sin \beta - x_k - Q \sin \theta]; \\ \dot{\theta} &= \frac{1}{mV} [(P_x - x_p) \sin \alpha \cos \gamma_a + (P_y + y_p) \cos \gamma_a \cos \alpha - (P_z + z_p) \times \\ &\quad \times \sin \gamma_a \cos \beta + y_k - Q \cos \theta]; \\ \dot{\Psi} &= -\frac{1}{mV \cos \theta} [-(P_x - x_p) \cos \gamma \cos \alpha \sin \beta + (P_y + y_p) \sin \gamma_a \times \\ &\quad \times \cos \alpha + (P_z + z_p) \cos \gamma_a \cos \beta + z_k]; \\ J_x \dot{\omega}_x &= M_x + M_{Px}; \\ J_y \dot{\omega}_y &= M_y + M_{Py}; \quad J_z \dot{\omega}_z = M_z + M_{Pz}; \\ \dot{\vartheta} &= \omega_y \sin \gamma + \omega_z \cos \gamma; \quad \dot{\psi} = \frac{1}{\cos \vartheta} (\omega_y \cos \gamma - \omega_z \sin \gamma); \\ \dot{\gamma} &= \omega_x - \operatorname{tg} \vartheta (\omega_y \cos \gamma - \omega_z \sin \gamma); \\ \sin \dot{\theta} &= \sin \theta \cos \alpha \cos \beta + \cos \theta \sin \alpha \cos \gamma_a; \\ \sin \Psi \cos \gamma &= \sin \Psi \cos \beta \cos \gamma_a + \cos \Psi (\sin \beta \cos \theta + \sin \gamma_a \sin \theta \cos \beta) - \\ &\quad - \cos \psi \sin \vartheta \sin \gamma; \\ \cos \vartheta \sin \gamma &= \sin \gamma_a \cos \beta \cos \theta - \sin \beta \sin \theta; \\ x_g &= V \cos \theta \cos \Psi; \quad y_g = -V \sin \theta; \end{aligned} \quad (2.17)$$

$$\dot{z}_g = V \cos \theta \sin \Psi; \quad r = (x_g^2 + y_g^2 + z_g^2)^{1/2};$$

$$m = m_0 + \int_0^t |\dot{m}| dt.$$

Некоторые уравнения упростились, но по-прежнему их осталось 17. Дальнейшее упрощение возможно, если предположить, что автомат стабилизации по крену обеспечивает расположение связанной оси ракеты Oy в вертикальной плоскости, проходящей через продольную ось ракеты Ox , т. е. предположить полет без крена при $\gamma = 0$, $\dot{\gamma} = 0$ и $\omega_x = 0$. Система уравнений в этом случае имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \frac{1}{m} [(P_x - x_P) \cos \alpha \cos \beta - (P_y + y_P) \sin \alpha \cos \beta + (P_z + z_P) \times \\ &\quad \times \sin \beta - x_k - Q \sin \theta]; \\ \dot{\theta} &= \frac{1}{mV} [(P_x - x_P) \sin \alpha \cos \gamma_a + (P_y + x_P) \cos \alpha - (P_z + z_P) \sin \gamma_a \times \\ &\quad \times \cos \beta - y_k - Q \cos \theta]; \\ \Psi &= -\frac{1}{mV \cos \theta} [-(P_x - x_P) \cos \gamma_a \cos \alpha \sin \beta + \\ &\quad + (P_y + y_P) \sin \gamma_a \cos \alpha + (P_z + z_P) \cos \gamma_a \cos \beta + z_k]; \\ J_y \dot{\omega}_y &= M_y + M_{Py}; \quad J_z \dot{\omega}_z = M_z + M_{Pz}; \\ \dot{\theta} &= \omega_z; \quad \dot{\psi} = \frac{1}{\cos \theta} \omega_y; \\ \sin \theta &= \sin \theta \cos \alpha \cos \beta + \cos \theta \sin \alpha \cos \gamma; \\ \sin \psi &= \sin \Psi \cos \beta \cos \gamma_a + \cos \Psi (\sin \beta \cos \theta) + \sin \gamma_a \sin \theta \cos \beta; \\ \sin \gamma_a &= \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \theta. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Остальные пять уравнений останутся без изменения.

Другой путь упрощения системы (2.17) связан с понятием о движении ракеты в балансировочном режиме. Для условно безынерционного ЛО можно предположить $J_x = J_y = J_z = 0$, тогда из (2.8) получим

$$\Sigma M_x + \Sigma M_{Px} = 0; \quad \Sigma M_y - \Sigma M_{Py} = 0; \quad \Sigma M_z + \Sigma M_{Pz} = 0. \quad (2.19)$$

При идеальной работе системы управления и отсутствии переходных процессов, пренебрегая угловыми скоростями ω_x , ω_y , ω_z и производными по времени углов атаки, скольжения и крена α , β и γ , а также углов отклонения управляющих органов δ_v , δ_n , δ_s , из предыдущих равенств получаем функциональные зависимости $M_x(V, y, \gamma, \delta_s) = 0$; $M_y(V, y, \beta, \delta_n) = 0$; $M_z(V, y, \alpha, \delta_v) = 0$. Эти зависимости, называемые балансировочными, отражают равенство моментов управляющих сил моментам всех остальных сил,

действующих на ракету. Углы атаки, скольжения, крена, определяемые балансировочными зависимостями, называются балансировочными углами α_6 , β_6 и γ_6 ; движение ракеты по траектории с такими углами — движением в балансировочном режиме. При балансировочном режиме полета предполагается мгновенная реакция летательного аппарата на отклонения органов управления, причем углы атаки, скольжения и крена принимают свои балансировочные значения. Зависимость между балансировочными углами летательного аппарата и органов управления можно установить двумя путями.

Если известны независимые аэродинамические характеристики аппарата и его органов управления, то, используя равенство (2.19) и формулы

$$x = gSC_x; \quad y = gSC_y; \quad z = gSC_z; \quad (2.20)$$

$$M_x = gSlm_x; \quad M_y = gSlm_y; \quad M_z = gSlz; \quad (2.21)$$

$$M_{Py} = S_g l m_{Py}; \quad M_{Pz} = S_g l m_{Pz}, \quad (2.22)$$

для движения в продольной плоскости получаем

$$gSlm_z + g_P S_P l_P m_{Pz} = 0. \quad (2.23)$$

Здесь g — скоростной напор набегающего невозмущенного потока; S — площадь миделевого сечения ракеты; C_x , C_y , C_z — аэродинамические коэффициенты подъемной и боковой сил и силы лобового сопротивления; M_x , M_y , M_z — аэродинамические моменты крена, рысканья и тангажа; l — характерная длина ракеты; m_{Py} , m_{Pz} — коэффициенты управляющих моментов; m_x , m_y , m_z — коэффициенты моментов, не связанных с управлением.

Моментная характеристика может быть представлена в первом приближении в виде

$$m_{Pz} = m_{Pz}^0 \delta_n. \quad (2.24)$$

При раздельном учете аэродинамических моментов для балансировочных углов отклонения управляющих органов $\delta_{в.6}$ и $\delta_{н.6}$, таким образом, можно записать

$$\delta_{в.6} = - \frac{gSl (m_{z0} + m_z^\alpha \alpha_6)}{g_P S_P l_P m_{Pz}^0 \delta_n}. \quad (2.25)$$

Аналогично можно получить зависимость $\delta_{н.6} = f(\beta_6)$.

Если суммарный момент, действующий на ЛО, определяется при совместном изменении атаки угла и отклонения управляющих органов, то без учета вращательных производных получаем

$$\delta_{в.6} = - \frac{1}{m_{Pz}^0} (m_{z0} + m_z^\alpha \alpha_6). \quad (2.26)$$

Здесь использовано соотношение вида

$$m_z = m_{z0} + m_z^\alpha \alpha. \quad (2.27)$$

Коэффициент аэродинамической подъемной силы

$$C_{y6} = C_{y0} + C_y^\alpha \alpha_6 + C_y^{\delta_B} \delta_B. \quad (2.28)$$

Иногда достаточно воспользоваться формулой

$$C_{y6} = \left[C_y^\alpha + C_y^{\delta_B} \left(\frac{\delta_{B.6}}{\alpha_6} \right) \right] \alpha_6. \quad (2.29)$$

Для типовых конструкций отношение $\delta_{B.6}/\alpha_6$ для различных аэродинамических схем следующее:

Обычная схема	1—1,5
«Утка»	0,8—1,2
«Бесхвостка»	1,2—2
С поворотным крылом	4—10

Углы α_6 , β_6 и γ_6 медленно изменяются по траектории, поэтому в уравнениях можно пренебречь членами, содержащими их произведения. Тогда система уравнений движения ракеты приобретает следующий вид:

$$\dot{V} = \frac{1}{m} [(P_x - x_P) \cos \alpha_6 \cos \beta_6 - (P_y + y_P) \sin \alpha_6 \cos \beta_6 + (P_z + z_P) \sin \beta_6 - x_k - Q \sin \theta];$$

$$\dot{\theta} = \frac{1}{mV} [(P_x - x_P) \sin \alpha_6 \cos \gamma_a + (P_y + y_P) \cos \beta_6 \cos \alpha_6 + (P_z + z_P) \sin \gamma_a \cos \beta_6 + y_k - Q \cos \theta];$$

$$\dot{\Psi} = \frac{1}{mV \cos \theta} [-(P_x - x_P) \cos \gamma_a \cos \alpha_6 \sin \beta_6 + (P_y + y_P) \sin \gamma_a \cos \alpha_6 + (P_z + z_P) \cos \gamma_a \cos \beta_6 + z_k]; \quad (2.30)$$

$$M_x + M_{Px} \approx 0; \quad M_y + M_{Py} \approx 0; \quad M_z + M_{Pz} \approx 0;$$

$$\sin \vartheta = \sin \theta \cos \alpha_6 \cos \beta_6 + \cos \theta \sin \alpha_6 \cos \gamma_a;$$

$$\sin \psi \cos \gamma_6 = \sin \Psi \cos \beta_6 \cos \gamma_a + \cos \Psi (\sin \beta_6 \cos \beta_6 + \sin \gamma_a \sin \theta \cos \beta_6) - \cos \psi \sin \vartheta \sin \gamma_6;$$

$$\cos \vartheta \sin \gamma_6 \quad \sin \gamma_6 \cos \beta_6 \cos \theta - \sin \beta_6 \sin \theta;$$

$$x_g = V \cos \theta \cos \Psi; \quad y_g = V \sin \theta; \quad z_d = -V \cos \theta \sin \Psi;$$

$$r = (x_g^2 + y_g^2 + z_d^2)^{1/2}; \quad m = m_0 - \int_0^t |\dot{m}| dt.$$

Полученная система состоит из 14 уравнений относительно 14 неизвестных. Если предположить, что в процессе полета углы α_6 , β_6 , γ_6 и γ_a не превышают величин, при которых можно принять $\sin \alpha_6 \approx \alpha_6$; $\sin \gamma_6 \approx \gamma_6$; $\cos \alpha_6 \approx 1$; $\cos \gamma_6 \approx 1$; $\sin \beta_6 \approx \beta_6$; $\sin \gamma_a \approx \gamma_a$; $\cos \beta_6 \approx 1$; $\cos \gamma_a \approx 1$, то в системе (2.30) вид уравнений

существенно упростится и она запишется в форме

$$\begin{aligned}
 \dot{V} &= \frac{1}{m} [P_x - x_P - (P_y + y_P) \alpha_\delta + (P_z + z_P) \beta_\delta - x_k - Q \sin \theta]; \\
 \dot{\theta} &= \frac{1}{mV} [(P_x - x_P) \alpha_\delta + (P_y + y_P) - (P_z + z_P) \gamma_a + y_k - Q \cos \theta]; \\
 \dot{\Psi} &= \frac{1}{mV \cos \theta} [-(P_x - x_P) \beta_\delta + (P_y + y_P) \gamma_a + (P_z + z_P) + z_k]; \\
 M_x + M_{Px} &\approx 0; \quad M_y + M_{Py} \approx 0; \quad M_z + M_{Pz} \approx 0; \\
 \sin \vartheta &= \sin \theta \cos \alpha_\delta \cos \beta_\delta + \cos \theta \sin \alpha_\delta \cos \gamma_a; \\
 \sin \psi \cos \gamma_\delta &= \sin \Psi \cos \beta_\delta \cos \gamma_a + \cos \Psi (\sin \beta_\delta \cos \beta_\delta + \\
 &\quad + \sin \gamma_a \sin \theta \cos \beta_\delta) - \cos \psi \sin \vartheta \sin \gamma_\delta; \\
 \cos \vartheta \sin \gamma_\delta &= \sin \gamma_\delta \cos \beta_\delta \cos \theta - \sin \beta_\delta \sin \theta; \\
 \dot{x}_g &= V \cos \theta \cos \Psi; \quad \dot{y}_g = V \sin \theta; \quad \dot{z}_g = -V \cos \theta \sin \Psi; \\
 r &= (x_g^2 + y_g^2 + z_g^2)^{1/2}; \quad m = m_0 - \int_0^t |m| dt.
 \end{aligned} \tag{2.31}$$

Существенное упрощение системы уравнений, описывающей пространственное движение, можно получить для осесимметричных ракет, у которых тяга не создает момента относительно центра масс и направлена по продольной оси ракеты. В этом случае $P_x = = P$; $P_y = P_z = 0$.

Управляющие силы Σx_P , Σy_P , Σz_P можно учесть в неявном виде, включив их соответственно в лобовое сопротивление, подъемную и боковую силы. Используя (2.7), приходим к уравнениям вида

$$\begin{aligned}
 \dot{V} &= \frac{1}{m} (P \cos \alpha \cos \beta - x_a - Q \sin \theta); \\
 \dot{\theta} &= \frac{1}{mV} [P (\sin \alpha \cos \gamma_a + \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma_a) + y_a \cos \gamma_a - \\
 &\quad - z_a \sin \gamma - Q \cos \theta]; \\
 \dot{\Psi} &= \frac{1}{mV \cos \theta} [P (\sin \alpha \sin \gamma_a - \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma_a) + \\
 &\quad + y_a \sin \gamma_a + z_a \cos \gamma_a].
 \end{aligned} \tag{2.32}$$

При этом же допущении из (2.8) следует

$$\begin{aligned}
 J_x \dot{\omega}_x &= \Sigma M_x + \Sigma M_{Px} - (J_z - J_y) \omega_y \omega_z; \\
 J_y \dot{\omega}_y &= \Sigma M_y + \Sigma M_{Py} - (J_x - J_z) \omega_z \omega_x; \\
 J_z \dot{\omega}_z &= \Sigma M_z + \Sigma M_{Pz} - (J_y - J_x) \omega_x \omega_y.
 \end{aligned} \tag{2.33}$$

Если угловые скорости ω_x , ω_z ракеты во вращательном движении малы и $\omega_x = 0$, то уравнения (2.33) можно заменить баланси-

ровочными зависимостями (2.19), из которых найдем баланси́ровочные углы α_6 , β_6 и введем их в (2.32). Дополнительно, как и раньше, принимаем $\sin \alpha_6 \approx \alpha_6$; $\sin \gamma_a \approx \gamma_a$, а косинусы этих углов приравниваем единице. Для подъемной и боковой сил примем линейные зависимости

$$y_a = y_a^\alpha \alpha_6; \quad z_a = -z_a^\beta \beta_6, \quad (2.34)$$

где

$$y_a^\alpha = g S C_{y_a}^\alpha; \quad z_a^\beta = g S |C_{z_a}^\beta|. \quad (2.35)$$

Вводя принятые упрощения, из (2.32) получаем

$$\begin{aligned} \dot{V} &\approx \frac{P - x_a}{m} - g \sin \theta; \\ \dot{\theta} &\approx \frac{(P + y_a^\alpha) \alpha_6 + (P + z_a^\beta) \beta_6 \gamma_a}{mV} - \frac{g \cos \theta}{V}; \\ \dot{\Psi} &\approx \frac{(P + y_a^\alpha) \alpha_6 \gamma_a - (P + z_a^\beta) \beta_6}{mV \cos \theta}. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Из уравнений (2.12) и (2.13) имеем

$$\begin{aligned} \sin \vartheta &\approx \sin \theta + \cos \theta (\alpha_6 + \beta_6 \gamma_a); \\ \sin \psi &\approx \sin \Psi + \cos \Psi (\beta_6 \cos \theta + \gamma_a \sin \theta); \\ \gamma_a &\approx \beta_6 \operatorname{tg} \theta. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Уравнения (2.14) — (2.16) не изменятся.

Таким образом, в результате проведенных упрощений получим систему из 11 уравнений с 13 неизвестными

$$\begin{aligned} V(t); \quad \theta(t); \quad \Psi(t); \quad x_g(t); \quad y_g(t); \quad z_g(t); \quad r(t); \\ \vartheta(t); \quad \psi(t); \quad \alpha_6(t); \quad \beta_6(t); \quad \gamma_a(t); \quad m(t), \end{aligned}$$

которая может быть решена, если к заданным уравнениям добавить кинематические, определяющие метод управления (принять для двух из этих величин определенный закон изменения со временем (программу)). Например, может быть дополнительно задано $\Psi(t)$.

В уравнениях (2.36) члены, содержащие произведения малых углов $\beta_6 \gamma_a$ и $\alpha_6 \gamma_a$, значительно меньше остальных слагаемых, в первом приближении их можно опустить. Тогда вместо уравнений (2.36) получим

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &\approx \frac{(P - y_a^\alpha) \alpha_6}{mV} - g \frac{\cos \theta}{V}; \\ \dot{V} &\approx \frac{P - x_a}{m} - g \sin \theta; \\ \dot{\Psi} &\approx \frac{(P + z_a^\beta) \beta_6}{mV \cos \theta}. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Полет управляемой ракеты при выключенном двигателе можно описать системой уравнений, полученной из (2.17), если положить в ней равными нулю составляющие тяги, моменты от тяги и принять $m = \text{const}$. Первые три уравнения имеют вид

$$\begin{aligned}\dot{V} &= \frac{1}{m} [-x_P \cos \alpha \cos \beta - y_P \sin \alpha \cos \beta + z_P \sin \beta - x_k - Q \sin \theta]; \\ \dot{\theta} &= \frac{1}{mV} [-x_P \sin \alpha \cos \gamma_a + y_P \cos \gamma \cos \alpha - z_P \sin \gamma_a \cos \beta + \\ &\quad + y_k - Q \cos \theta]; \\ \dot{\Psi} &= -\frac{1}{mV \cos \theta} [x_P \cos \gamma_a \cos \alpha \sin \beta + y_P \sin \gamma_a \cos \alpha + \\ &\quad + z_P \cos \gamma_a \cos \beta + z_k].\end{aligned}\tag{2.39}$$

Остальные 13 уравнений системы (2.17) можно использовать без изменения.

Дадим краткую характеристику системе уравнений, описывающих пространственное движение неуправляемой ракеты в плотных слоях атмосферы.

Системы уравнений, приведенные ранее, могут быть перестроены применительно к движению неуправляемой ракеты, если опустить в них уравнения управления. Кроме того, из уравнений необходимо исключить члены, содержащие управляющие силы и моменты. Например, на базе системы (2.17) для неуправляемой ракеты получим

$$\begin{aligned}\dot{V} &= \frac{1}{m} [P_x \cos \alpha \cos \beta - P_y \sin \alpha \cos \beta + P_z \sin \beta - x_k - Q \sin \theta]; \\ \dot{\theta} &= \frac{1}{mV} [P_x \sin \alpha \cos \gamma_a + P_y \cos \alpha - P_z \sin \gamma_a \cos \beta + y_k - Q \cos \theta];\end{aligned}\tag{2.40}$$

$$\begin{aligned}\dot{\Psi} &= -\frac{1}{mV \cos \theta} [-P_x \cos \gamma_a \cos \alpha \sin \beta + P_y \sin \gamma_a \cos \alpha + \\ &\quad + P_z \cos \gamma_a \cos \beta + z_k];\end{aligned}$$

$$J_x \dot{\omega}_x = M_x; \quad J_y \dot{\omega}_y = M_y; \quad J_z \dot{\omega}_z = M_z.$$

Остальные 11 уравнений системы (2.17) можно оставить без изменений.

При моделировании движения ракет следует учесть, что разделение его на поступательное и вращательное, продольное и боковое [35] существенно упрощает получаемые системы уравнений и их решение.

При строгом теоретическом подходе к решению задачи моделирования разделение уравнений, описывающих сложное пространственное движение, на уравнения, описывающие только поступательное движение центра масс или только вращательное движение

относительно центра масс, и на уравнения продольного и поперечного движения, очевидно, невозможно. Взаимосвязь поступательного и вращательного движений ракет проявляется через так называемые перекрестные связи. Систематическое обобщение исследований по учету влияния этих связей на движение ЛО в атмосфере изложено в работах [22, 95].

§ 3. Метод малого параметра

Решение задачи Коши для уравнений движения ракет осуществляется, как правило, численно на ЭВМ. Рассмотрим прием приближенного численно-аналитического интегрирования уравнений на простом примере, связанном с движением искусственного спутника Земли как неуправляемого объекта. Такой подход может быть распространен и на движение ракет [35].

Пусть движение спутника описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений в связанной с центром Земли прямоугольной системе координат $Oxyz$:

$$\begin{aligned} \dot{v}_x &= (\omega_3^2 - A) x + 2\omega_3 v_y - S\rho v v_x; \\ \dot{v}_y &= (\omega_3^2 - A) y - 2\omega_3 v_x - S\rho v v_y; \\ \dot{v}_z &= (\omega_3^2 - A) z - S\rho v v_z. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Здесь

$$\begin{aligned} v_x &= \dot{x}, \quad v_y = \dot{y}, \quad v_z = \dot{z}; \quad A = \frac{1}{r^3} \left(\gamma_1 + \delta_1 \frac{z^2}{r^4} \right) + \kappa_1 \frac{1}{r^5}; \\ \gamma_1 &= R_s \alpha_{00}; \quad \delta_1 = \frac{R_s^3 15}{2} \alpha_{20}; \quad \kappa = -\frac{3R_s^3}{2} \alpha_{20}; \end{aligned} \quad (3.2)$$

S ; ρ ; R_s ; α_{00} ; α_{20} — известные постоянные.

Выполним замену переменных

$$x = \xi \sin \tau + \eta \cos \tau; \quad y = \xi \cos \tau - \eta \sin \tau; \quad \tau = \omega_3 t. \quad (3.3)$$

Система (3.1) приводится к следующему виду:

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= -\frac{1}{\omega_3^2} [A\xi + \omega_3^2 S\rho (\xi - \eta) f(\xi, \eta, \dot{\xi}, \dot{\eta}, \dot{z})]; \\ \ddot{\eta} &= -\frac{1}{\omega_3^2} [A\eta + \omega_3^2 S\rho (\xi + \eta) f(\xi, \eta, \dot{\xi}, \dot{\eta}, \dot{z})]; \\ \ddot{z} - z &= -\frac{1}{\omega_3^2} \left[Az + \omega_3^2 S\rho \frac{dz}{d\tau} f(\xi, \eta, \dot{\xi}, \dot{\eta}, \dot{z}) \right]. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Здесь

$$A = \frac{1}{V(\xi^2 + \eta^2 + z^2)^3} \left(\gamma_1 + \delta_1 \frac{z^2}{(\xi^2 + \eta^2 + z^2)^2} \right) + \kappa_1 \frac{1}{(\xi^2 + \eta^2 + z^2)^{3/2}}; \quad (3.5)$$

$$f(\xi, \dot{\xi}, \eta, \dot{\eta}, z) = V(\dot{\xi} - \eta)^2 + (\xi + \dot{\eta})^2 + \dot{z}^2;$$

Первые два уравнения (3.4) запишем так:

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= \xi_1; \quad \dot{\eta} = \eta_1; \\ \ddot{\xi}_1 &= -\frac{1}{\omega_3^2} [A_{\xi} + S\rho\omega_3^2 (\xi_1 - \eta) f(\xi, \eta, \eta_1, \xi_1, z)]; \\ \ddot{\eta}_1 &= -\frac{1}{\omega_3^2} [A_{\eta} + S\rho\omega_3^2 (\xi + \eta_1) f(\xi, \eta, \eta_1, \xi_1, z)]. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Для сведения третьего уравнения (3.4) к системе двух уравнений обозначим

$$dz/d\tau = z_1. \quad (3.7)$$

Тогда

$$\frac{dz_1}{d\tau} = \left(1 - \frac{A}{\omega_3^2} \right) z S\rho z_1 f(\xi, \eta, \eta_1, \xi_1, z_1). \quad (3.8)$$

В формулах (3.6) — (3.8) величины A и f имеют вид (3.5) с учетом того, что $\xi = \xi_1$; $\eta = \eta_1$; $z = z_1$. Учитывая входящие в (3.6) — (3.8) величины $\gamma_1, \delta_1, \kappa_1, \rho$, принимаем в качестве безразмерного параметра $\varepsilon \ll 1$ отношение единичной частоты к заданной ω_3 , т. е.

$$\varepsilon = 1/\omega_3. \quad (3.9)$$

Так как в (3.6) — (3.8) величины $\alpha_{00} \gg 1, \alpha_{20} \gg 1$, положим

$$\gamma = \frac{R_3 \alpha_{00}}{\omega_3}; \quad \delta = \frac{R_3^3 15}{2\omega_3} \alpha_{20}; \quad \kappa = -\frac{3R_3^3}{\omega_3} \alpha_{20}. \quad (3.10)$$

В связи с тем, что начиная с некоторого h (высота полета спутника) значение $\rho \ll 1$, запишем $\rho_1 = \rho\omega_3$. В принятых обозначениях система (3.6) — (3.8) имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= \xi_1; \quad \dot{\eta} = \eta_1; \quad \dot{z} = z_1; \\ \ddot{\xi}_1 &= -\varepsilon [A_1 \xi + S\rho_1 (\xi_1 - \eta) f(\xi, \eta, \eta_1, \xi_1, z_1)]; \\ \ddot{\eta}_1 &= -\varepsilon [A_1 \eta + S\rho_1 (\xi + \eta_1) f(\xi, \eta, \eta_1, \xi_1, z_1)]; \\ \ddot{z}_1 &= z - \varepsilon [A_1 z + S\rho_1 z_1 f(\xi, \eta_1, \eta, \xi_1, z_1)], \end{aligned} \quad (3.11)$$

где $A_1 = \frac{A}{\omega_3}.$

Введем

$$\begin{aligned}\Phi(\xi, \eta, \eta_1, \xi_1, z_1) &= -[A_1\xi + S\rho_1(\xi_1 - \eta)f(\xi, \eta, \xi_1, \eta_1, z_1)]; \\ \Psi(\xi, \eta, \eta_1, \xi_1, z_1) &= -[A_1\eta + S\rho_1(\xi + \eta_1)f(\xi, \eta, \xi_1, \eta_1, z_1)]; \\ \chi(\xi, \eta, \xi_1, \eta_1, z, z_1) &= -[A_1z + S\rho_1z_1f(\xi, \eta, \eta_1, \xi_1, z_1)].\end{aligned}\quad (3.12)$$

Тогда (3.12) имеет вид

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= \xi_1; \quad \dot{\eta} = \eta_1; \quad \dot{z} = z_1; \\ \dot{\xi}_1 &= \varepsilon\Phi(\xi, \eta, \eta_1, \xi_1, z_1); \\ \dot{\eta}_1 &= \varepsilon\Psi(\xi, \eta, \eta_1, \xi_1, z_1); \\ \dot{z}_1 &= z + \varepsilon\chi(\xi, \eta, \eta_1, \xi_1, z, z_1).\end{aligned}\quad (3.13)$$

Назовем невозмущенной по отношению к (3.13) задачу, полученную из (3.13) при $\varepsilon = 0$, т. е. когда

$$\xi = \xi_1; \quad \xi_1 = 0; \quad \eta = \eta_1; \quad \eta_1 = 0; \quad \dot{z} = z_1; \quad z_1 = 0. \quad (3.14)$$

Проинтегрировав систему (3.14), имеем

$$\begin{aligned}\xi &= \xi_0 + \xi_2 t; \quad \xi_1 = \xi_2; \\ \eta &= \eta_0 + \eta_2 t; \quad \eta_1 = \eta_2; \\ z &= ae^t + be^{-t}; \quad z_1 = ae^t - be^{-t},\end{aligned}\quad (3.15)$$

где $\xi_0, \xi_2, \eta_0, \eta_2, a, b$ — постоянные интегрирования.

Известно, что задача (3.1) имеет единственное решение. Исходя из этого предположения и наличия возмущений, пропорциональных малому параметру, решаем задачу (3.1) в виде разложений:

$$\begin{aligned}\xi &= \xi_0 + \xi_2 \tau + \sum_{j=1}^m \varepsilon^j u_j(\tau, \xi_0, \xi_2, \eta_0, \eta_2, a, b); \\ \xi_1 &= \xi_2 + \sum_{j=1}^m \varepsilon^j w_j(\tau, \xi_0, \xi_2, \eta_0, \eta_2, a, b); \\ \eta &= \eta_0 + \eta_2 \tau + \sum_{j=1}^m \varepsilon^j v_j(\tau, \xi_0, \xi_2, \eta_0, \eta_2, a, b); \\ \eta_1 &= \eta_2 + \sum_{j=1}^m \varepsilon^j \kappa_j(\tau, \xi_0, \xi_2, \eta_0, \eta_2, a, b); \\ z &= ae^{\tau} + be^{-\tau} + \sum_{j=1}^m \varepsilon^j \zeta_j(\tau, \xi_0, \xi_2, \eta_0, \eta_2, a, b); \\ z_1 &= ae^{\tau} - be^{-\tau} + \sum_{j=1}^m \varepsilon^j \mu_j(\tau, \xi_0, \xi_2, \eta_0, \eta_2, a, b),\end{aligned}\quad (3.16)$$

где $\xi_0, \xi_2, \eta_0, \eta_2, a, b$ должны удовлетворять уравнениям вида

$$\frac{d\xi_0}{d\tau} = \varepsilon A_1(\xi_0, \xi_2, \eta_0, \eta_2, a, b) + \xi^2 A_2 + \dots = \sum_{j=1}^m \varepsilon^j A_j;$$

$$\begin{aligned}
\frac{d\xi_2}{d\tau} &= \varepsilon B_1(\xi_0, \xi_2, \eta_0, \eta_2, a, b) + \varepsilon^2 B_2 + \dots = \sum_{j=1}^m \varepsilon^j B_j; \\
\frac{d\eta_0}{d\tau} &= \varepsilon C_1(\xi_0, \xi_2, \eta_0, \eta_2, a, b) + \varepsilon^2 C_2 + \dots = \sum_{j=1}^m \varepsilon^j C_j; \\
\frac{d\eta_2}{d\tau} &= \varepsilon D_1(\xi_0, \xi_2, \eta_0, \eta_2, a, b) + \varepsilon^2 D_2 + \dots = \sum_{j=1}^m \varepsilon^j D_j; \\
\frac{da}{d\tau} &= \varepsilon L_1(\xi_0, \xi_2, \eta_0, \eta_2, a, b) + \varepsilon^2 L_2 + \dots = \sum_{j=1}^m \varepsilon^j L_j; \\
\frac{db}{d\tau} &= \varepsilon N_1(\xi_0, \xi_2, \eta_0, \eta_2, a, b) + \varepsilon^2 N_2 + \dots = \sum_{j=1}^m \varepsilon^j N_j.
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Функции $u_i, w_i, v_i, \kappa_i, \xi_i, \mu_i$ должны удовлетворять определенным условиям, которые будут введены в процессе рассмотрения задачи.

Следуя известной теории, можно показать, что решив задачу в первом приближении, т. е.

$$\begin{aligned}
\xi &= \xi_0 + \xi_2 \tau; \quad \xi_1 = \xi_2; \\
\eta &= \eta_0 + \eta_2 \tau; \quad \eta_1 = \eta_2; \\
z &= ae^\tau + be^{-\tau}; \quad z_1 = ae^\tau - be^{-\tau},
\end{aligned} \tag{3.18}$$

где

$$\begin{aligned}
\frac{d\xi_0}{d\tau} &= \varepsilon A_1; \quad \frac{d\xi_2}{d\tau} = \varepsilon B_1; \\
\frac{d\eta}{d\tau} &= \varepsilon C_1; \quad \frac{d\eta_2}{d\tau} = \varepsilon D_1; \\
\frac{da}{d\tau} &= \varepsilon L_1; \quad \frac{db}{d\tau} = \varepsilon N_1,
\end{aligned} \tag{3.19}$$

можно утверждать, что полученные решения будут удовлетворять условиям

$$|y_i^{(1)} - y_i| < \varepsilon S_1, \tag{3.20}$$

где $y_i^{(1)}$ — одно из решений (3.18); y_i — это же точное решение; S_1 — некоторая постоянная.

Если в каждое из найденных равенств (3.18) добавить найденные функции $u_1, w_1, v_1, \kappa_1, \xi_1, \mu_1$, то получим решение задачи в первом улучшенном приближении — более точное, удовлетворяющее условию $|y_i^{(1)} - y_i| < \varepsilon$.

Перейдем к нахождению неизвестных функций

$$A_1; B_1; C_1; D_1; L_1; N_1; u_1; w_1; v_1; \kappa_1; \xi_1; \mu_1,$$

входящих в уравнения первого улучшенного приближения.

Для этого определим из (3.16) производные всех функций, входящих в (3.13):

$$\begin{aligned}
 \frac{d\xi}{d\tau} &= \frac{d\xi_0}{d\tau} + \xi_2 + \frac{d\xi_2}{d\tau} \tau + \varepsilon \frac{\partial u_1}{\partial \tau} + \varepsilon^2 + \dots, \\
 \frac{d\xi_2}{d\tau} &= \frac{d\xi_2}{d\tau} + \varepsilon \frac{\partial \omega_1}{\partial \tau} + \varepsilon^2 + \dots, \\
 \frac{d\eta}{d\tau} &= \frac{d\eta_0}{d\tau} + \eta_2 + \tau \frac{d\eta_2}{d\tau} + \varepsilon \frac{\partial v_1}{\partial \tau} + \varepsilon^2 + \dots, \\
 \frac{d\eta_1}{d\tau} &= \frac{d\eta_2}{d\tau} + \varepsilon \frac{\partial \kappa_1}{\partial \tau} + \varepsilon^2 + \dots, \\
 \frac{dz}{d\tau} &= \frac{da}{d\tau} e^\tau + ae^\tau + \frac{db}{d\tau} e^{-\tau} - be^{-\tau} + \varepsilon \frac{\partial \zeta_1}{\partial \tau} + \varepsilon^2 + \dots, \\
 \frac{dz_1}{d\tau} &= \frac{da}{d\tau} e^\tau + ae^\tau - \frac{db}{d\tau} e^{-\tau} + be^{-\tau} + \varepsilon \frac{\partial \mu_1}{\partial \tau} + \varepsilon^2 + \dots
 \end{aligned} \tag{3.21}$$

Равенства (3.21) с учетом (3.17) можно представить в виде

$$\begin{aligned}
 \frac{d\xi}{d\tau} &= \xi_2 + \varepsilon \left[A_1 + B_1 \tau + \frac{\partial u_1}{\partial \tau} \right] + \varepsilon^2 + \dots, \\
 \frac{d\xi_1}{d\tau} &= \varepsilon \left[B_1 + \frac{\partial \omega_1}{\partial \tau} \right] + \varepsilon^2 + \dots, \\
 \frac{d\eta}{d\tau} &= \eta_2 + \varepsilon \left[C_1 + D_1 \tau + \frac{\partial v_1}{\partial \tau} \right] + \varepsilon^2 + \dots, \\
 \frac{d\eta_1}{d\tau} &= \varepsilon \left[D_1 + \frac{\partial \kappa_1}{\partial \tau} \right] + \varepsilon^2 + \dots, \\
 \frac{dz}{d\tau} &= ae^\tau - be^{-\tau} + \varepsilon \left[L_1 + N_1 e^{-\tau} + \frac{\partial \zeta_1}{\partial \tau} \right] + \varepsilon^2 + \dots, \\
 \frac{dz_1}{d\tau} &= ae^\tau + be^{-\tau} + \varepsilon \left[L_1 e^\tau - N_1 e^{-\tau} + \frac{\partial \mu_1}{\partial \tau} \right] + \varepsilon^2 + \dots
 \end{aligned} \tag{3.22}$$

Функции Φ , Ψ , χ разложим с учетом (3.16) и (3.17) в ряд Тейлора. Результат разложения разместим по возрастающим степеням τ .

Первый член разложения следующий:

$$\begin{aligned}
 \Phi(\xi, \eta, \eta_1, \xi_1, z_1) &= \Phi_0[\xi_0 + \xi_2 t, \eta_0 + \eta_2 t; \xi_2, ae^\tau - be^{-\tau}] + \varepsilon + \dots, \\
 \Psi(\xi, \eta, \eta_1, \xi_1, z_1) &= \Psi_0[\xi + \xi_2 t, \eta_0 + \eta_2 t, \xi_2, ae^\tau - be^{-\tau}] + \\
 &\quad + \varepsilon + \dots, \\
 \chi(\xi, \eta, \xi_1, \eta_1, z, z_1) &= \chi_0[\xi + \xi_2 t, \eta + \eta_2 t, \xi_2, \eta_2, ae^\tau + \\
 &\quad + be^{-\tau}, ae^\tau - be^{-\tau}] + \varepsilon + \dots
 \end{aligned} \tag{3.23}$$

Подставим (3.22) и (3.23) в (3.13). Приравняв коэффициенты слева и справа, найдем

$$\begin{aligned} A_1 + \tau B_1 + \frac{\partial u_1}{\partial \tau} &= w_1; \quad B_1 + \frac{\partial w_1}{\partial \tau} = \Phi_0; \quad C_1 + D_1 \tau + \frac{\partial v_1}{\partial \tau} = \kappa_1; \\ D_1 + \frac{\partial \kappa_1}{\partial \tau} &= \Psi_0; \quad L_1 e^\tau + N_1 e^{-\tau} + \frac{\partial \xi_1}{\partial \tau} = \mu_1; \quad L_1 e^\tau - N_1 e^{-\tau} + \\ &+ \frac{\partial \mu_1}{\partial \tau} = \chi_0. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Из двух последних уравнений получим L_1 , N_1 , μ_1 и ξ_1 . Для этого известную функцию χ_0 разложим в ряд Фурье

$$\chi_0 = \sum_{n=0}^{\infty} [C_n \cos n\tau + d_n \sin n\tau], \quad (3.25)$$

где

$$\begin{aligned} C_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \chi_0 \cos k\pi d\tau, \quad k = 1, 2, \dots; \\ C_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \chi_0 d\tau; \\ d_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \chi_0 \sin k\pi d\tau, \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (3.26)$$

Это разложение возможно, так как функции χ_0 , Ψ_0 и Φ_0 непрерывны на полуоси $[0, \infty)$ и удовлетворяют теоремам разложения. Неизвестную функцию μ_1 найдем в виде ряда

$$\mu_1 = \sum_{n=1}^{\infty} [\tilde{C}_n \cos n\tau + \tilde{d}_n \sin n\tau]. \quad (3.27)$$

Подставив (3.25) и (3.27) в последнее уравнение системы (3.24), имеем

$$\begin{aligned} L_1 e^\tau - N_1 e^{-\tau} + \sum_{n=1}^{\infty} [\tilde{C}_n n \sin n\tau + \tilde{d}_n n \cos n\tau] &= \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} [C_n \cos n\tau + d_n \sin n\tau]. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Умножив равенство (3.28) на $d\tau$ и проинтегрировав в промежутке $[0, 2\pi]$, получим

$$\int_0^{2\pi} [L_1 e^\tau - N_1 e^{-\tau}] d\tau = C_0 2\pi, \quad (3.29)$$

или

$$\int_0^{2\pi} [L_1 e^\tau - N_1 e^{-\tau} - \chi_0] d\tau = 0. \quad (3.30)$$

Положив в (3.30)

$$L_1 e^\tau - N_1 e^{-\tau} - \chi_0 = 0, \quad (3.31)$$

из (3.28) найдем

$$\begin{aligned} \tilde{d}_k &= \frac{C_k}{k}, \\ \tilde{C}_k &= -\frac{d_k}{k}, \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (3.32)$$

Таким образом,

$$\mu_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \left[-\frac{d_n}{n} \cos n\tau + \frac{C_n}{n} \sin n\tau \right]. \quad (3.33)$$

Из предпоследнего уравнения системы (3.24) найдем ξ_1 .

Подставив в это уравнение искомое разложение функции ξ_1 (3.31) и уже найденное выражение для функции μ_1 , получим

$$\begin{aligned} L_1 e^\tau + N_1 e^{-\tau} + \sum_{n=1}^{\infty} [-nv_n \sin n\tau + w_n n \cos n\tau] = \\ = \sum_{n=1}^{\infty} \left[-\frac{d_n}{n} \cos n\tau + \frac{C_n}{n} \sin n\tau \right]. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Умножив (3.34) слева и справа на $d\tau$ и проинтегрировав по явно входящему времени τ , запишем

$$\int_0^{2\pi} (L_1 e^\tau + N_1 e^{-\tau}) d\tau = 0. \quad (3.35)$$

Следовательно, положив в (3.35)

$$L_1 e^\tau + N_1 e^{-\tau} = 0, \quad (3.36)$$

имеем

$$w_k = -\frac{d_k}{k}, \quad v_k = \frac{C_k}{k^2}, \quad k \neq 0. \quad (3.37)$$

Тогда

$$\xi_1 = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n}{n^2} \cos n\tau + \frac{d_n}{n^2} \sin n\tau. \quad (3.38)$$

Из (3.31) и (3.36) найдем Z_1 и N_1 .

Решая систему

$$\begin{cases} L_1 e^\tau - N_1 e^{-\tau} = \chi_0, \\ L_1 e^\tau + N_1 e^{-\tau} = 0, \end{cases} \quad (3.39)$$

находим

$$L_1 = \frac{1}{2} e^{-\tau} \chi_0, \quad N_1 = -\frac{1}{2} e^{\tau} \chi_0. \quad (3.40)$$

Откуда после интегрирования слева и справа по явно входящему времени τ имеем

$$L_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} e^{-\tau} \chi_0 d\tau, \quad N_1 = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} e^{\tau} \chi_0 d\tau. \quad (3.41)$$

Заметив, что формулы (3.41) получены другим путем, т. е. непосредственно из уравнения

$$\ddot{z} - z = \varepsilon \chi(\xi, \eta_1, \xi_1, \eta, z, z_1), \quad (3.42)$$

находим

$$z = ae^{\tau} + be^{-\tau}. \quad (3.43)$$

В (3.42) введем замену, тогда

$$\dot{z} = \frac{da}{d\tau} e^{\tau} + ae^{\tau} + \frac{db}{d\tau} e^{-\tau} - be^{-\tau}. \quad (3.44)$$

Если a и b выбрать из условий

$$\frac{da}{d\tau} e^{\tau} + \frac{db}{d\tau} e^{-\tau} = 0, \quad (3.45)$$

то после дифференцирования (3.44) с учетом (3.45) и подстановки в (3.42) имеем

$$\frac{da}{d\tau} e^{\tau} - \frac{db}{d\tau} e^{-\tau} = \varepsilon \chi(\xi, \eta_1, \xi_1, \eta, a, b). \quad (3.46)$$

Решив систему

$$\begin{cases} \frac{da}{d\tau} e^{\tau} + \frac{db}{d\tau} e^{-\tau} = 0, \\ \frac{da}{d\tau} e^{\tau} - \frac{db}{d\tau} e^{-\tau} = \varepsilon \chi(\xi, \eta_1, \xi_1, \eta, a, b) \end{cases} \quad (3.47)$$

с учетом разложений (3.17), получим формулы (3.40).

Определим функции D_1, Ψ_0, χ_1, v_1 . Для этого известную функцию Ψ_0 представим в виде ряда

$$\Psi_0 = \sum_{n=0}^{\infty} [v_1 \cos n\tau + w_n \sin n\tau], \quad (3.48)$$

где

$$v_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \Psi_0 \cos k\tau d\tau;$$

$$w_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \Psi_0 \sin k\tau d\tau, \quad k = 1, 2, \dots; \quad (3.49)$$

$$v_0 = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \Psi_0 d\tau.$$

Функцию κ_1 находим в виде следующего ряда:

$$\kappa_1 = \sum_{n=1}^{\infty} [v_n \cos n\tau + w_n' \sin n\tau]. \quad (3.50)$$

Подставив (3.48) и (3.49) в уравнение

$$D_1 + \frac{\partial \kappa_1}{\partial \tau} = \Psi_0, \quad (3.51)$$

получим

$$D_1 + \sum_{n=1}^{\infty} [-nv_n \sin n\tau + w_n' n \cos n\tau] = \sum_{n=0}^{\infty} [v_n \cos n\tau + w_n \sin n\tau]. \quad (3.52)$$

Приравняв коэффициенты в (3.52) при одинаковых гармониках, имеем

$$D_1 = v_0, \quad k = 0;$$

$$v_k' = \frac{w_k}{k}; \quad (3.53)$$

$$w_k' = \frac{v_k}{k}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Это значит, что

$$D_1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Psi_0 d\tau; \quad (3.54)$$

$$\kappa_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \left[-\frac{w_n}{n} \cos n\tau + \frac{v_n}{n} \sin n\tau \right].$$

Подставив D_1 и κ_1 в уравнение

$$C_1 + D_1\tau + \frac{\partial v_1}{\partial \tau} = \kappa_1, \quad (3.55)$$

получим

$$C_1 + v_0\tau + \frac{\partial v_1}{\partial \tau} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[-\frac{w_n}{n} \cos n\tau + \frac{v_n}{n} \sin n\tau \right]. \quad (3.56)$$

Представим τ в виде ряда Фурье, т. е.

$$\tau = \pi - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \sin n\tau}{n}. \quad (3.57)$$

Находим неизвестную функцию

$$v_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \Delta_n \cos n\tau + \beta_n \sin n\tau. \quad (3.58)$$

Подставив (3.57) в (3.58), получим

$$\begin{aligned} C_1 + v_0\pi + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\Delta_n n - \frac{2v_0}{n} \right) \sin n\tau + n\beta_n \cos n\tau = \\ = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{w_n}{n} \cos n\tau + \frac{v_n}{n} \sin n\tau \right]. \end{aligned} \quad (3.59)$$

Приравняв коэффициенты при одинаковых гармониках, найдем

$$\Delta_k = -\frac{v_k + 2v_0}{k^2}; \quad \beta_k = \frac{w_k}{k^2}; \quad k = 1, 2, \dots; \quad C_1 = -v_0\pi. \quad (3.60)$$

Следовательно,

$$v_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \left[-\frac{v_n - 2v_0}{n^2} \cos n\tau + \frac{w_n}{n^2} \sin n\tau \right], \quad (3.61)$$

$$C_1 = -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \Psi_0 d\tau. \quad (3.62)$$

Аналогично вычисляем величины B_1 , w_1 , A_1 , u_1 . Для этого известную функцию Φ_0 представим в виде ряда

$$\Phi_0 = \sum_{n=0}^{\infty} [\xi_n \cos n\tau + \eta_n \sin n\tau], \quad (3.63)$$

где

$$\begin{aligned} \xi_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \Phi_0 \cos k\tau d\tau; \\ \eta_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \Phi_0 \sin k\tau d\tau, \quad k = 1, 2, \dots; \\ \xi_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi_0 d\tau. \end{aligned} \quad (3.64)$$

Неизвестную функцию w_1 найдем в виде следующего разложения:

$$w_1 = \sum_{n=1}^{\infty} [\xi_n \cos n\tau + \eta_n \sin n\tau]. \quad (3.65)$$

Подставив (3.53) и (3.55) в уравнение

$$B_1 + \frac{\partial w_1}{\partial \tau} = \Phi_0 \quad (3.66)$$

и приравняв коэффициенты при одинаковых гармониках, получим

$$B_1 = \xi_0; \quad k = 0; \quad (3.67)$$

$$\xi_k' = -\frac{\eta_k}{k}; \quad \eta_k = \frac{\xi_k}{k}; \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.68)$$

Запишем искомое разложение для

$$u_1 = \sum_{n=1}^{\infty} (i_n \cos n\tau + j_n \sin n\tau). \quad (3.69)$$

Подставив (3.65) с учетом (3.68) и (3.69) в уравнение

$$A_1 + \tau B_1 + \frac{\partial u_1}{\partial \tau} = w_1, \quad (3.70)$$

получим

$$\begin{aligned} A_1 + \xi_0 \tau + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(-i_n n - \frac{2\xi_0}{n} \right) \sin n\tau + n j_n \cos n\tau \right] = \\ = \sum_{n=1}^{\infty} \left[-\frac{\eta_n}{n} \cos n\tau + \frac{\xi_n}{n} \sin n\tau \right]. \end{aligned} \quad (3.71)$$

Здесь вместо τ подставлено разложение (3.57).

Приравняв коэффициенты при одинаковых гармониках, имеем

$$A_1 = -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \Phi_0 d\tau, \quad (3.72)$$

$$u_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \left[-\frac{\xi_n + 2\xi_0}{n^2} \cos n\tau + \frac{\eta_n}{n^2} \sin n\tau \right],$$

где ξ_k, η_k вычисляются по формулам (3.64).

Запишем окончательно полученные формулы для первого улучшенного приближения:

$$\begin{aligned} \xi &= \xi_0 + \xi_2 \tau + \varepsilon u_1; \quad \xi_1 = \xi_2 + \varepsilon w_1; \\ \eta &= \eta_0 + \eta_2 \tau + \varepsilon v_1; \quad \eta_1 = \eta_2 + \varepsilon \kappa_1; \\ z &= a e^\tau + b e^{-\tau} + \varepsilon \zeta_1; \quad z_1 = a e^\tau - b e^{-\tau} + \varepsilon \mu_1. \end{aligned} \quad (3.73)$$

Отметим, что функции $\xi_0, \xi_2, \eta_0, \eta_2, a, b$ определяются из уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d\xi_0}{d\tau} &= -\varepsilon \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \Phi_0 d\tau; & \frac{d\xi_2}{d\tau} &= \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi_0 d\tau; \\ \frac{d\eta_0}{d\tau} &= -\frac{\varepsilon}{2} \int_0^{2\pi} \Psi_0 d\tau; & \frac{d\eta_2}{d\tau} &= \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Psi_0 d\tau; \\ \frac{da}{d\tau} &= \frac{\varepsilon}{\pi} \int_0^{2\pi} e^{-\tau} \chi_0 d\tau; & \frac{db}{d\tau} &= -\frac{\varepsilon}{\pi} \int_0^{2\pi} e^{\tau} \chi_0 d\tau, \end{aligned} \quad (3.74)$$

а функции $u_1, \omega_1, v_1, \kappa_1, \xi_1, \mu_1$ — соответственно разложениями (3.72), (3.65), (3.61), (3.50), (3.38), (3.33).

Вывод формул для второго и последующих приближений не представляет особых трудностей.

Из (3.74) видим, что из шести квадратур нужно вычислять только четыре, так как

$$\frac{d\xi_0}{d\tau} = -\pi \frac{d\xi_2}{d\tau}; \quad \frac{d\eta_0}{d\tau} = -\pi \frac{d\eta_2}{d\tau}, \quad (3.75)$$

т. е.

$$\xi_0 + \pi \xi_2 = \text{const}; \quad \eta_0 + \pi \eta_2 = \text{const}. \quad (3.76)$$

Поскольку

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{\xi_0 + \xi_2 \tau}{r_1^{3/2}} d\tau &= -\frac{1}{\xi_2} \left[\int_0^{2\pi} \frac{\eta_2 (\eta_0 + \eta_2 \tau) + (ae^{\tau} - be^{-\tau})}{r_1^{3/2}} d\tau \right] - \\ &\quad - \left[\frac{3}{r_1} \right]_0^{2\pi}; \quad \int_0^{2\pi} \frac{\eta_0 + \eta_2 \tau}{r_1^{3/2}} d\tau = \\ &= -\frac{1}{\eta_2} \left[\int_0^{2\pi} \frac{\xi_2 (\xi_0 + \xi_2 \tau) + (ae^{\tau} - be^{-\tau})}{r_1^{3/2}} d\tau \right] - \left[\frac{3}{r_1} \right]_0^{2\pi}; \\ \int_0^{2\pi} \frac{ae^{\tau} + be^{-\tau}}{r_1^{3/2}} d\tau &= -\int_0^{2\pi} \frac{\xi_2 (\xi_0 + \xi_2 \tau) + \eta_2 (\eta_0 + \eta_2 \tau)}{r_1^{3/2}} d\tau - \left[\frac{3}{r_1} \right]_0^{2\pi}, \end{aligned} \quad (3.77)$$

то каждая из рассмотренных квадратур сводится к квадратуре

$$\int_0^{2\pi} \frac{ae^{\tau} + be^{-\tau}}{r_1^{3/2}} d\tau, \quad (3.78)$$

где интегрирование проводится по явно входящему времени τ (a и b рассматриваются, как постоянные);

$$r_1 = \sqrt{(\xi_0 + \xi_2 \tau)^2 + (\eta_0 + \eta_2 \tau)^2 + (ae^{\tau} - be^{-\tau})^2}.$$

С учетом (3.76) и (3.77) получаем

$$\frac{d}{d\tau} (\eta_2^2 - \xi_2^2) = -\frac{3}{\pi} (\eta_2 - \xi_2). \quad (3.79)$$

Это еще одно условие для нахождения неизвестных функций η_2 и ξ_2 .

В формулах (3.74) достаточно определить только, например, ξ_2 (при условии отсутствия сил Кориолиса).

Рассмотрим алгоритм решения задачи.

Преобразуем уравнения

$$\begin{aligned} \dot{v}_x &= (\omega_3^2 - A) x + 2\omega_3 v_n - S\rho v v_x; \\ \dot{v}_y &= (\omega_3^2 - A) y - 2\omega_3 v_x - S\rho v v_y; \\ \dot{v}_z &= (\omega_3^2 - A) z - S\rho v v_z \end{aligned} \quad (3.80)$$

в систему

$$\begin{aligned} x &= \xi \sin \tau + \eta \cos \tau; \quad y = \xi \cos \tau - \eta \sin \tau; \\ \tau &= \omega_3 t; \quad \dot{\xi} = \xi_1; \end{aligned} \quad (3.81)$$

$$\dot{\xi}_1 = -\varepsilon [A_1 \xi + S\rho_1 (\xi_1 - \eta) f(\xi, \eta, \eta_1, \xi_1, z_1)];$$

$$\dot{\eta} = \eta_1, \quad \dot{z} = z_1,$$

$$\dot{\eta}_1 = -\varepsilon [A_1 \eta + S\rho_1 (\xi_1 + \eta_1) f(\xi, \eta, \eta_1, \xi_1, z_1)];$$

$$\dot{z}_1 = z - \varepsilon [A_1 z + S\rho_1 z, f(\xi, \eta, \eta_1, \xi_1, z_1)].$$

Здесь A_1 и f — известные функции (формулы (3.12)).

Находим решение системы при

$$\begin{aligned} x &= (\xi_0 + \xi_2 \tau) \sin \tau + (\eta_0 + \eta_2 \tau) \cos \tau, \\ y &= (\xi_0 + \xi_2 \tau) \cos \tau - (\eta_0 + \eta_2 \tau) \sin \tau, \\ z &= a e^\tau + b e^{-\tau}, \quad \tau = \omega_3 \tau, \end{aligned} \quad (3.82)$$

где ξ_0 , ξ_2 , η_0 , η_2 , a , b — постоянные интегрирования.

Решение нелинейной системы, названной «возмущенной», получаем в виде

$$\begin{aligned} x &= (\xi_0 + \xi_2 \tau) \sin \tau + (\eta_0 + \eta_2 \tau) \cos \tau; \\ y &= (\xi_0 + \xi_2 \tau) \cos \tau - (\eta_0 + \eta_2 \tau) \sin \tau; \\ z &= a e^\tau + b e^{-\tau}; \end{aligned} \quad (3.83)$$

$$\xi = \xi_0 + \xi_2 \tau + \sum_{j=1}^m \varepsilon^j u_j;$$

$$\xi_1 = \xi_2 + \sum_{j=1}^m \varepsilon^j w_j;$$

$$\eta = \eta_0 + \eta_2 \tau + \sum_{j=1}^m \varepsilon^j v_j; \quad (3.84)$$

$$\eta_1 = \eta_2 + \sum_{j=1}^m \varepsilon^j \kappa_j;$$

$$z = ae^\tau + be^{-\tau} + \sum_{j=1}^m \varepsilon^j \zeta_j;$$

$$z_1 = ae^\tau - be^{-\tau} + \sum_{j=1}^m \varepsilon^j \mu_j,$$

где $\xi_0, \xi_2, \eta_0, \eta_2, a, b$ должны удовлетворять уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{d\xi_0}{d\tau} &= \zeta A_1 + \varepsilon^2 A_2 + \dots = \sum_{j=1}^m \varepsilon^j A_j; \\ \frac{d\xi_2}{d\tau} &= \varepsilon B_1 + \varepsilon^2 B_2 + \dots = \sum_{j=1}^m \varepsilon^j B_j; \\ \frac{d\eta_0}{d\tau} &= \varepsilon C_1 + \varepsilon^2 C_2 + \dots = \sum_{j=1}^m \varepsilon^j C_j; \\ \frac{d\eta_2}{d\tau} &= \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2 + \dots = \sum_{j=1}^m \varepsilon^j D_j; \\ \frac{da}{d\tau} &= \varepsilon L_1 + \varepsilon^2 L_2 + \dots = \sum_{j=1}^m \varepsilon^j L_j; \\ \frac{db}{d\tau} &= \varepsilon N_1 + \varepsilon^2 N_2 + \dots = \sum_{j=1}^m \varepsilon^j N_j. \end{aligned} \quad (3.85)$$

Подставив (3.84) в систему (3.13), правую часть разложим в ряд Тейлора. Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях ε , получим систему из шести неоднородных дифференциальных уравнений первого порядка (в первом приближении):

$$\begin{aligned} A_1 + \tau B_1 + \frac{\partial u_1}{\partial \tau} &= w_1; \quad B_1 + \frac{\partial w_1}{\partial \tau} = \Phi_0; \\ C_1 + D_1 \tau + \frac{\partial v_1}{\partial \tau} &= \kappa_1; \quad D_1 + \frac{\partial \kappa}{\partial \tau} = \Psi_0; \\ L_1 e^\tau + N_1 e^{-\tau} + \frac{\partial \zeta_1}{\partial \tau} &= \mu_1; \\ L_1 e^\tau + N_1 e^{-\tau} + \frac{\partial \mu_1}{\partial \tau} &= \chi_0. \end{aligned} \quad (3.86)$$

Для нахождения неизвестных функций $A_1, B_1, C_1, D_1, N_1, L_1, u_1, w_1, v_1, \kappa_1, \zeta_1, \mu_1$ известные непрерывные функции Φ_0, Ψ_0, χ_0 разложим в ряд Фурье по $\sin m\tau$ и $\cos m\tau$.

Приравняв коэффициенты при одинаковых гармониках, получим систему

$$\begin{aligned}
\frac{d\xi_0}{d\tau} &= -\frac{\varepsilon}{2} \int_0^{2\pi} \Phi_0 d\tau; & \frac{d\eta_2}{d\tau} &= \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Psi_0 d\tau; \\
\frac{d\xi_2}{d\tau} &= \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi_0 d\tau; & \frac{d\eta_0}{d\tau} &= -\frac{\varepsilon}{2} \int_0^{2\pi} \Psi_0 d\tau; \\
\frac{da}{d\tau} &= \frac{\varepsilon}{\pi} \int_0^{2\pi} e^{-\tau} \chi_0 d\tau; \\
\frac{db}{d\tau} &= -\frac{\varepsilon}{\pi} \int_0^{2\pi} e^{\tau} \chi_2 d\tau.
\end{aligned} \tag{3.87}$$

Проинтегрировав (3.87) (в общем случае численно), находим

$$\begin{aligned}
\frac{d\xi_0}{d\tau} &= -\varepsilon f_1(\xi_0, \xi_2, \eta_2, \eta_0, a, b); \\
\frac{d\xi_2}{d\tau} &= \frac{\varepsilon}{\pi} f_1(\xi_0, \xi_2, \eta_2, \eta_0, a, b); \\
\frac{d\eta_0}{d\tau} &= -\varepsilon f_2(\xi_0, \xi_2, \eta_0, \eta_2, a, b); \\
\frac{d\eta_2}{d\tau} &= \frac{\varepsilon}{\pi} f_2(\xi_0, \xi_2, \eta_2, \eta_0, a, b); \\
\frac{da}{d\tau} &= \varepsilon f_3(\xi_0, \xi_2, \eta_0, \eta_2, a, b); \\
\frac{db}{d\tau} &= \varepsilon f_4(\xi_0, \xi_2, \eta_0, \eta_2, a, b).
\end{aligned} \tag{3.88}$$

Для решения системы пригоден любой из классических методов численного интегрирования, например Рунге — Кутта, Адамса, Эйлера, Крылова.

§ 4. Аналитические модели движения ракет

При решении задач оценки эффективности алгоритмов динамической фильтрации результатов измерений параметров движения управляемых объектов одним из основных вопросов является оценка точности результатов обработки. Оценка точности фильтрации предполагает наличие эталонной траектории. Точность должна быть по крайней мере на порядок выше точности результатов обработки.

При численном интегрировании систем обыкновенных дифференциальных уравнений, часто применяемых в качестве моделей движения, обязательно появление трудно контролируемых методических погрешностей, снижающих ценность таких моделей.

Таким образом, при сохранении высокой адекватности модели, т. е. при использовании основных соотношений управляемого

движения, необходимо обеспечить минимальные методические погрешности эталона.

Рассмотрим способ построения эталонной траектории на основе соотношений метода наведения и моделей движения цели, который приводит к получению явных аналитических выражений для параметров движения управляемого объекта, т. е. способ, позволяющий исключить методические погрешности эталонных траекторий.

Модель параметров движения управляемого объекта в топоцентрической системе координат

Находим параметры движения объекта в системе координат $Oxyz$, определенной следующим образом:

начало координат совпадает с точкой старта перехватчика;
ось Ox находится в плоскости местного горизонта и ориентирована в некотором заданном направлении;

ось Oz — в той же плоскости и перпендикулярна оси Ox ;

ось Oy направлена вверх по нормали к плоскости местного горизонта [28].

Определение координат управляемого объекта в топоцентрической системе координат. Предположим, что известна модель движения некоторой воздушной цели, которая в выбранной нами системе координат позволяет определять текущие координаты цели (x_c, y_c, z_c) , составляющие вектора скорости цели $(\dot{x}_c, \dot{y}_c, \dot{z}_c)$, составляющие вектора ускорения движения цели $(\ddot{x}_c, \ddot{y}_c, \ddot{z}_c)$, а также третьи производные от координат цели (x_c, y_c, z_c) , как функции времени t .

Моделируем наведение на цель с момента старта согласно выражениям [54]:

$$\varepsilon_p = \varepsilon_c + \Delta\varepsilon; \quad \beta_p = \beta_c + \Delta\beta, \quad (4.1)$$

где $\varepsilon_p, \varepsilon_c$ — углы места ракеты и цели; β_p, β_c — азимуты ракеты и цели; $\Delta\varepsilon, \Delta\beta$ — углы упреждения при наведении по углу места и азимуту.

Положим, что $\Delta\varepsilon = m \frac{\dot{\varepsilon}_c}{\Delta r} \Delta r$, $\Delta\beta = m \frac{\dot{\beta}_c}{\Delta r} \Delta r$, где $-1 \leq m \leq 1$; Δr — разность дальностей, отсчитываемых от точки O до цели и ракеты; Δr — ее производная по времени.

Примем $m = -1$.

Из рис. 33 видно, что

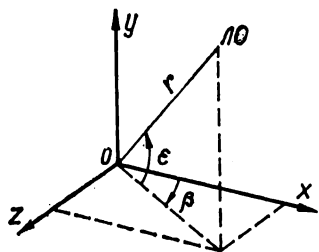
$$\varepsilon_c = \arctg \frac{y_c}{\sqrt{x_c^2 + z_c^2}} = \arctg \frac{y_c}{\sqrt{x}} \quad (4.2)$$

Рис. 33. Координаты положения ЛО.

где

$$\alpha = x_u^2 + y_u^2; \quad (4.3)$$

$$\beta_u = \operatorname{arctg} \frac{z_u}{x_u}. \quad (4.4)$$



Дифференцируя последние выражения по времени, находим

$$\dot{\epsilon}_u = \frac{\dot{y}_u \alpha - y_u \dot{\alpha}_1}{\alpha^2 \sqrt{\alpha}}, \quad (4.5)$$

где

$$\alpha_1 = x_u \dot{x}_u + z_u \dot{z}_u; \quad (4.6)$$

$$\alpha_2 = \sqrt{\alpha + y_u^2}; \quad (4.7)$$

$$\dot{\beta}_u = \frac{\dot{z}_u x_u - z_u \dot{x}_u}{\alpha}. \quad (4.8)$$

Система уравнений (4.1) является неполной для определения координат ракеты, так как она задает только направление движения. При дополнении программы управления [51] будем считать, что дальность ракеты, отсчитываемая от точки O , будет линейно возрастать со временем с некоторой постоянной скоростью $v_{сбл}$, т. е.

$$r_p = v_{сбл} t. \quad (4.9)$$

Тогда

$$\Delta r = \sqrt{x_u^2 + y_u^2 + z_u^2} - r_p = \alpha_2 - v_{сбл} t, \quad (4.10)$$

$$\Delta r = \frac{\alpha_1 + y_u \dot{y}_u}{\alpha_2} - v_{сбл}. \quad (4.11)$$

Таким образом, систему уравнений (4.1) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \epsilon_p &= \epsilon_u - \dot{\epsilon}_u \alpha_3; \\ \beta_p &= \beta_u - \dot{\beta}_u \alpha_3; \end{aligned} \quad (4.12)$$

$$r_p = v_{сбл} t,$$

где

$$\alpha_3 = \Delta r / \dot{\Delta r}. \quad (4.13)$$

Отсюда выражения для определения координат управляемого объекта будут следующими (см. рис. 33):

$$x_p = r_p \cos \epsilon_p \cos \beta_p; \quad (4.14)$$

$$y_p = r_p \sin \epsilon_p; \quad (4.15)$$

$$z_p = r_p \cos \epsilon_p \sin \beta_p. \quad (4.16)$$

Определение составляющих векторов скорости и ускорения движения управляемого объекта. Составляющие векторов скорости и ускорения движения управляемого объекта определяем путем дифференцирования по времени правых частей выражений (4.14) — (4.16), учитывая при этом, что компоненты правых частей также зависят от времени, получаем

$$\dot{x}_p = \dot{r}_p \cos \varepsilon_p \cos \beta_p - r_p \sin \varepsilon_p \dot{\varepsilon}_p \cos \beta_p - r_p \cos \varepsilon_p \sin \beta_p \dot{\beta}_p, \quad (4.17)$$

где

$$\dot{r}_p = v_{\text{обл}}; \quad \dot{\varepsilon}_p = \dot{\varepsilon}_u - \ddot{\varepsilon}_u \alpha_3 - \dot{\varepsilon}_u \dot{\alpha}_3; \quad \ddot{\varepsilon}_u = \frac{A-B}{C};$$

$$A = \alpha_2^2 \sqrt{\alpha} (\ddot{y}_u \alpha + \dot{y}_u \dot{\alpha} - \dot{y}_u \alpha_1 - y_u \dot{\alpha}_1);$$

$$B = (\dot{y}_u \alpha - y_u \alpha_1) \left(2\alpha_2 \dot{\alpha}_2 \sqrt{\alpha} + \alpha_2^2 \frac{\dot{\alpha}}{2\sqrt{\alpha}} \right);$$

$$C = \alpha_2^4 \alpha;$$

$$\dot{\alpha} = 2\alpha_1; \quad \dot{\alpha}_1 = (\dot{x}_u)^2 + x_u \ddot{x}_u + (\dot{z}_u)^2 + z_u \ddot{z}_u;$$

$$\alpha_2 = \frac{\dot{\alpha} + 2y_u \dot{y}_u}{2\alpha_2}; \quad \dot{\alpha}_3 = 1 - \alpha_3 \frac{\Delta \ddot{r}}{\Delta r};$$

$$\Delta \ddot{r} = \frac{D-E}{\alpha_2^2};$$

$$D = \alpha_2 (\dot{\alpha}_1 + (\dot{y}_u)^2 + y_u \ddot{y}_u);$$

$$E = \dot{\alpha}_2 (\alpha_1 + y_u \dot{y}_u);$$

$$\dot{\beta}_p = \dot{\beta}_u - \ddot{\beta}_u \alpha_3 - \dot{\beta}_u \dot{\alpha}_3;$$

$$\ddot{\beta}_u = \frac{\ddot{z}_u x_u - z_u \ddot{x}_u - \dot{\alpha} \dot{\beta}_u}{\alpha} = \frac{F}{\alpha}.$$

Обозначения A , B , C , α , α_1 , α_2 и др. введены для упрощения конечных выражений.

$$z_p = r_p \sin \beta_p \cos \varepsilon_p + r_p (\dot{\beta}_p \cos \varepsilon_p \cos \beta_p - \dot{\varepsilon}_p \sin \varepsilon_p \sin \beta_p), \quad (4.18)$$

$$\dot{y}_p = \dot{r}_p \sin \varepsilon_p + r_p \cos \varepsilon_p \dot{\varepsilon}_p. \quad (4.19)$$

Продифференцировав правые части уравнений (4.17) — (4.19), найдем составляющие вектора ускорений движения:

$$\ddot{x}_p = \alpha_7 \ddot{r}_p - 2\alpha_8 \dot{r}_p - r_p [\alpha_5 \ddot{\varepsilon}_p + \alpha_6 \ddot{\beta}_p + \alpha_7 (\dot{\varepsilon}_p^2 + \dot{\beta}_p^2) - 2\alpha_4 \dot{\varepsilon}_p \dot{\beta}_p]. \quad (4.20)$$

Здесь

$$\alpha_4 = \sin \varepsilon_p \sin \beta_p; \quad \alpha_5 = \sin \varepsilon_p \cos \beta_p;$$

$$\alpha_6 = \cos \varepsilon_p \sin \beta_p; \quad \alpha_7 = \cos \varepsilon_p \cos \beta_p;$$

$$\alpha_8 = \rho_p \alpha_6 + \varepsilon_p \alpha_5; \quad \ddot{r}_p = 0;$$

$$\begin{aligned}
\ddot{e}_p &= \ddot{e}_u (1 - 2\dot{\alpha}_3) - \ddot{e}_u \alpha_3 - \dot{e}_u \ddot{\alpha}_3; \\
\ddot{e}_u &= \frac{(\dot{A} - \dot{B}) \dot{C} - (A - B) \ddot{C}}{\dot{C}^2}; \\
\dot{A} &= \dot{A}_1 A_2 + A_1 \dot{A}_2; \\
A_1 &= y_u \alpha + \dot{y}_u \dot{\alpha} - \dot{y}_u \alpha_1 - y_u \dot{\alpha}_1; \\
A_2 &= \alpha_2^2 \sqrt{\alpha}; \\
\dot{A}_1 &= \ddot{y}_u \alpha + \ddot{y}_u (2\alpha - \alpha_1) + \dot{y}_u \ddot{\alpha} - 2\dot{y}_u \dot{\alpha}_1 - y_u \ddot{\alpha}_1; \\
A_2 &= 2\alpha_2 \dot{\alpha}_2 \sqrt{\alpha} + \alpha_2^2 \frac{\dot{\alpha}}{2\sqrt{\alpha}}; \\
\dot{B} &= \dot{B}_1 B_2 + B_1 \dot{B}_2; \\
B_1 &= \dot{y}_u \alpha - y_u \dot{\alpha}; \quad B_2 = 2\alpha_2 \dot{\alpha}_2 \sqrt{\alpha} + \frac{\alpha_2^2 \dot{\alpha}}{2\sqrt{\alpha}}; \\
B_1 &= \ddot{y}_u \alpha + \ddot{y}_u \dot{\alpha} - \ddot{y}_u \alpha_1 - y_u \ddot{\alpha}_1; \\
B_2 &= \frac{2\alpha_2 \alpha (2\dot{\alpha}_2 \dot{\alpha} + \alpha_2 \ddot{\alpha}) - \alpha_2^2 \dot{\alpha}^2}{4\alpha \sqrt{\alpha}} + 2\sqrt{\alpha} [(\dot{\alpha}_2)^2 + \alpha_2 \ddot{\alpha}_2] + \frac{\alpha_2 \dot{\alpha}_2 \dot{\alpha}}{\sqrt{\alpha}}; \\
\dot{C} &= 2A_2 \dot{A}_2; \quad \ddot{\alpha} = 2\dot{\alpha}_1; \\
\ddot{\alpha}_1 &= 3\dot{x}_u \dot{x}_u + x_u \ddot{x}_u + 3\dot{z}_u \ddot{z}_u + z_u \ddot{z}_u; \\
\ddot{\alpha}_2 &= \frac{(\ddot{\alpha} + 2\dot{y}_u^2 + 2y_u \ddot{y}_u) 2\alpha_2 - (\dot{\alpha} + 2y_u \dot{y}_u) \alpha \dot{\alpha}_2}{4\alpha_2^2}; \\
\ddot{\alpha}_3 &= -\alpha_3 \frac{\Delta \ddot{r}}{\Delta r} - \alpha_3 \frac{\Delta \ddot{r} \Delta \dot{r} (\Delta \dot{r})^2}{(\Delta \dot{r})^2}; \\
\Delta \ddot{r} &= \frac{(\dot{D} - \dot{E}) \alpha_2^2 - 2\alpha_2 \dot{\alpha}_2 (D - E)}{\alpha_2^4}; \\
\dot{D} &= \dot{\alpha}_2 D_1 + \alpha_2 \dot{D}_1; \quad D_1 = \dot{\alpha}_1 + \dot{y}_u^2 + y_u \ddot{y}_u; \\
D_1 &= \ddot{\alpha}_1 + 3\dot{y}_u \ddot{y}_u + y_u \ddot{\ddot{y}}_u; \\
\dot{E} &= \dot{E}_1 \alpha_2 + E_1 \dot{\alpha}_2; \quad E_1 = \alpha_1 + y_u y_u; \quad \dot{E}_1 = \dot{\alpha}_1 + \dot{y}_u^2 + y_u \ddot{y}_u; \\
\ddot{\beta}_p &= \ddot{\beta}_u (1 - 2\dot{\alpha}_3) - \ddot{\beta}_u \alpha_3 - \dot{\beta}_u \ddot{\alpha}_3; \\
\dot{F} &= \ddot{z}_u \dot{x}_u + \ddot{z}_u \dot{x}_u - \dot{z}_u \ddot{x}_u - z_u \ddot{x}_u - \ddot{\alpha} \dot{\beta}_u - \dot{\alpha} \ddot{\beta}_u; \\
\ddot{\beta}_u &= \frac{\dot{F} \alpha - F \dot{\alpha}}{\alpha^3}; \\
\ddot{z}_p &= \ddot{r}_p \alpha_6 - \dot{r}_p \dot{e}_p \alpha_4 + \dot{r}_p \alpha_7 \dot{\beta}_p + \dot{r}_p \dot{G} + \dot{r}_p \dot{G}, \quad (4.21)
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} G &= \dot{\beta}_p \alpha_7 - \dot{\epsilon}_p \alpha_4; \\ \dot{G} &= \ddot{\beta}_p \alpha_7 - 2\dot{\epsilon}_p \dot{\beta}_p \alpha_5 - \alpha_6 (\dot{\epsilon}_p^2 + \dot{\beta}_p^2) - \ddot{\epsilon}_p \alpha_4; \\ \ddot{y}_p &= \ddot{r}_p \sin \epsilon_p + 2\dot{r}_p \cos \epsilon_p \dot{\epsilon}_p - r_p \sin \epsilon_p \dot{\epsilon}_p^2 + r_p \cos \epsilon_p \ddot{\epsilon}_p. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Полученные выражения не меняют своей структуры при изменении характера и параметров движения цели. В этом смысле разработанная модель движения перехватчика является универсальной. Реализация данной модели требует задания характера движения цели. Этот вопрос будет рассмотрен далее. При моделировании движения цели желательно получить аналитическое представление параметров ее движения, что позволит при сохранении адекватности модели движения перехватчика обеспечить исключение методических погрешностей, характерных численным методом преобразований.

Разработка модели движения цели

Модель движения цели в горизонтальной плоскости.

Для предотвращения встречи с перехватчиком воздушная цель маневрирует. Широко распространен маневр в виде изменения направления вектора скорости в горизонтальной плоскости. Поэтому рассмотрим построение модели движения цели для данного случая.

Движение цели рассматривается как движение материальной точки по траектории, показанной на рис. 34.

В дальнейшем полагаем, что в момент времени t_0 цель имеет координаты $x_{0ц}, y_{0ц}, z_{0ц}$ в некоторой прямоугольной системе координат $O'x'y'z'$ и движется прямолинейно с постоянной скоростью $v_{ц}$, направленной под углом τ к оси $O'x'$ в плоскости, которую можно определить как $y' = y'_{0ц}$. В момент времени $t = T_1$ цель начинает маневрировать, изменяя направление вектора скорости. Полагаем, что цель в дальнейшем движется по дуге окружности радиуса R в той же плоскости. В момент времени $t = T_2$ цель прекращает маневр и продолжает движение прямолинейно со скоростью $v_{ц}$ до момента $t = T_3$, в который прекращаются наблюдения за траекторией движения цели.

На рис. 34 показана горизонтальная проекция траектории цели. Она совпадает с траекторией цели в плоскости $y' = y'_{0ц}$.

Ввиду недостатков моделей движения перехватчиков в виде дифференциальных уравнений или полиномов, изложенных во введении, при построении модели движения цели воспользуемся простыми кинематическими соотношениями, которые, несмотря на простоту, правильно отражают характер движения материальной точки по данной траектории.

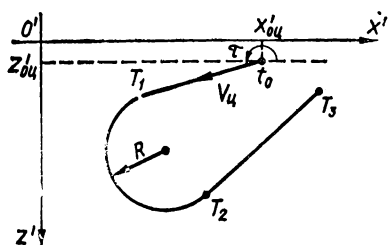


Рис. 34. Вариант траектории движения цели (правый разворот).

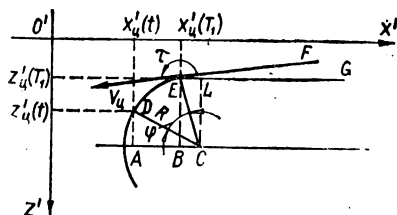
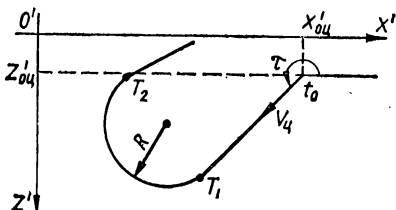


Рис. 35. Параметры траектории цели.

Рис. 36. Вариант траектории движения цели (левый разворот).



Для этого спроектируем вектор v_u на оси $O'x'$ и $O'z'$ и найдем текущие координаты движения. Выражения для координат на интервале времени $[t_0; T_1]$ следующие:

$$\begin{aligned} x'_u &= x'_{0u} + v_u (t - t_0) \cos \tau, \\ y_u &= y_{cu}, \\ z'_u &= z'_{0u} - v_u (t - t_0) \sin \tau. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Для определения текущих координат движения цели при совершении маневра ($t \in [T_1, T_2]$) рассмотрим рис. 35, где показана часть траектории цели.

Пусть в момент времени t цель имеет координаты $x'_u(t)$, $z'_u(t)$, т. е. находится в точке D . Найдем отрезок AB , равный проекции на ось $O'x'$ траектории цели, пройденной за время $t = T_1$: $AB = AC - BC = R \cos \left(\frac{\pi}{2} - \angle ECL - \varphi \right) - R \cos \left(\frac{\pi}{2} - \angle ECL \right)$. Здесь $\angle ECL = \angle FEG = \tau - \pi$ — углы со взаимно перпендикулярными сторонами; $\varphi = \frac{l}{R} = \frac{v_u (t - T_1)}{R}$, где l — длина дуги ED ; $AB = -R \left[\sin \left(\frac{v_u (t - T_1)}{R} + \tau \right) - \sin \tau \right]$.

Таким образом, $x'_u = x'_u(T_1) + R \left[\sin \left(\frac{v_u (t - T_1)}{R} + \tau \right) - \sin \tau \right]$.

Если цель совершает маневр, показанный на рис. 35, то $x'_u = x'_u(T_1) + R \left[\sin \left(\frac{v_u (t - T_1)}{R} - \tau \right) + \sin \tau \right]$.

Для удобства моделирования на ЭВМ последние две формулы объединим в одну: $x'_u = x'_u(T_1) + R [(-1)^{k+1} \sin \tau + \sin \left(\frac{v_u}{R} (t -$

$-T_1) + (-1)^k \tau \Big] \Big] , \text{ где}$

$$k = \begin{cases} 1, & \text{для рис. 36,} \\ 2, & \text{для рис. 34.} \end{cases}$$

$$\text{Аналогично } z'_u = z'_u(T_1) + R \left[(-1)^{k+1} \cos \tau + \cos \left(\frac{v_u}{R} (t - T_1) + (-1)^k \tau \right) \right].$$

На интервале времени $(T_2, T_3]$ цель движется прямолинейно, поэтому выражения для x'_u и z'_u получим способом, принятым для интервала времени $[t_0, T_1]$. При этом учтем, что за время $(T_2 - T_1)$ цель совершила маневр, изменив направление вектора v_u на угол $\theta = \frac{v_u}{R} (T_2 - T_1) + (-1)^k \tau$.

Следовательно,

$$\begin{aligned} x'_u &= x'_u(T_2) + v_u (t - T_2) \cos \left[\frac{v_u}{R} (T_2 - T_1) + (-1)^k \tau \right]; \\ z'_u &= z'_u(T_2) - v_u (t - T_2) \sin \left[\frac{v_u}{R} (T_2 - T_1) + (-1)^k \tau \right]. \end{aligned}$$

Таким образом, получены явные выражения для текущих прямоугольных координат цели, движущейся в горизонтальной плоскости:

при $t \in [t_0, T_1]$

$$\begin{aligned} x'_u &= x'_{0u} + S_1, \\ y'_u &= y'_{0u}, \\ z'_u &= z'_{0u} - m_1; \end{aligned} \tag{4.24}$$

при $t \in (T_1, T_2]$

$$\begin{aligned} x'_u &= x'_u(T_1) + S_2, \\ y'_u &= y'_{0u}, \\ z'_u &= z'_u(T_1) + m_2; \end{aligned} \tag{4.25}$$

при $t \in (T_2, T_3]$

$$\begin{aligned} x'_u &= x'_u(T_2) + S_3, \\ y'_u &= y'_{0u}, \\ z'_u &= z'_u(T_2) + m_3. \end{aligned} \tag{4.26}$$

Здесь

$$S_1 = v_u (t - t_0) \cos \tau; \tag{4.27}$$

$$S_2 = R \left[(-1)^{k+1} \sin \tau + \sin \left(\frac{v_u}{R} (t - T_1) + (-1)^k \tau \right) \right]; \quad (4.28)$$

$$S_3 = v_u (t - T_2) \cos \left[\frac{v_u}{R} (T_2 - T_1) + (-1)^k \tau \right]; \quad (4.29)$$

$$m_1 = v_u (t - t_0) \sin \tau; \quad (4.30)$$

$$m_2 = R \left[(-1)^{k+1} \cos \tau + \cos \left(\frac{v_u}{R} (t - T_1) + (-1)^k \tau \right) \right]; \quad (4.31)$$

$$m_3 = -v_u (t - T_2) \sin \left[\frac{v_u}{R} (T_2 - T_1) + (-1)^k \tau \right]. \quad (4.32)$$

Используем данные результаты для обобщения на случай, когда плоскость траектории полета цели не параллельна горизонтальной плоскости принятой системы координат.

Преобразование системы координат. В общем случае цель может двигаться и совершать маневр не только в горизонтальной плоскости.

Для рассмотрения этого случая преобразуем поворотом вокруг соответствующих осей прямоугольную систему координат $O'x'y'z'$ в прямоугольную систему координат $Oxyz$. Выполним это так, чтобы в новой системе координат угол между плоскостью маневра цели и плоскостью zOx был равен η , а угол между Ox и прямой, образованной в результате пересечения плоскости маневра и xOz , — σ (рис. 37).

Этого можно добиться, выполнив следующие повороты координатного многогранника $O'x'y'z'$. Вначале повернем систему координат $O'x'y'z'$ вокруг оси $O'z'$ на угол η , затем — вокруг оси Oy на угол $\frac{\pi}{2} - \sigma$ (см. рис. 37).

Тогда согласно [28] координаты точки в системе $O'x'y'z'$ преобразуются в координаты в системе $Oxyz$ с помощью следующих соотношений:

$$\begin{aligned} x &= H_{11}x' + H_{12}y' + H_{13}z'; \\ y &= H_{21}x' + H_{22}y' + H_{23}z'; \\ z &= H_{31}x' + H_{32}y' + H_{33}z', \end{aligned} \quad (4.33)$$

где H_{ij} , $i, j = 1, 2, 3$ — направляющие косинусы осей системы $O'x'y'z'$ относительно системы координат $Oxyz$, причем

$$\begin{aligned} H_{13} &= \cos \sigma; \quad H_{31} = -H_{22}H_{13}; \\ H_{21} &= \sin \eta; \quad H_{32} = H_{13}H_{21}; \\ H_{22} &= \cos \eta; \quad H_{33} = \sin \sigma; \\ H_{23} &= 0; \quad H_{11} = H_{33}H_{22}; \\ H_{12} &= -H_{33}H_{21}. \end{aligned} \quad (4.34)$$

Используя соотношения (4.33), преобразуем текущие координаты цели (4.26) — (4.24) в систему $Oxyz$

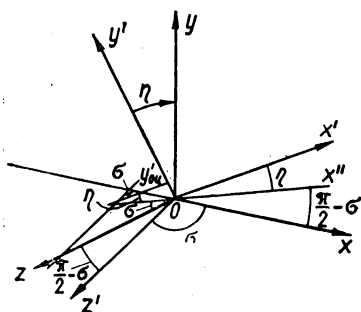


Рис. 37. Углы разворота плоскости траектории цели.

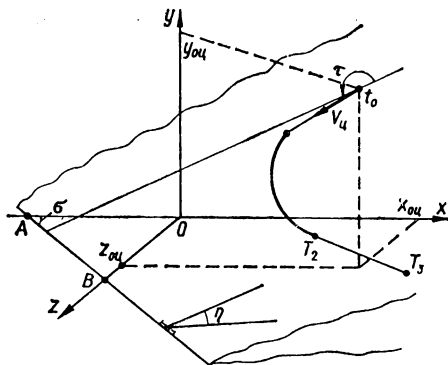


Рис. 38. Пространственная модель движения цели.

при $t \in [T_0, T_1]$

$$x_{\text{ц}} = H_{11}x'_{0\text{ц}} + H_{11}S_1 + H_{12}y'_{0\text{ц}} + H_{13}z'_{0\text{ц}} - m_1H_{13};$$

$$y_{\text{ц}} = H_{21}x'_{0\text{ц}} + H_{21}S_1 + H_{22}y'_{0\text{ц}} + H_{23}z'_{0\text{ц}} - m_1H_{23};$$

$$z_{\text{ц}} = H_{31}x'_{0\text{ц}} + H_{31}S_1 + H_{32}y'_{0\text{ц}} + H_{33}z'_{0\text{ц}} - m_1H_{33}.$$

В результате имеем

$$x_{\text{ц}} = x_{0\text{ц}} + H_{11}S_1 - m_1H_{13};$$

$$y_{\text{ц}} = y_{0\text{ц}} + H_{21}S_1 - m_1H_{23}; \quad (4.35)$$

$$z_{\text{ц}} = z_{0\text{ц}} + H_{31}S_1 - m_1H_{33}.$$

Аналогично получены выражения для координат на остальных выделенных ранее интервалах времени

при $t \in (T_1, T_2]$

$$x_{\text{ц}} = x_{\text{ц}}(T_1) + H_{11}S_2 + H_{13}m_2;$$

$$y_{\text{ц}} = y_{\text{ц}}(T_1) + H_{21}S_2 + H_{23}m_2; \quad (4.36)$$

$$z_{\text{ц}} = z_{\text{ц}}(T_1) + H_{31}S_2 + H_{33}m_2;$$

при $t \in (T_2, T_3]$

$$x_{\text{ц}} = x_{\text{ц}}(T_2) + H_{11}S_3 + H_{13}m_3;$$

$$y_{\text{ц}} = y_{\text{ц}}(T_2) + H_{21}S_3 + H_{23}m_3; \quad (4.37)$$

$$z_{\text{ц}} = z_{\text{ц}}(T_2) + H_{31}S_3 + H_{33}m_3.$$

Таким образом, в общем случае в соответствии с выражениями (4.35) — (4.37) цель будет совершать движение по траектории, показанной на рис. 38.

Определение составляющих векторов скорости, ускорения движения, а также третьих производных координат цели по времени. Составляющие соответствующих векторов целесообразно

определять дифференцированием по времени выражений (4.35) — (4.37):

при $t \in [t_0, T_1]$

$$\begin{aligned}\dot{x}_u &= H_{11}\dot{S}_1 - H_{11}\dot{m}_1, \\ \dot{y}_u &= H_{21}\dot{S}_1 - H_{23}\dot{m}_1, \\ \dot{z}_u &= H_{31}\dot{S}_1 - H_{33}\dot{m}_1;\end{aligned}\tag{4.38}$$

при $t \in (T_1, T_2]$

$$\begin{aligned}\dot{X}_u &= H_{11}\dot{S}_2 + H_{13}\dot{m}_2, \\ \dot{y}_u &= H_{21}\dot{S}_2 + H_{23}\dot{m}_2, \\ \dot{z}_u &= H_{31}\dot{S}_2 + H_{33}\dot{m}_2;\end{aligned}\tag{4.39}$$

при $t \in (T_2, T_3]$

$$\begin{aligned}\dot{x}_u &= H_{11}\dot{S}_3 + H_{13}\dot{m}_3, \\ \dot{y}_u &= H_{21}\dot{S}_3 + H_{23}\dot{m}_3, \\ \dot{z}_u &= H_{31}\dot{S}_3 + H_{33}\dot{m}_3.\end{aligned}\tag{4.40}$$

Вторые производные

при $t \in [t_0, T_1]$

$$\begin{aligned}\ddot{x}_u &= H_{11}\ddot{S}_1 - H_{13}\ddot{m}_1, \\ \ddot{y}_u &= H_{21}\ddot{S}_1 - H_{23}\ddot{m}_1, \\ \ddot{z}_u &= H_{31}\ddot{S}_1 - H_{33}\ddot{m}_1;\end{aligned}\tag{4.41}$$

при $t \in (T_1, T_2]$

$$\begin{aligned}\ddot{x}_u &= H_{11}\ddot{S}_2 + H_{13}\ddot{m}_2, \\ \ddot{y}_u &= H_{21}\ddot{S}_2 + H_{23}\ddot{m}_2, \\ \ddot{z}_u &= H_{31}\ddot{S}_2 + H_{33}\ddot{m}_2;\end{aligned}\tag{4.42}$$

при $t \in (T_2, T_3]$

$$\begin{aligned}\ddot{x}_u &= H_{11}\ddot{S}_3 + H_{13}\ddot{m}_3, \\ \ddot{y}_u &= H_{21}\ddot{S}_3 + H_{23}\ddot{m}_3, \\ \ddot{z}_u &= H_{31}\ddot{S}_3 + H_{33}\ddot{m}_3.\end{aligned}\tag{4.43}$$

Третьи производные

при $t \in [t_0, T_1]$

$$\begin{aligned}\dddot{x}_u &= H_{11}\dddot{S}_1 - H_{13}\dddot{m}_1, \\ \dddot{y}_u &= H_{21}\dddot{S}_1 - H_{23}\dddot{m}_1, \\ \dddot{z}_u &= H_{31}\dddot{S}_1 - H_{33}\dddot{m}_1;\end{aligned}\tag{4.44}$$

при $t \in (T_1, T_2]$

$$\begin{aligned}\ddot{x}_u &= H_{11}\ddot{S}_2 + H_{13}\ddot{m}_2; \\ \ddot{y}_u &= H_{21}\ddot{S}_2 + H_{23}\ddot{m}_2, \\ \ddot{z}_u &= H_{31}\ddot{S}_2 + H_{33}\ddot{m}_2,\end{aligned}\tag{4.45}$$

при $t \in (T_2, T_3]$

$$\begin{aligned}\ddot{x}_u &= H_{11}\ddot{S}_3 + H_{13}\ddot{m}_3, \\ \ddot{y}_u &= H_{21}\ddot{S}_3 + H_{23}\ddot{m}_3, \\ \ddot{z}_u &= H_{31}\ddot{S}_3 + H_{33}\ddot{m}_3.\end{aligned}\tag{4.46}$$

Введены обозначения $\dot{S}_1 = v_u \cos \tau$; $\ddot{S}_1 = 0$;

$$\begin{aligned}\ddot{S}_1 &= 0; \quad \dot{m}_1 = v_u \sin \tau; \quad \ddot{m}_1 = 0; \quad \ddot{m}_2 = 0; \\ \dot{S}_2 &= v_u \cos \left[\frac{v_u}{R} (t - T_1) + (-1)^k \tau \right]; \\ \ddot{S}_2 &= -\frac{v_u^2}{R} \sin \left[\frac{v_u}{R} (t - T_1) + (-1)^k \tau \right]; \\ \ddot{S}_2 &= -\frac{v_u^3}{R} \cos \left[\frac{v_u}{R} (t - T_1) + (-1)^k \tau \right]; \\ \dot{m}_2 &= -v_u \sin \left[\frac{v_u}{R} (t - T_1) + (-1)^k \tau \right]; \\ \ddot{m}_2 &= -\frac{v_u^2}{R} \cos \left[\frac{v_u}{R} (t - T_1) + (-1)^k \tau \right]; \\ \ddot{m}_2 &= -\frac{v_u^3}{R} \sin \left[\frac{v_u}{R} (t - T_1) + (-1)^k \tau \right]; \\ \dot{S}_3 &= v_u \cos \left[\frac{v_u}{R} (T_2 - T_1) + (-1)^k \tau \right]; \\ \ddot{S}_3 &= 0; \quad \ddot{S}_3 = 0; \\ \dot{m}_3 &= -v_u \sin \left[\frac{v_u}{R} (T_2 - T_1) + (-1)^k \tau \right]; \\ \ddot{m}_3 &= 0; \quad \ddot{m}_3 = 0.\end{aligned}$$

Возможности представленной модели движения цели. Варьируя параметрами, определяющими модель движения цели, можно имитировать различные маневры, предпринимаемые целью.

Изменяя значения углов η и σ , выбираем плоскость, в которой происходит движение и маневр цели.

В частности, при $\eta = 0$ имитируется горизонтальный полет цели; при $\eta = \frac{\pi}{2}$, $\sigma = 0$ — движение цели в вертикальной плоскости, параллельной плоскости xOy ; при $\eta = \frac{\pi}{2}$, $\sigma = \frac{\pi}{2}$ — в вертикальной плоскости, параллельной плоскости zOy .

Варьируя параметрами T_2 , T_1 , k , v_n , изменяем характер движения цели в выбранной плоскости. Продолжительность движения цели по дуге окружности зависит от T_1 и T_2 . Эти величины можно выбрать такими, чтобы цель в процессе маневра развернулась и при $t > T_2$ начала двигаться в противоположном направлении. Если положить $T_1 = T_2$, то цель все время будет двигаться прямолинейно.

Таким образом, варианты движения цели многообразны и могут выбираться исследователями заданием соответствующих значений указанных параметров. Типовые варианты заблаговременно подготавливаются на перфокартах. Тогда выбор определенной разновидности модели сводится к выбору соответствующей перфокарты исходных данных.

**Разработка модели
параметров движения управляемого объекта
в связанной системе координат**

В ряде алгоритмов динамической фильтрации в качестве оцениваемых параметров движения используют не только параметры траектории, моделирование которых было рассмотрено ранее, но и параметры, измеряемые на борту ЛО: перегрузки, углы рысканья, тангажа и др.

Допущения, принятые при разработке модели движения в связанной системе координат. Предположим, что ракета, моделирование параметров движения которой рассматривается, представляет собой осесимметричный летательный аппарат, на который в полете, кроме силы тяжести, действуют реактивная сила тяги и силы взаимодействия со средой, причем сила тяги нерегулируема. Силы действуют таким образом, что углы атаки α и скольжения β малы, т. е. можно положить, что $\sin \beta = \beta$; $\cos \alpha = 1$; $\cos \beta = 1$, а угол крена равен нулю, т. е. предполагается наличие стабилизации по крену. Кроме того, считаем, что вторые производные по времени от углов наклона и поворота траектории (характеристика этих углов будет дана ниже) настолько малы, что ими можно пренебречь.

Принятые допущения вполне соответствуют возможному реальному движению рассматриваемой управляемой ракеты.

Ориентация вектора скорости относительно связанной и топоцентрической систем координат. Ориентацию v_p в

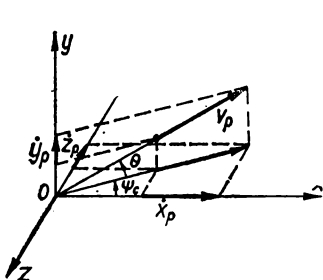


Рис. 39. Ориентация и компоненты вектора скорости ракеты.

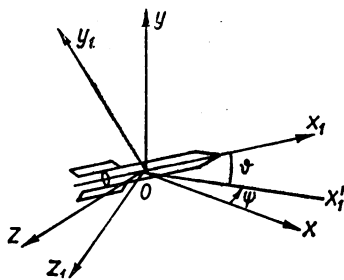


Рис. 40. Связанная и топоцентрическая системы координат.

пространстве относительно топоцентрической системы координат характеризуют углами наклона θ и поворота ψ_c траектории (рис. 39).

Из рис. 39 видно, что

$$\begin{aligned}\theta &= \arcsin \frac{\dot{y}_p}{V_p}; \\ \psi_c &= (-1)^{n+1} \arcsin \frac{\dot{z}_p}{\sqrt{\dot{x}_p^2 + \dot{z}_p^2}} - \pi n,\end{aligned}\quad (4.47)$$

где

$$n = \begin{cases} 0 & \text{при } \dot{x}_p \geq 0; \\ 1 & \text{при } \dot{x}_p < 0; \end{cases}$$

V — модуль вектора скорости. Тогда

$$\begin{aligned}\dot{\theta} &= \frac{\ddot{y}_p V - \dot{y}_p \dot{V}}{V \sqrt{\dot{x}_p^2 + \dot{z}_p^2}}; \\ \psi_c &= (-1)^{n+1} \frac{\dot{z}_p (\dot{x}_p^2 + \dot{z}_p^2) - (\dot{x}_p \ddot{x}_p + \dot{z}_p \ddot{z}_p) \dot{z}_p}{\dot{x}_p (\dot{x}_p^2 + \dot{z}_p^2)}.\end{aligned}\quad (4.48)$$

Связанной системой координат (рис. 40) называют систему, начало которой помещено в центр масс ЛО; ось $O_1 x_1$ направлена вдоль оси симметрии корпуса ЛО; $O_1 y_1$ перпендикулярна плоскости симметрии ЛО и образует правую систему координат [68].

Связь топоцентрической системы координат $Oxyz$ со связанной $O_1 x_1 y_1 z_1$ отражают углы тангажа θ , рысканья ψ и крена γ . Для простоты на рис. 40 начала обеих координатных систем совмещены в точку O и принято допущение $\gamma = 0$.

Ориентацию v_p относительно связанной системы координат характеризуют углами атаки α и скольжения β [51] (рис. 41);

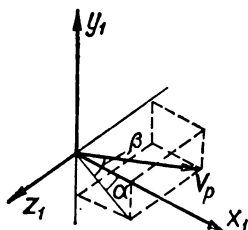


Рис. 41. Ориентация вектора скорости относительно связанной системы координат.

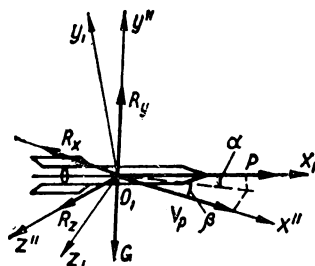


Рис. 42. Основные силы, действующие на ЛО в полете.

причем проекции этого вектора на оси связанной системы координат имеют вид

$$v_{x_1} = V \cos \beta \cos \alpha; \quad v_{y_1} = -V \cos \beta \sin \alpha; \quad v_{z_1} = -V \sin \beta; \quad (4.49)$$

$$\dot{v}_{x_1} = \dot{V} \cos \beta \cos \alpha - V \sin \beta \dot{\beta} \cos \alpha - V \cos \beta \sin \alpha \dot{\alpha};$$

$$\dot{v}_{y_1} = -\dot{V} \cos \beta \sin \alpha + V \sin \beta \dot{\beta} \sin \alpha - V \cos \beta \cos \alpha \dot{\alpha}; \quad (4.50)$$

$$\dot{v}_{z_1} = -\dot{V} \sin \beta - V \cos \beta \dot{\beta}.$$

Определение углов атаки и скольжения. Основные силы, действующие на ЛО в полете, показаны на рис. 42 [51]. Здесь P — сила тяги, направленная вдоль оси Ox связанной системы координат; G — сила тяжести, направленная вертикально вниз, параллельно оси Oy топоцентрической системы координат; R_x, R_y, R_z — сила лобового сопротивления среды, аэродинамическая подъемная и боковая силы направлены по осям скоростной системы координат.

Скоростной называют такую прямоугольную систему координат, начало которой помещено в центр масс ЛО; O_1x'' направлена параллельно v_p ; O_1y'' — перпендикулярно O_1x'' и лежит в местной вертикальной плоскости, содержащей v_p ; O_1z'' — перпендикулярно плоскости $x''O_1y''$ и дополняет систему осей координат до правой [68] (см. рис. 42).

Найдем равнодействующие сил в проекциях по осям скоростной системы координат

$$F_{x''} = P \cos \beta \cos \alpha - R_x - G \sin \theta = P - R_x - G \sin \theta; \quad (4.51)$$

$$F_{y''} = R_y + P \sin \alpha - G \cos \theta = R_y + P \alpha - G \cos \theta;$$

$$F_{z''} = R_z + P \cos \alpha \sin \beta = R_z + P \beta. \quad (4.52)$$

Согласно [51]

$$F_{y''} = m_1 V \dot{\theta}; \quad (4.53)$$

$$F_{z''} = -m_1 V \dot{\psi}_c \cos \theta,$$

где m_1 — масса ЛО.

Соответственно с принятыми допущениями справедливо [35]

$$\begin{aligned} R_y &= c_y^\alpha \frac{1}{2} \rho_h V^2 S \alpha = R_y^\alpha \alpha; \\ R_z &= c_z^\beta \frac{1}{2} \rho_h V^2 S \beta = R_z^\beta \beta, \end{aligned} \quad (4.54)$$

где ρ_h — плотность воздуха на данной высоте; S — миделево сечение ракеты; c_z^β, c_y^α — некоторые постоянные коэффициенты.

Подставив (4.53) в (4.52), а (4.54) в (4.51), получим

$$\alpha = \frac{G}{R_y^\alpha + P} \left(\frac{V\dot{\theta}}{g} + \cos \theta \right); \quad (4.55)$$

$$\beta = - \frac{GV\dot{\psi}_c}{(R_z^\beta + P)g} \cos \theta. \quad (4.56)$$

Сила тяги [35]

$$P = m\omega_e - S_a P_h, \quad (4.57)$$

где m — секундный расход топлива; ω_e — эффективная скорость продуктов сгорания; S_a — площадь выходного сечения сопла; P_h — атмосферное давление на данной высоте.

При сгорании топлива масса ракеты уменьшится, следовательно,

$$G = G_0 - mgt. \quad (4.58)$$

Здесь G_0 — начальный вес ЛО; g — ускорение свободного падения.

При реализации модели на ЭВМ принято $S_a = 0,096 \text{ м}^2$; $S = 0,196 \text{ м}^2$; $m = 16,54 \text{ кг/с}$; $\omega_e = 3528,72 \text{ м/с}$; $G_0 = 18\,000 \text{ Н}$; $c_y^\alpha = 2$; $c_z^\beta = 1,15$.

Для определения атмосферного давления (P_h) и плотности воздуха (ρ_h) на данной высоте использована модель стандартной атмосферы СА-73 [35].

Определение перегрузок. Перегрузки являются основной характеристикой маневренности, т. е. быстроты изменения скорости полета по величине и направлению, всех типов ЛО [35].

Составляющие перегрузок по осям связанной системы координат определяются по формулам

$$\begin{aligned} n_{x_1} &= \frac{a_{x_1}}{g}; \\ n_{y_1} &= \frac{a_{y_1}}{g}; \\ n_{z_1} &= \frac{a_{z_1}}{g}. \end{aligned} \quad (4.59)$$

Здесь g — ускорение свободного падения; a_{x_1} , a_{y_1} , a_{z_1} — составляющие ускорения движения ракеты в связанной системе координат [68],

$$\begin{aligned} a_{x_1} &= v_{x_1} + \omega_{y_1} v_{z_1} - \omega_{z_1} v_{y_1}; \\ a_{y_1} &= v_{y_1} + \omega_{z_1} v_{x_1} - \omega_{x_1} v_{z_1}; \\ a_{z_1} &= \dot{v}_{z_1} + \omega_{x_1} v_{y_1} - \omega_{y_1} v_{x_1}; \end{aligned} \quad (4.60)$$

где v_{x_1} , v_{y_1} , v_{z_1} — проекции вектора скорости движения на оси связанной системы координат (см. (4.49)); \dot{v}_{x_1} , \dot{v}_{y_1} , \dot{v}_{z_1} — производные по времени векторов скорости (см. (4.50));

$$\dot{V} = \sqrt{\dot{X}_p^2 + \dot{Y}_p^2 + \dot{Z}_p^2}; \quad (4.61)$$

$$\ddot{V} = \frac{\dot{X}_p \ddot{X}_p + \dot{Y}_p \ddot{Y}_p + \dot{Z}_p \ddot{Z}_p}{V}; \quad (4.62)$$

ω_{x_1} , ω_{y_1} , ω_{z_1} — проекции вектора угловой скорости движения ракеты на оси связанной системы координат [68],

$$\begin{aligned} \omega_{x_1} &= \dot{\psi} \sin \vartheta; \\ \omega_{y_1} &= \dot{\psi} \cos \vartheta; \\ \omega_{z_1} &= \dot{\vartheta}. \end{aligned} \quad (4.63)$$

Зная углы наклона, поворота траектории, атаки и скольжения [51], можно определить углы тангажа и рысканья

$$\psi = \psi_0 - \frac{\beta}{\cos \beta}, \quad \vartheta = \theta + \alpha. \quad (4.64)$$

Дифференцируя по времени (4.64), (4.55) и (4.56), получаем

$$\dot{\psi} = \dot{\psi}_0 - \frac{\dot{\beta} \cos \theta + \beta \sin \theta \dot{\theta}}{\cos^2 \theta}, \quad \dot{\vartheta} = \dot{\theta} + \dot{\alpha}.$$

Здесь

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= \frac{\dot{c}_1 (a_1 + b_1) - c_1 (\dot{a}_1 + \dot{b}_1)}{(a_1 + b_1)^2}; \\ \dot{\beta} &= \frac{\dot{c}_2 (a_2 + b_1) - c_2 (\dot{a}_2 + \dot{b}_1)}{(a_2 + b_1)^2}, \end{aligned}$$

где $a_1 = S \rho_h V^2$; $b_1 = P$; $C_1 = G \left(\frac{V \dot{\psi}}{g} + \cos \theta \right)$;

$$a_2 = 0,575 a_1; \quad \dot{b}_1 = -S_a \dot{P}_h;$$

$$C_2 = -G \left(\frac{V \dot{\psi}_c}{g} \cos \theta \right);$$

$$\dot{a}_1 = S \dot{\rho}_h V^2 + 2 S \rho_h V \dot{V};$$

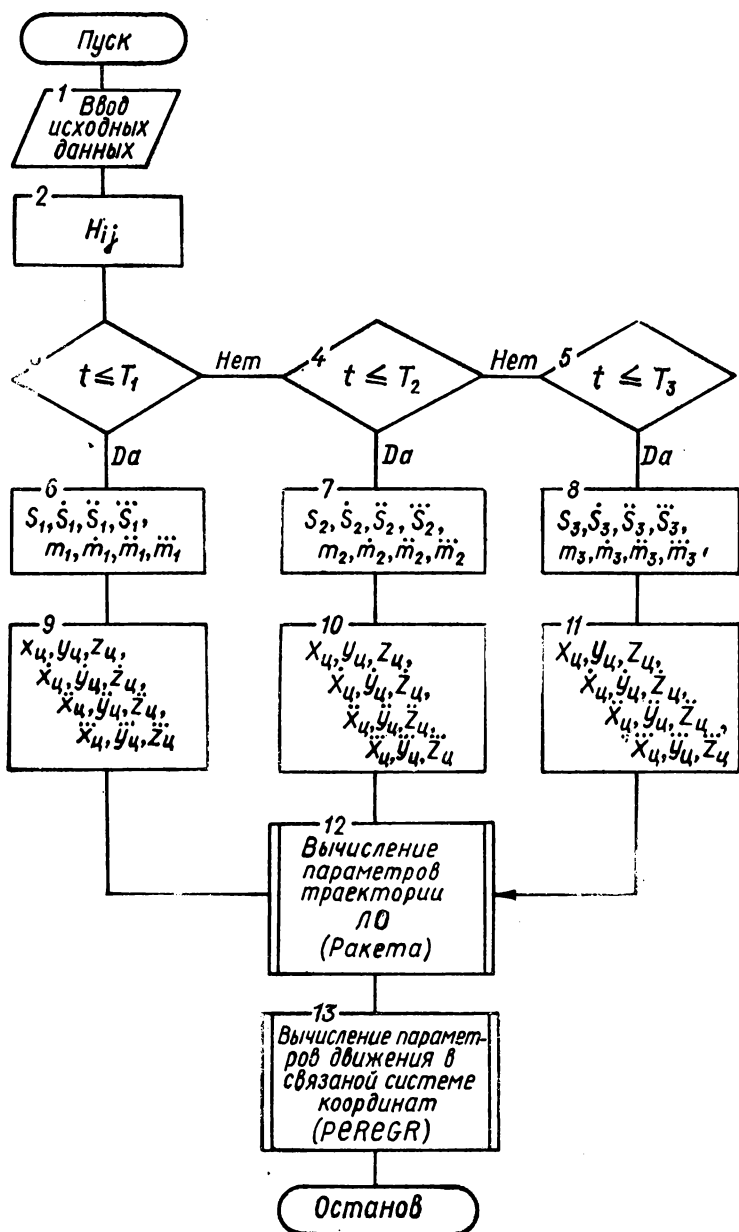


Рис. 43. Алгоритм моделирования параметров движения управляемого объекта.

$$\begin{aligned}
\dot{C}_1 &= \dot{G} \left(\frac{V\dot{\theta}}{g} + \cos \theta \right) + G \left(\frac{\dot{V}\dot{\theta} + V\ddot{\theta}}{g} - \sin \theta \dot{\theta} \right); \\
a_2 &= 0,575a_1; \\
\dot{C}_2 &= -\dot{G} \left(\frac{V\dot{\psi}_c}{g} \cos \theta \right) - G \left(\frac{\dot{V}\dot{\psi}_c}{g} \cos \theta \right) - G \left(\frac{V\ddot{\psi}_c}{g} \cos \theta \right) + \\
&\quad + G \left(\frac{V\dot{\psi}_c}{g} \sin \theta \dot{\theta} \right); \\
\dot{P}_h &= -g\rho_h \dot{H}; \\
\dot{\rho}_h &= -\dot{H} \frac{\rho_0}{T_0} (\beta_1 + 0,03416) \left(\frac{T}{T_0} \right)^{-2 - \frac{0,03416}{\beta_1}}; \\
H &= \frac{R_L^2 h}{(R_L + h)^2} \text{ при } \beta = 0; \quad \dot{P}_h = g_c \dot{H} \rho_h; \\
\dot{\rho}_h &= -\rho_h \frac{g}{R_1 T} \dot{H}, \text{ где } \frac{g}{R_1} = 0,03416.
\end{aligned}$$

Разработка алгоритма моделирования параметров движения управляемого объекта. Схема вычислений. Рассматриваемая модель движения ЛО реализуется в виде алгоритмической схемы (рис. 43). Принцип работы системы в программном исполнении заключается в следующем.

В блоке «MAIN» осуществляется вычисление направляющих косинусов H_{ij} , затем в зависимости от значения текущего времени t относительно T_1, T_2, T_3 организуется вычисление параметров траектории движения цели. Блок «MAIN» вызывает блок «Ракета», в котором осуществляется вычисление параметров траектории движения ракеты. Блок «Ракета» вызывает блок «PEREGR», организующий вычисление параметров движения ракеты в связанной системе координат. Результаты вычислений всех параметров движения заносятся в массивы промежуточных состояний ракеты.

Эта процедура повторяется (однако H_{ij} вычисляется один раз) для каждого момента времени t , который возрастает с заданным в исходных данных шагом.

§ 5. Модели траекторий в пространстве состояний

В последнее время внимание специалистов в области анализа и синтеза систем управления привлек метод построения математических моделей с использованием фазового пространства, или пространства состояний. Этот подход уже использовался в фундаментальных трудах по теории устойчивости А. М. Ляпунова, в работах по теории оптимизации Л. С. Понтрягина и его школы, и др. [47, 83, 88]. Поэтому в прикладных задачах фильтрации и

управления используется новое применение некоторых классических методов.

Основы метода пространства состояний рассматриваются в работах [47, 88, 112], в которых вводятся понятия управляемости, наблюдаемости и идентифицируемости систем. Дальнейшее развитие метод пространства состояний получил в работах по оптимальной многомерной фильтрации в дискретных системах и применению принципов линейного и динамического программирования для синтеза дискретных систем [48, 96].

В этом параграфе рассматривается применение плодотворной идеи метода пространства состояний для решения задачи моделирования движения управляемого ЛО.

В многомерных комплексных системах, к которым относятся и ИВК, определение степени влияния взаимосвязанных управляющих воздействий и управление ими сопряжено с определенными трудностями, которые могут быть разрешены с использованием ЭВМ. Метод пространства состояний позволяет, во-первых, получить все зависимости в компактном виде и, во-вторых, существенно облегчает программирование задач для решения их на ЭВМ.

Поведение многих динамических систем, в том числе и траектории движения управляемого ЛО, можно описать с помощью обыкновенных дифференциальных уравнений. Например, реакция $x(t)$ линейной динамической системы при действии на ее входе сигнала $u(t)$ математически описывается уравнением

$$\begin{aligned} a_n \frac{d^n x}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x(t) = \\ = b_m \frac{d^m u}{dt^m} + \dots + b_1 \frac{du}{dt} + b_0 u(t), \end{aligned} \quad (5.1)$$

дополненным соответствующими начальными условиями. В линейных системах с переменными параметрами по крайней мере один из коэффициентов a_i зависит от времени. В нелинейных системах a_i являются функциями переменной x . В общем случае на систему могут действовать несколько возмущающих функций $u_1(t)$, $u_2(t)$, ..., в том числе и случайных. С помощью дифференциальных уравнений вида (5.1) часто описываются и сообщения, подлежащие выделению в радиотехническом комплексе. При этом $u(t)$ — некоторая производящая функция, имеющая сравнительно простой вид (например, единичный скачок для детерминированных сигналов и белый шум — для случайных).

При исследовании сложных динамических систем удобнее пользоваться не одним уравнением (5.1) n -го порядка, а эквивалентной ему системой n дифференциальных уравнений первого порядка. Это позволяет использовать более компактный аппарат матричного анализа. При использовании метода пространства состояний необ-

ходимо зафиксировать такие переменные состояния $x_i(t)$, при которых система дифференциальных уравнений не будет иметь в правых частях производных возмущающих функций $u(t)$. В частности, если возмущающие функции $u_k(t)$ могут быть аппроксимированы белыми шумами, то переменные состояния $x_i(t)$, введенные указанным образом, являются компонентами n -мерного марковского вектора $X(t) = \{x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)\}$.

Принимая во внимание изложенное выше, рассмотрим некоторые примеры построения модели движения управляемого объекта на основе использования метода пространства состояний.

Под состоянием объекта понимают прямоугольные координаты центра масс объекта, их первые и вторые производные, а также некоторые углы, характеризующие положения объекта в пространстве.

При разработке моделей движения управляемого объекта в пространстве состояний исходим из следующих требований:

модель движения должна достаточно точно отражать реальное движение объекта;

модель движения должна отвечать целям и задачам исследований;

модель движения должна быть достаточно простой, позволяющей использовать ее в существующей системе автоматизированной обработки.

В полной мере этим требованиям отвечает модель движения управляемого объекта в виде дифференциальных уравнений относительно параметров движения.

Декартова система координат $Oxyz$ движется без вращения вместе с объектом так, что ее оси всегда параллельны осям выбранной системы координат $Oxyz$, связанной с измерителем.

Проектируя вектор скорости на оси x, y, z , получаем

$$\begin{aligned} \dot{x} &= V \cos \theta \cos \Psi; \\ \dot{y} &= V \sin \theta; \\ \dot{z} &= -V \cos \theta \sin \Psi. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Дифференцируя (5.2) по времени, имеем

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \dot{V} \cos \theta \cos \Psi - \dot{\theta} V \sin \theta \cos \Psi - \dot{\Psi} V \cos \theta \sin \Psi; \\ \ddot{y} &= \dot{V} \sin \theta + \dot{\theta} V \cos \theta; \end{aligned} \quad (5.3)$$

$$\dot{z} = -\dot{V} \cos \theta \sin \Psi + \dot{\theta} V \sin \theta \sin \Psi - \dot{\Psi} V \cos \theta \cos \Psi.$$

Известны следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= g(n_x - \sin \theta); \quad \dot{\theta} = g \frac{n_y^* - \cos \theta}{V}; \\ \dot{\Psi} &= -g \frac{n_z^*}{V \cos \theta}. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Из уравнений (5.4) получаем выражения для перегрузок

$$\begin{aligned} n_x &= \frac{\dot{V}}{g} + \sin \theta; \\ n_y^* &= \frac{\dot{\theta} V}{g} + \cos \theta; \\ n_z^* &= - \frac{\Psi V \cos \theta}{g}, \end{aligned} \quad (5.5)$$

где n_x , n_y^* , n_z^* — значения перегрузок, измеряемых (или пересчитанные) в полускоростной системе координат. Поэтому в дальнейшем индекс (*) опускаем.

Исходя из решаемой задачи, приступаем к разработке моделей движения управляемого объекта в пространстве состояний.

При этом рассмотрим три случая:

построение модели полезного сигнала в пространстве состояний для реализации алгоритма динамической фильтрации данных внешнетраекторных измерений и телеметрии;

построение модели полезного сигнала в пространстве состояний для реализации алгоритма динамической фильтрации данных телеметрии;

построение модели полезного сигнала в пространстве состояний для реализации алгоритма определения параметров взаимного положения двух объектов по данным внешнетраекторных измерений и телеметрии.

В первом случае зафиксируем вектор состояния в виде

$$X^T = \|xyz\dot{x}\dot{y}\dot{z}n_x n_y n_z V \theta \Psi\|, \quad (5.6)$$

где x, y, z — координаты центра масс объекта; V — скорость полета объекта; $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ — производные координат по времени (проекции вектора скорости на оси стартовой системы координат); θ — угол поворота траектории; Ψ — угол наклона траектории; n_x, n_y, n_z — перегрузки по осям стартовой системы координат.

На рис. 44 приведен вектор скорости управляемого объекта в системе координат, связанной с его центром масс. Здесь θ — угол наклона траектории; Ψ — угол поворота траектории; V — вектор скорости объекта.

Подставляя (5.4) в (5.3) и производя некоторые преобразования, получаем

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= gn_x \cos \theta \cos \Psi - gn_y \sin \theta \cos \Psi + gn_z \cos \Psi; \\ \ddot{y} &= gn_x \sin \theta + gn_y \cos \theta - g; \\ \ddot{z} &= -gn_x \cos \theta \sin \Psi + gn_y \sin \theta \sin \Psi + gn_z \cos \Psi. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Запишем систему уравнений (5.7) в виде

$$\ddot{\mathbf{x}} = g \left(n_x \frac{\dot{x}}{V} - n_y \frac{\dot{x}\dot{y}}{V\dot{V}_1} - n_z \frac{\dot{z}}{V_1} \right);$$

Рис. 44. Система координат для определения движения управляемого объекта.

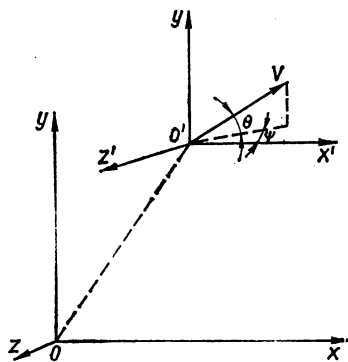
$$\ddot{y} = g \left(n_x \frac{\dot{y}}{V} + n_y \frac{V_1}{V} - 1 \right); \quad (5.8)$$

$$\ddot{z} = g \left(n_x \frac{\dot{z}}{V} - n_y \frac{\ddot{y}z}{VV_1} + n_z \frac{\dot{x}}{V_1} \right),$$

где

$$V = (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)^{1/2};$$

$$V_1 = (\dot{x}^2 + \dot{z}^2)^{1/2}. \quad (5.9)$$



Кроме того, при преобразованиях учитывалось, что

$$\sin \theta = \frac{\dot{y}}{V}; \quad \cos \theta = \frac{V_1}{V};$$

$$\sin \Psi = -\frac{\dot{z}}{V_1}; \quad \cos \Psi = \frac{\dot{x}}{V_1}. \quad (5.10)$$

Аналогично преобразуем уравнения (5.4)

$$\dot{V} = g \left(n_x - \frac{\dot{y}}{V} \right); \quad \dot{\Psi} = -\frac{g}{V_1} n_z;$$

$$\dot{\theta} = \frac{g}{V} \left(n_y - \frac{V_1}{V} \right). \quad (5.11)$$

Для более точной характеристики модели движения необходимо записать дифференциальные уравнения для перегрузок:

$$\dot{n}_x = \dot{\theta} \cos \theta + \frac{\dot{V}}{g};$$

$$\dot{n}_y = \frac{\dot{V}\theta}{g} - \dot{\theta} \sin \theta - \frac{\ddot{\theta}V}{g};$$

$$\dot{n}_z = \frac{\dot{\Psi}\dot{V} \sin \theta}{g} - \frac{\dot{V}\dot{\Psi} \cos \theta}{g} - \frac{\ddot{\Psi}V \cos \theta}{g}. \quad (5.12)$$

Подставляя в (5.12) значения θ , Ψ и \dot{V} , из (5.11), получаем

$$\dot{n}_x = g \frac{V_1}{V^2} \left(n_x - \frac{\dot{y}}{V} \right) + \frac{\dot{V}}{g};$$

$$\dot{n}_y = \frac{g}{V} \left(n_x - \frac{\dot{y}}{V} \right) \left(n_y - \frac{V_1}{V} \right) - g \frac{\dot{y}}{V^2} \left(n_y - \frac{V_1}{V} \right) + \frac{\ddot{\theta}V}{g}; \quad (5.13)$$

$$\dot{n}_z = g \frac{n_z}{V} \left(n_x - \frac{\dot{y}}{V} \right) - g \frac{n_z \dot{y}}{VV_1} \left(n_y - \frac{V_1}{V} \right) - \frac{\ddot{\Psi}V_1}{g}.$$

В систему уравнений (5.13) входят новые параметры \dot{V} , $\ddot{\theta}$, $\ddot{\Psi}$, которые при фиксированной дискретности измерений остаются постоянными, т. е.

$$\dot{V} = \lambda_1; \quad \ddot{\theta} = \lambda_2; \quad \ddot{\Psi} = \lambda_3. \quad (5.14)$$

Таким образом, при принятых ограничениях (5.14) выражения (5.8), (5.11) и (5.13) определяют математическую модель движения управляемого объекта.

Представим модель движения управляемого объекта в пространстве состояний в виде

$$\dot{X} = \Phi(x). \quad (5.15)$$

Тогда согласно (5.7), (5.11), (5.12) имеем

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{x}_1 = x_4; \quad \ddot{x} = \dot{x}_4 = g \left(\frac{x_4 x_{10}}{x_7} - \frac{x_5 x_{11}}{x_2 V_1} - \frac{x_6 x_{12}}{V_1} \right); \\ \dot{y} &= \dot{x}_2 = x_5; \quad \ddot{y} = \dot{x}_5 = g \left(\frac{x_5 x_{10}}{x_4} - \frac{x_{11} V_1}{x_7} - 1 \right); \\ \dot{z} &= \dot{x}_3 = x_6; \quad \ddot{z} = \dot{x}_6 = g \left(\frac{x_6 x_{10}}{x_7} - \frac{x_5 x_6 x_{11}}{x_7 V_1} + \frac{x_4 x_{12}}{V_1} \right); \\ \dot{V} &= \dot{x}_7 = g \left(x_{10} - \frac{x_5}{x_7} \right); \quad \dot{\theta} = \dot{x}_8 = g \left(\frac{x_{11}}{x_7} - \frac{V_1}{x_2^2} \right); \\ \dot{\Psi} &= \dot{x}_9 = -g \frac{x_{12}}{V_1}; \\ \dot{n}_x &= \dot{x}_{10} = g \left(x_{10} - \frac{x_5}{x_7} \right) \frac{V_1}{x_7^2} + \frac{\lambda_1}{g}; \\ \dot{n}_y &= \dot{x}_{11} = \frac{g}{x_7} \left(x_{10} x_{11} - x_{10} \frac{V_1}{x_7} - 2 x_{11} \frac{x_5}{V_1} + \right. \\ &\quad \left. + 2 \frac{x_5^2}{x_7^2} - \frac{x_5 x_{11}}{x_7} + \frac{x_5 V_1}{x_7^2} \right) + \frac{\lambda_2}{g}; \\ \dot{n}_z &= \dot{x}_{12} = g \frac{x_{12}}{x_7} \left(x_{10} - \frac{x_5}{x_7} - \frac{x_5}{V_1} x_{11} + \frac{x_5}{x_7} \right) - \frac{\lambda_3 V_1}{g}. \end{aligned}$$

Разбивая время на малые интервалы Δt и применяя разложение в ряд Тейлора, представляем

$$X(t) = \sum_{s=0}^m \frac{(\Delta t)^s}{s!} X^s(\Delta t). \quad (5.16)$$

Тогда для компоненты вектора состояния x_1 имеем

$$x_1(t) = x_1 + \dot{x}_1 \Delta t + x_1 \frac{\Delta t^2}{2} + \dots \quad (5.17)$$

Аналогично получаем остальные компоненты вектора состояния.

При разложении в ряд Тейлора ограничимся первыми тремя членами в соответствии с принятыми ограничениями. В уравнении (5.17), произведя замену согласно выражениями (5.8) и (5.15), получаем

$$x_1(t) = x_1 + x_4 \Delta t + g \left(\frac{x_4 x_{10}}{x_7} - \frac{x_5 x_{11}}{x_7 V_1} - \frac{x_6 x_{12}}{x_7} \right) \frac{\Delta t^2}{2}. \quad (5.18)$$

Проведя ряд аналогичных преобразований для остальных компонент вектора состояния, имеем

$$\begin{aligned}
 x_2(t) &= x_2 + x_5 \Delta t + g \left(\frac{x_5 x_{10}}{x_7} + \frac{x_4 x_6}{x_7} - 1 \right) \frac{\Delta t^2}{2}; \\
 x_3(t) &= x_3 + x_6 \Delta t + g \left(\frac{x_6 x_{10}}{x_7} + \frac{x_{11} x_6 x_5}{x_7 V_1} + \frac{x_4}{V_1} \right) \frac{\Delta t^2}{2}; \\
 x_4(t) &= x_4 + g \left(\frac{x_5 x_{10}}{x_7} + \frac{x_{11} x_5}{x_7 V_1} - \frac{x_6 x_{12}}{x_7} \right) \Delta t; \\
 x_5(t) &= x_5 + g \left(\frac{x_5 x_{10}}{x_7} + \frac{x_{11} V_1}{x_7} - 1 \right) \Delta t; \\
 x_6(t) &= x_6 + g \left(\frac{x_6 x_{10}}{x_7} - \frac{x_5 x_6 x_{11}}{x_7 V_1} + \frac{x_4 x_{12}}{V_1} \right) \Delta t; \\
 x_7(t) &= x_7 + g \left(x_{10} - \frac{x_5}{x_7} \right) \Delta t + g \frac{\lambda_1 \Delta t^2}{2}; \\
 x_8(t) &= x_8 + g \left(x_{11} - \frac{V_1}{x_7} \right) \frac{\Delta t}{x_7} + \lambda_2 \frac{\Delta t^2}{2}; \\
 x_9(t) &= x_9 - \frac{\Delta t}{x_7} x_2 g + \lambda_3 \frac{\Delta t^2}{2}; \\
 x_{10}(t) &= x_{10} + g \frac{V_1}{x_7^2} \left(x_{10} - \frac{x_5}{x_7} \right) \Delta t + \frac{\lambda_1 \Delta t^2}{2g}; \\
 x_{11}(t) &= x_{11} + g \left(x_{10} x_{11} - x_{10} \frac{V_1}{x_7} - 2 x_{11} \frac{x_5}{x_7} + \right. \\
 &\quad \left. + 2 \frac{x_5 V_1}{x_7^2} - \frac{x_8 x_{11}}{x_7} + \frac{x_6 V_1}{x_7^2} \right) \frac{\Delta t}{x_7} + \frac{x_2 V_1 \Delta t^2}{2g}; \\
 x_{12}(t) &= x_{12} + g \left(x_{10} - \frac{x_5}{x_7} - \frac{x_6}{V_1} x_{11} + \frac{x_5}{x_7} \right) \frac{x_{12} \Delta t}{x_7} - \frac{\lambda_3 V_1 \Delta t^2}{2}.
 \end{aligned} \tag{5.19}$$

На основании полученных выражений, используя методику построения матрицы переходов [48, 112], запишем дискретный аналог уравнения (5.15) в виде

$$X_h = \Phi_{h,h-1} X_{h-1} + u_{h-1}, \tag{5.20}$$

где $\Phi_{h,h-1}$ — матрица переходов; u_{h-1} — вектор управления. Тогда в развернутом виде выражение (5.20) принимает вид (5.21).

Включая в вектор состояния величины \dot{x} , \dot{y} , \dot{z} , V , θ , Ψ , существенно улучшаем динамические свойства алгоритма фильтрации.

Разработанная модель полезного сигнала в пространстве состояний дает возможность использовать алгоритм динамической фильтрации траекторных измерений и телеметрии для совместного оценивания параметров и состояния управляемого объекта.

Во втором случае зафиксируем вектор состояния в виде

$$X^T = \| \dot{x} \dot{y} \dot{z} n_x n_y n_z \theta \Psi V \dot{\theta} \dot{\Psi} \dot{V} \|, \tag{5.22}$$

x	x_1	100	Δt	0	0000	$g \frac{x_1 \Delta t^2}{2x_7^2}$	$-g \frac{x_4 x_5 \Delta t^2}{2x_7 V_1}$	$1 - g \frac{x_6 \Delta t^2}{2V_1}$	0	x_1	$+$	0	$-\frac{\Delta t^2}{g}$	0	$h-1$
y	x_2	010	0	Δt	0000	$g \frac{x_5 \Delta t^2}{2x_7^2}$	$\frac{V_1 \Delta t^2}{g}$	0	0	x_2	$+$	$-\frac{\Delta t^2}{g}$	0	0	$h-1$
z	x_3	001	$g \frac{\Delta t^2}{2V_1}$	0	$\Delta t 000$	$g \frac{x_6 \Delta t^2}{2x_7^2}$	$-g \frac{x_5 x_6 \Delta t^2}{2x_7 V_1}$	$g \frac{\Delta t^2 x_4}{2V_1}$	0	x_3	$+$	0	0	0	$h-1$
x	x_4	000	1	0	0000	$g \frac{x_4 \Delta t}{x_7}$	$-g \frac{x_4 x_6 \Delta t}{x_7 V_1}$	$-g \frac{x_6 \Delta t}{V_1}$	0	x_4	$+$	0	0	0	$h-1$
y	x_5	000	0	0	0000	$g \frac{x_5 \Delta t}{x_7}$	$\frac{V_1 \Delta t}{g}$	0	0	x_5	$+$	0	0	0	$h-1$
z	x_6	000	0	1	1000	$g \frac{x_6 \Delta t}{x_7}$	$-g \frac{x_5 x_4 \Delta t}{x_7 V_1}$	$g \frac{x_4 \Delta t}{V_1}$	0	x_6	$+$	0	0	0	$h-1$
n_x	x_7	000	0	0	0100	$g \Delta t$	0	0	0	x_7	$+$	0	0	0	$h-1$
n_y	x_8	000	0	$-g \frac{\Delta t}{x_7}$	0010	0	$\frac{\Delta t}{g}$	0	0	x_8	$+$	0	0	0	$h-1$
n_z	x_9	000	0	0	0001	0	0	$-\frac{\Delta t}{g}$	0	x_9	$+$	0	0	0	$h-1$
V	x_{10}	000	0	0	0000	$1 + g \frac{V_1}{x_7^2} \Delta t$	0	0	0	x_{10}	$+$	0	0	0	$h-1$
θ	x_{11}	000	0	$-g \frac{V_1 \Delta t}{x_7^3}$	0000	$g \left(\frac{x_1}{x_7} - \frac{V_1}{x_7^2} \Delta t \right)$	$1 - g \frac{x_6 \Delta t}{x_7^2}$	0	0	x_{11}	$+$	0	0	0	$h-1$
Ψ	x_{12}	000	0	$2 \left(\frac{V_1}{x_7^2} \frac{x_{11}}{x_7} \right) g \frac{\Delta t}{x_1}$	0000	$g \frac{x_{12} \Delta t}{x_7}$	0	1	0	x_{12}	$+$	0	0	0	$h-1$
$e n_x n_y$	x_{13}	000	0	$-g \frac{x_{12} x_{11} \Delta t}{x_7 V_1}$	0000	0	0	0	1	x_{13}	$+$	0	0	0	$h-1$

где x, y, z — составляющие вектора скорости по осям полускоростной системы координат; n_x, n_y, n_z — значение перегрузок по осям этой же системы координат; θ и Ψ — углы наклона и поворота траектории; $\dot{\theta}, \dot{\Psi}, \dot{V}$ — производные углов и скорости по времени.

Для построения матрицы переходов $\Phi_{h,h-1}$ воспользуемся выражениями (5.8), (5.10), (5.12), (5.15) и рассмотренной выше методикой построения матрицы $\Phi_{h,h-1}$, тогда в новых обозначениях запишем

$$\begin{aligned}\ddot{x} = \dot{x}_1 &= g \frac{x_1 x_4}{x_9} - g \frac{x_1 x_2 x_5}{x_9 V_1} - g \frac{x_3 x_9}{V_1}; \\ \dot{y} = \dot{x}_2 &= g \frac{x_2 x_4}{x_9} + g \frac{x_5 V_1}{x_9} - g; \\ \ddot{z} = \dot{x}_3 &= g \frac{x_3 x_4}{x_9} - g \frac{x_2 x_3 x_5}{x_9 V_1} + g \frac{x_1 x_6}{V_1}, \\ n_x = \dot{x}_4 &= g \frac{x_5 V_1}{x_9^2} - g \frac{x_2 x_3 x_5}{x_9 V_1} + g \frac{x_1 x_6}{V_1}; \\ n_y = \dot{x}_5 &= g \frac{x_4 x_5}{x_9} - 2g \frac{x_2 x_5}{x_9^2} + 2g \frac{x_2 V_1}{x_9^3} - g \frac{x_4 V_1}{x_9^2} + \frac{\lambda_2 x_9}{g}; \\ n_z = \dot{x}_6 &= g \frac{x_4 x_6}{x_9} - g \frac{x_2 x_5 x_6}{V_1 x_9}; \\ \dot{\theta} = \dot{x}_7 = \dot{x}_{10}; \quad \dot{\Psi} = \dot{x}_8 = \dot{x}_{11}; \quad \dot{V} = \dot{x}_9 = \dot{x}_{12}; \\ \ddot{\theta} = \dot{x}_{10} &= \lambda_2; \quad \ddot{\Psi} = \dot{x}_{11} = \lambda_3; \quad \ddot{V} = \dot{x}_{12} = \lambda_1.\end{aligned}\tag{5.23}$$

В матричной форме (5.23) имеет вид (5.23а).

Выражение (5.23а) позволяет перейти к построению алгоритма динамической фильтрации телеметрии для получения оценок вектора состояния (5.22).

В третьем случае для построения модели относительного движения рассмотрим движение мишени и перехватчика в местной прямоугольной системе координат, начало которой связано с фазовым центром антенной системы измерительного средства, ось y совпадает с нормалью к поверхности эллипсоида, ось x направлена на север, а ось z дополняет систему до правой (рис. 45).

Для получения кинематических уравнений, описывающих относительное движение мишени и перехватчика, отметим в центре масс перехватчика начало подвижной системы координат $Ox'y'z'$, оси которой параллельны осям системы $Oxyz$. Мишень и перехватчик рассмотрим как материальные точки, связанные с центрами масс соответствующих объектов. Отрезок, соединяющий центры масс мишени и перехватчика, назовем линией визирования, и длину его обозначим через r . Тогда из рис. 45 видно, что

$$\vec{r} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OM}.\tag{5.24}$$

\dot{x}	x_1	1	$-g \frac{x_1 x_6}{x_9 V_1} \Delta t$	$-g \frac{x_6}{V_1} \Delta t$	$g \frac{x_1}{x_9} \Delta t$	0	0	0	0	0	0	0	0	x_1	0
\dot{y}	x_2	0	1	0	$g \frac{x_2}{x_9} \Delta t$	$g \frac{V_1}{x_9} \Delta t$	0	0	0	0	0	0	0	x_2	$-g \Delta t$
\dot{z}	x_3	0	0	1	$g \frac{x_3}{x_9} \Delta t$	$-g \frac{x_2 x_3}{V_1 x_9} \Delta t$	$g \frac{x_1}{x_9} \Delta t$	0	0	0	0	0	0	x_3	0
n_x	x_4	0	0	0	1	$g \frac{V_1}{x_2^2} \Delta t$	0	0	0	0	0	0	0	x_4	$\frac{\lambda_1}{g} \Delta t$
n_y	x_5	0	$-2g \frac{x_2 x_3 - V_1}{x_9^2} \Delta t$	0	$g \frac{x_2 x_3 - V_1}{x_9^3}$	1	0	0	0	0	0	0	0	x_5	0
n_z	x_6	0	0	0	$g \frac{x_6}{x_9} \Delta t$	$-g \frac{x_2 x_6}{V_1 x_9} \Delta t$	1	0	0	0	0	0	0	x_6	0
θ	x_7	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	x_7	0
ψ	x_8	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	x_8	0
v	x_9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	x_9	0
ϕ	x_{10}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	x_{10}	$\lambda_2 \Delta t$
$\dot{\psi}$	x_{11}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	x_{11}	$\lambda_3 \Delta t$
V	x_{12}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	x_{12}	$\lambda_1 \Delta t$

Рис. 45. Система координат для определения относительного движения объектов.

Дифференцируя (5.24) по времени, получаем

$$\dot{r} = V_p - V_m,$$

где \dot{r} — вектор относительной скорости мишени и перехватчика; V_p и V_m — векторы скоростей перехватчика и мишени.

Обозначим ΔV — скорость изменения расстояния между перехватчиком и мишенью по линии визирования, или проекция относительной скорости \dot{r} на линию визирования.

Рассмотрим положение вектора ΔV в пространстве. Он направлен вдоль линии визирования, и для определения его положения в выбранной системе координат необходимо знать два угла:

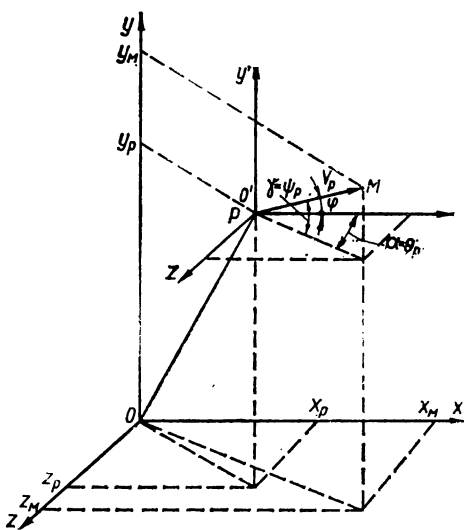
α — угол между вектором ΔV и проекцией его на горизонтальную плоскость местной прямоугольной системы координат; γ — угол, отсчитываемый в горизонтальной плоскости от оси Ox против часовой стрелки до проекции вектора Ox на горизонтальную плоскость (см. рис. 45).

Нахождение кинематических связей относительного движения перехватчика и мишени основано на задании определенного закона, в качестве которого выбирается метод «погони», по нему осуществляется наведение. Суть этого метода заключается в том, что вектор скорости центра масс перехватчика постоянно направлен на мишень и, следовательно, совпадает с линией визирования. Поэтому углы, определяющие положение вектора скорости центра масс перехватчика: угол наклона к горизонту касательной к траектории перехватчика (угол между вектором скорости перехватчика и местной горизонтальной плоскостью θ_p); угол поворота траектории перехватчика (отсчитывается в горизонтальной плоскости от оси Ox до проекции вектора скорости на эту плоскость против часовой стрелки — Ψ_p), будут совпадать с углами α и γ и определять положение вектора ΔV в выбранной прямоугольной системе координат (рис. 45).

Следовательно,

$$\alpha = \theta_p = \theta; \quad \gamma = \Psi_p = \Psi. \quad (5.25)$$

Найдем проекции модуля относительной скорости на оси местной прямоугольной системы координат. Используя рис. 45, имеем $\Delta x = \Delta V \cos \theta \cos \Psi$; $\Delta y = \Delta V \sin \theta$; $\Delta z = -\Delta V \cos \theta \sin \Psi$. (5.26)



Продифференцировав (5.26) по времени, получим

$$\begin{aligned}\Delta\ddot{X} &= \Delta\dot{V} \cos \theta \cos \Psi - \dot{\theta} \Delta V \sin \theta \cos \Psi - \dot{\Psi} \Delta V \sin \Psi \cos \theta; \\ \Delta\ddot{Y} &= \Delta\dot{V} \sin \theta + \dot{\theta} \Delta V \cos \theta;\end{aligned}\quad (5.27)$$

$$\Delta\ddot{Z} = -\Delta\dot{V} \cos \theta \sin \Psi + \dot{\theta} \Delta V \sin \theta \sin \Psi - \dot{\Psi} \Delta V \cos \theta \cos \Psi.$$

Для определения углов θ и Ψ воспользуемся известными соотношениями

$$\begin{aligned}\dot{V}_p &= g(n_x - \sin \theta); \\ \dot{\theta} &= g/V_p(n_y - \cos \theta); \\ \dot{\Psi} &= -gn_z/V \cos \theta,\end{aligned}\quad (5.28)$$

где n_x, n_y, n_z — проекции вектора перегрузок на оси полускоростной системы координат.

Из рис. 45 видно, что

$$\begin{aligned}\cos \Psi &= \frac{\Delta x}{\Delta V_1}; \quad \sin \Psi = -\frac{\Delta z}{\Delta V_1}; \quad \Delta V_1 = (\Delta x^2 + \Delta z^2)^{1/2}; \\ \cos \theta &= \frac{\Delta V_1}{\Delta V}; \quad \sin \theta = \frac{\dot{y}}{\Delta V}; \quad \Delta V = (\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2)^{1/2}.\end{aligned}\quad (5.29)$$

Учитывая (5.29), систему уравнений (5.27) запишем так:

$$\begin{aligned}\Delta\ddot{x} &= \frac{\Delta\dot{V}\Delta\dot{x}}{\Delta V} = \dot{\theta}\Delta\dot{y} \frac{\Delta x}{\Delta V_1} - \dot{\Psi}\Delta\dot{z}; \\ \Delta\ddot{y} &= \frac{\Delta\dot{V}\Delta\dot{y}}{\Delta V} - \dot{\theta}\Delta V_1; \\ \Delta\ddot{z} &= \frac{\Delta\dot{V}\Delta\dot{z}}{\Delta V} - \dot{\theta}\Delta\dot{y} \frac{\Delta z}{\Delta V_1} - \dot{\Psi}\Delta\dot{x}.\end{aligned}\quad (5.30)$$

Используя (5.28), получаем значения для проекций вектора перегрузок:

$$n_x = \frac{\dot{V}_p}{g} + \sin \theta; \quad n_y = \dot{\theta} \frac{V_p}{g} + \cos \theta; \quad n_z = -\dot{\Psi} \frac{V_p}{g} \cos \theta. \quad (5.31)$$

Продифференцировав (5.31) по времени, имеем

$$\begin{aligned}\dot{n}_x &= \frac{\ddot{V}_p}{g} + \dot{\theta} \cos \theta; \quad \dot{n}_y = \dot{\theta} \frac{V_p}{g} + \dot{\theta} \dot{V} \frac{1}{g} - \dot{\theta} \sin \theta; \\ \dot{n}_z &= -\dot{\Psi} \frac{V_p}{g} \cos \theta - \dot{\Psi} \dot{V}_p \frac{\cos \theta}{g} + \dot{\Psi} \dot{\theta} \frac{V_p}{V} \sin \theta.\end{aligned}\quad (5.32)$$

На основании принятых ограничений относительно того, что величины $\Delta\dot{V}, \dot{V}_p, \dot{\theta}, \dot{\Psi}$ изменяются незначительно, считаем

$$\Delta\dot{V} = \lambda_{\Delta V}; \quad \dot{V}_p = \lambda_{V_p}; \quad \dot{\Psi} = \lambda_{\Psi}; \quad \dot{\theta} = \lambda_{\theta}, \quad (5.33)$$

где $\lambda_{\Delta V}, \lambda_{V_p}, \lambda_{\Psi}, \lambda_{\theta}$ — постоянные величины.

Тогда, с учетом (5.28) и (5.33), система дифференциальных уравнений (5.32) принимает вид

$$\begin{aligned}\dot{n}_x &= \dot{\theta} \frac{\Delta V_1}{\Delta V} + \frac{1}{g} \lambda_{V_p}; \\ \dot{n}_y &= \dot{\theta} \dot{V}_p \frac{1}{g} - \dot{\theta} \frac{\Delta \dot{V}}{V} + \frac{V_p}{g} \lambda_{\theta}; \\ \dot{n}_z &= -\dot{\Psi} \dot{\theta} \frac{V \Delta z}{g V_1} - \dot{\Psi} \dot{V}_p \frac{\Delta V_1}{g \Delta V} - \frac{V_p \Delta V_1}{g \Delta V} \lambda_{\Psi}.\end{aligned}\quad (5.34)$$

Таким образом, учитывая ограничения (5.33), поведение рассматриваемой системы описываем системами дифференциальных уравнений (5.26), (5.28), (5.31), (5.32), (5.34).

Зафиксируем вектор состояния в виде

$$X^T = \|\Delta x \Delta y \Delta z \Delta \dot{x} \Delta \dot{y} \Delta \dot{z} \Delta \dot{v}_n n_x n_y n_z \dot{\theta} \dot{\Psi} V_p\|. \quad (5.35)$$

Для построения матрицы переходов $\Phi_{h,h-1}$, воспользуемся системами дифференциальных уравнений (5.26), (5.28), (5.31), (5.32), (5.34) и рассмотренной выше методикой. Тогда в новых обозначениях получим

$$\begin{aligned}\Delta \dot{x} &= \dot{x}_1 = x_1 + x_4 \Delta t + \frac{x_7 x_4}{\Delta V} \frac{\Delta t^2}{2} - \frac{x_{11} x_5 x_4}{\Delta V_1} \frac{\Delta t^2}{2} + x_{12} x_6 \frac{\Delta t^2}{2}; \\ \Delta \dot{y} &= \dot{x}_2 = x_2 + x_5 \Delta t + \frac{x_7 x_5}{\Delta V} \frac{\Delta t^2}{2} + x_{11} \Delta V_1 \frac{\Delta t^2}{2}; \\ \Delta \dot{z} &= \dot{x}_3 = x_3 + x_6 \Delta t + \frac{x_7 x_6 \Delta t^2}{\Delta V^2} - \frac{x_5 x_6 x_{11}}{\Delta V_1} \frac{\Delta t^2}{2} - x_4 x_{12} \frac{\Delta t^2}{2}; \\ \Delta \ddot{x} &= \dot{x}_4 = x_4 + \frac{x_7 x_4}{\Delta V} \Delta t - \frac{x_{11} x_5 x_4}{\Delta V_1} \Delta t + x_{12} x_6 \Delta t; \\ \Delta \ddot{y} &= \dot{x}_5 = x_5 + \frac{x_7 x_5}{\Delta V} \Delta z + x_{11} \Delta V_1 \Delta t; \\ \Delta \ddot{z} &= \dot{x}_6 = x_6 + \frac{x_7 x_6}{\Delta V} \Delta t - \frac{x_5 x_6 x_{11}}{\Delta V_1} \Delta t - x_4 x_{12} \Delta t; \\ \Delta \dot{V} &= \dot{x}_7 = x_7 + \lambda_{\Delta V} \Delta t; \\ \dot{n}_x &= \dot{x}_8 = x_8 + x_{11} \frac{\Delta V_1}{\Delta V} \Delta t + \frac{1}{g} \lambda_{V_p} \Delta t; \\ \dot{n}_y &= \dot{x}_9 = x_9 + \lambda_{\theta} \frac{x_{13}}{g} \Delta t + x_{11} x_8 \Delta t - 2 x_{11} x_5 \frac{\Delta t}{V}; \\ n_z &= x_{10} = x_{10} - \lambda_{\Psi} x_{13} \frac{\Delta V_1 \Delta t}{\Delta V g} - x_{12} x_8 \frac{\Delta V_1}{\Delta V} \Delta t + \\ &+ x_{12} \frac{x_5}{\Delta V} \Delta V_1 \Delta t + x_{11} x_{12} x_{13} \frac{\Delta t}{\Delta V g}; \\ \ddot{\theta} &= \dot{x}_{11} = x_{11} + \lambda_{\theta} \Delta t;\end{aligned}\quad (5.36)$$

$$\ddot{\Psi} = \dot{x}_{12} = x_{12} + \lambda_{\Psi} \Delta t,$$

$$\dot{V}_p = \dot{x}_{13} = x_{13} + g x_g \Delta t - g \frac{x_5}{\Delta V} \Delta t + \lambda_{V_p} \frac{\Delta t^2}{2}.$$

В матричной форме система (5.36) имеет вид (5.37).

Рассмотренные модели движения в виде уравнений в пространстве состояний могут быть непосредственно использованы при построении динамических систем оценивания управляемого движения и для других целей. При необходимости интегрирования так же, как и в § 2, 3 данной главы, используются известные численные методы. Некоторые особенности применения этих методов в задачах, связанных с работой ИВК, будут рассмотрены в четвертом томе настоящего издания.

НЕКОТОРЫЕ МЕТОДЫ ИДЕНТИФИКАЦИИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

§ 1. О некорректности задачи различения гипотез

Работа многих радиотехнических устройств, предназначенных для обнаружения, приема или различения сигналов, сводится к принятию решения о присутствии на входе того или иного сигнала. Отвлекаясь от конструктивных особенностей этих устройств, можно сказать, что их работа полностью характеризуется использованными в них процедурами принятия решений. Для оценивания качества процедур принятия решений используются различные критерии. В радиолокации, например, широко применяется отношение энергий сигнала и помехи. Часто более предпочтительными оказываются оценки качества процедуры, основанные на величине среднего риска. Процедура, которой соответствует минимум среднего риска, называется оптимальной по Байесу. Классическая теория, основанная на байесовском подходе к проверке статистических гипотез, позволяет решить задачу обнаружения при полной априорной информации о сигнале, помехе и их взаимодействии.

На практике наличие неконтролируемых параметров сигналов (а также помех) приводит к так называемой априорной неопределенности. Это выражается в том, что распределение сигнала (или помехи) известно лишь частично. Например, утверждается, что распределение «близко к нормальному», но информации о поведении «хвостов» распределения нет. Поэтому практические соображения допускают малые возмущения проверяемых гипотез, т. е. небольшие отклонения плотностей распределения реальных случайных процессов от теоретически предполагаемых в данной гипотезе. Однако Хубером показано [123], что классический оптимальный тест отношения максимального правдоподобия оказывается неустойчивым к сколь угодно малым вариациям гипотез. Задачу нахождения устойчивых вариантов теста отношения правдоподобия Хубер свел к отысканию минимаксных тестов для различения двух сложных гипотез $\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1, \mathcal{H}_0 \cap \mathcal{H}_1 = \emptyset$, которые получаются возмущением из простых гипотез H_0, H_1 . При ряде ограничений на $\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1$ минимаксный тест для различения \mathcal{H}_0 и \mathcal{H}_1 совпадает с классическим тестом для «наихудших» простых гипотез $S_0 \in \mathcal{H}_0, S_1 \in \mathcal{H}_1$ [124]. Однако в практических задачах реализация «наихудшей» пары

гипотез (S_0, S_1) часто оказывается довольно редкой. Поэтому, как отмечено в [3], применение минимаксного метода для построения устойчивого алгоритма может приводить к неоправданно большим значениям вероятностей ошибок.

Другой подход основан на использовании методов теории регуляризации А. Н. Тихонова. В результате устойчивые решающие правила строятся не для «наихудшей» пары простых гипотез, а для произвольной $Q_0 \in \mathcal{H}_0, Q_1 \in \mathcal{H}_1$ так, что решения задачи оказываются согласованными по точности (в определенной метрике) с возмущениями исходных данных. Рассмотрим одну из реализаций этой идеи [3]. (Разъяснение ряда математических понятий см. в приложениях к тому 1).

Пусть f, g — две измеримые функции, определенные на абстрактном вероятностном пространстве (Ω, \mathcal{F}, P) , со значениями в измеримом сепарабельном гильбертовом пространстве (H, \mathcal{B}) , где \mathcal{B} — σ -алгебра борелевых множеств. Функции f, g индуцируют на (H, \mathcal{B}) две вероятностные меры $\mu_f(A) \equiv P\{\omega: f(\omega) \in A\}$, $\mu_g(A) \equiv P\{\omega: g(\omega) \in A\}$, $A \in \mathcal{B}$. Пусть $h_0 \in H$ — фиксированный вектор. Тогда ставится задача: зная h_0, μ_f, μ_g , проверить гипотезы

$$H_0: \mu(\cdot) \equiv \mu_f(\cdot); \quad H_1: \mu(\cdot) \equiv \mu_g(\cdot). \quad (1.1)$$

Если выбран решающий вещественный функционал F на H , то решение задачи (1.1) состоит в принятии гипотезы H_0 при $h_0 \in C_0 \equiv \{x \in H: F(x) < \gamma\}$, или отклонении H_0 в пользу H_1 в случае, когда $h_0 \in C_1 \equiv \{x \in H: F(x) \geq \gamma\}$. Число γ находится заранее. Известные критерии оптимальности (типа Байеса, Неймана — Пирсона) требуют вычисления производной Радона — Никодима

$$F(x) \equiv \Lambda(x) = \frac{d\mu_g}{d\mu_f}(x), \quad x \in H, \quad (1.2)$$

если мера μ_g абсолютно непрерывна относительно μ_f . Однако явное определение (1.2) в достаточно общей ситуации затруднительно. Кроме того, производная Радона — Никодима может не существовать (например, если гипотезы задаются только моментами до некоторого конечного порядка). Поэтому воспользуемся критерием оптимальности вида

$$\sup \{G(F): F \in Y\},$$

$$G(F) = \frac{(M_g[F] - M_f[F])^2}{M_f[F - M_f[F]]^2}, \quad (1.3)$$

где Y — заранее заданный класс, которому может принадлежать критерий качества F ,

$$M_{f(g)}[F] \equiv \int_H F(x) d\mu_{f(g)}(x). \quad (1.4)$$

Одно из оправданий выбора критерия в виде (1.3) состоит в следующем. Пусть $Y = L_2(H, \mu_f)$ — гильбертово пространство (классов) функций, определенных на H и интегрируемых с квадратом по мере μ_f , причем известно, что $\Lambda(x) \in L_2(H, \mu_f)$. Тогда $G(F)$ представим так:

$$G(F) = \frac{(\Lambda, w)_f^2}{\|w\|_f^2}, \quad (1.5)$$

где $w = F - M_f[F]$; $\|\cdot\|_f^2 \equiv \int_H (\cdot) d\mu_f$. Из (1.5) на основании нера-

венства Буняковского — Шварца получаем $G(F) \leq \|\Lambda\|_f^2$. Поэтому $\sup \{G(F) : F \in L_2(H, \mu_f)\}$ достигается на элементе $F_0 = \alpha\Lambda + \beta$, $\alpha, \beta \in R_1$. Значит, решая вариационную задачу (1.3) одним из приближенных способов, находим различные аппроксимации производной Радона — Никодима $\Lambda(x) \in L_2(H, \mu_f)$.

На практике обычно меры μ_f и μ_g задаются своими моментными функциями до некоторого порядка. Рассмотрим именно такой случай. Для этого введем ряд вспомогательных конструкций [2].

Пусть $K(x_1, \dots, x_n)$ — вещественная функция n переменных $x_i \in H$, $i = 1, \dots, n$, со свойствами: 1) линейность по каждому аргументу в отдельности; 2) $K(x_1, \dots, x_n) = K(x_{i_1}, \dots, x_{i_n})$, где (i_1, \dots, i_n) — произвольная перестановка из n чисел. Тогда $K(x_1, \dots, x_n)$ называется n -линейной симметричной формой Гильберта — Шмидта, когда в H существует ортонормированный базис $\{e_i\}_{i=1}^\infty$ такой, что

$$\sum_{i_n=1}^\infty \dots \sum_{i_1=1}^\infty K^2(e_{i_1}, \dots, e_{i_n}) < \infty. \quad (1.6)$$

Конечная сумма в (1.6) не зависит от выбора базиса $\{e_i\}_{i=1}^\infty$. Обозначим $\mathfrak{N}_k = \mathfrak{N}_k(H)$ — гильбертово пространство всех k -линейных симметричных форм Гильберта — Шмидта с нормой, порожденной скалярным произведением

$$(K, L)_{\mathfrak{N}_k} = \sum_{i_k=1}^\infty \dots \sum_{i_1=1}^\infty K(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) L(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}), \quad K, L \in \mathfrak{N}_k, \quad (1.7)$$

где сумма не зависит от выбора базиса $\{e_i\}_{i=1}^\infty$; \mathfrak{N}_k — сепарабельно так же, как и H . На основании (1.6) любой элемент $K \in \mathfrak{N}_k$ допускает представление

$$K(x_1, \dots, x_k) = \sum_{i_k=1}^\infty \dots \sum_{i_1=1}^\infty K(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) \prod_{j=1}^k (x_j, e_{i_j})_H. \quad (1.8)$$

Функция $P_n(x)$, $x \in H$ называется полиномиальным оператором Гильберта — Шмидта степени n , если существует такая n -линейная симметричная форма Гильберта — Шмидта $K(x_1, \dots, x_n)$,

что $P_n(x) = K(x, \dots, x)$. Пусть $\mathcal{P}_n = \mathcal{P}_n(H)$ — банахово пространство всех полиномов вида

$$\pi_n(x) = \sum_{i=1}^n P_i(x), \quad x \in H, \quad (1.9)$$

где $P_i(x)$ полиномиальный оператор Гильберта — Шмидта степени i с нормой

$$\|\pi_n\|_{\mathcal{P}_n} = \sup_{x \in H} \frac{|\pi_n(x)|}{\left(\sum_{i=1}^n \|x\|_H^{2i}\right)^{1/2}}. \quad (1.10)$$

Обозначим $Z_n = \mathfrak{N}_1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{N}_n$ — прямая сумма гильбертовых пространств $\{\mathfrak{N}_k\}_{k=1}^n$ с нормой, порожденной скалярным произведением

$$(K_{[n]}, L_{[n]})_{Z_n} = \sum_{k=1}^n (K_k, L_k)_{\mathfrak{N}_k}, \quad (1.11)$$

$$K_k, L_k \in \mathfrak{N}_k, \quad K_{[n]} = \sum_{k=1}^n K_k, \quad L_{[n]} = \sum_{k=1}^n L_k,$$

где Z_n — сепарабельно в силу сепарабельности $\{\mathfrak{N}_k\}_{k=1}^n$.

Лемма 1.1. *Пространства \mathcal{P}_n и Z_n изометрически изоморфны.*

Доказательство. Обозначим

$$Q_{x_1, \dots, x_k}(y_1, \dots, y_k) = \prod_{i=1}^k (x_i, y_i)_H, \quad y_i \in H,$$

где x_1, \dots, x_k — фиксированные векторы из H . Ясно, что

$$\sum_{i_k=1}^{\infty} \dots \sum_{i_1=1}^{\infty} Q_{x_1, \dots, x_k}(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) = \prod_{j=1}^k \|x_j\|_H^2 < +\infty.$$

Поэтому $Q_{x_1, \dots, x_k} \in \mathfrak{N}_k$ и (1.8) принимает вид

$$K(x_1, \dots, x_k) = (K, Q_{x_1, \dots, x_k})_{\mathfrak{N}_k}. \quad (1.12)$$

Отсюда и из (1.9) получаем

$$\pi_n(x) = \sum_{i=1}^n (K_i, Q_x^{(i)})_{\mathfrak{N}_i}, \quad (1.13)$$

где $Q_x^{(i)} \equiv Q_{x_1, \dots, x_i} |_{x_1=\dots=x_i=x}$, $P_i(x) = K_i(x, \dots, x)$.

Множество $\{Q_x^{(i)} = Q_{x_1, \dots, x_i}(y_1, \dots, y_i), y_1, \dots, y_i \in H\}_{x \in H}$ всюду плотно в гильбертовом пространстве \mathfrak{N}_i , $i = 1, \dots, n$. В самом деле, пусть для некоторой формы $K \in \mathfrak{N}_i$ справедливо

$$0 = (K, Q_x^{(i)})_{\mathfrak{N}_i} = \sum_{i_1=1}^{\infty} \dots \sum_{i_i=1}^{\infty} K(e_{i_1}, \dots, e_{i_i}) \prod_{s=1}^i (x, e_{i_s})_H \quad (1.14)$$

для любого $x \in H$. Положим $x = e_{j_1} + \dots + e_{j_l}$ для некоторого набора индексов (j_1, \dots, j_l) . Тогда из (1.14) получаем $K(e_{j_1}, \dots, e_{j_l}) = 0$, т. е. $K = 0$. Обозначим $Q_x^{[n]} = \sum_{i=1}^n Q_x^{(i)} \in Z_n$, $K_{[n]} = \sum_{i=1}^n K_i \in Z_n$. Сравнивая (1.11) с (1.13), имеем

$$\pi_n(x) = (K_{[n]}, Q_x^{[n]})_{Z_n}. \quad (1.15)$$

Последняя формула определяет линейное отображение $U : Z_n$ на \mathcal{P}_n :

$$U(K_{[n]}) = \pi_n(x).$$

Если $K_{[n]} \neq L_{[n]}$ в Z_n , то в силу плотности $\{Q_x^{[n]}\}_{x \in H}$ в Z_n из (1.15) следует, что $U(K_{[n]}) \neq U(L_{[n]})$. Значит, оператор U является алгебраическим изоморфизмом между Z_n и \mathcal{P}_n . Кроме того,

$$\|Q_x^{(i)}\|_{\mathfrak{H}_i}^2 = \sum_{j_i=1}^{\infty} \dots \sum_{j_1=1}^{\infty} \prod_{s=1}^i (x, e_{j_s})_H^2 = \|x\|_H^{2i},$$

откуда

$$\|Q_x^{[n]}\|_{Z_n}^2 = \sum_{i=1}^n \|Q_x^{(i)}\|_{\mathfrak{H}_i}^2 = \sum_{i=1}^n \|x\|_H^{2i}. \quad (1.16)$$

Поэтому из (1.10), (1.15), (1.16) и плотности $\{Q_x^{[n]}\}_{x \in H}$ в Z_n получаем

$$\|\pi_n\|_{\mathcal{P}_n} = \sup_{x \in H} \frac{|(K_{[n]}, Q_x^{[n]})_{Z_n}|}{\|Q_x^{[n]}\|_{Z_n}} = \sup_{L_{[n]} \in Z_n} \frac{|(K_{[n]}, L_{[n]})_{Z_n}|}{\|L_{[n]}\|_{Z_n}} = \|K_{[n]}\|_{Z_n}.$$

Значит, оператор $U : Z_n \rightarrow \mathcal{P}_n$ изометричен. Лемма 1.1 доказана.

Пусть \mathcal{B}_n — σ -алгебра борелевых множеств в Z_n , μ_n — мера на (Z_n, \mathcal{B}_n) , определяемая соотношением $\mu_n(A) = \mu\{x \in H : Q_x^{[n]} \in A\}$, $A \in \mathcal{B}_n$. Здесь μ — некоторая вероятностная борелева мера на (H, \mathcal{B}) . Из леммы 1.1 следует

Лемма 1.2. Пусть $f, \{f_k\}_{k=1}^{\infty} \subset Z_n$, $\pi = U(f)$, $\pi_k = U(f_k)$. Тогда $\lim_{k \rightarrow \infty} (f_k, z)_{Z_n} = (f, z)_{Z_n}$ для μ_n -почти всех $z \in Z_n$ в том и только в том случае, когда $\lim_{k \rightarrow \infty} \pi_k(x) = \pi(x)$ для μ -почти всех $x \in H$.

Для меры μ на (H, \mathcal{B}) моментная функция k -го порядка определяется соотношением

$$m_k = m_k(x_1, \dots, x_k) = \int_H \prod_{i=1}^k (x_i, x)_H d\mu(x), \quad (1.17)$$

где x_1, \dots, x_k — фиксированные векторы из H . Из (1.17) следует, что $m_k \in \mathfrak{N}_k(H)$.

Предположим теперь, что класс $Y = \mathcal{P}_n$. Тогда в задаче (1.1) вместо мер μ_f и μ_g достаточно знать их моментные функции соответственно до $2n$ -го и n -го порядков. Поэтому (1.1) переформулируем следующим образом. Пусть известны моментные функции

$$\{m_k^f \in \mathcal{N}_k\}_{k=1}^{2n}, \quad \{m_k^g \in \mathcal{N}_k\}_{k=1}^n,$$

причем $m_k^f \neq m_k^g$, $k = 1, \dots, n$. Если наблюдается вектор $h_0 \in H$, то нужно проверить простые гипотезы:

$$H_0: \{m_k \equiv m_k^f\}_{k=1}^n, \quad H_1: \{m_k \equiv m_k^g\}_{k=1}^n. \quad (1.18)$$

Как было отмечено, априорная неопределенность приводит к вариациям исходных данных. Поэтому вместо задачи (1.18) естественно рассматривать возмущенную задачу. Пусть моментные функции удовлетворяют ограничениям

$$\{\tilde{m}_k^f \in S_k^f = \{m_k^f \in \mathcal{N}_k: \|\tilde{m}_k^f - m_k^f\|_{\mathcal{N}_k} \leq \delta_k^f\}\}_{k=1}^{2n},$$

$$\{\tilde{m}_k^g \in S_k^g = \{m_k^g \in \mathcal{N}_k: \|\tilde{m}_k^g - m_k^g\|_{\mathcal{N}_k} \leq \delta_k^g\}\}_{k=1}^n,$$

причем $S_k^f \cap S_k^g = \emptyset$, $k = 1, \dots, n$, (числа $\{\delta_1^f, \dots, \delta_{2n}^f; \delta_1^g, \dots, \delta_n^g\}$ заранее заданы). По наблюдаемому вектору $h_0 \in H$ нужно различить сложные гипотезы:

$$\mathcal{H}_0: \{m_k \in S_k^f\}_{k=1}^n, \quad \mathcal{H}_1: \{m_k \in S_k^g\}_{k=1}^n. \quad (1.19)$$

Оказывается, что возмущенная задача (1.19) является некорректно поставленной в смысле А. Н. Тихонова. Убедимся в этом на задаче обнаружения неточно заданного неслучайного сигнала g конечной энергии на фоне помехи f с нулевым средним и неточно заданной корреляционной функцией [3]. Здесь в (1.19) $n = 1$, $H = L_2[0, t]$, $0 < t \leq T_1 < +\infty$. Заданы некоторое среднее $m_0 \in L_2[0, t]$ меры μ_g (причем известно, что $m_0 \in S_1^f = \{m_0 \in L_2[0, t]: \|m_0 - \bar{m}\| \leq \delta_1^f\}$) и корреляционный оператор $A_g \in S_2^f = \{A_g \in \mathcal{L}(H): \|A_g - \bar{A}\|_{\mathcal{L}(H)} \leq \delta_2^f\}$ меры μ_f . Погрешности δ_1^f , δ_2^f известны. Пусть $S_1^f = \bar{m}_f = 0$, $S_1^f \cap S_1^g = \emptyset$. Тогда (1.19) сводится к задаче различения сложной гипотезы $\mathcal{H}_1: \{m \in S_1^f\}$ и простой альтернативы $H_0: \{m = 0\}$ на основании наблюдаемого вектора $h_0 \in L_2[0, t]$. Критерий качества в этом случае имеет вид $F(x) = \pi_1(x) \in L_2^*[0, t]$. Поэтому $\pi_1(x) = (z, x)_{L_2}$ для некоторого фиксированного $z \in L_2[0, t]$. Значит, функционал $G(F)$ из (1.3) представим в виде

$$G_\xi(\pi_1) = G_\xi(z) = \frac{(m_0, z)_{L_2}^2}{(A_g z, z)_{L_2}}, \quad z \in L_2[0, t], \quad \xi = (\delta, \varepsilon) \quad (1.20)$$

на основании свойств среднего и корреляционного операторов борелевой меры (см. приложение II к тому 1). Заметим, что

корреляционный оператор $A_\varepsilon : L_2 \rightarrow L_2$ является ядерным в силу счетной аддитивности меры μ_f . Предположим, что $m_\delta \in D(A_\varepsilon^{1/2})$, $0 \leq \varepsilon \leq \delta_2^f$, $0 < \delta \leq \delta_1^f$. Тогда

$$G_\varepsilon(z) = \frac{(A_\varepsilon^{-1/2} m_\delta, A_\varepsilon^{1/2} z)_{L_2}^2}{\|A_\varepsilon^{1/2} z\|_{L_2}^2} \leq \|A_\varepsilon^{-1/2} m_\delta\|_{L_2}^2.$$

Значит, $\sup \{G_\varepsilon(z) : z \in L_2\}$ достигается на множестве

$$D_{\tilde{G}}^\varepsilon = \{z_\varepsilon \in L_2[0, t] : A_\varepsilon z_\varepsilon = \lambda m_\delta, \lambda \in R_1\}.$$

Итак, задача сведена к решению операторного уравнения

$$A_\varepsilon z_\varepsilon = \lambda m_\delta \quad (1.21)$$

с ядерным (а следовательно, компактным) оператором $A_\varepsilon : L_2 \rightarrow L_2$. Но это классическая некорректная задача: небольшие вариации A_ε и m_δ могут сколь угодно сильно изменить решение (1.21). Кроме того, (1.21) может вообще не иметь в $L_2[0, t]$ решений. Поэтому задача (1.19) относится к классу сингулярных неустойчивых задач.

Рассмотрим применение метода регуляризации А. Н. Тихонова к приближенному решению задачи (1.19). Обозначим $R_\alpha : Z_n \times \times Z_{2n} \rightarrow \mathcal{P}_n$ — параметрический алгоритм вычисления решающего функционала задачи (1.19), $\alpha > 0$ — параметр регуляризации. Назовем оператор R_α тихоновским регуляризатором задачи (1.19) на паре $(Z_n \times Z_{2n}, \mathcal{P}_n)$, если: 1) существует вектор $\xi \in R_{3n}$ с неотрицательными координатами такой, что оператор R_α определен на всех шарах $\{S_k^\xi(\xi_k)\}_{k=1}^n, \{S_k^f(\xi_{n+k})\}_{k=1}^{2n}$; 2) существует функция $\alpha = \alpha(\tilde{m}_1^g, \dots, \tilde{m}_n^g, \tilde{m}_1^f, \dots, \tilde{m}_{2n}^f, \xi) > 0$ такая, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется вектор $\xi(\varepsilon) \in R_{3n}$ такой, что из $\{\tilde{m}_k^g \in S_k^g\}_{k=1}^n, \{\tilde{m}_k^f \in S_k^f\}_{k=1}^{2n}$ следует

$$\|R_{\alpha(\xi)}(\tilde{m}_1^g, \dots, \tilde{m}_n^g, \tilde{m}_1^f, \dots, \tilde{m}_{2n}^f) - \pi_n\|_{\mathcal{P}_n} < \varepsilon, \quad (1.22)$$

где $\pi_n(x)$ — решающий оптимальный полином при отсутствии априорной неопределенности.

Таким образом, использование параметрического алгоритма обеспечивает отсутствие вырожденности у (1.19) (условие 1)), и если параметр регуляризации $\alpha = \alpha(\xi)$ выбирается согласованно с ошибками исходных данных ξ так, чтобы $\alpha(\xi) \rightarrow 0$ при $\|\xi\| \rightarrow 0$, то $\|\pi_{n,\alpha(\xi)} - \pi_n\|_{\mathcal{P}_n} \rightarrow 0$, $\|\xi\| \rightarrow 0$ (условие 2)), где обозначено $\pi_{n,\alpha(\xi)}$ — первое слагаемое в левой части (1.22). Это обычные требования в методе А. Н. Тихонова.

Запишем функционал (1.1) для задачи (1.18) следующим образом:

$$G(\pi_n) = \frac{(M_g[\pi_n] - M_f[\pi_n])^2}{M_f[\pi_n] - M_f[\pi_n]}^2, \quad \pi_n \in \mathcal{P}_n, \quad (1.23)$$

причем $\sup G(\pi_n)$ ищем на множестве

$$X_G = \{\pi_n \in \mathcal{P}_n : M_g[\pi_n] - M_f[\pi_n] = \beta\}, \quad (1.24)$$

где $\beta > 0$ и n — заданные числа. Пусть $\sup G(\pi_n)$ достигается на непустом множестве $W \subseteq X_G$. Отметим, что W — выпуклое замкнутое в \mathcal{P}_n множество. В зависимости от поставленных технических целей необходимо из W выбирать тот либо иной полином $\pi_n(x)$. Рассмотрим задачу нахождения $\bar{\pi}_n \in W$ с наименьшей нормой, т. е. нормального полинома. Для того, чтобы избежать неустойчивости, возникающей из-за ошибок округления при счете на ЭВМ, вместо (1.23), (1.24) введем вариационную задачу:

$$\sup_{\eta > 0} \inf_{\pi_n \in \mathcal{P}_n} E(\alpha, \xi, \eta, \pi_n), \quad (1.25)$$

$$E = E(\alpha, \xi, \eta, \pi_n) = M_f^\delta[\pi_n - M_f^\delta[\pi_n]]^2 - 2\eta \{M_g^\varepsilon[\pi_n] - M_f^\delta[\pi_n] - \beta\} + \alpha \|\pi_n\|_{\mathcal{P}_n}^2, \quad \eta > 0. \quad (1.26)$$

Здесь $\xi = (\delta, \varepsilon)$ — параметр возмущения задачи (1.19); M_f^δ , M_g^ε — интегрирование по возмущенным мерам μ_f^δ , μ_g^ε , которые задаются приближенно своими моментными функциями. На основании лемм 1.1 и 1.2 вместо (1.23), (1.24) рассмотрим эквивалентную вариационную задачу в Z_n

$$\sup_{z \in \tilde{X}_{\tilde{G}}} \tilde{G}(z), \quad \tilde{G}(z) = \frac{(v, z)_{Z_n}^2}{(Az, z)_{Z_n}}, \quad (1.27)$$

$$\tilde{X}_{\tilde{G}} = \{z \in Z_n : (v, z)_{Z_n} = \beta > 0\}, \quad (1.28)$$

а вместо (1.25), (1.26) — задачу

$$\sup_{\eta > 0} \inf_{z \in Z_n} \tilde{E}(\alpha, \xi, \eta, z), \quad (1.29)$$

$$\tilde{E}(\alpha, \xi, \eta, z) = (A_\varepsilon z, z)_{Z_n} - 2\eta [(v_\delta, z)_{Z_n} - \beta] + \alpha \|z\|_{Z_n}^2, \quad \alpha > 0, \quad z \in Z_n, \quad (1.30)$$

где $\|A - A_\varepsilon\|_{\Gamma-\text{Ш}} \leq \varepsilon < \varepsilon_0$; $\|v - v_\delta\|_{Z_n} \leq \delta < \delta_0$; $\|\cdot\|_{\Gamma-\text{Ш}}$ — норма Гильберта — Шмидта. Справедлива следующая теорема

Теорема 1.1. Пусть нормальный полином $\bar{\pi}_n(x) \in \mathcal{P}_n$ есть решение задачи (1.23), (1.24) для любого $n = 1, \dots, N$. Тогда решение задачи (1.25), (1.26) при $\varepsilon = \delta = 0$ $\pi_{n,\alpha}(x)$ существует, единственно и

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0+0} \|\pi_{n,\alpha} - \bar{\pi}_n\|_{\mathcal{P}_n} = 0 \quad (1.31)$$

для любого $n = 1, \dots, N$.

Доказательство. Достаточно рассмотреть задачи (1.27) — (1.30). Пусть \bar{z} — нормальное в Z_n решение (1.27), (1.28). Положим в (1.30) $\varepsilon = \delta = 0$, $A_\alpha = A + \alpha I$, где I — тождественный в Z_n оператор. Поскольку A — корреляционный оператор, то он самосопряжен и неотрицательно определен. Поэтому оператор A_α обладает ограниченным обратным оператором A_α^{-1} . Функционал (1.30) перепишем в виде

$$\tilde{E}(\alpha, 0, \eta, z) = \|A_\alpha^{1/2}z - \eta A_\alpha^{-1/2}v\|_{Z_n}^2 - \eta^2 \|A_\alpha^{-1/2}v\|_{Z_n}^2 + 2\beta\eta.$$

Отсюда следует, что $\inf \tilde{E}(\alpha, 0, \eta, z)$ на Z_n достигается на единственном элементе $z_{\alpha,\eta} = \eta A_\alpha^{-1}v$ при фиксированных $\alpha > 0$, $\eta > 0$, $\beta > 0$. В результате

$$\tilde{E}(\alpha, 0, \eta, z_{\alpha,\eta}) = -\eta(\eta \|A_\alpha^{-1/2}v\|_{Z_n}^2 - 2\beta).$$

Поэтому

$$\sup_{\eta > 0} \tilde{E}(\alpha, 0, \eta, z_{\alpha,\eta}) = \frac{\beta}{\|A_\alpha^{-1/2}v\|_{Z_n}^2}$$

и достигается на единственном элементе

$$z_{\alpha,\eta(\alpha,\beta)} = \frac{\beta}{\|A_\alpha^{-1/2}v\|_{Z_n}^2} A_\alpha^{-1}v \in Z_n, \quad \eta(\alpha, \beta) = \frac{\beta}{\|A_\alpha^{-1/2}v\|_{Z_n}^2}. \quad (1.32)$$

Покажем, что $\|z_{\alpha,\eta(\alpha,\beta)} - \bar{z}\|_{Z_n} \rightarrow 0$ при $\alpha \rightarrow 0$. Обозначим $q(z, \eta) = (Az, z)_{Z_n} - 2\eta[(v, z)_{Z_n} - \beta]$. Тогда из неравенства $\tilde{E}(\alpha, 0, \eta, z_{\alpha,\eta}) \leq \leq \tilde{E}(\alpha, 0, \eta, \bar{z})$, справедливого для любого $\eta > 0$, следует

$$q(z_{\alpha,\eta}, \eta) - q(\bar{z}, \eta) + \alpha \|z_{\alpha,\eta}\|_{Z_n}^2 \leq \alpha \|\bar{z}\|_{Z_n}^2. \quad (1.33)$$

Отсюда

$$\|z_{\alpha,\eta}\|_{Z_n} \leq \|\bar{z}\|_{Z_n}, \quad \forall \alpha > 0, \quad \forall \eta > 0. \quad (1.34)$$

Из (1.34) на основании слабой компактности ограниченного шара в гильбертовом пространстве находим, что существует подпоследовательность последовательности $\{z_{\alpha,\eta}\}_{\alpha>0}$, слабо сходящаяся к некоторому $z_0 \in Z_n$. Обозначим эту последовательность также $\{z_{\alpha,\eta}\}_{\alpha>0}$. Убедимся, что $z_0 = \bar{z}$. Из (1.33) получаем

$$q(\bar{z}, \eta) \leq q(z_{\alpha,\eta}, \eta) \leq q(\bar{z}, \eta) + \alpha \|\bar{z}\|_{Z_n}^2, \quad \beta > 0,$$

откуда

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0+0} q(z_{\alpha,\eta}, \eta) = q(\bar{z}, \eta). \quad (1.35)$$

Поскольку оператор $A: Z_n \rightarrow Z_n$ ядерный, а значит, и компактный, то из слабой сходимости $z_{\alpha,\eta}$ к z_0 следует $\|Az_{\alpha,\eta} - Az_0\|_{Z_n} \rightarrow 0$,

$\alpha \rightarrow 0 + 0$. Причем

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0+0} |q(z_{\alpha, \eta}, \eta) - q(z_0, \eta)| \leq \lim_{\alpha \rightarrow 0+0} \{ \|\bar{z}\|_{z_n} \|Az_{\alpha, \eta} - Az_0\|_{z_n} + \\ + |(Az_0, z_{\alpha, \eta} - z_0)_{z_n}| + 2\eta |(v, z_{\alpha, \eta} - z_0)_{z_n}| \} = 0.$$

Отсюда и из (1.35) находим $q(z_0, \eta) = q(\bar{z}, \eta) = \inf \{q(z, \eta) : (v, z)_{z_n} = \beta\}$. Значит, z_0 является решением задачи (1.27), (1.28). Кроме того,

$$\|z_0\|_{z_n} \leq \lim_{\alpha \rightarrow 0+0} \|z_{\alpha, \eta}\|_{z_n}$$

в силу теоремы Банаха — Штейнгауза. Отсюда имеем $\|z_0\|_{z_n} \leq \|\bar{z}\|_{z_n}$. Но \bar{z} — единственное решение (1.27) и (1.28) с наименьшей нормой, т. е. $z_0 \equiv \bar{z}$. Следовательно, любая слабо сходящаяся подпоследовательность из $\{z_{\alpha, \eta}\}_{\alpha > 0}$ имеет один и тот же предел \bar{z} . Поэтому и вся последовательность $\{z_{\alpha, \eta}\}_{\alpha > 0}$ слабо сходится к \bar{z} . Из (1.34) имеем

$$\|z_{\alpha, \eta} - \bar{z}\|_{z_n}^2 \leq 2(\|\bar{z}\|_{z_n}^2 - (z_{\alpha, \eta}, \bar{z})_{z_n}) \rightarrow 0, \quad \alpha \rightarrow 0,$$

для любого фиксированного $\eta > 0$. В то же время из (1.32) получаем $\lim_{\alpha \rightarrow 0+0} \eta(\alpha, \beta) = 1$. Таким образом,

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0+0} \|z_{\alpha, \eta(\alpha, \beta)} - \bar{z}\|_{z_n} = 0.$$

Отсюда следует (1.31) в силу леммы 1.1. Теорема 1.1 доказана.

Данный результат позволяет находить α -оптимальные полиномы для решения задачи (1.18), устойчивые к ошибкам округления на ЭВМ. Как отмечено в [3], результаты вычислительных экспериментов показали, что наиболее благоприятные значения $\alpha \in [10^{-10}, 10^{-7}]$.

Теорема 1.2. *Существует единственная полиномиальная статистика $\pi_{n, \alpha}(x)$ конечной степени на H , порожденная решением задачи (1.23), (1.24), такая, что*

$$M_{f(g)} [\pi_{n, \alpha}(x) - \bar{\pi}_n(x)]^2 \rightarrow 0, \quad \alpha \rightarrow 0,$$

для любого $n = 1, \dots, N$.

Доказательство следует из (1.31), теоремы Лебега о мажорируемой сходимости и следствия к неравенству Чебышева.

Для устойчивости решения задачи (1.19) необходимо при заданном уровне погрешностей $\xi = (\epsilon, \delta)$ выбирать параметр регуляризации $\alpha = \alpha(\xi)$ при решении вариационной задачи (1.25), (1.26) так, чтобы $\lim_{\|\xi\| \rightarrow 0} \alpha(\xi) = 0$, $\lim_{\|\xi\| \rightarrow 0} \|\pi_{n, \alpha(\xi)} - \bar{\pi}_n\|_{\mathcal{S}_n} = 0$. Структуру регуляризованного алгоритма определяет

Теорема 1.3. Пусть нормальный полином $\bar{\pi}_n(x) \in \mathcal{P}_n$, $n = 1, \dots, N$, есть решение задачи (1.23), (1.24). Тогда решение задачи (1.25), (1.26) в случае неопределенности $\{S_k^g\}_{k=1}^n$, $\{S_k^f\}_{k=1}^{2n}$ с известным вектором априорных погрешностей $\xi = (\delta_1^g, \dots, \delta_n^g, \delta_1^f, \dots, \delta_{2n}^f)^T \in R_{3n}$ существует и единственно. Если параметр α согласован с ξ соотношением

$$\lim_{\|\xi\| \rightarrow 0} \max \left\{ \frac{2}{\alpha} \left(\sum_{j,k=1}^n (\delta_{j+k}^f + \delta_k^f \delta_j^f + \|\tilde{m}_k^f\|_{\eta_k} \delta_j^f + \|\tilde{m}_j^f\|_{\eta_j} \delta_k^f)^2 \right)^{1/2}; \right. \\ \left. \frac{4\eta}{\alpha} \left(\sum_{k=1}^n ((\delta_k^g)^2 + (\delta_k^f)^2) \right)^{1/2} \right\} = 0, \\ \lim_{\|\xi\| \rightarrow 0} \alpha(\xi) = 0,$$

то

$$\lim_{\|\xi\| \rightarrow 0} \|\pi_{n,\alpha(\xi),\eta(\alpha)} - \bar{\pi}_n\| = 0.$$

Доказательство основывается на выводе теоремы 1.1. Результат теоремы 1.3 позволяет строить тихоновский регуляризатор R_α для (1.25), (1.26). Для этого случая имеет место также аналог теоремы 1.2.

§ 2. О восстановлении априорных характеристик в задачах оценивания

В гл. II тома 1 [7] были рассмотрены некоторые методы устойчивого оценивания (фильтрации). Однако возникают две трудности при попытках практического использования как предложенных алгоритмов, так и классических методов фильтрации — выбор математической модели оцениваемого динамического процесса и вероятностных параметров шумов и измерений. К сожалению, полное статистическое описание реальных процессов, как правило, невозможно. Кроме того, математическая модель оцениваемого процесса хотя и должна быть достаточно полной, тем не менее с вычислительной точки зрения желательна ее относительная простота.

Процедура выбора параметров, характеризующих состояние динамической системы, с целью включения их в математическую модель не может быть полностью формализована. Широко распространены на практике попытки максимально возможного уменьшения размерности вектора состояния динамической системы, поскольку известно, что объем вычислительных операций при использовании стандартного фильтра типа Калмана — Бьюси пропорционален третьей степени размерности системы [96]. При этом исследователь должен четко осознавать, что включение в вектор состояния системы тех или иных параметров может приводить к сущест-

венному возрастанию ошибок округления при вычислениях за счет значительной априорной неопределенности в значениях «неудачно» выбранных параметров. А это приводит к неустойчивости процедуры оценивания (примеры см. в [61; 96; 106, гл. III]).

Какое влияние оказывают упомянутые ошибки моделирования и статистического описания на чувствительность фильтра типа Калмана — Бьюси? Пусть точная модель системы (может быть, очень высокого порядка) представима в виде

$$\frac{dx}{d\tau} = F(\tau) x(\tau) + G(\tau) u(\tau), \quad (2.1)$$

$$x(0) = x_0.$$

Здесь $x(\tau) \in R_n$, $F(\tau)$ — квадратная матрица порядка n , все элементы которой принадлежат $L_2[0, t]$; $G(\tau)$ — матрица порядка $(n \times k)$ с гладкими элементами; $u(\tau)$ — k -мерный белый гауссов шум с нулевым средним и корреляцией

$$M[u(\tau) u^T(\sigma)] = Q(\tau) \delta(\tau - \sigma), \quad (2.2)$$

где $\delta(\tau - \sigma)$ — δ -функция Дирака; x_0 — n -мерная гауссова случайная величина; $M[x_0] = 0$; $M[x_0 x_0^T] = P_0$. (Подробное обсуждение того, в каком смысле понимается задача Коши (2.1), белый гауссов шум и выражение (2.2), см. в приложениях к тому 1 [7]). Пусть измерения удовлетворяют модели вида

$$r(\tau) = C(\tau) x(\tau) + v(\tau), \quad (2.3)$$

где $C(\tau)$ — так называемая матрица наблюдений порядка $(m \times n)$; $v(\tau)$ — помеха наблюдений типа белого гауссова шума (с нулевым средним) и корреляцией

$$M[v(\tau) v^T(\sigma)] = R(\tau) \delta(\tau - \sigma). \quad (2.4)$$

Для упрощения выкладок предположим, что x_0 , $u(\tau)$ и $v(\tau)$ взаимно некоррелированы. Рассмотрим задачу линейной фильтрации для (2.1) — (2.4).

Если $R(\tau)$ — невырожденная матрица, то фильтр для получения оптимальной линейной оценки $\hat{x}(t)$ описывается уравнениями

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = F(t) \hat{x}(t) + P(t) C^T(t) R^{-1}(t) [r(t) - C(t) \hat{x}(t)], \quad (2.5)$$

$$\hat{x}(0) = 0,$$

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dt} = & F(t) P(t) + P(t) F^T(t) + G(t) Q(t) G^T(t) - \\ & - P(t) C^T(t) R^{-1}(t) C(t) P(t), \end{aligned} \quad (2.6)$$

(см., например, [61; 96; 106 и др.]). Здесь

$$P(t) = M[(x(t) - \hat{x}(t))(x(t) - \hat{x}(t))^T] \quad (2.7)$$

это матрица дисперсий ошибок. Если модель (2.1) — (2.4) совпадает с реальной динамической системой, то матрица (2.7) показывает минимальный риск (в среднеквадратическом смысле). Однако, если априорные данные заданы с погрешностями, то решение матричного уравнения Риккати (2.6) уже не является истинной матрицей дисперсий ошибок оценивания вида (2.7). Тем не менее для матрицы (2.7) удается получить дифференциальное уравнение, если возможно указать ошибки в задании исходных данных задачи фильтрации.

Предположим, что наряду с точным описанием (2.1) — (2.4) имеется приближенная математическая модель

$$\frac{dx_1}{d\tau} = F_1(\tau) x_1(\tau) + G_1(\tau) u_1(\tau), \quad (2.8)$$

$$x_1(0) = x_1^0,$$

$$r(\tau) = C_1(\tau) x_1(\tau) + v_1(\tau), \quad (2.9)$$

где $x_1(\tau)$ — n_1 -мерный вектор ($n_1 \leq n$), $F_1(\tau)$, $G_1(\tau)$, $C_1(\tau)$ матрицы соответствующих размерностей; $u_1(\tau)$, и $v_1(\tau)$ — белые гауссовы шумы (с нулевыми средними и с матрицами интенсивностей $Q_1(\tau)$ и $R_1(\tau)$); x_1^0 — n_1 -мерная гауссова случайная величина с нулевым средним и дисперсией P_1^0 . Причем x_0 , u_1 , v_1 взаимно некоррелированы, $R_1 > 0$. Обозначим фактическую ошибку оценивания

$$e(t) = x(t) - \hat{x}_1(t), \quad (2.10)$$

где матрица $A = [I_{n_1}, 0]^T$; 0 — нулевая матрица порядка $(n_1 \times n - n_1)$; I_{n_1} — единичная n_1 -мерная матрица. Заметим, что линейная оценка $\hat{x}_1(t)$ удовлетворяет уравнениям фильтра Калмана — Бьюси типа (2.5), (2.6), где все величины F , P , C , R , Q приобретают индекс 1. Матрица дисперсий ошибки $e(t)$ как раз и является мерой качества оценки $\hat{x}_1(t)$. Пусть $y^T(t) = [e^T(t), \hat{x}_1^T(t)]$. Для вектора $y(t)$ на основании (2.8), (2.1) и (2.10) получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{d\tau} = \begin{bmatrix} Fx + Gu - A[F_1\hat{x}_1 + P_1C_1^TR_1^{-1}(r - C_1\hat{x}_1)] \\ F_1\hat{x}_1 + P_1C_1^TR_1^{-1}(r - C_1\hat{x}_1) \end{bmatrix}, \quad (2.11)$$

$$y(0) = [x_0, 0]^T \equiv y_0.$$

Учитывая (2.3), (2.10), записываем (2.11) в виде

$$\frac{dy}{dt} = \begin{bmatrix} (F - AK_1C)e + (FA - AF_1 + AK_1C_1 - AK_1CA)\hat{x}_1 + \\ + Gu - AK_1v \\ K_1Ce + (F_1 - K_1C_1 + K_1CA)\hat{x}_1 + K_1v \end{bmatrix}, \quad (2.12)$$

$$y(0) = y_0$$

где $K_1 = K_1(t) \equiv P_1(t) C_1^T(t) R_1^{-1}(t)$. Вводя обозначения $\Delta F \equiv FA - AF_1$, $\Delta C \equiv CA - C_1$, уравнение (2.12) приводим к виду

$$\frac{dy}{dt} = \begin{bmatrix} (F - AK_1C) & (\Delta F - AK_1\Delta C) \\ K_1C & (F_1 + K_1\Delta C) \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} Gu - AK_1v \\ K_1v \end{bmatrix}, \quad y(0) = y_0. \quad (2.13)$$

Пусть $P_e(t) = M[e(t)e^T(t)]$, $P_{\hat{x}_1}(t) = M[\hat{x}_1(t)\hat{x}_1^T(t)]$, $P_{ex_1}(t) = M[e(t)\hat{x}_1^T(t)]$. Тогда на основании (2.13) получаем

$$\begin{aligned} \frac{dP_e}{dt} = & (F - AK_1C)P_e + P_e(F - AK_1C)^T + (\Delta F - AK_1\Delta C)P_{ex_1}^T + \\ & + P_{ex_1}(\Delta F - AK_1\Delta C)^T + GQG^T + AK_1RK_1^TA^T, \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$P_e(0) = M[(x_0 - A\hat{x}_1^{(0)})(x_0 - A\hat{x}_1^{(0)})^T] = P_0,$$

$$\begin{aligned} \frac{dP_{ex_1}}{dt} = & (F - AK_1C)P_{ex_1} + P_{ex_1}(F_1 + K_1\Delta C)^T + (\Delta F - AK_1\Delta C)P_{\hat{x}_1} + \\ & + P_e(K_1C)^T - AK_1RK_1^T, \end{aligned} \quad (2.15)$$

$$P_{ex_1}(0) = M[(x_0 - A\hat{x}_1^{(0)})\hat{x}_1^{(0)T}] = 0,$$

$$\frac{dP_{\hat{x}_1}}{dt} = (F_1 + K_1\Delta C)P_{\hat{x}_1} + P_{\hat{x}_1}(F_1 + K_1\Delta C)^T + K_1CP_{ex_1}^T + P_{ex_1}^T(K_1C)^T, \quad (2.16)$$

$$P_{\hat{x}_1}(0) = 0.$$

Итак, уравнения (2.14) — (2.16) позволяют учесть влияние ошибок моделирования и измерения, погрешностей в задании априорных статистических данных, понижение размерности вектора состояния. Соотношения, аналогичные (2.14) — (2.16), получаются и для дискретных наблюдений и уравнения состояния.

Анализ этих уравнений показывает, что если есть ненулевые погрешности в задании исходных данных (например, $\Delta F \neq 0$), то существуют такие значения $F(\tau)$ и $F_1(\tau)$, что и при $\|P_{x_1}(t)\| \rightarrow 0$, $t \rightarrow \infty$ $\|P_e(t)\| \rightarrow \infty$, $t \rightarrow \infty$. Этот факт указывает на свойство так называемой расходимости фильтра Калмана — Бьюси даже в классической ситуации.

Расходимость означает, что действительная ошибка может безгранично увеличиваться с увеличением промежутка наблюдения, даже если теоретическая ошибка задачи линейной фильтрации стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$. Из вида уравнений (2.14) — (2.16) следует, что расходимость вызывается ошибками в задании математических моделей исследуемого процесса и закона наблюдения, неточностями при статистическом описании системы, ошибками

округления. Рассмотрим простой пример, в котором расходимость алгоритма фильтрации возникает из-за неточностей при задании модели полезного сигнала.

Пусть одномерный случайный процесс $x(\tau)$ удовлетворяет точной математической модели

$$\frac{dx}{d\tau} = x(\tau), \quad x(0) = x_0, \quad (2.17)$$

где гауссова случайная величина x_0 имеет нулевое среднее и дисперсию $P_0 = 1$. Наблюдения подчиняются закону

$$r(\tau) = x(\tau) + w(\tau), \quad (2.18)$$

где $w(\tau)$ — белый гауссов шум с нулевым средним и единичной интенсивностью, некоррелированный с x_0 . Предположим, что вместо (2.17) образована неточная модель вида

$$\frac{dx}{d\tau} = 2x(\tau), \quad x(0) = x_0. \quad (2.19)$$

Тогда $\Delta F = -1$, $\Delta C = 0$, $P_1(t) = 4e^{4t}(3 + e^{4t})^{-1}$, причем $P_1(t) \rightarrow 4$, $t \rightarrow \infty$. Однако сравнивая (2.17) и (2.19) с общими уравнениями (2.14) — (2.16), убеждаемся, что $\|P_e(t)\| \geq K \exp 4t$, где K — конечная положительная постоянная.

Одна из основных причин возникновения расходимости заключается в том, что управляющий шум (шум в уравнении состояния) может быть слабо сравним с шумом наблюдений. В этой ситуации вновь поступающие наблюдения оказываются малоинформативными по сравнению с прошлыми.

К настоящему времени разработан ряд приемов, позволяющих ограничивать эффект расходимости при практическом использовании линейной фильтрации [96, гл. VIII; 106, гл. II]. Один из методов состоит в искусственном увеличении мощности управляющего шума в уравнении состояния. Как было показано в гл. II тома I [7], использование регуляризации означает, что интенсивность $Q(\tau)$ белого гауссова шума в уравнении состояния заменяется на $Q(\tau) + \sqrt{\alpha}I_n$, $\alpha > 0$ — параметр регуляризации. Следовательно, регуляризация оказывает влияние и на ограничение эффекта расходимости.

Выше было отмечено, что чем точнее известны статистические характеристики (первые два момента в предположении гауссовости) состояния, шума состояния и шума измерений в линейной динамической системе, тем точнее оценки состояния системы при использовании фильтра Калмана — Бьюси. К настоящему времени разработано множество методов восстановления априорных вероятностных характеристик (см. например, [96, гл. VIII; 106, гл. II и др.]). Одна группа алгоритмов основана на байесовском подходе, когда моменты считаются случайными величинами и их распределения задаются априорно. Эти алгоритмы позволяют достаточно

Рассмотрим один из простых способов определения корреляционных матриц шумов в дискретном случае [127]. Пусть задана динамическая система

которая полностью наблюдаема. Измерения удовлетворяют закону

где $x(k) \in R_n$, $r(k) \in R_m$; u , v — гауссовы дискретные случайные процессы с нулевыми средними и корреляциями

$$M[u(k)v^T(j)] = S\delta_{kj}, \quad \delta_{kj} = \begin{cases} 1, & k = j, \\ 0, & k \neq j. \end{cases}$$

Задача состоит в определении неизвестных матриц Q, R, S при наличии набора векторов $\{r(k): k = 1, \dots, N\}$. Обозначим $H(\lambda)$ — характеристический многочлен постоянной матрицы F , $H(\lambda) = \det[F - \lambda I_n] = a_0 \lambda^q + a_1 \lambda^{q-1} + \dots + a_n$. Введем векторы

По теореме Кэли — Гамильтона $H(F) = 0$. Поэтому из (2.22) получаем

где $B_1 = a_0 G$, $B_i = FB_{i-1} + a_{i-1} G$, $i = 2, \dots, q$. Векторы $y(k)$ обладают тем свойством, что все их ковариации после q -го момента равны нулю, а отличные от нуля моменты являются функциями неизвестных матриц Q, R, S . Положим $A_i = M[y(k)y^T(k-i)]$. Тогда из (2.23) получим

.....

207

Матрицы A_0, A_1, \dots, A_q можно оценить по формулам

$$\hat{A}_i = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y(k) y^T(k-i), \quad i = 0, 1, \dots, q.$$

Из (2.24) следует, что для однозначного определения Q, R, S нужно, чтобы количество независимых уравнений в (2.24) было больше числа неизвестных элементов матриц Q, R, S .

Обычно в задачах оценивания считается, что первых два момента относительно медленно изменяются во времени. Случай, когда статистические характеристики изменяются во времени примерно так же, как и состояние динамической системы, для дискретных систем рассмотрен в [106, гл. VIII].

§ 3. Об управлении наблюдениями

Как уже отмечалось, основная задача, стоящая перед любым ИВК,— получение достоверной информации о состоянии исследуемой динамической системы и, возможно, последующая ее автоматизированная обработка. Однако при проектировании и эксплуатации измерительных средств часто возникают практически оправданные ограничения на количество наблюдений, на энергетические характеристики измерителей и т. д. Поэтому необходима оптимизация (в том или ином смысле) наблюдательной системы.

В этом направлении можно указать по крайней мере на три группы вопросов:

1) оптимизация промежутка времени, необходимого для проведения достаточного количества наблюдений;

2) оптимизация расположения на временной оси моментов включения различных каналов наблюдения в измерительной системе со многими каналами наблюдений;

3) оптимизация структуры наблюдательной системы.

Исследованию этих вопросов посвящены многие работы [4, 31, 50, 82, 110, 47, 122, 129, 144]. Тем не менее из-за большой сложности соответствующих математических постановок (что в значительной мере вызвано трудной формализуемостью указанных проблем), еще многие принципиальные моменты остаются невыясненными. Рассмотрим несколько новых подходов к решению поставленных задач.

Остановимся вначале на проблеме наблюдаемости. Это один из первых вопросов, возникающих при оптимизации измерительной системы. Напомним, что под наблюдаемостью динамической системы понимают возможность восстановления ее начального состояния по некоторой измерительной информации о ее выходе. Пусть детерминированная система описывается векторным дифференциальным уравнением

$$\frac{dx(\tau)}{d\tau} = A(\tau)x(\tau), \quad x(0) = x_0, \quad 0 \leq \tau \leq T_1 < +\infty, \quad (3.1)$$

где $A(\tau)$ — квадратная матрица порядка n , все элементы которой интегрируемы с квадратом по Лебегу на $[0, T_1]$. Наблюдения подчиняются закону

$$r(\tau) = C(\tau) x(\tau), \quad 0 \leq \tau \leq t \leq T_1, \quad (3.2)$$

где $C(\tau)$ — n -мерная матрица-строка. Пусть $\Phi(\tau, \sigma) = \|\varphi_{ij}(\tau, \sigma)\|_{i,j=1,\bar{n}}$ — переходная матрица-функция системы (3.1), т. е. $\Phi(\tau, \sigma)$ удовлетворяет матричному дифференциальному уравнению $\frac{d\Phi(\tau, \sigma)}{d\sigma} = A(\sigma)\Phi(\tau, \sigma)$, $\Phi(\sigma, \sigma) = I_n$, причем $\det \Phi(\tau, \sigma) \neq 0$ и решение $x(\tau)$ задачи Коши (3.1) имеет вид $x(\tau) = \Phi(\tau, 0)x_0$. Тогда (3.2) принимает вид $r(\tau) = C(\tau)\Phi(\tau, 0)x_0$. Умножив последнее равенство слева на матрицу $\Phi^T(\tau, 0)C^T(\tau)$ и проинтегрировав от 0 до t , получим

$$\int_0^t \Phi^T(\tau, 0)C^T(\tau)r(\tau)d\tau = \left\{ \int_0^t \Phi^T(\tau, 0)C^T(\tau)C(\tau)\Phi(\tau, 0)d\tau \right\} x_0. \quad (3.3)$$

Введем обозначения

$$\mathcal{G}_t(C) = \int_0^t \Phi^T(\tau, 0)C^T(\tau)C(\tau)\Phi(\tau, 0)d\tau,$$

$$d(0, t) = \int_0^t \Phi^T(\tau, 0)C^T(\tau)r(\tau)d\tau \in R_n.$$

Тогда (3.3) запишем в виде $d(0, t) = \mathcal{G}_t(C)x_0$. Отсюда следует, что система (3.1), (3.2) наблюдаема на промежутке $[0, t]$ в том и только в том случае, когда $\det \mathcal{G}_t(C) \neq 0$, поскольку $x_0 = [\mathcal{G}_t(C)]^{-1}d(0, t)$. Обозначим \mathbb{C} — класс всех матриц порядка $1 \times n$ вида $\mathbb{C} = \left\{ C(\tau) = [c_{11}(\tau), \dots, c_{1n}(\tau)], c_{1j}(\tau) = 1 \vee 0 \sum_{j=1}^n c_{1j}(\tau) = 1 \vee 0 \right\}$, причем для данной матрицы $C(\tau)$ существует разбиение

сегмента $[0, t]$ на непересекающиеся подсегменты S_1, \dots, S_n такие, что $C_{1j}(\tau) = 1$ лишь при $\tau \in S_j$ и все S_j имеют ненулевую длину. Физически принадлежность матрицы наблюдений классу \mathbb{C} означает, что в каждый момент времени производится наблюдение только за одной координатой вектора $x(\tau)$ переменных состояния динамического объекта, причем за время $[0, t]$ «просматриваются» по очереди все координаты вектора $x(\tau)$, $\tau \in [0, t]$ без возвращения к уже «просмотренной» координате. Наблюдение (3.2) с матрицей $C(\tau) \in \mathbb{C}$ называется подвижным управлением [129]. Пусть $C_i \in \mathbb{C}$ — матрица вида $C_i = [\delta_{i1}, \dots, \delta_{in}]$, где δ_{ij} — символ Кронекера. Предположим, что для любой матрицы C_i , $i = 1, \dots, n$,

выполняется условие $\det \mathcal{G}_t(C_t) = 0$. Это эквивалентно ненаблюдаемости системы (3.1), (3.2) с матрицей наблюдений $C = C_t$.

Сформулируем следующую проблему: выяснить, наблюдаема ли система (3.1), (3.2) в случае, когда матрица наблюдений $C(\tau)$ выбирается из класса \mathbb{C} ? Если да, то система \mathbb{C} наблюдаема [129].

Для заданного разбиения S_1, \dots, S_n введем характеристические функции подсегментов S_i :

$$\chi_i(\tau) = \begin{cases} 1, & \text{если } \tau \in S_i, \\ 0, & \text{если } \tau \notin S_i, \end{cases} \quad i = 1, \dots, n.$$

Тогда любая матрица $C \in \mathbb{C}$ представима в виде $C(\tau) = \sum_{i=1}^n C_i \chi_i(\tau)$,

а матрица $\mathcal{G}_t(C) = \sum_{i=1}^n \int_0^t \Phi^T(\tau, 0) C_i^T C_i \chi_i(\tau) \Phi(\tau, 0) d\tau$. Элементы

этой матрицы $\mathcal{G}_t(C) = \|g_{ij}\|_{i,j=1}^n$ вычисляются по формуле $g_{ij} = \int_0^t \sum_{k=1}^n \varphi_{ki}(\tau, 0) \chi_k(\tau) \varphi_{kj}(\tau, 0) d\tau$. Пусть $h(\tau)$ — n -мерный вектор,

координаты которого $h_i(\tau) = \sum_{k=1}^n \varphi_{ki}(\tau, 0) \chi_k(\tau)$.

Предложение 3.1. Для заданной матрицы $C \in \mathbb{C}$ система ненаблюдаема тогда и только тогда, когда существует n -мерный вектор $z \neq 0$ такой, что $h^T(\tau) z = 0$ для любого $\tau \in [0, t]$, т. е. $[\varphi_{n1}(\tau, 0), \dots, \varphi_{nn}(\tau, 0)] z = 0$, $\tau \in S_k$.

Для решения проблемы \mathbb{C} -наблюдаемости [129] установим ряд лемм.

Лемма 3.1. Если система (3.1), (3.2) \mathbb{C} -ненаблюдаема, то для любого номера $j = 1, \dots, n$ существует такое разбиение S_1, \dots, S_n сегмента $[0, t]$ и $m = m(j)$ линейно независимых векторов $z_i \in R_n$, что $[\varphi_{j1}(\tau, 0), \dots, \varphi_{jn}(\tau, 0)] z_i = 0$, $\tau \in S_i$, $i = 1, \dots, m(j)$, причем $1 < m(j) < n$.

Доказательство. Пусть $j = 1$. Поскольку система \mathbb{C} -ненаблюдаема, то для любой матрицы $C \in \mathbb{C}$ найдется n -мерный вектор z_1 такой, что $[\varphi_{11}(\tau, 0), \dots, \varphi_{1n}(\tau, 0)] z_1 = 0$ при $\tau \in S_1$, $z_1 \neq 0$. Но система (3.1), (3.2) ненаблюдаема также на сегменте S_1 . Пусть S_1^1, \dots, S_n^1 — разбиение S_1 на непересекающиеся подсегменты. Тогда существует n -мерный вектор z_2 , $z_2 \neq 0$ такой, что $[\varphi_{i1}(\tau, 0), \dots, \varphi_{in}(\tau, 0)] z_2 = 0$, $\tau \in S_i^1$, $i = 1, \dots, n$. Если $z_2 \neq \alpha z_1$ при некотором числе α , в качестве S_j выберем подсегмент S_1^1 ; тогда $m = m(j) > 1$. Если $z_2 = \alpha z_1$, то на подсегменте S_2^1 имеем $[\varphi_{11}(\tau, 0), \dots, \varphi_{1n}(\tau, 0)] z_1 = 0$, $[\varphi_{21}(\tau, 0), \dots, \varphi_{2n}(\tau, 0)] z_2 = 0$. В силу \mathbb{C} -ненаблюдаемости (3.1) на S_2^1 для любого разбиения S_1^1 вида S_1^2, \dots, S_n^2 найдется вектор $z_3 \neq 0$ такой, что $[\varphi_{i1}(\tau, 0), \dots,$

$\varphi_{in}(\tau, 0)] z_i = 0$ на S_i^2 , $i = 1, \dots, n$. Если $z_3 \neq \alpha z_1$, то положим $S_j = S_1^2$, и тогда $m(j) > 1$. В случае линейной зависимости $\{z_1, z_2, z_3\}$ разбиваем сегмент S_3^2 и т. д. После n шагов найдется вектор $z_i \neq \alpha z_1$, и тогда $m(j) > 1$ или все векторы z_1, \dots, z_n будут линейно зависимы. В последнем случае на подсегменте S_n^{n-1} имеем $[\varphi_{11}(\tau, 0), \dots, \varphi_{ln}(\tau, 0)] z_1 = 0$, т. е. $\det \Phi(\tau, 0) = 0$, что противоречит невырожденности $\Phi(\tau, \sigma)$. Поэтому $m(j) > 1$ при $j = 1$. Если $m(j)|_{j=1} = n$, то векторы z_1, \dots, z_n образуют базис в R_n и $[\varphi_{11}(\tau, 0), \dots, \varphi_{ln}(\tau, 0)] z_i = 0$, $i = 1, \dots, n$, откуда следует, что все $\varphi_{ij}(\tau, 0) = 0$, $j = 1, \dots, n$, т. е. $\det \Phi(\tau, 0) = 0$, что невозможно. Итак, $1 < m(1) < n$. Случай $j > 1$ рассматривается аналогично. Лемма доказана.

Лемма 3.2. Пусть $\{z_i\}_{i=1}^{m_1}$, $m_1 < n - 1$ — наибольшая система линейно независимых векторов из R_n таких, что для некоторого подсегмента S_1 из $[0, t]$ $[\varphi_{11}(\tau, 0), \dots, \varphi_{ln}(\tau, 0)] z_i = 0$, $i = 1, \dots, m_1$, $\tau \in S_1$. Тогда существует m множество из m_1 индексов $J \subset \subset \{2, 3, \dots, n\}$ и набор вещественных функций $f_{ij}(\tau)$ на S_1 таких, что

$$\left\{ [\varphi_{11}(\tau, 0), \dots, \varphi_{jn}(\tau, 0)] + \sum_{k \in J} f_{kj}(\tau) [\varphi_{k1}(\tau, 0), \dots, \varphi_{kn}(\tau, 0)] \right\} \times \\ \times z_i = 0, \quad (3.4)$$

где $i = 1, \dots, m_1$, $j \in \{2, 3, \dots, n\} \setminus J$.

Доказательство. На S_1 справедливо равенство

$$[\varphi_{11}(\tau, 0), \dots, \varphi_{ln}(\tau, 0)] z_i = 0, \quad (3.5)$$

поэтому $\frac{d}{d\tau} [\varphi_{11}(\tau, 0), \dots, \varphi_{ln}(\tau, 0)] z_i = 0$. Если a_{ij} — элементы матрицы A , то, учитывая (3.5), последнее соотношение принимает вид

$$\sum_{j=2}^n a_{1j}(\tau) [\varphi_{j1}(\tau, 0), \dots, \varphi_{jn}(\tau, 0)] z_i = 0, \quad i = 1, \dots, m_1. \quad (3.6)$$

Здесь существуют две возможности.

1. Пусть все миноры порядка m_1 в (3.6) равны нулю, если (3.6) считать системой из m_1 уравнений с $(n - 1)$ неизвестными $\{a_{1j}\}$.

Тогда найдутся m_1 постоянные α_i , $\sum_{i=1}^{m_1} |\alpha_i| \neq 0$ и момент времени $\tau_0 \in S_1$ такие, что

$$[\varphi_{k1}(\tau_0, 0), \dots, \varphi_{kn}(\tau_0, 0)] \sum_{i=1}^{m_1} \alpha_i z_i = 0, \quad k \in \{2, \dots, n\}. \quad (3.7)$$

Кроме того, (3.7) справедливо и при $k = 1$. Поэтому $\Phi(\tau_0, 0) \times \sum_{i=1}^{m_1} \alpha_i z_i = 0$, откуда $\sum_{i=1}^{m_1} \alpha_i z_i = 0$, поскольку $\det \Phi(\tau_0, 0) \neq 0$.

Следовательно, векторы $\{z_i\}_{i=1}^{m_1}$ линейно зависимы, что невозможно.

2. Существует хотя бы один ненулевой минор ранга m_1 . Можно считать, что этот минор соответствует набору индексов J . Тогда

$$a_{1j} = \sum_{k \in \{2, \dots, n\} \setminus J} f_{jk} a_{1k}, \quad j \in J.$$

Подставляя это выражение в (3.6), получаем (3.4). Лемма доказана. В предположениях лемм 3.1, 3.2 справедлива следующая лемма.

Лемма 3.3. *Существует подсегмент S_2^1 из S_1 и не более m_2 линейно независимых векторов $z_j^1 = \sum_{i=1}^{m_1} \alpha_{ji} z_i$, $\sum_{i=1}^{m_1} |\alpha_{ji}| \neq 0$, $j = 1, \dots, m_2$, таких, что $[\varphi_{21}(\tau, 0), \dots, \varphi_{2n}(\tau, 0)] z_j^1 = 0$ на S_2^1 , где $1 \leq m_2 \leq m_1$.*

Доказательство. Пусть для некоторого подсегмента S_1 из $[0, t]$ справедливо $[\varphi_{11}(\tau, 0), \dots, \varphi_{1n}(\tau, 0)] z_i = 0$, $i = 1, \dots, m_1$. Рассмотрим разбиение S_1^1, \dots, S_n^1 подсегмента S_1 . Вследствие \mathbb{C} -ненаблюдаемости (3.1), (3.2) найдется вектор $z^1 \in R_n$, $z^1 \neq 0$, такой, что $[\varphi_{11}(\tau, 0), \dots, \varphi_{1n}(\tau, 0)] z^1 = 0$ на S_i^1 , $i = 1, \dots, n$. Если векторы z^1, z_1, \dots, z_{m_1} образуют линейно независимую систему в R_n , то обозначим z^1 через z_{m_1+1} . На S_1^1 имеем систему равенств $[\varphi_{11}(\tau, 0), \dots, \varphi_{1n}(\tau, 0)] z_i = 0$, $i = 1, \dots, m_1 + 1$. Рассмотрим разбиение S_1^1 на подсегменты S_1'', \dots, S_n'' . Тогда найдется вектор $z'' \in R_n$, $z'' \neq 0$ такой, что $[\varphi_{11}(\tau, 0), \dots, \varphi_{1n}(\tau, 0)] z'' = 0$ на $S_i'', i = 1, \dots, n$. Если $z'', z_1, \dots, z_{m_1+1}$ — линейно независимы, то разбиваем на подсегменты S_1' и т. д. Из леммы 3.1 следует, что $m_1 < m$. Поэтому найдется хотя бы один вектор ω , равный линейной комбинации векторов z_1, \dots, z_{m_1+1} , такой, что $[\varphi_{2,1}(\tau, 0), \dots, \varphi_{2n}(\tau, 0)] \omega = 0$ на некотором подсегменте S_2 из S_1 , т. е. $m_2 \geq 1$. Но поскольку векторы z_j^1 есть линейные комбинации m_1 независимых векторов z_i , то $m_2 \leq m_1$. Лемма доказана.

Теперь можно установить следующий результат.

Теорема 3.1 [129]. *Динамическая система (3.1), (3.2) является \mathbb{C} -наблюдаемой на сегменте $[0, t]$.*

Доказательство. Предположим, что это не так. Рассмотрим произвольное разбиение S_1, \dots, S_n сегмента $[0, t]$. Но тогда на основании леммы 3.3 можно утверждать, что для некоторого подсегмента S_i из S_1 найдутся m_i векторов $z_j^{(i)} \in R_n$, $j = 1, \dots, m_i$, зависящих линейно от векторов $z_k^{(i-1)}$, $k = 1, \dots, m_{i-1}$, и $[\varphi_{11}(\tau, 0), \dots, \varphi_{1n}(\tau, 0)] z_j^i = 0$, $i \in \{1\} \cup J$, причем $1 \leq m_i \leq m_{i-1} \leq \dots \leq n$. Если $m_{i-1} = 1$, то $m_i = 1$ и $z^{(i)}$ пропорционален $z^{(i-1)}$. Значит, существует вектор $\omega \in R_n$, $\omega \neq 0$, такой, что $\omega = z_1^{(k)}$, $k \in J$ и $[\varphi_{11}(\tau, 0), \dots, \varphi_{1n}(\tau, 0)] \omega = 0$, $i \in \{1\} \cup J$, на некотором подсегмен-

те \tilde{S} из S_1 . Пусть $\omega_k \neq 0$ для некоторого $k \in \{1, \dots, n\}$. Введем матрицу H с элементами вида

$$h_{ik} = \begin{cases} [\varphi_{i1}(\tau, 0), \dots, \varphi_{in}(\tau, 0)] \omega, & i \in \{1\} \cup J, \\ \left\{ [\varphi_{i1}(\tau, 0), \dots, \varphi_{in}(\tau, 0)] + \right. \\ \left. + \sum_{j \in J} f_{j\mu} [\varphi_{j1}(\tau, 0), \dots, \varphi_{jn}(\tau, 0)] \right\}, & i \in \{2, \dots, n\} \setminus J, \end{cases}$$

$h_{ij} = \varphi_{ij}(\tau, 0)$, $j \neq k$, $i = 1, \dots, n$. Из леммы 3.2 следует, что $h_{jk} = 0$, $j = 1, \dots, n$, и ранг матрицы $H < n$. Однако ранг $H < n$ лишь в том случае, когда $\omega = 0$, так как H составлена из линейных комбинаций матрицы $\Phi(\tau, 0)$, которая невырождена. А последнее противоречит предположению о \mathbb{C} -ненаблюдаемости системы (3.1), (3.2). Теорема 3.1 доказана.

Таким образом, при любом подвижном наблюдении можно восстановить начальное состояние динамической системы. С некоторыми видоизменениями рассуждений этот результат переносится и на ряд других классов матриц \mathbb{C} .

Пусть динамическая система описывается n -мерным векторным дифференциальным уравнением

$$\frac{dx}{d\tau} = F(\tau)x + G(\tau)u, \quad x(0) = x_0, \quad (3.8)$$

где u — белый гауссов шум с нулевым средним и корреляцией $M[u(\tau)u^T(\sigma)] = Q(\tau)\delta(\tau - \sigma)$; X_0 — гауссова случайная величина с нулевым средним.

Элементы матрицы $F(\tau)$ принадлежат $L_2[0, t]$, $0 < t \leq T_1 < \infty$, $G(\tau)$ — гладкие функции, $M[x_0, x_0^T] = P_0$. Наблюдается случайный процесс

$$r(\tau) = C(\tau)x(\tau) + w(\tau), \quad (3.9)$$

где $C(\tau)$ — $(m \times n)$ -мерная детерминированная матрица с кусочно-непрерывными элементами, называемая матрицей наблюдений; $w(\tau)$ — белый гауссов шум с нулевым средним и корреляцией $M[w(\tau)w^T(\sigma)] = R_w(\tau)\delta(\tau - \sigma)$. Пусть $R_w(\tau) > 0$, т. е. существует обратная матрица $R_w^{-1}(\tau)$. Тогда, как известно, для решения задачи линейной оптимальной фильтрации применима процедура Калмана — Бьюси. Для простоты положим $M[v(\tau)w^T(\sigma)] = 0$; $M[x_0 v^T(\tau)] = 0$; $M[x_0 w^T(\sigma)] = 0$. В этом случае ковариационная матрица ошибок оценивания $P(t) = M[(x(t) - \hat{x}(t))(x(t) - \hat{x}(t))^T]$, где $\hat{x}(t)$ — наилучшая в среднеквадратическом смысле

линейная оценка $x(\tau)_{\tau=t}$, удовлетворяет матричному дифференциальному уравнению Риккати

$$\frac{dP}{d\tau} = F(\tau)P(\tau) + P(\tau)F^T(\tau) + G(\tau)Q(\tau)G^T(\tau) - \\ - P(\tau)C(\tau)R_w^{-1}(\tau)C^T(\tau)P(\tau), \quad P(0) = P_0, \quad (3.10)$$

где $\tau \in [0, t]$. Поскольку решение (3.10) зависит от матрицы наблюдений $C(\tau)$, то можно поставить задачу: минимизировать $P(\tau)$ (в том или ином смысле) на некотором множестве \mathfrak{U} допустимых матриц наблюдения. Однако даже при сильных ограничениях на множество \mathfrak{U} эта задача достаточно сложна прежде всего вследствие нелинейности уравнения (3.10). При этом распространенный подход к ее решению состоит в использовании принципа максимума Л. С. Понтрягина или его модификаций [31, 114].

Пусть класс \mathfrak{U} состоит из матриц вида

$$C(\tau) = S(\tau)C_0(\tau), \quad C_0(\tau) = \begin{bmatrix} C_1(\tau) \\ \vdots \\ C_k(\tau) \end{bmatrix}, \quad (3.11)$$

где каждая $C_i(\tau)$ — матрица порядка $(m_i \times n)$,

$$S(\tau) = \begin{bmatrix} P_1(\tau) \\ \vdots \\ P_k(\tau) \end{bmatrix}, \quad P_i(\tau) = \begin{bmatrix} p_1^{(i)}(\tau) & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & p_{m_i}^{(i)}(\tau) \end{bmatrix}.$$

Причем функции времени $\{p_j^{(i)}(\tau)\}_{j=1}^{m_i}$, $0 \leq \tau \leq t$, являются кусочно-непрерывными и принимают только два значения: нуль или единица. Цель управления — выбор детерминированной матрицы $S(\tau)$, минимизирующей функционал

$$\mathcal{J}(S) = \text{след}[AP(t)] + \int_0^t \left\{ \text{след}[BP(t)] + \text{след} \sum_{i=1}^k P_i(\tau) \gamma_i \right\} d\tau, \quad (3.12)$$

построенный с помощью взвешенного следа матрицы ковариаций ошибок $P(\tau)$. Здесь числа γ_i — обобщенные коэффициенты стоимости; A и B — заданные на основе физических соображений постоянные матрицы.

Даже в такой постановке оптимального управления в классе \mathfrak{U} может не существовать и решение будет сводиться к получению так называемого скользящего режима (ср. [31]). Для явного описания решения наложим еще ряд ограничений: пусть матрицы F , G , и C_0 в (3.8), (3.11) постоянны. Тогда (3.9) разобьется на k соотношений:

$$r_i(\tau) = P_i C_i x(\tau) + w_i(\tau), \quad i = 1, \dots, k, \quad (3.13)$$

где w_i — m_i -мерный белый гауссов шум с нулевым средним и интенсивностью $R_i(\tau) > 0$. Пусть $\{w_i\}$, $i = 1, \dots, k$, попарно некор-

релированы. Предположим $p_i^{(0)}(\tau) = p_i(\tau)$, $j = 1, \dots, m_i$. Соотношения (3.13) означают, что имеется k независимых наблюдателей. Тогда если $p_i(\tau) = 1$, то i -й наблюдатель работает в момент τ и выключен в случае $p_i(\tau) = 0$. При таких предположениях фильтр Калмана — Бьюси запишется в виде

$$\begin{cases} \frac{d\hat{x}}{dt} = F\hat{x} + \sum_{i=1}^k p_i(t) P(t) C_i^T R_i^{-1} [r_i - C_i \hat{x}], \\ \hat{x}(0) = 0, \end{cases} \quad (3.14)$$

$$\begin{cases} \frac{dP}{dt} = FP + PF^T + GQG^T - \sum_{i=1}^k p_i(t) PC_i^T R_i^{-1} C_i P, \\ P(0) = P_0. \end{cases} \quad (3.15)$$

В этом случае $S(\tau)$ называют стратегией наблюдений. Применение модификации принципа максимума Л. С. Понтрягина, данное Атансом [114, 122], приводит к следующей ситуации. Скалярный гамильтониан $\mathcal{H}(P, S, \Lambda)$ имеет вид $\mathcal{H}(P, S, \Lambda) = \text{след}[BP] + + \sum_{i=1}^m p_i(\tau) \gamma_i + \text{след}\left[\frac{dP}{d\tau} \Lambda^T\right]$, где Λ — квадратная матрица множителей Лагранжа порядка n . Тогда необходимые условия минимума \mathcal{J} принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{dP}{d\tau} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \Lambda} \Big|_{\Lambda=\Lambda^*}; \quad P^*(0) = P_0; \\ \frac{\partial \Lambda^*}{\partial \tau} &= - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P} \Big|_{P=P^*}; \quad \Lambda^*(t) = \frac{\partial \text{след} \Lambda P^*(t)}{\partial P^*(t)}; \\ \mathcal{H}(P^*, S^*, \Lambda^*) &\leq \mathcal{H}(P, S, \Lambda), \end{aligned}$$

где звездочкой обозначено оптимальное решение. Отсюда следует, что оптимальная стратегия наблюдений $S^*(\tau)$ и соответствующая ей матрица ошибок ковариаций $P^*(\tau)$ должны удовлетворять условиям

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k p_i^*(\tau) [\gamma_i - \text{след}[P^* C_i^T R_i^{-1} C_i \Lambda^{*T}]] &\leq \\ &\leq \sum_{i=1}^k p_i(\tau) [\gamma_i - \text{след}[P C_i R_i^{-1} C_i \Lambda^T]]. \end{aligned}$$

Последнее неравенство выполняется, если

$$p_i^*(\tau) = \begin{cases} 1 & \text{при } \gamma_i - \text{след}(P^* C_i^T R_i^{-1} C_i \Lambda^{*T}) < 0; \\ 0 & \text{при } \gamma_i - \text{след}(P^* C_i^T R_i^{-1} C_i \Lambda^{*T}) \geq 0. \end{cases} \quad (3.16)$$

Если $\gamma_i - \text{след}(P^* C_i R_i^{-1} C_i \Lambda^{*T}) \geq 0$ для всех $i = 1, \dots, k$, то измерений в этот момент времени производить не следует. Соотношения (3.16) — описание оптимальной (в смысле минимума (3.12)) стратегии наблюдений.

Рассмотрим иной подход к решению задачи оптимизации структуры наблюдательной системы, основанный на двойственности линейного среднеквадратического оценивания (фильтрации) и управления с квадратичным критерием качества.

Зафиксируем некоторый вектор $z_0 \in R_n$ и произвольную матрицу-функцию $h(t, \tau)$ ($0 \leq \tau \leq t$) с элементами из положительного пространства $W_t^1[0, t]$. Тогда математическое ожидание $M(z_0, x(t) - \hat{x}(t))_{R_n}^2$, где $\hat{x}(t) = \int_0^t h(t, \tau) r(\tau) d\tau$ (интеграл понимается в смысле билинейной формы) допускает представление

$$M(z_0, x(t) - \hat{x}(t))_{R_n}^2 = (z_0, R(t) z_0)_{R_n} = (z_0, P_0 z(0))_{R_n} + \int_0^t [z^T(\tau) R_v(\tau) z(\tau) + z_0^T h(t, \tau) R_w(\tau) h^T(t, \tau) z_0] d\tau \equiv \mathcal{J}(z, h). \quad (3.17)$$

(см. гл. II, том. 1 [7]). Здесь $R(t) = M[(x(t) - \hat{x}(t))(x(t) - \hat{x}(t))^T]$ — матрица дисперсий ошибок при данной матрице-функции $h(t, \tau)$; n -мерная вектор-функция $z(\tau)$ удовлетворяет задаче Коши

$$\begin{cases} \frac{dz}{d\tau} = -F^T(\tau) z(\tau) + C^T(\tau) h^T(t, \tau) z_0, \\ z(t) = z_0. \end{cases} \quad (3.18)$$

Причем справедливо неравенство $(R(t) z_0, z_0)_{R_n} \geq (P(t) z_0, z_0)_{R_n}$ и $R(t) = P(t)$ в том случае, когда $h(t, \tau) = h_0(t, \tau)$ задает наилучшую оценку, т. е. удовлетворяет матричному интегральному уравнению Винера — Хопфа:

$$\int_0^t h_0(t, \tau) M[r(\tau) r^T(\sigma)] d\tau = M[x(t) r^T(\sigma)], \quad (3.19)$$

$$0 \leq \tau, \sigma \leq t.$$

При этом квадратичный функционал $\mathcal{J}(z, h)$ достигает наименьшего значения при $h = h_0(t, \tau)$. В этом и состоит двойственность задач линейной фильтрации для системы (3.8), (3.9) и оптимального управления системой (3.18) с критерием качества (3.17). Используя (3.9), переписываем (3.19) в виде

$$h(t, \sigma) R_w(\sigma) + \int_0^t h(t, \tau) C(\tau) K_x(\tau, \sigma) C^T(\sigma) d\tau = K_x(t, \sigma) C^T(\sigma), \quad (3.20)$$

где $K_x(\tau, \sigma) = M[x(\tau) x^T(\sigma)]$. Поставим задачу: минимизировать функционал $\mathcal{J}(z, h) = \mathcal{J}(z, h, C)$ (3.17), где $z(\tau)$ удовлетворяет

(3.18), на множестве матриц $h(t, \tau)$ с элементами из $W_1^1[0, t]$ и $C(\tau)$ с кусочно-непрерывными элементами.

Предлагаемый ниже способ приближенного решения этой задачи основывается на приближенно-аналитическом методе решения интегрального уравнения Винера — Хопфа (3.20), изложенном в гл. II, том 1 [7], [50a]. Аппроксимируем матрицу $K_x(\tau, \sigma)$ матрицей вида $L_N^T(\tau) A_N L_N(\sigma)$, где $L_N^T(\tau) = [\varphi_1(\tau) I_n, \dots, \varphi_N(\tau) I_n]$; $\{\varphi_i(\tau)\}_{i=1}^\infty$ — ортонормированный базис в $L_2[0, t]$, указанный в § 3, гл. II, том 1. I_n — n -мерная единичная матрица; A_N — блочная квадратная матрица порядка nN , $A_N = A_N^T = \|H_{ij}\|_{i,j=1,N}$, $H_{ij} = \int_0^t \int_0^t K_x(\tau, \sigma) \varphi_i(\tau) \varphi_j(\sigma) d\tau d\sigma$. Эта матрица, элементы которой — (i, j) -е коэффициенты Фурье элементов матрицы $K_x(\tau, \sigma)$. В этом случае уравнение (3.20) приобретает вид

$$h_N(t, \sigma) + \int_0^t h_N(t, \tau) C(\tau) L_N^T(\tau) A_N L_N(\sigma) C^T(\sigma) d\tau \times \\ \times R_w^{-1}(\sigma) = L_N^T(t) A_N L_N(\sigma) C^T(\sigma) R_w^{-1}(\sigma). \quad (3.21)$$

Положим $Q_N(\sigma) = L_N(\sigma) C^T(\sigma)$. Тогда, умножая равенство (3.21) справа почленно на матрицу $Q_N^T(\sigma)$ и интегрируя по переменной σ от 0 до t , находим

$$\int_0^t h_N(t, \sigma) Q_N^T(\sigma) d\sigma + \int_0^t h_N(t, \tau) Q_N^T(\tau) d\tau A_N \times \\ \times \int_0^t Q_N(\sigma) R_w^{-1}(\sigma) Q_N^T(\sigma) d\sigma = L_N^T(t) A_N \int_0^t Q_N(\sigma) R_w^{-1}(\sigma) Q_N^T(\sigma) d\sigma. \quad (3.22)$$

Введя обозначение $S_N(t) = \int_0^t Q_N(\sigma) R_w^{-1}(\sigma) Q_N^T(\sigma) d\sigma$, где $S_N(t)$ — квадратная матрица порядка nN ; $S_N(t) = S_N^T(t)$, $S_N(t) > 0$, $t > 0$, перепишем (3.22) следующим образом:

$$\int_0^t h_N(t, \tau) Q_N^T(\tau) d\tau [I_{nN} + A_N S_N(t)] = L_N^T(t) A_N S_N(t).$$

Отсюда следует, что решение уравнения (3.21) имеет вид

$$h_N(t, \sigma) = 1(t - \sigma) L_N^T(t) A_N [I_{nN} + (A_N S_N(t))^T]^{-1} \times \\ \times L_N(\sigma) C^T(\sigma) R_w^{-1}(\sigma). \quad (3.23)$$

Здесь

$$1(t - \sigma) = \begin{cases} 1, & 0 \leq \sigma \leq t, \\ 0, & \sigma \notin [0, t]. \end{cases}$$

Как показано в § 3, гл. II тома 1 [7], при $N \rightarrow \infty$ матрицы-функции $h_N(t, \sigma)$ сходятся к точному решению $h_0(t, \tau)$, т. е. $M \times \times \left(z_0, \int_0^t [h_N(t, \sigma) - h(t, \sigma)] r(\sigma) d\sigma \right)_{R_n}^2 \rightarrow 0, N \rightarrow \infty$. Подставив в (3.17) и (3.18) вместо $h(t, \sigma)$ приближенное выражение $h_N(t, \tau)$ из (3.23), получим систему

$$\begin{cases} \frac{dz}{d\tau} = -F^T(\tau) z(\tau) - C^T(\tau) R_w^{-1}(\tau) C(\tau) L_N^T(\tau) \times \\ \times [I_{nN} + A_N S_N(t)]^{-1} A_N L_N(t) z_0, \\ z(t) = z_0 \end{cases} \quad (3.24)$$

и приближенный критерий качества

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_N(z, h_N) &= z^T(0) P_0 z(0) + \int_0^t z^T(\tau) R_v(\tau) z(\tau) d\tau + \\ &+ z_0^T \int_0^t [L_N^T(t) A_N [(A_N S_N(t))^T + I_{nN}]^{-1} L_N(\tau) C^T(\tau) R_w(\tau) \times \\ &\times C(\tau) L_N^T(\tau) [A_N S_N(t) + I_{nN}]^{-1} A_N L_N(t)] d\tau z_0. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Для упрощения положим $R_w(\tau) = I_m$ — m -мерная единичная матрица. Тогда (3.25) принимает вид

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_N(z_0, h_N) &= z^T(0) P_0 z(0) + \int_0^t z(\tau) R_v(\tau) z(\tau) d\tau + \\ &+ z_0^T L_N^T(t) A_N [I_{nN} + (A_N S_N(t))^T]^{-1} S_N(t) [I_{nN} + \\ &+ A_N S_N(t)]^{-1} A_N L_N(t) z_0. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Таким образом, критерий качества оказался неявно зависящим от матрицы $C(\tau)$ через постоянную на $[0, t]$ квадратную матрицу $S_N(t)$, поэтому исключим $C(\tau)$ из уравнения (3.24). Умножив (3.24) слева на матрицу $L_N(\tau)$, проинтегрировав от 0 до t и предположив, что базисные функции $\varphi_i(\tau)$ такие, что $\varphi_i(0) = \varphi_i(t) = 0$, получим интегрально-векторное уравнение

$$\begin{aligned} - \int_0^t \frac{dL_N(\tau)}{d\tau} z(\tau) d\tau + \int_0^t L_N(\tau) F^T(\tau) z(\tau) d\tau = \\ = -S_N(t) [A_N S_N(t) + I_{nN}]^{-1} A_N L_N(t) z_0. \end{aligned}$$

Отсюда, введя обозначение $B_N(\tau) \equiv -L_N(\tau) F^T(\tau) + \frac{dL_N(\tau)}{d\tau}$, находим

$$-\int_0^t B_N(\tau) z(\tau) d\tau = S_N(t) [A_N S_N(t) + I_{nN}]^{-1} A_N L_N(t) z_0. \quad (3.27)$$

Таким образом, пришли к задаче оптимального управления: минимизировать функционал (3.26) на множестве квадратных nN -мерных симметрических неотрицательно определенных матриц при ограничениях (3.27). Сравнивая формулы (3.26) и (3.27), критерий качества преобразовываем к виду $\mathcal{J}_N(z, h_N) = z^T(0) P_0 z(0) + \int_0^t z^T(\tau) R_v(\tau) z(\tau) d\tau + \int_0^t \int_0^t z^T(\tau) B_N^T(\tau) S_N^{-1}(t) B_N(\sigma) z(\sigma) \times \times d\tau d\sigma$. Для численного решения преобразованной задачи оптимального управления применим конечно-разностный метод (см. [39; гл. 2]).

Рассмотрим оптимизацию так называемой адаптивной системы наблюдений, когда наблюдениями можно управлять, изменяя структуру наблюдаемого процесса [144]. Пусть задана динамическая система вида

$$\frac{dx}{d\tau} = Ax(\tau), \quad 0 \leq \tau \leq t, \quad x \in R_n, \quad (3.28)$$

$$r(\tau, z) = h^T(z) x(\tau) + v(\tau), \quad (3.29)$$

где A — постоянная матрица простой структуры; $v(\tau)$ — помеха; вектор $z \in R_m$ позволяет управлять структурой наблюдений $h^T(z) = (h_1(z), \dots, h_n(z))^T$.

Пусть $z \in Z$ — некоторое фиксированное подмножество, $\{h_i(z)\}_{i=1}^n$ — линейно независимые кусочно-непрерывные функции, определенные на Z , и $v(\tau)$ — одномерный белый гауссов шум с нулевым средним и интенсивностью σ^2 .

Поставим задачу: выбрать вектор-функцию $h(z)$ так, чтобы оценка начального состояния $x(0)$ была оптимальной с точки зрения энтропийного критерия качества [144].

Вначале для простоты предположим, что количество наблюдений равно единице. Для данного $z(\tau)$, $0 \leq \tau \leq t$, начальное состояние $x(0) = x_0$ оценим по методу наименьших квадратов

$$\mathcal{J}(x_0) = M \int_0^t [r(z, \tau) - h^T(z) x(\tau)]^2 d\tau \rightarrow \min. \quad (3.30)$$

Отсюда легко получить оптимальное значение

$$\hat{x}_0 = \left(\int_0^t \exp [A^T \tau] h(z) (\exp [A^T \tau] h(z))^T d\tau \right)^{-1} \times \\ \times \int_0^t \exp [A^T \tau] h(z) r(z, \tau) d\tau, \quad (3.31)$$

где $\exp (A^T \tau) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} (A^T \tau)^i$.

На основании (3.31) и (3.29) можно утверждать, что случайная величина x_0 является гауссовой со средним значением \hat{x}_0 и корреляционной матрицей $M [(x_0 - \hat{x}_0)(x_0 - \hat{x}_0)^T] = \sigma^2 \left[\int_0^t \exp (A^T \tau) h \times \right. \\ \times (z) (\exp (A^T \tau) h(z))^T d\tau \Big]^{-1}$. Поэтому энтропия ошибки оценивания, основанной на управлении $z(\tau)$, принимает вид

$$H(\hat{x}_0 | z(\tau)) = \frac{1}{2} \ln (2\pi e)^n - \frac{1}{2} \ln \det \times \\ \times \left\{ \sigma^{-2} \left[\int_0^t \exp (A^T \tau) h(z) (\exp (A^T \tau) h(z))^T d\tau \right] \right\}. \quad (3.32)$$

Таким образом, задача свелась к минимизации функционала (3.32) на множестве кусочно-непрерывных функций $z(\tau)$. Однако функционал (3.32) существенно нелинеен, поэтому в общем случае аналитически решить проблему его минимизации невозможно. Рассмотрим частный случай. Пусть матрица $A = \gamma I_n$, γ — некоторая постоянная. Положим

$$S(z) = \frac{h(z)}{\sigma}, \quad \mathcal{J}_n(z^n) = \sum_{i=1}^n S(z_i) S^T(z_i), \\ \tilde{S}(z, \tau) = \exp (A^T \tau) S(z), \quad \mathcal{J}(z(\tau)) = \int_0^t \tilde{S}(z, \tau) \tilde{S}^T(z, \tau) d\tau.$$

В этих обозначениях функционал (3.32) перепишем в следующем виде

$$H(\hat{x}_0 | z(\tau)) = \frac{1}{2} \ln \frac{(2\pi e)^n}{\det \mathcal{J}(z(\tau))}.$$

Поэтому управление $z(\tau)$ нужно выбрать так, чтобы максимизировать $\det \mathcal{J}(z(\tau))$. Решение этой задачи при указанном ограничении на матрицу A дается следующей теоремой.

Теорема 3.2. [144]. Пусть n -мерные векторы $\{z_j^0\}_{j=1}^n$ такие, что вектор-функция $S(z)$ находится в эллипсоиде

$$\Omega_n = \{S : S^T \mathcal{J}_n^{-1}(z^{0n}) S \leq 1\}, \quad \forall z \in Z,$$

где $z^{0n} = \{z_1^0, \dots, z_n^0\}$, а временные интервалы T_j , $j = 1, \dots, n$, такие, что

$$\begin{cases} \int_{T_j} \exp(2\gamma\tau) d\tau = \frac{1}{n} \int_0^t \exp(2\gamma\tau) d\tau, & j = 1, \dots, n, \\ \bigcup_{j=1}^n T_j = [0, t], & T_i \cap T_j \neq \emptyset, \quad i \neq j. \end{cases} \quad (3.33)$$

Тогда оптимальное управление задается выражением

$$z^*(\tau) = \{z_j^0, \tau \in T_j, \quad j = 1, \dots, n\}, \quad (3.34)$$

причем минимальное значение энтропии вычисляется по формуле

$$H(\hat{x}_0 | z^*(\tau)) = \frac{1}{2} \ln \left\{ \left(\frac{2\pi n e}{\int_0^t \exp(2\gamma\tau) d\tau} \right)^n \det \mathcal{J}_n^{-1}(z^{0n}) \right\}.$$

Доказательство. Поскольку $A = \gamma I_n$, то $\tilde{S}(z, \tau) = \exp(\gamma\tau) S(z)$. Поэтому для нахождения оптимального управления $z^*(\tau)$ нужно максимизировать выражение

$$\det \mathcal{J}(z(\tau)) = \det \left\{ \int_0^t S(z) S^T(z) \exp(2\gamma\tau) d\tau \right\}. \quad (3.35)$$

Введем невырожденную матрицу D такую, что $DD^T = \mathcal{J}_n(z^{0n})$.

Тогда (3.35) перепишем в виде $\det \mathcal{J}(z(\tau)) = (\det D)^2 \det \left\{ \int_0^t D^{-1} S \times \right.$
 $\times (z) (D^{-1} S(z))^T \exp(2\gamma\tau) d\tau \left. \right\}$. Откуда следует

$$\begin{aligned} \det \mathcal{J}(z(\tau)) &\leq (\det D)^2 \left\{ \frac{1}{n} \text{след} \left[\int_0^t D^{-1} S(z) \times \right. \right. \\ &\quad \times (D^{-1} S(z))^T \exp(2\gamma\tau) d\tau \left. \left. \right] \right\}^n. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Здесь использован известный результат из теории матриц: если $Q = Q^T$ — неотрицательная матрица, $\{\lambda_i \geq 0\}_{i=1}^n$ — собственные числа матрицы, то $[\det Q]^{1/n} = \left(\prod_{i=1}^n \lambda_i \right)^{1/n} \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1/n \text{ след } Q$, причем знак равенства достигается лишь при $\lambda_1 = \dots = \lambda_n$. Далее, из (3.36) находим $\det \mathcal{J}(z(\tau)) \leq (\det D)^2 \left\{ 1/n \int_0^t S^T(z) \mathcal{J}_n^{-1}(z^{0n}) S(z) \exp(2\gamma\tau) d\tau \right\}^n \leq$

$$\leq \det \left\{ \frac{1}{n} \int_0^t \exp(2\gamma\tau) d\tau \mathcal{J}_n(z^{0n}) \right\} = \det \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \int_0^t \exp(2\gamma\tau) d\tau S(z_i^0) S^T \times \right. \\
\left. \times (z_i^0) \right\}. \text{ Отсюда непосредственно следует, что оптимальное управ-}$$

ление $z^*(\tau)$ задается законом (3.34). Теорема 3.2 доказана. Указанные в теореме 3.2 интервальные управления можно включать, например, в моменты времени $t_j = \frac{1}{2\gamma} \ln \left\{ \frac{1}{n} (\exp(2\gamma t) - 1) + 1 \right\}$, где $j = 1, 2, \dots, n - 1$. Полученный результат допускает непосредственное обобщение и на многомерный случай. Пусть вместо скалярных наблюдений задан закон наблюдений $r(z, \tau) = C^T(z) \times \times x(\tau) + w(\tau)$, где $r(z, \tau) \in R_q$, $C(z)$ — матрица порядка $n \times q$; $w(\tau)$ — стационарный белый гауссов шум с нулевым средним и корреляционной матрицей $M[w(\tau)w^T(\sigma)] = \|\sigma_i^2 \delta_{ij}\|_{i,j=1,n} \delta(\tau - \sigma)$. Положим, как и выше, $S(z) = C(z) \|\sigma_i \delta_{ij}\|_{i,j=1,n}^{-1}$, $\mathcal{J}_n(z^n) = \sum_{i=1}^n S(z_i) S^T(z_i)$.

Теорема 3.3 [144]. Пусть m -мерные векторы $\{z_i^0\}_{i=1}^n$ такие, что матрица $S(z)$ удовлетворяет неравенству $\text{след} [S^T(z) \times \times \mathcal{J}_n^{-1}(z^{0n}) S(z)] \leq 1, \forall z \in Z$. Тогда оптимальное управление $z^*(\tau)$ имеет вид (3.34), если временные интервалы T_j удовлетворяют условиям (3.33).

В общем случае произвольной матрицы простой структуры рассуждения, аналогичные приведенным, позволяют построить субоптимальные управления [144].

§ 4. Идентификация нелинейных систем «вход — выход»¹

Основные определения

Задача идентификации характеристик системы является одной из трех задач, встречающихся в моделировании. Сформулируем их. Для этого будем различать три основных объекта: u — вход, S — собственно система, y — отклик, или выход. Если необходимо

по заданному входу u и известному описанию системы S отыскать выход y , или

найти такой вход u , воздействие которого на известную систему S вызовет требуемую реакцию y , или

по известным входным и выходным сигналам u, y описать систему S ,

¹ Данный параграф написан совместно с Д. Д. Чеканом.

то говорят, что имеют дело с задачей соответственно анализа, управления и идентификации [32, 63, 90, 111]. Последняя из них: задача идентификации, или структурного синтеза,— это, по словам Заде [113], «определение на основании анализа входа и выхода такой системы из класса заданных систем, которой эквивалентна исследуемая система». Аналогичное определение задачи идентификации принадлежит Эйххоффу [112]. Отличие определения Эйххоффа от приведенного заключается в том, что в нем вместо «определения ...системы из класса заданных систем...» говорится о построении оптимальной, в некотором смысле, модели, т. е. математического описания системы. Такое определение несколько уже предыдущего, однако больше подходит к конкретной, решаемой в этой работе задаче, поэтому дальнейшие ссылки на определение задачи идентификации будут относиться к нему.

Согласно определению, кроме входных и выходных сигналов исследуемой системы в задаче идентификации важна ее принадлежность к определенному классу заданных систем. Как правило, классы характеризуют довольно общими признаками, такими, как линейность, стационарность, непрерывность, стохастичность. В меру необходимости перечисленные характеристики дополняются иными. Возможна также постановка задачи, в которой не указана принадлежность системы к какому-либо классу. В этом случае ее классифицируют на начальных этапах идентификации [89].

Класс исследуемой системы, ее входные и соответствующие им выходные сигналы — это та необходимая информация, при наличии которой можно приступить к построению модели. Дополнительные сведения, в частности касающиеся структуры и значений параметров системы, облегчают процесс идентификации [32]. Степень использования априорной информации и ее достоверность влияют на математическую постановку задачи и способы ее решения. В этом плане независимо от класса систем различают два подхода, каждый из которых охарактеризуем.

Для первого характерно наличие обширной априорной информации о системе: считается, что известна структура системы и класс моделей, к которому она относится [32]. В результате решения задачи идентификации необходимо отыскать параметры системы. В такой постановке задачу идентификации называют идентификацией параметров, или идентификацией в узком смысле (см. также [гл. II, § 2; 7]).

К настоящему времени накоплен значительный теоретический и практический опыт решения задачи идентификации в узком смысле [32, 88, 89, 112, 113, 141]. В большинстве случаев в них рассматриваются линейные системы с разнообразной формой представления моделей, таких, как дифференциальные или разностные уравнения, импульсные характеристики и т. д.

В инженерной практике идентификация в узком смысле часто используется в процессе проектирования систем: на этапах аванпроекта по заданной (выбранной) структуре производят выбор

параметров, на эскизном их уточняют, на техническом и этапах изготовления опытных образцов, отработки в составе изделия, испытаний параметры идентифицируют с учетом характеристик аппаратуры. В функционирующих системах автоматического управления и регулирования для улучшения точности управления объектом или процессом с изменяющимися или неполностью определенными характеристиками (параметрами) может быть предусмотрена идентификация параметров с целью использования их более точных значений в формировании управляющих воздействий.

Второй подход к идентификации систем отличается от первого скудностью информации об исследуемой системе, что вынуждает рассматривать ее как «черный ящик». Это, с одной стороны, дополнительные трудности, связанные с выбором подходящей структуры математической модели, использованием сложного математического аппарата и т. д., которые, с другой стороны, окупаются возможностью освободиться от влияния конкретной природы отдельной задачи и этим расширить использование полученных результатов на классы систем с различной физической сущностью, а также смоделировать такие системы, как биологические, социологические, психологические и др., в которых определение структуры весьма затруднительно или невозможно.

Решение задачи идентификации с использованием второго подхода называют идентификацией в широком смысле [32, 89, 112]. Такие методы стали предметом внимания специалистов только в последние годы. По сравнению с первым подходом второй более общий [32], результаты здесь скромные, что объясняется трудностью задачи [112].

Остановимся более подробно на обзоре существующих методов идентификации нелинейных систем в широком смысле, введя предварительно необходимые для этого определения.

Заметим, что в задаче идентификации естественный метод представления систем состоит в том, чтобы рассматривать их как некоторое соответствие между элементами классов входных и выходных сигналов. Такой подход требует использования аппарата теории функциональных пространств. Поэтому обозначения, которые будут введены далее, соответствуют обозначениям, установившимся в функциональном анализе. В частности, обозначим R , R^n , $R^{n \times m}$ — пространства соответственно скалярных, векторных и матричных величин; $L_2[0, \infty)$ — функциональное пространство интегрируемых по Лебегу с квадратом функций. Считаем, что множество $\{t\} = T$ — некоторое упорядоченное конечное или бесконечное подмножество множества положительных вещественных чисел R^+ . Исходя из физических соображений, упорядочим моменты времени $t \in T$ так, чтобы прошедшее время t' предшествовало будущему t'' , т. е. чтобы $t' < t'' \Leftrightarrow t'' - t' > 0$.

Согласно современным представлениям в теории систем нет и не может быть единственного определения понятия системы [56].

Это определение зависит от уровня абстрагирования. В настоящей работе подходящее определение термина «система» может быть изложено на теоретико-множественном языке [33, 56, 132]: система — подмножество S множества V , где $V = V_1 \times V_2 \times \dots \times V_n$ — прямое декартово произведение семейства множеств $\{V_i\}$ ($i = \overline{1, n}$). Каждое множество V_i может, в свою очередь, содержать подмножества. Таким образом могут быть описаны весьма сложные системы.

В задаче идентификации в широком смысле будем оперировать только двумя множествами V_1 и V_2 , первое из которых — множество входных сигналов, второе — выходных. Тогда система

$$S \subset V_1 \times V_2. \quad (4.1)$$

Такую систему называют системой «вход — выход» [63, 132].

Формализованное описание поведения системы, к которому сводится задача идентификации, требует введения структуры для каждой из совокупности элементов V_i , составляющих объект, или введения структуры непосредственно для самих объектов системы. Первое приводит к понятию временной системы [85, 63], второе — алгебраической [48, 56, 105].

В последнее время интерес к временным системам возрос. Объяснить это можно естественностью формы представления процессов во временной области, с одной стороны, и успехами в моделировании нелинейных систем [1, 85, 137, 139] — с другой.

Обозначим A — непустое ($A \neq \emptyset$) множество мгновенных значений входных величин, B — множество мгновенных значений выходных величин. Это означает, что конкретные входные воздействия принадлежат в данный момент времени t множеству A . В общем случае считаем, что допустимые значения входных воздействий есть подмножество декартового произведения множеств $A \times T$. То же можно сказать и о выходных величинах, значения которых принадлежат $B \times T$.

Определение 4.1 [63]. Пусть A^T и B^T — множества всевозможных отображений $u: T \rightarrow A$ и $y: T \rightarrow B$. Если множества $U \subset A^T$ и $Y \subset B^T$ описывают входные воздействия и выходные величины, то множества A и B называют алфавитами соответственно входных воздействий (входов) и выходных величин (выходов) системы; множества U и Y называют временными объектами системы. Их элементы $u: T \rightarrow A$ и $y: T \rightarrow B$ — абстрактные функции времени, значения которых в момент времени t_i обозначим $u(t_i)$ и $y(t_i)$, а текущие значения $u(t)$, $y(t)$ или просто u , y . В случаях, исключающих путаницу в обозначениях, через t будет обозначаться фиксированный момент времени.

В реальных системах промежутки времени, на которых рассматривается система, и величины входных сигналов ограничены. Поэтому считаем, что $U \subset L_2$. Следовательно, для системы с ограниченным коэффициентом усиления также $Y \subset L_2$.

Следует обратить внимание на то, что полученная модель системы должна быть физически реализуемой или, причиной (каузальной). Причинность — одно из основных понятий теории систем является естественным ограничением на класс математических моделей, описывающих эти системы. Однако, как справедливо отмечено в работе [85], различные авторы по-разному рассматривают вопрос реализуемости систем. Одно бесспорно: в задаче идентификации пригодность результата к практическому использованию определяется именно причинностью полученной модели. До недавних пор причинность вводилась как условие, например, для импульсной характеристики линейной системы [22], однако в последнее время в теории систем понятие причинности стало связываться со свойством системы [85]. Положили начало этому, по-видимому, в 30-е годы Пэли и Винер, которым удалось связать свойство причинности линейных, инвариантных во времени систем с условием для модуля частотной характеристики [87]. Теорема, устанавливающая эту связь, подробно изложена также Заде и Дезоером в работе [41]. В дальнейшем этой проблеме уделяли внимание ряд авторов в связи с решением задач, относящихся к теории устойчивости [117, 118, 143, 145, 146], синтеза регуляторов [130, 133] и др. В последнее время появился ряд публикаций, затрагивающий принцип причинности в связи с решением задачи идентификации [121, 134, 138]. В некоторых из перечисленных работ, в частности по теории устойчивости, и особенно интересующей нас идентификации в широком смысле [134], использование основополагающих моментов из теории причинности, таких, как теория интегрального трансформатора в гильбертовом пространстве, является основой, на которой эти работы строятся. Поэтому целесообразно кратко остановиться на некоторых полученных результатах теории причинности, используемых в рассматриваемой далее литературе.

Применяя материалы работы [63], считаем систему S физически реализуемой, если она существует или может быть физически осуществлена. Это условие можно расчленить на два требования:

- 1) выход системы в текущий момент времени не должен зависеть от будущих входных воздействий;
- 2) прошлое должно однозначно определять будущее.

Первое из этих требований — это условие причинности (неупреждаемости), второе связано с однозначностью преобразования входа в выход.

Причинное отображение, как правило, определяют с помощью ортогонального проектора P' в L_2 .

Определение 4.2. Оператор P' называется проектор-функцией усечения [121], если $P'^0 = 0$, $P'^\infty = I$,

$$(P'x)(s) = \begin{cases} x(s), & t \leq s, \\ 0, & t > s, \end{cases} \quad (4.2)$$

для некоторой функции $x(s)$ на множестве действительных чисел s , $t \in T$, t_0 — наименьший элемент множества T , t_∞ — наибольший, I — тождественный оператор, действие которого сводится к следующему: $Ix(s) = x(s)$. Семейство $R = \{P^t : t \in T\}$ проекторов на L_2 называют разложением единицы [119], если, кроме условия (4.2), выполняется дополнительно

- 1) $P^k \supseteq P^t$ для $k \geq t$;
- 2) R сильно замкнуто.

В последнем требовании имеется в виду, что если $\{P^t\}$ таково, что $P^k x \rightarrow Px$ при $k \rightarrow \infty$, $\forall x \in L_2$, где P — линейный оператор в L_2 , то $P \in R$.

Пусть некоторый оператор K описывает работу системы, т. е. $K : U \rightarrow Y$.

Определение 4.3. Отображение K в пространстве L_2 (определено как однозначное отображение $L_2 \rightarrow L_2$) называется причинным [63, 85, 100], если выполняется равенство

$$P^t K = P^t K P^t, \quad \forall t \in T. \quad (4.3)$$

Аналогично (4.2) вводится оператор усечения P_t [119]:

$$(P_t x)(s) = \begin{cases} 0, & t \leq s, \\ x(s), & t > s, \end{cases} \quad (4.4)$$

с помощью которого определяется антипричинный оператор.

Определение 4.4. [85, 119]. Отображение $K : L_2 \rightarrow L_2$ называется антипричинным, если выполняется равенство

$$P_t K = P_t K P_t, \quad \forall t \in T. \quad (4.5)$$

Сравнивая (4.2) и (4.4), убеждаемся, что между операторами P^t и P_t существует следующая связь:

$$P_t = I - P^t. \quad (4.6)$$

Установить причинность или антипричинность оператора, описывающего систему, не всегда удастся (см. пример в [85]). Пусть дано отображение $K : u \rightarrow y$, суть которого сводится к изменению величины входного сигнала в зависимости от времени, т. е. $y = K(t)u$, где $K \in R^1$. Такое отображение не зависит как от прошлых, так и от будущих значений входного сигнала. Поэтому его невозможно отнести ни к причинному, ни к антипричинному отображению. Операторы такого типа называют операторами с нулевой памятью [119]. С их помощью описывают безынерционные системы.

Здесь приведены не все типы причинных операторов. Продолжить их перечень целесообразно на более строгой математической основе. Для удобства в дальнейшем термин «причинность» будем употреблять для всех типов операторов, в которых указано отношение к свойству причинности.

Работы [29, 30] — основополагающие, в них содержится математический аппарат для дальнейшего изучения свойства причинности систем. Появление перевода [30] на английский язык повлияло на работу Де Сантиса [119] по изучению причинной декомпозиции систем. Позже он в соавторстве с Портером использовал эту работу при изучении роли причинности в существовании и единственности нелинейных систем с обратной связью и связи между причинностью и рядом Вольтерра [121]. Основным для нас будет понятие трансформатора, в частности интегрального.

Пусть задано некоторое семейство ортопроекторов $R = \{P^t\}$, являющееся разложением единицы. Из множества R можно выделить конечное число ортопроекторов, которое называют разбиением. Обозначим разбиение ξ_1 , таким же образом получим разбиение ξ_2 . Объединение разбиений ξ_1 и ξ_2 это $\xi = \xi_1 \cup \xi_2$, состоящее из всех проекторов, принадлежащих ξ_1 и ξ_2 . На объединении множества всевозможных разбиений $\xi = \xi_1 \cup \xi_2 \cup \xi_3 \cup \dots \cup \xi_n$ рассматривают произвольную оператор-функцию $K(P^t)$ и образуют сумму

$$I(\xi) = \sum_{j=1}^n K(Q^{tj}) \Delta P^{tj}, \quad K(Q^{tj}) \in \mathcal{L}(L_2, L_2), \quad (4.7)$$

где $\Delta P^{tj} = P^{tj} - P^{tj-1}$; Q^{tj} — оператор из R такой, что $P^{tj-1} \leq Q^{tj} \leq P^{tj}$. Если пределом по норме $I(\xi)$ является какой-либо линейный непрерывный оператор, то говорят, что

$$\int K(P^t) dP \quad (4.8)$$

сходится.

Для отличия операторов, определенных на гильбертовом пространстве, от операторов, действующих на пространстве операторов, последние называют трансформаторами [30]. В конкретном случае трансформатор (4.8) является интегральным.

Изменяя исходную сумму (4.7) на

$$\sum_{j=1}^n \Delta P^{tj} K(Q^{tj}), \quad (4.9)$$

или на

$$\sum_{j=1}^n \Delta P^{tj} K(Q^{tj}) \Delta P^{tj}, \quad (4.10)$$

получаем трансформатор

$$\int dPK(P^t), \quad (4.11)$$

или

$$\int dPK(P^t) dP. \quad (4.12)$$

Под знаком интеграла в выражениях (4.8), (4.11), (4.12) в скобках стоит индекс (m) , если в соответствующих суммах (4.7), (4.9), (4.10) $Q^t_i = P^{t_i-1}$, или индекс (M) — $Q^t_i = P^t_i$ [30].

Интегральные трансформаторы вида (4.8), (4.11), (4.12) позволили Де Сантису обобщить работы Портера [135] и Сейкса [140] и формализовать классификацию операторов по их принадлежности к свойству причинности [121].

Определение 4.5. Оператор K называют оператором с нулевой памятью, если он одновременно причинный и антипричинный.

Определение 4.6. Оператор K причинный в сильном смысле (антипричинный в сильном смысле), если он причинный (антипричинный) и $\int dP^t K dP^t = \int dP^t K (P^t) \left[\int dP_t K (P_t) = \int dP_t K (P_t) dP_t \right]$.

Определение 4.7. Оператор K причинный в строгом смысле (антипричинный в строгом смысле), если $K = (m) \int dPKP^t \left[K = (M) \int dPKP_t \right]$ и $\int dPKdP = 0$.

Определение 4.8. Оператор K перекрестно причинный, если $\int dPKdP = 0$; из $P^t u = 0$ следует $P^t K u = 0$, а из $P_t u = 0$ следует $P_t K u = 0$.

Определение 4.9. Оператор K перекрестно причинный в сильном смысле, если $(M) \int dPKP^t = (m) \int dPKP_t = \int dPKdP = 0$.

В этой же работе приведена геометрическая иллюстрация данных определений, которую рассмотрим ниже.

Дано гильбертово пространство разложения $[L_2(-\infty, \infty), P^t]$ и предполагается, что оператор $K: u \rightarrow y$ определен так: $y(t) = u(t + \tau_1)$ и $u(t + \tau_2)$, $u, y \in [L_2(-\infty, \infty), P^t]$, где τ_1, τ_2 — действительные числа. Характер причинности оператора K определяется нахождением точки с координатами (τ_1, τ_2) на плоскости R^2 . Например, если это точка $(0, 0)$, то $y(t) = u(t)$ и $u(t)$ — оператор K с нулевой памятью. При $(\tau_1, \tau_2) \neq (0, 0)$, в частности $\tau_1 > 0, \tau_2 > 0$, оператор K антипричинный, при $\tau_1 < 0, \tau_2 < 0$ — причинный в строгом (а значит, и в сильном) смысле, при $\tau_1 < 0, \tau_2 = 0$ — причинный в сильном смысле, при $\tau_1 > 0, \tau_2 < 0$ или $\tau_1 < 0, \tau_2 > 0$ — перекрестно причинный, причем в первом варианте — перекрестно причинный в сильном смысле.

Об операторах причинных (антипричинных) в строгом смысле говорят, что они описывают системы, выход которых в данный момент времени не зависит от входа в этот же момент времени при ненулевом входном сигнале в прошедшем (будущем) времени [120].

Дальнейшее изложение теории причинных операторов, описывающих работу нелинейных систем в гильбертовом пространстве, требует изложения результатов работ [119, 120], которые посвящены изучению свойств операторов и вопросам причинной канонической декомпозиции.

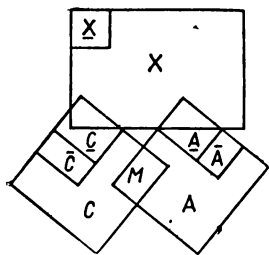


Рис. 46. Соотношение между операторами алгебры.

Для различия операторов с различной причинностью вводят множество индексов $\mathcal{A} = \{A, C, M, X, \bar{A}, \bar{C}, \bar{X}, \bar{M}\}$, где A — антипричинный; \bar{C} — причинный; M — с нулевой памятью; X — перекрестно причинный; \bar{A} — антипричинный в сильном смысле; \bar{C} — причинный в сильном смысле; \bar{X} — перекрестно причинный в

сильном смысле; \bar{A} — антипричинный в строгом смысле; \bar{C} — причинный в строгом смысле.

На гильбертовом пространстве разложения $[H, P']$ ограниченные операторы K_β , $\beta \in \mathcal{A}$ образуют линейное, нормированное и полное относительно метрики пространство операторов \mathcal{U} . На \mathcal{U} определены операции сложения и умножения на скаляр, нулевое преобразование и произведение двух элементов (операторов), поэтому оно представляет собой линейную алгебру. Соотношения между операторами этой алгебры, классифицированные согласно индексному множеству \mathcal{A} , представлены на рис. 46.

Из систем, описываемых на гильбертовом пространстве разложения, отличают системы, которые могут быть описаны операторами типа $\alpha \in \mathcal{A}^1$, где $\mathcal{A}^1 = \{\bar{A}, \bar{C}, M, \bar{X}\}$. Для этих четырех типов операторов характерной особенностью является их взаимная ортогональность в пространстве \mathcal{U} , т. е. если некоторый оператор $K : [H, P'] \rightarrow [H, P']$ может быть представлен как K_α и L_β , причем $\alpha \neq \beta$, то такой оператор может быть только нулевым. Это обстоятельство позволяет представить оператор K в виде суммы или произведения операторов типа α . В первом случае говорят об аддитивной, а во втором мультипликативной канонической причинной декомпозиции. Компоненты аддитивного причинного разложения представляют следующим образом:

$$K_M = \int dP K dP; \quad K_{\bar{A}} = (m) \int dP [K - K_M] P_t;$$

$$K_{\bar{C}} = (M) \int dP [K - K_M] P'; \quad K_{\bar{X}} = K - K_{\bar{A}} - K_{\bar{C}} - K_M. \quad (4.13)$$

В качестве примера такого разложения приводится полиномиальный оператор $K : u \rightarrow y$, $u, y \in [L_2(-\infty, \infty), P']$ следующего вида:

$$y(t) = Ku(t) = h_0(t)u(t) + \int_{-\infty}^{\infty} h_1(t, s)u(s)ds +$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_2(t, s_1, s_2) u(s_1) u(s_2) ds_1 ds_2 + \dots \\
& \dots + \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} h_n(t, s_1, s_2, \dots, s_n) u(s_1) \dots u(s_n) ds_1 \dots ds_n, \quad (4.14)
\end{aligned}$$

где $h_0(t) \in L_{\infty}(-\infty, \infty)$; $h_i(t, s_1, \dots, s_i)$ — ядро i -го порядка такого, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} h_i^2(t, s_1, \dots, s_i) ds_1 \dots ds_i < \infty, \quad \forall i = \overline{1, n}. \quad (4.15)$$

Оператор $K = K_1 + K_2 + K_3 + K_4$, где каждый из членов суммы определяется следующими преобразованиями:

$$K_1 u(t) = h_0(t) u(t); \quad (4.16)$$

$$K_2 u(t) = \sum_{i=1}^n \int_{-\infty}^t \dots \int_{-\infty}^t h_i(t, s_1, \dots, s_i) u(s_1) \dots u(s_i) ds_1 \dots ds_i; \quad (4.17)$$

$$K_3 u(t) = \sum_{i=1}^n \int_t^{\infty} \dots \int_t^{\infty} h_i(t, s_1, \dots, s_i) u(s_1) \dots u(s_i) ds_1 \dots ds_i; \quad (4.18)$$

$K_4 = K - K_1 - K_2 - K_3$. Используя выражения (4.13), нетрудно убедиться, что $K_M = K_1$, $K_{\underline{C}} = K_2$, $K_{\underline{A}} = K_3$, $K_{\underline{X}} = K_4$.

На гильбертовом пространстве разложения $[H, P^t]$ некоторые системы не имеют канонического разложения, в частности системы, описываемые дифференциальными уравнениями, имеющими постоянные решения. Для них трансформатор $\int dPKP^t$ не определен.

Математическое описание нелинейных систем с помощью полиномиальных операторов

Рассмотрим временную систему «вход — выход» S , описанную соотношением (4.1). Для этого определим структуру V_1, V_2 . Учитывая принятые обозначения, полагаем $V_1 = U \times T$, $V_2 = Y \times T$. Отображение $K: u \rightarrow y$ с областью значений множества $\{y_i\} \subseteq Y \times T$ ($i \in I$, где I — индексное множество, состоящее из целых чисел $0, 1, 2, \dots$), определенное на множестве $\{u_i\} \subseteq U \times T$, представляет собой формализованное математическое описание системы S . Остановимся на явном представлении отображения K , описывающего нелинейные системы.

Впервые зависимость между входом и выходом нелинейной системы была найдена Винером, который использовал для этого теорию рядов Вольтерра [24]. Теоретическое обоснование приме-

нения рядов Вольтерра для этой цели принадлежит Фреше, показавшему, что любое непрерывное отображение, определенное на множестве функций $\{u_i\}$ при $T < \infty$, может быть представлено интегралом Вольтерра, и Бриллианту, распространившему это обоснование на бесконечный интервал времени [84].

Идентификация нелинейных систем с помощью ряда Вольтерра (4.14) сводится к нахождению ядер $h_n(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n)$.

Известны способы нахождения ядер ряда (4.14), два из которых предложены Винером [115]. В первом способе Винер воспользовался функциями Лагерра $l_n(t)$, ортонормированными на промежутке $[0, \infty)$. Относительно этих функций входной сигнал может быть представлен коэффициентами

$$V_p(t) = \int_0^\infty l_p(\tau) u(t - \tau) d\tau, \quad p \in I. \quad (4.19)$$

Для входного сигнала $u(t)$, являющегося гауссовым случайным процессом с единичной спектральной плотностью, выход системы записывают в общем виде с помощью функции R , зависящей от входного сигнала $u(t)$, а значит, согласно (4.19) и от коэффициентов Лагерра V_p :

$$y(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} R(V_0, V_1, \dots, V_n). \quad (4.20)$$

Далее, функцию R представляют полиномом Эрмита, в котором переменными являются коэффициенты V_p случайного процесса $u(t)$:

$$y(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m_0=0}^{\infty} \sum_{m_1=0}^{\infty} \dots \sum_{m_n=0}^{\infty} C_{m_0 m_1, \dots, m_n} H_{m_0}(V_0(t)) \dots H_{m_n}(V_n(t)), \quad (4.21)$$

где $H_n(\cdot)$ — нормированные полиномы Эрмита,

$$H_{m_i}(V_i(t)) = (-1)^{m_i} 2^{-\frac{m_i}{2}} \frac{e^{[V_i(t)]^2}}{\sqrt{m_i!}} \frac{d^{m_i}}{dV_i^{m_i}} (e^{-V_i^2}). \quad (4.22)$$

Ряд (4.21) называют рядом Винера, а коэффициенты $C_{m_0 \dots m_n}$ — коэффициентами Винера. Найти их аналитическое выражение можно, умножив левую и правую части уравнения (4.21) на

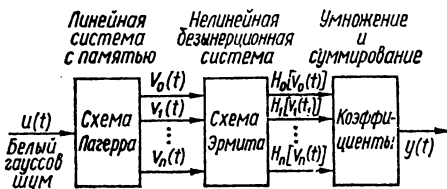
$$H_{m_0}(V_0(t)) H_{m_1}(V_1(t)) \dots H_{m_n}(V_n(t)) e^{-\frac{1}{2}(V_0^2(t) + V_1^2(t) + \dots + V_n^2(t))} \quad (4.23)$$

и усреднив его на интервале $(-\infty, +\infty)$. При этом используют принцип эргодичности, позволяющий усреднение по времени в

Рис. 47. Схема моделирования нелинейной системы методом Винера.

правой части уравнения заменить усреднением по множеству и учитывают ортогональность полиномов Эр-

мита с весом $e^{V_i^2}$



$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} H_{m_i}(V) H_{m_j}(V) e^{-V^2} dV = \begin{cases} 1, & m_i = m_j, \\ 0, & m_i \neq m_j. \end{cases} \quad (4.24)$$

В конечном итоге коэффициенты Винера равны среднему значению произведения

$$C_{m_0 m_1, \dots, m_n} = y(t) H_{m_0}(V_0(t)) \dots H_{m_n}(V_n(t)). \quad (4.25)$$

Выходы модели для произвольного входного сигнала $u(t)$ находят, предварительно получив разложение по функциям Лагерра известной входной функции

$$u(t) = V_0 l_0(t) + V_1 l_1(t) + \dots + V_n l_n(t). \quad (4.26)$$

Для этого реализуют вычисления по формуле (4.19). Формулой (4.26) представлен выход линейной системы с памятью. Пропуская входной сигнал через n таких параллельно включенных линейных систем с характеристиками $l_0(t), l_1(t), \dots, l_n(t)$, получаем на выходе коэффициенты $V_0(t), V_1(t), \dots, V_n(t)$. Далее коэффициенты $V_i(t)$ используются для построения полиномов Эрмита и окончательно выход находят по формуле (4.21), в которой коэффициенты Винера известны из эксперимента с белым гауссовым входным процессом. Схема моделирования нелинейной системы методом Винера представлена на рис. 47.

Рассмотренный метод Винера имеет в большей степени теоретическое, чем практическое значение. Вытекает этот вывод из трудности практической реализации. Так, при n значениях коэффициентов разложения входного сигнала и p значениях коэффициентов в полиноме Эрмита необходимо вычислить p^n коэффициентов Винера. Практически для идентификации нелинейной системы второго порядка необходимо вычислить 10^{10} коэффициентов [115].

С целью упрощения процедуры вычисления Бозе предложил вместо полиномов Эрмита в выражении (4.21) использовать функцию

$$Q_k(v) = \begin{cases} 1, & \text{если } v \text{ содержится в } (t_k, t_k + \epsilon) \text{ } \epsilon > 0, \\ 0, & \text{в противном случае } t_k \in T. \end{cases} \quad (4.27)$$

Аналогично ряду (4.21) им получен ряд

$$y(t) = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ m \rightarrow \infty}} \sum_{k_0=1}^m \sum_{k_1=1}^m \dots \sum_{k_n=1}^m D_{k_0 k_1, \dots, k_n} Q_{k_0}(V_0(t)) \dots Q_{k_n}(V_n(t)), \quad (4.28)$$

в котором коэффициенты D_{k_0, \dots, k_n} вычисляются по формуле

$$D_{k_0 k_1, \dots, k_n} = \frac{y(t) Q_{k_0}(V(t)) \dots Q_{k_n}(V_n(t))}{Q_{k_0}(V_0(t)) Q_{k_1}(V_1(t)) \dots Q_{k_n}(V_n(t))}. \quad (4.29)$$

Дальнейшее упрощение практического использования ряда Винера предложил Баррет, который, используя возрастающие функции Эрмита

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^{(0)}[u(t)] &= 1, \\ \mathcal{H}^{(1)}[u(t)] &= u(t), \\ \mathcal{H}^{(2)}[u(t_1), u(t_2)] &= u(t_1) u(t_2) - \delta(t_2 - t_1), \\ &\dots \end{aligned} \quad (4.30)$$

получил ряд следующего вида:

$$y(t) = \sum_n \frac{1}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} K_n(t, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) \mathcal{H}^{(n)}[u, \tau_1, \dots, \dots, \tau_n] d\tau_1 \dots d\tau_n, \quad (4.31)$$

где ядра

$$K_n(t, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) = \overline{y(t) \mathcal{H}^{(n)}[u, \tau_1, \dots, \tau_n]} \quad (4.32)$$

определяются для белого гауссова процесса.

Предлагаемый Барретом алгоритм идентификации нелинейных систем также громоздок в практическом использовании из-за сложности вычислений интегралов в правой части выражения (4.31). С целью упрощения этих вычислений Винер модифицировал подход, предложенный Барретом, использовав для этого процедуру ортогонализации Грамма — Шмидта для получения нового функционального ряда.

Как и во всех предыдущих случаях, в качестве входного процесса $u(t)$, используемого для нахождения ядер ряда, выбираем белый гауссов шум. Для функционала первой степени

$$\int_{-\infty}^{\infty} K_1(\tau) u(t - \tau) d\tau + K_0, \quad (4.33)$$

где K_0 и K_1 — ядра нулевого и первого порядков, определяем такое K_0 , при котором сумма двух членов ряда (4.33) была бы ортогональна любой константе C , т. е. выполнялось равенство

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \left[\int_{-\infty}^{\infty} K_1(\tau) u(t - \tau) d\tau + K_0 \right] C d\tau = 0. \quad (4.34)$$

Для усеченного ряда, состоящего из трех членов:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K_2(\tau_1, \tau_2) u(t - \tau_1) u(t - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 + \int_{-\infty}^{\infty} K_1(\tau_1) u(t - \\ - \tau_1) d\tau_1 + K_0, \end{aligned} \quad (4.35)$$

находим ядра K_1 и K_0 , удовлетворяющие условию ортогональности любой константе и всем функционалам первой степени.

Процесс ортогонализации продолжаем до получения функционала нужной степени n , который ортогонален всем иным функционалам степени, меньшим n . В результате получаем функционал

$$G_1[K_1, u(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} K_1(\tau) u(t - \tau) d\tau, \quad (4.36)$$

который называется G -функционалом Винера первой степени и удовлетворяет условию (4.34) для суммы (4.33), функционал

$$G_2[K_2, u(t)] = \iint_{-\infty}^{\infty} K_2(\tau_1, \tau_2) u(t - \tau_1) u(t - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 - \\ - N \int_{-\infty}^{\infty} K_2(\tau, \tau) d\tau \quad (4.37)$$

называется G -функционалом Винера второй степени и удовлетворяет условию ортогональности для суммы (4.35), G -функционал Винера третьей степени имеет вид

$$G_3[K_3, u(t)] = \iiint_{-\infty}^{\infty} K_3(\tau_1, \tau_2, \tau_3) u(t - \tau_1) u(t - \tau_2) u(t - \\ - \tau_3) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 - 3N \iint_{-\infty}^{\infty} K_3(\tau_1, \tau_1, \tau_2) u(t - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2, \quad (4.38)$$

где N — мощность спектральной плотности входного шума.

Под ортогональностью функционалов $\{G_i\}$ подразумевают среднее по времени значение произведения

$$G_i[K_i, u(t)] G_j[K_j, u(t)] = 0, \quad \forall i, j \leq n, i \neq j. \quad (4.39)$$

Функциональный ряд Винера, построенный из ортогональных функционалов, запишется так:

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} G_n[K_n, u(t)]. \quad (4.40)$$

Винером было доказано, что G -функционалы, входящие в ряд (4.40), являются полиномами Эрмита. Учитывая это, ряд может быть записан следующим образом:

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} H_n[K_n, u(t)]. \quad (4.41)$$

Для определения реакции нелинейной системы на произвольный входной сигнал $u(t)$ необходимо иметь ядра $\{K_i\}$, которые, в частности, могут быть определены по взаимной корреляции реакции исследуемой системы $y(t)$ на входной сигнал в виде

нормального белого шума $y_{\text{ш}}(t)$ и выходного сигнала $y_n(t)$ системы, полученного в результате выборки отдельных значений входного сигнала в различные моменты времени, причем для определения ядра первого порядка требуется сигнал

$$y_1(t) = \int_0^t \delta(t - \tau_1) u(t - \tau) d\tau, \quad \tau_1, \tau \in [0, t]; \quad (4.42)$$

второго —

$$y_2(t) = \int_0^t \int_0^t \delta(\tau_1 - \sigma_1) \delta(\tau_2 - \sigma_2) u(t - \tau_1) u(t - \tau_2) dv_T, \quad (4.43)$$

$$\sigma_1, \sigma_2, \tau_1, \tau_2 \in [0, t];$$

или в общем виде для ядра n -го порядка

$$y_n(t) = \int_0^t \dots \int_0^t \delta(\tau_1 - \sigma_1) \dots \delta(\tau_n - \sigma_n) \prod_{r=1}^n u(t - \tau_r) \times \\ \times dv_T, \quad r \in I, \sigma \in T, \sigma, \tau \in [0, t], \quad (4.44)$$

где $dv_T = d\tau_1 \dots d\tau_n$. Учитывая выражения (4.40), (4.42) — (4.44),

а также свойство ортогональности G -функционалов $\int_{-\infty}^{\infty} G_m[K_m, u(t)] \times \times y_m(t) dt = \delta_{mn}$, $m, n \in I$, где δ_{mn} — символ Кронекера, получаем взаимную корреляцию

$$\overline{y(t) y_1(t)} = NK_1(\sigma_1), \quad (4.45)$$

$$\overline{y(t) y_2(t)} = 2NK_2(\sigma_1, \sigma_2), \quad (4.46)$$

или для общего случая

$$\overline{y(t) y_n(t)} = n! N^n K_n(\sigma_1, \dots, \sigma_n). \quad (4.47)$$

Из выражений (4.45) — (4.47) определяются ядра $\{K_i\}$ функционального ряда модели исследуемой системы.

Формулы (4.44) — (4.46) имеют одно ограничение: ими невозможно воспользоваться при $\sigma_1 = \sigma_2 = \dots = \sigma_n$. Несколько иное их представление, разрешенное относительно

$$K_n(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) = \frac{1}{n! N^n} \overline{\left\{ y(t) - \sum_{m=0}^{n-1} G[K_m, u(t)] \right\} y_n(t)}, \quad (4.48)$$

лишено указанного недостатка. В целом нахождение данным методом ядер Винера $\{K_i\}$ функционального ряда, описывающего нелинейную систему, как и в предыдущих методах, характеризуется значительным объемом вычислений. Для системы с одним входом ядро n -го порядка требует $(n + m - 1)! / (n! (m - 1)!)$ вычислений, где $m = \mu / \Delta t$, μ — время памяти системы, Δt — дискрет вычислений. Тем не менее встречаются работы [116], использующие данный подход описания нелинейных систем и нахождения ядер.

Используя ортогональные моменты ядер, идентифицируют также нелинейные нестационарные системы. Объем вычислений в процессе идентификации как стационарных, так и нестационарных систем одинаков [85].

Нелинейная система может быть описана непосредственно рядом Вольтерра (4.14). Для нахождения ядер этого ряда при $n = 2$ решают систему интегральных уравнений [115]:

$$\bar{z}(t) = \int_0^{\infty} h_1(\tau_1) u(t - \tau_1) d\tau_1 + \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} h_2(\tau_1, \tau_2) u(t - \tau_1) u(t - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2, \quad (4.49)$$

$$\overline{z(t) u(t - \sigma)} = \int_0^{\infty} h_1(\tau_1) \overline{u(t - \tau_1) u(t - \sigma)} d\tau_1 + \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} h_2(\tau_1, \tau_2) \overline{u(t - \tau_1) u(t - \tau_2) u(t - \sigma)} d\tau_1 d\tau_2, \quad (4.50)$$

$$\overline{z(t) u(t - \sigma_1) u(t - \sigma_2)} = \int_0^{\infty} h_1(\tau_1) \overline{u(t - \tau_1) u(t - \sigma_1) u(t - \sigma_2)} d\tau_1 + \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} h_2(\tau_1, \tau_2) \overline{u(t - \tau_1) u(t - \tau_2) u(t - \sigma_2)} d\tau_1 d\tau_2, \quad (4.51)$$

полученных в результате минимизации методом вариации постоянной квадратической ошибки $[z(t) - y(t)]^2$ наблюдаемого выхода системы $z(t)$ и модели $y(t)$ при произвольном входном сигнале $u(t)$. Решение уравнений (4.49) — (4.51) затруднительно. Для этого разработан ряд вычислительных методов, среди которых итеративная процедура оптимизации и последовательных подстановок, градиентный метод, метод дискретизации по времени. Вычисление ядер упрощается, если вместо произвольного входного сигнала $u(t)$ использовать нормальный белый шум единичной спектральной плотности. Тогда система уравнений (4.49) — (4.51) примет вид

$$\bar{z}(t) = \int_0^{\infty} h_2(\tau_1, \tau) d\tau, \quad (4.52)$$

$$\overline{z(t) u(t - \sigma_1)} = h_1(\sigma_1), \quad (4.53)$$

$$\overline{z(t) u(t - \sigma_1) u(t - \sigma_2)} = z\delta(\sigma_1 - \sigma_2) + 2h_2(\sigma_1, \sigma_2). \quad (4.54)$$

Для моделей с более высоким порядком ядер, чем $n = 2$, вычислительные сложности остаются. Для класса нелинейных стационарных систем с детерминированным входным воздействием нахождение ядер Вольтерра возможно по экспериментальным данным, если в качестве входного сигнала выбрать δ -функцию или ступенчатое воздействие $1(t)$ [85]. Далее рассуждают следующим

образом: пусть имеется линейная стационарная система, на вход которой подают δ -функцию. Выход системы

$$y_1(t) = \int_0^{\infty} h_1(\tau) \delta(t - \tau) d\tau = h_1(t) \quad (4.55)$$

равен ядру модели $h_1(t)$. На практике получить δ -функцию не всегда возможно. Заменяя входной сигнал в интеграле (4.55) на единичную ступеньку амплитуды A , получим выход

$$y_1(t) = A \int_0^{\infty} h_1(\tau) 1(t - \tau) d\tau = A \int_0^t h_1(\tau) d\tau. \quad (4.56)$$

Продифференцировав правую часть выражения (4.56) по верхнему пределу, имеем

$$h_1(t) = \frac{1}{A} \frac{dy_1(t)}{dt}. \quad (4.57)$$

Пусть система описывается функционалом второй степени

$$y_2(t) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} h_2(\tau_1, \tau_2) u(t - \tau_1) u(t - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2. \quad (4.58)$$

Подача на вход такой модели ступенчатого сигнала с амплитудой A вызывает реакцию

$$\frac{1}{2} y_2(t) = A^2 \int_0^{t-\tau_1} \int_0^{t-\tau_2} h_2(\tau'_1, \tau'_2) d\tau'_1 d\tau'_2. \quad (4.59)$$

Для различных τ_1 и $\tau_2 > 0$ получим набор реакций $y_2(t) = y_2(\tau_1, \tau_2, t)$, вдоль которых, дважды продифференцировав по τ_1 и τ_2 , найдем

$$h_2(\tau_1, \tau_2) = \frac{1}{2A^2} \frac{\partial^2 y_2(\tau_1, \tau_2)}{\partial \tau_1 \partial \tau_2}. \quad (4.60)$$

Для системы, представленной выражением

$$y_n(t) = \int_0^{\infty} \dots \int_0^{\infty} h_n(\tau_1, \dots, \tau_n) u(t - \tau_1) \dots u(t - \tau_n) d\tau_1 \dots d\tau_n, \quad (4.61)$$

аналогично получают ядро

$$h_n(\tau_1, \dots, \tau_n) = \frac{1}{n! A^n} \frac{\partial^n y_n(\tau_1, \dots, \tau_n)}{\partial \tau_1 \dots \partial \tau_n}. \quad (4.62)$$

Ранее предполагалось, что система моделировалась однородными функционалами. Если это не так, и система описывается суммой однородных функционалов, то ядро h_{p-1} получаем, вычитая из выходного сигнала всей системы ее реакцию, представимую ядром h_p , ядро h_{p-2} равно разности выхода системы и реакций,

вносимых однородными функционалами с ядрами h_p и h_{p-1} , и т. д. до получения ядра h_1 .

Рассмотренный метод удобен при моделировании физиологических систем, поскольку воздействия на такие системы имеют характер, близкий к импульсному.

Любой из описанных функциональных рядов, например (4.14), (4.21), (4.31), (4.40), строится по данным, полученным в результате экспериментов с исследуемой системой. Суть эксперимента заключается в том, что на вход системы, начиная с определенного момента времени (обозначим его t_0), подается тестовый сигнал, вызывающий определенную реакцию системы. Эксперимент продолжается некоторое ограниченное по продолжительности время, например, до текущего момента $t < \infty$. Иными словами, поведение системы наблюдается на конечном интервале времени $[t_0, t)$. Этот факт не отображен в предыдущих формализованных описаниях системы с помощью математических моделей. Для практического использования моделей достаточно установить пределы интегрирования (или суммирования в дискретном случае), соответствующие наблюдаемому интервалу. Тогда в (4.14) для времени $t^1 > t$ оператор $K_A \equiv 0$, а нижний предел интегрирования для оператора K_C изменится. Оператор $K = K_M + K_C$ физически реализуем, поскольку реализуема каждая из компонент декомпозиции: K_M может быть представлен безынерционным звеном, оператор K_C — подсистемой, выход которой не опережает входное воздействие.

Ряд Вольтерра (4.17) применим не только во временной области, а и в частотной. За счет перехода в частотную область существенно упрощается изучение нелинейных стационарных систем, так как вместо интегралов и сумм во временной области имеют дело с произведениями в комплексной [71]. Это возможно благодаря многомерному преобразованию Лапласа, приспособленному для нахождения, изображений в частотной области многомерных функций. В качестве примера рассмотрим некоторую систему, выход которой описан однородным функционалом (4.61) степени n . Применяя к этому выражению преобразование Лапласа (L_n -преобразование), получаем

$$Y(p_1, \dots, p_n) = W_n(p_1, \dots, p_n) U(p_1) \dots U(p_n), \quad (4.63)$$

где

$$Y(p_1, \dots, p_n) = L_n\{y_n(t)\}; \quad W_n(p_1, \dots, p_n) = L_n\{h_n \otimes (\tau_1, \dots, \tau_n)\}; \quad U(p_1) = L\{u(t - \tau_1)\}, \dots, U(p_n) = L\{u(t - \tau_n)\}.$$

Аналогично линейным системам из выражения (4.63) находим отношение передаточной функции элементарной системы степени n :

$$W_n(p_1, \dots, p_n) = \frac{Y(p_1, \dots, p_n)}{U(p_1) \dots U(p_n)}. \quad (4.64)$$

Полагая в (4.64) $p_i = j\omega_i$ ($i \in I$, $j = \sqrt{-1}$), получаем частотную характеристику элементарной системы степени n $W(j\omega_1, \dots$

..., $j\omega_n$), которая представляет собой многомерную комплексную функцию, описывающую в пространстве размерности $2n$ при изменении ω_i от $-\infty$ до $+\infty$ некоторую поверхность. При $n = 1$ это пространство превращается в комплексную плоскость.

Качественный скачок в упрощении вычислений, связанных с идентификацией нелинейных систем, можно получить в результате иного подхода к математическому описанию систем. В качестве основы для такого подхода используют теорию интерполяции.

В абстрактной теории интерполяции в L_p -пространствах существуют две задачи [104]:

- 1) поиск удобных в использовании интерполяционных операторов;
- 2) описание всевозможных функциональных пространств, на которых определены всевозможные интерполяционные операторы.

В отличие от второй задачи первая звучит несколько уже. Ее решение, судя по формулировке, должно иметь практическую направленность. В таком плане теория идентификации недостаточно освещена в литературе. Этот пробел в некоторой степени заполнил Прентер [136]. Найденные в ней конструкции интерполяционных операторов Лагранжа и Эрмита в гильбертовом пространстве позволили Портеру [134] использовать их для построения моделей линейных и нелинейных (включая нестационарные) систем. К особенностям этой работы можно отнести следующие: все основные результаты работы получены исключительно исходя из свойств причинности, которыми должна обладать синтезированная модель; построение модели нелинейной системы проще, чем линейной. Остановимся подробнее на некоторых результатах, касающихся нелинейных систем.

Исходными данными для построения модели нелинейной системы является множество входных сигналов системы $\{u_i\} \subset U \times T$ ($i = 0, \bar{N}$) и соответствующее ему множество выходных $\{y_i\} \subset Y \times T$.

На этих двух множествах функций времени необходимо найти такое отображение $K: u \rightarrow y$ в гильбертовом пространстве, которое обладало бы свойствами $P^t K P^t = P^t K$; $K u_i = y_i$ ($\forall i = \bar{0}, \bar{N}$), было бы непрерывно на выбранной области входных сигналов. Удовлетворить этим требованиям может только интерполяционный причинный оператор с узлами интерполяции в точках u_i, y_i ($i = \bar{0}, \bar{N}$). Требования причинности оператора K влечет определенные условия согласованности экспериментальных данных. Это достигается введением оператора усечения P^t во вспомогательные скалярные функции $m_{ij}(u, t)$, значения которых вычисляют по формуле

$$m_{ij}(u, t) = \begin{cases} \frac{\langle P^t(u - u_j), (u_i - u_j) \rangle}{\|P^t(u_i - u_j)\|^2}, & t_0 \neq t, \\ 0, & t_0 = t. \end{cases} \quad (4.65)$$

Здесь скобками $\langle \cdot \rangle$ обозначено скалярное произведение, а $\| \cdot \|$ — норма в гильбертовом пространстве.

Далее, по множеству $m_{ij}(u, t)$ находим произведение

$$M_i(u, t) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N m_{ij}(u, t) \quad (4.66)$$

и с помощью интегрального трансформатора выход модели i -го порядка

$$Ku(t) = \sum_{s=1}^N \int dP^s y_i M_i(u, s). \quad (4.67)$$

В работе [134] доказан ряд свойств скалярных функций $m_{ij}(u, t)$; $M_i(u, t)$ и оператора K , из которых следуют выполнение всех заданных требований к модели. Самыми большими ограничениями на исходные данные является требование линейной независимости множества входных функций $\{u_i\}$ ($i = \overline{0, N}$).

Нелинейная зависимость $\hat{f}: u \rightarrow y$ между входом и выходом может иметь кусочно-линейную аппроксимацию [86]. Для этого необходимо, чтобы функции, описывающие входные и выходные сигналы, были ограничены классом аналитических функций. Рассмотрим кусочно-линейную аппроксимацию только динамических характеристик объекта. Для двухкусочной аппроксимации с выбранными точками $M_{01}(u_{01}, y_{01}, t_{01})$ и $M_{02}(u_{02}, y_{02}, t_{02})$ при $u_{01} = u_{02}$, $y_{01} = y_{02}$ уравнение модели, идентифицирующей объект в области точки M_{01} , имеет вид

$$y_1 = y_{01} + \left[\frac{df[u(t)]}{du(t)} \right]_{01} [u(t) - u_{01}(t)] + \left[\frac{\partial f[u(t)]}{\partial t} \right]_{01} (t - t_{01}), \quad (4.68)$$

а в области точки M_{02} получим

$$y_1 = y_{01} + \left[\frac{\partial f[u(t)]}{\partial u(t)} \right]_{01} [u(t) - u_{01}(t)] + \left[\frac{\partial f[u(t)]}{\partial t} \right]_{02} (t - t_{02}). \quad (4.69)$$

Коэффициенты уравнений (4.68) и (4.69) — частные производные — находятся из экспериментальных данных. Выход модели определяется после подстановки значений коэффициентов и начальных условий в правую часть уравнений.

Модель нелинейной системы (4.68) — (4.69) может быть построена и тогда, когда экспериментальные данные содержат случайные возмущения. В этом случае их учитывают при определении коэффициентов уравнений.

Модель нелинейной системы может быть описана также с помощью некоторой совокупности коэффициентов и параметров, учитывающих влияние входных сигналов на выходные и не имеющих в реальном объекте физического аналога. Такая модель для $l \in I$

входных сигналов может быть представлена следующим образом [89, 125]:

$$y(t) = \sum_{i_1=0}^k \sum_{i_2=0}^k \dots \sum_{i_p=0}^k a_{i_1, i_2, \dots, i_p} u_{i_1}^{i_1}(t) \dots u_{i_p}^{i_p}(t), \quad k, i_p \in I, \\ a_{i_1}, \dots, i_p \in R. \quad (4.70)$$

Модель (4.70) называют параметрической. В математическом плане она полиномиальная, поскольку ее правая часть содержит сумму полистепенных выражений. Порядок полинома k влияет на степень адекватности модели исследуемой системе. С увеличением порядка и количества входных сигналов увеличивается трудоемкость вычислений и объем памяти, поэтому на практике порядок модели не превышает второго [89].

Среди алгоритмов параметрической идентификации заслуживает внимания работа [131]. К одной из особенностей этой работы можно отнести экономию памяти и времени вычисления за счет рекуррентной процедуры идентификации. Состояние системы (в частном случае, не умаляющем степень общности алгоритма, вместо состояния будем рассматривать выход модели) в момент времени t_{k+1} описывается формулой

$$y(t_{k+1}) = g[y(t_k)] + u(t_k), \quad u, y \in R^n, \quad (4.71)$$

где

$$g[y(t_k)] = [y^2(t_k), \dots, y^n(t_k), \Psi[y(t_k)]]^T.$$

Функция

$$\Psi[y(t_k)] = \sum_{i_1=1}^n a_{i_1} y^{i_1}(t_k) + \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^{i_1} a_{i_1, i_2} y^{i_1}(t_k) y^{i_2}(t_k) + \dots \\ \dots + \sum_{i_1=1}^n \dots \sum_{i_{p-1}=1}^{i_{p-2}} \sum_{i_p=1}^{i_{p-1}} a_{i_1, \dots, i_p} y^{i_1}(t_k) y^{i_2}(t_k) \dots y^{i_p}(t_k). \quad (4.72)$$

В отличие от модели (4.70), представляющей собой полиномиальную зависимость между входными и выходными сигналами, в (4.71) полиномиальная зависимость заложена между выходом в данный момент времени и предшествующими выходными сигналами.

Выражение (4.72) преобразуем к виду

$$\Psi[y(t_k)] = a^T \Phi[y(t_k)], \quad (4.73)$$

где

$$a = \begin{bmatrix} 1 & a_{11} & \dots & \underbrace{a_{11\dots 1}}_p \\ a_2 & a_{21} & \dots & a_{21\dots 1} \\ \vdots & a_{22} & & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & a_{nn} & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \vdots & a_{nn\dots n} \end{bmatrix}, \quad (4.74)$$

$$\Phi[y(t_k)] = \begin{bmatrix} y(t_k) & y(t_k)y(t_k) & \dots & \underbrace{y(t_k)y(t_k)\dots y(t_k)}_p \\ y^2(t_k) & y^2(t_k)y(t_k) & \dots & \\ \vdots & y^2(t_k)y^2(t_k) & \dots & \\ y^n(t_k) & \vdots & & \vdots \\ 0 & y^n(t_k)y^n(t_k) & \dots & \\ \vdots & 0 & & \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & \dots & y^n(t_k)y^n(t_k)\dots y^n(t_k) \end{bmatrix}. \quad (4.75)$$

Вид матрицы (4.75) указывает на характер полиномиальной системы, в данном случае алгебраической. В работе [131] рассмотрен также тригонометрический полином с матрицей $\Phi[y(t_k)] = [\sin y \times \times(t_k), \cos y(t_k), \dots, \sin ny(t_k), \cos ny(t_k)]^T$ и $a = [a_1, \dots, a_{2n}]^T$.

Нахождение таблицы параметров (4.74) — суть идентификации данным методом. В исходных данных для построения алгоритма идентификации предусмотрена аддитивная шумовая составляющая на выходе системы, поэтому получаем оценку параметров \hat{a}_{k+n} . Процедура идентификации строится в соответствии с рекуррентным выражением

$$\hat{a}_{k+n} = \hat{a}_{k-1} + H - \hat{A}a_{k-1}, \quad k = 1, n+2, 2n+3, \dots, \quad (4.76)$$

где H и A — известные матрицы. Два примера в [131] свидетельствуют о том, что пятипроцентная ошибка идентификации получается для модели третьего порядка приблизительно при 3500 итерациях, а для модели пятого порядка — около 1200—1500.

Среди иных методов идентификации следует указать на метод, использующий математический аппарат цепных дробей [49]. Применять метод можно при достаточно гладком входном сигнале.

Моделирование нелинейных систем с частично известной структурой

Вычислительные трудности, с которыми сталкиваются при моделировании нелинейной динамической системы, уменьшаются с помощью функциональных рядов, если исследуемую систему можно представить в виде линейных динамических подсистем и нелинейных статических элементов, моделирование которых гораздо проще, чем динамической системы в целом. Правда, при таком подходе требуется дополнительная априорная информация о структуре системы и в итоге система больше напоминает «серый ящик», чем «черный». В зарубежной литературе такие системы называют блочно-ориентированными (block-oriented systems) [115]. Вероятно, к наиболее изученному классу таких систем относятся системы с последовательным соединением отдельных подсистем и элементов, структура которой представлена на рис. 48. Здесь $h_1(t)$ и $h_2(t)$ — характеристики линейных динамических подсистем; $f(x)$ — нелинейный элемент со статическими характеристиками. Во всех рассматриваемых системах предполагается, что все внутренние сигналы $x(t)$ и $g(t)$ недоступны для измерения.

Частный случай модели системы (ее структура приведена на рис. 49), известный под названием модели Винера в одних источниках [115] и модели Заде в иных [130], получают при $h_2(t) = \delta(t)$. Модель системы, где $h_1(t) = \delta(t)$, называют моделью Гаммерштейна [89, 115] и представляют оператором Гаммерштейна

$$H_h[u(t)] = \int_{-\infty}^t h(t, \tau) f[\tau, u(\tau)] d\tau. \quad (4.77)$$

Эта модель является частным случаем модели Урысона. Последняя, в свою очередь, представляется интегральным оператором Урысона вида

$$U[u(t)] = \int K[t, \tau, u(t)] d\tau. \quad (4.78)$$

Модель Урысона состоит из нескольких параллельных моделей Гаммерштейна, ее структура изображена на рис. 49. В дискретном

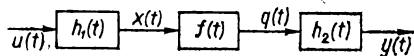


Рис. 48. Структурная схема блочно-ориентированной системы.

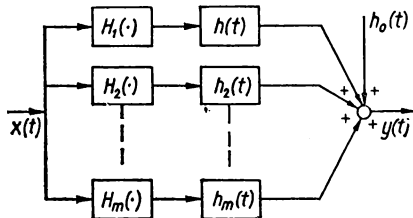


Рис. 49. Структура модели Урысона.

варианте модель Урысона представляется рядом [112]

$$y(t) = \sum_{K=0}^N \sum_{\tau_1=0}^{\infty} \dots \sum_{\tau_n=0}^{\infty} \prod_{i=0}^K h_i(\tau_i) f_i[x(t - \tau_i)], \quad 0 \leq N < \infty. \quad (4.79)$$

В последние годы к классу блочно-ориентированных систем проявляется значительный интерес. Большой опыт моделирования таких систем можно найти в работе [71], из которой выделим вопрос, касающийся представлений нелинейных элементов в системах.

Пусть задана модель Гаммерштейна, в ней линейная подсистема с импульсной характеристикой $h(t)$ может представлять собою любую линейную замкнутую подсистему произвольного вида. От нее требуется только устойчивость: $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = 0$, необходимая

для выполнения условия непрерывности всей рассматриваемой системы. Нелинейность $f(x)$ должна быть непрерывна и однозначна. Рассмотрим простой случай: функция $f(x)$ — аналитическая в некоторой области $X \subset R$. Тогда в этой области в окрестности точки $x = 0$ (или иной выбранной) нелинейность $f(x)$ можно представить рядом Тейлора

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \dots \quad (4.80)$$

Учитывая ряд (4.80), записываем выход модели

$$y(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(0)}{i!} \int_0^t h(\tau) x^i(t - \tau) d\tau. \quad (4.81)$$

Далее, обозначим

$$\frac{f^{(i)}(0)}{i!} h(t) = h_i(t) \quad (4.82)$$

и перепишем модель (4.81) в виде

$$y(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \int_0^t h_i(\tau) x^i(t - \tau) d\tau, \quad (4.83)$$

структура которой представлена на рис. 50. Здесь модель Урысона представлена со степенными нелинейностями x^i . Модель (4.83) лишена неявной зависимости $f[\tau, u(\tau)]$, которая имеется в модели (4.77).

В более сложном случае, когда нелинейность $f(x)$ неаналитическая, ее предварительно разлагают в ряд Фурье, после чего подставляют в выражение (4.80). Вид импульсных характе-

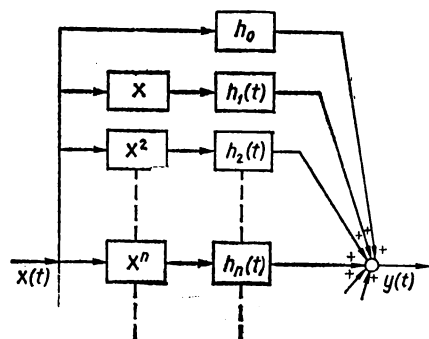


Рис. 50. Структура модели Урысона со степенными нелинейностями.

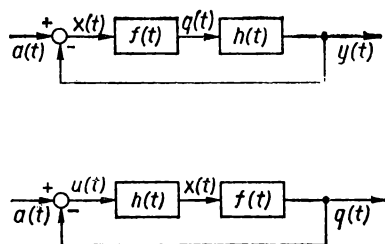
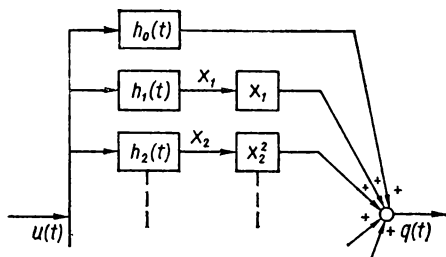


Рис. 51. Структура модели, описываемой с помощью ряда Вольтерра со степенными нелинейностями.

Рис. 52. Структурные схемы замкнутых систем.

ристик отличен от (4.82)

$$h_0(t) = \left(\sum_{j=1}^{\infty} a_j \right) h(t), \quad j = 1, 2, \dots, \quad (4.84)$$

$$h_{2i}(t) = \left(\frac{\pi}{R} \right)^{2i} \left[\frac{(e-1)^t}{(2i)!} \sum_{j=1}^{\infty} j^{2i} a_j \right] h(t), \quad (4.85)$$

$$h_{2i-1}(t) = \left(\frac{\pi}{R} \right)^{2i-1} \left[\frac{(-1)^t}{(2i-1)!} \sum_{j=1}^{\infty} j^{2i-1} b_j \right] h(t), \quad (4.86)$$

где a_j и b_j — коэффициенты ряда Фурье; $R \in R^1$, $\pi = 3,14 \dots$. Структурная схема модели в данном случае не изменяется (см. рис. 50).

Аналогично рассмотрим модель Заде. При соблюдении всех первоначальных условий, указанных для модели Гаммерштейна, осуществляется разложение (4.80), с учетом которого выход модели

$$q(t) = f(0) \int_0^t h(\tau) d\tau + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{f^{(i)}(0)}{i!} \int_0^t \dots \int_0^t h(\tau_1) \dots \dots h(\tau_i) u(t - \tau_1) \dots u(t - \tau_i) d\tau_1 \dots d\tau_i. \quad (4.87)$$

Введем обозначения

$$\frac{f^{(i)}(0)}{i!} h(\tau_1) \dots h(\tau_i) = h_i(\tau_1, \dots, \tau_i), \quad (4.88)$$

$$f(0) \int_0^t h(\tau) d\tau = h_0(t), \quad (4.89)$$

Учитывая (4.88) и (4.89), (4.87) запишем так:

$$q(t) = h_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \dots \int_0^{\infty} h_j(\tau_1, \dots, \tau_j) u(t - \tau_1) \dots \dots u(t - \tau_j) d\tau_1 \dots d\tau_j \quad (4.90)$$

Правые части выражений (4.90) и (4.14) одинаковы, т. е. выход

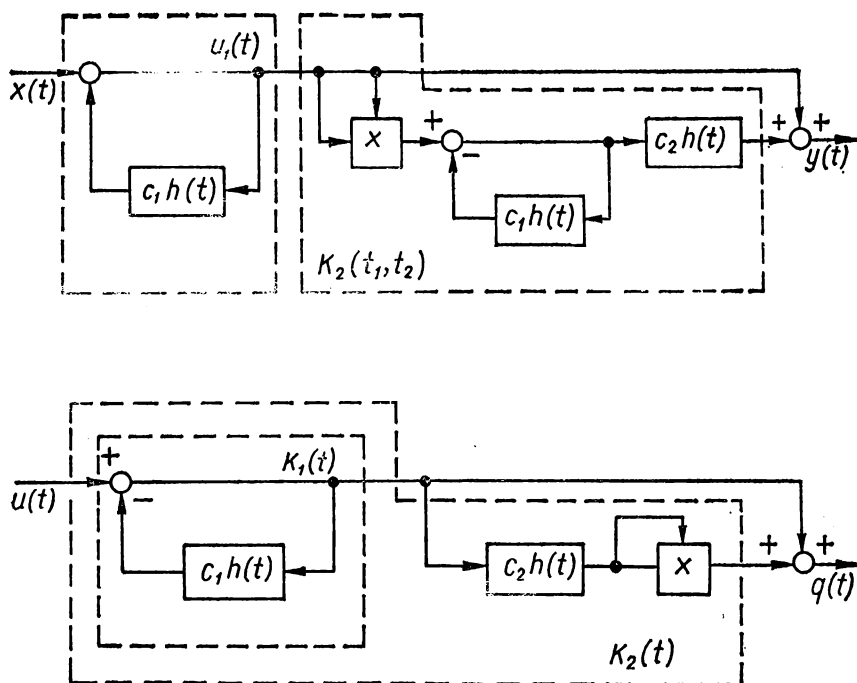


Рис. 53. Эквивалентные структуры модели нелинейных систем с обратной связью.

$q(t)$ определяется рядом Вольтерра. Структура такой модели представлена на рис. 51. Отличается она от модели Урысона порядком включения линейных и нелинейных элементов системы и выражениями h_i .

Для непрерывной функции $f(x)$, не имеющей требуемого порядка производной, как и в модели Гаммерштейна, разложим нелинейность предварительно в ряд Фурье. Подставляя разложения в (4.87), получаем импульсную характеристику $h_0(t)$, которая вычисляется по формуле (4.84). Для определения остальных четных и нечетных характеристик справедливы формулы (4.85) и (4.86) после замены в них $h_{2i}(\tau_1, \dots, \tau_{2i}) \rightarrow h_{2i}(t)$, $h_{2i-1}(\tau_1, \dots, \tau_{2i-1}) \rightarrow h_{2i-1}(t)$, $\tilde{R} \rightarrow R$, $\tilde{R} \in [-\pi, \pi]$.

В работе [71] приведены практические способы построения нелинейных моделей замкнутых систем с включением в ветвь прямой связи систем со структурой, описанной рядом Заде и Гаммерштейна. Структурные схемы таких систем представлены на рис. 52. Здесь выход сумматора (сравнивающих элементов) для первой системы имеет вид

$$x(t) = a(t) + \int_0^t h(\tau) f[x(t - \tau)] d\tau, \quad (4.91)$$

для второй

$$u(t) = a(t) - f \left[\int_0^t h(\tau) x(t - \tau) d\tau \right]. \quad (4.92)$$

Предполагая, что в заданном диапазоне изменений $x(t)$ и $u(t)$ возможна их аппроксимация рядом (4.80) с помощью многомерного преобразования Лапласа, получаем эквивалентные структуры систем для двух элементов разложения, приведенные на рис. 53.

Здесь обозначено c_i — коэффициенты ряда Фурье $\frac{A^{(i)}(0)}{i!}$. Во временной области характеристики K_i , $i = 1, 2, 3$, имеют вид

$$K_1(t) = h(t); \quad (4.93)$$

$$K_2(t) = -c_2 \int_0^\infty h_1(\tau) K_1(t_1 - \tau) K_1(t_2 - \tau) d\tau; \quad (4.94)$$

$$K_3(t) = -2c_2 \int_0^\infty h_1(\tau) K_2(t_1 - \tau, t_2 - \tau) K_1(t_3 - \tau) \times \\ \times d\tau - c_3 \int_0^\infty h_1(\tau) K_1(t_1 - \tau) K_1(t_2 - \tau) K_1(t_3 - \tau) d\tau \quad (4.95)$$

для $t_i, \tau \in T_0$, $c_i \in R$ и представляют собой обратное преобразование Лапласа передаточных функций.

Математическое описание нелинейных стохастических систем

Изучение поведения нелинейных систем, представленных функциональными рядами, на вход которых поступает случайный сигнал, сводится к статистическому анализу. В общем случае выход этой системы также случаен, а отображение $u \rightarrow y$ — стохастическое. Описывают такую динамическую стохастическую систему с помощью моментов различного порядка [89]. Для выхода системы, описываемой рядом (4.14) при $1 \leq n \leq N$ и $h_0(t) = 0$, момент первого порядка может быть записан так:

$$M\{y(t)\} = \sum_{n=1}^N \int_{E^t} h_i(t, \tau_1, \dots, \tau_i) M\left\{\sum_{r=1}^i u(t_r)\right\} dv_\tau, \quad (4.96)$$

второго — в виде

$$M\{y(t_1) y(t_2)\} = \sum_{n_1=1}^N \sum_{n_2=1}^N \int_{E^{n_1+n_2}} h_i(t_1, \tau_1, \dots, \tau_{n_1}) \times \\ \times h_i(\tau_{i+1}, \dots, \tau_{n_1+n_2}) M\left\{\prod_{r=1}^{n_1+n_2} u(t_r)\right\} dv_\tau, \quad (4.97)$$

произвольного — так:

$$M\{y(t_1) \dots y(t_p)\} = \sum_{n_1=1}^N \dots \sum_{n_p=1}^N \int_{E^{\Sigma ip}} h_1(t_1, \tau_1, \dots, \tau_n) i_{n_p}(t_p, \tau_{\Sigma n_p+1}, \dots, \tau_{\Sigma n_p}) M\left\{\prod_{r=1}^{\Sigma n_p} u(t_r)\right\} dv_{\tau}, \quad (4.98)$$

где M — математическое ожидание; $E^{\Sigma ip}$ — евклидово пространство с $\dim = \Sigma ip$; $n_1, \dots, n_p \in I$.

Из (4.98) следует, что для получения момента p выходного сигнала должны быть определены моменты входного сигнала до Np . Вычисления по формулам (4.96), (4.97), (4.98) упрощаются, если в качестве входного сигнала рассматривать случайный процесс с нулевым математическим ожиданием и нормальным законом распределения.

К используемым на практике методам идентификации в широком смысле нелинейных стохастических систем относится дисперсионная идентификация. Дисперсионный метод идентификации [89] основывается на дисперсионных характеристиках, представляющих собой условные моментные характеристики различных порядков, таких, как $M(y|u)$, My , Dy , и дисперсий условных математических ожиданий $DM(y|u)$. Исходные предпосылки метода следующие:

1) значение случайных переменных u и y не зависит от предыдущих и последующих опытов.

2) выходная переменная y имеет нормальное распределение при фиксированном значении входной переменной u .

3) величина дисперсии условного математического ожидания $D(y|u)$ постоянна при изменении входного сигнала u .

На практике перечисленные предпосылки точно не выполняются. Теоретические и практические исследования показали, что нарушение условий 1 и 2 не влияет существенно на результаты идентификации, а неточность выполнения условия 3 сказывается значительно на качество работы полученной модели в смысле ее адекватности системе. Такие системы называют гетероскедастическими. Для них необходимо разработать специальные методы.

В рассматриваемом методе идентификации дисперсионная функция представляет собой динамическую характеристику исследуемой системы. В математическом плане дисперсия случайной функции трактуется как обобщение корреляционного подхода, что позволяет воспользоваться уже имеющимся опытом применения корреляционных отношений. По результатам сопоставления дисперсионных и корреляционных функций судят о степени нелинейности идентифицируемого объекта, что очень важно при моделировании для принятия решения о принадлежности системы к определенному классу.

Идентификация нелинейных стационарных стохастических систем со структурой, отвечающей структуре модели Гаммерштейна,

позволяет получить оптимальную в смысле среднеквадратической ошибки оценку весовой функции $h(t)$ линейной части системы. Находят ее из так называемых дисперсионных уравнений, аналогичных уравнениям Винера — Хопфа. В зависимости от имеющихся экспериментальных данных, предшествующих построению модели, получаем дисперсионные уравнения различного вида. Приведем некоторые из них.

Пусть известна регрессия $M[y(t)|u(t)]$. Подставляя ее вместо $f[\tau, u(\tau)]$ в выражение (4.77), получаем выход модели

$$y(t) = \int_{-\infty}^t h(t-\tau) M[y(t)|u(t)] d\tau. \quad (4.99)$$

Особенность математической модели (4.99) заключается в том, что она нелинейна относительно случайного входного воздействия $u(t)$ и линейна относительно математического ожидания $M[y(t)|u(t)]$. Выход модели y в фиксированный момент времени аппроксимируется взвешенной суммой оценок этого значения при входном воздействии, усеченном в этот же момент времени.

Приравнивая выход $y(t)$ к требуемому выходному сигналу и учитывая то, что условное математическое ожидание $M[y(t)|u(t)]$ является наилучшей среднеквадратической оценкой выходного процесса $y(t)$, находим оптимальную оценку $h(t, \tau)$ в выражении (4.99). Учитывая это, получаем дисперсионное уравнение вида

$$\int_{-\infty}^t h(t-\tau) \theta_{yy|uu}(t-\tau, t-\sigma) d\tau = \theta_{yu}(t-\tau), \quad t, \tau, \sigma \in T, \quad (4.100)$$

где

$$\theta_{yy|uu}(t-\tau, t-\sigma) = \text{cov}[M(y(t)|u(t)), M(y(\tau)|u(\sigma))], \quad (4.101)$$

$$\theta_{yu}(t-\tau) = DM[y(t)|u(\tau)]. \quad (4.102)$$

Решая уравнение (4.100), находим оптимальную весовую функцию $h(t-\tau)$, наилучшую в смысле среднеквадратического приближения выхода модели к выходу системы и теоретической регрессии $M[y(t)|u(t)]$, $\tau \in (-\infty, t)$.

Если вместо регрессии $M[y(t)|u(t)]$ известна авторегрессия $M[u(t)|u(\tau)]$, то вместо (4.99) получаем следующее выражение:

$$y(t) = \int_{-\infty}^t h(t, \tau) M[u(t)|u(\tau)] d\tau. \quad (4.103)$$

При тех же, что и в предыдущем случае, предположениях, заменах и выкладках запишем дисперсионное уравнение

$$\int_{-\infty}^t h(t, \tau) \theta_{uu|uu}(t, t, \tau, \sigma) d\tau = \theta_{yu}(t, \sigma), \quad (4.104)$$

где обобщенная автодисперсионная функция процесса $u(t)$ и взаимная дисперсионная функция процессов $y(t)$ и $u(t)$ вычисляются по формулам

$$\theta_{uu|uu}(t, t, \tau, \sigma) = \text{cov} \{M[u(t) | u(\tau)], M[u(t) | u(\sigma)]\}, \quad (4.105)$$

$$\theta_{yu}(t, \sigma) = \text{cov} \{M[y(t) | u(\sigma)]\}. \quad (4.106)$$

Выход модели системы с параллельным включением линейных подсистем $h_1(t)$ и $h_2(t)$ и взвешенными регрессией и авторегрессией для каждой из них в общем случае запишем так:

$$y(t) = \int_{-\infty}^t h_1(t, \tau) M[y(t) | u(\tau)] d\tau + \int_{-\infty}^t h_2(t, \tau) M[u(t) | u(\tau)] d\tau. \quad (4.107)$$

Из модели (4.107) получают два дисперсионных уравнения идентификации:

$$\int_{-\infty}^t h(t, \tau) \theta_{yy|uu}(t, t, \tau, \sigma) d\tau + \int_{-\infty}^t h_2(t, \tau) \theta_{yu|uu}(t, t, \tau, \sigma) d\tau = \theta_{yu}(t, \sigma), \quad (4.108)$$

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^t h(t, \tau) \theta_{yu|uu}(t, t; \tau, s) d\tau + \\ & + \int_{-\infty}^t h_2(t, \tau) \theta_{uu|uu}(t, t; \tau, s) d\tau = \theta_{yu|uu}(t, t; s), \end{aligned} \quad (4.109)$$

где

$$\theta_{yu}(t, \sigma) = M[y(t) M[y(t) | u(\sigma)]], \quad (4.110)$$

$$\theta_{yu|u}(t, t, s) = M[y(t) M[u(t) | u(s)]], \quad (4.111)$$

$$\theta_{yu|uu}(t, t, \sigma, \tau) = M[M[y(t) | u(\sigma)] M[u(t) | u(\tau)]] \quad (4.112)$$

это дисперсионные функции. Решить два уравнения (4.108), (4.109) труднее, чем одно (4.100) или (4.104), поэтому при практически одинаковых точностях оценки импульсных характеристик с помощью любого из приведенных способов предпочтение отдают первым двум уравнениям.

В случае нелинейной нестационарной стохастической системы задача идентификации может быть сведена к задаче математического программирования. Для этого выход модели y сравниваем с выходом системы z , формируем функционал качества \mathcal{J} , равный модулю или квадрату модуля разности $z - y$, и, определяя экстремум \mathcal{J} , вычисляем ядра Вольterra [71].

**Сравнение методов
с известными по объему
и времени вычислений**

Идентификация нелинейных систем — сложный вопрос. На сегодняшний день не существует такого подхода к его решению, который можно рекомендовать для получения приемлемых результатов, возникающих в большинстве ситуаций. Все рассмотренные алгоритмы имеют свои сильные и слабые стороны, о каждом из них следует судить только в связи с решаемой задачей. Однако для любого из алгоритмов важным моментом является выбор структуры такой модели, в которой число исходных данных было бы наименьшим, а техника их измерения — нетрудной. Следует отметить также простоту построения модели и ее применение. Исходя из таких позиций, определяем сначала класс систем, для которых используется идентификация, и, далее, сравнивая отдельные характеристики различных подходов к идентификации систем «вход — выход», оцениваем их с точки зрения практического использования.

Прежде всего интерес представляют системы управления с обратной связью. В них качество управления в большой степени зависит от наперед заданной информации об объекте управления. Априорная информация, характеризующая объект управления, как правило, всегда отличается от используемой в контуре управления, что влияет на работу системы в целом и на точность управления в частности. Улучшить точность управления возможно путем уточнения характеристик объекта управления, т. е. путем идентификации. В результате должна быть получена модель, в большей мере адекватная управляемому объекту, с помощью которой найдена и устранена неточность (ошибка) в выборе команд управления.

Модель в контуре управления может оказаться весьма уместной в случае разрыва обратной связи в системе. Тогда объект ненаблюдаем и судить о его поведении можно с помощью модели. В таком случае модель выполняет функцию прогнозирования поведения объекта управления. За счет этого система может до восстановления обратной связи выполнять свою задачу с успехом, который находится в прямой зависимости от адекватности модели реальному объекту.

Следовательно, идентификация объекта управления в контуре системы должна вестись в реальном масштабе времени. Метод идентификации, используемый в таком контуре управления, должен обладать свойством, в результате которого идентификация, полученная на заданном ограниченном промежутке времени, дает наименьшую погрешность по сравнению с другими методами при тех же временных ограничениях.

Перечислим рассмотренные методы идентификации нелинейных систем.

1. Методы, использующие функциональные ряды:

а) Винера: первый алгоритм Винера; алгоритм Бозе; алгоритм Баррета; метод ортогональных G -функционалов Винера (второй алгоритм Винера); метод взаимной корреляции ядер;

б) Вольтерра: методы вариации постоянной для минимизации среднеквадратической ошибки идентификации и последующего решения системы интегральных уравнений и нахождения ядер с помощью входных δ -функций или единичных скачков; численный метод.

2. Метод идентификации с помощью интерполяционных операторов.

3. Метод идентификации с помощью представления входных сигналов системы в виде интерполяционных полиномов.

4. Параметрический метод идентификации.

5. Идентификация систем с частично известной структурой:

а) модель Заде;

б) модель Гаммерштейна;

в) модель Урысона.

6. Дисперсионный метод идентификации.

Столь незначительный ассортимент методов в моделировании нелинейных систем и то, что дисперсионный и оба интерполяционных метода получили развитие только в последние годы, говорит о недостаточной их изученности. Приступая к моделированию нелинейной системы, прежде всего пытаются ее линеаризовать, свести к линейным системам, теория которых достаточно развита [34, 41, 63, 90 и др.]. Для нелинейных систем представление рядом Вольтерра наиболее изучено. Об этом можно судить по количеству методов вычисления ядер ряда. Некоторые авторы [71] считают ряд Вольтерра обобщением описания линейных систем на нелинейные. В подтверждение этого они рассматривают ряд в первом приближении, описывающий поведение линейных систем, связь между входом и выходом которых представлена интегралом Дюамеля. Последующие члены приближения с некоторыми оговорками сравниваются с операцией свертки, определяющей выход линейной системы. Эту аналогию углубляют, пользуясь многомерным преобразованием Лапласа. С его помощью, изучая свойства нелинейностей, вводят понятия передаточной функции элементарной системы соответствующей степени и частотные характеристики. Сравнение методов идентификации в частотной и временной областях показало, что такие подходы нельзя рассматривать как взаимоисключающие. Они дополняют друг друга, и это следует учитывать в конкретной задаче [128].

В общем случае функциональные ряды пригодны для описания работы нелинейных, нестационарных, стохастических систем. Методы вычисления ядер ряда в большинстве случаев разработаны под конкретный вариант нелинейной системы, т. е. стационарной или нестационарной, стохастической или детерминированной. Методы вычислений различаются между собой степенью универсальности. Наиболее универсальным является численный. Однако он

громоздкий и при его использовании как следствие необходимо привлекать вычислительную технику.

Идентификация нелинейных систем с помощью методов, основанных на использовании функциональных рядов, возможна, как правило, при подаче на вход исследуемой системы определенных входных сигналов: гауссовой единичной плотности, единичного импульса, единичного скачка. Это обстоятельство и чрезмерное количество вычислений, с которыми связано нахождение ядер ряда [89, 113, 115, 116], вынуждают отказаться от практического использования функциональных рядов в системах управления.

Чрезмерное количество вычислений характерно также для идентификации систем с помощью параметрических моделей. Кроме того, их использование требует выполнения операций с матричными величинами. Для систем, работающих в реальном масштабе времени, такие ограничения могут оказаться неприемлемыми.

Идентификацию блочно-ориентированных систем нельзя отнести к идентификации в широком смысле из-за дополнительной информации о структуре системы. Применение функциональных рядов для их моделирования свидетельствует о том, что здесь подход к математическому описанию такой же, как и для систем «вход — выход». Очевидно, несоответствие между такими системами, рассматриваемыми как «серый ящик», и математическими методами их представления кроется в искусственном разделении двух последовательных этапов, присущих подходу: первый — идентификация структуры, второй — идентификация системы. Если на первом этапе используемая информация об изученном объекте представлена входными и выходными сигналами, то вся процедура идентификации может быть отнесена к идентификации в широком смысле. Первый этап идентификации — декомпозиция структуры — важный шаг в создании модели. Здесь имеются некоторые результаты [57, 115], но по сравнению со вторым этапом наблюдается значительное отставание [115]. Простота использования математического описания блочно-ориентированных систем и моделирование существенно нелинейных элементов в их составе [115] открывают перспективу дальнейших работ, направленных на устранение пробелов в вопросе структурной декомпозиции нелинейных систем. Ранее были изложены результаты работы [71] в этом направлении. В частности, показано, что в обоих вариантах покаскадного включения линейной подсистемы и нелинейного элемента, нелинейного элемента и линейной подсистемы вся система описывается рядом Вольтерра. В связи с этим возникает вопрос: какова взаимосвязь рядов между собой и какую практическую пользу из нее можно получить? Ответ на этот и другие вопросы будет содействовать использованию в системах управления указанного выше подхода идентификации нелинейных систем. На сегодняшний день он громоздок, как и другие методы, основанные на использовании функциональных рядов.

Вычислительные трудности, с которыми сталкиваются при получении моделей детерминированных звеньев и систем, используя

полиномиальную форму представления входных сигналов, несколько меньше, чем при использовании функциональных рядов. Они не связаны с задачей оптимизации и при определенной постановке задачи сводятся к решению линейных алгебраических уравнений такого порядка, который отвечает порядку выбранного полинома [86]. Однако трудности резко возрастают, если входной сигнал стохастический. В этом случае решению системы алгебраических уравнений должна предшествовать эффективная фильтрация шумовой составляющей входного сигнала и его производных, что является дополнительной нетривиальной задачей.

Оперативная дисперсионная идентификация строится в форме рекуррентных отношений оценки дисперсионных характеристик рассматриваемых случайных величин [89]. Эти формы служат основой построения алгоритмов идентификации, которые сводятся в данном случае к построению вектора параметров модели. В предложенных алгоритмах — настройка, пропорциональная градиенту, метод наименьших квадратов, метод стохастической аппроксимации, метод Чадеева — Качмажа — только последний требует дополнительного анализа на сходимость. Для всех алгоритмов характерны операции над векторными величинами размерности n , где $n = \frac{t_f - t_0}{\Delta t}$, т. е. вопрос практического их использования необходимо рассматривать в зависимости от памяти системы, определяемой разностью $t_f - t_0$ и дискретом вычисления Δt .

Интерполяционные операторы Лагранжа, используемые для идентификации, также имеют существенные недостатки. При уточнении модели за счет повышения порядка полинома приходится к имеющимся узлам интерполяции прибавлять новые, а сам полином пересчитывать заново. В общей сложности в результате перехода от полинома N -го порядка к полиному $N + 1$ -го порядка необходимо построить $2(N + 1)$ скалярные функции $m_{ij}(u, t)$, увеличить на единицу число сомножителей в правой части произведения $M_i(u, t)$, отыскать новое произведение функций $M_{N+1}(u, t)$ и по-новому найти выход модели.

Выяснив в некоторых отношениях характеристики различных методов идентификации, сформулируем следующие требования к методу идентификации систем «вход — выход», пригодному для работы в реальном масштабе времени в системе управления: 1) объем вычислений должен быть меньше, чем в иных известных; 2) пригодность для использования как в детерминированных, так и в стохастических системах; 3) с его помощью возможность идентификации нелинейных, нестационарных систем; 4) уточнение модели не вызывает всего ее пересчета (перестройки); 5) в методе не используется априорная информация об объекте идентификации, касающаяся его структуры, значения параметров, характеристик отдельных элементов и пр.

Последнее требование является характерным (а значит, и отличительным) для идентификации в широком смысле.

Исходя из перечисленных требований, можно сделать выводы, что среди рассмотренных методов идентификации нет эффективных для работы в контуре управления с жесткими временными ограничениями. Уменьшение объемов вычислений путем усечения функциональных рядов ухудшает качество модели, интерполяция нелинейных характеристик объекта потребует обработки и учета аддитивной шумовой составляющей (а это дополнительная задача фильтрации), интерполяционные полиномы Лагранжа при уточнении потребуют пересчета.

Наименее серьезные требования 1, 4 накладываются на метод идентификации с помощью интерполяционных операторов. Поэтому целесообразно рассматривать именно его с точки зрения пригодности использования в контурах управления, работающих в реальном масштабе времени. В частности, следует рассмотреть итерационную процедуру Эйткена и интерполяционный полином Ньютона в плане их обобщения на функциональные пространства и использования в целях идентификации систем. Если такое обобщение будет сделано, то пп. 1, 4 будут выполнены. Требования 2, 3, 5 выполняются для интерполяционных, причинных и непрерывных в гильбертовом пространстве операторов. Не следует забывать о дальнейшем изучении свойств интерполяционных операторов, важных в прикладном аспекте. Их ряд, изложенный в работе [134], можно продолжить, если будут найдены ответы на некоторые неочевидные вопросы, например:

- какой класс входных функций $\{u_i\}$ целесообразно использовать в идентификации с целью минимизации порядка модели;

- на какую область входных сигналов оператор, полученный в результате идентификации, будет иметь причинное расширение, т. е. на какие входные сигналы модель будет достаточно верно прогнозировать выходные сигналы системы;

- степень адекватности модели нелинейной системы различным видам нелинейностей;

- анализ причинной канонической декомпозиции;

- как ведет себя модель при зашумленном входном сигнале, насколько она точна при моделировании с ее помощью стохастических систем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ахобадзе М. Н. Построение модели нелинейных нестационарных объектов.— Кибернетика и вычисл. техника, 1974, вып. 24, с. 130—136.
2. Балакришнан А. В. Прикладной функциональный анализ.— М. : Наука, 1980.— 384 с.
3. Басистов Ю. А. Регуляризация по Тихонову задачи различения гипотез при неопределенности.— Автоматика и телемеханика, 1981, № 9, с. 49—59.
4. Бахшиян Б. Ц., Назиров Р. Р., Эльясберг П. Е. Определение и коррекция движения.— М. : Наука, 1980.— 360 с.
5. Белов Ю. А. Разложение двухэтапных задач стохастического программирования блочного типа.— Докл. АН СССР, 1980, 255, № 4, с. 811—813.
6. Белов Ю. А. Декомпозиция динамических задач управления в условиях неопределенности.— Дифференц. уравнения, 1981, 17, № 11, с. 1923—1931.
7. Белов Ю. А., Диденко В. П., Козлов Н. Н. и др. Математическое обеспечение сложного эксперимента.— Киев : Наук. думка, 1982.— т. 1.— 301 с.
8. Белов Ю. А., Донченко В. С., Ермаков И. Г., Макаров В. Л. Моделирование следящей системы дискретного действия.— Изв. вузов. Сер. Радиоэлектроника, 1976, № 11, с. 93—96.
9. Белов Ю. А., Донченко В. С., Ермаков И. Г., Макаров В. Л. Об одном подходе к моделированию систем автоматического регулирования дискретного действия.— Изв. вузов. Сер. Радиоэлектроника, 1977, 20, № 8, с. 53—58.
10. Белов Ю. А., Донченко В. С., Макаров В. Л., Цитрицкий О. Е. Об одной схеме последовательного усложнения математических моделей.— Кибернетика и вычисл. техника, 1981, № 51, с. 55—59.
11. Белов Ю. А., Макаров В. Л. Модели измерительных систем и методы оценки их адекватности.— В кн.: Всесоюз. конф. по измерит. информац. системам. Л., 1979, с. 132—133.
12. Белов Ю. А., Макаров В. Л., Усовский Д. В., Шульженко В. Б. Композиционный подход при математическом моделировании сложных радиотехнических систем.— Тр. МЭИ, 1981, вып. 514, с. 22—29.
13. Белов Ю. А., Макаров В. Л., Шелепов В. Г., Шульженко В. Б. Об одном подходе к проверке адекватности блок-схемы алгоритма функционирования структурной схемы импульсной ИИС.— Докл. АН СССР, 1980, 255, № 1, с. 36—40.
14. Белов Ю. А., Макаров В. Л., Шелепов В. Г., Шульженко В. Б. Верификация схем моделей.— Кибернетика, 1981, № 5, с. 40—47.
15. Белов Ю. А., Макаров В. Л., Усовский Д. В. и др. Математическая модель дальномерного канала сложной ИИС.— М., 1978.— 47 с.— Рукопись деп. в ВИНТИ, № 210—78 Деп.
16. Белов Ю. А., Макаров В. Л., Усовский Д. В. и др. Математическая модель канала визирования сложной ИИС.— М., 1978.— 58 с.— Рукопись деп. в ВИНТИ, № 211—78 Деп.
17. Борисов Ю. П. Математическое моделирование радиосистем.— М. : Сов. радио, 1979.— 295 с.

18. Бублик Б. Н., Кириченко Н. Ф. Основы теории управления.— Киев : Вища школа, 1975.— 327 с.
19. Бусленко Н. П. Сложные системы и имитационные модели.— Кибернетика, 1976, № 6, с. 50—59.
20. Бусленко Н. П. Моделирование сложных систем.— М. : Наука, 1978.— 399 с.
21. Быков В. В. Цифровое моделирование в статистической радиотехнике.— М. : Сов. радио, 1971.— 326 с.
22. Бюшгенс Г. С., Студнев Р. В. Динамика пространственного движения самолета.— М. : Машиностроение, 1967.— 226 с.
23. Варшамов Р. Р. Вопросы общей теории линейного кодирования : Автореф. дис. ... канд.— М., 1959.
24. Винер Н. Нелинейные задачи в теории случайных процессов.— М. : Изд-во иностр. лит., 1961.— 159 с.
25. Волкова З. Т. О математическом сопровождении целей.— Вopr. радиоэлектроники. Сер. общетехническая, 1967, вып. 25, с. 52—61.
26. Глобенко Ю. В., Скрипник Г. И. О разрешении неоднозначности циклических измерений.— Автоматрия, 1972, № 4, с. 69—82.
27. Глушков В. М. О системной оптимизации.— Кибернетика, 1980, № 5, с. 89—90.
28. Горбатенко С. А., Махашов Э. М., Полушкин Ю. Ф., Шефтель Л. В. Механика полета.— М. : Машиностроение, 1969.— 420 с.
29. Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов.— М. : Наука, 1965.— 448 с.
30. Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве и ее приложения.— М. : Наука, 1968.— 508 с.
31. Григорьев Р. Н., Кицул П. И., Кузнецов Н. А. Управление наблюдениями в задаче оценки случайных процессов.— Автоматика и телемеханика, 1974, № 10, с. 35—42.
32. Гроп Д. Методы идентификации систем.— М. : Мир, 1979.— 302 с.
33. Дегтярев Ю. И. Основы кибернетики.— М. : Высш. школа, 1976.— 408 с.
34. Директор С., Рорер Р. Введение в теорию систем.— М. : Мир, 1974.— 464 с.
35. Дмитриевский А. А. Внешняя баллистика.— 2-е изд., перераб. и доп.— М. : Машиностроение, 1979.— 479 с.
36. Евстигов Ю. А., Чапурский В. В. Преобразование случайных процессов в радиотехнических устройствах.— М. : Высш. школа, 1977.— 264 с.
37. Ермаков С. М., Михайлов Г. А. Курс статистического моделирования.— М. : Наука, 1976.— 319 с.
38. Ермольев Ю. М. Методы стохастического программирования.— М. : Наука, 1976.— 239 с.
39. Ермольев Ю. М., Гуленко В. П., Царенко Т. И. Конечно-разностный метод в задачах оптимального управления.— Киев : Наук. думка, 1978.— 164 с.
40. Ермольев Ю. М., Марьянович Т. П. Оптимизация и моделирование.— Пробл. кибернетики, 1973, с. 27—42.
41. Заде Л., Девоез Ч. Теория линейных систем.— М. : Наука, 1970.— 703 с.
42. Задирака В. К., Михалевиц В. С., Сергиенко И. В. Вопросы разработки математического обеспечения для решения задач статистической обработки данных.— Киев, 1979.— 47 с.— (Препринт / АН УССР; Ин-т кибернетики; № 79—50).
43. Заикин П. Н. Системы полной математической обработки результатов спектротрических экспериментов : Автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук.— Дубна, 1977.— 32 с.
44. Знаменская А. М., Махонькин Ю. Е., Фальков А. И. Измерительные и информационные системы для статистических исследований при сложном натурном эксперименте.— Приборы и системы управления, 1973, № 7, с. 6—11.
45. Ибрагимхалилов И. Ш., Скороход А. В. Состоятельные оценки параметров случайных процессов.— Киев : Наук. думка, 1980.— 192 с.
46. Кавалеров И. Г. Измерительно-вычислительные комплексы.— Приборы и системы управления, 1977, № 11, с. 23—27.

47. *Казаков И. Е., Артемьев В. М.* Оптимизация динамических систем случайной структуры.— М. : Наука, 1980.— 384 с.
48. *Калман Р., Фалб П., Арбиб М.* Очерки по математической теории систем.— М. : Мир, 1971.— 400 с.
49. *Картузов В. В.* Цепные аппроксимационные схемы динамических процессов.— Докл. АН УССР, 1977, № 2, с. 175—179.
50. *Козлов Н. Н.* Об оптимизации программы траекторных измерений.— Космич. исслед., 1971, 9, № 1, с. 3—17.
- 50а. *Козлов Н. Н.* Приближенно-аналитический метод решения одного класса задач обработки измерений.— Автометрия, 1981, № 6, с. 18—22.
51. *Корнев Г. В.* Введение в механику управляемого тела.— М. : Наука, 1964.— 568 с.
52. *Космическая навигация.*— М. : Машиностроение, 1975.— 352 с.
53. *Космические траекторные измерения.*— М. : Сов. радио, 1969.— 504 с.
54. *Кочетков В. Т., Половоко А. М., Пономарев В. М. и др.* Теория систем телеуправления и самонаведения ракет.— М. : Наука, 1964.— 536 с.
55. *Кузьмин С. З.* Цифровая обработка радиолокационной информации.— М. : Сов. радио, 1967.— 400 с.
56. *Кухтенко А. И., Семенов В. Н., Удилов В. В.* Геометрические и абстрактно-алгебраические методы в теории автоматического управления.— Кибернетика и вычисл. техника, 1975, вып. 27, с. 3—20.
57. *Кутин Г. И.* Об одном методе идентификации нелинейных объектов с помехами.— Автоматика и телемеханика, 1981, № 8, с. 46—55.
58. *Леонов А. И., Васнев В. Н., Гайдуков Ю. И. и др.* Моделирование в радиолокации.— М. : Сов. радио, 1979.— 224 с.
59. *Левин Б. Р.* Теоретические основы статистической радиотехники.— М. : Сов. радио, 1969.— 752 с.
60. *Леонов А. И., Фомичев К. И.* Моноимпульсная радиолокация.— М. : Сов. радио, 1970.— 392 с.
61. *Ляшко И. И., Диденко В. П., Цитрицкий О. Е.* Фильтрация шумов.— Киев : Наук. думка, 1979.— 232 с.
62. *Мартынюк Д. И.* Лекции по качественной теории разностных уравнений.— Киев : Наук. думка, 1972.— 246 с.
63. *Месарович М., Такахара Я.* Общая теория систем : Математические основы.— М. : Мир, 1978.— 312 с.
64. *Мирский Г. Я.* Аппаратурное определение характеристик случайных процессов.— М. : Энергия, 1972.— 455 с.
65. *Миськив В. В., Скрипник Г. И.* О выборе числа шкал и соотношений масштабов в многошкальной измерительной системе.— Автометрия, 1979, № 4, с. 93—98.
66. *Моисеев Н. Н.* Элементы теории оптимальных систем.— М. : Наука, 1975.— 528 с.
67. *Надеев А. И., Чумаков А. С.* Методы приближенного вычисления и оценка многомерного нормального интеграла.— Радиотехника и электрон., 1979, № 4, с. 705—710.
68. *Острославский И. В., Стражева И. В.* Динамика полета : Траектории летательных аппаратов.— М. : Машиностроение, 1969.— 500 с.
69. *Первачев С. В., Валуев А. А., Чиликин В. М. и др.* Статистическая динамика радиотехнических следящих систем. М. : Сов. радио, 1973.— 488 с.
70. *Поляк Ю. Г.* Вероятностное моделирование на электронных вычислительных машинах.— М. : Сов. радио, 1971.— 400 с.
71. *Попков Ю. С., Киселев О. Н., Петров Н. П., Шмультян В. Л.* Идентификация и оптимизация нелинейных стохастических систем.— М. : Энергия, 1976.— 415 с.
72. *Попов Ю. Д., Белов Ю. А., Макаров В. Л. и др.* Математическая модель системы фазовой пеленгации сложного информационного измерительного комплекса.— М., 1978.— 78 с. Рукопись деп. в ВИНТИ, № 212—78. Деп.
73. *Попов Ю. Д.* Оптимизация одного метода оценки параметров при циклических измерениях.— Автометрия, 1978, № 2, с. 57—63.

74. Попов Ю. Д. Об одной задаче оптимального выбора решающего правила для алфавитной схемы устранения неоднозначности циклических измерений.— *Автометрия*, 1978, № 3, с. 3—8.
75. Попов Ю. Д. О сравнении некоторых методов устранения неоднозначности циклических измерений.— *Радиотехника и электрон.*, 1979, № 10, с. 2148—2149.
76. Попов Ю. Д. Об одном способе повышения надежности правильного устранения неоднозначности циклических измерений.— *Исследование операций и АСУ*, 1980, вып. 16.
77. Попов Ю. Д. Об одном способе повышения надежности правильного устранения неоднозначности циклических измерений.— *Исслед. операций и АСУ*, 1980, вып. 16, с. 74—77.
78. Попов Ю. Д. О построении простых решающих правил оценки параметров при циклических трехшкальных измерениях.— *Вычисл. и прикл. математика*, 1980, вып. 40, с. 65—73.
79. Попов Ю. Д. Об одном методе устранения циклических измерений с использованием временной информации по точной шкале.— *Вычисл. и прикл. математика*, 1981, вып. 44.
80. Попов Ю. Д., Хлобыстов В. В. О надежности устранения неоднозначности циклических измерений методом последовательного пересчета при наличии возмущений масштабных коэффициентов шкал.— *Автометрия*, 1979, № 2, с. 3—7.
81. Попов Ю. Д., Хлобыстов В. В. О приближенных формулах вероятности устранения.— *Вычислит. и прикл. математика*, 1980, вып. 41, с. 114—123.
82. Протасов И. В., Третьяк В. П., Чарин В. С. К задаче о покрытиях.— *Исслед. операций и АСУ*, 1979, вып. 14, с. 32—41.
83. Пугачев В. С. Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления.— М.: Гостехиздат, 1957.— 688 с.
84. Пупков К. А. Статистический расчет нелинейных систем автоматического управления.— М.: Машиностроение, 1965.— 403 с.
85. Пупков К. А., Капалин В. И., Ющенко А. С. Функциональные ряды в теории нелинейных систем.— М.: Наука, 1976.— 448 с.
86. Пучков Г. Е., Хатиашвили Ц. С. Критерии и методы идентификации объектов.— К.: Наук. думка, 1979.— 271 с.
87. Пэли Р., Винер Н. Преобразование Фурье в комплексной плоскости.— М.: Мир, 1964.— 267 с.
88. Райбман Н. С. Идентификация объектов управления : (Обзор).— *Автоматика и телемеханика*, 1979, № 6, с. 80—93.
89. Райбман Н. С., Капитоненко В. В., Овсепян Ф. А. и др. Дисперсионная идентификация.— М.: Наука, 1981.— 336 с.
90. Райниш К. Кибернетические основы и описание непрерывных систем.— М.: Энергия, 1978.— 456 с.
91. Раскин Л. Г. Анализ сложных систем и элементы теории оптимального управления.— М.: Сов. радио, 1976.— 344 с.
92. Самарский А. А., Попов Ю. П. Вычислительный эксперимент в физике.— В кн.: *Наука и человечество*. М.: Знание, 1975. с. 280—291.
93. Самарский А. А. Математическое моделирование и вычислительный эксперимент.— *Вестн. АН СССР*, 1979, № 5, с. 38—49.
94. Самарский А. А. Вести широкую пропаганду идей и методов вычислительного эксперимента.— *Вестн. АН СССР*, 1981, № 3, с. 61—65.
95. Святodus В. К. Динамика пространственного движения управляемых ракет.— М.: Машиностроение, 1969.— 270 с.
96. Сейдж Э., Мелс Дж. Теория оценивания и ее применение в связи и управлении.— М.: Связь, 1976.— 496 с.
97. Скрыпник Г. И. О рекуррентной процедуре раскрытия неоднозначности фазовых измерений.— *Автометрия*, 1978, № 3, с. 8—13.
98. Скрыпник Г. И., Серова А. А., Атаев Д. И. О надежности устранения многозначности фазовых измерений.— *Радиотехника и электроника*, 1968, № 10, с. 1753—1761.
99. Собцов Н. В. Оценка максимального правдоподобия в измерительной системе.— *Радиотехника и электроника*, 1972, № 10, с. 2076—2083.

100. Солодовников В. В., Семенов В. В., Пешель М., Недо Д. Расчет систем управления на ЦВМ. Спектральный и интерполяционный методы.— М.: Машиностроение, 1979.— 664 с.
101. Тетнев Г. С. О характеристиках многошкальных измерительных систем при многократных измерениях.— *Вопр. радиоэлектроники*, 1966, вып. 8, с. 12—21.
102. Тетнев Г. С. К вопросу о выборе параметров многошкальных измерительных систем.— *Радиотехника и электроника*, 1965, № 9, с. 1710—1712.
103. Тененбаум М. М., Соэиев А. С. К вопросу о точности двухшкальных измерительных систем.— *Радиотехника и электроника*, 1968, № 9, с. 1591—1596.
104. Трибель Х. Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы.— М.: Мир, 1980.— 664 с.
105. Удилов В. В. Применение методов абстрактной алгебры при исследовании многомерных систем автоматического управления.— *Кибернетика и вычислит. техника*, 1974, вып. 23, с. 20—27.
106. *Фильтрация и стохастическое управление в динамических системах*.— М.: Мир, 1980.— 408 с.
107. Хлобыстов В. В. К задаче устранения неоднозначности фазовых измерений.— *Автометрия*, 1980, № 6, с. 115—117.
108. Холл Дж., Уатт Дж. Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений.— М.: Мир, 1979.— 312 с.
109. Цурков В. И. Декомпозиция в задачах большой размерности.— М.: Наука, 1981.— 352 с.
110. Черноусько Ф. Л., Колмановский В. Б. Оптимальное управление при случайных возмущениях.— М.: Наука, 1979.— 351 с.
111. Шенон Р. Имитационное моделирование систем — искусство и наука.— М.: Мир, 1978.— 418 с.
112. Эйкхофф П. Основы идентификации систем управления.— М.: Мир, 1975.— 683 с.
113. Åström K. J., Fykholf P. System identification (a survey).— *Automatica*, 1971, 7, N 2, p. 123—162.
114. Athans M. The matrix minimum principle.— *Inform. and Contr.*, 1968, 11, p. 592—600.
115. Billings S. A. Identification of nonlinear system — a survey. *IEEE Proc.* 1980, 127, N 6, p. 272—285.
116. Billings S. A., Fakhouri S. J. Identification of nonlinear systems using the Wiener model.— *Electron. Lett.*, 1977, 13, N 17, p. 507—504.
117. Callier F. M., Desoer C. A. L_p -stability ($1 \leq p \leq \infty$) of multivariable nonlinear time-varying feedback systems that are open-loop unstable.— *Int. J. Contr.*, 1974, 19, N 1, p. 65—72.
118. Damborg M. J., Naylor A. W. Fundamental Structure of Input—Output Stability for Feedback Systems.— *Sci. and Cybernetics, SSC* 1970, 6, N 2, p. 92—96.
119. De Santis R. M. Causality for nonlinear system in Hilbert space.— *Math. Syst. Theory*, 1974, 7, N 4, p. 323—337.
120. De Santis R. M., Porter W. A. On time — related Properties of nonlinear Systems.— *SIAM J. Appl. Math.*, 1973, 24, N 2, p. 188—206.
121. De Santis R. M., Porter W. A. On the analysis of feedback systems with a polynomial plant.— *Int. J. Contr.*, 1975, 21, N 1, p. 159—175.
122. Hering K. D., Melsa J. L. Optimum measurement for estimation.— *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 1974, 19, N 3, p. 264—266.
123. Huber P. J. Robust statistics : a review.— *Ann. Math. Statist.*, 1972, 43, N 4, p. 1041—1067.
124. Huber P. J., Strassen V. Minimax tests and the Neyman—Pearson for capacities.— *Ann. Math. Statist.*, 1973, 44, N 1, p. 251—263.
125. King R. E., Paraskevopoulos P. N. Parametric identification of discrete-time SISO systems.— *Int. J. Contr.*, 1979, 30, N 6, p. 1023—1029.
126. Krener A. J. Kalman — Bucy and Minimax filtering.— *IEEE Trans Automat. Contr.*, 25, N 2, p. 291—292.
127. Lee T. T. A direct approach to identify the noise covariances of Kalman filtering.— *IEEE Trans. Automat. Contr.* 1980, 25, N 4, p. 841—842.

128. *Ljung L., Glover K.* Frequency domain versus time domain methods in system identification.— *Automatica*, 1981, **17**, N 1, p. 71—81.
129. *Martin J.—C.* Scanning observability of linear systems.— *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 1979, **24**, N 3, p. 489—491.
130. *Mosca E.* A deterministic approach to a class of nonparametric system identification problems.— *IEEE Trans. Inform. Theory*, 1971, **17**, N 6, p. 686—696.
131. *Netravali A. N., De Figueiredo P. J.* On the Identification of Nonlinear Dynamical Systems.— *IEEE Trans. Autom. Contr.*, 1971, **16**, N 1, p. 28—36.
132. *Orava P. J.* On the concepts of input-output model, causality, and state in the theory of dynamical systems and control.— *Acta polytechn. scand. Math. and Comput. Sci.*, 1979, N 31, p. 120—127.
133. *Porter W. A.* A basic optimization problem in linear systems.— *Math. Syst. Theory*, 1971, **5**, N 1, p. 20—44.
134. *Porter W. A.* Data Interpolation: causality, structure and system identification.— *Inform. and Contr.*, 1975, **29**, N 3, p. 217—233.
135. *Porter W. A., Zahm C. L.* Basic Concepts in Systems Theory.— *Techn. Rep. Syst. Eng. Lab. Univ. Michigan*, 1969, N 44.
136. *Prenter P. M.* Lagrange and Hermite interpolation in Banach space.— *J. Approxim. theory*, 1971, **4**, N 4, p. 419—432.
137. *Rao V. V., Mohler R. R.* On the synthesis of Volterra kernels of bilinear systems.— *Autom. Contr. Theory and Applic.*, 1975, **3**, N 2, p. 44—46.
138. *Root W. L.* On the modelling of systems for identification. I. ϵ -representation for classes of systems.— *SIAM J. Contr.* 1975, **13**, N 4, p. 927—944.
139. *Roy R. J., Scherman J.* A learning technique for Volterra series representation.— *IEEE Trans. Autom. Contr.* 1967, **12**, N 6, p. 761—764.
140. *Saeks R.* Causality in Hilbert space.— *SIAM Rev.*, 1970, **12**, p. 357—383.
141. *Schenuk R., Scherner H. G.* Vergleich einiger moderner Parameterschätzverfahren.— *Regelungstechnik*, 1976, **24**, N 1, S. 4—22.
142. *Sundareshan M. K., Thathachar M. A. L.* L_2 -stability of nonstationary feedback systems: continuous involving noncausal multipliers.— *IEEE Trans. Autom. Contr.*, 1972, **17**, N 4, p. 502—509.
143. *Svoog R. A.* Positivity conditions and instability criteria for feedback systems.— *SIAM J. Contr.*, 1974, **12**, N 1, p. 83—98.
144. *Tanaka S., Sagara S.* Optimization of an adaptive observation systems in a linear dynamical system.— *Intern. J. Contr.*, 1979, **30**, N 4, p. 695—712.
145. *Zames G.* Realisability Conditions for nonlinear feedback systems.— *IEEE Trans. Circuit Theory*, 1964, **11**, N 2, p. 186—194.
146. *Willems T. C.* Stability, Instability, Invertibility and Causability.— *SIAM J. Contr.*, 1968, **7**, N 4, p. 645—671.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	5
-----------------------	---

ГЛАВА I

МЕТОДЫ УСТРАНЕНИЯ НЕОДНОЗНАЧНОСТИ ПРИ ЦИКЛИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЯХ

§ 1. Алфавитный метод	7
§ 2. Метод последовательного пересчета	32
§ 3. Приближенные формулы вероятности правильного устранения неоднозначности для методов последовательного пересчета и алфавитного	38
§ 4. Надежность устранения неоднозначности при наличии возмущений масштабных коэффициентов шкал	47
§ 5. Декодирование по минимуму расстояния	53
§ 6. Декодирование по наклонным дискретам	63
§ 7. Декодирование по пересечению	72
§ 8. Сравнительный анализ вычислительных алгоритмов устранения неоднозначности циклических измерений	75

ГЛАВА II

ПОСТРОЕНИЕ И ИССЛЕДОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ СЛОЖНОГО ИВК

§ 1. Построение математических моделей угломерного канала	80
§ 2. Исследование математических моделей угломерного канала	95
§ 3. Исследование математических моделей дальномерного канала	103
§ 4. Идентификация параметров дальномерного канала	113
§ 5. Объединенная имитационная система сложного ИВК	118

ГЛАВА III

МОДЕЛИ ТРАЕКТОРИЙ ДВИЖЕНИЯ УПРАВЛЯЕМЫХ ОБЪЕКТОВ

§ 1. Математическая постановка задачи	129
§ 2. Дифференциальные уравнения пространственного движения ракет	134
§ 3. Метод малого параметра	145
§ 4. Аналитические модели движения ракет	159
§ 5. Модели траекторий в пространстве состояний	177

ГЛАВА IV

НЕКОТОРЫЕ МЕТОДЫ ИДЕНТИФИКАЦИИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

§ 1. О некорректности задачи различения гипотез	192
§ 2. О восстановлении априорных характеристик в задачах оценивания	202
§ 3. Об управлении наблюдениями	208
§ 4. Идентификация нелинейных систем «вход—выход»	222
Список литературы	257

*Юрий Анатольевич Белов
Виктор Павлович Диденко
Николай Николаевич Козлов
Иван Иванович Ляшко
Владимир Леонидович Макаров
Олег Евгеньевич Цитрицкий*

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ СЛОЖНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА Т. 2

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ
МОДЕЛИ
ПРИ ИЗМЕРЕНИЯХ**

*Утверждено к печати ученым советом
Киевского государственного
университета
им. Т. Г. Шевченко*

Редакторы С. Д. КОШИГ, М. К. ПУНИНА
Оформление художника Д. Д. ГРИБОВА
Художественный редактор И. П. АНТОНЮК
Технический редактор Т. С. БЕРЕЗЯК
Корректоры С. А. ДОЦЕНКО, Р. С. КОГАН,
Л. М. ТИЩЕНКО

Информ. бланк № 4770

Сдано в набор 15.06.82. Подп. в печ. 14.02.83. БФ 01118. Формат
60×90/16. Бум. тип. № 1. Лит. гарн. Выо. печ. Усл. печ. л. 16,5.
Усл. кр.-отт. 18,06. Уч.-изд. л. 16,42. Тираж 2600 экз. Заказ
3-75. Цена 2 руб. 80 коп.

Издательство «Наукова думка», 252601, Киев, ГСП, Репина, 3.
Отпечатано с матриц Головного предприятия РПО «Полиграф-
книга» на книжной фабрике «Коммунист», 310012, Харьков-12,
Энгельса, 11.

