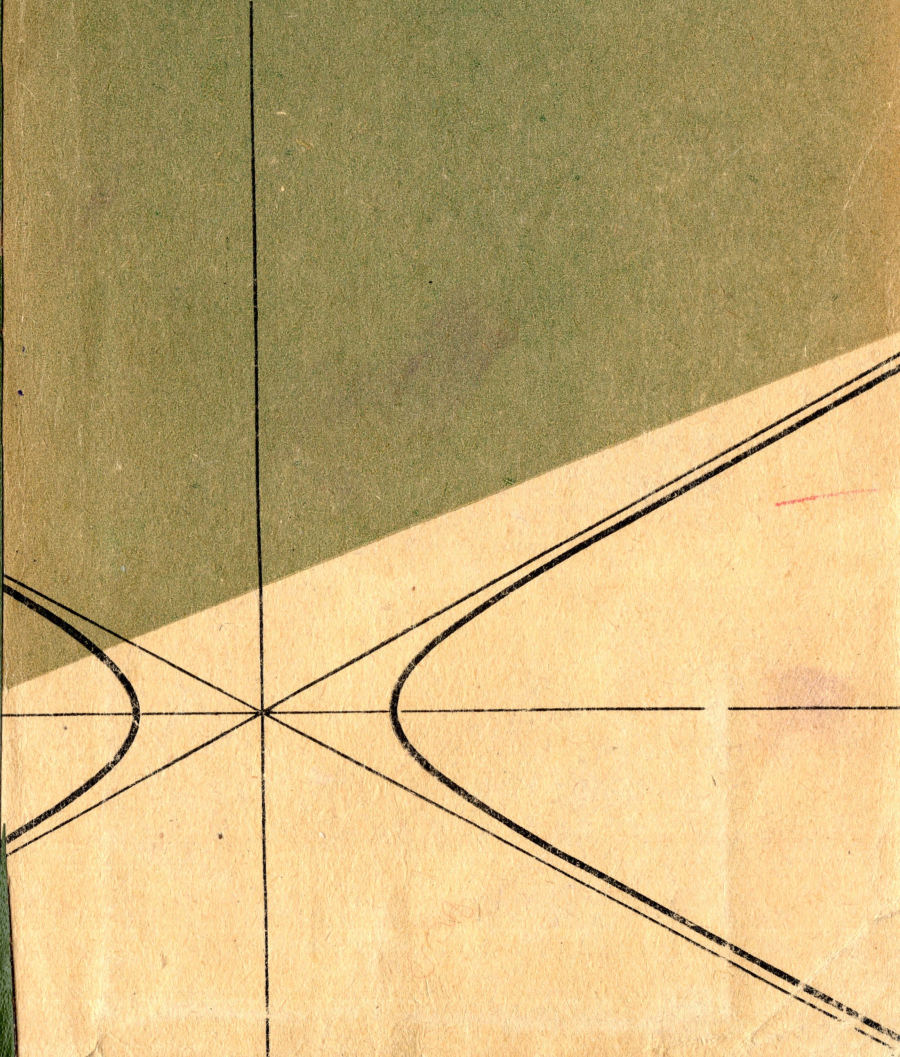
СБОРНИК ЗАДАЧ ПО АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ



Л. С. АТАНАСЯН, В. А. АТАНАСЯН

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

*Утверждено
Министерством просвещения РСФСР
в качестве учебного пособия
для пединститутов*

ИЗДАТЕЛЬСТВО «ПРОСВЕЩЕНИЕ»
Москва · 1968

Атанасян Л. С. и Атанасян В. А.

А92 Сборник задач по аналитической геометрии. [Учеб. пособие для пед. ин-тов]. М., «Просвещение», 1968.

246 с. с черт. 100 000 экз. 35 к.

Настоящий задачник составлен в соответствии с действующей программой курса аналитической геометрии для désинститутов. Задачник предназначен не только для студентов стационарных институтов (дневных), но и вечерних и заочных, а также для лиц, изучающих предмет самостоятельно.

513

$\frac{2—2—2}{14—67}$

ПРЕДИСЛОВИЕ

Курс аналитической геометрии, наряду с математическим анализом и алгеброй, вооружает учителя математики современным аппаратом математического исследования. Глубокое изучение аналитической геометрии необходимо не только для расширения математического кругозора учителя. Знание теоретического материала, умение решать задачи необходимы для сознательного усвоения многих других специальных дисциплин, в первую очередь курсов математического анализа, алгебры, физики, особенно механики. Трудно назвать такую специальную дисциплину, изучаемую студентом в педагогическом институте, в которой не использовались бы те или иные положения аналитической геометрии.

При изучении курса аналитической геометрии существенное значение имеет приобретение навыков в решении задач. Проработка теоретического материала должна сопровождаться решением большого количества разнообразных задач.

В настоящее время в педагогических институтах при изучении курса аналитической геометрии пользуются задачниками[1] [19,], [21], [24] и др. Эти задачники содержат достаточное количество задач и упражнений, однако ни один из них не отвечает тем специфическим требованиям, которые предъявляются к курсу аналитической геометрии на физико-математических факультетах педагогических институтов. Этот курс, читаемый для студентов педагогических институтов, имеет своей целью не только расши-

---

[1] Здесь и в дальнейшем цифры в прямых скобках относятся к списку литературы, помещенному на странице 241.

рение математического кругозора студента, но и подготовку основ для изучения других разделов высшей математики. Необходимо изучение курса построить так, чтобы будущий учитель математики или физики мог использовать методы аналитической геометрии в своей дальнейшей работе в школе. Для этого следует при изучении каждого раздела курса показывать применение методов аналитической геометрии к доказательствам теорем и к решению задач элементарной геометрии. Следует также рассматривать и геометрическое истолкование алгебраических уравнений первой и второй степеней, систем уравнений, неравенств и т. д. Таким образом, курс аналитической геометрии должен иметь профессиональную направленность. Эта задача становится особо актуальной в настоящее время, когда векторная алгебра и элементы аналитической геометрии находят себе место в программах по математике для средней школы.

Нам кажется, что предлагаемый задачник, в отличие от существующих, отвечает требованиям, сформулированным выше.

Настоящий задачник составлен в соответствии с действующей программой курса аналитической геометрии для студентов физико-математических факультетов педагогических институтов по специальности «математика» и охватывает всю программу курса. Задачник может полностью обеспечить также геометрическую часть курса «Аналитическая геометрия и элементы линейной алгебры» физических отделений физико-математических факультетов.

При составлении задачника имелось в виду, что им будут пользоваться студенты заочных и вечерних отделений педагогических институтов, а также лица, изучающие предмет самостоятельно. В связи с этим в начале каждой главы даны не только формулы, но и основные определения и формулировки теорем. Кроме того, ответы к большинству задач снабжены указаниями, а иногда и решениями.

При составлении задачника учтен многолетний опыт чтения этого курса в Московском ордена Трудового Красного Знамени государственном педагогическом институте имени В. И. Ленина и в Московском государственном заочном педагогическом институте.

Задачник состоит из двух частей: часть I — геометрия на плоскости и часть II — геометрия в пространстве. В каждой части задачи, относящиеся к определенной теме, объединены в параграфы. В задачнике, как было указано выше, уделено большое внимание подбору задач элементарной геометрии, решаемых методами аналитической геометрии. Эти задачи, как правило, выделены в отдельные параграфы.

Настоящий задачник составлен на основе ранее изданного Л. С. Атанасяном задачника-практикума по аналитической геометрии для студентов-заочников педагогических институтов [18]. Однако в предлагаемом задачнике объем материала значительно расширен, введены новые разделы и общее число задач увеличено почти вдвое. При составлении задачника использована учебная литература по аналитической геометрии, список которой помещен на странице 242.

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ

ГЛАВА I

АФФИННЫЕ ДЕЙСТВИЯ НАД ВЕКТОРАМИ НА ПЛОСКОСТИ И В ПРОСТРАНСТВЕ

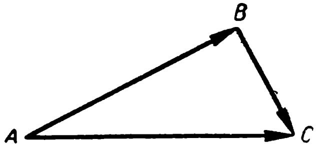
Вектором называется направленный отрезок, т. е. отрезок, для которого указано, какая из ограничивающих его точек является первой и какая—второй. Первая точка называется началом, а вторая—концом. Направление вектора на чертеже отмечается стрелкой, обращенной острием к концу вектора. Векторы обозначаются так: $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{r}$ или $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{EF}$. Вектор, у которого начало совпадает с концом, называется нулевым и обозначается так: $\boldsymbol{0}$.

Два вектора называются коллинеарными, если они лежат на одной и той же прямой или на параллельных прямых. Нуль-вектор считается коллинеарным любому вектору. Если два коллинеарных вектора имеют одно и то же направление, то они называются сонаправленными, в противном случае — противоположно направленными.

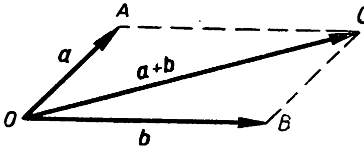
Модулем, или длиной, вектора $\overline{AB}$ называется длина отрезка AB. Модуль нуль-вектора равен нулю. Таким образом, модуль вектора есть скалярная величина. Модуль векторов $\boldsymbol{a}$, $\overline{AB}$ обозначается так: $|\boldsymbol{a}|$, a, $|\overline{AB}|$.

Вектор называется единичным, если его модуль равен единице.

Два вектора $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ называются равными, если выполнены следующие условия: а) $|\boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{b}|$; б) векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ коллинеарны; в) $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ сонаправлены. Из этого определения следует, что если $\boldsymbol{a}$ — нулевой вектор, а $\boldsymbol{b}$ — ненулевой, то



Черт. 1



Черт. 2.

$\boldsymbol{a}$ не равен $\boldsymbol{b}$, а если $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ нулевые, то они равны. Равенство векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ обозначается так: $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$. Имеют места следующие свойства равенства: а) $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$ (рефлективность); б) если $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$, то $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}$ (симметричность); в) если $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}$, то $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{c}$ (транзитивность). П е р е н е с т и вектор $\boldsymbol{a}$ в точку A или о т л о ж и т ь вектор $\boldsymbol{a}$ от точки A означает построить вектор $\overline{AB}$ так, чтобы $\boldsymbol{a} = \overline{AB}$. Если несколько попарно коллинеарных векторов перенести в одну и ту же точку O пространства, то их концы вместе с точкой O будут лежать на одной прямой.

С у м м о й $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ двух векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ называется третий вектор $\boldsymbol{c}$, который определяется следующим образом: от произвольной точки O откладывают вектор $\boldsymbol{a}$, от конца A отложенного вектора откладывают вектор $\boldsymbol{b}$; если B есть конец вектора $\boldsymbol{b}$, то $\boldsymbol{c} = \overline{OB}$. Указанный способ построения суммы называется с п о с о б о м т р е у г о л ь н и к а. Сумма не зависит от выбора начальной точки O. Из указанного правила следует, что для любых трех точек A, B и C плоскости имеем: $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$ (черт. 1). Это свойство трех точек очень полезно для решения задач. Если векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ не коллинеарны, то для построения их суммы может быть применен способ сложения векторов по п р а в и л у п а р а л л е л о г р а м м а. Перенесем векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ в точку O и концы полученных векторов обозначим через A и B. Если $OACB$ — параллелограмм, построенный на отрезках OA и OB (черт. 2), то $\overline{OC} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$.

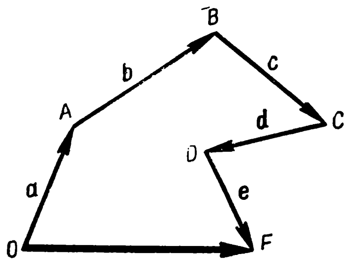
Имеют место следующие свойства сложения векторов:

а) Для любых двух векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$:

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}.$$

б) Для любых трех векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$:

$$\boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c}.$$



Черт. 3

в) Для любого вектора $\boldsymbol{a}$:

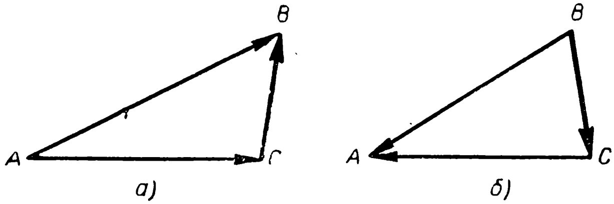
$$\boldsymbol{a} + 0 = \boldsymbol{a}.$$

г) Для любого вектора $\boldsymbol{a}$ существует противоположный вектор $-\boldsymbol{a}$, такой что

$$\boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{o}.$$

Свойство б) позволяет ввести понятие суммы трех векторов: суммой $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$ векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ называется вектор $\boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})$ или $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c}$. Аналогично вводится понятие суммы любого конечного числа векторов. Имеется правило многоугольника для построения суммы конечного числа векторов. Для суммы пяти слагаемых это правило дано на чертеже 3.

Разностью $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$ векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ называется такой вектор $\boldsymbol{q}$, что $\boldsymbol{b} + \boldsymbol{q} = \boldsymbol{a}$. Для любых двух векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ всегда существует и единственным образом определяется разность, при этом $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{b})$. Для любых трех точек A, B и C имеем:



Черт. 4

а) $\overline{AB} - \overline{AC} = \overline{CB}$; б) $\overline{BA} - \overline{CA} = \overline{BC}$ (черт. 4*а*, *б*).

Произведением $\lambda\boldsymbol{a}$ числа $\lambda \neq 0$ на вектор $\boldsymbol{a} \neq 0$ называется вектор $\boldsymbol{p}$, удовлетворяющий следующим условиям: а) $|\boldsymbol{p}| = |\lambda|\ |\boldsymbol{a}|$; б) $\boldsymbol{p}$ коллинеарен $\boldsymbol{a}$; в) при $\lambda > 0$ векторы $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{a}$ сонаправлены, а при $\lambda < 0$ противоположно направлены. Если $\lambda = 0$ или $a = 0$, то $\lambda\boldsymbol{a} = 0$.

Основные свойства умножения вектора на число:

а) $1 \cdot \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$, $(-1)\,\boldsymbol{a} = -\boldsymbol{a}$;

б) $\alpha(\beta\boldsymbol{a}) = (\alpha\beta)\,\boldsymbol{a}$;
в) $(\alpha + \beta)\,\boldsymbol{a} = \alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{a}$;
г) $\alpha(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \alpha\,\boldsymbol{a} + \alpha\boldsymbol{b}$.

Если вектор $\boldsymbol{a} \neq 0$, то $\boldsymbol{a}_0 = \dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$ — единичный вектор, сонаправленный с вектором $\boldsymbol{a}$.

Если $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ коллинеарны и $\boldsymbol{b} \neq 0$, то число α, удовлетворяющее условию $\boldsymbol{a} = \alpha\,\boldsymbol{b}$, называется о т н о ш е н и е м $\dfrac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}$ векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. Для неколлинеарных векторов отношение не вводится. Очевидно, $\alpha = \pm\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{b}|}$, причем знак плюс берется в том случае, когда векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ сонаправлены, а минус — в противном случае.

Л и н е й н о й к о м б и н а ц и е й векторов $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ называется вектор $\boldsymbol{p}$ вида:

$$\boldsymbol{p} = \alpha_1\boldsymbol{a}_1 + \alpha_2\boldsymbol{a}_2 + \ldots + \alpha_k\boldsymbol{a}_k.$$

Здесь $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ — произвольные числа. Линейная комбинация называется н е т р и в и а л ь н о й, если хотя бы одно из чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ отлично от нуля. В противном случае она называется т р и в и а л ь н о й. Система векторов $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ называется л и н е й н о з а в и с и м о й, если существует хотя бы одна нетривиальная комбинация, равная нулю, т. е. если

$$\alpha_1\boldsymbol{a}_1 + \ldots + \alpha_k\,\boldsymbol{a}_k = 0$$

и хотя бы одно из чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ не равно нулю.

§ 1. Сложение и вычитание векторов

1. Для произвольного треугольника ABC точки M, N и P — соответственно середины сторон AC, AB и BC. Среди указанных ниже пар векторов найти пары равных и пары коллинеарных, но неравных векторов: а) $\overline{AN}$ и $\overline{MP}$; б) $\overline{NP}$ и $\overline{CA}$; в) $\overline{BM}$ и $\overline{PC}$; г) $\overline{PC}$ и $\overline{BC}$; д) $\overline{AM}$ и $\overline{MC}$; е) $\overline{NP}$ и $\overline{CM}$; ж) $\overline{AB}$ и $\overline{NP}$.

2. Начертите параллелограмм $ABCD$ и обозначьте через O точку пересечения диагоналей. Укажите, какие из следующих пар векторов равны, а какие коллинеарны, но не равны: а) $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$; б) $\overline{AB}$ и $\overline{DC}$; в) $\overline{BC}$ и $\overline{CB}$; г) $\overline{AO}$ и $\overline{BC}$; д) $\overline{OA}$ и $\overline{CO}$.

3. Будут ли выполнены свойства рефлективности, транзитивности и симметричности для понятия «равенства векторов», если его ввести одним из следующих способов:

а) Векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ называются «равными», если $|\boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{b}|$.

б) Векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ называются «равными», если $|\boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{b}|$ и они образуют угол $\varphi = 120°$.

в) Векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ называются «равными», если $|\boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{b}|$ и они либо коллинеарны, либо перпендикулярны.

г) Векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ называются «равными», если $|\boldsymbol{a}| = 2|\boldsymbol{b}|$.

д) Векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ называются «равными», если $|\boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{b}|$ и они либо коллинеарны, либо образуют угол 30°.

4. Пусть $ABCD$ — параллелограмм, O — точка пересечения диагоналей, а E и F — соответственно середины параллельных сторон BC и AD. Построить на чертеже следующие векторы:

а) $\overline{AB} + \overline{DC}$; б) $\overline{AE} + \overline{DF}$; в) $\overline{AO} - \overline{AB}$; г) $\overline{OC} + \overline{CD} + \overline{OB}$; д) $\overline{ED} + \overline{FA} + \overline{FO}$; е) $\overline{AB} + \overline{BE} - \overline{OE} + \overline{CD}$.

5. Пользуясь параллелограммом, построенным на векторах $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, проверить на чертеже справедливость тождеств:

а) $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) = 2\boldsymbol{a}$;
б) $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) - (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) = 2\boldsymbol{b}$;
в) $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) - \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}) = \boldsymbol{b}$,

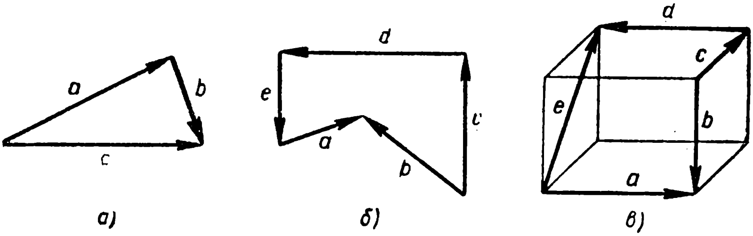
где $2\boldsymbol{a}$ и $2\boldsymbol{b}$ суть $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b} + \boldsymbol{b}$.

6. Пусть $ABCD$ — параллелограмм, O — точка пересечения диагоналей, а точки M, N, P и Q — соответственно середины сторон AB, BC, CD и DA. Построить на чертеже следующие векторы:

а) $\overline{MO} - \overline{OA}$; б) $\overline{OC} - \overline{CP}$; в) $\overline{OQ} - \overline{OB}$; г) $\overline{AC} - \overline{PD}$; д) $\overline{AN} + \overline{MQ}$; е) $\overline{OA} - \overline{NP}$; ж) $\overline{AB} - \overline{OC}$.

7. На плоскости даны параллелограмм $ABCD$ и произвольная точка O. Доказать, что $\overline{OA} + \overline{OC} = \overline{OB} + \overline{OD}$. Доказать обратное утверждение: если для некоторого плоского четырехугольника $ABCD$ и точки O имеет место соотношение $\overline{OA} + \overline{OC} = \overline{OB} + \overline{OD}$, то $ABCD$ — параллелограмм.

8. Пусть $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ — произвольные векторы. Показать, что $|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}| \leqslant |\boldsymbol{a}| + |\boldsymbol{b}|$. При каких условиях в этом соотношении имеет место знак равенства?



Черт. 5

9. Могут ли одновременно иметь место неравенства: $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|<|\boldsymbol{a}|$ и $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|<|\boldsymbol{b}|$?

10. Могут ли одновременно иметь место неравенства: $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|>|\boldsymbol{a}|$ и $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|>|\boldsymbol{b}|$?

11. Показать, что $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}| \leqslant |\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$. При каких условиях в этом соотношении имеет место знак равенства?

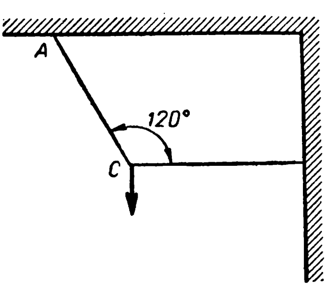
12. Если $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ — данные векторы, то при каких условиях векторы $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ коллинеарны?

13. Изображая векторы $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ с помощью диагоналей параллелограмма, найти условия, при которых

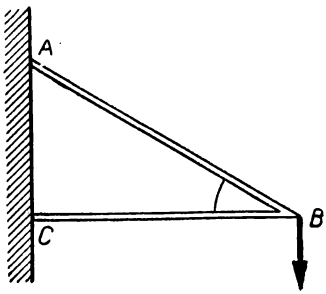
$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|.$$

14. Написать векторные равенства, связывающие векторы, изображенные на чертежах 5 а), б), в).

15. Пусть $ABCDEF$ — правильный шестиугольник, O — его центр. Полагая $\overline{OA}=\boldsymbol{a}$ и $\overline{OB}=\boldsymbol{b}$, выразить $\overline{OC}$, $\overline{OD}$, $\overline{OE}$, $\overline{OF}$, $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{ED}$, $\overline{EC}$, $\overline{CA}$, $\overline{DA}$ через векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$.



Черт. 6



Черт. 7

16. К двум тросам подвешен груз весом 30 *кг* (черт. 6). Определить силы, возникающие в тросах, если $\angle ACB = 120°$.

17. Груз весом 60 *кг* поддерживается двумя стержнями — AB и CB (черт. 7). Определить силы, возникающие в стержнях, если $\angle ACB = 90°$, $\angle ABC = 30°$.

§ 2. Умножение вектора на число; смешанные задачи

18. Начертить произвольный вектор $\boldsymbol{a}$ и построить векторы:

$$2\boldsymbol{a},\ -2\boldsymbol{a},\ \sqrt{2}\boldsymbol{a},\ \frac{1}{2}\boldsymbol{a},\ -\frac{3}{5}\boldsymbol{a},\ 5\boldsymbol{a},\ -\sqrt{3}\boldsymbol{a}.$$

19. По данным векторам $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ построить каждый из следующих векторов:

$$4\boldsymbol{a},\ -\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}),\quad 2\boldsymbol{a}+\frac{1}{4}\boldsymbol{b},\ 3\boldsymbol{a}-\frac{1}{3}\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{a}+\sqrt{3}\,\boldsymbol{b}.$$

20. Пользуясь параллелограммом, построенным на векторах $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, проверьте на чертеже справедливость тождеств:

а) $\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$;

б) $\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$;

в) $(\boldsymbol{a}+\frac{\boldsymbol{b}}{2})-(\boldsymbol{a}-\frac{\boldsymbol{b}}{2})=\boldsymbol{b}$.

21. В треугольнике ABC векторы $\overline{AK}$, $\overline{BL}$ и $\overline{CM}$ направлены по медианам. Выразить их через векторы $\boldsymbol{a}=\overline{AB}$ и $\boldsymbol{b}=\overline{AC}$.

22. Пусть ABC — произвольный треугольник, а E и F — середины сторон AB и BC. Выразить векторы $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ и $\overline{AC}$ через $\boldsymbol{a}=\overline{AE}$ и $\boldsymbol{b}=\overline{AF}$.

23. На прямой дана последовательность следующих друг за другом точек $A_1, A_2, \ldots, A_{10}$, для которых $A_1A_2=A_2A_3=\ldots=A_9A_{10}$.

Определить отношения векторов: а) $\overline{A_1A_2}:\overline{A_8A_7}$; б) $\overline{A_1A_5}:\overline{A_5A_3}$; в) $\overline{A_3A_{10}}:\overline{A_5A_7}$; г) $\overline{A_8A_4}:\overline{A_9A_3}$; д) $\overline{A_6A_3}:\overline{A_{10}A_1}$.

24. Дан произвольный треугольник с медианами AM_1, BM_2, CM_3 и точкой O пересечения медиан. Какие из указанных ниже выражений имеют смысл: $\overline{AM_3}$: $\overline{AB}$; $\overline{AO}$: $\overline{OM_2}$; $\overline{M_3O}$: $\overline{CO}$; $\overline{AM_1}$: $\overline{M_1O}$; $\overline{OA}$: $\overline{OM_2}$.

25. Пусть $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ — неколлинеарные векторы, а $\boldsymbol{c}$ — произвольный вектор. Выясните, коллинеарны ли следующие пары векторов:

а) $\boldsymbol{p}_1 = \boldsymbol{a} - 2\sqrt{3}\,\boldsymbol{b}$, $\quad \boldsymbol{p}_2 = \sqrt{3}\,\boldsymbol{a} - 6\boldsymbol{b}$;
б) $\boldsymbol{p}_1 = 2\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$, $\quad \boldsymbol{p}_2 = \boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b}$;
в) $\boldsymbol{p}_1 = 7\boldsymbol{a}$, $\quad \boldsymbol{p}_2 = 3\sqrt{5}\,\boldsymbol{a}$;
г) $\boldsymbol{p}_1 = \boldsymbol{a} - 2\sqrt{2}\,\boldsymbol{b} + \sqrt{6}\,\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{p}_2 = \sqrt{2}\,\boldsymbol{a} - 4\boldsymbol{b} + 2\sqrt{3}\boldsymbol{c}$.

26. Доказать, что для двух неколлинеарных векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, исходящих из одной точки, вектор $|\boldsymbol{b}|\boldsymbol{a} + |\boldsymbol{a}|\,\boldsymbol{b}$ коллинеарен биссектрисе угла, определяемого векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, а вектор $|\boldsymbol{b}|\boldsymbol{a} - |\boldsymbol{a}|\,\boldsymbol{b}$ коллинеарен биссектрисе смежного с ним угла.

27. Дан треугольник ABC и произвольная точка O плоскости. Если через M обозначить точку пересечения медиан треугольника ABC, а через $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$ и $\boldsymbol{r}_3$—соответственно векторы $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ и $\overline{OC}$, то $\overline{OM} = \frac{1}{3}(\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{r}_2+\boldsymbol{r}_3)$. Доказать.

28. Доказать, что для двух треугольников $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$, медианы которых пересекаются соответственно в точках M_1 и M_2, имеет место равенство: $\overline{A_1A_2} + \overline{B_1B_2} + \overline{C_1C_2} = 3\,\overline{M_1M_2}$.

29. Пусть $ABCD$ — параллелограмм, а O — точка пересечения его диагоналей. Полагая $\overline{AO} = \boldsymbol{a}$ и $\overline{BO} = \boldsymbol{b}$, выразить через $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ векторы $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ и $\overline{DA}$.

30. В тетраэдре $ABCD$ точка E лежит на ребре AB и делит отрезок AB в отношении $\lambda = \frac{\overline{AE}}{\overline{EB}} = 3$. Полагая $\boldsymbol{a} = \overline{AE}$, $\boldsymbol{b} = \overline{AC}$, $\boldsymbol{c} = \overline{AD}$, выразить через $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ векторы $\overline{BD}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{ED}$ и $\overline{EC}$.

31. Отрезок AB разделен точками C_1, C_2, ..., C_{n-1} на n равных частей. Полагая $\overline{OA}=\boldsymbol{a}$ и $\overline{OB}=\boldsymbol{b}$, выразить через них векторы $\overline{OC_1}$, $\overline{OC_2}$, ..., $\overline{OC_{n-1}}$. Здесь O — произвольная точка плоскости.

32. В плоскости треугольника ABC взята произвольная точка O. Пусть A_1, B_1 и C_1—середины сторон BC, CA и AB.

Показать, что равнодействующая сил $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ и $\overline{OC}$ равна равнодействующей сил $\overline{OA_1}$, $\overline{OB_1}$, $\overline{OC_1}$.

33. Определить векторы $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ из следующей системы уравнений:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} + 2\boldsymbol{y} &= 2\boldsymbol{a}, \\ \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} &= 2\boldsymbol{b}, \end{aligned}$$

где $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ — данные векторы.

34. Определить векторы $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ и $\boldsymbol{z}$ из следующей системы уравнений:

$$\begin{aligned} 2\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} - \boldsymbol{z} &= 4\boldsymbol{a}; \\ 3\boldsymbol{x} + 4\boldsymbol{y} - 2\boldsymbol{z} &= 11\boldsymbol{a}; \\ 3\boldsymbol{x} - 2\boldsymbol{y} + 4\boldsymbol{z} &= 11\boldsymbol{b}. \end{aligned}$$

35. Упростить выражения:

а) $3\boldsymbol{a} - 4\boldsymbol{b} - (3\boldsymbol{a} + 4\boldsymbol{b})$;
б) $\cos\alpha \cos\beta\, \boldsymbol{a} - \sin\alpha \sin\beta\, \boldsymbol{a}$;
в) $(\alpha - \beta)(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) - (\alpha + \beta)(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b})$.

§ 3. Приложение векторной алгебры к решению задач элементарной геометрии

36. Доказать, что средняя линия треугольника равна половине основания и параллельна ей.

37. Доказать, что средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме.

38. Доказать, что если $ABCD$ — пространственный четырехугольник (т. е. вершины A, B, C и D не обязательно лежат в одной плоскости), то $\overline{AB} + \overline{DC} = \overline{2EF}$, где AB и DC — противоположные стороны, а E и F — соответственно середины сторон AD и BC[1].

39. На сторонах треугольника ABC построены произвольные параллелограммы ABB_1A_2, BCC_1B_2 и ACC_2A_1. Доказать, что существует треугольник, стороны которого соответственно параллельны и равны отрезкам: A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2.

40. Дан произвольный треугольник ABC. Доказать, что существует треугольник $A_1B_1C_1$, стороны которого соот-

[1] Эта задача, по существу, является обобщением предыдущей.

ветственно параллельны и равны медианам исходного треугольника.

41. Из медиан треугольника ABC построен новый треугольник $A_1B_1C_1$, из его медиан — треугольник $A_2B_2C_2$. Показать, что треугольники ABC и $A_2B_2C_2$ подобны; найти коэффициент подобия.

42. Доказать, что биссектриса внутреннего угла треугольника делит противоположную сторону внутренним образом на части, пропорциональные прилежащим сторонам.

43. Доказать, что биссектриса внешнего угла неравнобедренного треугольника делит противоположную сторону внешним образом на части, пропорциональные прилежащим сторонам.

44. Дан треугольник ABC и произвольная точка M плоскости. Если через M_1 обозначить точку, симметричную точке M относительно A, через M_2 — точку, симметричную точке M_1 относительно B, через M_3 — точку, симметричную точке M_2 относительно C, через M_4 — точку, симметричную M_3 относительно A, через M_5 — точку, симметричную M_4 относительно B, и через M_6 — точку, симметричную точке M_5 относительно C, то M_6 совпадает с M. Доказать.

45. Доказать, что медианы произвольного треугольника пересекаются в одной точке и делятся ею в отношении $2:1$, начиная от вершины.

46. Медианой четырехугольника называется отрезок, соединяющий вершину четырехугольника с точкой пересечения медиан треугольника, образованного тремя остальными вершинами. Доказать, что медианы четырехугольника пересекаются в одной точке и делятся ею в отношении $3:2$, начиная от вершины.

47. В плоском четырехугольнике проведены три отрезка, соединяющие соответственно: 1) середины двух противоположных сторон; 2) середины двух других противоположных сторон; 3) середины диагоналей. Доказать, что эти три отрезка пересекаются в одной точке P и каждый из них точкой P делится пополам.

48. На стороне AD параллелограмма $ABCD$ взята точка M так, что $AM = k \cdot AD$. Прямая BM пересекает диагональ AC в точке P. Определить отношение $AP : AC$.

ГЛАВА II

КООРДИНАТЫ ВЕКТОРОВ И ТОЧЕК НА ПЛОСКОСТИ

Система векторов $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ называется компланарной, если векторы системы, будучи отложены от одной и той же точки, лежат в одной плоскости. В этой главе все рассматриваемые векторы предполагаются компланарными. Базисом, или координатными векторами $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ плоскости, называется два неколлинеарных вектора, взятых в определенном порядке. Базис $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$ называется прямоугольным декартовым, если векторы $\boldsymbol{i}$ и $\boldsymbol{j}$ единичные и взаимно перпендикулярные.

Если дан базис $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$, то любой вектор $\boldsymbol{a}$ плоскости однозначно можно представить в таком виде:

$$\boldsymbol{a} = \alpha\, \boldsymbol{e}_1 + \beta \boldsymbol{e}_2.$$

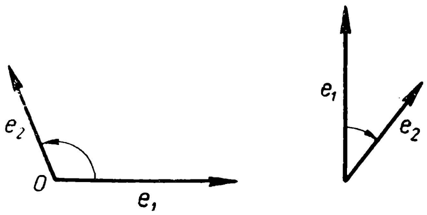
В этом случае говорят, что $\boldsymbol{a}$ разложен по векторам или по базису $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$.

Числа α, β называются координатами вектора $\boldsymbol{a}$ в базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$, причем α называется первой, а β — второй координатой вектора $\boldsymbol{a}$. Если $\boldsymbol{a}$ имеет координаты α, β в базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$, то пишут так: $\boldsymbol{a}\,\{\alpha, \beta\}_{\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2}$, или просто $\boldsymbol{a}\,\{\alpha, \beta\}$. Два вектора $\boldsymbol{a}\,\{\alpha_1, \beta_1\}$ и $\boldsymbol{b}\,\{\alpha_2, \beta_2\}$ равны тогда и только тогда, когда $\alpha_1 = \alpha_2$, $\beta_1 = \beta_2$. *Необходимым и достаточным условием коллинеарности двух векторов $\boldsymbol{a}\,\{\alpha_1, \beta_1\}$ и $\boldsymbol{b}\,\{\alpha_2, \beta_2\}$ является пропорциональность их соответствующих координат*: $\alpha_2 = \lambda\alpha_1$, $\beta_2 = \lambda\beta_1$, *или условие*:

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Имеет место следующая теорема о координатах линейной комбинации векторов: *если $\boldsymbol{p}$ является линейной комбинацией векторов $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k$, то каждая координата вектора $\boldsymbol{p}$ равна той же линейной комбинации соответствующих координат векторов $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k$.* В частности, если $\boldsymbol{a}\,\{\alpha_1, \beta_1\}$, $\boldsymbol{b}\,\{\alpha_2, \beta_2\}$, то

$$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})\,\{\alpha_1 + \alpha_2,\ \beta_1 + \beta_2\};$$
$$(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b})\,\{\alpha_1 - \alpha_2,\ \beta_1 - \beta_2\};$$
$$\lambda\boldsymbol{a}\,\{\lambda\alpha_1,\ \lambda\beta_1\}.$$



Черт. 8

Плоскость называется **ориентированной**, если в ней указано некоторое направление вращения в качестве положительного. Если на плоскости дан базис $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, векторы которого приложены к точке O, то плоскость считается ориентированной и за положительное направление обхода принимается то направление, по которому следует повернуть вектор $\boldsymbol{e}_1$ до совпадения с направлением вектора $\boldsymbol{e}_2$ по кратчайшему пути (черт. 8). **Мерой** $(\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}})$ угла между ненулевыми векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ на ориентированной плоскости называется число, которым измеряется угол, на который следует повернуть $\boldsymbol{a}$ до совпадения с направлением вектора $\boldsymbol{b}$. При этом мера угла считается **положительной**, если поворот совершается в положительном направлении; в противном случае она считается **отрицательной**.

Если $\boldsymbol{a}_0$ — единичный вектор, то в прямоугольном декартовом базисе $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ этот вектор выражается так:

$$\boldsymbol{a}_0 = \cos(\widehat{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{a}_0})\, \boldsymbol{i} + \sin(\widehat{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{a}_0})\, \boldsymbol{j}.$$

Если $\boldsymbol{a}\,\{\alpha, \beta\}$ задан в прямоугольном декартовом базисе, то

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}.$$

Если в прямоугольном декартовом базисе $\boldsymbol{a}_1\,\{\alpha_1, \beta_1\}$, $\boldsymbol{a}_2\,\{\alpha_2, \beta_2,\}$, то

$$\cos(\widehat{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2}) = \frac{\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2}{\sqrt{\alpha_1^2 + \beta_1^2}\sqrt{\alpha_2^2 + \beta_2^2}};$$

$$\sin(\widehat{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2}) = \frac{\alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2}{\sqrt{\alpha_1^2 + \beta_1^2}\sqrt{\alpha_2^2 + \beta_2^2}};$$

$$\operatorname{tg}(\widehat{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2}) = \frac{\alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2}{\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2}.$$

Из первого соотношения, в частности, получаем условие перпендикулярности двух векторов $\boldsymbol{a}_1\ \{\alpha_1, \beta_1\}$, $\boldsymbol{a}_2\ \{\alpha_2, \beta_2\}$:

$$\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 = 0.$$

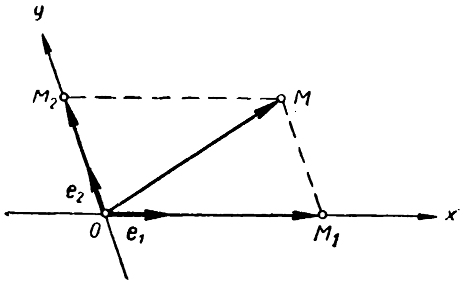
Если вектор $\boldsymbol{a}$ в базисе $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ имеет координаты $\{\alpha, \beta\}$, то вектор $\boldsymbol{a}'$, полученный из $\boldsymbol{a}$ путем поворота на $+90°$, имеет координаты $\{-\beta, \alpha\}$.

О с ь ю называется прямая с заданным на ней единичным вектором — ортом. Если O — произвольная точка оси, а $\boldsymbol{e}$ — единичный вектор, то ось однозначно определяется, если даны O и $\boldsymbol{e}$. Пусть $\overline{AB}$ — произвольный вектор, а A_1 и B_1 — проекции точек A и B на ось $O\boldsymbol{e}$. Число $\dfrac{\overline{A_1B_1}}{\boldsymbol{e}}$ называется п р о е к ц и е й вектора $\overline{AB}$ на ось $O\boldsymbol{e}$ и обозначается так: $\text{пр}_{\boldsymbol{e}}\ \overline{AB}$. Имеет место следующая формула:

$$\text{пр}_{\boldsymbol{e}}\ \boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}| \cos (\widehat{\boldsymbol{e}, \boldsymbol{a}}).$$

Каждая координата вектора в прямоугольном декартовом базисе равна проекции этого вектора на ось, определяемую соответствующим вектором базиса. Отсюда и из свойств координат векторов получаем свойства проекций:

$$\text{пр}_{\boldsymbol{e}}\ (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \text{пр}_{\boldsymbol{e}}\ \boldsymbol{a} + \text{пр}_{\boldsymbol{e}}\ \boldsymbol{b};$$
$$\text{пр}_{\boldsymbol{e}}\ (\lambda\boldsymbol{a}) = \lambda\text{пр}_{\boldsymbol{e}}\ \boldsymbol{a}.$$



Черт. 9

Общей д е к а р т о в о й или а ф ф и н н о й системой координат $O\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2$ на плоскости называется упорядоченная пара двух пересекающихся в точке O прямых Ox и Oy, на каждой из которых задан ненулевой вектор: $\boldsymbol{e}_1$ на прямой Ox и $\boldsymbol{e}_2$ на прямой Oy (черт. 9). Точка O называется н а ч а-л о м к о о р д и н а т, а направленные прямые Ox и Oy — о с я м и к о о р д и н а т. Первая ось называется осью а б с ц и с с (или осью x), вторая — осью о р д и н а т (или осью y). Векторы $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$ называются к о о р д и н а т н ы м и. Если оси Ox и Oy взаимно перпендикулярны и векторы $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$ единичные, то система называется п р я м о у г о л ь н о й д е к а р т о в о й. В этом случае она обозначается так: $O\,\boldsymbol{i}\,\,\boldsymbol{j}$.

Если M — произвольная точка плоскости, то вектор $\overline{OM}$ называется р а д и у с о м - в е к т о р о м точки M, а координаты этого вектора — к о о р д и н а т а м и т о ч к и M. Если $\overline{OM}\ \{x,\ y\}$, то x называется а б с ц и с с о й точки M, а y — о р д и н а т о й. Для того чтобы указать, что точка M имеет координаты x, y, пишут: $M\ (x,\ y)$. Если M_1 — проекция M по направлению оси Ox, а M_2 — проекция M по направлению оси Oy (см. черт. 9), то $x = \frac{\overline{OM}}{\boldsymbol{e}_1}$, $y = \frac{\overline{OM_2}}{\boldsymbol{e}_2}$. Если система прямоугольная декартова, то $x = \text{пр}_{\boldsymbol{i}}\,\overline{OM}$, $y = \text{пр}_{\boldsymbol{j}}\,\overline{OM}$.

Имеют место следующие теоремы.

а) Если в аффинной системе $A\ (x_1,\ y_1)$, $B\ (x_2,\ y_2)$, то $\overline{AB}\ \{x_2 - x_1,\ y_2 - y_1\}$.

б) Для того чтобы точки $A\ (x_1,\ y_1)$, $B\ (x_2,\ y_2)$ и $C\ (x_3,\ y_3)$, заданные в аффинной системе, лежали на одной прямой, необходимо и достаточно, чтобы

$$\begin{vmatrix} x_1 - x_3 & y_1 - y_3 \\ x_2 - x_3 & y_2 - y_3 \end{vmatrix} = 0, \quad \text{или} \quad \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

в) Если точка $C\ (x,\ y)$ делит отрезок AB, где $A\ (x_1,\ y_1)$, $B\ (x_2,\ y_2)$, в отношении $\lambda \neq -1$, то

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \qquad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}.$$

В частности, координаты середины отрезка AB, где $A\ (x_1,\ y_1)$, $B\ (x_2,\ y_2)$, равны полусуммам координат его концов:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Эти формулы верны в аффинной системе координат.

г) Расстояние d между точками $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$, заданными в прямоугольной декартовой системе, равно:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

д) Если ориентированный треугольник[1] ABC задан координатами своих вершин в прямоугольной декартовой системе: $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$, то площадь этого треугольника вычисляется по формулам:

$$S = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}, \quad \text{или } S = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

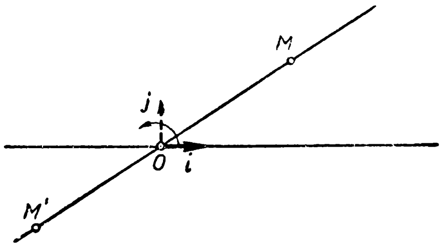
Для того чтобы ориентация треугольника совпала с положительной ориентацией, определяемой системой координат, необходимо и достаточно, чтобы $S > 0$.

Возьмем на плоскости ось $O\boldsymbol{i}$ и некоторое положительное направление обхода. Точку O, вектор $\boldsymbol{i}$ и положительное направление обхода плоскости будем называть **полярной системой координат**. Точка O называется **полюсом**, а ось $O\boldsymbol{i}$ — **полярной осью**. Пусть M — произвольная точка плоскости, отличная от полюса O. Положение этой точки может быть однозначно определено заданием длины ρ отрезка OM и угла $\varphi = (\widehat{\boldsymbol{i}, \overline{OM}})$. Числа ρ и φ называются **полярными координатами** точки M. При этом ρ называется **полярным радиусом** или **первой полярной координатой**, а φ — **полярным углом** или **второй полярной координатой**. Если M имеет полярные координаты ρ, φ, то пишут так: $M(\rho, \varphi)$. Заметим, что полярный угол точки имеет бесчисленное множество значений. Если M совпадает с O, то $\rho = 0$, а φ — неопределенно.

Пусть $O\boldsymbol{i}$ — данная полярная система, а $O\boldsymbol{i}\boldsymbol{j}$ — прямоугольная декартова система, причем $\boldsymbol{j}$ получен из $\boldsymbol{i}$ поворотом на $+90°$ (черт. 10). Если ρ, φ и x, y соответственно полярные и прямоугольные декартовы координаты точки M, то

---

[1] Треугольник ABC, заданный на ориентированной плоскости, называется **ориентированным**, если вершины A, B и C заданы в определенном порядке. Другими словами, треугольник называется ориентированным, если указано некоторое направление обхода вершин по его контуру.



Черт. 10.

$$x = \rho \cos \varphi, \qquad y = \rho \sin \varphi \tag{1}$$

и

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \ \varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}. \tag{2}$$

Иногда рассматривают обобщенные полярные координаты: будем считать, что полярный радиус может принимать также и отрицательные значения. Пара чисел (ρ, φ), где $\rho < 0$, по определению, задает точку M, которая симметрична точке M' $(|\rho|, \varphi)$ относительно полюса O. Например, точка M, изображенная на чертеже 10, имеет следующие обобщенные полярные координаты $(-3, 30°)$. Она же имеет необобщенные координаты $(3; 210°)$. Соотношения (1) и (2), связывающие полярные и прямоугольные декартовы координаты, справедливы также и в том случае, когда ρ и φ являются обобщенными полярными координатами точки.

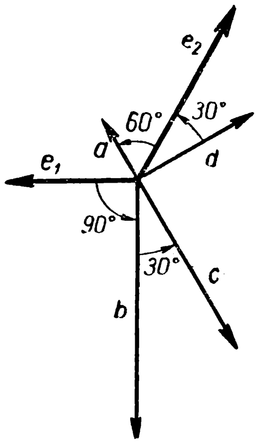
§ 4. Координаты векторов и их свойства

49. Пусть $ABCD$ — параллелограмм, E и F — середины противоположных сторон BC и AD, а O — точка пересечения диагоналей. Взяв векторы $\overline{AB} = \boldsymbol{e}_1$, $\overline{AD} = \boldsymbol{e}_2$ за базисные, определить координаты следующих векторов:

а) $\overline{AC}$; б) $\overline{OD}$; в) $\overline{FC}$; г) $\overline{BC}$; д) $\overline{EO}$; е) $\overline{BD}$; ж) $\overline{EA}$.

50. Решить предыдущую задачу в предположении, что за координатные векторы взяты $\boldsymbol{m}_1 = \overline{AF}$, $\boldsymbol{m}_2 = \overline{OD}$.

51. Базисные векторы $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$, длины которых соответственно равны 2 и 3, образуют угол, равный 120°. Векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$ расположены относительно базисных век-



Черт. 11

торов так, как указано на чертеже 11. Определить координаты этих векторов в базисе $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, если: $|\boldsymbol{a}| = 1$; $|\boldsymbol{b}| = 4$; $|\boldsymbol{c}| = 3$; $|\boldsymbol{d}| = 2$.

52. В правильном шестиугольнике $ABCDEF$ векторы $\overline{AB} = \boldsymbol{e}_1$ и $\overline{AE} = \boldsymbol{e}_2$ выбраны в качестве базисных. Найти координаты векторов $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, $\overline{AF}$ и $\overline{EF}$ — в данном базисе.

53. В ромбе $ABCD$ векторы $\overline{AC} = \boldsymbol{e}_1$ и $\overline{BD} = \boldsymbol{e}_2$ взяты за базисные. Найти координаты векторов $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ и $\overline{DA}$ в этом базисе.

54. В треугольнике ABC проведены медиана BK и средняя линия $MN \parallel AC$; BK и MN пересекаются в точке O.

а) Найти координаты векторов $\overline{CM}$, $\overline{OB}$, $\overline{KM}$, $\overline{CB}$, $\overline{NC}$ и $\overline{AN}$, принимая векторы $\overline{OC}$ и $\overline{OM}$ за координатные векторы $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$.

б) Найти координаты тех же векторов $\overline{CM}$, $\overline{OB}$, $\overline{KM}$, $\overline{CB}$, $\overline{NC}$ и $\overline{AN}$, принимая векторы $\overline{KC}$ и $\overline{KN}$ за координатные векторы $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$.

55. В равнобочной трапеции $ABCD$ угол A равен $\frac{\pi}{3}$. Полагая $\overline{AB} = \boldsymbol{e}_1$ и $\overline{AD} = \boldsymbol{e}_2$, разложить по $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$ все векторы, составляющие остальные стороны и диагонали.

56. Взяв на плоскости аффинную систему координат $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, построить следующие векторы: $\boldsymbol{a}_1\ \{1, 2\}$; $\boldsymbol{a}_2\ \{2, -1\}$; $\boldsymbol{a}_3\ \{0, -1\}$; $\boldsymbol{a}_4\{\sqrt{2}, 3\}$; $\boldsymbol{a}_5\{-1, -2\}$; $\boldsymbol{a}_6\{2, -1\}$; $\boldsymbol{a}_7\{-1, -2\}$; $\boldsymbol{a}_8\left\{-2, \frac{1}{2}\right\}$; $\boldsymbol{a}_9\left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{4}\right\}$; $\boldsymbol{a}_{10}\ \{2, 0\}$.

57. Взяв на плоскости прямоугольную декартову систему координат $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, построить векторы предыдущего примера.

58. На плоскости даны два вектора: $\boldsymbol{u}\ \{2, 1\}$, $\boldsymbol{v}\ \{1, 0\}$. Найти коэффициенты разложения вектора $\boldsymbol{a}\ \{9, 1\}$ по векторам $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{v}$.

59. Даны три вектора: $\boldsymbol{u}\ \{3, -2\}$, $\boldsymbol{v}\{-2, 1\}$, $\boldsymbol{w}\ \{7, -4\}$. Определить коэффициенты разложения каждого из этих трех векторов, принимая в качестве базиса два других.

60. Даны векторы: $\boldsymbol{u}\{3, -1\}$, $\boldsymbol{v}\{1, -2\}$, $\boldsymbol{w}\{-1, 7\}$. Определить коэффициенты разложения вектора $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}$ по векторам $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{v}$.

61. Даны векторы: $\boldsymbol{a}\{2, 3\}$, $\boldsymbol{b}\{1, -3\}$ и $\boldsymbol{c}\{-1, 3\}$. При каком значении коэффициента α векторы $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{a} + \alpha\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{c}$ коллинеарны?

62. Даны векторы: $\boldsymbol{a}\{2, -3\}$, $\boldsymbol{b}\left\{\frac{1}{2}, 2\right\}$. При каких значениях коэффициента α будут коллинеарны следующие пары векторов:

а) $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{a} + \alpha\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{a} - \alpha\boldsymbol{b}$;

б) $\boldsymbol{p} = \alpha\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{a} + \alpha\boldsymbol{b}$;

в) $\boldsymbol{p} = \alpha\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{a}$.

63. Пусть вектор $\overline{OC}$ разложен по двум неколлинеарным векторам $\overline{OA}$ и $\overline{OB}$: $\overline{OC} = \alpha\cdot\overline{OA} + \beta\cdot\overline{OB}$. Доказать, что точки A, B, C будут лежать на одной прямой в том и только в том случае, когда $\alpha + \beta = 1$.

64. Векторы $\overline{AB}\{1, 3\}$ и $\overline{AC}\{2, 1\}$ совпадают со сторонами треугольника. Определить координаты векторов $\overline{AM}_1$, $\overline{BM}_2$, $\overline{CM}_3$, совпадающих с его медианами.

65. Даны векторы $\boldsymbol{a}\{1, -2\}$, $\boldsymbol{b}\left\{\frac{1}{2}, 1\right\}$, $\boldsymbol{c}\{2, 0\}$. Определить координаты векторов: $\frac{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}}{2} - \frac{1}{2}\boldsymbol{c}$, $\frac{3\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b}}{2}$, $\frac{\boldsymbol{c}-2\boldsymbol{b}}{3}$.

66. Даны векторы $\boldsymbol{a}\{-1, -2\}$, $\boldsymbol{b}\{3, -5\}$, $\boldsymbol{c}\{4, -3\}$. Существует ли треугольник ABC, стороны AB, BC, CA которого соответственно параллельны векторам $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ и для которого $AB = |\boldsymbol{a}|$, $BC = |\boldsymbol{b}|$, $AC = |\boldsymbol{c}|$?

67. Даны векторы $\boldsymbol{a}\{1, -2\}$, $\boldsymbol{b}\{-1, 0\}$, $\boldsymbol{c}\left\{-\frac{3}{2}, 3\right\}$, $\boldsymbol{d}\left\{-\frac{3}{2}, 1\right\}$. Существует ли трапеция $ABCD$, стороны которой соответственно параллельны данным векторам, и для которой $AB = |\boldsymbol{a}|$, $BC = |\boldsymbol{b}|$, $CD = |\boldsymbol{c}|$ и $AD = |\boldsymbol{d}|$?

68. В прямоугольном декартовом базисе даны векторы $\boldsymbol{a}\{3, -4\}$, $\boldsymbol{b}\{0, -3\}$, $\boldsymbol{c}\{3, \sqrt{7}\}$, $\boldsymbol{d}\{-1, 2\}$. Определить их модули.

69. В прямоугольном декартовом базисе первая координата вектора $\boldsymbol{a}$ равна 6, а $|\boldsymbol{a}| = 2\sqrt{13}$. Определить вторую координату вектора $\boldsymbol{a}$.

70. В прямоугольном декартовом базисе определить координаты единичных векторов (ортов), сонаправленных с векторами:

а) $\boldsymbol{m}\ \{-3, -4\}$; б) $\boldsymbol{n}\{-1, 7\}$; в) $\boldsymbol{p}\ \{-\sqrt{7}, 3\}$; г) $\boldsymbol{q}\ \{0; -2\}$.

71. В прямоугольном декартовом базисе определить координаты векторов $\boldsymbol{m}$, $\boldsymbol{n}$ и $\boldsymbol{p}$, если а) $|\boldsymbol{m}| = 3$, $(\widehat{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{m}}) = 30°$; б) $|\boldsymbol{n}| = 5$, $(\widehat{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{n}}) = 135°$; в) $|\boldsymbol{p}| = 1$, $(\widehat{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{p}}) = -60°$.

72. Вычислить угол между следующими парами векторов: а) $\boldsymbol{a}_1\{1, 0\}$ и $\boldsymbol{a}_2\{2, 2\}$; б) $\boldsymbol{b}_1\{1, 1\}$ и $\boldsymbol{b}_2\{-1, \sqrt{3}\}$; в) $\boldsymbol{c}_1\{-\sqrt{3}, 3\}$ и $\boldsymbol{c}_2\{0,1\}$; г) $\boldsymbol{d}_1\{2, 0\}$ и $\boldsymbol{d}_2\{1, -\sqrt{3}\}$.

(Базис прямоугольный декартов.)

73. Определить, какие из следующих пар векторов взаимно перпендикулярны: $\boldsymbol{a}_1\{2, 5\}$ и $\boldsymbol{b}_1\{-10, 4\}$; $\boldsymbol{a}_2\{1, 2\}$ и $\boldsymbol{b}_2\{1, -3\}$; $\boldsymbol{a}_3\{3, 1\}$ и $\boldsymbol{b}_3\{2, -6\}$. (Базис прямоугольный декартов.)

74. Даны векторы $\boldsymbol{a}_1\{1, 3\}$, $\boldsymbol{a}_2\{-1, -2\}$, $\boldsymbol{a}_3\{6, 0\}$, $\boldsymbol{a}_4\{0, 3\}$, $\boldsymbol{a}_5\{2, -\sqrt{5}\}$. Определить координаты векторов, полученных из данных векторов поворотом на $+90°$. (Базис прямоугольный декартовый.)

75. Чему равны проекции векторов $\boldsymbol{a}\{-1, 5\}$ и $\boldsymbol{b}\left\{\sqrt{2}, -\frac{1}{2}\right\}$ на координатные оси $\boldsymbol{i}$ и $\boldsymbol{j}$. (Базис прямоугольный декартов.)

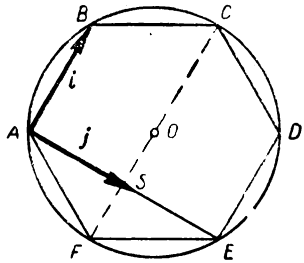
76. Найти проекцию вектора $\boldsymbol{a}\{-7, -3\}$ на ось, определяемую вектором $\boldsymbol{b}\{3, 5\}$.

77. Пусть l — биссектриса угла между векторами $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, приложенными к точке O. Найти проекции вектора $\boldsymbol{a}\{2, 5\}$ на оси, определяемые прямой l и имеющие противоположные направления.

§ 5. Координаты точек; решение простейших задач в координатах

78. Взяв прямоугольную декартову систему координат, построить следующие точки: $A(2, 1)$; $B\left(\frac{1}{2}, -1\right)$; $C(1, -4)$; $D(\sqrt{2}, -2)$; $E(0, 1)$; $F(-3, -2)$; $G(-3, 0)$; $L(-3, 3)$.

79. В прямоугольной декартовой системе координат построить точки, абсциссы которых равны соответственно —3, —1, —2, —5, а ординаты определяются из условия $y=2x^2-10$.



Черт. 12

80. Взяв общую аффинную систему координат, построить следующие точки: $A(-1,0)$, $B(-2,1)$, $C(1, 1)$, $D(-3, 2)$, $E(0, -2)$, $F(-3,3)$.

81. Начертить на плоскости две различные прямоугольные декартовы системы координат, в которых данная точка M имеет координаты (2, 1).

82. Начертить на плоскости две различные аффинные системы координат, в которых точка M имеет координаты (1,1).

83. Дан правильный шестиугольник $ABCDEF$. Найти координаты его вершин и центра O, принимая за начало координат точку A, а за координатные векторы $\boldsymbol{i}$ и $\boldsymbol{j}$ соответственно векторы $\overline{AB}$ и $\overline{AS}$, где S — такая точка отрезка AE, что $AS = AB$ (черт. 12).

84. В равнобочной трапеции $ABCD$ большее основание $AD = 10$, высота равна 2, а угол при основании равен 30°. На плоскости взята прямоугольная декартова система координат, начало которой O совпадает с серединой отрезка AD, а направление осей Ox и Oy — соответственно с направлениями векторов $\overline{OD}$ и $\overline{OM}$, где M — точка пересечения диагоналей трапеции. Определить координаты всех вершин трапеции, точки M и точки N пересечения непараллельных сторон.

85. Решить предыдущую задачу в предположении, что начало координат находится в точке A, а координатными векторами $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$ являются векторы $\overline{AD}$ и $\overline{AB}$.

86. Вершины четырехугольника находятся в точках $A(1, -3)$, $B(8, 0)$, $C(4, 8)$ и $D(-3, 5)$. Показать, что $ABCD$ есть параллелограмм.

87. Вектор $\boldsymbol{a}\{3, 4\}$ имеет начало в точке $M(-2, 3)$. Найти координаты его конца.

88. Вершины четырехугольника находятся в точках $A(1, 1)$, $B(2, 3)$, $C(5, 0)$, $D(7, -5)$. Показать, что $ABCD$ есть трапеция.

89. Даны три вершины параллелограмма: $A(-1, 3)$, $B(2, -5)$, $C(0, 4)$. Определить четвертую вершину D, противоположную B.

90. Найти координаты точек, симметричных точкам: $A(1, -3)$, $B(0, 4)$, $C(-3, 5)$, $D(7, 2)$, $E(-3, -2)$ относительно оси Ox. Система координат прямоугольная декартова.

91. Найти координаты точек, симметричных точкам $A(-5, 2)$, $B(5, 1)$, $C(-3, 6)$, $D(2, 0)$, $E(-3, 5)$ относительно оси Oy. Система координат прямоугольная декартова.

92. Найти координаты точек, симметричных точкам $A(1, 1)$, $B(3, -2)$, $C(3, 0)$, $D(-4, 3)$, $E(-2, -1)$ относительно начала координат.

93. Найти координаты точек, симметричных точкам $A(-3, 5)$, $B(5, -2)$, $C(2, 3)$, $D(2, 7)$

а) относительно биссектрисы первого координатного угла;

б) относительно биссектрисы второго координатного угла. Система координат прямоугольная декартова.

94. В прямоугольной декартовой системе даны координаты вершин треугольника ABC: $A(2, 5)$, $B(0, 1)$, $C(3, -1)$. Определить координаты вершин треугольника $A'B'C'$, симметричного треугольнику ABC: а) относительно оси Ox; б) относительно оси Oy; в) относительно начала координат.

95. Найти координаты середин отрезков A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, если $A_1(-1, 5)$, $B_1(-3, 3)$, $A_2(0, 4)$, $B_2(3, 2)$, $A_3(-2, 6)$, $B_3(1, 4)$.

96. Даны координаты концов $A(-1, 5)$, $B(3, 4)$ однородного стержня. Определить координаты его центра тяжести.

97. Даны координаты точек $P(-1, 5)$ и $Q(3, 2)$.

а) найти координаты точки M, симметричной точке P относительно точки Q;

б) найти координаты точки N, симметричной точке Q относительно точки P.

98. Даны две смежные вершины параллелограмма $A(-4, 4)$, $B(2, 8)$ и точка пересечения его диагоналей $M(2, 2)$. Определить две другие вершины.

99. Даны две смежные вершины квадрата $A(-2, 1)$ и $B(3, 3)$. Найти две другие вершины. Система координат прямоугольная декартова.

100. Даны две противоположные вершины квадрата $A(-1, 4)$ и $C(7, -2)$. Найти две другие вершины. Система координат прямоугольная декартова.

101. Даны две вершины равностороннего треугольника $A(-3, 2)$ и $B(1, 4)$. Найти вершину C. Система координат прямоугольная декартова.

102. Центр O и вершина A правильного шестиугольника $ABCDEF$ имеют координаты $O(-1, 2)$, $A(1, 4)$. Найти координаты остальных вершин. Система координат прямоугольная декартова.

103. Определить координаты точек, делящих отрезок $A(2, 3)$, $B(-1, 2)$ в отношении:

$$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -2,\ \lambda_3 = \frac{1}{2},\ \lambda_4 = 3.$$

104. Две вершины треугольника ABC имеют координаты $A(3, 6)$, $B(-3, 5)$. Определить координаты вершины C при условии, что середины сторон AC и BC лежат на осях координат.

105. На прямой l взяты последовательно точки A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 так, что $A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = A_4A_5 = A_5A_6$. Зная координаты точек $A_2(2, 5)$ и $A_5(-1, 7)$ в аффинной системе координат, определить отношения, в которых точки A_1, A_3, A_4 и A_6 делят отрезок A_2A_5, а также координаты этих точек.

106. Доказать, что точка пересечения M медиан треугольника с вершинами $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ имеет координаты:

$$x_M = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \quad y_M = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}.$$

Пользуясь этой формулой, определить координаты точки пересечения медиан треугольника, если его вершины имеют координаты: а) $A(3, 1)$, $B(-1, 4)$, $C(1, 1)$; б) $A(-2, 3)$, $B(5, -2)$, $C(-3, -1)$.

107. Вершины однородной треугольной пластинки находятся в точках $A(-1, 2)$, $B(3, 3)$ и $C(1, -1)$. Определить координаты центра тяжести пластинки.

108. Даны координаты середин сторон AB, BC и CA треугольника ABC: $M\left(2, \frac{1}{2}\right)$, $N(5, 1)$, $P\left(4, -\frac{5}{2}\right)$. Определить координаты всех вершин треугольника.

109. В точке A (2, 5) помещен груз в 60 *г*, а в точке B (—3, 0) — груз в 40 *г*. Определить координаты центра тяжести этой системы.

110. В точках A (x_1, y_1) и B (x_2, y_2) сосредоточены массы m_1 и m_2. Доказать, что координаты центра тяжести системы двух материальных точек A и B определяются следующими соотношениями:

$$x = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2}, \quad y = \frac{m_1y_1 + m_2y_2}{m_1 + m_2}.$$

Пользуясь методом математической индукции, доказать, что координаты центра тяжести n материальных точек A_1 (x_1, y_1), A_2 (x_2, y_2), ..., $A_n(x_n, y_n)$, в которых сосредоточены массы m_1, m_2, ..., m_n, определяются соотношениями:

$$x = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \dots + m_nx_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}, \quad y = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + \dots m_ny_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}.$$

111. В вершинах треугольника A (1, 8), B (3, 4), C (4, 2) сосредоточены соответственно массы 30 *г*, 40 *г* и 60 *г*. а) Определить координаты центра тяжести системы материальных точек A, B и C; б) найти центр тяжести системы в предположении, что в точках A, B и C сосредоточены одинаковые массы.

112. В прямоугольной декартовой системе координат определить расстояния между точками A_1 (2, —1) и A_2 (1, 2); B_1 (1, 5) и B_2 (1, 1); C_1 (—3, 1) и C_2 (1, —2); D_1 (—1, 2) и D_2 (3, 0).

113. Однородный стержень изогнут в виде треугольника, вершины которого находятся в точках A (2, —1), B (5, —1) и C (2, 3). Определить координаты центра тяжести такого треугольника.

114. Определить радиус окружности, которая проходит через точку (—2, 1) и имеет центр в точке (2, —3).

115. Определить координаты точек, расположенных на окружности радиуса $r = 3$ с центром в начале координат и имеющих ординаты: 2, —1, 3, $\sqrt{2}$. Система координат прямоугольная декартова.

116. В прямоугольной декартовой системе даны координаты вершин треугольника ABC: A (4, 1), B (7, 5), C (—4, 7). Вычислить длину биссектрисы AD угла A.

117. Определить длину медианы AM треугольника ABC, заданного в прямоугольной декартовой системе координатами своих вершин: A (5, —4), B (—1, 2), C (5, 1).

118. Пользуясь теоремой, обратной теореме Пифагора, вычислением убедиться в том, что треугольник ABC, заданный в прямоугольной декартовой системе координатами своих вершин: A (1, 1), B (2, 5), C (—6, 7) — прямоугольник.

119. Найти координаты центра и радиус окружности, проходящей через точку B (—10, 4) и касающейся оси Ox в точке A(—6,0). Система координат прямоугольная декартова.

120. Найти координаты центра и радиус окружности, проходящей через точку A (—8, 4) и касающейся осей координат прямоугольной декартовой системы.

121. Вычислить площадь треугольника ABC в каждом из следующих случаев:

а) A (2, 1),	B (3, 4),	C (1, 6);
б) A (—2, 4),	B (0, —3),	C (1, 7);
в) A (5, 4),	B (11, 0),	C (0, 3).

Система координат прямоугольная декартова.

122. Вычислить площадь S четырехугольника, вершинами которого служат точки: A (1, 3), B (—2, 0), C (4, 3), D (—3, 5). Система координат прямоугольная декартова.

123. Найти расстояние d от точки A (6, —8) до прямой, проходящей через точки M_1 (—5,0) и M_2 (3, 6). Система координат прямоугольная декартова.

124. Две вершины треугольника находятся в точках A (1, 2) и B (5, —1), третья вершина C — на оси Ox; площадь треугольника $S = 4$. Найти координаты вершины C. Система координат прямоугольная декартова.

125. Вершины треугольника находятся в точках A (—2, 1), B (2, —2) и C (8, 6). Найти для данного треугольника: а) периметр; б) площадь; в) длины высот; г) косинус угла A. Система координат прямоугольная декартова.

126. Найти центр тяжести однородной четырехугольной пластинки, вершины которой находятся в точках: (2, 5), (3, 8), (8, 11), (10, 5).

127. Если на векторах, совпадающих с диагоналями данного параллелограмма, построить новый параллелограмм, то площадь полученного параллелограмма в два раза больше площади исходного параллелограмма. Доказать.

§ 6. Полярные координаты

128. В полярной системе координат построить точки: $M_1\left(2, \frac{\pi}{3}\right)$; $M_2\left(1, \frac{5\pi}{3}\right)$; $M_3\left(\frac{1}{2}, -\frac{\pi}{2}\right)$; $M_4\left(3, \frac{\pi}{4}\right)$; $M_5\left(4, \frac{2\pi}{3}\right)$; $M_6\left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{3}\right)$.

129. Построить точки, заданные обобщенными полярными координатами: $A_1\left(-5, \frac{\pi}{2}\right)$; $A_2\left(-2, -\frac{\pi}{6}\right)$; $A_3(-3, 0)$; $A_4\left(2, \frac{3\pi}{4}\right)$.

130. Дан квадрат, сторона которого равна 3. Приняв за полюс какую-нибудь вершину квадрата, а за полярную ось — одну из сторон, проходящую через нее, определить полярные координаты всех вершин и точки пересечения диагоналей.

131. Дан правильный шестиугольник, сторона которого равна a. Приняв за полюс какую-нибудь его вершину, а за полярную ось — одну из сторон, через нее проходящую, определить полярные координаты всех вершин.

132. Найти полярные координаты точек, симметричных с точками: $M_1\left(2, \frac{\pi}{4}\right)$; $M_2\left(3, \frac{\pi}{3}\right)$; $M_3\left(1, \frac{\pi}{4}\right)$; $M_4\left(3, -\frac{\pi}{3}\right)$: а) относительно полюса; б) относительно полярной оси.

133. Пусть Oi — данная полярная система координат, Oij—прямоугольная декартова система, причем вектор j получен из вектора i поворотом на $+90°$. Даны полярные координаты точек: $A\left(2, \frac{\pi}{3}\right)$; $B\left(\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4}\right)$; $C\left(5; \frac{\pi}{2}\right)$; $D\left(3, -\frac{\pi}{6}\right)$. Определить их прямоугольные декартовы координаты.

134. Пусть Oij— данная прямоугольная декартова система, а Oi — полярная система, причем положительное направление обхода выбрано так, что $\sphericalangle(i, j)=+90°$. Определить полярные координаты следующих точек: $M_1(0, 6)$; $M_2(-2, 0)$; $M_3(-1, 1)$; $M_4(\sqrt{3}, 1)$; $M_5(0,-3)$; $M_6(1, -\sqrt{3})$.

135. Вывести формулу для вычисления площади треугольника, одна из вершин которого совпадает с полюсом, а две другие даны своими полярными координатами: $A(\rho_1, \varphi_1)$, $B(\rho_2, \varphi_2)$.

Пользуясь этой формулой, вычислить площадь треугольника, одна из вершин которого помещается в полюсе, а две другие имеют полярные координаты: а) $\left(4, \frac{\pi}{9}\right)$, $\left(1, \frac{5\pi}{18}\right)$; б) $\left(2, \frac{\pi}{3}\right)$, $\left(3, \frac{\pi}{6}\right)$; в) $\left(5, \frac{\pi}{3}\right)$, $\left(3, \frac{7\pi}{12}\right)$.

136. Вывести формулу для вычисления расстояния между двумя точками $M_1(\rho_1, \varphi_1)$ и $M_2(\rho_2, \varphi_2)$, которые заданы полярными координатами.

137. Определить расстояние между точками: а) $\left(5, \frac{\pi}{6}\right)$, $\left(3, -\frac{\pi}{6}\right)$; б) $\left(4, \frac{11\pi}{18}\right)$, $\left(3, \frac{\pi}{9}\right)$; в) $\left(4, \frac{\pi}{5}\right)$, $\left(6, \frac{6\pi}{5}\right)$.

138. Треугольник ABC задан полярными координатами вершин: $A\left(5, \frac{\pi}{2}\right)$, $B\left(8, \frac{5\pi}{6}\right)$, $C\left(3, \frac{7\pi}{6}\right)$. Доказать, что треугольник ABC равнобедренный.

139. Вершины треугольника находятся в точках: $A\left(2\sqrt{3}, \frac{\pi}{3}\right)$, $B\left(\sqrt{3}, \frac{2}{3}\pi\right)$, $C\left(4+\sqrt{3}, \frac{2}{3}\pi\right)$. Доказать, что треугольник ABC прямоугольный.

140. Как расположены точки на плоскости, полярные координаты которых удовлетворяют одному из следующих условий: а) $\rho = 3$; б) $\rho = 5$; в) $\varphi = \frac{\pi}{3}$; г) $\varphi = \frac{\pi}{4}$; д) $\rho \cos \varphi = 5$; е) $\rho \sin \varphi = 3$?

§ 7. Приложение метода координат к решению задач элементарной геометрии

141. Доказать теорему Пифагора: в прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.

142. Доказать теорему: в равнобедренном треугольнике высота является одновременно медианой и биссектрисой.

143. Доказать, что в прямоугольном треугольнике каждый из катетов есть среднее пропорциональное между гипотенузой и его проекцией на гипотенузу.

144. Доказать, что в прямоугольном треугольнике перпендикуляр, опущенный из вершины прямого угла на гипотенузу, есть среднее пропорциональное между двумя отрезками, на которые он рассекает гипотенузу.

145. На прямой l даны три точки A, B, C так, что точка B лежит между A и C. По одну сторону от прямой l

построены равносторонние треугольники AMB и BNC. Доказать, что середина отрезка MC, середина отрезка NA и точка B являются вершинами равностороннего треугольника.

146. Доказать теорему Менелая: для того чтобы три точки A_1, B_1, C_1, лежащие соответственно на сторонах BC, CA, AB треугольника ABC (или на их продолжениях), принадлежали одной и той же прямой, необходимо и достаточно, чтобы:

$$\frac{\overline{AC_1}}{\overline{BC_1}} \cdot \frac{\overline{BA_1}}{\overline{CA_1}} \cdot \frac{\overline{CB_1}}{\overline{AB_1}} = 1.$$

147. На сторонах AB и AC треугольника ABC взяты соответственно точки C_1 и B_1, которые делят эти стороны в данных отношениях: $\frac{AC_1}{C_1B} = \lambda$, $\frac{AB_1}{B_1C} = \mu$. В каком отношении делят друг друга отрезки BB_1 и CC_1? В частности, рассмотреть случай, когда точки C_1 и B_1 являются серединами сторон AB и AC.

148. Доказать теорему Стюарта: для треугольника ABC и точки D, лежащей между B и C, имеет место равенство:

$$AB^2 \cdot DC + AC^2 \cdot BD - AD^2 \cdot BC = BC \cdot DC \cdot BD.$$

149. В треугольник ABC вписан треугольник $A_1B_1C_1$ так, что вершины последнего делят стороны треугольника ABC в одном и том же отношении: $AC_1 : C_1B = BA_1 : A_1C = CB_1 : B_1A = \lambda$. Показать, что точки пересечения медиан обоих треугольников совпадают.

150. Внутри треугольника ABC взята точка O. Доказать, что треугольники OAB, OBC и OCA равновелики тогда и только тогда, когда O является точкой пересечения медиан.

151. Дан треугольник и в его плоскости произвольная точка M, которая дважды последовательно отражается относительно всех вершин треугольника. Доказать, что после последнего шага отраженная точка совпадает с точкой M.

152. Стороны AB и CD четырехугольника $ABCD$, будучи продолженными , пересекаются в точке O. Обозначая через S и P соответственно середины диагоналей BD и AC, показать, что площадь треугольника OSP равна четвертой части площади четырехугольника $ABCD$.

153. Доказать, что если диагонали трапеции равны, то трапеция равнобочная.

154. Доказать, что отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции, параллелен основаниям и равен их полуразности.

155. Показать, что прямая, соединяющая точку пересечения диагоналей трапеции с точкой пересечения боковых сторон, делит основания трапеции пополам.

ГЛАВА III

УРАВНЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО МЕСТА ТОЧЕК НА ПЛОСКОСТИ

Выбор координатной системы на плоскости позволяет аналитически задавать точки, однако в аналитической геометрии, помимо точек, приходится рассматривать более сложные геометрические объекты, состоящие из множества точек, обладающих некоторым общим свойством, т. е. геометрические места точек.

Для аналитического задания геометрического места точек поступают следующим образом. Выбирают на плоскости некоторую систему координат и записывают аналитическое условие (т. е. уравнение), отражающее общее геометрическое свойство, присущее всем точкам данного геометрического места, и только им. В зависимости от характера геометрического места не всегда удается его задавать одним геометрическим условием, поэтому в отдельных случаях приходится рассматривать несколько геометрических характеристик его точек. В соответствии с этим мы получаем несколько аналитических выражений, совокупность которых характеризует полностью точки данного геометрического места точек. В этом случае говорят, что геометрическое место задано уравнениями.

Итак, под *уравнениями геометрического места* точек будем понимать те аналитические условия, которым удовлетворяют координаты всех точек данного геометрического места и не удовлетворяют координаты точек, не принадлежащих этому геометрическому месту. Следует отметить, что термин «уравнение» при задании геометрических мест точек применяется не в обычном алгебраическом смысле, так как геометрические места не всегда заданы в виде уравнений. Они могут быть заданы также в виде неравенств или сочетания неравенств с уравнениями. Кроме того, в аналитической геометрии не ставится задача решения уравнений, как в алгебре. Здесь, как правило, интересуются исследованием уравнения геометрического места с целью выяснения его геометрических свойств.

Методы аналитической геометрии позволяют изучать геометрические места, заданные определенными геометрическими условиями.

П р и м е р. Найти геометрическое место точек, равноудаленных от двух различных точек A и B.

Р е ш е н и е. Для решения данной и подобных задач выбирают систему координат, наиболее «удобно» связанную с данными геометрическими объектами, и записывают уравнение геометрического места в этой системе. Затем по полученному уравнению исследуют геометрическое место точек.

Прямоугольную декартову систему координат возьмем так, чтобы ось Ox совпала с прямой AB, и начало координат поместим в середину отрезка AB. Если $AB = 2a$, то в выбранной системе $A(-a, 0)$, $B(a, 0)$. Для того чтобы точка $M(x, y)$ принадлежала геометрическому месту, необходимо и достаточно, чтобы $AM = MB$, или в выбранной системе координат: $\sqrt{(x+a)^2+y^2}=\sqrt{(x-a)^2+y^2}$. Если возвести обе части в квадрат, то получаем: $(x+a)^2+y^2=(x-a)^2+y^2$. Важно отметить, что записанные два уравнения э к в и в а л е н т н ы. Это означает, что если координаты некоторой точки удовлетворяют первому уравнению, то они удовлетворяют второму уравнению, и *наоборот*. Второе уравнение, после элементарных преобразований, приводится к виду: $x = 0$. Очевидно, этим уравнением задается ось Oy. Мы пришли к выводу, что *геометрическое место точек, равноудаленных от двух точек A и B, представляет собой прямую, проходящую через середину отрезка AB и перпендикулярную к нему.*

Одним из важнейших геометрических мест точек является окружность, которая представляет собой геометрическое место точек, равноудаленных от некоторой точки — центра. В прямоугольной декартовой системе окружность радиуса r и с центром в точке $C(x_0, y_0)$ имеет уравнение $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$. В частности, когда центр окружности совпадает с началом координат, имеем $x_0 = y_0 = 0$, поэтому предыдущее уравнение принимает вид: $x^2+y^2=r^2$.

При решении задач полезно пользоваться следующей теоремой.

Т е о р е м а. *Геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют уравнению* $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$, *есть*:

а) *окружность с центром в точке* $\left(-\frac{A}{2},\ -\frac{B}{2}\right)$ *и радиуса* $r = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4C}}{2}$, *если* $A^2 + B^2 - 4C > 0$;

б) *точка с координатами* $\left(-\frac{A}{2},\ -\frac{B}{2}\right)$, *если* $A^2 + B^2 - 4C = 0$;

в) *пустое множество, если* $A^2 + B^2 - 4C < 0$.

Пусть дана окружность с центром в точке C и радиуса r. Если M — произвольная точка плоскости, то **с т е п е н ь ю э т о й т о ч к и о т н о с и т е л ь н о о к р у ж н о с т и** называется число $\alpha = MC^2 - r^2$. Если $C(x_0, y_0)$, $M(x, y)$, то $\alpha = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - r^2$. Для всех точек, лежащих внутри окружности $\alpha < 0$, для точек окружности $\alpha = 0$, а для точек, лежащих вне окружности, $\alpha > 0$.

§ 8. Исследование геометрического места по его уравнению. Составление уравнения геометрического места точек

156. Какие из точек $A(1, 3)$, $B(-2, 5)$, $C(2, 1)$, $D(2, 3\sqrt{2})$, $E(1, 0)$ принадлежат геометрическому месту, определяемому уравнением $2x^2 - y^2 + 3x + 4 = 0$?

157. Даны уравнения:

а) $x^2 + 2y - x + 1 = 0$;
б) $x^2 - y^2 = 0$;
в) $2x^2 - 3y^2 + x - y = 0$;
г) $3x^2 - y^2 + 5 = 0$.

Указать, какие из геометрических мест, определяемых данными уравнениями, содержат начало координат.

158. Найти точки пересечения следующих геометрических мест: а) $x^2 + y^2 = 32$ и $x - y = 0$; б) $x^2 - 2xy + 4x - 3 = 0$ и $5x - 4y - 1 = 0$; в) $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 7 = 0$ и $x^2 + y^2 = 4$.

159. Исследовать геометрические места точек, заданные в прямоугольной декартовой системе следующими уравнениями:

а) $x - y = 0$;
б) $x^2 + 2x - 15 = 0$;
в) $y + 3 = 0$;
г) $xy + y^2 = 0$;
д) $x^2 - y^2 = 0$;
е) $x - 5 = 0$;
ж) $y^2 - 2yx = 0$;
з) $(x - y + 5)^2 - (y + x - 3)^2 = 0$;
и) $(x + y + 5)^2 + (2x + 3)^2 = 0$;
к) $(x - 5)^2 + (y + 3)^2 = 16$;
л) $(x - 3)^2 + y^2 + 5 = 0$.

160. Исследовать геометрические места точек, заданные следующими уравнениями: а) $|x| = 1$; б) $|x| = |y|$; в) $x = |x - y|$; г) $y = |x - 1|$.

161. Выяснить, какие из геометрических мест точек, заданных следующими парами уравнений, совпадают:

а) $x = |x - y|$ и $2xy - y^2 = 0$;
б) $x = y$ и $x^2 = y^2$;
в) $\sqrt{(x - a)^2 + y^2} = 3$ и $(x - a)^2 + y^2 = 9$.

162. Определить геометрические места точек, заданные следующими уравнениями в полярной системе координат:

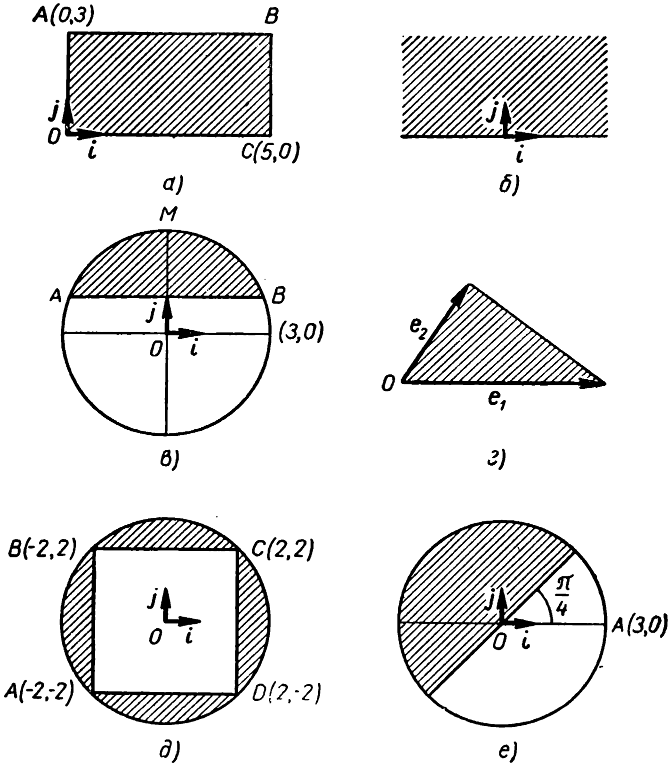
а) $\rho = 4$;
б) $\rho \cos \varphi = 2$;
в) $\rho = 10 \sin \varphi$;
г) $\varphi = \frac{\pi}{4}$;
д) $\rho \sin \varphi = 1$;
е) $\sin \varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$;
ж) $\sin \varphi = \cos \varphi$.

163. Изобразить на чертеже геометрические места точек, заданные следующими системами неравенств:

а) $\left.\begin{matrix} x > 0 \\ y \leqslant 1 \end{matrix}\right\}$;
б) $\left.\begin{matrix} 0 < x \leqslant 1 \\ y > 0 \end{matrix}\right\}$;
в) $\left.\begin{matrix} |x| \leqslant 2 \\ |y| \leqslant 3 \end{matrix}\right\}$;
г) $\left.\begin{matrix} x^2 + y^2 \leqslant 9 \\ x \geqslant 0 \\ y \leqslant 0 \end{matrix}\right\}$;
д) $\left.\begin{matrix} x^2 + y^2 < 16 \\ x > 2 \end{matrix}\right\}$;
е) $\left.\begin{matrix} (x-2)^2 + (y-3)^2 > 25 \\ |x| < 2 \end{matrix}\right\}$.

164. Написать необходимые и достаточные условия, которым удовлетворяют координаты точек каждой из заштрихованных фигур, изображенных на чертеже 13. При этом предполагается, что точки, принадлежащие контурам фигур, относятся к самим фигурам (система координат для каждой фигуры указана на чертеже).

165. Составить уравнение геометрического места точек, равноудаленных от точек A (—3,5) и B (1,—1).



Черт. 13

166. Даны две параллельные прямые a и b и перпендикулярная к ним прямая c. Определить геометрическое место точек, равноудаленных от трех данных прямых.

167. Определить геометрическое место точек, для которых сумма расстояний от двух данных параллельных прямых равна данному положительному числу.

168. Дан прямоугольник $ABCD$. Определить геометрическое место всех точек X, для которых $AX + CX = BX + DX$.

169. Найти геометрическое место точек M, удовлетворяющих условию: $AM^2 - BM^2 = 5$, где $A\,(3,-1)$, $B\,(1, 2)$. Система координат прямоугольная декартова.

170. Вершины A и B прямоугольника $OAMB$ скользят по осям прямоугольной декартовой системы координат, при этом площадь прямоугольника сохраняет постоянную величину, равную a^2. Найти геометрическое место вершин M.

171. Даны параметрические уравнения геометрических мест:

а) $x = 3t, \quad y = t + 5;$
б) $x = 2t^2 - 1, \quad y = t + 6;$
в) $x = a\cos t, \quad y = a\sin t;$
г) $x = 3\cos t, \quad y = 5\sin t.$

Составить уравнения данных геометрических мест в прямоугольных декартовых координатах.

§ 9. Геометрические места точек, приводящие к окружности

172. Написать уравнение геометрического места точек, отстоящих от точки $(-3, 5)$ на расстоянии 4.

173. Написать уравнение окружности радиуса 3, центр которой лежит на оси Oy и которая касается оси Ox.

174. В прямоугольной декартовой системе координат даны уравнения геометрических мест точек:

а) $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0;$
б) $x^2 + y^2 + 8x - 4y + 40 = 0;$
в) $x^2 + xy - 2x = 0;$
г) $x^2 + 2xy + 2y^2 - 3x + y + 5 = 0;$
д) $x^2 + y^2 - 2x = 0;$
е) $x^2 + y^2 + 2y + 8 = 0;$
ж) $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0.$

Выяснить, какие из приведенных уравнений определяют окружность, и определить координаты центра и радиус окружности.

175. Найти геометрическое место точек, имеющих одинаковые степени α относительно данной окружности.

176. Доказать, что геометрическое место точек, имеющих равные степени относительно двух данных неконцентрических окружностей, есть прямая, перпендикулярная к линии центров. Эта прямая называется *радикальной осью* данных окружностей.

177. Даны две окружности:

$$(x-1)^2+(y+2)^2=10, \qquad (\Omega_1)$$
$$(x-1)^2+(y-3)^2=5. \qquad (\Omega_2)$$

Доказать, что:

а) окружности Ω_1 и Ω_2 пересекаются;

б) уравнение

$$[(x-1)^2+(y+2)^2-10]+\lambda[(x-1)^2+(y-3)^2-5]=0 \quad (1)$$

при любом $\lambda \neq -1$ определяет окружность, проходящую через точки пересечения Ω_1 и Ω_2, причем при $\lambda_1 \neq \lambda_2$ соответствующие окружности различны;

в) при $\lambda=-1$ уравнение (1) определяет радикальную ось окружностей Ω_1 и Ω_2;

г) радикальная ось любых двух различных окружностей, задаваемых уравнением (1), совпадает с радикальной осью окружностей Ω_1 и Ω_2.

178. Даны две окружности:

$$(x+2)^2+(x-7)^2=20, \qquad (\Omega_1)$$
$$(x-1)^2+(y-1)^2=5. \qquad (\Omega_2)$$

Доказать, что:

а) окружности Ω_1 и Ω_2 касаются;

б) уравнение

$$[(x+2)^2+(y-7)^2-20]+\lambda[(x-1)^2+(y-1)^2-5]=0 \quad (2)$$

при любом $\lambda \neq -1$ определяет окружность, касающуюся данных окружностей Ω_1 и Ω_2 в их точке касания, причем при $\lambda_1 \neq \lambda_2$ соответствующие окружности различны;

в) при $\lambda=-1$ уравнение (2) определяет радикальную ось окружностей Ω_1 и Ω_2, т. е. общую касательную в точке касания.

179. Даны две окружности:

$$(x-1)^2+(y+2)^2=1, \qquad (\Omega_1)$$
$$(x+4)^2+(y-2)^2=4. \qquad (\Omega_2)$$

Доказать, что:

а) окружности Ω_1 и Ω_2 не пересекаются;

б) уравнение

$$[(x-1)^2+(y+2)^2-1]+\lambda[(x+4)^2+(y-2)^2-4]=0 \quad (3)$$

при любом $\lambda \neq -1$ определяет окружность, не пересекающую ни Ω_1, ни Ω_2, причем при $\lambda_1 \neq \lambda_2$ соответствующие окружности различны;

в) при $\lambda = -1$ уравнение (3) определяет радикальную ось окружностей Ω_1 и Ω_2;

г) радикальная ось любых двух различных окружностей, задаваемых уравнением (3), совпадает с радикальной осью окружностей Ω_1 и Ω_2.

180. Найти геометрическое место точек, отношение расстояний которых от двух данных точек A и B постоянно и равно λ.

181. Найти геометрическое место точек, сумма квадратов расстояний которых от двух данных точек A и B есть величина постоянная.

182. Найти геометрическое место точек, сумма квадратов расстояний которых от трех данных точек A, B и C есть величина постоянная.

183. Найти геометрическое место точек, касательные из которых, проведенные к данной окружности, имеют постоянную длину.

184. Определить геометрическое место точек плоскости, из которых данный отрезок AB виден под прямым углом.

185. Дана окружность радиуса r и на ней точка A. Найти геометрическое место точек, делящих всевозможные хорды, проведенные через A, в одном и том же отношении λ.

186. На окружности радиуса r взята точка O, вокруг которой вращается прямая, пересекающая окружность в переменной точке B. На этой прямой по обе стороны от точки B откладываются отрезки $BM_1 = BM_2 = AB$, где A — другой конец диаметра, проходящего через точку O. Определить линии, описываемые точками M_1 и M_2 при вращении прямой OB.

187. Найти геометрическое место середин всех хорд окружности, имеющих данную длину.

188. Дана окружность и некоторая точка A, лежащая в плоскости окружности. Отрезок AB (где B — любая точка окружности) точкой M разделен в постоянном отношении λ. Найти геометрическое место точек M.

189. Сторона BA треугольника ABC с неподвижным основанием BC вращается вокруг точки B, сохраняя при этом постоянную длину b. Найти геометрические места середин стороны CA и центров тяжести треугольника.

§ 10. Некоторые замечательные кривые

190. Циклоидой называется траектория, описываемая точкой M окружности радиуса r, катящейся без скольжения по данной прямой l.

Приняв прямую l за ось абсцисс, а начальное положение точки M за начало координат, написать уравнение циклоиды и построить ее.

191. Эпициклоидой называется траектория, описываемая точкой M окружности радиуса r, катящейся без скольжения по внешней стороне другой окружности радиуса R. Написать параметрическое задание эпициклоиды, приняв центр O неподвижной окружности за начало прямоугольной декартовой системы координат, а за параметр — угол $\varphi = \measuredangle COA$, где C — центр катящейся окружности, а A — точка на положительной полуоси Ox.

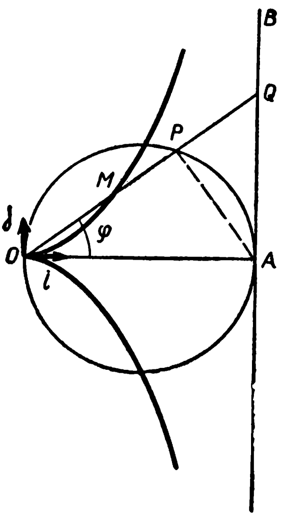
В частности, рассмотреть случай, когда $r = R$. В этом случае кривая называется кардиоидой. Построить кардиоиду.

192. Гипоциклоидой называется траектория, описываемая точкой M окружности радиуса r, катящейся без скольжения по внутренней стороне окружности радиуса R. Приняв центр O неподвижной окружности за начало прямоугольной декартовой системы координат, а за параметр — угол $\varphi = \angle COP$, где C — центр катящейся окружности, а P — точка положительной полуоси Ox, написать параметрическое уравнение гипоциклоиды.

В частности, рассмотреть случай, когда $r = \frac{1}{4}R$. В этом случае кривая называется астроидой. Построить астроиду.

193. Дана прямая l и точка S, отстоящая от нее на расстоянии $a \neq 0$. Через точку S проводятся всевозможные прямые, на каждой из которых от точки B пересечения с прямой l откладывается в обе стороны отрезок, равный b. Геометрическое место концов этих отрезков называется конхоидой Никомеда. Приняв точку S за полюс полярной системы и направив полярную ось перпендикулярно к прямой l, написать уравнение конхоиды Никомеда и построить ее.

194. Конхоидой данной кривой называется кривая, получающаяся при увеличении или уменьшении по-



Черт. 14

лярного радиуса каждой точки данной кривой на постоянный отрезок.

Улиткой Паскаля называется конхоида окружности, если за полюс O выбрана точка на окружности. Написать уравнение улитки Паскаля, приняв диаметр, проходящий через точку O, за полярную ось.

Если r — радиус данной окружности, а b — постоянный отрезок, который откладывается на полярном радиусе, и если $2r = b$, то улитка Паскаля является кардиоидой (см. задачу 191). Доказать это предложение.

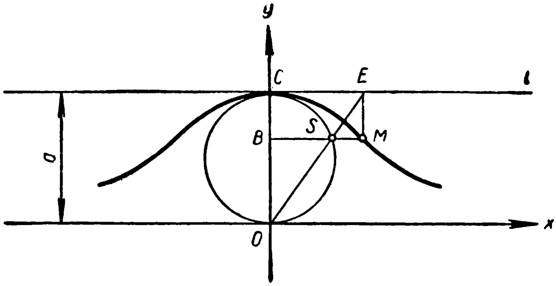
195. Пусть F_1 и F_2 — две фиксированные точки, b —постоянное число и $F_1F_2 = 2c$. Овалом Кассини называется геометрическое место точек M, для которых

$$F_1M \cdot F_2M = b^2.$$

Приняв направленную прямую F_2F_1 за ось абсцисс, а середину отрезка F_1F_2 за начало координат, написать уравнение кривой. При $b = c$ овал Кассини называется лемнискатой Бернулли. По уравнению построить лемнискату Бернулли.

196. Отрезок постоянной длины $2a$ перемещается своими концами по сторонам прямого угла. Из вершины этого угла опущен перпендикуляр на данный отрезок. Геометрическое место оснований этих перпендикуляров есть кривая, называемая четырехлепестковой розой. Взяв за полюс полярной системы координат вершину прямого угла и направив полярную ось по одной из сторон прямого угла, вывести уравнение этой кривой и построить ее.

197. Луч l, исходящий из неподвижной точки O, вращается с постоянной угловой скоростью ω. Точка M, имея начальное положение в точке O, движется по лучу l равномерно со скоростью v. Траектория точки M называется спиралью Архимеда. Приняв точку O за по-



Черт. 15

люс, написать уравнение спирали Архимеда в полярной системе координат и построить кривую.

198. Пусть OA — диаметр некоторой окружности, а AB — касательная к окружности, проведенная в конце диаметра (черт. 14). Через точку O проведена прямая, пересекающая окружность в точке P, а касательную AB в точке Q. На луче OP от точки O отложен отрезок $OM = PQ$. Геометрическое место точек M называется *циссоидой Диоклеса*.

Приняв точку O за полюс полярной системы координат и направив ось по лучу OA, вывести полярное уравнение циссоиды. Записать уравнение кривой в прямоугольной декартовой системе, изображенной на чертеже 14.

199. Даны диаметрально противоположные точки O и C окружности диаметра a и касательная l к окружности в точке C. Пусть S — произвольная точка окружности, E — точка пересечения прямых OS и l, а M — точка пересечения прямых, проведенных через S и E и перпендикулярных соответственно прямым OC и l (черт. 15). При движении точки S по окружности точка M описывает кривую, называемую *верзиерой*. Вывести уравнение верзиеры в прямоугольной декартовой системе, изображенной на чертеже 15.

ГЛАВА IV

ПРЯМАЯ НА ПЛОСКОСТИ

Если на плоскости выбрана аффинная система координат Oe_1e_2, то прямая может быть задана одним из следующих способов.

1. Прямая задана координатами некоторой точки $M_0(x_0, y_0)$ и ненулевого вектора $p\{\alpha, \beta\}$, параллельного прямой. Точка M_0 называется начальной точкой, а p — направляющим вектором.

В этом случае уравнение прямой имеет вид:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 \\ \alpha & \beta \end{vmatrix} = 0, \text{ или } \frac{x-x_0}{\alpha} = \frac{y-y_0}{\beta}.$$

Последнее уравнение имеет смысл только тогда, когда $\alpha \neq 0$ и $\beta \neq 0$.

Параметрические уравнения прямой при данном способе задания имеют вид:

$$x = x_0 + \alpha t, \quad y = y_0 + \beta t.$$

Здесь t — параметр любой точки прямой.

2. Прямая задана координатами двух различных точек: $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$. В этом случае уравнение прямой записывается так:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 \end{vmatrix} = 0, \text{ или } \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Если $x_2 - x_1 \neq 0$ и $y_2 - y_1 \neq 0$, то первое из этих уравнений эквивалентно следующему:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}.$$

3. Прямая задана длинами a и b направленных отрезков, отсекаемых на осях координат. Здесь $a = \frac{\overline{OA}}{e_1}$ и $b = \frac{\overline{OB}}{e_2}$, где A и B — точки пересечения прямой с осями Ox и Oy. Этот способ задания прямой возможен только в том случае, когда прямая не проходит через начало координат и не параллельна координатным осям. Уравнение прямой «в отрезках» имеет вид:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

4. Прямая задана координатами некоторой точки $M_0(x_0, y_0)$ и угловым коэффициентом k. Угловым коэффициентом прямой называется число $k = \frac{\beta}{\alpha}$,

где α, β — координаты любого направляющего вектора прямой, причем $\alpha \neq 0$.

Если система координат прямоугольная и декартова, то $k = \operatorname{tg} \varphi$, где φ — угол наклона данной прямой к оси Ox, т. е. тот угол, на который следует повернуть ось Ox до совпадения с данной прямой. Уравнение прямой с угловым коэффициентом записывается так:

$$y - y_0 = k (x - x_0).$$

Если за точку M_0 принять точку B (0, b) пересечения прямой с осью Oy, то последнее уравнение принимает вид:

$$y = kx + b.$$

Угловой коэффициент прямой, проходящей через точки M_1 (x_1, y_1) и M_2 (x_2, y_2), определяется формулой:

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Этот способ задания прямой возможен только в том случае, когда прямая не параллельна оси Oy, т. е. когда $\alpha \neq 0$.

Очевидно, рассмотренные выше способы задания прямой могут быть применены также и в том случае, когда данная система является прямоугольной декартовой. Однако в этом случае рассматриваются еще два способа задания прямой.

5. Прямая задана координатами некоторой точки $M_0(x_0, y_0)$ и координатами нормального вектора $\boldsymbol{n}\{\alpha, \beta\}$, т. е. ненулевого вектора, перпендикулярного прямой. В этом случае уравнение прямой имеет вид:

$$\alpha (x - x_0) + \beta (y - y_0) = 0.$$

6. Прямая задана расстоянием ρ от начала координат до прямой и углом φ, образованным осью Ox и перпендикуляром, опущенным из начала координат на прямую. В этом случае уравнение прямой называется нормальным и записывается так:

$$\cos \varphi \cdot x + \sin \varphi \cdot y - \rho = 0. \qquad (1)$$

Рассмотренные выше уравнения прямой имеют следующую характерную особенность: все они являются алгебраическими уравнениями первой степени, т. е. уравнениями вида

$$Ax + By + C = 0. \qquad (2)$$

Имеет место обратное предложение, которое называется **основной теоремой теории прямой**: *геометрическое место точек плоскости, координаты которых в некоторой аффинной системе координат удовлетворяют уравнению* (2), *где A и B одновременно не равны нулю, есть прямая, параллельная вектору* $\mathbf{p}\{-B, A\}$. Соотношение (2) называется **общим уравнением** прямой.

Для координат (x, y) всех точек плоскости, лежащих по одну сторону от прямой (2), имеет место неравенство $Ax + By + C > 0$, а для координат точек, лежащих по другую сторону $Ax + By + C < 0$. Итак, для того чтобы точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ лежали по разные стороны от прямой, необходимо и достаточно, чтобы числа $Ax_1 + By_1 + C$ и $Ax_2 + By_2 + C$ имели разные знаки.

По коэффициентам A, B и C общего уравнения можно судить о расположении прямой относительно системы координат:

а) Прямая (2) проходит через начало координат тогда и только тогда, когда $C = 0$.

б) Прямая (2) параллельна оси Ox тогда и только тогда, когда $A = 0$, $C \neq 0$, параллельна оси Oy тогда и только тогда, когда $B = 0$, $C \neq 0$.

Пусть в аффинной системе координат даны две прямые своими общими уравнениями:

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0, \tag{3}$$
$$A_2x + B_2y + C_2 = 0. \tag{4}$$

Для того чтобы прямые (3) и (4) совпадали, необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты A_1, B_1, C_1 были пропорциональны коэффициентам A_2, B_2, C_2, т. е.

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Для того чтобы прямые пересекались, необходимо и достаточно, чтобы

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Для того чтобы прямые (3) и (4) были параллельны, необходимо и достаточно, чтобы

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0$$

и хотя бы один из определителей $\begin{vmatrix} B_1 C_1 \\ B_2 C_2 \end{vmatrix}$ или $\begin{vmatrix} C_1 A_1 \\ C_2 A_2 \end{vmatrix}$ не обращался в нуль.

Пучком прямых, определяемым прямыми (3) и (4), называется совокупность всех прямых, проходящих через точку пересечения этих прямых (центр пучка), если они пересекаются, и совокупность всех прямых, имеющих направления прямых (3) и (4), если они параллельны или совпадают. В первом случае говорят, что дан пучок пересекающихся прямых, а во втором случае — пучок параллельных прямых.

Уравнение пучка, определяемого различными прямыми (3) и (4) записывается так:

$$\alpha (A_1x + B_1y + C_1) + \beta (A_2x + B_2y + C_2) = 0,$$

где α и β принимают всевозможные значения, не равные одновременно нулю.

Если задан пучок пересекающихся прямых с центром в точке (x_0, y_0), то уравнение этого пучка можно записать так:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 \\ \alpha & \beta \end{vmatrix} = 0, \text{ или } y - y_0 = k(x - x_0).$$

Здесь α и β принимают всевозможные значения, не равные одновременно нулю.

Имеет место следующее предложение, которое широко применяется при решении задач: для того чтобы три прямые

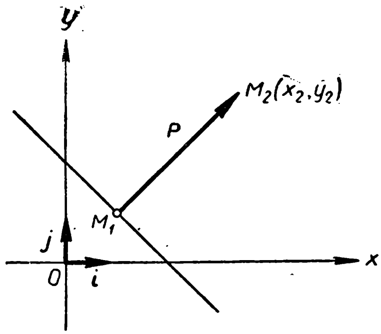
$$\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1 &= 0, \\ A_2x + B_2y + C_2 &= 0, \\ A_3x + B_3y + C_3 &= 0 \end{aligned}$$

принадлежали одному пучку, необходимо и достаточно, чтобы

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Если прямая задана в прямоугольной декартовой системе нормальным уравнением (1), то расстояние d от точки $M_0(x_0, y_0)$ до этой прямой вычисляется по формуле

$$d = |\cos\varphi \cdot x_0 + \sin\varphi \cdot y_0 - \rho|.$$



Черт. 16

Если же прямая задана общим уравнением (2), то

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Если прямая задана в прямоугольной декартовой системе уравнением (2), то вектор $\boldsymbol{n}\{A, B\}$ перпендикулярен прямой, и если его приложить к некоторой точке M прямой, то координаты его конца $M_2(x_2, y_2)$ удовлетворяют условию: $Ax_2 + By_2 + C > 0$ (черт. 16).

Углом φ между прямой l_1 и прямой l_2 на ориентированной плоскости называется тот угол, на который следует повернуть l_1 до совпадения с l_2, причем если этот поворот совершается в положительном направлении, то $\varphi > 0$, а если в отрицательном направлении, то $\varphi < 0$.

Если φ_1 и φ_2 — углы наклонов данных прямых к оси Ox, то при любом расположении прямых $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$. Отсюда, учитывая, что $k_1 = \operatorname{tg}\varphi_1$, $k_2 = \operatorname{tg}\varphi_2$, где k_1 и k_2 — угловые коэффициенты данных прямых, получаем:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}, \quad \operatorname{ctg}\varphi = \frac{1 + k_1k_2}{k_2 - k_1}.$$

Первой из этих формул можно пользоваться в том случае, когда прямые не перпендикулярны, а второй — когда прямые не параллельны. Из второй формулы получаем условие перпендикулярности двух прямых, заданных угловыми коэффициентами:

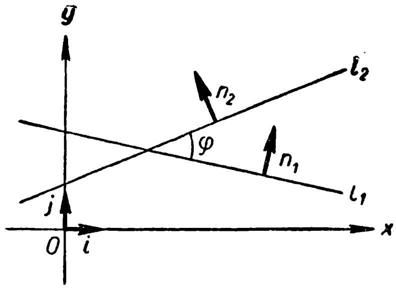
$$k_1k_2 = -1.$$

Если прямые заданы общими уравнениями (3) и (4) в прямоугольной декартовой системе, то

$$\cos\alpha = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

Здесь α есть угол между векторами $\boldsymbol{n}_1\{A_1, B_1\}$ и $\boldsymbol{n}_2\{A_2, B_2\}$ (черт. 17). Таким образом, по этой формуле определяется косинус того угла (и ему вертикального), образованного рассматриваемыми прямыми, для координат всех внутренних точек которого имеет место неравенство

$$(A_1x + B_1y + C_1) \times \times(A_2x + B_2y + C_2) < 0.$$



Черт. 17

Условие перпендикулярности двух прямых, заданных общими уравнениями (3) и (4), записывается так:

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0.$$

§ 11. Прямая в общей аффинной системе координат

200. Дана прямая $2x - y + 5 = 0$. Выяснить, какие из следующих точек принадлежат данной прямой: (5, 15); (1, 1); (—2, 1); (3, 0); (7, —5); (1, 7); $\left(\frac{1}{2}, 6\right)$; (0, 3).

201. Определить точки, которые принадлежат прямой $3x - 2y + 1 = 0$ и имеют ординаты: 1; $\frac{1}{2}$; 2; —1; 3; 5; —4.

202. Определить точки, которые принадлежат прямой $7x + 2y - 8 = 0$ и имеют абсциссы: 2; —4; 3; —1; 1; 0;5.

203. Даны прямые:

а) $3x - y - 5 = 0$;
б) $x + 2y + 4 = 0$;
в) $2x - 3y + 6 = 0$;
г) $6x + 5 = 0$;
д) $3y - 8 = 0$;
е) $2x - y = 0$;
ж) $5x + 3y = 0$;
з) $x - 3 = 0$;
и) $y + 7 = 0$.

Найти точки пересечения указанных прямых с осями координат. Выбрав общую аффинную систему координат, построить данные прямые.

204. Написать уравнение прямой:

а) проходящей через точки A (—1, 1) и B (2, 5);

б) проходящей через начало координат и точку A (2, 5);

в) проходящей через точку A (2, —6) и параллельной вектору $\boldsymbol{p}$ $\{1, -1\}$;

г) отсекающей на осях координат отрезки $a = 3$, $b = -2$;

д) проходящей через точку A (3, 5) и параллельной оси Ox;

е) проходящей через точку B (—1, 2) и параллельной оси Oy;

ж) проходящей через точку A (1,—5) и параллельной прямой $x - 3y + 1 = 0$;

з) проходящей через точку A (2, 2) и параллельной прямой $x + y = 0$.

205. Установить, какие из следующих троек точек лежат на одной прямой:

а) (2, 1), (—1, 4), (—7, 10);
б) (0, 5), (7, 1), (—2, 3);
в) (1, 0), (0, 1), (—2, 3);
г) (2, 1), (10, 3), (5, 2).

206. Найти длины направленных отрезков, отсекаемых на осях координат прямыми: а) $3x - 2y + 6 = 0$; б) $x + y + 6 = 0$; в) $2x - y + 3 = 0$. Составить уравнения этих прямых в отрезках.

207. Написать параметрические уравнения прямой:

а) проходящей через точку P (—2, 3) параллельно вектору $\boldsymbol{p}$ $\{5, -1\}$;

б) проходящей через две точки M_1 (0,—2), M_2 (3,—4);

в) проходящей через начало координат и параллельной вектору $\boldsymbol{p}\{1, 1\}$;

г) проходящей через точку M_0 (1,—3) и параллельной оси Ox;

д) проходящей через две точки M_1 (1, 2) и M_2 (1, —5).

208. Прямая задана параметрически:

$$x = -1 + 4t, \qquad y = 2 - t.$$

а) Найти направляющий вектор данной прямой.

б) Определить координаты точек, имеющих параметр

$$t_1 = 3, \qquad t_2 = 0, \qquad t_3 = -2, \qquad t_4 = -1.$$

в) Определить параметры точек пересечения данной прямой с осями координат.

г) Среди точек M_1 (—3, 1), M_2 (3, 1), M_3 (15,—2), $M_4\left(0, \frac{7}{4}\right)$, M_5 (2, 2) найти точки, принадлежащие данной прямой.

209. Даны прямые: а) $3x - y + 5 = 0$; б) $x + y - 3 = 0$; в) $2x + 5 = 0$; г) $4x + 5y + 6 = 0$; д) $x + 3y = 0$.

Написать уравнение каждой из них в параметрическом виде.

210. Записать общие уравнения следующих прямых, заданных параметрически:

а) $x = -2 + 3t, \quad y = 4 - t;$
б) $x = t, \quad y = 2;$
в) $x = 5 + t, \quad y = 3t.$

211. Выбрав аффинную систему координат на плоскости, построить следующие прямые:

а) $x = 1 - 2t, \quad y = 5 - 4t;$
б) $x = 3, \quad y = t;$
в) $x = 5t, \quad y = -1 + \sqrt{3}t.$

212. Даны три вершины треугольника: $A(1, -2)$, $B(0, 3)$, $C(1, 1)$. Через каждую из них провести прямую, параллельную противоположной стороне.

213. Показать, что четырехугольник $ABCD$, где

$$A(-2, -2),\ B(-3, 1),\ C\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right) \text{ и } D(3, 1),$$

является трапецией. Составить уравнение средней линии и диагоналей этой трапеции.

214. Даны смежные вершины $A(1, -2)$ и $B(3, 2)$ параллелограмма $ABCD$ и точка $P(1, 1)$ пересечения его диагоналей. Составить уравнение сторон параллелограмма.

215. Даны уравнения двух смежных сторон параллелограмма: $x - y - 1 = 0$ и $x - 2y = 0$ и точка пересечения его диагоналей $F(3, -1)$. Написать уравнения двух других сторон параллелограмма.

216. Через точку $P(1, 2)$ провести прямую, отсекающую равные отрезки на осях координат.

217. Даны середины сторон треугольника: $M(2, -1)$, $N(-3, -3)$ и $P(-1, 0)$. Составить уравнения его сторон.

§ 12. Прямая в прямоугольной декартовой системе координат

218. Дана прямоугольная декартова система координат. Написать уравнение прямой:

а) проходящей через точку $A(2, 5)$ и имеющей угловой коэффициент $k = 3$;

б) проходящей через точку (0, 0) и имеющей угловой коэффициент $k = -2$;

в) являющейся биссектрисой координатного угла $(\widehat{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}})$;

г) проходящей через начало координат и образующей с осью Ox угол $+30°$;

д) проходящей через начало координат и образующей с осью Ox угол $+120°$;

е) отсекающей от оси Oy отрезок $b = 2$ и имеющей угловой коэффициент $k = -3$;

ж) отсекающей от оси Oy отрезок $b = -3$ и имеющей угловой коэффициент $k = 1$.

219. Найти угловые коэффициенты и отрезки, отсекаемые на оси Oy каждой из следующих прямых:

а) $2x + y + 5 = 0$;
б) $x - 3y + 6 = 0$;
в) $x + y = 0$.

220. Найти углы наклона к оси Ox прямых: а) $x+y-7 = 0$; б) $x - y + 2 = 0$; в) $x + \sqrt{3}y - 4 = 0$.

221. Написать уравнение прямой:

а) проходящей через точку A $(-1, 3)$ и перпендикулярной к вектору $\boldsymbol{n}$ $\{2, 1\}$;

б) проходящей через точку (5, 10) и перпендикулярной к прямой $x - y + 1 = 0$;

в) проходящей через начало координат и перпендикулярной к прямой $2x - 3y + 1 = 0$.

222. Взяв прямоугольную декартову систему координат, построить следующие прямые: а) $3x - 5y + 10 = 0$; б) $y = 2x - 3$; в) $y - 3 = 2(x + 5)$; г) $y = 6x$; д) $\frac{x}{-2} + \frac{y}{3} = 1$.

223. Даны уравнения движения точки M:

$$x = 3 + 4t, \qquad y = -1 - 3t.$$

Определить:

а) скорость точки M;

б) точку, с которой совпадет точка M в момент времени $t=3$;

в) в какой момент времени точка M достигнет прямой $x + 2y + 7 = 0$.

224. а) Составить уравнения движения точки M, которая из начального положения M_0 (2, — 3) движется прямолинейно и равномерно в направлении вектора $\boldsymbol{p}\{-4, +3\}$ со скоростью $v = 15$ *см/сек*. Предполагается, что система координат прямоугольная декартова и что $|\boldsymbol{i}| = |\boldsymbol{j}| = 1$ *см*.

б) Определить, за какой промежуток времени она пройдет отрезок своей траектории, заключенной между осью Ox и прямой $2x + y + 25 = 0$.

225. Дана прямая $2x - 5y + 3 = 0$. Определить для этой прямой направляющий вектор $\boldsymbol{p}$, нормальный вектор $\boldsymbol{n}$, угловой коэффициент и отрезки, отсекаемые на осях координат. Построить данную прямую и векторы $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{n}$.

226. Точка H (—2, 5) является основанием перпендикуляра, опущенного из начала координат на прямую l. Написать уравнение прямой l.

227. Точка M (3, 2) является основанием перпендикуляра, опущенного из точки N (1, —1) на прямую l. Написать уравнение прямой l.

228. Даны точки A (2, —3) и B (3, —5). Через середину отрезка AB провести прямую, перпендикулярную к AB.

229. Даны вершины треугольника A (1, 5), B (— 1, 2); C (3, 2). Составить уравнения:

а) высот треугольника;

б) прямых, проходящих через вершины треугольника параллельно противоположным сторонам.

230. Даны две вершины треугольника: A (—1, 5), B (3, 2) и точка H (5, —3) пересечения его высот. Составить уравнения его сторон.

231. Написать уравнения сторон квадрата, если длина стороны равна a, а за оси прямоугольной декартовой системы координат приняты его диагонали.

232. Найти проекцию точки M (5, —2) на прямую $2x - 3y - 3 = 0$.

233. Определить координаты точки, симметричной началу координат относительно прямой $x - 4y + 17 = 0$.

234. Определить координаты точки, симметричной точке M (2, —5) относительно прямой $2x + 8y - 15 = 0$.

235. На прямой $2x - y - 10 = 0$ найти точку Q, сумма расстояний которой до точек M (—5, 0) и N (—3, 4) была бы наименьшей.

236. Написать уравнения всех сторон правильного шестиугольника $ABCDEF$, если сторона шестиугольника равна a, а система прямоугольных декартовых координат выбрана так, что начало совпадает с точкой A, точка B лежит на положительном луче оси Ox, а точка E — на положительном луче оси Oy.

237. Вершины треугольника находятся в точках $A\ (-4,\ -5)$, $B\ (4,\ 1)$ и $C\left(-\frac{1}{2},\ 7\right)$. Написать:

а) уравнение биссектрисы внутреннего угла A;

б) уравнение медианы, проходящей через вершину A;

в) уравнение высоты, опущенной из вершины C.

238. Даны вершины треугольника $A\ (1,\ 2)$, $B\ (-1,\ 6)$ и $C\ (5,\ 10)$. Составить уравнения сторон ромба $AMNP$, вписанного в треугольник так, что вершина M принадлежит стороне AB, N — стороне BC и P — стороне AC.

239. Вычислить координаты вершин ромба, если известны уравнения двух его сторон: $x + 3y + 12 = 0$ и $x + 3y - 8 = 0$ и уравнение одной из его диагоналей: $2x + y + 4 = 0$.

§ 13. Взаимное расположение прямых. Пучок прямых

240. Исследовать, как расположены относительно осей координат следующие прямые:

а) $2x - 3y = 0$; г) $3y + 1 = 0$;

б) $3x - y + 1 = 0$; д) $x + 2y = 0$;

в) $5x - 1 = 0$; е) $6x = 0$.

241. Исследовать взаимное расположение следующих пар прямых и в случае пересечения определить координаты общей точки:

а) $x + y - 3 = 0$ и $2x - 2y - 6 = 0$;

б) $x + 2y + 1 = 0$ и $x + 2y + 3 = 0$;

в) $\frac{\sqrt{3}}{2}x - 3y + \sqrt{3} = 0$ и $x - 2\sqrt{3}y + 2 = 0$;

г) $y = 3$ и $x + y = 0$;

д) $x + y + 1 = 0$ и $x + y - 1 = 0$;

е) $x = 0$ и $x + 3 = 0$;

ж) $\sqrt{5}x - 3y + 1 = 0$ и $\frac{5}{3}x - \sqrt{5}y + \frac{\sqrt{5}}{3} = 0$.

242. При каком значении параметра t прямые, заданные уравнениями $3tx - 8y + 1 = 0$ и $(1 + t)\,x - 2ty = 0$, параллельны?

243. Можно ли подобрать коэффициенты λ и μ так, чтобы прямые $3x - 2y + 1 = 0$ и $\lambda x + \mu y - 3 = 0$ совпадали?

244. Выяснить взаимное расположение следующих троек прямых:

а) $y = 3, \quad x - y + 5 = 0, \quad 2y - 5 = 0$;
б) $2x - y + 5 = 0, \; x + y - 3 = 0, \; x - y = 0$;
в) $x - y + 6 = 0, \; 2x + y + 9 = 0, \; 3x - 2y + 17 = 0$.

245. Какому условию должны удовлетворять коэффициенты λ и μ, для того чтобы прямые $\lambda x + \mu y + 1 = 0$, $2x - 3y + 5 = 0$ и $x - 1 = 0$ имели общую точку?

246. Через точку $(1, 6)$ провести прямую так, чтобы середина ее отрезка, заключенного между двумя параллельными прямыми $x - 5y + 23 = 0$, $x - 5y + 11 = 0$, лежала на прямой $2x - y - 2 = 0$.

247. Провести прямую так, чтобы точка $A\,(1, 2)$ была серединой ее отрезка, заключенного между осями координат.

248. В пучке $x + 2y - 3 + \lambda\,(x - y + 1) = 0$ найти прямую, которая проходит через точку $M\,(4, 1)$.

249. В пучке $2x - y + 1 + \lambda\,(3x - 2y + 5) = 0$ найти прямую, параллельную прямой $5x - 3y + 1 = 0$.

250. В пучке $\lambda\,(3x - 4y + 1) + x - y = 0$ найти прямую, проходящую через начало координат.

251. В пучке $\lambda\,(x - 2y + 1) + \mu\,(x - 3y) = 0$ найти прямую, параллельную оси Ox.

252. Через точку пересечения прямых $3x - y = 0$, $x + 4y - 2 = 0$ провести прямую, перпендикулярную к прямой: $x + y = 0$.

253. Даны уравнения сторон треугольника:

$$x + 2y - 1 = 0, \quad 5x + 4y - 17 = 0, \quad x - 4y + 11 = 0.$$

а) Составить уравнения высот треугольника.

б) Составить уравнения прямых, проходящих через вершины треугольника параллельно противоположным сторонам.

254. Через точку пересечения прямых $6x - 2y + 5 = 0$ и $2x + y - 4 = 0$ провести прямую:

а) параллельную оси Ox;
б) параллельную оси Oy;
в) проходящую через начало координат.

255. Дано уравнение стороны AB треугольника: $2x - 3y + 6 = 0$ и уравнение двух его высот: (AH) $2x + y - 2 = 0$ и (BK) $x + 3y - 12 = 0$. Составить уравнения двух других сторон.

256. Определить общую прямую следующих двух пучков:

$$(2 + 3\lambda)\, x - (4 - 7\lambda)\, y + \lambda = 0;$$
$$(3 - 2\mu)\, x + (4 - 7\mu)\, y + 5 = 0.$$

257. Даны стороны четырехугольника: $x - 4y + 3 = 0$ (AB), $6x + 3y - 36 = 0$ (BC), $x - y + 6 = 0$ (CD), $x + 2y - 3 = 0$ (AD). Написать уравнение его диагоналей.

§ 14. Геометрический смысл линейных неравенств с двумя неизвестными

258. Даны точки $M_1(-1, 2)$, $M_2(3, 1)$, $M_3(1, 0)$, $M_4(7, 2)$, $M_5(-3, 6)$, $M_6(1, 1)$ и прямые: а) $2x - y + 5 = 0$; б) $4x + y - 8 = 0$; в) $3x - 2y + 1 = 0$; г) $2x - 5 = 0$; д) $x - 3y - 2 = 0$. Для каждой из данных прямых среди указанных точек выбрать те точки, которые лежат по ту же сторону от этих прямых, что и начало координат.

259. Дана прямая $3x - 2y + 12 = 0$. Указать, какие из пар точек, приведенных ниже, лежат по разные стороны от данной прямой: а) $A_1(1, 0)$ и $A_2(-5, 6)$; б) $B_1(0, 11)$ и $B_2(-5, 0)$; в) $O(0, 0)$ и $P(1, 1)$; г) $C_1(1, 4)$ и $C_2(-4, 2)$; д) $D_1(2, 6)$ и $D_2(0, 8)$; е) $E_1(-1, 0)$ и $E_2(1, 0)$.

260. Даны вершины треугольника $A(-6, 3)$, $B(8, 10)$, $C(2, -6)$ и прямые: а) $2x - 3y + 6 = 0$; б) $x + y = 0$; в) $3x - y - 3 = 0$. Определить, какие стороны треугольника пересекаются каждой из данных прямых. Сделать чертеж и на чертеже проверить полученные выводы.

261. Выяснить, какие стороны треугольника с вершинами в точках $A(-6, 3)$, $B(8, 10)$ и $C(2, -6)$ пересекаются каждой из осей координат.

262. Даны вершины треугольника $A(-5, 0)$, $B(2, 8)$, $C(7, -3)$ и точки $M_1(0, 2)$, $M_2(15, -3)$, $M_3(2, 5)$, $M_4(-2, -5)$, $M_5(1, 1)$, $M_6(0, 0)$, $M_7(-5, 4)$. Выяснить, какие из данных точек расположены внутри треугольника.

263. Даны вершины $A(-4, 0)$, $B(-2, 8)$, $C(15, 13)$

и D (0, — 3) четырехугольника $ABCD$. Доказать, что данный четырехугольник выпуклый.

264. Показать, что четырехугольник с вершинами в точках A (0, 0), B (7, — 6), C (5, 0), D (8, 7) не выпуклый.

265. Дан выпуклый четырехугольник с вершинами в точках: A (— 4, 0), B (— 2, 8), C (12, 0) и D (3, — 6). Доказать, что точки M_1 (1, 3) и M_2 (0, 0) лежат внутри данного четырехугольника, а точки M_3 (15, — 1) и $M_4(-6, \sqrt{2})$ — вне его.

266. Дан $\measuredangle ACB$, где A (4, 6), C (— 2, 2), B (0, —5). Выяснить, какие из указанных ниже точек лежат внутри данного угла: M_1 (2, 0), M_2 (— 2, 5), M_3 (6, 4), M_4(7, 0), M_5(— 6, 5).

267. Треугольник ABC задан уравнениями своих сторон:

$$\begin{aligned} &(AB) \quad -5x + 6y - 30 = 0; \\ &(BC) \quad 5x + y - 20 = 0; \\ &(CA) \quad y + 2 = 0. \end{aligned}$$

Выяснить, какие из указанных ниже точек лежат внутри треугольника: M_1 (0, 4), M_2 (15, 3), M_3 (—7, 2), M_4 (2, 4), M_5(1, —1), M_6(—6, 3).

268. Две пересекающиеся прямые $x - y + 5 = 0$ и $2x + y - 3 = 0$ делят множество всех точек плоскости, не лежащих на них, на четыре угла (области). Составить систему неравенств, определяющих внутреннюю область угла, которому принадлежит точка M (— 4, 15).

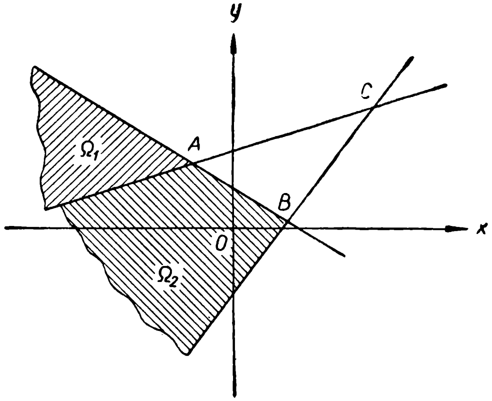
269. Доказать, что если в аффинной системе координат дана прямая уравнением $Ax + By + C = 0$, то вектор $\mathbf{p}\,\{A, B\}$ не параллелен прямой, и если его приложить к некоторой точке прямой, то координаты x_1, y_1 его конца удовлетворяют условию $Ax_1 + By_1 + C > 0$.

270. Пусть прямые l_1 и l_2, заданные в прямоугольной декартовой системе координат уравнениями $A_1x+B_1y+C_1=0$, $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, пересекаются, но не перпендикулярны друг другу. Доказать, что внутренние области двух вертикальных острых углов, образованных этими прямыми, характеризуются неравенством

$$(A_1 x + B_1y + C_1)\,(A_2x + B_2y + C_2)\,(A_1A_2 + B_1B_2) < 0,$$ а

внутренние области двух вертикальных тупых углов — неравенством

$$(A_1x + B_1y + C_1)\,(A_2x + B_2y + C_2)\,(A_1A_2 + B_1B_2) > 0.$$



Черт. 18

271. Даны две пересекающиеся прямые в прямоугольной декартовой системе: $3x + 5y - 15 = 0$ и $-x + 2y - 4 = 0$. Выяснить, какие из точек, указанных ниже, принадлежат внутренним областям острых углов, образованных данными прямыми: $M_1(3, 2)$, $M_2(0,0)$, $M_3(8, 0)$, $M_4(10, 6)$, $M_5(0, -5)$, $M_6(-4, 3)$.

272. Треугольник задан уравнениями своих сторон: (AB) $3x + 8y - 9 = 0$, (AC) $3x - y - 9 = 0$, (BC) $3x - 10y + 45 = 0$. Составить систему неравенств, определяющую: а) внутреннюю область треугольника; б) область Ω_1; в) область Ω_2 (см. черт. 18).

273. Две параллельные прямые: $2x - y + 1 = 0$ и $2x - y + 5 = 0$ делят все точки плоскости, не принадлежащие им, на три области: полосу Ω_0, заключенную между ними, полуплоскости Ω_1 и Ω_2 вне этой полосы, определяемые первой и второй прямыми. Установить, каким областям принадлежат точки: $M_1(-2, 1)$, $M_2(4, 5)$, $M_3(-4, -4)$, $M_4(-3, 7)$, $M_5(-6, 2)$, $M_6(1, 5)$, $M_7(3, 0)$.

274. Выбрав на плоскости прямоугольную декартову систему координат, изобразить область, определяемую следующей системой неравенств:

$$\begin{cases} x - y + 5 > 0; \\ x + 5y + 33 > 0; \\ x - 7 < 0; \\ x - 2y - 1 < 0; \\ x + y - 1 > 0. \end{cases}$$

275. Выбрав на плоскости прямоугольную декартову систему координат, изобразить на чертеже область, определяемую следующей системой неравенств:

$$\begin{cases} 2x + y + 6 > 0; \\ 3x - y + 14 > 0; \\ x - y + 8 > 0; \\ y + 2 > 0; \\ x - 4y - 10 < 0. \end{cases}$$

276. Выбрав на плоскости прямоугольную декартову систему координат, изобразить на чертеже область, определяемую следующей системой неравенств:

$$\begin{cases} x - y + 1 > 0; \\ x - 3y - 6 < 0; \\ 2x + y - 6 > 0; \\ x + y + 4 < 0. \end{cases}$$

§ 15. Расстояние от точки до прямой; угол между прямыми

277. Привести к нормальному виду уравнения[1] следующих прямых:

а) $4x + 3y + 6 = 0$; б) $x - y - 3 = 0$; в) $2x + 3 = 0$; г) $y + 1 = 0$; д) $\frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y - 3 = 0$;

е) $\frac{2}{\sqrt{5}}x + \frac{1}{\sqrt{5}}y + 2 = 0$.

278. Найти расстояния от точки до прямой в каждом из следующих случаев:

а) $M_1(-1, 5)$, $4x + 3y - 5 = 0$; б) $M_2(\frac{3}{5}, 3)$, $5x - 12y - 6 = 0$; в) $M_3(-3, 4)$, $x + 2y + 3 = 0$; г) $M_4(3, 7)$, $2x + 5 = 0$.

279. Определить расстояния от точек $A(1, 2)$, $B(-1, 3)$ и $C(1, 6)$ до прямой $3x - 4y + 1 = 0$.

280. Найти длины высот треугольника, стороны которого заданы уравнениями: $y - 2 = 0$, $4x - 2y - 24 = 0$, $4x - 11y + 30 = 0$.

281. Написать уравнение окружности с центром в точке $P(6, -3)$, касающейся прямой $3x - 4y - 15 = 0$.

---

[1] Во всех задачах этого параграфа система координат предполагается прямоугольной декартовой.

282. Вывести формулу для вычисления расстояния между параллельными прямыми $Ax + By + C_1 = 0$ и $Ax + By + C_2 = 0$. Пользуясь полученной формулой, определить расстояние между следующими прямыми: $3x + 4y - 18 = 0$ и $3x + 4y - 43 = 0$.

283. Через точку $M(-1, 4)$ проведена прямая, расстояние которой до точки $Q(-2, -1)$ равно 5. Составить ее уравнение.

284. Через точку $P(1, 1)$ провести касательные к окружности, имеющей центр в точке $C(1, -3)$, и радиус, равный $2\sqrt{2}$.

285. К окружности, имеющей центр в точке $(1, -2)$ и радиус, равный 5, провести касательные, параллельные прямой $3x + 4y + 1 = 0$.

286. В точке $A(2, 6)$, лежащей на окружности $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 25$, провести касательную к данной окружности.

287. Составить уравнения касательных к окружности $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 40$, перпендикулярных прямой $3x + y - 4 = 0$.

288. Составить уравнения окружностей, касающихся прямой $2x - y - 5 = 0$, проходящих через точку $M(2, 3)$ и имеющих радиус $r = 2\sqrt{5}$.

289. Составить уравнения прямых, отстоящих от прямой $4x - 3y - 7 = 0$ на расстоянии, равном 3.

290. Составить уравнение геометрического места точек, равноудаленных от двух параллельных прямых:

а) $2x - 5y + 6 = 0, \quad 2x - 5y - 8 = 0$;
б) $3x + 5y + 8 = 0, \quad 3x + 5y + 2 = 0$.

291. На прямой $x + 2y - 12 = 0$ найти точки, равноудаленные от прямых $x + y - 5 = 0$ и $7x - y + 11 = 0$.

292. Даны две смежные вершины квадрата: $A(3, -9)$ и $B(8, -14)$. Определить остальные вершины квадрата и составить уравнения его сторон.

293. Написать уравнения биссектрис углов, образованных следующими прямыми:

а) $x - 3y + 2 = 0$ и $3x + y - 1 = 0$;
б) $x + 2y + 5 = 0$ и $4x - 2y - 3 = 0$;
в) $\sqrt{3}y - x = 12$ и $3x + 4y - 15 = 0$.

294. Составить уравнение биссектрисы того угла между прямыми $x + 2y - 5 = 0$ и $3x - 6y + 2 = 0$, в котором лежит начало координат.

295. Составить уравнение биссектрисы того угла между прямыми $2x - y + 7 = 0$ и $3x - 6y - 8 = 0$, в котором лежит точка $M(1, 2)$.

296. Составить уравнение биссектрисы острого угла, образованного прямыми: $3x + 4y - 3 = 0$ и $5x + 12y + 6 = 0$.

297. Составить уравнение биссектрисы тупого угла, образованного прямыми: $x + 2y - 7 = 0$ и $4x + 2y + 3 = 0$.

298. Составить уравнения окружностей, касающихся двух данных прямых $3x + 4y - 10 = 0$ и $5x - 12y + 26 = 0$ и имеющих радиус, равный 5.

299. Составить уравнения окружностей, касающихся двух пересекающихся прямых $x - 2y + 4 = 0$, $x + 2y = 0$ и проходящих через точку $M(1, 0)$.

300. Составить уравнения окружностей, касающихся двух параллельных прямых $x - 2y + 13 = 0$ и $x - 2y + 3 = 0$ и проходящих через точку $(-1, +2)$.

301. Даны уравнения сторон треугольника: $x - 2 = 0$, $y + 3 = 0$, $4x + 3y - 11 = 0$. Составить уравнения вписанной и вневписанных окружностей.

302. Определить угол, образованный двумя упорядоченными прямыми:

а) $3x + y - 6 = 0$, $\quad 2x - y + 5 = 0$;

б) $\sqrt{3}x - 3y + 6 = 0$, $\quad \sqrt{3}x - y - 5 = 0$;

в) $x - 2y + 1 = 0$, $\quad 6x + 3y - 2 = 0$.

303. Через точку $(-1, 5)$ провести прямые, наклоненные к прямой $x - y + 3 = 0$ под углом, тангенс которого равен $\frac{3}{5}$.

304. Составить уравнения катетов равнобедренного прямоугольного треугольника, зная уравнение гипотенузы $3x - y + 5 = 0$ и вершину прямого угла $C(4, -1)$.

305. Даны уравнение одной из сторон квадрата $x + 3y - 3 = 0$ и точка пересечения диагоналей $(-2, 0)$. Составить уравнения его диагоналей и остальных сторон. Определить координаты вершин квадрата.

306. Из точки $M(1, -2)$ под углом α к прямой $x + y - 1 = 0$ направлен луч света. Известно, что $\operatorname{tg} \alpha = 3$.

Определить уравнения прямых, на которых лежат падающий и отраженный лучи.

307. Луч света направлен по прямой $x + y + 3 = 0$. Дойдя до прямой $3x - y + 5 = 0$, луч отразился. Составить уравнение прямой, на которой лежит отраженный луч.

308. Даны две вершины треугольника: A (1, 3) и B (1, 5) и косинусы внутренних углов: $\cos A = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ и $\cos B = \frac{3}{\sqrt{10}}$. Составить уравнения сторон треугольника.

309. Даны уравнения основания равнобедренного треугольника $3x - y + 5 = 0$ и его боковой стороны $x + 2y - 1 = 0$. Составить уравнение второй боковой стороны, если она проходит через точку M (1, —3).

310. Даны уравнения сторон треугольника: (AB) $4x - y + 5 = 0$, (BC) $2x + 3y - 1 = 0$, (AC) $x + y - 3 = 0$. Определить тангенсы его внутренних углов.

§ 16. Смешанные задачи на прямую

311. Вычислить площадь ромба, если известна его вершина A (—1, 3), точка M (0, 2), лежащая на стороне AB, и точка Q (2, 1) пересечения его диагоналей.

312. Даны вершины A (—1, 4) и B (0, 5) треугольника, площадь которого $S = 4$, и прямая $2x + y - 3 = 0$, на которой лежит третья вершина. Составить уравнения сторон треугольника.

313. Даны две прямые $x - 3 = 0$ и $3x - y - 3 = 0$ и точка P (5, 12). Через точку P провести прямую, отсекающую от данных прямых треугольник, площадь которого равна 4.

314. Даны три прямые: $x - 1 = 0$, $2x - 3y + 7 = 0$ и $2x + 3y - 10 = 0$. Составить уравнение прямой, параллельной третьей и отсекающей от первых двух треугольник, площадь которого равна 6.

315. Через точку пересечения прямых $x - y - {}^4/_5 = 0$ и $5x - y - {}^{32}/_5 = 0$ провести прямую, касающуюся окружности $10x^2 + 10y^2 + 140\,x + 321 = 0$.

316. Через точку M (2, — 5) провести прямую так, чтобы ее отрезок, заключенный между прямыми $x - y - 1 = 0$, $2x - y - 18 = 0$, делился в точке M пополам.

317. Даны уравнения $x + 2y - 3 = 0$, $x + y - 2 = 0$ двух сторон треугольника и уравнение $5x + 6y - 15 = 0$

одной из его медиан. Составить уравнение третьей стороны.

318. Даны уравнения двух сторон треугольника: $9x + 2y + 37 = 0$ (AB), $9x + 10y + 5 = 0$ (AC) и точка $M(-1, -2)$ пересечения его медиан. Составить уравнение третьей стороны и найти вершины треугольника.

319. Даны уравнения $x + y - 5 = 0$, $3x + y - 7 = 0$ двух медиан треугольника и уравнение одной из его сторон $2x + y - 5 = 0$. Составить уравнения двух других сторон треугольника и найти его вершины.

320. Составить уравнения сторон треугольника ABC, зная одну из его вершин $A(3, 0)$ и уравнения двух медиан $7x - 5y + 15 = 0$, $4x + y + 6 = 0$.

321. Составить уравнения сторон треугольника ABC, если известны уравнения двух биссектрис $x + 2y - 13 = 0$, $x - y - 5 = 0$ и координаты точки $A(7, 8)$.

§ 17. Приложение теории прямой к решению задач элементарной геометрии

322. Доказать, что высоты треугольника пересекаются в одной точке.

323. Доказать, что в любом треугольнике перпендикуляры, восставленные в серединах сторон, пересекаются в одной точке.

324. Доказать, что медианы любого треугольника пересекаются в одной точке.

325. Доказать, что биссектрисы внутренних углов любого треугольника пересекаются в одной точке.

326. Доказать, что центр S описанной окружности, ортоцентр H и центр тяжести G произвольного треугольника лежат на одной прямой (прямая Эйлера)[1].

327. Пусть a и b — две произвольные прямые на плоскости, A, B, C — точки на прямой a и D, E, F — точки на прямой b. Доказать, что точки пересечения прямых: AD и CE; BD и CF; BE и AF лежат на одной прямой (теорема Паппа)[2].

---

[1] Ортоцентром треугольника называется точка пересечения высот; центром тяжести является точка пересечения медиан.

[2] Здесь предполагается, что все три пары прямых: AD и CE; BD и CF; BE и AF соответственно пересекаются в трех различных точках. Предлагаем самостоятельно сформулировать и доказать теорему Паппа для того случая, когда одна или две из данных пар прямых не пересекаются.

328. В плоскости треугольника ABC дана точка M. Построены точки A_1, B_1, C_1, симметричные с точкой M относительно середин сторон BC, CA, AB треугольника. Доказать, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке.

329. В треугольнике ABC разность углов B и A равна $90°$. Из основания H высоты CH проведены на стороны AC и BC перпендикуляры, которые пересекают эти стороны соответственно в точках B_1 и A_1. Доказать, что прямые AB и A_1B_1 перпендикулярны.

330. (Теорема Чевы.) Пусть C_1, A_1 и B_1 — три точки соответственно на сторонах AB, BC и CA треугольника ABC. Для того чтобы прямые AA_1, BB_1 и CC_1 принадлежали одному пучку (т. е. пересекались в одной точке или были параллельны друг другу), необходимо и достаточно, чтобы

$$\frac{AC_1}{BC_1} \cdot \frac{BA_1}{CA_1} \cdot \frac{CB_1}{AB_1} = -1.$$

(Отрезки считаются направленными.)

331. Вычислить расстояние между противоположными сторонами ромба, если длины его диагоналей равны a и b.

332. Стороны остроугольного треугольника ABC равны: $AB = 5$, $AC = 7$ и высота $BB_1 = 4$. Найти длину перпендикуляра, проведенного из вершины B на медиану, проведенную из вершины A.

333. Найти геометрическое место центров тяжести треугольников, две вершины которых зафиксированы, а третьи вершины лежат на данной прямой l.

334. Даны две взаимно перпендикулярные прямые a и b, пересекающиеся в точке C, и две точки A и B на прямой a. На прямой b берутся точки P и Q так, что $\frac{CP}{CQ} = k$, где k — некоторое постоянное число. Доказать, что геометрическое место точек пересечений прямых AP и BQ есть прямая.

335. Даны две прямые a и b, пересекающиеся в точке O. Найти геометрическое место четвертых вершин квадратов, две вершины которых лежат на прямой a, а третья — на прямой b.

336. Две пересекающиеся в точке O прямые l_1 и l_2 пересечены пучком параллельных прямых $\{m\}$. Пусть m_i

и m_k — две произвольные прямые пучка, которые пересекают l_1 в точках A_i и A_k, а l_2 — в точках B_i и B_k. Определить геометрическое место точек пересечения прямых A_iB_k и B_iA_k.

ГЛАВА V

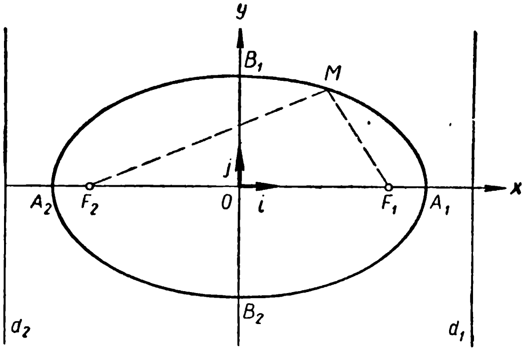
ИЗУЧЕНИЕ КРИВЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА ПО КАНОНИЧЕСКИМ УРАВНЕНИЯМ

Эллипсом называется геометрическое место точек плоскости, для каждой из которых сумма расстояний до двух данных точек той же плоскости F_1 и F_2 есть величина постоянная, большая, чем расстояние между F_1 и F_2 (черт. 19). Точки F_1 и F_2 называются фокусами эллипса, а длина отрезка F_1F_2 — фокальным расстоянием.

Обозначим через $2a$ сумму расстояний любой точки эллипса до фокусов, а через $2c$ расстояние между фокусами; по определению $a > c$. Если F_1 и F_2 совпадают, то в этом случае эллипс есть окружность радиуса a.

Если начало O прямоугольной декартовой системы поместить в середине отрезка F_1F_2, а ось Ox направить по прямой F_2F_1, то в выбранной системе эллипс имеет уравнение:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{1}$$



Черт. 19

где $b^2 = a^2 - c^2$. Это уравнение называется каноническим уравнением эллипса, а выбранная система — канонической системой.

В той же системе координат эллипс имеет следующие параметрические уравнения:

$$x = a\cos t, \quad y = b\sin t.$$

Вершинами эллипса называются точки пересечения эллипса с осями канонической системы координат. Эллипс имеет четыре вершины: A_1, A_2, B_1, B_2 (черт. 19). Отрезки A_1A_2 и B_1B_2 называются осями эллипса. Отрезок A_1A_2 называется большой осью, а B_1B_2 — малой. Очевидно, $A_1A_2 = 2a$, $B_1B_2 = 2b$. Начало O канонической системы координат называется центром эллипса.

Эксцентриситетом эллипса называется число $\varepsilon = \frac{c}{a}$. Очевидно, $0 \leqslant \varepsilon < 1$. Эксцентриситет равен нулю тогда и только тогда, когда эллипс является окружностью. *Два эллипса, имеющие равные эксцентриситеты, подобны.*

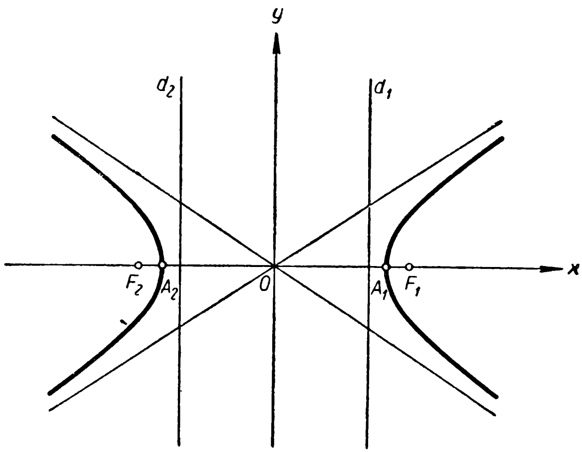
Если M — произвольная точка эллипса, то отрезки F_1M и F_2M называются фокальными радиусами точки M. Имеют место соотношения:

$$F_1M = a - \varepsilon x, \quad F_2M = a + \varepsilon x,$$

где x — абсцисса точки M.

Директрисами эллипса называются прямые, параллельные малой оси и отстоящие от нее на расстояние $\frac{a}{\varepsilon}$. На чертеже 19 директрисы обозначены через d_1 и d_2. В канонической системе координат они имеют уравнения: $x - \frac{a}{\varepsilon} = 0$, $x + \frac{a}{\varepsilon} = 0$. Директрисы обладают следующим замечательным свойством (директориальное свойство); *эллипс есть геометрическое место точек, отношение расстояний от каждой из которых до фокуса F_i к расстояниям до одноименной директрисы d_i постоянно и равно эксцентриситету.*

Исследование формы эллипса показывает, что эллипс — замкнутая кривая и всякая прямая плоскости пересекает эллипс не более чем в двух точках.



Черт. 20

Если прямая l пересекает эллипс в различных точках A и B, то точки прямой l, лежащие между A и B, называются **внутренними** точками эллипса, а точки прямой l, не лежащие между A и B, — **внешними**. Если M — внутренняя точка эллипса, то всякая прямая, проходящая через M, пересекает эллипс в двух точках.

Касательной к эллипсу называется предельное положение секущей. В каждой точке $M_0(x_0, y_0)$ эллипса, заданного уравнением (1), имеется касательная, определяемая уравнением

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1.$$

Гиперболой называется геометрическое место точек плоскости, для каждой из которых абсолютная величина разности расстояний до двух данных точек той же плоскости F_1 и F_2 есть величина постоянная, меньшая, чем расстояние между F_1 и F_2 (черт. 20). Точки F_1 и F_2 называются **фокусами** гиперболы, а длина отрезка F_1F_2 — **фокальным расстоянием**.

Обозначим через $2a$ абсолютную величину разности расстояний любой точки гиперболы до фокусов, а через $2c$ расстояние между фокусами; по определению $c > a > 0$, поэтому F_1 и F_2 не совпадают.

Если начало O прямоугольной декартовой системы координат поместить в середине отрезка F_1F_2, а ось Ox направить по прямой F_2F_1, то в выбранной системе координат гипербола имеет уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad (2)$$

где $b^2 = c^2 - a^2$. Это уравнение называется канон и ческим уравнением гиперболы, а выбранная система — канонической.

Гипербола пересекает каноническую ось Ox в двух точках A_1 и A_2, которые называются вершинами, а отрезок A_1A_2 — действительной осью (черт. 20). Начало O канонической системы координат называется центром гиперболы.

Если гипербола задана уравнением (2), то прямые, проходящие через начало координат и имеющие угловые коэффициенты $\frac{b}{a}$ и $-\frac{b}{a}$, называются асимптотами гиперболы. Точки гиперболы по мере удаления от оси Oy неограниченно приближаются к соответствующим асимптотам. Биссектрисы координатных углов, изображенные на чертеже 20, являются асимптотами кривой. В канонической системе координат асимптоты имеют уравнения:

$$y = \frac{b}{a}x, \quad y = -\frac{b}{a}x.$$

Эксцентриситетом гиперболы называется число $\varepsilon = \frac{c}{a}$. Очевидно, для гиперболы $\varepsilon > 1$. *Две гиперболы, имеющие равные эксцентриситеты, подобны.*

Если M — произвольная точка гиперболы, то отрезки F_1M и F_2M называются фокальными радиусами точки M. Имеют место соотношения:

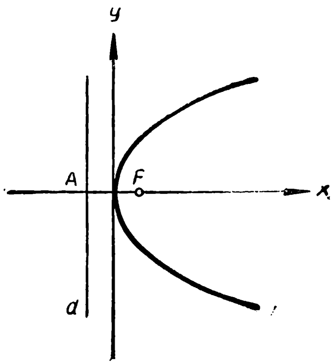
при $x > 0$ $F_1M = \varepsilon x - a$, $F_2M = \varepsilon x + a$,
при $x < 0$ $F_1M = a - \varepsilon x$, $F_2M = -\varepsilon x - a$,
где x — абсцисса точки M.

Директрисами гиперболы называются прямые, параллельные канонической оси Oy и отстоящие от этой оси на расстояние $\frac{a}{\varepsilon}$. На чертеже 20 директрисы обозначены через d_1 и d_2. В канонической системе координат они имеют уравнения:

$$x - \frac{a}{\varepsilon} = 0, \qquad x + \frac{a}{\varepsilon} = 0.$$

Директрисы гиперболы обладают следующим свойством (**директориальное свойство**). *Гипербола есть геометрическое место точек, отношение расстояний от каждой из которых до фокуса F_i к соответствующим расстояниям до одноименной директрисы d_i постоянно и равно эксцентриситету.*

В каждой точке M_0 (x_0, y_0) гиперболы, заданной уравнением (2), имеется касательная, определяемая уравнением:



Черт. 21

$$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1.$$

Параболой называется геометрическое место точек плоскости, для каждой из которых расстояние до данной точки F равно расстоянию до данной прямой d, не проходящей через данную точку (черт. 21). Точка F называется **фокусом**, а прямая d — **директрисой**. Расстояние от фокуса до директрисы называется **фокальным параметром** параболы и обозначается через p.

Пусть A — основание перпендикуляра, опущенного из точки F на прямую d. Если начало O прямоугольной декартовой системы поместить в середине отрезка $AF = p$, а ось Ox направить по направленной прямой AF, то в выбранной системе координат парабола имеет уравнение

$$y^2 = 2px. \qquad (3)$$

Уравнение (3) называется **каноническим уравнением параболы**, а выбранная система — **канонической**.

Интересно отметить, что *любые две параболы подобны.*

В каждой точке M_0 (x_0, y_0) параболы, заданной уравнением (3), имеется касательная, определяемая уравнением

$$y\, y_0 = p\,(x + x_0).$$

Пусть на плоскости даны прямая l и точка F, не лежащая на l. Геометрическое место точек, отношение расстояний от каждой из которых до точки F к соответствующим расстояниям до прямой l равно постоянному числу ε, есть эллипс, если $\varepsilon < 1$, и гипербола, если $\varepsilon > 1$. Данная точка F и прямая l являются односторонними фокусом и директрисой кривой.

Директориальные свойства эллипса и гиперболы, определение параболы, а также сформулированное предложение позволяют дать единое определение эллипса, гиперболы и параболы как геометрических мест точек, отношение расстояний от каждой из которых до данной точки F к соответствующим расстояниям до данной прямой l есть величина постоянная. На этом определении основан вывод уравнения этих кривых в полярных координатах.

Если поместить полюс O в фокусе кривой, а за полярную ось взять ось симметрии кривой, то уравнение кривой принимает вид:

$$\rho = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos \varphi}.$$

Здесь ε — эксцентриситет, а p — параметр кривой, т. е. половина хорды, проходящей через фокус и перпендикулярной оси. При $\varepsilon < 1$ получаем уравнение эллипса, при $\varepsilon = 1$ — параболы, а при $\varepsilon > 1$ — одной ветви гиперболы. Если ρ и φ — обобщенные полярные координаты, то при $\varepsilon > 1$ получаем обе ветви гиперболы. Для эллипса и гиперболы $p = \frac{b^2}{a}$.

§ 18. Эллипс

337. Найти уравнение геометрического места точек, для каждой из которых сумма расстояний от двух точек $F_1(+4, 0)$ и $F_2(-4, 0)$ равна 10.

338. Длина большой полуоси эллипса равна 6, эксцентриситет $\varepsilon = \frac{1}{2}$, а расстояние точки M эллипса до фокуса F_1 равно 7. Вычислить расстояние точки M до фокуса F_2 и координаты точки M. Написать каноническое уравнение эллипса.

339. Составить каноническое уравнение эллипса, если: а) $a = 10$, $b = 6$; б) $a + b = 9$, $c = 3$; в) $a = 6$, $c = 4$.

340. Найти длины полуосей и координаты фокусов эллипсов:

а) $4x^2 + 9y^2 - 36 = 0$; в) $x^2 + 9y^2 = 9$;
б) $4x^2 + 144y^2 - 576 = 0$; г) $9x^2 + 25y^2 = 1$.

Взяв на плоскости прямоугольную декартову систему, построить эти эллипсы.

341. Найти точки, принадлежащие эллипсу $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$, абсциссы которых равны: а) 2; б) 3; в) 1.

342. На эллипсе $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{4} = 1$ дана точка (3, 1). Найти координаты точек, симметричных с данной относительно начала координат и координатных осей, и убедиться в том, что эти точки принадлежат эллипсу.

343. Через фокус F_1 проведена хорда эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, параллельная канонической оси Oy. Определить длину этой хорды.

344. Хорда, проведенная через фокус F_1 параллельно оси Oy, пересекает эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ в точках M_1 и M_2. Определить расстояние от точек M_1 и M_2 до фокуса F_2.

345. Найти координаты точек M, принадлежащих эллипсу $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ и удовлетворяющих условию $2MF_1 = MF_2$.

346. Найти координаты точек M, принадлежащих эллипсу $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ и равноудаленных от фокусов.

347. Составить каноническое уравнение эллипса, если:

а) вершины эллипса имеют координаты $A_1(6, 0)$, $A_2(-6, 0)$, $B_1(0, 3)$, $B_2(0, -3)$;

б) фокальное расстояние $2c = 10$, а малая полуось $b = 5$;

в) эксцентриситет $\varepsilon = \frac{\sqrt{3}}{3}$, большая полуось $a=3$;

г) эксцентриситет $\varepsilon = \sqrt{\frac{3}{5}}$, а малая полуось $в = 2$;

д) расстояние между фокусами равно 8, а эксцентриситет $\varepsilon = \frac{1}{2}$.

348. Составить уравнение эллипса в канонической системе координат, если:

а) эллипс проходит через точки $M_1\left(2, \frac{\sqrt{5}}{3}\right)$ и $M_2(-3, 0)$;

б) эллипс проходит через точки $M_1(1, 3)$, $M_2(4, 1)$;

в) эллипс проходит через точку $M\left(-3, \frac{7}{4}\right)$ и расстояние между фокусами $2c = 6$;

г) эллипс проходит через точку $M\left(-2, \frac{11}{\sqrt{15}}\right)$ и имеет эксцентриситет $\varepsilon = \frac{2}{\sqrt{15}}$.

349. Написать уравнение директрис эллипса $\frac{x^2}{45} + \frac{y^2}{36} = 1$ и найти расстояние между ними.

350. Составить уравнение эллипса, если:

а) расстояние между директрисами равно 12, а большая ось равна $2\sqrt{3}$;

б) расстояние между директрисами равно $\frac{72}{11}\sqrt{11}$, а между фокусами $2\sqrt{11}$;

в) расстояние между директрисами равно $4\sqrt{15}$, а эксцентриситет $\varepsilon = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

г) прямые $x = \pm\frac{8}{\sqrt{3}}$ служат директрисами эллипса, а малая полуось равна 2.

351. Доказать, что для всех точек плоскости, лежащих внутри эллипса, заданного каноническим уравнением $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, имеет место неравенство $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1$, а для всех точек, лежащих вне эллипса, — неравенство $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} > 1$.

352. Дан эллипс $\frac{x^2}{15} + \frac{y^2}{9} = 1$ в канонической системе координат. Определить, какие из точек $M_1(3, 5)$, $M_2(-1, 2)$, $M_3(0, 3)$, $M_4(2, 2)$, $M_5(-3, 1)$, $M_6(1, 3)$, $M_7(\sqrt{5}, 4)$, $M_8\left(1, \sqrt{\frac{42}{5}}\right)$, $M_9(5, 2)$, $M_{10}(1, 1)$: а) принадлежат эллипсу; б) лежат внутри эллипса; в) лежат вне эллипса.

353. Взяв на плоскости прямоугольную декартову систему координат, изобразить области, определяемые следующими системами неравенств:

а) $\begin{cases} 9x^2 + 25y^2 - 225 < 0, \\ 3x + 5y - 15 < 0, \\ y + 2 > 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 + 4y^2 - 16 > 0, \\ x + 2y - 8 < 0, \\ x + y - 2 > 0. \end{cases}$

354. Эксцентриситет эллипса $\varepsilon = \frac{1}{3}$, расстояние от точки M до директрисы равно 12. Вычислить расстояние от точки M до соответствующего фокуса.

355. Дан эллипс $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1$. Найти фокальные радиусы точек $M_1 (3, -\sqrt{15})$ и $M_2 (-2, \frac{4}{3}\sqrt{10})$, принадлежащих данному эллипсу.

356. Пусть ε — эксцентриситет эллипса, а m — расстояние от фокуса до одноименной директрисы. Выразить a, b и c через ε и m.

357. Даны точка F, прямая l, не проходящая через эту точку, и число $\varepsilon < 1$. Доказать, что существует один и только один эллипс, для которого F и l являются односторонними фокусом и директрисой, а ε — эксцентриситетом.

358. Дан эллипс $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$. Вычислить расстояния от концов большой оси до одной из директрис.

359. Пусть d — прямая, проходящая через центр данной окружности. Доказать, что при равномерном сжатии[1] к прямой d данная окружность преобразуется в эллипс.

360. Пусть d — прямая, содержащая большую ось эллипса. Доказать, что при равномерном сжатии к прямой d данный эллипс преобразуется в новый эллипс. Выразить эксцентриситет ε' образа данного эллипса через ε исходного эллипса и коэффициент сжатия k и доказать, что $\varepsilon' > \varepsilon$.

361. Через точку $C (10, -8)$ провести касательную к эллипсу $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

362. Составить уравнение прямой, касающейся эллипса $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{5} = 1$ в точке $(\sqrt{5}, 2)$.

---

[1] Равномерным сжатием плоскости к прямой l называется преобразование точек плоскости, при котором точка M переходит в точку M' такую, что $\overline{HM'} = k \cdot \overline{HM}$, где $0 < k < 1$ и H — основание перпендикуляра, опущенного из M на прямую l.

363. Найти те касательные к эллипсу $\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{5}=1$, которые параллельны прямой $x+y-4=0$.

364. Через точку $P(1, -1)$ провести секущую к эллипсу $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ таким образом, чтобы точка P служила серединой полученной при этом хорды.

365. Доказать, что произведение расстояний от фокусов до любой касательной к эллипсу равно квадрату малой оси.

366. Доказать, что отрезок касательной к эллипсу в любой точке, заключенный между касательными, проведенными в вершинах, лежащих на большой оси, виден из фокусов под прямым углом.

367. Доказать оптическое свойство эллипса: всякая касательная к эллипсу образует равные углы с фокальными радиусами точки прикосновения.

368. Составить уравнение геометрического места точек, из которых эллипс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ виден под прямым углом.

369. Вычислить длины полуосей и расстояние между фокусами эллипса, заданного в полярной системе координат уравнением $\rho=\frac{3\sqrt{2}}{2-\cos\varphi}$. Предполагается, что за полюс принят один из фокусов F_1 эллипса, а за полярную ось — луч F_1F_2, где F_2 — другой фокус эллипса.

370. Написать канонические уравнения эллипсов, которые заданы полярными уравнениями:

$$\text{а)}\ \rho=\frac{3}{4-\sqrt{13}\cos\varphi};\qquad \text{б)}\ \rho=\frac{1}{2-\sqrt{3}\cos\varphi}.$$

371. Даны эллипсы: а) $\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{10}=1$; б) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$. Написать уравнения этих эллипсов в полярной системе координат, если полюс полярной системы находится в одном из фокусов эллипса, а полярная ось направлена в сторону второго фокуса.

§ 19. Гипербола

372. Написать уравнение геометрического места точек, для каждой из которых модуль разности расстояний от точек $F_1(4, 0)$ и $F_2(-4, 0)$ равен 6.

373. Найти длины полуосей и координаты фокусов гипербол:

а) $9x^2 - 4y^2 - 36 = 0$; в) $x^2 - y^2 - 5 = 0$;
б) $25x^2 - 16y^2 - 1 = 0$; г) $10x^2 - 2y^2 - 10 = 0$.

Выбрав на плоскости прямоугольную декартову систему координат, построить эти гиперболы.

374. Найти площадь S прямоугольника, вершины которого лежат на гиперболе $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, две стороны которого проходят через фокусы параллельно оси Oy. Найти S для гиперболы $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{10} = 1$.

375. Составить каноническое уравнение гиперболы:

а) расстояние между вершинами равно 8, а расстояние между фокусами равно 10;

б) вещественная полуось равна 3 и гипербола проходит через точку $(6,\ 2\sqrt{3})$;

в) расстояние между директрисами равно $\frac{8}{3}$ и эксцентриситет $\varepsilon = \frac{3}{2}$.

376. Определить полуоси, координаты фокусов, эксцентриситет, уравнения асимптот и уравнения директрис следующих гипербол: а) $4x^2 - 9y^2 = 36$; б) $16x^2 - 9y^2 = 144$.

377. Составить каноническое уравнение гиперболы, если:

а) гипербола проходит через точки $(4,\ 0)$ и $(4\sqrt{17},\ 4)$;

б) гипербола проходит через точку $(-5,\ 3)$ и имеет эксцентриситет $\varepsilon = \sqrt{2}$;

в) гипербола имеет асимптоты $4y \pm 3x = 0$ и директрисы $5x \pm 16 = 0$;

г) гипербола является равнобочной и проходит через точку $(\sqrt{2},\ 1)$.

378. Составить каноническое уравнение гиперболы, если:

а) угол между асимптотами равен 60° и гипербола проходит через точку $M_1\,(4\sqrt{3},\ 2)$;

б) угол между асимптотами равен 60° и гипербола проходит через точку $M_2\,(6,\ 3)$.

379. Составить уравнение гиперболы, имеющей общие фокусы с эллипсом $\frac{x^2}{35} + \frac{y^2}{10} = 1$ и проходящей через точку $M\,(4\sqrt{2},\ 3)$.

380. Для равнобочной гиперболы $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{9}=1$ написать уравнение софокусной с ней гиперболы, проходящей через точку $M(4, \sqrt{2})$.

381. Дана гипербола $\frac{x^2}{24}-\frac{y^2}{12}=1$. Написать уравнение сопряженной гиперболы. Найти эксцентриситеты, директрисы и асимптоты данной и сопряженной гипербол.

382. По данному эксцентриситету в каждом из следующих случаев определить угол между асимптотами гиперболы: а) $\varepsilon=\sqrt{2}$; б) $\varepsilon=2$; в) $\varepsilon=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

383. Точка M называется внутренней точкой гиперболы, если любая секущая, проходящая через эту точку и не параллельная асимптотам, пересекает гиперболу в двух различных точках. Внешней точкой гиперболы называется точка, не лежащая на гиперболе и не являющаяся внутренней. Доказать, что точка $M(x, y)$ является внутренней точкой гиперболы в том и только в том случае, если $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1>0$; точка $N(x, y)$ является внешней точкой гиперболы в том и только в том случае, если $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1<0$.

384. Взяв на плоскости прямоугольную декартову систему координат, построить области, определяемые следующими системами неравенств:

а) $\begin{cases} x^2-4y^2-4>0, \\ 4x+3y-12<0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 9x^2-16y^2+144>0, \\ 2x-y-6<0, \\ 3x+y+12>0. \end{cases}$

385. Провести касательную к гиперболе $\frac{x^2}{20}-\frac{y^2}{4}=1$ в точке $(5, 1)$.

386. Найти необходимое и достаточное условие касания данной прямой $y=kx+x_0$ с гиперболой $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, если данная прямая не параллельна асимптотам гиперболы.

387. Найти необходимое и достаточное условие касания прямой $Ax+By+C=0$ с гиперболой $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, если данная прямая не параллельна асимптотам гиперболы.

388. Провести касательные к гиперболе $\frac{x^2}{12} - y^2 = 1$, составляющие с осью Ox углы, равные $\pm 30°$. Для каждой из касательных найти точку касания.

389. Доказать, что касательные в вершинах гиперболы, заданной каноническим уравнением, параллельны оси Oy.

390. Дана гипербола своим каноническим уравнением $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Доказать, что если угловой коэффициент прямой удовлетворяет неравенствам $-\frac{b}{a} < k < \frac{b}{a}$, то прямая не может касаться гиперболы.

391. Написать каноническое уравнение гиперболы, проходящей через точку $M(4\sqrt{2},\ 2)$ и касающейся прямой $\sqrt{2}x - 2y - 4 = 0$.

392. Найти геометрическое место точек, из которых гипербола $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ видна под прямым углом.

393. Доказать, что произведение расстояний от фокусов до любой касательной к гиперболе есть величина постоянная.

394. Доказать, что отрезок асимптоты, заключенный между центром гиперболы и директрисой, равен действительной полуоси. Используя это свойство, построить директрисы следующих гипербол:

а) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$; б) $\frac{x^2}{16} - y^2 = 1$; в) $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{4} = 1$.

395. Доказать, что директрисы гиперболы проходят через основания перпендикуляров, опущенных из соответствующих фокусов на асимптоты. Выразить расстояние d от фокусов гиперболы до асимптот через полуоси гиперболы.

396. Найти геометрическое место точек пересечения перпендикуляров, опущенных из фокусов гиперболы на касательные, с прямыми, соединяющими центр с соответствующими точками соприкосновения.

397. Доказать, что отрезок любой касательной к гиперболе, заключенный между асимптотами, делится в точке соприкосновения пополам.

398. Доказать оптическое свойство гиперболы: всякая касательная к гиперболе составляет равные углы с фокальными радиусами точки касания.

399. Доказать, что площадь треугольника, образованного асимптотами гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ и произвольной касательной к гиперболе, есть величина постоянная.

§ 20. Парабола

400. Определить координаты фокуса F и составить уравнение директрисы для каждой из следующих парабол:

а) $y^2 = 6x$; б) $x^2 = -4y$;
в) $y^2 = -2x$; г) $x^2 = 3y$;
д) $2x^2 - 3y = 0$; е) $3y^2 + 16x = 0$.

Взяв на плоскости прямоугольную декартову систему координат, построить данные параболы, а также их фокусы и директрисы.

401. Составить каноническое уравнение параболы в каждом из следующих случаев:

а) расстояние от фокуса, лежащего на оси Ox, до вершины равно 4;

б) расстояние от фокуса, расположенного на оси Oy, до директрисы равно 6;

в) парабола симметрична относительно оси абсцисс и проходит через точку $M(1, 2)$;

г) парабола симметрична относительно оси ординат и проходит через точку $M(5, 1)$.

402. Составить каноническое уравнение параболы в каждом из следующих случаев:

а) фокус имеет координаты $(3, 0)$;
б) фокус имеет координаты $(0, 5)$;
в) директриса имеет уравнение $x + 15 = 0$;
г) директриса имеет уравнение $y + 12 = 0$.

403. Вычислить фокальный радиус точки M параболы $y^2 = 8x$, если ее абсцисса равна 8.

404. На параболе $x^2 = -12y$ найти точку, фокальный радиус которой равен 9.

405. Под острым углом к горизонту брошен камень, который, двигаясь по параболе, упал на расстоянии 24 *м* от начального положения. Определить параметр траектории, зная, что наибольшая высота, достигнутая камнем, равна 6 *м*.

406. Определить площадь треугольника, у которого одна вершина принадлежит директрисе параболы $y^2 = 2px$, а две другие служат концами хорды, проходящей через фокус и перпендикулярной к оси Ox.

407. Вычислить длину стороны правильного треугольника ABC, вписанного в параболу с параметром p, в предположении, что точка A совпадает с вершиной параболы.

408. Найти длины сторон треугольника, вписанного в параболу с параметром p, если одна вершина совпадает с вершиной параболы, а ортоцентр — с фокусом.

409. В каждом из следующих случаев составить каноническое уравнение параболы, заданной в полярной системе координат уравнением:

$$\text{а) } \rho = \frac{8}{2 - 2\cos\varphi}; \quad \text{б) } \rho = \frac{7}{1 - \cos\varphi}.$$

410. Написать уравнения парабол: а) $y^2 = 2x$; б) $y^2 = 10x$ в полярной системе координат, если полюс совпадает с фокусом параболы, а полярная ось — с осью Ox.

411. Через точку $P(3,1)$ параболы $y^2 = 4x$ провести хорду, делящуюся точкой P пополам.

412. Найти геометрическое место середин хорд параболы $y^2 = 2px$, имеющих угловой коэффициент $k \neq 0$.

413. Доказать предложение: если прямая $y = kx + x_0$ не параллельна оси Ox, то, для того чтобы она была касательной к параболе $y^2 = 2px$, необходимо и достаточно, чтобы $p - 2kx_0 = 0$.

414. Доказать предложение: если прямая $Ax + By + C = 0$ не параллельна оси Ox, то, для того чтобы она была касательной к параболе $y^2 = 2px$, необходимо и достаточно, чтобы $B^2p - 2AC = 0$.

415. Составить уравнение касательной к параболе $y^2 = 8x$ в точке $(2, -4)$.

416. Написать уравнение прямой, имеющей угловой коэффициент $k \neq 0$ и касающейся параболы $y^2 = 2px$.

417. Написать уравнения прямых, имеющих угловые коэффициенты: а) $k_1 = \frac{1}{2}$; б) $k_2 = -3$; в) $k_3 = 1$ и касающихся параболы $y^2 = 5x$.

418. Точка M называется внутренней точкой параболы, если любая прямая, проходящая через точку M, не параллельная оси параболы, пересекает параболу в двух точках. Доказать, что точка $M(x, y)$ является внутренней точкой параболы $y^2 = 2px$ тогда и только тогда, когда $y^2 - 2px < 0$.

419. Взяв на плоскости прямоугольную декартову систему координат, построить области, определяемые следующими системами неравенств:

а) $\begin{cases} y^2 - 10x < 0, \\ 5x - 3y - 15 < 0, \\ y - 2 < 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 + 8y < 0, \\ 2x + 3y + 6 < 0, \\ x + 2 > 0. \end{cases}$

420. Найти кратчайшее расстояние от точек параболы $y^2 = 12x$ до прямой $x - y + 7 = 0$.

421. Найти геометрическое место оснований перпендикуляров, опущенных из фокуса параболы на ее касательные.

422. Найти геометрическое место точек, из которых парабола $y^2 = 2px$ видна под прямым углом.

423. Если из любой точки директрисы проведены к параболе две касательные, то прямая, соединяющая точки касания, проходит через фокус параболы. Доказать.

424. Доказать оптическое свойство параболы: всякая касательная к параболе составляет равные углы с фокальным радиусом точки и с лучом, проходящим через точку касания и сонаправленным с осью.

425. Если три прямые: l_1, l_2 и l_3, попарно пересекающиеся в точках A_1, A_2 и A_3, касаются параболы, то ортоцентр[1] треугольника $A_1A_2A_3$ лежит на директрисе данной параболы.

426. Если AB — хорда конического сечения, проходящая через фокус F, то число $\dfrac{FA \cdot FB}{AB}$ не зависит от выбора хорды. Доказать.

427. Доказать, что произведение длин перпендикуляров, опущенных из концов любой фокальной хорды на ось параболы, имеет постоянную величину.

428. Прямой угол вращается около своей вершины, совпадающей с вершиной параболы. Доказать, что при этом движении прямая, соединяющая точки пересечения сторон угла с параболой, тоже вращается около некоторой точки, лежащей на оси параболы.

---

[1] Т. е. точка пересечения высот.

§ 21. Некоторые геометрические места точек, приводящие к эллипсу, гиперболе и параболе

429. Отрезок постоянной длины l скользит своими концами по двум взаимно перпендикулярным прямым. На отрезке или на его продолжении взята точка M, которая делит отрезок в отношении λ. Найти траекторию, которую описывает точка M.

430. Через центр O двух концентрических окружностей проведены две взаимно перпендикулярные прямые l и m. Луч p, исходящий из точки O, пересекает окружности в точках A и B. Через точку A проведена прямая l', параллельная прямой l, а через точку B — прямая m', параллельная прямой m. Найти геометрическое место точек пересечения прямых l' и m'.

431. Найти геометрическое место середин хорд эллипса, проведенных из конца его малой оси.

432. Через одну из вершин гиперболы проведены всевозможные хорды. Найти геометрическое место их середин.

433. Прямая a перемещается так, что треугольник, образованный ею с двумя взаимно перпендикулярными прямыми l и m, сохраняет постоянную площадь σ. Найти геометрическое место точек, делящих в данном отношении λ отрезок, отсекаемый на прямой a, прямыми l и m.

434. Найти геометрическое место точек, для каждой из которых произведение расстояний до двух пересекающихся прямых есть величина постоянная.

435. Найти геометрическое место центров окружностей, отсекающих от двух взаимно перпендикулярных прямых отрезки, длины которых равны $2a$ и $2b$.

436. Два луча, исходящие соответственно из неподвижных точек A и B и пересекающиеся в точке M, вращаются так, что абсолютная величина разности углов при вершинах A и B в треугольнике AMB равна $\frac{\pi}{2}$. Найти геометрическое место точек M.

437. Найти геометрическое место центров окружностей, проходящих через данную точку A и касающихся данной прямой l.

438. Найти геометрическое место центров окружностей, которые касаются окружности радиуса r и проходят через точку A, лежащую внутри данной окружности.

439. Найти геометрическое место центров окружностей, которые касаются окружности радиуса r и проходят через точку A, лежащую вне данной окружности.

440. Найти геометрическое место точек M, для каждой из которых разность расстояний до данной точки A и до данной прямой l равна a, где a — постоянное положительное число.

441. Найти геометрическое место точек M, для каждой из которых сумма расстояний до данной точки A и до данной прямой l равна a. Здесь a—постоянное положительное число.

442. Дана прямая l и окружность Ω, которая касается прямой l в точке A. Найти геометрическое место центров окружностей, касающихся прямой l и окружности Ω.

443. Дана прямая l и окружность Ω, которая не касается прямой l. Найти геометрическое место центров окружностей, касающихся прямой l и окружности Ω.

444. Найти геометрическое место центров окружностей, касающихся двух данных окружностей, из которых одна расположена внутри другой.

445. Найти геометрическое место центров окружностей, касающихся двух данных окружностей, из которых каждая расположена вне другой.

ГЛАВА VI

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СИСТЕМЫ КООРДИНАТ НА ПЛОСКОСТИ

Пусть Oe_1e_2 и $O'e_1'\,e_2'$ — две аффинные системы координат на плоскости, а M — произвольная точка. Если точка O' и векторы $e_1'e_2'$ в системе Oe_1e_2 имеют координаты

$$e_1'\{\alpha_1,\ \beta_1\},\ e_2'\{\alpha_2,\ \beta_2\},\ O'(x_0,\ y_0),$$

то координаты x, y точки M в системе Oe_1e_2 выражаются через координаты x', y' той же точки в системе $O'e_1'e_2'$ так:

$$\begin{aligned} x &= \alpha_1x'+\alpha_2y'+x_0, \\ y &= \beta_1x'+\beta_2y'+y_0. \end{aligned} \qquad (1)$$

Здесь $\begin{vmatrix}\alpha_1\alpha_2\\ \beta_1\beta_2\end{vmatrix} \neq 0$, поэтому x', y' однозначно выражаются через x, y.

Соотношения (1) называются **формулами преобразования аффинных координат** точек.

В частности, если $e_1' = e_1$ и $e_2' = e_2$, то из (1) получим:

$$\begin{aligned} x &= x' + x_0, \\ y &= y' + y_0. \end{aligned} \tag{2}$$

Эти соотношения называются формулами преобразования при переносе начала координат.

Если O' совпадает с O, то мы приходим к другому частному случаю — аффинному повороту системы координат:

$$\begin{aligned} x &= \alpha_1 x' + \alpha_2 y', \\ y &= \beta_1 x' + \beta_2 y'. \end{aligned} \tag{3}$$

Пусть Oij и $O'i'j'$—две прямоугольные декартовы системы, $O'(x_0, y_0)_{Oij}$ и $\varphi = \angle(i, i')$.

Если данные системы имеют одну и ту же ориентацию, то

$$\begin{aligned} x &= \cos\varphi\, x' - \sin\varphi\, y' + x'_0, \\ y &= \sin\varphi\, x' + \cos\varphi\, y' + y_0, \end{aligned} \tag{4}$$

а если различные ориентации, то

$$\begin{aligned} x &= \cos\varphi\, x' + \sin\varphi\, y' + x_0, \\ y &= \sin\varphi\, x' - \cos\varphi\, y' + y_0. \end{aligned} \tag{5}$$

В частном случае переноса начала прямоугольной декартовой системы формулы преобразования имеют вид (2), а в случае поворота

$$\begin{aligned} x &= \cos\varphi\, x' \mp \sin\varphi\, y', \\ y &= \sin\varphi\, x' \pm \cos\varphi\, y'. \end{aligned} \tag{6}$$

При решении задач часто пользуются также обратными предложениями. Если даны система координат Oe_1e_2 и система уравнений (1), коэффициенты которых удовлетворяют условию $\alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2 \neq 0$, то существует система координат $O'e_1'e_2'$, при переходе к которой соотношения (1) являются формулами преобразования координат точек. Новая система определяется так:

$$O'(x_0, y_0), \quad e_1'\{\alpha_1, \beta_1\}, \quad e_2'\{\alpha_2, \beta_2\}.$$

Если даны прямоугольная декартова система координат Oij и система линейных уравнений (1), коэффициенты которых образуют ортогональную матрицу, то существует прямоугольная декартова система $O'i'j'$, при переходе к которой соотношения (1) являются формулами преобразования точек. Новая система координат определяется так:

$$O'(x_0,\ y_0),\quad i'\{\alpha_1,\ \beta_1\},\quad j'\{\alpha_2,\ \beta_2\}.$$

Матрица $\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix}$ называется ортогональной, если

$$\alpha_1^2+\beta_1^2=1,\quad \alpha_2^2+\beta_2^2=1,\quad \alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2=0.$$

Пусть в некоторой аффинной системе координат $O\,e_1e_2$ дано геометрическое место точек G уравнением $F(x,y)=0$. Если на плоскости взять другую систему $O'\,e_1'\,e_2'$, то для получения уравнения того же геометрического места G в новой системе необходимо записать формулы преобразования и подставить в уравнение геометрического места выражения x, y через x', y' из (1):

$$F(\alpha_1x'+\alpha_2y'+x_0,\quad \beta_1x'+\beta_2y'+y_0)=0.$$

При подходящем выборе новой системы координат можно добиться упрощения уравнения геометрического места точек.

§ 22. Формулы преобразования координат точек

446. Написать формулы преобразования аффинной системы координат на плоскости в каждом из следующих случаев, если даны координаты нового начала и новых координатных векторов в старой системе:

а) $e_1'\{4,3\}$, $e_2'\{0,5\}$, $O'(3,-1)$;
б) $e_1'\{1,0\}$, $e_2'\{0,1\}$, $O'(2,5)$;
в) $e_1'\{4,-1\}$, $e_2'\{1,1\}$, $O'(0,0)$;
г) $e_1'\{1,0\}$, $e_2'\{1,2\}$, $O'(2,0)$;
д) $e_1'\{-1,0\}$, $e_2'\{0,1\}$, $O'(0,-5)$.

447. Пусть OAB — произвольный треугольник. Написать формулы преобразования координат точек при переходе от аффинной системы O, $e_1=\overline{OA}$, $e_2=\overline{OB}$ к аффинной системе:

а) $O'=A$, $e_1'=\overline{AB}$, $e_2'=\overline{AO}$;
б) $O'=O$, $e_1'=\overline{OB}$, $e_2'=\overline{OA}$;
в) $O'=C$, $e_1'=\overline{CA}$, $e_2'=\overline{CB}$.

448. В заданном треугольнике OAB проведены медианы AD и BE, пересекающиеся в точке O'. Написать формулы преобразования координат точек при переходе от аффинной системы координат O, $e_1 = \overline{OA}$, $e_2 = \overline{OB}$ к аффинной системе O', $e_1' = O'A$, $e_2' = O'B$.

449. В системе Oe_1e_2 точки A и B имеют координаты $(2, 1)$ и $\left(-\frac{3}{2}, 3\right)$. Существует ли такая новая система координат с началом в точке $(0, 1)$, в которой точки A и B имеют координаты $(1, 0)$ и $(0, 1)$?

450. В системе Oe_1e_2 точки A и B имеют координаты $(1, 1)$ и $(2, 2)$. Существует ли такая новая система координат, начало которой совпадает с началом старой системы и в которой точки A и B имеют координаты $(1, 1)$, $(-1, -2)$?

451. Найти точку, которая имеет одни и те же координаты в системах Oe_1e_2 и $O'e_1'e_2'$, где $O'(2, -3)$, $e_1'\{1, 3\}$, $e_2'\{-2, 1\}$.

452. Существуют ли точки на плоскости, отличные от O, координаты которых не меняются при аффинном повороте (см. (3), стр. 000))?

453. Написать формулы преобразования при переносе начала координат в каждом из следующих случаев:

а) $O'(5, \sqrt{2})$; б) $O'(-1, 0)$; в) $O'(-1, -3)$; г) $O'\left(5, \frac{1}{2}\right)$.

454. Написать формулы преобразования при аффинном повороте в каждом из следующих случаев.

а) e_1' $\{2, 1\}$, e_2' $\{-2, 1\}$; б) e_1' $\{1, 0\}$, e_2' $\{2, -\sqrt{2}\}$;
в) e_1' $\{0, 1\}$, e_2' $\{1, 0\}$; г) e_1' $\{0, -5\}$, e_2' $\{1, 1\}$.

455. Определить координаты новых координатных векторов и нового начала в старой системе, если формулы преобразования имеют вид:

а) $x = x' - 3y'$, $y = x' + y' + 1$; б) $x' = x - 3$, $y' = y + 4$; в) $x = x' - y' + 1$, $y = y'$;
г) $x' = x + y + 1$, $y' = x - 5$; д) $x = x'$, $y = y' + 1$; е) $x' = x - 2y$, $y' = x$.

456. Написать формулы преобразования прямоугольных декартовых систем координат в каждом из следующих случаев: а) $\boldsymbol{i}' = \frac{\sqrt{2}}{10}\boldsymbol{i} + \frac{7\sqrt{2}}{10}\boldsymbol{j}$, $O'(-3, \sqrt{2})$; системы $O\boldsymbol{ij}$ и $O'\boldsymbol{i}'\boldsymbol{j}'$ имеют одну и ту же ориентацию; б) $\measuredangle(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{i}') = 30°$, $O'(0, -2)$; системы $O\boldsymbol{ij}$ и $O'\boldsymbol{i}'\boldsymbol{j}'$ имеют различные ориентации; в) $\measuredangle(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{i}') = 45°$, $O'(0, 0)$; системы $O\boldsymbol{ij}$ и

$O'i'j'$ определяют одну и ту же ориентацию; г) $i' = \frac{1}{\sqrt{5}} i - \frac{2}{\sqrt{5}} j$, $O'(2, -12)$; системы Oij и $O'i'j'$ определяют различные ориентации.

457. Дан квадрат $ABCD$ со стороной, равной a. Пусть направленные прямые AB и AD являются осями координат в старой системе (AB — первая ось, AD — вторая). Написать формулы преобразования координат, если за новые координатные оси приняты направленные прямые:

а) первая ось AC, вторая ось BD;

б) первая ось CD, вторая ось CB;

в) первая ось AD, вторая ось DC.

458. Даны две различные прямоугольные декартовы системы координат, причем вторая система получена из первой переносом начала в точку $O'(5, \sqrt{11})$ без изменения направления осей. Найти расстояние d между точками A и B, если B имеет те же координаты во второй системе, что и A — в первой.

459. Даны формулы преобразования при переходе от прямоугольной декартовой системы Oij к системе $O'e_1'e_2'$. Выяснить, в каких из указанных ниже случаях новая система $O'e_1'e_2'$ является прямоугольной декартовой:

а) $\begin{cases} x = -\frac{\sqrt{3}}{2}x' + \frac{1}{2}y' + 1, \\ y = -\frac{1}{2}x' - \frac{\sqrt{3}}{2}y' + 5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x = \sqrt{3}x' + \frac{1}{2}y' - 1, \\ y = -\frac{1}{2}x' + y' - 2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x = -y' + 1, \\ y = x'; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x = -\frac{1}{2}x' + \frac{\sqrt{3}}{2}y' + 1, \\ y = \frac{\sqrt{3}}{2}x' + \frac{1}{2}y'. \end{cases}$

§ 23. Изменение уравнения геометрического места при преобразовании координат точек

460. В аффинной системе координат Oe_1e_2 даны прямые уравнениями: а) $x - 2y + 1 = 0$; б) $x + y = 0$; в) $y - 3 = 0$. Найти уравнения тех же прямых в системе $O'e_1'e_2'$, если $O'(1, 0)$, $e_1'\{1, -3\}$, $e_2'\{4, 4\}$.

461. Прямоугольную декартову систему координат Oij повернем вокруг начала координат на угол $+30°$. Найти уравнения:

а) новых координатных осей в старой системе;

б) старых координатных осей в новой системе.

462. Задано преобразование переноса начала прямоугольной декартовой системы координат Oij в точку $O'(-3, 5)$. Записать уравнения биссектрис координатных углов Oij в новой системе.

463. В системе Oij дано геометрическое место точек уравнением: $5x^2 + 8xy + 5y^2 - 9 = 0$. Найти уравнение того же геометрического места в системе, которая получается из данной поворотом на $+45°$.

464. В системе Oe_1e_2 дано геометрическое место точек уравнением: $4x^2 - y^2 - 4xy + 4x + 6y - 8 = 0$. Найти уравнение того же геометрического места в системе $O'e_1'e_2'$, если $O'\left(\frac{1}{2}, \quad 2\right)$, $e_1'\left\{\frac{1}{2}, \quad 0\right\}$, $e_2'\left\{\frac{1}{2}, \quad 1\right\}$.

465. В системе Oe_1e_2 дано геометрическое место точек уравнением: $9x^2 - 4xy + 6y^2 + 6x - 8y + 2 = 0$. Определить уравнение этого же геометрического места в аффинной системе координат $O'e_1'e_2'$, если $O'\left(-\frac{1}{5}, \frac{3}{5}\right)$, $e_1'\{1, 1\}$, $e_2'\{1, 0\}$.

466. В прямоугольной декартовой системе координат дана равнобочная гипербола $x^2 - y^2 = 1$. Определить уравнение этой гиперболы, если начало координат оставлено прежнее, а оси повернуты на $45°$ в отрицательном направлении.

467. В аффинной системе координат дано геометрическое место точек уравнением $2x^2 - y^2 + 5xy - 3x + 4y - 5 = 0$. Новую аффинную систему координат выбрать так, чтобы в уравнении кривой исчезли члены первой степени.

468. Показать, что надлежащим подбором нового начала координат можно добиться того, чтобы при параллельном перенесении системы координат в уравнении кривой $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 1 = 0$ исчезли члены первой степени.

469. Парабола дана своим каноническим уравнением. Можно ли выбрать новую аффинную систему координат так, чтобы в этой системе уравнение параболы не содержало членов первой степени?

470. Показать, что существует такая п р я м о у г о л ь н а я система координат Oe_1e_2 (где $e_1 \perp e_2$), в которой уравнение эллипса имеет вид: $x^2 + y^2 = 1$.

471. Показать, что существует такая прямоугольная система координат Oe_1e_2 (где $e_1 \perp e_2$), в которой уравнение гиперболы имеет вид: $x^2 - y^2 = 1$.

472. Аффинная система координат выбрана так, что ее оси совпадают с асимптотами гиперболы. Каково уравнение гиперболы в этой системе?

473. Доказать, что геометрическое место точек, координаты которых в некоторой аффинной системе координат $O\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2$ удовлетворяют уравнению $xy = 1$, есть гипербола.

474. В прямоугольной декартовой системе даны координаты двух фокусов $F_1(1, 3)$, $F_2(-1, 2)$ и точка $M(-1, 3)$ эллипса. Найти каноническое уравнение эллипса и каноническую систему координат. Пользуясь формулами преобразования координат, определить уравнение эллипса в исходной неканонической системе координат.

475. В прямоугольной декартовой системе координат даны координаты двух фокусов $F_1(2, 4)$, $F_2(0, 3)$ и точка $M(0, 4)$ гиперболы. Найти каноническое уравнение гиперболы и каноническую систему координат. Пользуясь формулами преобразования координат, определить уравнение гиперболы в исходной неканонической системе координат.

476. В прямоугольной декартовой системе координат даны фокус $F(1, -1)$, точка $M(2, 1)$ параболы и вектор $\boldsymbol{a}\{-1, 2\}$, определяющий направление оси параболы. Определить уравнение параболы в исходной системе координат.

477. Путем подбора новой системы координат определить геометрические места точек, заданные в прямоугольной декартовой системе уравнениями:

а) $2xy - x = 1$;
б) $6x^2 + 6y^2 + 8xy + 12 = 0$;
в) $x - 5xy = 0$;
г) $x^2 + 2y - 5 = 0$;
д) $x^2 - 2x + 1 = 0$.

ГЛАВА VII

ПРИВЕДЕНИЕ ОБЩЕГО УРАВНЕНИЯ КРИВОЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА К КАНОНИЧЕСКОМУ ВИДУ

К р и в о й в т о р о г о п о р я д к а называется геометрическое место точек плоскости, координаты которых в некоторой аффинной или прямоугольной системе координат удовлетворяют уравнению:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0, \qquad (1)$$

где коэффициенты a_{ij} являются действительными числами, причем хотя бы один из коэффициентов a_{11}, a_{12}, a_{22} не равен нулю. Коэффициенты a_{ij} зависят от выбора системы координат, хотя само определение кривой второго порядка не зависит от выбора системы.

Одной из основных задач теории кривых второго порядка является упрощение уравнения кривой второго порядка. Упрощение уравнения кривой второго порядка проводится в два этапа:

а) Упрощение уравнения кривой путем поворота системы координат.

Если кривая задана в прямоугольной декартовой системе уравнением (1), то всегда существует такая новая прямоугольная декартова система координат, полученная из исходной путем поворота, в которой кривая имеет уравнение, не содержащее произведение переменных. Направления осей этой системы называются главными направлениями кривой.

Если $a_{12} \neq 0$, то угловые коэффициенты k_1 и k_2 главных направлений определяются из следующих соотношений:

$$k_1 = \frac{s_1 - a_{11}}{a_{12}}, \quad k_2 = \frac{s_2 - a_{11}}{a_{12}}, \tag{2}$$

где s_1 и s_2 — корни следующего квадратного уравнения:

$$s^2 - (a_{11} + a_{22})\, s + (a_{11}a_{22} - a_{12}^2) = 0. \tag{3}$$

Это уравнение называется характеристическим уравнением кривой второго порядка.

Зная k_1 и k_2, можно написать формулы преобразования координат: $k_1 = \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $k_2 = \operatorname{tg}(90° + \alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$. Отсюда, определяя $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$, получаем формулы преобразования:

$$x = \cos\alpha \cdot x' - \sin\alpha \cdot y',$$
$$y = \sin\alpha \cdot x' + \cos\alpha \cdot y'.$$

Если систему координат повернуть так, чтобы новые оси имели главные направления, то уравнение кривой (1) в этой системе примет вид:

$$s_1 x'^2 + s_2 y'^2 + 2a'_{13}\, x' + 2a'_{23}\, y' + a_{33} = 0, \tag{4}$$

где s_1 и s_2 — корни характеристического уравнения (3), $a_{13}' = a_{13}\cos\alpha + a_{23}\sin\alpha$; $a_{23}' = -a_{13}\sin\alpha + a_{23}\cos\alpha$.

Если в исходном уравнении (1) $a_{13} = a_{23} = 0$, то из последних соотношений следует, что $a_{13}' = a_{23}' = 0$, поэтому уравнение (4) принимает более простой вид:

$$s_1 x'^2 + s_2 y'^2 + a_{33} = 0. \tag{5}$$

Пример. Упростить уравнение кривой

$$5x^2 + 8xy + 5y^2 - 9 = 0$$

путем поворота системы координат.

Решение. Составим характеристическое уравнение данной кривой и найдем его корни:

$$s^2 - 10\,s + 9 = 0, \quad s_1 = 1, \ s_2 = 9.$$

Относительно новой системы координат, единичные векторы которой имеют главные направления, данная кривая определяется уравнением типа (5):

$$x'^2 + 9y'^2 - 9 = 0.$$

Отсюда, разделив на 9, получаем каноническое уравнение эллипса:

$$\frac{x'^2}{9} + \frac{y'^2}{1} = 1.$$

Для того чтобы написать формулы преобразования системы координат, найдем угловые коэффициенты главных направлений по формулам (2):

$$k_1 = \frac{1-5}{4} = -1, \qquad k_2 = \frac{9-5}{4} = 1.$$

Таким образом,

$$k_1 = \operatorname{tg}\alpha_1 = -1, \qquad \alpha_1 = -45^\circ,$$
$$k_2 = \operatorname{tg}\alpha_2 = 1, \qquad \alpha_2 = 45^\circ.$$

Формулы преобразования будут иметь вид:

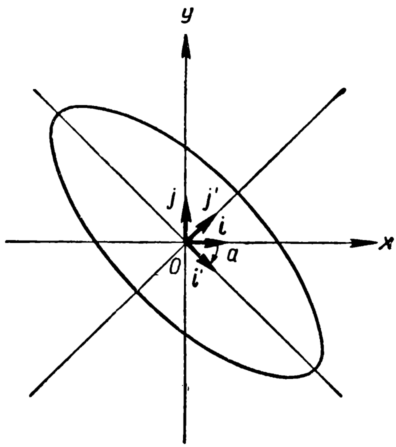
$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y',$$

$$y = -\frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y'.$$

На чертеже 22 изображен данный эллипс.

б) Упрощение уравнения кривой путем переноса начала координат.

Таким образом, путем поворота системы координат уравнение кривой можно привести к виду (4). Дальнейшее упрощение уравнения кривой проводится при помощи переноса начала координат. Путем надлежащего подбора нового начала уравнение (4) можно привести к одному из следующих видов:



Черт. 22

$$s_1\tilde{x}^2 + s_2\tilde{y}^2 + a'_{33} = 0, \qquad (6)$$

$$s_1\tilde{x}^2 + \tilde{a}_{23}\,\tilde{y} = 0, \qquad (7)$$

$$s_1\tilde{x}^2 + a'_{33} = 0. \qquad (8)$$

Здесь s_1 и s_2 ненулевые корни характеристического уравнения и $\tilde{a}_{23} \neq 0$.

Пример. Упростить уравнение кривой

$$2x^2 - 8x + 4y + 9 = 0$$

путем переноса начала координат.

Решение. Сгруппируем члены левой части данного уравнения относительно x и y следующим образом:

$$2(x^2 - 4x + 4) + 4\left(y + \frac{1}{4}\right) = 0,$$

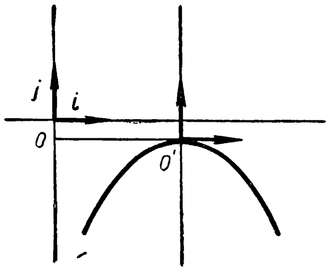
или

$$2\,(x - 2)^2 + 4\,\left(y + \frac{1}{4}\right) = 0.$$

Введем обозначения: $x' = x - 2$, $y' = y + \frac{1}{4}$.

Отсюда получаем формулы переноса начала координат в точку $O'\left(2, \ -\frac{1}{4}\right)$:

$$x = x' + 2, \qquad y = y' - \frac{1}{4}.$$



Черт. 23

Уравнение данной кривой в новой системе $O'x'y'$ имеет вид:

$$2x'^2 + 4y' = 0, \text{ или}$$
$$x'^2 = -2y'.$$

Получили каноническое уравнение параболы.

На чертеже 23 дано изображение кривой в старой системе координат.

Пользуясь соотношениями (6), (7) и (8), можно дать полную классификацию кривых второго порядка.

Если уравнение кривой можно привести к виду (6), то говорят, что она принадлежит первой группе, если к виду (7) — второй группе, а если к виду (8) — третьей группе.

Кривые первой группы: эллипс, гипербола, мнимый эллипс, пара действительных пересекающихся прямых и пара комплексных прямых, пересекающихся в действительной точке.

Кривые второй группы: парабола.

Кривые третьей группы: пара действительных параллельных прямых, пара невещественных параллельных прямых и пара слившихся прямых.

Всего существует девять типов кривых второго порядка.

Рациональными инвариантами многочлена, находящегося в левой части уравнения (1), называется такая рациональная функция от коэффициентов a_{ij}, которая не изменяет своей числовой величины при переходе от одной системы координат к другой. Можно показать, что величины

$$I_1 = a_{11} + a_{22}, \quad I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad I_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

являются инвариантами левой части уравнения (1) при переходе от одной прямоугольной декартовой системы координат к другой.

Можно показать также, что если кривая (1) приводится к виду (8), т. е. если она представляет собой пару параллельных или слившихся прямых, то величина

$$K = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

является инвариантом левой части уравнения (1).

При помощи инвариантов I_1, I_2, I_3 и K можно определить вид кривой, не приводя ее к каноническому виду, а также записать ее каноническое уравнение.

В следующей таблице даны характеристики всех девяти типов кривых второго порядка.

№ группы	Признак кривой	Приведенное уравнение	Каноническое уравнение	Название кривой
I	$I_2 > 0$, $I_1 I_3 < 0$	$s_1x^2+s_2y^2+\frac{I_3}{I_2}=0$	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	Эллипс
	$I_2 > 0$, $I_1 I_3 > 0$	»	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$	Мнимый эллипс
	$I_2 < 0$, $I_3 \neq 0$	»	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	Гипербола
	$I_2 < 0$, $I_3 = 0$	$s_1x^2+s_2y^2=0$	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$	Пара пересекающихся прямых
	$I_2 > 0$, $I_3 = 0$	»	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$	Пара комплексных пересекающихся прямых
II	$I_2 = 0$, $I_3 \neq 0$	$I_1x^2+2\sqrt{\frac{-I_3}{I_1}}y=0$	$x^2=2py$	Парабола
III	$I_2 = I_3 = 0$, $K < 0$	$I_1x^2+\frac{K}{I_1}=0$	$\frac{x^2}{a^2}-1=0$	Пара параллельных прямых
	$I_2=I_3=0$, $K > 0$	»	$\frac{x^2}{a^2}+1=0$	Пара комплексных параллельных прямых
	$I_2=I_3=K=0$	$x^2=0$	$x^2=0$	Пара слившихся прямых

§ 24. Упрощение уравнения кривой второго порядка

С помощью преобразования поворота прямоугольной декартовой системы координат привести к каноническому виду следующие уравнения кривых второго порядка. Написать формулы преобразования и изобразить данные кривые на чертеже.

478. $9x^2-6xy+y^2-\sqrt{10}x-3\sqrt{10}y=0.$
479. $23x^2+72xy+2y^2+25=0.$
480. $4x^2-4xy+y^2-15=0.$
481. $x^2-14xy+49y^2-50=0.$
482. $x^2+2\sqrt{3}xy+3y^2-2\sqrt{3}x+2y=0.$
483. $5x^2-6xy+5y^2+16=0.$
484. $34x^2+24xy+41y^2-25=0.$
485. $9x^2+24xy+16y^2-40x+30y=0.$
486. $2x^2+12xy-7y^2+20=0.$
487. $x^2+2xy+y^2=0.$
488. $-17x^2+2\sqrt{35}\,xy+17y^2=0.$
489. $49x^2-14xy+y^2-20\sqrt{2}x-140\sqrt{2}y=0.$
490. $3x^2-2\sqrt{3}\,xy+y^2+4=0.$

С помощью переноса начала прямоугольной декартовой системы координат привести к каноническому виду следующие уравнения кривых второго порядка. Написать формулы преобразования координат и изобразить данные кривые на чертеже.

491. $x^2+6y^2-6x+12y+13=0.$
492. $x^2+y^2-2x+4y+5=0.$
493. $x^2+y^2-2x+6y+9=0.$
494. $x^2-\frac{1}{4}y^2-x-\frac{3}{2}y-1=0.$
495. $y^2-2x-10=0.$
496. $3x^2-2y^2+6x+4y+1=0.$
497. $x^2-6x-4y+5=0.$
498. $x^2+2y^2-4x-12y+23=0.$
499. $x^2-10x+26=0.$
500. $4x^2+9y^2-8x-32=0.$
501. $x^2-4y^2-4x-8y-4=0.$
502. $x^2-2y^2+2\sqrt{3}x+20y-47=0.$
503. $2x^2+y^2+4y+4=0.$
504. $4x^2-16x+16-y=0.$
505. $x^2-y^2-20y-105=0.$

С помощью преобразования поворота прямоугольной декартовой системы координат и переноса начала привести к каноническому виду уравнения следующих кривых и написать формулы преобразования координат

506. $29x^2+144xy+71y^2-40x+30y-50=0$.
507. $40x^2+36xy+25y^2-8x-14y+1=0$.
508. $4x^2-4xy+y^2-2x-14y+7=0$.
509. $xy+2x+y+\frac{5}{2}=0$.
510. $9x^2-24xy+16y^2-20x+110y-50=0$.
511. $9x^2+16y^2-24xy+30x-40y-25=0$.
512. $\sqrt{3}x^2-\sqrt{3}\,y^2+2xy-2x-2\sqrt{3}y=0$.
513. $9x^2+6y^2+4xy+2x-4y-4=0$.
514. $9x^2-6xy+y^2-3\sqrt{10}x-9\sqrt{10}y-90=0$.
515. $25x^2+40y^2+36xy-34x-116y+89=0$.
516. $16x^2+9y^2-24xy+66y-88x+121=0$.
517. $9x^2+4y^2-12xy+39=0$.

§ 25. Определение вида кривой по инвариантам

Определить при помощи инвариантов вид следующих кривых и написать приведенные уравнения.

518. $9x^2-4xy+6y^2+6x-8y+2=0$.
519. $y^2-6y+4x+5=0$.
520. $12xy+5y^2-12x-22y+19=0$.
521. $x^2+10x+25=0$.
522. $x^2-2xy+y^2-2x+4y+12=0$.
523. $x^2-6xy+9y^2-3\sqrt{10}x+\sqrt{10}y=0$.
524. $5x^2+8xy+5y^2-9=0$.
525. $4x^2-4xy+y^2-15=0$.
526. $x^2+2y^2+4x+4=0$.
527. $2x^2-y^2+xy-2x+y=0$.

528. Доказать, что кривая второго порядка, заданная в общей аффинной системе координат уравнением $x^2+y^2=1$, есть эллипс.

529. Доказать, что кривая второго порядка, заданная в общей аффинной системе координат уравнением $x^2-y^2=1$, есть гипербола.

530. Доказать, что кривая второго порядка, заданная в общей аффинной системе координат уравнением $y^2=x$, есть парабола.

531. Доказать предложение: для того чтобы кривая, заданная в аффинной системе координат уравнением

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

распадалась на пару прямых, необходимо и достаточно, чтобы

$$I_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

532. Доказать предложение: для того чтобы кривая, заданная в аффинной системе координат уравнением (1), была гиперболой, необходимо и достаточно, чтобы $I_2 < 0$, $I_3 \neq 0$.

533. Доказать предложение: для того чтобы кривая, заданная в аффинной системе координат уравнением (1), была параболой, необходимо и достаточно, чтобы $I_2 = 0$, $I_3 \neq 0$.

ГЛАВА VIII

ИЗУЧЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ СВОЙСТВ КРИВЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА ПО ОБЩЕМУ УРАВНЕНИЮ

Пусть в аффинной системе координат дана кривая второго порядка уравнением

$$\varphi(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \quad (1)$$

и прямая параметрическими уравнениями

$$x = p_1 t + x_1, \ y = p_2 t + x_2. \quad (2)$$

Для нахождения параметров точек пересечения необходимо подставить значения x и y из (2) в соотношение (1). После элементарных преобразований получаем:

$$Pt^2 + 2Qt + R = 0, \quad (3)$$

где

$$P = \sum_{\alpha, \beta=1}^{2} a_{\alpha\beta} p_\alpha p_\beta, \quad Q = \sum_{\alpha, \beta=1}^{2} a_{\alpha\beta} p_\alpha x_\beta, \quad R = \Phi(x_1, x_2).$$

Прямые, для которых координаты направляющих векторов удовлетворяют условию $P = 0$, называются **прямыми асимптотического направления** по отношению к данной кривой, а направляющие векторы этих прямых — **векторами асимптотического направления** или **асимптотическими векторами**.

При $I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} < 0$ кривая имеет два различных асимптотических направления, при $I_2=0$ — одно асимптотическое направление и при $I_2>0$ — действительных асимптотических направлений не существует. Если $I_2 < 0$, то кривая называется гиперболического типа, если $I_2 = 0$ — параболического, а если $I_2 > 0$ — эллиптического.

Из таблицы на странице 93 следует, что:

а) гипербола, пара пересекающихся действительных прямых принадлежат гиперболическому типу;

б) парабола, пара параллельных действительных или комплексных прямых и пара слившихся прямых принадлежат параболическому типу;

в) действительный эллипс, мнимый эллипс и пара комплексных пересекающихся прямых принадлежат эллиптическому типу.

Число точек пересечения прямой (2) и кривой (1) определяется числом различных корней уравнения (3).

I. Если прямая не имеет асимптотического направления по отношению к кривой, то она пересекается с ней в двух точках:

а) действительных различных, если $Q^2 - PR > 0$;

б) комплексно сопряженных, если $Q^2 - PR < 0$;

в) совпадающих, если $Q^2 - PR = 0$. В этом случае говорят, что прямая касается кривой.

II. Если прямая имеет асимптотическое направление по отношению к кривой, то она либо пересекается с ней в одной точке ($P = 0$, $R \neq 0$), либо не имеет с ней ни одной общей точки ($P = Q = 0$, $R \neq 0$), либо принадлежит кривой ($P = Q = R = 0$).

Асимптотой кривой второго порядка называется всякая прямая, которая либо вовсе не пересекается с кривой, либо всеми точками принадлежит ей. Если $\boldsymbol{p}\,\{p_1, p_2\}$ имеет асимптотическое направление, то точки асимптот, параллельных $\boldsymbol{p}$, определяются уравнением

$$p_1 (a_{11}x + a_{12}y + a_{13}) + p_2 (a_{21}x + a_{22}y + a_{23}) = 0. \quad (4)$$

При этом возможны три случая:

а) хотя бы один из коэффициентов при x и y отличен от нуля. В этом случае существует единственная асимптота, параллельная $\boldsymbol{p}$ и определяемая уравнением (4);

б) коэффициенты при x и y равны нулю, а свободный член не равен нулю. Кривая не имеет асимптот, параллельных вектору $\boldsymbol{p}$;

в) коэффициенты при x, y и свободный член уравнения (4) равны нулю. В этом случае все прямые, параллельные $\boldsymbol{p}$, являются асимптотами.

Кривые эллиптического типа не имеют асимптот, кривые гиперболического типа имеют две асимптоты, соответствующие двум различным асимптотическим направлениям. Парабола не имеет асимптот, а другие кривые параболического типа имеют пучок параллельных асимптот.

Геометрическое место середин всех хорд кривой (1), параллельных вектору $\boldsymbol{p}$ $\{p_1, p_2\}$ неасимптотического направления, есть прямая, заданная уравнением

$$p_1 (a_{11}x + a_{12}y + a_{13}) + p_2 (a_{21}x + a_{22}y + a_{23}) = 0. \tag{5}$$

Эта прямая называется **диаметром** кривой, **соответствующим** или **сопряженным** вектору $\boldsymbol{p}$.

Точка C плоскости называется **центром** кривой второго порядка, если кривая симметрична относительно C. Для того чтобы точка C (x_0, y_0) была центром кривой (1), необходимо и достаточно, чтобы ее координаты удовлетворяли следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13} &= 0, \\ a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23} &= 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Кривые, имеющие единственный центр, называются **центральными**, а остальные кривые — **нецентральными**.

Кривые эллиптического и гиперболического типов являются центральными (I группа кривых, стр. 92—93), парабола не имеет ни одного центра (II группа кривых), а остальные кривые параболического типа имеют прямую центров (III группа кривых, стр. 92—93).

Совокупность всех диаметров кривых эллиптического типа образует пучок пересекающихся в точке C прямых, где C — центр кривой.

Совокупность всех диаметров и асимптот кривых гиперболического типа образует также пучок пересекающихся в точке C прямых, где C — центр кривой.

Совокупность всех диаметров параболы образует пучок параллельных прямых асимптотического направления, а остальные кривые параболического типа имеют единственный диаметр.

Если координаты двух ненулевых векторов $\boldsymbol{p}\{p_1, p_2\}$ и $\boldsymbol{q}\{q_1, q_2\}$ удовлетворяют условию

$$a_{11}p_1q_1 + a_{12}p_1q_2 + a_{21}p_2q_1 + a_{22}p_2q_2 = 0, \qquad (7)$$

то они называются сопряженными относительно кривой (1). Если $\boldsymbol{p}$ не имеет асимптотическое направление, то диаметр, сопряженный вектору $\boldsymbol{p}$, параллелен $\boldsymbol{q}$, и наоборот.

Два диаметра кривой второго порядка называются сопряженными, если каждый из них является геометрическим местом середин хорд, параллельных другому. Практически вопрос нахождения сопряженных диаметров сводится к определению векторов, сопряженных относительно кривой (1) и не имеющих асимптотических направлений.

Направление ненулевого вектора $\boldsymbol{p}$ называется главным относительно данной кривой, если любой вектор, перпендикулярный ему, сопряжен с ним. Если кривая задана в прямоугольной декартовой системе уравнением (1), то, для того чтобы вектор $\boldsymbol{p}\{p_1, p_2\}$ имел главное направление, необходимо и достаточно, чтобы

$$(a_{22} - a_{11})\, p_1p_2 + a_{12}\,(p_1^2 - p_2^2) = 0. \qquad (8)$$

Отсюда легко приходим к следующему выводу.

Каждая кривая второго порядка, отличная от окружности ($a_{12} = 0$, $a_{22} - a_{11} = 0$), имеет два и только два главных взаимно перпендикулярных направления. Для окружности каждое направление является главным.

Из соотношения (8) следует также, что оси координат имеют главные направления тогда и только тогда, когда $a_{12} = 0$.

Диаметр кривой второго порядка называется главным, если он перпендикулярен соответствующим хордам. Для определения главных диаметров можно воспользоваться следующей теоремой: *для того чтобы диаметр кривой второго порядка был главным, необходимо и достаточно, чтобы соответствующий вектор был вектором главного, но не асимптотического направления.*

§ 26. Пересечение с прямой; асимптотические направления и асимптоты

534. Найти точки пересечения кривой[1] $x^2 - 2xy - 3y^2 - 4x - 6y + 3 = 0$ с прямыми:

а) $x = t$, $y = 5t - 5$;
б) $x = 3t + 6$, $y = t + 2$.

535. Найти точки пересечения кривой второго порядка $x^2 - 2xy + y^2 - 4x + 4 = 0$

а) с прямой $x + y - 2 = 0$;
б) с осью Ox;
в) с осью Oy.

536. Найти точки пересечения кривой $2x^2 + xy - 8x - 2y + 8 = 0$ с прямыми:

а) $x - 2 = 0$;
б) $x - 1 = 0$.

537. Через точку (1, 0) провести касательную к кривой $3x^2 + 7xy + 5y^2 - 2x - 2y = 0$.

538. Через начало координат провести касательную к кривой $x^2 - 4xy + 4y^2 + 2x - 6y + 16 = 0$.

539. К кривой $x^2 - 6xy + 9y^2 - 12x + 4y + 20 = 0$ провести касательные, параллельные прямой $x - 2y + 7 = 0$.

540. Дана кривая второго порядка $x^2 - 6xy - 7y^2 + 2x - y + 1 = 0$. Выяснить, какие из векторов $\boldsymbol{a}\,\{1, 2\}$, $\boldsymbol{b}\,\{3, -4\}$, $\boldsymbol{c}\,\{7, 1\}$, $\boldsymbol{d}\,\{2, 0\}$, $\boldsymbol{e}\,\{-1, 1\}$ имеют асимптотическое направление относительно данной кривой.

541. Найти векторы асимптотического направления для следующих кривых второго порядка:

а) $4x^2 - 5xy + y^2 - 3x + 7 = 0$;
б) $x^2 - 6xy + 9y^2 - 12x + 14y - 7 = 0$;
в) $x^2 + 2xy + 5y^2 - 3x + 5 = 0$;
г) $x^2 - 2xy + 5x - y = 0$;
д) $y^2 + 5x - 3y - 1 = 0$;
е) $4x^2 - 3xy - y^2 - x - 2y + 1 = 0$.

---

[1] Во всех задачах этого параграфа система координат предполагается аффинной.

542. Написать уравнения асимптот следующих кривых второго порядка:

а) $2x^2 + 3xy + y^2 - 2x + y = 0$;
б) $2x^2 - 3xy - x + 3y + 4 = 0$;
в) $3x^2 + 10xy + 7y^2 + 4x + 2y + 1 = 0$;
г) $2x^2 + xy + y^2 + 11x - 4y + 5 = 0$;
д) $x^2 + 2xy + y^2 - x - y = 0$.

543. Назвать кривые второго порядка, имеющие:

а) два асимптотических направления и две асимптоты;

б) одно асимптотическое направление и бесчисленное множество асимптот;

в) одно асимптотическое направление и ни одной асимптоты.

544. Используя понятие асимптотических направлений, показать, что кривая $x^2 - x + y = 0$ не эллипс и не гипербола, а кривая $xy + x + 1 = 0$ не парабола и не эллипс.

545. Ответить на следующие вопросы:

а) При каком условии ось Ox имеет асимптотическое направление относительно данной кривой?

б) При каком условии ось Ox является асимптотой данной кривой?

в) При каком условии оси координат являются асимптотами кривой?

546. Написать уравнение гиперболы, проходящей через точку $(0, -5)$ и имеющей асимптоты:

$$x - 1 = 0, \qquad 2x - y + 1 = 0.$$

547. Написать уравнение кривой второго порядка, для которой оси координат являются асимптотами и которая:

а) проходит через начало координат;

б) проходит через точку $(1, 2)$.

548. Пользуясь инвариантами, показать, что каждая из следующих кривых распадается на пару прямых. Написать уравнения этих прямых:

а) $2x^2 + xy - y^2 + 5x - y + 2 = 0$;
б) $2x^2 + 2xy + 3x - 2y - 5 = 0$;
в) $x^2 - 4xy + 4y^2 + 2x - 4y - 3 = 0$;
г) $x^2 + 6xy + 9y^2 - 6x - 18y = 0$;
д) $4x^2 + 12xy + 9y^2 - 6x - 9y - 10 = 0$.

§ 27. Диаметры и центр

549. Для кривой $x^2 - 3xy + 2y^2 - 4x - 2y + 5 = 0$ определить диаметры, сопряженные векторам: а) $\boldsymbol{p}_1\{1, 2\}$; б) $\boldsymbol{p}_2\{4, -2\}$; в) $\boldsymbol{p}_3\{2, -3\}$.

550. Для кривой $4x^2 - 6xy + y^2 - 8y + 1 = 0$ определить диаметр, проходящий через точку $(0, 1)$.

551. Для кривой $x^2 - 2xy + 4y^2 - 6x + 2y - 7 = 0$ найти диаметры:

а) сопряженные оси Ox;

б) сопряженные оси Oy.

552. Дана кривая второго порядка

$$(\alpha x + \beta y + \gamma)^2 + 2(Ax + By + C) = 0.$$

Доказать, что прямая $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ является одним из диаметров кривой.

553. Ответить на следующие вопросы.

а) Для каких кривых все диаметры параллельны?

б) Для каких кривых все диаметры совпадают?

в) При каком условии ось Ox является одним из диаметров данной кривой?

554. Найти центр для каждой из следующих кривых:

а) $3x^2 + 5xy + y^2 - 8x - 11y - 7 = 0$;
б) $4x^2 - 4xy + y^2 - 6x + 8y + 13 = 0$;
в) $x^2 - 2xy + y^2 - 6x + 6y - 3 = 0$;
г) $3x^2 - 12xy + 6y^2 + 2x - 2y + 5 = 0$;
д) $3x^2 - 2xy + 3y^2 + 4x + 4y - 4 = 0$;
е) $x^2 + 4xy + 4y^2 = 0$.

555. Доказать, что если кривая второго порядка имеет две непараллельные асимптоты, то точка пересечения этих асимптот есть центр кривой.

556. Найти общий диаметр двух кривых:

$$4x^2 - 2xy + y^2 - 2x - 4y = 0 \text{ и } x^2 - 2xy + 5y^2 + 10x - 2y + 7 = 0.$$

557. Найти уравнение диаметра кривой $x^2 + 6xy + y^2 + 6x + 2y - 5 = 0$, проходящего через точку $(2, 1)$.

558. При каком условии ось Ox является линией центров кривой второго порядка

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0?$$

559. Доказать, что если кривая имеет линию центров, то она распадается на пару параллельных или совпавших прямых.

560. Как подобрать значения коэффициентов a и b в уравнении

$$x^2 + 6xy + ay^2 + 3x + by - 4 = 0,$$

чтобы оно изображало: а) центральную кривую; б) кривую без центра; в) кривую с прямой центров?

561. Можно ли коэффициент a подобрать так, чтобы кривая $8x^2 - 4xy - y^2 - 2ax + ay = 0$ не имела центров?

562. При каком условии кривая имеет хотя бы один центр, совпадающий с началом координат?

563. Упростить уравнения следующих кривых второго порядка путем переноса начала координат в центр линии:

а) $4x^2 - 2xy + y^2 - 2x - 10y + 17 = 0$;
б) $3x^2 - 4xy + 2y^2 + 12x - 8y + 10 = 0$.

§ 28. Сопряженные направления. Главные направления и главные диаметры

564. Дана кривая второго порядка $x^2 + xy + 2y^2 - 3x + 4y - 1 = 0$ и векторы $\boldsymbol{a}_1\{1, 1\}$, $\boldsymbol{a}_2\{2, 3\}$, $\boldsymbol{a}_3\{-1, 1\}$, $\boldsymbol{a}_4\{2, 0\}$. Определить векторы $\boldsymbol{a}_1'$, $\boldsymbol{a}_2'$, $\boldsymbol{a}_3'$ и $\boldsymbol{a}_4'$, сопряженные с каждым из соответствующих векторов в отдельности.

565. Найти направление хорд, сопряженных диаметру $2x + y - 3 = 0$ относительно кривой $x^2 + xy + 2y^2 - 3x + 4y - 1 = 0$.

566. Найти два сопряженных диаметра кривой $xy - y^2 - 2x + 3y + 3 = 0$, один из которых параллелен оси Oy.

567. Найти два сопряженных диаметра кривой $x^2 - 6xy + 2y^2 - 6x - 7 = 0$, один из которых параллелен прямой $x - 4y + 5 = 0$.

568. Найти два сопряженных диаметра кривой $x^2 - 8xy - 6x - 2y + 5 = 0$, один из которых проходит через точку $(-1, -2)$.

569. Найти зависимость между угловыми коэффициентами сопряженных направлений:

а) эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$; б) гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

570. Через точку $P(2, 1)$ провести хорду эллипса $\frac{x^2}{10} + \frac{y^2}{6} = 1$, делящегося точкой P пополам.

571. Найти уравнения и длины двух сопряженных диаметров эллипса $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$, один из которых проходит через точку $(3, 1)$.

572. Составить уравнения двух сопряженных диаметров гиперболы $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{24} = 1$, угол между которыми равен $45°$.

573. Написать уравнение диаметра параболы $y^2 = 6x$, сопряженного вектору $\boldsymbol{a}\{2, -3\}$.

574. Написать уравнение диаметра параболы $y^2 = 4x$, проходящего через середину хорды, отсекаемой параболой на прямой $4x + 3y - 12 = 0$.

575. Найти главные направления следующих кривых второго порядка, заданных в прямоугольной декартовой системе координат:

а) $x^2 - 4xy + 4y^2 - 5x + 10y + 6 = 0$;
б) $5x^2 + 8xy + 5y^2 - 18x - 18y + 9 = 0$;
в) $2xy - 4x + 2y - 3 = 0$;
г) $x^2 - 4xy + 4y^2 - 5x + 6 = 0$;
д) $x^2 + xy + 2y^2 - 3x + y = 0$.

576. Определить оси линий второго порядка, заданных в предыдущей задаче.

577. При каком условии все направления являются главными относительно данной кривой второго порядка, заданной уравнением (1), стр. 96, в прямоугольной декартовой системе?

578. Кривая дана в прямоугольной декартовой системе уравнением (1), стр. 96. Сформулировать условия, при которых:

а) ось Ox является главным диаметром;

б) начало координат лежит на главном диаметре.

579. Найти главные диаметры:

а) пары пересекающихся прямых;

б) пары параллельных прямых.

580. Доказать теорему: для того чтобы вектор $\boldsymbol{p}\{p_1, p_2\}$ был вектором и главного и асимптотического направления относительно данной кривой второго порядка (1), стр. 96, необходимо и достаточно, чтобы

$$a_{11} p_1 + a_{12} p_2 = 0, \qquad a_{21} p_1 + a_{22} p_2 = 0.$$

581. Назвать кривые, для которых существуют векторы одновременно главного и асимптотического направлений.

582. Найти оси следующих парабол:

а) $4x^2 + 8xy + 4y^2 + 10x + 2y - 11 = 0$;
б) $4x^2 - 4xy + y^2 - 4x - 4y + 7 = 0$;
в) $x^2 + 2xy + y^2 - 6x + 2y - 3 = 0$;
г) $4x^2 - 12xy + 3y^2 - 8x + 2y - 7 = 0$.

583. Для каких кривых асимптота одновременно является главным диаметром?

584. Доказать теорему: для того чтобы кривая, заданная уравнением (1), (стр. 96), была параболой с вершиной в начале координат, необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты уравнения удовлетворяли условиям:

а) $a_{23}^2 + a_{13}^2 \neq 0, \quad a_{33} = 0$;

б) ранг матрицы $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & -a_{13} \end{pmatrix}$ равен единице.

ЧАСТЬ
ВТОРАЯ

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

ГЛАВА IX

КООРДИНАТЫ ВЕКТОРОВ И ТОЧЕК В ПРОСТРАНСТВЕ

Базисом $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ пространства называются три некомпланарных вектора, взятых в определенном порядке. Базис $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ называется прямоугольным декартовым, если векторы $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ и $\boldsymbol{k}$ единичные и взаимно перпендикулярные.

Если дан базис $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$, то любой вектор $\boldsymbol{a}$ пространства однозначно можно представить в виде

$$\boldsymbol{a} = \alpha\boldsymbol{e}_1 + \beta\boldsymbol{e}_2 + \gamma\boldsymbol{e}_3.$$

В этом случае говорят, что $\boldsymbol{a}$ разложен по векторам $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$. Числа α, β, γ называются координатами вектора $\boldsymbol{a}$ в базисе $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$, причем α называется первой, β — второй, а γ — третьей координатой вектора $\boldsymbol{a}$. Если $\boldsymbol{a}$ имеет в базисе $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ координаты α, β, γ, то пишут так: $\boldsymbol{a}\,\{\alpha, \beta, \gamma\}_{\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3}$, или просто $\boldsymbol{a}\,\{\alpha, \beta, \gamma\}$. Два вектора $\boldsymbol{a}\,\{\alpha_1, \beta_1, \gamma_1\}$ и $\boldsymbol{b}\,\{\alpha_2, \beta_2, \gamma_2\}$ равны тогда и только тогда, когда $\alpha_1 = \alpha_2$, $\beta_1 = \beta_2$, $\gamma_1 = \gamma_2$.

Необходимым и достаточным условием коллинеарности двух векторов $\boldsymbol{a}\,\{\alpha_1, \beta_1, \gamma_1\}$ и $\boldsymbol{b}\,\{\alpha_2, \beta_2, \gamma_2\}$, *является пропорциональность их соответствующих координат*:

$$\alpha_2 = \lambda\alpha_1,\ \beta_2 = \lambda\beta_1,\ \gamma_2 = \lambda\gamma_1,$$

или утверждение: *ранг матрицы*

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{pmatrix}$$

равен единице.

Необходимым и достаточным условием компланарности трех векторов $\boldsymbol{a}\ \{\alpha_1, \beta_1, \gamma_1\}$, $\boldsymbol{b}\ \{\alpha_2, \beta_2, \gamma_2\}$ и $\boldsymbol{c}\ \{\alpha_3, \beta_3, \gamma_3\}$ *является соотношение*:

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = 0. \tag{1}$$

Имеет место следующая теорема о координатах линейной комбинации векторов: *если* $\boldsymbol{p}$ *является линейной комбинацией векторов* $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k$, *то каждая координата вектора* $\boldsymbol{p}$ *равна той же линейной комбинации соответствующих координат векторов* $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k$.

В частности, если $\boldsymbol{a}\ \{\alpha_1, \beta_1, \gamma_1\}$, $\boldsymbol{b}\ \{\alpha_2, \beta_2, \gamma_2\}$, то

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\{\alpha_1+\alpha_2,\ \beta_1+\beta_2,\ \gamma_1+\gamma_2\},$$
$$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\{\alpha_1-\alpha_2,\ \beta_1-\beta_2,\ \gamma_1-\gamma_2\},$$
$$\lambda\boldsymbol{a}\{\lambda\alpha_1,\ \lambda\beta_1,\ \lambda\gamma_1\}.$$

Из этой же теоремы следует, что если векторы $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ линейно зависимы, т. е. $\lambda_1 \boldsymbol{a}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{a}_2 + \ldots + \lambda_k \boldsymbol{a}_k = 0$ и хотя бы один из коэффициентов $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ не равен нулю, то та же линейная зависимость имеет место и для соответствующих координат данных векторов.

Осью называется прямая с заданным на ней единичным вектором $\boldsymbol{e}$ — ортом. Пусть O, $\boldsymbol{e}$ — данная ось, $\overline{AB}$ — произвольный вектор, а A_1 и B_1 — проекции точек A и B на данную ось. Число $\frac{\overline{A_1B_1}}{\boldsymbol{e}}$ называется проекцией вектора $\overline{AB}$ на ось Oe и обозначается так: $\text{Пр}_e\,\overline{AB}$. Так же как и на плоскости, имеет место следующая важная формула: $\text{Пр}_e\ \boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}|\cos(\widehat{\boldsymbol{e}\ \boldsymbol{a}})$[1].

Каждая координата вектора в прямоугольном декартовом базисе равна проекции этого вектора на ось, определяемую

---

[1] Пусть $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$—два ненулевых вектора в пространстве. Возьмем произвольную точку, перенесем векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ в эту точку и рассмотрим плоскость π, содержащую эти векторы. Мера угла между полученными векторами в плоскости π называется мерой угла между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. Так как плоскость π не ориентирована, то мера угла между любыми двумя векторами в пространстве есть число неотрицательное.

соответствующим вектором базиса. Отсюда и из свойств координат векторов получаем свойства проекций:

$$\text{Пр}_e(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \text{Пр}_e\,\boldsymbol{a} + \text{Пр}_e\,\boldsymbol{b},$$
$$\text{Пр}_e(\lambda\boldsymbol{a}) = \lambda\text{Пр}_e\,\boldsymbol{a}.$$

Если $\boldsymbol{a}$ задан в прямоугольном декартовом базисе $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$, то из предыдущих предложений следует, что

$$\boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}|\,[\cos(\widehat{\boldsymbol{i},\boldsymbol{a}})\,\boldsymbol{i} + \cos(\widehat{\boldsymbol{j}\,\boldsymbol{a}})\,\boldsymbol{j} + \cos(\widehat{\boldsymbol{k},\boldsymbol{a}})\,\boldsymbol{k}]. \qquad (2)$$

Числа $\cos(\widehat{\boldsymbol{i},\boldsymbol{a}})$, $\cos(\widehat{\boldsymbol{j},\boldsymbol{a}})$, $\cos(\widehat{\boldsymbol{k},\boldsymbol{a}})$ называются н а п р а в л я ю щ и м и к о с и н у с а м и вектора $\boldsymbol{a}$. Если вектор $\boldsymbol{a}_0$ единичный, то предыдущая формула принимает вид

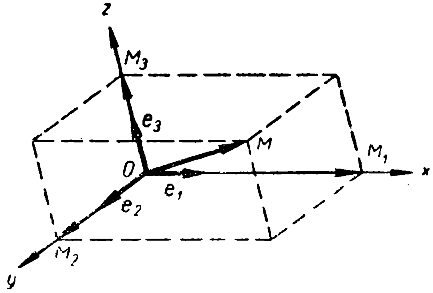
$$\boldsymbol{a}_0 = \cos(\widehat{\boldsymbol{i},\boldsymbol{a}_0})\,\boldsymbol{i} + \cos(\widehat{\boldsymbol{j},\boldsymbol{a}_0})\,\boldsymbol{j} + \cos(\widehat{\boldsymbol{k},\boldsymbol{a}_0})\,\boldsymbol{k}. \qquad (2)$$

Если вектор $\boldsymbol{a}$ задан своими координатами α, β, ν, в прямоугольной декартовой системе, то

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}. \qquad (3)$$

Из формул (2) и (3) следует, что если $\boldsymbol{a}$ ненулевой вектор, то

$$\cos^2(\widehat{\boldsymbol{i},\boldsymbol{a}}) + \cos^2(\widehat{\boldsymbol{j},\boldsymbol{a}}) + \cos^2(\widehat{\boldsymbol{k},\boldsymbol{a}}) = 1. \qquad (4)$$



Черт. 24

О б щ е й д е к а р т о в о й, или а ф ф и н н о й, системой координат $Oe_1\ e_2\ e_3$ в пространстве называется упорядоченная тройка пересекающихся в точке O прямых Ox, Oy и Oz, на каждой из которых задан ненулевой вектор: e_1 на Ox, e_2 на Oy и e_3 на OZ (черт. 24). Точка O называется н а ч а л о м к о о р д и н а т, а направленные прямые Ox, Oy и Oz — о с я м и к о о р д и н а т. Первая ось называется о с ь ю а б с ц и с с (или осью Ox), вторая — о с ь ю о р д и н а т (или осью Oy), а третья — о с ь ю а п п л и к а т (или осью Oz). Плоскости xOy, xOz и yOz называются к о о р д и н а т н ы м и п л о с к остями, а векторы e_1, e_2 и e_3 — координатными векторами. Если оси взаимно перпендикулярны и координатные векторы единичные, то система называется прямоугольной декартовой. В этом случае она обозначается так: $Oijk$.

Если M — произвольная точка пространства, то вектор $\overline{OM}$ называется радиус-вектором точки M, а координаты этого вектора — координатами точки. Если $\overline{OM}\{x, y, z\}$, то x называется абсциссой точки M, y — ординатой, а z — аппликатой. Для того чтобы указать, что точка M имеет координаты x, y, z, пишут так: $M(x, y, z)$. Если M_1, M_2 и M_3 — точки пересечения координатных осей с плоскостями, проведенными через M параллельно координатным плоскостям (см. черт. 24), то

$$x = \frac{\overline{OM_1}}{e_1}, \quad y = \frac{\overline{OM_2}}{e_2}, \quad z = \frac{\overline{OM_3}}{e_3}.$$

Если система прямоугольная декартова, то

$$x = \text{Пр}_i\, \overline{OM}, \quad y = \text{Пр}_j\, \overline{OM}, \quad z = \text{Пр}_k\, \overline{OM}.$$

Имеют место следующие теоремы:

а) Если в аффинной системе $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$, то $\overline{AB}\,\{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$.

б) Для того чтобы точки $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ и $C(x_3, y_3, z_3)$, заданные в аффинной системе, лежали на одной прямой, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{pmatrix}$$

был равен единице.

в) Для того чтобы точки $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$ и $D(x_4, y_4, z_4)$ лежали в одной плоскости, необходимо и достаточно, чтобы

$$\begin{vmatrix} x_1 - x_4 & y_1 - y_4 & z_1 - z_4 \\ x_2 - x_4 & y_2 - y_4 & z_2 - z_4 \\ x_3 - x_4 & y_3 - y_4 & z_3 - z_4 \end{vmatrix} = 0, \text{ или } \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} = 0.$$

г) Если точка $C(x, y, z)$ делит отрезок, образованный точками $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$ в отношении $\lambda \neq -1$, то

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}.$$

В частности, координаты середины отрезка, образованного точками $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$ равны полусуммам координат его концов:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

Эти формулы верны в аффинной системе координат.

д) Расстояние d между точками $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$, заданными в прямоугольной декартовой системе, равно:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Пусть $O\,\boldsymbol{e}_1\,\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3$ и $O'\,\boldsymbol{e}'_1\,\boldsymbol{e}'_2\,\boldsymbol{e}'_3$—две аффинные системы координат в пространстве, а M — произвольная точка. Если точка O' и векторы $\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3$ в системе $O\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3$ имеют координаты

$$\boldsymbol{e}'_1\{\alpha_1\beta_1\gamma_1\}, \quad \boldsymbol{e}'_2\{\alpha_2\beta_2\gamma_2\}, \quad \boldsymbol{e}'_3\{\alpha_3\beta_3\gamma_3\}, O'(x_0, y_0, z_0),$$

то координаты x, y, z точки M в системе $O'\,\boldsymbol{e}_1\,\boldsymbol{e}_2\,\boldsymbol{e}_3$ выражаются через координаты x', y', z' той же точки в системе $O'\boldsymbol{e}'_1\boldsymbol{e}'_2\boldsymbol{e}'_3$ так:

$$\begin{aligned} x &= \alpha_1 x' + \alpha_2 y' + \alpha_3 z' + x_0, \\ y &= \beta_1 x' + \beta_2 y' + \beta_3 z' + y_0, \\ z &= \gamma_1 x' + \gamma_2 y' + \gamma_3 z' + z_0. \end{aligned} \qquad (5)$$

Здесь

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} \neq 0, \qquad (6)$$

поэтому из (5) x', y', z' могут быть однозначно выражены через x, y, z. Соотношения (5) называются **формулами преобразования аффинных координат точек.**

В частности, если $\boldsymbol{e}'_1 = \boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}'_2 = \boldsymbol{e}_2$ и $\boldsymbol{e}'_3 = \boldsymbol{e}_3$, то из (5) получаем **формулы преобразования при переносе начала координат:**

$$x = x' + x_0, \quad y = y' + y_0, \quad z = z' + z_0.$$

Если O' совпадает с O, то мы приходим к другому частному случаю — аффинному повороту системы координат:

$$x = \alpha_1 x' + \alpha_2 y' + \alpha_3 z',$$
$$y = \beta_1 x' + \beta_2 y' + \beta_3 z',$$
$$z = \gamma_1 x' + \gamma_2 y' + \gamma_3 z'.$$

Формулы преобразования координат точек при переходе от одной прямоугольной декартовой системы координат к другой прямоугольной декартовой системе имеют тот же вид (5). Но в этом случае матрица

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix}$$

является ортогональной, т. е. элементы матрицы удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 = 1, \quad \alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2 = 1, \quad \alpha_3^2 + \beta_3^2 + \gamma_3^2 = 1.$$
$$\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2 = 0, \quad \alpha_1\alpha_3 + \beta_1\beta_3 + \gamma_1\gamma_3 = 0, \quad \alpha_2\alpha_3 + \beta_2\beta_3 + \gamma_2\gamma_3 = 0.$$

При решении задач часто пользуются также обратными предложениями. Если дана система координат $O\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3$ и система уравнений (5), коэффициенты которых удовлетворяют условию (6), то существует система координат $O'\boldsymbol{e}_1'\boldsymbol{e}_2'\boldsymbol{e}_3'$, при переходе к которой соотношения (5) являются формулами преобразования координат точек. Новая система определяется так:

$$O'(x_0, y_0, z_0), \quad \boldsymbol{e}_1'\{\alpha_1, \beta_1, \gamma_1\}, \quad \boldsymbol{e}_2'\{\alpha_2, \beta_2, \gamma_2\}, \quad \boldsymbol{e}_3'\{\alpha_3, \beta_3, \gamma_3\}.$$

Если дана прямоугольная декартова система координат $O\boldsymbol{ijk}$ и система линейных уравнений (5), коэффициенты которых образуют ортогональную матрицу, то существует прямоугольная декартова система $O'\boldsymbol{i}'\boldsymbol{j}'\boldsymbol{k}'$, при переходе к которой соотношения (5) являются формулами преобразования координат точек. Новая система координат определяется так же, как и в общем случае.

§ 29. Координаты векторов и их свойства

585. На чертеже 25 изображены две параллельные плоскости и ряд векторов. Указать среди них коллинеарные и компланарные векторы.

586. Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед, E, F, G — соответственно середины сторон AA_1, AD, CC_1 (черт. 26). Принимая векторы $\overline{AA_1}$, $\overline{AD}$, $\overline{AB}$ за координатные, определить координаты следующих векторов: $\overline{AC}$, $\overline{AE}$, $\overline{EC_1}$, $\overline{B_1C_1}$ $\overline{FG}$, $\overline{GD}$, $\overline{CB_1}$, $\overline{A_1G}$.

587. Решить предыдущую задачу в предположении, что за координатные векторы взяты $\overline{AD_1}$, $\overline{AE}$, $\overline{AB}$.

588. В тетраэдре $ABCS$ точки A', B', C' — соответственно середины ребер SA, SB и SC; O и O' — точки пересечения медиан треугольников ABC и $A'B'C'$. Принимая векторы $\overline{O'C'}$, $\overline{O'B'}$ и $\overline{O'S}$ за координатные, определить координаты векторов $\overline{CS}$, $\overline{AC}$, $\overline{CA'}$, $\overline{O'A}$, $\overline{AS}$, $\overline{AC'}$, $\overline{BE'}$, $\overline{AE'}$, где E' — середина отрезка $A'C'$.

589. Решить предыдущую задачу, полагая $\boldsymbol{e}_1 = \overline{O'A'}$, $\boldsymbol{e}_2 = \overline{O'E'}$, $\boldsymbol{e}_3 = \overline{O'O}$.

590. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (черт. 26) заданы векторы, совпадающие с его ребрами: $\overline{AA_1} = \boldsymbol{e}_1$, $\overline{AD} = \boldsymbol{e}_2$, $\overline{AB} = \boldsymbol{e}_3$. Построить следующие векторы:

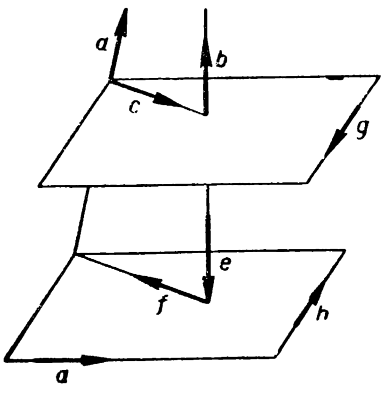
а) $\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3$; б) $\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{e}_3$;

в) $\frac{1}{2}\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_3$; г) $-\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{e}_3$.

591. Среди векторов

$\boldsymbol{a}_1\{1, -6, 3\}$, $\boldsymbol{a}_2\{0, -4, 5\}$, $\boldsymbol{a}_3\{3, 0, 0\}$, $\boldsymbol{a}_4\{0, -1, 0\}$, $\boldsymbol{a}_5\{5, 0, 6\}$, $\boldsymbol{a}_6\{2, -3, 6\}$, $\boldsymbol{a}_7\{0, 0, -2\}$, $\boldsymbol{a}_8\{-3, 1, 0\}$, $\boldsymbol{a}_9\{6, 0, 1\}$, $\boldsymbol{a}_{10}\{0, 5, 0\}$

укажите векторы: а) коллинеарные вектору $\boldsymbol{e}_1$; б) коллинеарные вектору $\boldsymbol{e}_2$; в) коллинеарные вектору $\boldsymbol{e}_3$; г) компланарные с векторами $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$; д) компланарные с векторами $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_3$; е) компланарные с векторами $\boldsymbol{e}_2$ и $\boldsymbol{e}_3$.



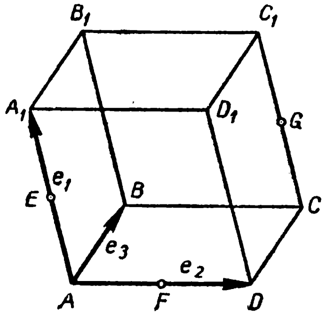
Черт. 25

592. Даны векторы $\boldsymbol{a}\{2, 3, -1\}$, $\boldsymbol{b}\{0, 1, 4\}$, $\boldsymbol{c}\{1, 0, -3\}$. Определить координаты следующих векторов:

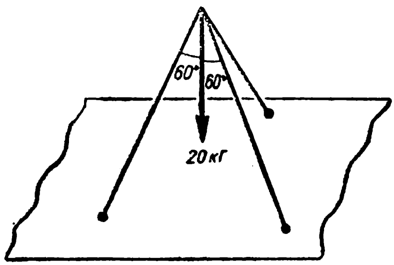
$$\boldsymbol{p}_1 = 2\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} - 2\boldsymbol{c}, \quad \boldsymbol{p}_2 = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} - 3\boldsymbol{c}, \quad \boldsymbol{p}_3 = \boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b} + 3\boldsymbol{c},$$

$$\boldsymbol{p}_4 = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}, \quad \boldsymbol{p}_5 = \frac{\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}}{2}, \quad \boldsymbol{p}_6 = \frac{\boldsymbol{a} - \sqrt{\boldsymbol{b}} + \boldsymbol{c}}{3}.$$

593. Найти линейную зависимость между векторами:



Черт. 26



Черт. 27

а) $\boldsymbol{a}\{1, 3, 0\}$, $\boldsymbol{b}\{5, 10, 0\}$, $\boldsymbol{c}\{4, -2, 6\}$, $\boldsymbol{d}\left\{\frac{21}{2}, 17, 3\right\}$;

б) $\boldsymbol{a}\{1, 3, 5\}$, $\boldsymbol{b}\{0, 4, 5\}$, $\boldsymbol{c}\{7, -8, 4\}$, $\boldsymbol{d}\{2, -1, 3\}$;

в) $\boldsymbol{a}\{1, 2, 5\}$, $\boldsymbol{b}\{-1, 6, 3\}$, $\boldsymbol{c}\{0, 0, 2\}$, $\boldsymbol{d}\{1, 0, 4\}$.

594. При обозначениях задачи 586 (черт. 26) найти линейную зависимость, существующую между векторами $\overline{AC_1}$, $\overline{A_1C}$, $\overline{DB_1}$, $\overline{DB}$.

595. Даны пары векторов:

а) $\boldsymbol{a}_1\left\{1\frac{1}{2}, 3, -6\right\}$ и $\boldsymbol{a}_2\{-6, -12, 8\}$;

б) $\boldsymbol{b}_1\left\{-\frac{1}{3}, \frac{5}{4}, -2\right\}$ и $\boldsymbol{b}_2\left\{\frac{1}{5}, -\frac{3}{4}, \frac{6}{5}\right\}$;

в) $\boldsymbol{c}_1\left\{3\frac{3}{5}, -3, 4\frac{1}{2}\right\}$ и $\boldsymbol{c}_2\left\{-10, 8\frac{1}{3}, -12\frac{1}{2}\right\}$.

Указать среди них пары коллинеарных векторов.

596. Даны тройки векторов:

а) $\boldsymbol{a}_1\{-3, 0, 2\}$, $\boldsymbol{a}_2\{2, 1, -4\}$, $\boldsymbol{a}_3\{11, -2, -2\}$;

б) $\boldsymbol{b}_1\{1, 0, 7\}$, $\boldsymbol{b}_2\{-1, 2, 4\}$, $\boldsymbol{b}_3\{3, 2, 1\}$;

в) $\boldsymbol{c}_1\{5, -1, 4\}$, $\boldsymbol{c}_2\{3, -5, 2\}$, $\boldsymbol{c}_3\{-1, -13, -2\}$.

Указать среди них тройки компланарных векторов.

597. Пусть M — точка пересечения медиан некоторого треугольника $A_1A_2A_3$, а O — произвольная точка пространства. Показать, что $\overline{OM} = \frac{\overline{OA_1} + \overline{OA_2} + \overline{OA_3}}{3}$.

598. Пусть треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ имеют произвольные расположения в пространстве. Показать, что $\overline{A_1A_2} + \overline{B_1B_2} + \overline{C_1C_2} = 3\,\overline{M_1M_2}$, где M_1 и M_2 — точки пересечения медиан данных треугольников.

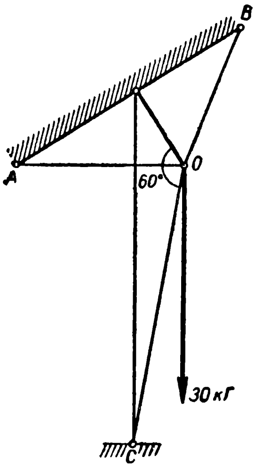
599. В треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ векторы $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ и $\overline{AA_1}$ выбраны за координатные. Определить координаты вектора $\overline{AM}$, где M — центр тяжести треугольника $A_1B_1C_1$.

600. Найти косинусы углов, образованных вектором $\boldsymbol{a}\{5, -\sqrt{2}, 3\}$ с базисными векторами $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ прямоугольной декартовой базы.

601. Вектор $\boldsymbol{a}$ образует с базисными векторами $\boldsymbol{i}$ и $\boldsymbol{k}$ прямоугольного декартового базиса соответственно углы 120 и 135°. Определить угол, который образует вектор $\boldsymbol{a}$ с вектором $\boldsymbol{j}$.

602. Вектор $\boldsymbol{a}$, модуль которого равен 4, образует с осями $\boldsymbol{i}$ и $\boldsymbol{j}$ прямоугольного декартового базиса соответственно углы 60 и 45°. Определить координаты вектора $\boldsymbol{a}$.

603. К вершине треножника подвешен груз, равный 20 *кг*. Найти силы, возникающие в ножках треножника, если ножки треножника взаимно перпен-



Черт. 28

дикулярны, а веревка, поддерживающая груз, составляет с двумя ножками углы, равные $60°$ (черт. 27).

604. Груз весом 30 *кГ* подвешен в точке O опоры, состоящей из трех стержней: OA, OB и OC (черт. 28). Два горизонтальных стержня: OA и OB равны по длине и взаимно перпендикулярны, стержень OC образует равные углы со стержнями OA и OB и угол, равный $60°$, с горизонтальной плоскостью AOB. Найти силы, возникающие в стержнях.

§ 30. Координаты точек; решение простейших задач в координатах

605. Вершины четырехугольника находятся в точках $A(1, -3, -2)$, $B(8, 0, -4)$, $C(4, 8, -3)$, $D(-3, 5, -1)$. Показать, что $ABCD$ — параллелограмм.

606. Даны три вершины параллелограмма: $A(2, 5, 4)$, $B(0, 1, 0)$ и $C(4, 1, 3)$. Найти координаты четвертой вершины D.

607. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ даны координаты четырех вершин $A(2, -1, 1)$, $B(1, 3, 4)$, $A_1(4, 2, 0)$, $D(6, 0, 1)$. Найти координаты остальных вершин.

608. Дана точка $M(2, -1, 1)$ в прямоугольной декартовой системе координат. Определить координаты точек, симметричных с точкой M:

а) относительно начала координат;

б) относительно координатных плоскостей Oxy, Oyz, Oxz;

в) относительно координатных осей Ox, Oy, Oz.

609. В прямоугольной декартовой системе координат даны координаты вершин треугольника ABC : $A(2, 3 - 1)$, $B(3, 0, -1)$, $C(1, 1, 1)$. Определить координаты вершин треугольника, симметричного треугольнику ABC:

а) относительно начала координат;

б) относительно координатных плоскостей Oxy, Oxz и Oyz;

в) относительно координатных осей Ox, Oy и Oz.

610. Даны тройки точек:

а) $A_1(3, 2, 1)$, $B_1(5, 3, -2)$, $C_1(1, 1, 4)$;
б) $A_2(1, -3, 5)$, $B_2(3, -1, 7)$, $C_2(0, 4, 3)$;
в) $A_3(-1, 0, 4)$, $B_3(2, 3, 1)$, $C_3(8, 9, -5)$;
г) $A_4(3, 0, -8)$, $B_4(1, 3, 4)$, $C_4(0, -2, 1)$.

Указать среди них тройки точек, лежащих на одной прямой.

611. Выяснить, какие из данных четверок точек лежат в одной плоскости:

а) $A_1(0, 0, -1)$, $B_1(-\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2})$, $C_1(0, 1, 2)$, $D_1(1, 1, 1)$;

б) $A_2(1, 7, 8)$, $B_2(3, 5, 6)$, $C_2(-1, 4, 4)$, $D_2(0, 7, 6)$;

в) $A_3(1, 1, 0)$, $B_3(-1, 2, -1)$, $C_3(0, -1, 0)$, $D_3(-3, -3, 2)$;

г) $A_4(1, 2, 2)$, $B_4(0, 3, 3)$, $C_4(2, -5, -1)$, $D_4(-1, -2, 2)$.

612. Даны четыре точки: $A(2, 4, 3)$ и $B(0, 0, 5)$, $C(4, 1, 6)$ и $D(-2, 3, 2)$. Доказать, что прямые AB и CD пересекаются, и найти их точку пересечения.

613. В прямоугольной декартовой системе координат найти расстояние между точками: $A_1(1, 2, 3)$ и $A_2(1, -2, 0)$, $B_1(2, -3, 1)$ и $B_2(1, -3, 8)$, $C_1(-1, -1, 0)$ и $C_2(2, 3, \sqrt{5})$. Найти расстояние от начала координат до точек $M(1, -3, \sqrt{15})$, $N(0, 2, 3)$, $P(3, \sqrt{7}, -3)$, $Q(1, -5, 6)$.

614. Определить радиус сферы, проходящей через точку $(-2, 0, 2)$ и имеющей центр в точке $(1, 1, 6)$. Система координат прямоугольная декартова.

615. В прямоугольной декартовой системе координат даны вершины треугольника: $A(2, -1, 4)$, $B(3, 2, -6)$, $C(-5, 0, 2)$. Вычислить длину его медианы, проведенной из вершины A.

616. В прямоугольной декартовой системе координат даны четыре точки: $M_1(0, 1, -1)$, $M_2(1, 0, 1)$, $M_3(-1, 1, 0)$, $M_4(1, -1, 1)$. Найти точку, одинаково удаленную от каждой из данных точек.

617. Найти координаты центра и радиус сферы, которая проходит через точки $(0, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 0, 3)$. Система координат прямоугольная декартова.

618. На прямой l взяты последовательно точки $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ так, что $A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = A_4A_5 = A_5A_6$. Зная координаты точек $A_3(1, -1, 2)$ и $A_5(2, 1, -4)$, определить координаты остальных точек.

619. На прямой, проходящей через точки $A(1, 0, 4)$ и $B(3, -1, 2)$, найти точку C так, чтобы $AC = 3AB$ и B лежала между A и C.

620. Найти отношение, в котором каждая из координатных плоскостей делит отрезок AB: $A(2, -1, 7)$ и $B(4, 5, -2)$.

621. Показать, что в аффинной системе координат координаты центра тяжести треугольника равны средним арифметическим соответствующих координат вершин.

622. Найти координаты центра тяжести следующих треугольников: а) A_1 $(1, -3, 4)$, B_1 $(2, -2, -1)$, C_1 $(0_1 - 1{,}3)$; б) A_2 $(7, 1, 4)$, B_2 $(3, 0, 2)$, C_2 $(2, 2, 1)$.

623. Доказать, что координаты центра тяжести n материальных точек $A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_2(x_2, y_2, z_2), \ldots, A_n(x_n, y_n, z_n)$, в которых сосредоточены массы $m_1, m_2, \ldots, m_n$, определяются соотношениями:

$$x = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \ldots + m_nx_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n},$$

$$y = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + \ldots + m_ny_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n},$$

$$z = \frac{m_1z_1 + m_2z_2 + \ldots + m_nz_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}.$$

624. В точках A $(3, 0, 3)$, $B(-1, 2, 1)$, $C(2, 1, 4)$ и D $(1, -2, -1)$ сосредоточены соответственно массы 10 *кг*, 15 *кг*, 30 *кг* и 25 *кг*. Найти координаты центра тяжести указанной системы материальных точек.

625. Если в вершины тетраэдра поместить одинаковые массы, то центр тяжести данной системы называется ц е н т р о и д о м тетраэдра. Доказать, что координаты центроида равны средним арифметическим соответствующих координат вершин.

626. Найти центр тяжести стержневого правильного тетраэдра, заданного координатами своих вершин.

§ 31. Преобразование системы координат в пространстве

627. Написать формулы преобразования аффинной системы координат в пространстве, если даны координаты нового начала и новых координатных векторов в старой системе:

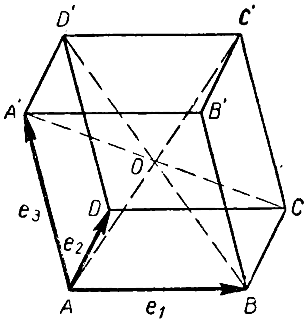
а) $e_1'\{1, 0, 0\}$, $e_2'\{2, 4, 0\}$, $e_3'\left\{-3, 1, \frac{1}{2}\right\}$, $O'(0, 0, 0)$;

б) $e_1'\{-1, 1, 0\}$, $e_2'\{2, -1, 0\}$, $e_3'\{0, 0, 5\}$, $O'(5, 0, -2)$;

в) $e_1'\{-1, 0, 0\}$, $e_2'\{0, 1, 0\}$, $e_3'\{0, 0, -1\}$, $O'(1, 1, 2)$;

г) $e_1'\{1, 0, 0\}$, $e_2'\{0, 1, 0\}$, $e_3'\{0, 0, 1\}$, $O'(2, 5, -1)$;

д) $e_1'\{1, 3, 0\}$, $e_2'\{0, -3, 1\}$, $e_3'\{1, 1, -2\}$, $O'(0, 3, -1)$.



Черт. 29

628. Пусть $ABCDA'B'C'D'$ — некоторый куб, O — точка пересечения диагоналей. Написать формулы преобразования координат точек, если $A\,\boldsymbol{e}_1\,\boldsymbol{e}_2\,\boldsymbol{e}_3$ — старая система, а $O\boldsymbol{e}'_1\boldsymbol{e}'_2\boldsymbol{e}'_3$ — новая система, где $\boldsymbol{e}_1 = \overline{AB}$, $\boldsymbol{e}_2 = \overline{AD}$, $\boldsymbol{e}_3 = \overline{AA'}$, $\boldsymbol{e}'_1 = \overline{OA}$, $\boldsymbol{e}'_2 = \overline{OB}$, $\boldsymbol{e}'_3 = \overline{OC}$ (черт. 29).

629. Дан тетраэдр $OABC$. Написать формулы преобразования координат точек при переходе от аффинной системы O, $\boldsymbol{e}_1 = \overline{OA}$, $\boldsymbol{e}_2 = \overline{OB}$, $\boldsymbol{e}_3 = \overline{OC}$ к аффинной системе $O' = A$, $\boldsymbol{e}'_1 = \overline{AO}$, $\boldsymbol{e}'_2 = \overline{AB}$, $\boldsymbol{e}'_3 = \overline{AC}$.

630. В системе O, $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ даны точки $A\ (2,\ 1,\ -1)$, $B\ (1,\ 1,\ -1)$, $C\ (0,\ 2,\ 1)$. Существует ли такая новая система координат с началом в точке $(0,\ 1,\ 1)$, в которой данные точки имеют координаты $A\ (1,\ 0,\ 0)$, $B\ (0,\ 1,\ 0)$, $C\ (0,\ 0,\ 1)$?

631. Определить координаты новых координатных векторов и нового начала в старой системе, если формулы преобразования имеют вид:

а) $x = x' - 3y' + z'$, $y = x' + y'$, $z = x' + 1$;

б) $x' = x + 1$, $y' = y - 3$, $z' = z$;

в) $x = x' - y' + z' + 1$, $y = -x' - y' + 2z' + 2$, $z = z' - 3$;

г) $x = y'$, $y = x'$, $z = x' + y' + z' + 1$;

д) $x = -x' + 1$, $y = -y' + 1$, $z = z' + 1$.

632. Могут ли формулы:

$$x = x' + 2y' + z' - 1,$$
$$y = 2x' - y' + z',$$
$$z = 3x' + y' + 2z' + 1$$

служить формулами преобразования координат? Объяснить результат.

633. Дан куб $ABCDA'B'C'D'$ со стороной, равной a (черт. 29). Написать формулы преобразования при переходе от системы $A\boldsymbol{ijk}$ к системе $C'\boldsymbol{i}'\boldsymbol{j}'\boldsymbol{k}'$, если векторы $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ направлены вдоль лучей AB, AD, AA', а векторы $\boldsymbol{i}'$, $\boldsymbol{j}'$, $\boldsymbol{k}'$ — вдоль лучей $C'B'$, $C'C$, $C'D'$. Убедиться в том, что матрица, составленная из коэффициентов формул преобразования, ортогональная.

634. Какие из приведенных ниже матриц ортогональны:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi \\ 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 3 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$;

д) $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$; е) $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$?

635. Даны формулы преобразования координат точек

$$x = 2 + \frac{2}{7}x' + \frac{3}{7}y' + \frac{6}{7}z',$$

$$y = 1 + \frac{6}{7}x' + \frac{2}{7}y' - \frac{3}{7}z',$$

$$z = 3 + \frac{3}{7}x' - \frac{6}{7}y' + \frac{2}{7}z'.$$

Является ли новая система координат прямоугольной декартовой, если исходная система прямоугольная и декартова?

636. Найти формулы преобразования координат при переходе от прямоугольной декартовой системы $Oxyz$ к системе $Ox'y'z'$, если начало новой системы совпадает с началом O старой системы, ось Oz' совпадает с осью Oz, лучи Ox' и Oy' являются соответственно биссектрисами углов xOz и yOz и новые координатные векторы являются единичными.

§ 32. Приложение метода координат к решению задач элементарной геометрии

637. Доказать, что отрезки, соединяющие середины противоположных ребер тетраэдра, пересекаются в одной точке O и делятся в ней пополам.

638. Доказать, что диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и делятся в ней пополам.

639. Если в неплоском шестиугольнике $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ противоположные стороны попарно параллельны, то диагонали, соединяющие противоположные вершины, пересекаются в одной точке и делятся в ней пополам.

640. Доказать, что четыре отрезка, соединяющие каждую вершину тетраэдра с точкой пересечения медиан противоположной грани, пересекаются в центроиде тетраэдра (см. задачу 625) и каждый из отрезков делится этой точкой в отношении $\lambda = 3$, считая от вершины тетраэдра.

641. В неплоском четырехугольнике проведены три отрезка, соединяющие соответственно: а) середины двух противоложных сторон; б) середины двух других противоположных сторон; в) середины диагоналей. Доказать, что эти отрезки пересекаются в одной точке и каждый из них делится этой точкой пополам.

642. Доказать, что во всяком неплоском четырехугольнике прямые, соединяющие середины смежных сторон, образуют параллелограмм.

643. В тетраэдре $ABCD$ ребра AB, AC, DB и DC разделены соответственно точками M, N, P и Q в одном и том же отношении λ. Доказать, что четырехугольник $MNPQ$ — параллелограмм.

644. Доказать, что диагональ AC_1 параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (черт. 26) проходит через центры тяжестей треугольников A_1BD и B_1D_1C.

645. Доказать, что две плоскости, проведенные через вершины A_1BD и CB_1D_1, делят диагональ AC_1 параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ на три равные части (черт. 26).

646. Пусть ребра AB, AC и AD тетраэдра $ABCD$ взаимно перпендикулярны. Доказать, что центр сферы, описанный вокруг данного тетраэдра, лежит на прямой, соединяющей вершину A с центром тяжести треугольника BCD.

647. На сторонах AB, BC, CD, DA пространственного четырехугольника $ABCD$ соответственно выбраны точки

A_1, B_1, C_1, D_1 так, что

$$\frac{AA_1}{A_1B} = \frac{DC_1}{C_1C} = \lambda \quad \text{и} \quad \frac{AD_1}{D_1D} = \frac{BB_1}{B_1C} = \mu.$$

Доказать, что четырехугольник, образованный точками A_1, B_1, C_1, D_1, плоский.

648. Дан тетраэдр $ABCD$ и точка S на ребре AB. Доказать, что середины отрезков AD, BC, SD и SC лежат в одной плоскости.

ГЛАВА X

ПРОИЗВЕДЕНИЯ ВЕКТОРОВ

Скалярным произведением вектора $\boldsymbol{a}$ на вектор $\boldsymbol{b}$ называется число

$$\boldsymbol{ab} = |\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}}). \tag{1}$$

Если $\boldsymbol{a} = 0$ или $\boldsymbol{b} = 0$, то $|\boldsymbol{a}| = 0$ или $|\boldsymbol{b}| = 0$, поэтому $\boldsymbol{ab} = 0$. Если $\boldsymbol{a} \neq 0$, то $\text{Пр}_{\boldsymbol{a}}\, \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{b}| \cos(\widehat{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}})$. Аналогично, если $\boldsymbol{b} \neq 0$, то $\text{Пр}_{\boldsymbol{b}}\, \boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}| \cos(\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}})$, поэтому в этих случаях

$$\boldsymbol{ab} = |\boldsymbol{a}|\,\text{Пр}_{\boldsymbol{a}}\, \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{b}|\,\text{Пр}_{\boldsymbol{b}}\, a. \tag{2}$$

Основные свойства скалярного произведения:

1. $\boldsymbol{ab} = \boldsymbol{ba}$;
2. $(\alpha \boldsymbol{a})\boldsymbol{b} = \alpha(\boldsymbol{ab})$;
3. $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{ab} + \boldsymbol{ac}$.

Следствие:

$$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2 + \ldots + \boldsymbol{b}_k) = \boldsymbol{ab}_1 + \boldsymbol{ab}_2 + \ldots + \boldsymbol{ab}_k.$$

4. Если $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ ненулевые векторы, а $\varphi = (\widehat{\boldsymbol{ab}})$, то:

а) $\varphi < \frac{\pi}{2}$ тогда и только тогда, когда $\boldsymbol{ab} > 0$;

б) $\varphi > \frac{\pi}{2}$ тогда и только тогда, когда $\boldsymbol{ab} < 0$;

в) $\varphi = \frac{\pi}{2}$ тогда и только тогда, когда $\boldsymbol{ab} = 0$.

Если в прямоугольном декартовом базисе векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ заданы своими координатами $\boldsymbol{a}\ \{\alpha_1, \beta_1, \gamma_1\}$, $\boldsymbol{b}\ \{\alpha_2, \beta_2, \gamma_2\}$, то

$$\boldsymbol{ab} = \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2. \tag{3}$$

Из формул (1) и (3) получаем:

$$\cos(\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}}) = \frac{\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2}{\sqrt{\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2}\sqrt{\alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2}}.$$

Отсюда, в частности, получаем условие перпендикулярности векторов, заданных координатами:

$$\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2 = 0.$$

Упорядоченной тройкой векторов, или *репером*, называется система трех некомпланарных векторов, взятых в определенном порядке. Пусть $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ — упорядоченная тройка векторов, приложенных к точке C. Мы будем говорить, что тройка $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ имеет *правую* ориентацию, или является *правой*, если наблюдателю, расположенному в точке C движение по контуру треугольника ABC, образованного из концов векторов $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$, кажется совершающимся по часовой стрелке. Упорядоченная тройка $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ имеет *левую* ориентацию, или является *левой*, если это движение кажется совершающимся против часовой стрелки.

Примером упорядоченной тройки векторов является базис пространства $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$. В соответствии с предыдущим определением базис называется *правым* (*левым*), если упорядоченная тройка векторов $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ имеет правую (левую) ориентацию.

Пусть в пространстве дана база $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$. *Векторным произведением* вектора $\boldsymbol{a}$ на вектор $\boldsymbol{b}$ называется *вектор* $\boldsymbol{p}$, определяемый следующими условиями:

а) $|\boldsymbol{p}| = |\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\sin(\widehat{\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}})$.

б) Вектор $\boldsymbol{p}$ перпендикулярен как вектору $\boldsymbol{a}$, так и вектору $\boldsymbol{b}$.

в) Если $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ не коллинеарны, то $\boldsymbol{p}$ направлен так, что тройка упорядоченных векторов $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ имеют одну и ту же ориентацию.

Векторное произведение вектора $\boldsymbol{a}$ на вектор $\boldsymbol{b}$ обозначается так: $[\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}]$, или $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$.

Если $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ коллинеарны, в частности, если один из них равен нулю, то их векторное произведение равно нулю. Если же $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ не коллинеарны, то модуль их векторного произведения равен площади параллелограмма, построенного на векторах $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ в предположении, что они приложены к общему началу.

Основные свойства векторного произведения:

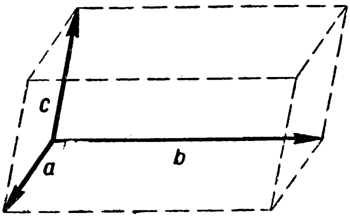
1. $[\boldsymbol{ab}] = -[\boldsymbol{ba}]$;
2. $[(\lambda\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}] = \lambda[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$; $[(\lambda\boldsymbol{a}), (\mu\boldsymbol{b})] = \lambda\mu[\boldsymbol{ab}]$;
3. $[(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}] = [\boldsymbol{ac}] + [\boldsymbol{bc}]$.

Пусть в прямоугольном декартовом базисе $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ даны векторы $\boldsymbol{a}$ $\{\alpha_1, \beta_1, \gamma_1\}$ и $\boldsymbol{b}$ $\{\alpha_2, \beta_2, \gamma_2\}$, тогда

$$[\boldsymbol{ab}]\left\{\begin{vmatrix}\beta_1\gamma_1\\ \beta_2\gamma_2\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}\gamma_1\alpha_1\\ \gamma_2\alpha_2\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}\alpha_1\beta_1\\ \alpha_2\beta_2\end{vmatrix}\right\}.$$

Можно предложить следующую условную запись для выражения вектора $[\boldsymbol{ab}]$ через $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$, очень удобную для запоминания:

$$[\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}] = \begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1\\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2\end{vmatrix}.$$



Черт. 30

Если даны три вектора: $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$, то число $\boldsymbol{abc} = [\boldsymbol{ab}]\boldsymbol{c}$ называется **смешанным произведением** данных векторов. Смешанное произведение трех векторов равно нулю тогда и только тогда, когда векторы компланарны. Если $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ приложены к общему началу и не компланарны, то $\boldsymbol{abc}$ по абсолютной величине равно объему параллелепипеда, построенного на этих векторах (черт. 30). Знак числа abc определяется ориентацией упорядоченной тройки векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$. Если ее ориентация совпадает с ориентацией координатной базы, то $\boldsymbol{abc} > 0$, в противном случае $\boldsymbol{abc} < 0$.

Основные свойства смешанного произведения векторов:

1. $\boldsymbol{abc} = [\boldsymbol{ab}]\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}[\boldsymbol{bc}]$;
2. $\boldsymbol{abc} = \boldsymbol{bca} = \boldsymbol{cab} = -\boldsymbol{bac}$;
3. $(\alpha\boldsymbol{a})\boldsymbol{bc} = \alpha(\boldsymbol{abc})$;
4. $\boldsymbol{ab}(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}) = \boldsymbol{abc} + \boldsymbol{abd}$.

Пусть в аффинной базе $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ даны координатами: $\boldsymbol{a}$ $\{\alpha_1, \beta_1, \gamma_1\}$, $\boldsymbol{b}$ $\{\alpha_2, \beta_2, \gamma_2\}$, $\boldsymbol{c}$ $\{\alpha_3, \beta_3, \gamma_3\}$, тогда

$$\boldsymbol{abc} = \begin{vmatrix}\alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1\\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2\\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3\end{vmatrix}(\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3).$$

В прямоугольном декартовом базисе $\boldsymbol{ijk} = 1$, поэтому эта формула принимает вид:

$$\boldsymbol{abc} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}.$$

Пользуясь смешанным произведением, можно вычислить объем тетраэдра, заданного координатами своих вершин. Если V — объем тетраэдра $ABCD$, вершины которого в прямоугольной декартовой системе имеют координаты $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$ и $D(x_4, y_4, z_4)$, то

$$V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix}.$$

§ 33. Скалярное произведение векторов

649. Даны векторы[1]: $\boldsymbol{a}\{4, -2, -4\}$, $\boldsymbol{b}\{2, 4, 3\}$, $\boldsymbol{c}\{0, 1, -1\}$. Вычислить:

а) $\boldsymbol{ab}$; б) $\boldsymbol{ac}$; в) $\sqrt{\boldsymbol{a}^2}$; г) $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c})$; д) $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2$.

650. Даны векторы: $\boldsymbol{a}\{2, -1, 0\}$, $\boldsymbol{b}\{1, \sqrt{2}, -5\}$, $\boldsymbol{c}\{1, 2, 5\}$, $\boldsymbol{d}\{1, 0, 2\}$. Вычислить скалярные произведения: $\boldsymbol{ab}$, $\boldsymbol{ac}$, $\boldsymbol{ad}$, $\boldsymbol{bc}$, $\boldsymbol{bd}$, $\boldsymbol{cd}$.

651. Даны векторы: $\boldsymbol{a}\{1, 5, 1\}$, $\boldsymbol{b}\{1, -5, 2\}$, $\boldsymbol{c}\{2, 1, \frac{3}{2}\}$, $\boldsymbol{d}\{0, 0, 1\}$. Вычислить их попарные скалярные произведения и по этим произведениям узнать, образуют ли они острый, прямой или тупой угол.

652. Доказать, что диагонали четырехугольника, заданного координатами своих вершин $A(-4, -4, 4)$, $B(-3, 2, 2)$, $C(2, 5, 1)$, $D(3, -2, 2)$, взаимно перпендикулярны.

653. Определить косинус угла между векторами:

а) $\boldsymbol{a}_1\{2, -1, 3\}$ и $\boldsymbol{b}_1\{1, -4, 3\}$; б) $\boldsymbol{a}_2\{2, -2, 1\}$ и $\boldsymbol{b}_2\{3, 0, -4\}$; в) $\boldsymbol{a}_3\{0, -1, 5\}$ и $\boldsymbol{b}_3\{7, 5, 1\}$.

654. Даны вершины треугольника: $A(2, 1, \sqrt{2})$, $B(1, 0, 0)$ и $C(1+\sqrt{3}, \sqrt{3}, -\sqrt{6})$. Найти углы треугольника.

---

[1] Система координат в данной главе предполагается правой прямоугольной декартовой, если нет специальных оговорок.

655. Показать, что четырехугольник с вершинами A (4, 0, 8), B (5, 2, 6), C (3, 1, 4), D (2, — 1, 6) является квадратом.

656. Какой угол составляют между собой ненулевые векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, если известно, что вектор $\boldsymbol{a} + 3\boldsymbol{b}$ перпендикулярен вектору $7\boldsymbol{a} - 5\boldsymbol{b}$, а вектор $\boldsymbol{a} - 4\boldsymbol{b}$ перпендикулярен вектору $7\boldsymbol{a} - 2\boldsymbol{b}$?

657. Пусть $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ — произвольные ненулевые векторы, лежащие в ориентированной плоскости, а $\boldsymbol{a}'$ и $\boldsymbol{b}'$ — векторы, полученные из $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ путем поворота на $+90°$. Доказать, что $\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}' + \boldsymbol{b}\boldsymbol{a}' = 0$.

658. Найти косинус угла при вершине равнобедренного треугольника, если медианы, проведенные из концов его основания, взаимно перпендикулярны.

659. Треугольник ABC задан векторами $\overline{AB} = \boldsymbol{b}$ и $\overline{AC} = \boldsymbol{c}$. Выразить через векторы $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ вектор $\boldsymbol{h}$, направленный по высоте $\overline{AH}$.

660. Даны координаты вершин треугольника: A (1, 1, 1), B (5, 3, 0), C (2, 0, 1). Определить координаты и длину вектора BH, где H — основание перпендикуляра, опущенного из вершины B на противоположную сторону.

661. Даны три некомпланарных вектора: $\overline{OA}\{1, -1, -2\}$, $\overline{OB}\{1, 0, -1\}$ и $\overline{OC}\{2, 2, -1\}$.

Найти координаты вектора $\overline{OH}$, где H — основание перпендикуляра, опущенного из точки O на плоскость ABC.

662. Пусть $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ — ненулевые коллинеарные векторы. При каком условии существует вектор $\boldsymbol{x}$, удовлетворяющий условиям: $\boldsymbol{ax} = \alpha$, $\boldsymbol{bx} = \beta$?

663. Доказать теорему: если векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ не компланарны, то, каковы бы ни были числа α, β, γ, существует один и только один вектор $\boldsymbol{x}$, удовлетворяющий уравнениям: $\boldsymbol{ax} = \alpha$, $\boldsymbol{bx} = \beta$, $\boldsymbol{cx} = \gamma$.

664. Даны векторы: $\boldsymbol{a}\{2, -1, 3\}$, $\boldsymbol{b}\{1, -3, 2\}$, $\boldsymbol{c}\{3, 2, -4\}$. Определить координаты вектора $\boldsymbol{x}$, удовлетворяющего условиям: $\boldsymbol{xa} = 10$, $\boldsymbol{xb} = 22$, $\boldsymbol{xc} = -40$.

665. Пусть $\boldsymbol{a}\left\{\frac{3}{2}, 1, -\frac{5}{2}\right\}$, $\boldsymbol{b}\{-3, -2{,}5\}$. Существует ли вектор $\boldsymbol{x}$, удовлетворяющий условиям: $\boldsymbol{ax} = 2$, $\boldsymbol{bx} = 3$?

666. Даны векторы: $\boldsymbol{a}\{2, 1, 1\}$, $\boldsymbol{b}\{1, 3, 1\}$, $\boldsymbol{c}\{1, 1, 5\}$, $\boldsymbol{d}\{2, 3, -3\}$. Найти вектор $\boldsymbol{x}$, удовлетворяющий условиям: $\boldsymbol{ax} = 2$, $\boldsymbol{bx} = 5$, $\boldsymbol{cx} = -7$, $\boldsymbol{dx} = 14$.

667. Доказать теорему: для того чтобы сумма двух неколлинеарных векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ была направлена вдоль биссектрисы угла, образованного этими векторами, необходимо и достаточно, чтобы $|\boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{b}|$.

668. Определить вектор, коллинеарный биссектрисе угла A треугольника ABC с вершинами в точках $A(1, 3, 5)$, $B(3, 5, 6)$ и $C(4, 7, 5)$.

669. Найти угол между двумя биссектрисами плоских углов прямого трехгранного угла.

670. Пусть $OABC$ — прямой трехгранный угол, OM — луч, исходящий из вершины этого угла, а α, β, γ— углы, которые образует луч OM с лучами OA, OB и OC. Показать, что

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

671. Диагональ AE прямоугольного параллелепипеда образует с каждым из двух ребер, выходящих из точки A, угол $60°$. Какой угол она образует с третьим ребром, выходящим из той же точки A?

672. Определить проекцию вектора $\boldsymbol{p} = 5\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$ на ось, имеющую направление вектора $\boldsymbol{q} = 5\boldsymbol{i} - 12\boldsymbol{j}$.

673. Найти проекцию вектора $\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$ на ось, образующую равные острые углы с тремя координатными осями.

674. Дан параллелограмм $OABC$. Пусть $\overline{OA} = \overline{CB} = \boldsymbol{a}$, $\overline{OC} = \overline{AB} = \boldsymbol{b}$. Дать геометрическое истолкование формул:

а) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2 + (\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2 = 2(\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2)$;
б) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2 - (\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2 = 4\boldsymbol{ab}$;
в) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a}^2 - \boldsymbol{b}^2$.

675. Дан прямоугольник $ABCD$ и произвольная точка M пространства. Доказать, что

1) $\overline{MA}\cdot\overline{MC} = \overline{MB}\cdot\overline{MD}$, где A и C, B и D — противоположные вершины прямоугольника;

2) $MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2$.

676. Доказать, что в аффинном базисе $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ скалярное произведение векторов $\boldsymbol{a}\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ и $\boldsymbol{b}\{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ вычисляется по формуле

$$\boldsymbol{ab} = \sqrt{\sum_{i, j=1}^{3} g_{ij}\alpha_i\beta_j},$$

где $g_{ij} = \boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j$.

§ 34. Векторное и смешанное произведения векторов

677. Преобразовать выражения:

а) $[(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})]$; б) $[(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})]$; в) $[\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})]$.

678. Определить координаты и модули векторов:

а) $[\boldsymbol{ab}]$; б) $[\boldsymbol{ac}]$; в) $[\boldsymbol{bd}]$; г) $[\boldsymbol{da}]$; д) $[\boldsymbol{ad}]$; е) $[\boldsymbol{bc}]$,

если $\boldsymbol{a}\{0, 1, 0\}$, $\boldsymbol{b}\{2, -1, 3\}$, $\boldsymbol{c}\{0, 5-2\}$, $\boldsymbol{d}\{1, 2, -3\}$.

679. Определить координаты векторов: а) $[\boldsymbol{a}[\boldsymbol{bc}]]$; б) $[[\boldsymbol{ab}]\boldsymbol{c}]$, если $\boldsymbol{a}\{1, 1, 0\}$, $\boldsymbol{b}\{0, 3, 1\}$, $\boldsymbol{c}\{2, 0, 1\}$.

680. Пользуясь векторным произведением, вычислить площадь треугольника ABC в каждом из следующих случаев:

а) $A(2, 1, 0)$, $B(-3, -6, 4)$, $C(-2, 4, 1)$;
б) $A(4, 2, 3)$, $B(5, 7, 0)$, $C(2, 8, -1)$;
в) $A(6, 5, -1)$, $B(12, 1, 0)$, $C(1, 4, -5)$.

681. Вычислить синус угла A треугольника ABC, если $A(3, 4, 1)$, $B(2, 1, 6)$, $C(4, 0, 2)$.

682. Найти расстояние от точки $C(3, 2, -2)$ до прямой, проходящей через точки $A(1, 2, -3)$ и $B(5, 2, 0)$.

683. Моментом приложенной к точке A силы $\boldsymbol{f}$ относительно точки B называется вектор $\boldsymbol{p}=[\overline{BA}\ \boldsymbol{f}]$. Определить момент силы $\boldsymbol{f}$ в каждом из следующих случаев:

а) $\boldsymbol{f}\{2, -4, 3\}$, $A(1, 5, 0)$, $B(0, 0, 0)$;
б) $\boldsymbol{f}\{2, -4, 3\}$, $A(1, 5, 0)$, $B(5, -3, 6)$;
в) $\boldsymbol{f}\{3, 0, 1\}$, $A(5, 2, 6)$, $B(4, 5, 2)$.

684. Показать, что:

а) момент силы относительно точки не меняется, если точку приложения силы переместить по прямой, вдоль которой сила действует;

б) момент равнодействующей нескольких сил, приложенных к одной и той же точке, равен сумме моментов составляющих сил относительно той же точки.

685. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (см. черт. 26) репер $\overline{AA_1}\ \overline{AB}$ и $\overline{AD}$ имеет левую ориентацию. Определить ориентации реперов:

а) $\overline{DA}$, $\overline{DC}$, $\overline{DD_1}$; б) $\overline{C_1C}$, $\overline{C_1D_1}$, $\overline{C_1B_1}$;

в) $\overline{D_1A_1}$, $\overline{D_1D}$, $\overline{D_1B_1}$; г) $\overline{BA}$, $\overline{BB_1}$, $\overline{BC}$; д) $\overline{FB}$, $\overline{FD}$, $\overline{FA_1}$, где F — середина ребра AD.

686. К каждой грани треугольной призмы восставлен перпендикулярный вектор, направленный во внешнюю сторону тетраэдра и имеющий модуль, равный площади соответствующей грани. Доказать, что сумма всех построенных векторов равна нулю.

687. К каждой грани произвольного тетраэдра восставлен перпендикулярный вектор, направленный во внешнюю сторону тетраэдра и имеющий модуль, равный площади соответствующей грани. Доказать, что сумма всех построенных векторов равна нулю.

688. Вычислить произведения:

$$\alpha = \boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}),$$
$$\beta = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a})(\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{c}),$$
$$\gamma = (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}),$$

если $\boldsymbol{abc} = 5$.

689. Найти смешанное произведение и определить ориентацию векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ в каждом из следующих случаев:

а) $\boldsymbol{a}\{2, -3, 1\}$, $\boldsymbol{b}\{1, 1, 2\}$, $\boldsymbol{c}\{3, 1, -1\}$;
б) $\boldsymbol{a}\{-2, 1, 5\}$, $\boldsymbol{b}\{3, 0, 2\}$, $\boldsymbol{c}\{-1, 4, 2\}$;
в) $\boldsymbol{a}\{1, -1, 1\}$, $\boldsymbol{b}\{5, 2, -3\}$, $\boldsymbol{c}\{1, 4, -2\}$.

690. Вычислить $\boldsymbol{abc}$ и $\boldsymbol{b}[\boldsymbol{ac}]$, если $\boldsymbol{a}\{2, -3, 1\}$, $\boldsymbol{b}\{1, 1, 2,\}$, $\boldsymbol{c}\{3, 1, -1\}$.

691. Пусть $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ — произвольные векторы, а α, β, γ — произвольные числа, Доказать, что векторы $\alpha\boldsymbol{a} - \beta\boldsymbol{b}$, $\gamma\boldsymbol{b} - \alpha\boldsymbol{c}$, $\beta\boldsymbol{c} - \gamma\boldsymbol{a}$ компланарны.

692. Пусть $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ и $\boldsymbol{d}$ — произвольные векторы. Проверить тождества:

а) $[\boldsymbol{ab}]^2 + (\boldsymbol{ab})^2 = \boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2$;
б) $[(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})] = 2[\boldsymbol{ab}]$;
в) $[[\boldsymbol{ab}]\boldsymbol{c}] = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{ac}) - \boldsymbol{a}(\boldsymbol{bc})$;
г) $[\boldsymbol{ab}][\boldsymbol{cd}] = (\boldsymbol{ac})(\boldsymbol{bd}) - (\boldsymbol{ad})(\boldsymbol{bc})$;
д) $[\boldsymbol{a}[\boldsymbol{bc}]] + [\boldsymbol{b}[\boldsymbol{ca}]] + [\boldsymbol{c}[\boldsymbol{ab}]] = 0$.

Пользуясь первым из этих соотношений, доказать тождество Лагранжа:

$$\begin{vmatrix} x_1 y_1 \\ x_2 y_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} y_1 z_1 \\ y_2 z_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_1 x_1 \\ z_2 x_2 \end{vmatrix}^2 =$$
$$= \begin{vmatrix} x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 & x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 \\ x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 & x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 \end{vmatrix}.$$

693. Доказать, что если $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$ и $\boldsymbol{k}$ — взаимно перпендикулярные единичные векторы, то для любых векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ справедливо соотношение: $[\boldsymbol{ab}] = (\boldsymbol{abi})\,\boldsymbol{i} + (\boldsymbol{abj})\,\boldsymbol{j} + (\boldsymbol{abk})\,\boldsymbol{k}$.

694. Вычислить объем тетраэдра, вершины которого находятся в точках:

а) $A\ (2, -1, -1)$, $B\ (5, -1, 2)$, $C\ (3, 0, -3)$, $D\ (6, 0, -1)$;
б) $A\ (0, 0, 0)$, $B\ (3, 4, -1,)$, $C\ (2, 3, 5)$, $D\ (6, 0, -3)$.

695. Найти длину высоты AH тетраэдра $ABCD$, вершины которого находятся в точках: $A\ (2, -4, 5)$, $B\ (-1, -3, 4)$, $C\ (5, 5, -1)$, $D\ (1, -2, 2)$.

696. Дан параллелепипед $ABCDA'B'C'D'$, построенный на векторах $\overline{AB}\{4, 3, 0\}$, $\overline{AD}\{2, 1, 2\}$ и $\overline{AA'}\{-3, -2, 5\}$. Найти: а) объем параллелепипеда; б) площади граней; в) длину высоты, проведенной из вершины A' на грань $ABCD$; г) косинус угла φ_1 между ребром AB и диагональю $B'D$; д) косинус угла φ_2 между гранями $ABCD$ и $ADD'A'$.

697. В треугольной призме $ABC\,A'B'C'$ векторы $\overline{AB}\{0, 1, -1\}$ и $\overline{AC}\ \{2, -1, 4\}$ определяют основание, а вектор $\overline{AA'}\{-3, 2, 2\}$ направлен по боковому ребру. Найти: а) объем призмы; б) площади граней; в) высоту; г) угол φ между ребрами $B'C'$ и AA'.

698. Дан тетраэдр, построенный на векторах $\overline{AB}\ \{2, 0, 0\}$, $\overline{AC}\ \{3, 4, 0\}$ и $\overline{AD}\ \{3, 4, 2\}$. Найти: а) объем тетраэдра; б) площади граней; в) длину высоты h, проведенной из вершины D; г) косинус угла φ_1 между ребрами AB и BC; д) косинус угла φ_2 между гранями ABC и ADC.

699. Дан треугольник координатами своих вершин: $A\ (-1, 1, 2)$, $B\ (1, 1, 0)$, $C\ (2, 6, -2)$. Найти: а) площадь треугольника; б) косинусы внутренних углов; в) длину высоты BH и координаты вектора $\overline{BH}$; г) вектор $\boldsymbol{a}$, коллинеарный биссектрисе угла A; д) координаты центра тяжести треугольника.

700. Четырехугольник $ABCD$ задан координатами своих вершин: $A\ (2, -3, 1)$, $B\ (-1, 1, 1)$, $C\ (-4, 5, 6)$, $D(2, -3, 6)$. Доказать, что $ABCD$ — плоский выпуклый четырехугольник. Найти: а) площадь четырехугольника; б) косинусы его углов; в) вектор $\boldsymbol{a}$, коллинеарный биссектрисе угла A; г) вектор $\overline{BH}$, где H — основание перпендикуляра, опущенного из точки B на прямую AC; д) координаты центра тяжести четырехугольника.

701. Даны векторы $\overline{AB}\{3, -1, 2\}$, $\overline{AC}\{5, 1, 0\}$. Определить площадь треугольника ABC. Определить координаты какого-либо вектора $\boldsymbol{h}$, компланарного с векторами $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$ и перпендикулярного к вектору $\boldsymbol{m} = \overline{AB} - \overline{AC}$.

§ 35. Свойства произведений векторов, отличные от свойств произведения чисел

702. Если a и b — числа, то $ab = ba$. Будет ли справедливо это свойство: а) для скалярного произведения векторов; б) для векторного произведения векторов?

703. Если a и b — числа, то из равенства $ab = 0$ следует, что хотя бы одно из чисел a и b равно нулю. Будет ли справедливо это свойство: а) для скалярного произведения векторов; б) для векторного произведения векторов?

704. Если a и b — числа, то уравнение $ax = b$ при $a \neq 0$ имеет единственное решение. Будет ли справедливо это положение, если дано уравнение $\boldsymbol{ax} = \alpha$, где $\boldsymbol{a}$ — ненулевой вектор, α — данное число, а $\boldsymbol{ax}$ — скалярное произведение данного и искомого векторов? Выяснить геометрический смысл решений.

705. Пусть $\boldsymbol{a}$ — ненулевой вектор, а k — произвольное число. Решить и исследовать уравнение $\boldsymbol{x}^2 + 2\boldsymbol{ax} + k = 0$.

706. Решить и исследовать уравнения:

а) $\boldsymbol{x}^2 - 2\boldsymbol{ax} + 30 = 0$; б) $\boldsymbol{x}^2 + 2\boldsymbol{bx} + 1 = 0$; в) $\boldsymbol{x}^2 - \boldsymbol{cx} + 15 = 0$, где $\boldsymbol{a}\{1, 2, -5\}$, $\boldsymbol{b}\{0, 2, 0\}$, $\boldsymbol{c}\{1, 1, -2\}$.

707. Пусть $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ — произвольные векторы. Всегда ли имеет решение уравнение $[\boldsymbol{ax}] = \boldsymbol{b}$? В случае, когда уравнение имеет решение, выяснить геометрический смысл.

708. Найти вектор $\boldsymbol{x}$ из системы уравнений: а) $\boldsymbol{xa} = \alpha$, $[\boldsymbol{xa}] = \boldsymbol{b}$ при $\boldsymbol{b} \neq 0$; б) $\boldsymbol{xa} = 0$, $\boldsymbol{xb} = 0$ при $\boldsymbol{a} \neq 0$, $\boldsymbol{b} \neq 0$. Написать условия разрешимости этой системы.

709. Найти вектор $\boldsymbol{x}$, удовлетворяющий условию $\boldsymbol{abx} = \alpha$, где $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ — данные векторы, а α — данное число. Всегда ли уравнение имеет решение? Выяснить геометрический смысл.

710. Пусть $[\boldsymbol{ac}] = [\boldsymbol{bc}]$ при $\boldsymbol{c} \neq 0$. Можно ли сократить это соотношение на $\boldsymbol{c}$, т. е. следует ли из предыдущего соотношения, что $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$?

711. Пусть $[\boldsymbol{ap}] = [\boldsymbol{bp}]$, для любого вектора $\boldsymbol{p}$. Следует ли отсюда, что $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$?

712. Пусть $\boldsymbol{ac} = \boldsymbol{bc}$, при $\boldsymbol{c} \neq 0$. Можно ли сократить это соотношение на $\boldsymbol{c}$? Объяснить результат.

713. Если α, β и γ — произвольные числа, то $\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma$. Имеется ли аналогичное свойство в векторной алгебре, т. е. справедливы ли соотношения $(\boldsymbol{ab})\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}(\boldsymbol{bc})$ и $[\boldsymbol{a}[\boldsymbol{bc}]] = [[\boldsymbol{ab}]\boldsymbol{c}]$ для любых векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$?

714. Если k — натуральное число, а α — некоторое число, то, как известно, понятие натуральной степени числа α вводится так: $\alpha^k = \underbrace{\alpha\alpha \ldots \alpha}_{k \text{ раз}}$. Почему при $k > 2$ не вводится аналогичное понятие в векторной алгебре?

715. Пусть $\boldsymbol{x}^3 = (\boldsymbol{xx})\boldsymbol{x}$. Решить уравнения: а) $\boldsymbol{x}^3 = \boldsymbol{a}$; б) $\boldsymbol{ax}^2 + \boldsymbol{b}^3 = 0$, где $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ — данные ненулевые векторы.

§ 36. Приложение векторной алгебры к решению задач элементарной геометрии

716. Доказать, что диагонали ромба взаимно перпендикулярны.

717. Доказать, что в любом треугольнике ABC имеют место соотношения: а) $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$; б) $\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} C = \frac{a^2+b^2+c^2}{4S}$, где S — площадь, а a, b, c — стороны треугольника ABC.

718. Доказать, что сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон.

719. Доказать, что сумма квадратов диагоналей любого четырехугольника равна сумме квадратов всех его сторон без учетверенного квадрата отрезка, соединяющего середины диагоналей.

720. Показать, что если AM — биссектриса треугольника ABC, то $\overline{AM} = \frac{b \cdot \overline{AB} + c \cdot \overline{AC}}{b+c}$, где $b = AC$, $c = AB$. Пользуясь этим соотношением:

а) вывести формулу для вычисления длины биссектрисы:

$$AM = \frac{2bc\cos\frac{A}{2}}{b+c};$$

5*

б) доказать теорему: $\frac{BM}{MC}=\frac{b}{c}$.

721. Вершина A треугольника соединена с точками A_1, A_2, делящими сторону BC на три равные части. Показать, что разность квадратов отрезков AA_1 и AA_2 в три раза меньше разности квадратов сторон, выходящих из вершины A.

722. Доказать, что если в некотором (не обязательно плоском) четырехугольнике диагонали взаимно перпендикулярны, то сумма квадратов двух противоположных сторон равна сумме квадратов двух других сторон.

Доказать обратную теорему.

723. В квадрат $ABCD$ вписан прямоугольник $MNPQ$ так, что вершины M, N, P и Q лежат соответственно на сторонах AB, BC, CD и DA.

Показать, что либо $MNPQ$ есть также квадрат, либо стороны прямоугольника $MNPQ$ параллельны диагоналям квадрата $ABCD$.

724. На сторонах параллелограмма вне его построены квадраты. Доказать, что центры этих квадратов являются вершинами нового квадрата.

725. Пусть для треугольной пирамиды $OABC$ введены обозначения $\angle CAB=\alpha$, $\angle ABC=\beta$, $\angle BCA=\gamma$, $OA=a$, $OB=b$, $OC=c$. Показать, что $\operatorname{ctg}\alpha : \operatorname{ctg}\beta : \operatorname{ctg}\gamma = a^2 : b^2 : c^2$, если плоские углы при вершине O прямые.

726. Показать, что угол Θ между двумя противоположными ребрами произвольного тетраэдра вычисляется по формуле:

$$\cos\Theta=\frac{c^2+c'^2-b^2-b'^2}{2aa'},$$

где a и a' — длины рассматриваемых ребер, а b и b', c и c' — длины противоположных ребер двух других пар.

727. Показать, что в правильной треугольной пирамиде противоположные ребра взаимно перпендикулярны.

728. Доказать, что если в тетраэдре две пары противоположных ребер взаимно перпендикулярны, то третья пара ребер также взаимно перпендикулярна.

729. Зная длины всех шести ребер тетраэдра, определить длины всех отрезков, соединяющих попарно середины противоположных сторон.

730. Вершина параллелепипеда и центры трех противоположных для данной вершины граней служат вершинами

пирамиды. Используя свойства смешанного произведения векторов, выяснить, какую часть объема параллелепипеда составляет объем этой пирамиды.

731. Из вершины произвольного параллелепипеда проведены три диагонали прилежащих граней. Пользуясь свойствами смешанного произведения, установить, какую часть объема параллелепипеда составляет объем пирамиды, боковыми ребрами которой служат эти диагонали.

ГЛАВА XI

ПЛОСКОСТЬ И ПРЯМАЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

Если в пространстве выбрана аффинная система координат $O\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3$, то плоскость может быть задана одним из следующих способов.

1. Плоскость задана некоторой точкой M_0 (x_0, y_0, z_0) и двумя неколлинеарными векторами: $\boldsymbol{p}\{\alpha_1, \beta_1, \gamma_1\}$ и $\boldsymbol{q}\{\alpha_2, \beta_2, \gamma_2\}$, параллельными плоскости. В этом случае уравнение плоскости имеет вид:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Параметрические уравнения плоскости при данном способе задания имеют вид:

$$x = x_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 u, \quad y = y_0 + \beta_1 t + \beta_2 u, \quad Z = Z_0 + \gamma_1 t + \gamma_2 u.$$

Здесь t и u — параметры любой точки плоскости.

2. Плоскость задана тремя точками: M_1 (x_1, y_1, z_1), M_2 (x_2, y_2, z_2) и M_3 (x_3, y_3, z_3), не лежащими на одной прямой. В этом случае уравнение плоскости записывается так:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0, \text{ или } \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

3. Плоскость задана длинами a, b и c направленных отрезков, отсекаемых на осях координат. Здесь $a = \dfrac{\overline{OA}}{\boldsymbol{e}_1}$, $b = \dfrac{\overline{OB}}{\boldsymbol{e}_2}$, $c = \dfrac{\overline{OC}}{\boldsymbol{e}_3}$, где A, B и C точки пересече-

ния плоскости с осями Ox, Oy и Oz. Этот способ задания плоскости возможен только в том случае, когда плоскость не проходит через начало координат и не параллельна координатным осям. Уравнение плоскости «в отрезках» имеет вид:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

Рассмотренные выше способы задания плоскости могут быть применены также и в том случае, когда данная система является прямоугольной декартовой. Однако в этом случае возможны и другие способы задания плоскости.

4. Плоскость задана некоторой точкой $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и нормальным вектором $\boldsymbol{n}\{\alpha, \beta, \gamma\}$, т. е. ненулевым вектором, перпендикулярным плоскости. В этом случае уравнение плоскости имеет вид:

$$\alpha(x - x_0) + \beta(y - y_0) + \gamma(z - z_0) = 0.$$

5. Плоскость задана расстоянием ρ от начала координат до плоскости и углами φ_1, φ_2, φ_3, которые образуют оси координат с перпендикуляром, опущенным из начала координат на плоскость. В этом случае уравнение плоскости называется нормальным и записывается так:

$$\cos\varphi_1 x + \cos\varphi_2 y + \cos\varphi_3 z - \rho = 0. \qquad (1)$$

Рассмотренные выше уравнения плоскости имеют следующую характерную особенность: все они являются алгебраическими уравнениями первой степени, т. е. уравнениями вида:

$$Ax + By + Cz + D = 0. \qquad (2)$$

Имеет место обратное предложение, которое называется основной теоремой теории плоскости. *Геометрическое место точек пространства, координаты которых в некоторой аффинной системе удовлетворяют уравнению* (2), *где* A, B *и* C *одновременно не равны нулю, есть плоскость, параллельная векторам* $\boldsymbol{p}\{B, -A, 0\}$, $\boldsymbol{q}\{C, 0, -A\}$, $\boldsymbol{r}\{0, C, -B\}$. Соотношение (2) называется общим уравнением плоскости.

Для координат (x, y, z) всех точек пространства, лежащих по одну сторону от плоскости (2), имеет место неравенство $Ax + By + Cz + D > 0$, а для координат точек, лежащих по другую сторону, $Ax + By + Cz + D < 0$.

По коэффициентам A, B и C общего уравнения плоскости можно судить о расположении плоскости относительно системы координат:

а) Плоскость (2) проходит через начало координат тогда и только тогда, когда $D = 0$.

б) Плоскость (2) параллельна оси Ox тогда и только тогда, когда $A = 0$; параллельна оси Oy тогда и только тогда, когда $B = 0$ и параллельна оси Oz тогда и только тогда, когда $C = 0$.

Пусть в аффинной системе координат даны две плоскости своими общими уравнениями:

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \tag{3}$$
$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \tag{4}$$

Рассмотрим две матрицы:

$$\begin{pmatrix} A_1 B_1 C_1 \\ A_2 B_2 C_2 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} A_1 B_1 C_1 D_1 \\ A_2 B_2 C_2 D_2 \end{pmatrix}$$

и обозначим через r ранг первой матрицы, а через R—ранг второй. Очевидно, $1 \leqslant r \leqslant R \leqslant 2$. По числам r и R можно установить взаимное расположение данных плоскостей:

а) Плоскости (3) и (4) совпадают тогда и только тогда, когда $R = 1$.

б) Плоскости (3) и (4) пересекаются тогда и только тогда, когда $r = 2$.

в) Плоскости (3) и (4) параллельны тогда и только тогда, когда $r = 1$, $R = 2$.

Пучком плоскостей, определяемым плоскостями (3) и (4), называется совокупность *всех* плоскостей, проходящих через прямую пересечения этих плоскостей, если они пересекаются, и совокупность *всех* плоскостей, параллельных плоскостям (3) и (4), если они параллельны или совпадают. В первом случае говорят, что дан *пучок пересекающихся плоскостей*, а во втором случае — *пучок параллельных плоскостей*.

Уравнение пучка, определяемого различными прямыми (3) и (4), записывается так:

$$\alpha (A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \beta (A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0,$$

где α и β принимают всевозможные значения, не равные одновременно нулю.

Для того чтобы три плоскости, заданные уравнениями

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$
$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$$
$$A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0,$$

имели одну и только одну общую точку, необходимо и достаточно, чтобы

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Если плоскость задана в прямоугольной декартовой системе нормальным уравнением (1), то расстояние d от точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до этой плоскости вычисляется по формуле

$$d = |\cos\varphi_1 x_0 + \cos\varphi_2 y_0 + \cos\varphi_3 z_0 - \rho|.$$

Если же плоскость задана общим уравнением (2), то

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Если плоскость задана в прямоугольной декартовой системе координат уравнением (2), то вектор $\boldsymbol{n}\{A, B, C\}$ перпендикулярен плоскости, и если его приложить к некоторой точке плоскости, то координаты (x_1, y_1, z_1) его конца удовлетворяют условию $Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D > 0$.

Косинусы углов между плоскостями (3) и (4), заданными в прямоугольной декартовой системе, определяются соотношениями:

$$\cos\varphi_{1,2} = \pm\frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Равенство $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$ является необходимым и достаточным условием перпендикулярности плоскостей (3) и (4).

Если в пространстве выбрана аффинная система координат $O'\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3$, то прямая может быть задана одним из следующих способов:

1. Прямая задана координатами некоторой точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и ненулевого вектора $\boldsymbol{p}\{\alpha, \beta, \gamma\}$, параллельного прямой. Точка M_0 называется *начальной точкой*, а $\boldsymbol{p}$ — *направляющим вектором*.

В этом случае уравнения прямой имеют вид:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 \\ \alpha & \beta \end{vmatrix}=0, \quad \begin{vmatrix} y-y_0 & z-z_0 \\ \beta & \gamma \end{vmatrix}=0, \quad \begin{vmatrix} z-z_0 & x-x_0 \\ \gamma & \alpha \end{vmatrix}=0,$$

или, если $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$, $\gamma \neq 0$:

$$\frac{x-x_0}{\alpha}=\frac{y-y_0}{\beta}=\frac{z-z_0}{\gamma}.$$

Эти уравнения называются **каноническими уравнениями прямой**.

Параметрические уравнения прямой при данном способе задания имеют вид:

$$x = x_0+\alpha t, \quad y = y_0+\beta t, \quad z = z_0 + \gamma t.$$

Здесь t — параметр любой точки прямой.

В векторной форме параметрическое уравнение прямой имеет вид: $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{p}t$.

Здесь $\boldsymbol{r}_0$— радиус-вектор начальной точки M_0, а $\boldsymbol{r}$ — радиус-вектор произвольной точки.

2. Прямая задана координатами двух различных точек: $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$. В этом случае уравнения прямой записываются так:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1} \quad \text{(канонические уравнения);}$$

$$\left.\begin{aligned} x &= x_1+(x_2-x_1)\,t, \\ y &= y_1+(y_2-y_1)\,t, \\ z &= z_1+(z_2-z_1)\,t \end{aligned}\right\} \quad \text{(параметрические уравнения).}$$

3. Прямая задана как линия пересечения двух пересекающихся плоскостей (3) и (4). В этом случае уравнения прямой имеют вид:

$$\left\{\begin{aligned} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0. \end{aligned}\right. \tag{5}$$

Геометрическое место точек пространства, координаты которых удовлетворяют системе (5), где коэффициенты при x, y и z не пропорциональны, есть прямая, параллельная вектору

$$\boldsymbol{p}\left\{\begin{vmatrix} B_1C_1 \\ B_2C_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} C_1A_1 \\ C_2A_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1B_1 \\ A_2B_2 \end{vmatrix}\right\}. \tag{6}$$

Соотношения (5) называются **общими уравнениями прямой**.

Для того чтобы перейти от общих уравнений к каноническим, необходимо по формуле (6) определить координаты направляющего вектора и найти числа x_0, y_0, z_0, удовлетворяющие системе (5). Эти числа можно принять за координаты начальной точки.

Пусть в аффинной системе координат даны две прямые каноническими уравнениями:

$$\frac{x-x_1}{\alpha_1}=\frac{y-y_1}{\beta_1}=\frac{z-z_1}{\gamma_1} \tag{7}$$

и

$$\frac{x-x_2}{\alpha_2}=\frac{y-y_2}{\beta_2}=\frac{z-z_2}{\gamma_2}. \tag{8}$$

Для того чтобы установить их взаимное расположение, введем в рассмотрение три вектора:

$$\overline{M_1M_2}\{x_2-x_1,\ y_2-y_1,\ z_2-z_1\},$$

$$\boldsymbol{p}_1\{\alpha_1,\ \beta_1,\ \gamma_1\},\ \boldsymbol{p}_2\{\alpha_2,\ \beta_2,\ \gamma_2\}$$

и рассмотрим следующие матрицы:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1\beta_1\gamma_1 \\ \alpha_2\beta_2\gamma_2 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{pmatrix}.$$

Если обозначить через r ранг первой матрицы, а через R — ранг второй, то, очевидно, $1 \leqslant r \leqslant R \leqslant 3$. По числам r и R можно установить взаимное расположение прямых (7) и (8):

а) Прямые (7) и (8) совпадают тогда и только тогда, когда $R=1$, т. е. когда $\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}_2$ и $\overline{M_1M_2}$ коллинеарны.

б) Прямые (7) и (8) параллельны тогда и только тогда, когда $r=1$ и $R=2$, т. е. когда $\boldsymbol{p}_1$ и $\boldsymbol{p}_2$ коллинеарны, а $\overline{M_1M_2}$ не коллинеарен им.

в) Прямые (7) и (8) пересекаются тогда и только тогда, когда $r=R=2$, т. е. когда $\boldsymbol{p}_1$ и $\boldsymbol{p}_2$ не коллинеарны, но $\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}_2$, $\overline{M_1M_2}$ компланарны.

г) Прямые (7) и (8) скрещиваются тогда и только тогда, когда $R=3$, т. е. когда $\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}_2$, $\overline{M_1M_2}$ не компланарны:

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Пусть в аффинной системе координат дана прямая

$$\frac{x-x_1}{\alpha}=\frac{y-y_1}{\beta}=\frac{z-z_1}{\gamma} \tag{9}$$

и плоскость

$$Ax + By + Cz + D = 0. \tag{10}$$

Прямая (9) пересекает плоскость (10) тогда и только тогда, когда $A\alpha + B\beta + C\gamma \neq 0$.

Прямая (9) параллельна плоскости (10) тогда и только тогда, когда

$$\begin{gathered} A\alpha + B\beta + C\gamma = 0, \\ Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D \neq 0. \end{gathered}$$

Прямая (9) лежит в плоскости (10) тогда и только тогда, когда

$$\begin{gathered} A\alpha + B\beta + C\gamma = 0, \\ Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0. \end{gathered}$$

Если две прямые в прямоугольной декартовой системе координат заданы каноническими уравнениями (7) и (8), то косинусы углов между этими прямыми определяются соотношениями:

$$\cos\varphi_{1,2} = \pm\frac{\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2}{\sqrt{\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2}\sqrt{\alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2}}.$$

Отсюда, в частности, получаем условие перпендикулярности двух прямых:

$$\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2 = 0.$$

Кратчайшее расстояние между прямыми (7) и (8) определяется по формуле:

$$d = \frac{\operatorname{mod}\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} \beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \gamma_1 & \alpha_1 \\ \gamma_2 & \alpha_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix}^2}}.$$

Расстояние от точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до прямой (9) определяется по формуле:

$$d = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ \beta & \gamma \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_1 - z_0 & x_1 - x_0 \\ \gamma & \alpha \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \\ \alpha & \beta \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}}$$

Угол между прямой (9) и плоскостью (10) определяется по формуле:

$$\sin\varphi = \frac{|A\alpha + B\beta + C\gamma|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}}.$$

Условие перпендикулярности прямой (9) на плоскости (10) имеет вид:

$$A = \lambda\alpha, \; B = \lambda\beta, \; C = \lambda\gamma,$$

где $\lambda \neq 0$.

§ 37. Составление уравнения плоскости по различным заданиям

732. Определить координаты нескольких точек, лежащих в плоскости $3x - 2y + z - 12 = 0$.

733. Определить координаты точки, имеющей абсциссу, равную единице и расположенной в плоскостях Oxz и $2x - y + z - 6 = 0$.

734. Найти уравнение плоскости:

а) проходящей через точку A (0, 2, 3) и параллельной векторам $\boldsymbol{p}_1 \{1, 0, 1\}$ и $\boldsymbol{p}_2 \{2, 1, 3\}$;

б) проходящей через точку A (0, 0, 1) и параллельной векторам $\boldsymbol{p}_1 \{2, 1, 5\}$ и $\boldsymbol{p}_2 \{1, 0, 1\}$.

735. Найти уравнение плоскости:

а) проходящей через точки M_1 (1, 2, 3), M_2 (2, — 1, 3) и параллельной вектору $\boldsymbol{p} \{1, 2, 2\}$;

б) проходящей через точки M_1 (— 1, 0, 0), M_2 (0, 0, 1) и параллельной вектору $\boldsymbol{p} \{2, 1, 2\}$;

в) проходящей через ось Ox и точку A (1, 1, 1).

736. Найти уравнение плоскости:

а) проходящей через точки M_1 (1, 2, 3), M_2 (2, 1, 3) и M_3 (0, — 1, 2);

б) проходящей через точки M_1 (0, 0, 0), M_2 (1, 2, 3) и M_3 (0, 3, 6).

737. Дан тетраэдр $ABCD$. Приняв точку A за начало координат и полагая $\boldsymbol{e}_1 = \overline{AB}$, $\boldsymbol{e}_2 = \overline{AC}$ и $\boldsymbol{e}_3 = \overline{AD}$, написать уравнения всех граней тетраэдра и плоскости ECD, где E — середина ребра AB.

738. Проверить, можно ли провести плоскость через следующие четверки точек:

а) (3, 1, 0),	(0, 1, 2),	(— 1, 0, — 5),	(4, 1, 5);
б) (2, 1, 0),	(1, — 1, 2),	(0, 4, — 2),	(3, 1, 2);
в) (0, 0, — 1),	(1, 3, 4),	(5, 0, — 3),	(4, 4, 1);
г) (0, 0, 2),	(3, 0, 5),	(1, 1, 0),	(4, 1, 2).

739. Даны вершины тетраэдра: A (4, 0, 2), B (0, 5, 1), C (4, — 1, 3) и D (3, — 1, 5).

а) Написать уравнение плоскости, проходящей через ребро AB и параллельной ребру CD.

б) Написать уравнение плоскости, проходящей через вершину A и параллельной грани BCD.

740. Найти точки пересечения следующих плоскостей с осями координат:

а) $2x - y + 3z - 6 = 0$; б) $5x + 2y + 5z - 10 = 0$;
в) $x - 2y + 4z + 4 = 0$; г) $x + y + z + 2 = 0$.

Построив на плоскости изображение некоторой общей аффинной пространственной системы координат, построить изображения точек пересечения указанных плоскостей с осями координат; построить изображения следов[1] каждой из плоскостей.

741. Указать особенности расположения следующих плоскостей по отношению к системе координат:

а) $x - z + 1 = 0$; г) $x + 2z = 0$; ж) $3y + 5 = 0$;
б) $x + 2y + 3z = 0$; д) $x - 3 = 0$; з) $2y - z = 0$;
в) $x - y + 2 = 0$; е) $y + z + 1 = 0$; и) $z = 0$.

Построив на плоскости изображение некоторой общей аффинной пространственной системы координат, построить изображения следов каждой из указанных выше плоскостей.

742. Написать уравнения плоскостей:

а) проходящих через точку M_0 (1, 2, — 1) и параллельных каждой из координатных плоскостей;

б) проходящих через две точки: M_1 (1, 2, — 4), M_2 (2, 0, — 3) и параллельных каждой из координатных осей;

в) проходящих через точку M (2, 1, — 5) и через каждую из координатных осей.

743. Составить уравнения плоскостей, каждая из которых проходит через одну из осей координат и параллельна вектору $\boldsymbol{p}$ $\{1, -2, 3\}$.

744. Написать «в отрезках» уравнения следующих плоскостей: а) $2x - y + 3z + 2 = 0$; б) $\frac{1}{2}x - 3y + z + 1 = 0$;

---

[1] *Следом плоскости* называется линия пересечения плоскости с координатной плоскостью.

в) плоскости, проходящей через точки M_1 (1, 1, 1), M_2 (3, 1, 5) и M_3 (1, 2, 3).

745. Плоскость проходит через точку M (1, -2, 5) и отсекает на оси абсцисс направленный отрезок с длиной $a = -3$, а на оси аппликат отрезок $c = 1$. Составить для этой плоскости уравнение «в отрезках».

746. Написать уравнение плоскости:

а) параллельной оси Oz и отсекающей на оси Ox направленный отрезок длиной $a = 3$, а на оси Oy направленный отрезок длиной $b = -4$.

б) отсекающей на осях Oy и Oz равные отрезки длиной $a = b = 4$.

747. Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку M (3, 2, 4) и отсекает на осях отличные от нуля отрезки одинаковой длины.

748. Пусть в некоторой аффинной системе координат дана плоскость $Ax + By + Cz + D = 0$ и вектор $\boldsymbol{p}\{\alpha, \beta, \gamma\}$. Доказать теорему: для того чтобы данная плоскость была параллельна вектору $\boldsymbol{p}$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие: $A\alpha + B\beta + C\gamma = 0$.

749. Пользуясь предыдущей задачей, выяснить, какие из векторов:

$$\boldsymbol{p}_1\{1, -3, 4\},\ \boldsymbol{p}_2\{0, 6, 4\},\ \boldsymbol{p}_3\{-1, 0, 0\},\ \boldsymbol{p}_4\{3, 0, 1\}$$

параллельны плоскости $x + 2y - 3z + 1 = 0$.

750. В общей аффинной системе координат дана плоскость: $2x - y + 3z + 5 = 0$.

а) Определить координаты нескольких векторов, параллельных данной плоскости.

б) Определить координаты нескольких векторов, параллельных одновременно данной плоскости и одной из координатных плоскостей.

751. Написать уравнение плоскости:

а) проходящей через точку M_0 (2, 3, -1) и перпендикулярной к вектору $\boldsymbol{n}$ $\{1, 2, -4\}$;

б) проходящей через начало координат и перпендикулярной вектору $\boldsymbol{n}$ $\{0, -3, 4\}$.

Система координат прямоугольная декартова.

752. Дан тетраэдр: A (-1, 2, 5), B (0, -4, 5), C (-3, 2, 1) и D (1, 2, 4). Написать уравнения плоскостей, проходящих через вершину D и перпендикулярных сторонам AB, BC и CA. Система координат прямоугольная декартова.

753. Найти геометрическое место точек, равноудаленных от точек A $(2, -1, 3)$ и B $(4, 5, -3)$. Система координат прямоугольная декартова.

754. Найти координаты нормальных векторов плоскостей:

а) $x + 2y - z + 1 = 0$; в) $y + 1 = 0$;
б) $x - 3z + 5 = 0$; г) $x - 3y + z + 4 = 0$.

Система координат прямоугольная декартова.

755. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки A $(1, -1, 3)$, B $(1, 2, 4)$ и перпендикулярной плоскости $2x - 3y + z + 1 = 0$. Система координат прямоугольная декартова.

756. Написать уравнение плоскости:

а) проходящей через начало координат и перпендикулярной плоскостям: $2x - y + 3z - 1 = 0$, $x + 2y + z = 0$;

б) проходящей через точку $(1, 1, -2)$ и перпендикулярной плоскостям: $2x + 3z = 0$ и $x - y + z - 1 = 0$.

Система координат прямоугольная декартова.

757. Составить уравнение касательной плоскости к сфере $x^2 + y^2 + z^2 = 49$ в точке M_0 $(2, -3, 6)$.

758. Составить уравнение касательной плоскости к сфере $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 + (z + 1)^2 = 24$ в точке M_0 $(0, 1, 3)$.

§ 38. Взаимное расположение плоскостей; пучок плоскостей

759. Установить взаимное расположение следующих пар плоскостей в аффинной системе координат:

а) $x - 3y + z + 1 = 0$, $2x + y - 4z + 2 = 0$;
б) $3x + y - z + 2 = 0$, $6x + 2y - 2z + 3 = 0$;
в) $\sqrt{2}x - y + 3z + \sqrt{2} = 0$, $2x - \sqrt{2}y + 3\sqrt{2}z + 2 = 0$;
г) $x + y + z - 1 = 0$, $x + y + z = 0$.

760. Составить уравнение плоскости, проходящей через начало координат и параллельной:

а) плоскости $2x - 4y + 5z - 3 = 0$;

б) плоскости $2y - 7z + 6 = 0$;

в) плоскости $3x + 5 = 0$.

761. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку M (1, -3, 5) и параллельной:

а) плоскости $3x - y + z + 4 = 0$;

б) плоскости $x - 3y + 7 = 0$;

в) плоскости $3z - 4 = 0$.

762. Пусть в аффинной системе координат даны две плоскости:

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$
$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

Доказать, что вектор $\boldsymbol{p}\left\{\begin{vmatrix} B_1 C_1 \\ B_2 C_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} C_1 A_1 \\ C_2 A_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 B_1 \\ A_2 B_2 \end{vmatrix}\right\}$, параллелен данным плоскостям и поэтому направлен вдоль их линии пересечения.

763. Даны две пересекающиеся плоскости:

$$x - 3y + 2z + 1 = 0, \qquad 2x - y + z = 0.$$

Определить: а) координаты некоторой точки, лежащей на линии пересечения данных плоскостей; б) координаты вектора $\boldsymbol{p}$, параллельного этим плоскостям.

Система координат аффинная.

764. Показать, что плоскости $2x - y + z - 4 = 0$, $x + y - z - 2 = 0$, $2x - y + 3z - 6 = 0$ пересекаются в одной точке, и найти ее координаты.

765. Показать, что плоскости $x - y + z + 1 = 0$, $2x - y - 3z - 2 = 0$, $4x - 3y - z = 0$ пересекаются по одной прямой.

766. Показать, что плоскости $x - y - z + 4 = 0$, $3x - z + 5 = 0$, $5x + y - z + 1 = 0$ пересекаются по трем параллельным между собой прямым.

767. Указать особенности в расположении плоскостей в каждом из следующих случаев:

а) $3x - y + \frac{1}{2}z - 1 = 0$, $6x - 2y + z + 2 = 0$,
$x + y - 5z + 3 = 0$;

б) $x + y - z + 1 = 0$, $x + y - z = 0$,
$-x - y + z - 1 = 0$;

в) $2x - y + 3z - \frac{1}{2} = 0$, $4x - 2y + 3z + 1 = 0$,
$-2x + y - 3z + 2 = 0$.

768. Показать, что четыре плоскости: $5x - z + 3 = 0$, $3y + 2z - 1 = 0$; $22x + 11y - 44z + 65 = 0$, $3x + 4y + 5z - 3 = 0$ пересекаются в одной точке. Найти координаты этой точки.

769. В аффинной системе координат даны три плоскости:

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$
$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$$
$$A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0.$$

При каких условиях, накладываемых на коэффициенты, эти плоскости пересекаются в одной и только в одной точке, лежащей в плоскости Oxy?

770. В аффинной системе координат даны две пересекающиеся плоскости:

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$
$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

При каком условии линия пересечения этих плоскостей пересекается с осью Oz?

771. В аффинной системе координат даны две пересекающиеся плоскости:

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$
$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

При каком условии линия пересечения этих плоскостей лежит в плоскости Oxy?

772. Плоскость π в прямоугольной декартовой системе координат задана уравнением $x + y - z + 1 = 0$. Написать уравнение плоскости, проходящей через линию пересечения данной плоскости и плоскости Oxz, перпендикулярной плоскости $x - 3y + z = 0$.

773. В прямоугольной декартовой системе координат даны уравнения граней трехгранного угла:

$$4x + 3y - 5z + 16 = 0,$$
$$3x - 2y - 4z + 7 = 0,$$
$$x + 4y - 2z + 5 = 0.$$

Написать уравнения трех плоскостей, каждая из которых проходит через некоторое ребро и перпендикулярна противолежащей грани.

774. Через линию пересечения плоскостей $4x - y + 3z - 1 = 0$, $x + 5y - z + 2 = 0$ провести плоскость:

а) проходящую через начало координат;

б) проходящую через точку (1, 1, 1);

в) параллельную оси Oy.

775. Написать уравнение плоскости, перпендикулярной плоскости $2x - 3y + z - 4 = 0$ и пересекающей ее по прямой, лежащей в плоскости Oyz.

Система координат прямоугольная декартова.

776. Через линию пересечения плоскостей $2x - y + z - 3 = 0$ и $x + y - 3z - 1 = 0$ провести плоскость так, чтобы она отсекала от оси Ox отрезок, равный 5.

777. В пучке, определяемом плоскостями $2x - y + 5z - 3 = 0$ и $x + y + 2z + 1 = 0$, найти две перпендикулярные плоскости, одна из которых проходит через точку M (1, 0, 1). Система координат прямоугольная декартова.

§ 39. Геометрический смысл линейных неравенств с тремя неизвестными

778. Даны точки M_1 (2, 5, 12), M_2 (1, 0, 0), M_3 (— 1, — 5, 4), M_4 (— 14, 22, 0), M_5 (1, — 5, 12), M_6 (0, 0, 5) и плоскости: а) $2x - y + z + 1 = 0$; б) $x - 2z + 12 = 0$; в) $x - 5y - 13z + 1 = 0$; г) $x + y + 4z - 1 = 0$; д) $x + 5y + z + 25 = 0$. Для каждой из данных плоскостей среди указанных точек выбрать те точки, которые лежат по ту же сторону от плоскости, что и начало координат.

779. Дана плоскость $3x - y + 4z + 1 = 0$. Указать, какие из пар точек, приведенных ниже, лежат по одну и ту же сторону от данной плоскости: а) O (0, 0, 0) и A (2, 1, 0); б) A_1 (1, 2, 1), A_2 (5, 15, — 1); в) B_1 (— 1, 2, — 5), B_2 (— 15, 1, 0); г) C_1 (1, $\sqrt{2}$, 5) и C_2 (1, 15, — 15).

780. Даны вершины треугольника A (2, 5, — 1), B (1, — 5, —15), C (— 2, 1, 3). Выяснить, какие из сторон треугольника пересекаются каждой из координатных плоскостей.

781. Даны вершины тетраэдра A (1, 1, 0), B (0, 2, 0), C (0, 0, 0,) и D (1, 5, 7). Записать линейные неравенства, характеризующие внутреннюю область тетраэдра.

782. Даны вершины тетраэдра A (— 1, 1, 0), B (— 2, 2, 0), C (— 2, 0, 0) и D (— 1, 5, 7). Выяснить, какие из указанных ниже точек расположены во внутренней области тетраэдра: $M_1 (2, 3, -1)$, $M_2\left(-\frac{8}{6}, \frac{10}{6}, \frac{7}{6}\right)$, $M_3 (0, 0, 1)$, $M_4\left(-\frac{14}{9}, \frac{19}{9}, \frac{35}{18}\right)$.

783. Две пересекающиеся плоскости $5x - y + z + 1 = 0$ и $x + y - 5z + 1 = 0$ делят множество всех точек пространства, не лежащих на них, на четыре двугранных угла (области). Составить систему неравенств, определяющих внутреннюю область двугранного угла, которому принадлежит точка A (3, 1, 2).

784. Доказать, что если в аффинной системе координат дана плоскость уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$, то вектор $\boldsymbol{p}\,\{A, B, C\}$ не параллелен плоскости, и если его приложить к некоторой точке плоскости, то координаты x_1, y_1, z_1 его конца удовлетворяют условию $Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D > 0$.

785. Даны две параллельные плоскости: $Ax + By + Cz + D_1 = 0$, $Ax + By + Cz + D_2 = 0$, $D_1 \neq D_2$. Записать линейные неравенства, характеризующие область Ω, расположенную между ними, и внешние области Ω_1 и Ω_2.

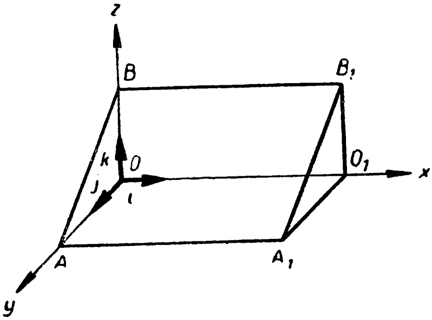
786. Пусть плоскости π_1 и π_2, заданные в прямоугольной декартовой системе уравнениями $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, пересекаются, но не перпендикулярны друг другу. Доказать, что внутренние области двух вертикальных двугранных острых углов, образованных этими плоскостями, характеризуются неравенством:

$$(A_1x + B_1y + C_1z + D_1)(A_2x + B_2y + C_2z + D_2)\times \times(A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2) < 0,$$

а внутренние области двух вертикальных двугранных тупых углов — неравенством:

$$(A_1x + B_1y + C_1z + D_1)(A_2x + B_2y + C_2z + D_2)\times \times(A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2) > 0.$$

787. Даны две пересекающиеся плоскости в прямоугольной декартовой системе $x - 5y + 4z + 1 = 0$ и $2x - y + z + 5 = 0$. Выяснить, какие из точек, указанных ниже, принадлежат внутренним областям тупых двугранных углов, образованных данными плоскостями: A (0, 0, 1), B (0, 0, $-$10), C (1, 0 $-$ 2), D (2, 1, 0), E(1, 1, 1).



Черт. 31

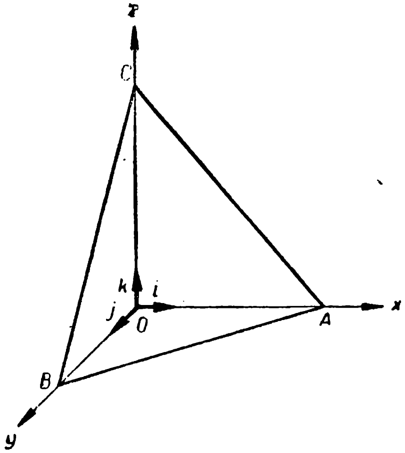
788. Найти область, определяемую системами неравенств в каждом из следующих случаев:

а) $x > 0$, $y>0$, $z>0$, $x + y + z - 1 < 0$;

б) $x > 0$ и $x+1<0$;

в) $x < 0$, $x + 2 > 0$, $y + z - 3 < 0$;

г) $z > 0$, $z - 10 < 0$, $x-5 > 0$, $x - 7 < 0$, $y - 3>0$, $y-5<0$.



Черт. 32

789. Записать при помощи линейных неравенств аналитическое задание внутренней области треугольной призмы $ABOA_1B_1O_1$, изображенной на чертеже 31, если A (0, 2, 0), B (0, 0, 2), A_1 (5, 2, 0), O_1 (5, 0, 0), B_1 (5, 0, 2).

790. Записать при помощи линейных неравенств аналитическое задание внутренней области тетраэдра $OABC$, изображенного на чертеже 32, если A (5, 0, 0), B (0, 3, 0), C (0, 0, 6).

§ 40. Расстояние от точки до плоскости; угол между плоскостями

791. Привести[1] к нормальному виду уравнения плоскостей:

а) $x - 2y + 2z - 12 = 0$;

б) $2x - 3y + 5z - 5 = 0$;

[1] В задачах этого параграфа системы координат предполагаются прямоугольными декартовыми.

в) $\frac{3}{7}x + \frac{6}{7}y - \frac{2}{7}z + 3 = 0$;
г) $12y - 5z + 39 = 0$;
д) $y + 2 = 0$;
е) $2z - 5 = 0$.

792. Вычислить расстояние от начала координат до плоскости: а) $15x - 10y + 6z - 190 = 0$; б) $2x - 3y + 5z - 3 = 0$.

793. Написать уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(-1, 0, 1)$ и $M_2(1, 1, 2)$ и отстоящей от начала координат на расстоянии $\frac{2}{\sqrt{3}}$.

794. Найти расстояние от точки до плоскости в каждом из следующих случаев:

а) $M_1(1, -2, 2)$, $2x + y + 2z - 7 = 0$;
б) $M_2(3, 0, 4)$, $2x + 3y + 8 = 0$;
в) $M_3(-1, 2, \sqrt{2})$, $5x - 3y + \sqrt{2}\,z = 0$.

795. Установить расположение плоскости $2x - 2y - z + 9 = 0$ относительно сферы в каждом из следующих случаев:

а) $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 4$;
б) $(x + 2)^2 + y^2 + (z - 3)^2 = 9$;
в) $(x - 3)^2 + (y + 3)^2 + (z - 3)^2 = 4$;
г) $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 11)^2 = 5$.

796. У треугольной пирамиды $SABC$ вершина S совпадает с началом координат, а боковые грани — с координатными плоскостями. Написать уравнение плоскости основания ABC, если $SA : SB : SC = 1 : 3 : 2$, высота $SH = 6$ и вершины A, B и C имеют неотрицательные координаты.

797. Через линию пересечения плоскостей $x - y + z - 1 = 0$ и $2x + 5y - 2z - 13 = 0$ провести плоскость, касающуюся сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

798. Вычислить расстояние между следующими параллельными плоскостями: $x - 3y + 2z + 1 = 0$, $2x - 6y + 4z + 3 = 0$.

799. Вывести формулу для вычисления расстояния между двумя параллельными плоскостями:

$$Ax + By + Cz + D_1 = 0,$$
$$Ax + By + Cz + D_2 = 0.$$

800. Вычислить расстояния между следующими парами параллельных плоскостей:

а) $x - 2y + 2z - 6 = 0$, $x - 2y + 2z + 18 = 0$;
б) $2x - 3y + 6z - 14 = 0$, $4x - 6y + 12z - 21 = 0$;
в) $x - y + 5z + 27 = 0$, $x - y + 5z - 54 = 0$;
г) $x - y + 5z + 27 = 0$, $x - y + 5z + 1 = 0$.

801. На оси Oz найти точку, равноудаленную от точки M (1, 1, 4) и от плоскости $2x - 2y + z - 12 = 0$.

802. На оси Oy найти точку, равноудаленную от двух плоскостей: $x + 2y - 2z - 1 = 0$ и $3x + 5 = 0$.

803. Составить уравнение геометрического места точек, отстоящих от плоскости $6x - 3y + 2z - 14 = 0$ на расстоянии, равном 3.

804. Найти уравнение плоскости, касающейся сферы $x^2 + (y + 1)^2 + (z + 2)^2 = 9$ и параллельной плоскости $6x + 3y + 2z = 0$.

805. Составить уравнение геометрического места точек, равноудаленных от двух параллельных плоскостей в каждом из следующих случаев:

а) $2x - y + 3z - 4 = 0$, $2x - y + 3z - 5 = 0$;
б) $x + y - 2z - 3 = 0$, $x + y - 2z + 7 = 0$;
в) $3x - y + z + 5 = 0$, $3x - y + z + 15 = 0$.

806. Написать уравнение сферы, центр которой лежит на оси Ox и которая касается двух плоскостей: $2x - 4y - 3z + 21 = 0$ и $5x - 2z = 0$.

807. Написать уравнения плоскостей, делящих пополам двугранные углы между плоскостями: а) $3x - y + 7z - 4 = 0$ и $5x + 3y - 5z + 2 = 0$; б) $x - 7y + 6 = 0$ и $3x - 4y + 5z - 6 = 0$.

808. Определить двугранные углы между следующими парами плоскостей: а) $16x + 8y + 2z + 1 = 0$, $2x - 2y + z + 5 = 0$; б) $2x + 5y + 4z + 15 = 0$, $6x - 3z + 2 = 0$.

§ 41. Прямая в пространстве; взаимное расположение прямых и плоскостей

809. Определить координаты нескольких точек, лежащих на прямых: а) $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{3} = \frac{z-4}{-1}$; б) $x = 3 + 2t$,

$y = 3t, \quad z = 5;$ в) $\begin{cases} x - 3 = 0, \\ x + y + z - 5 = 0. \end{cases}$

810. Определить координаты точки, лежащей на прямой $\frac{x+2}{5} = \frac{y-3}{1} = \frac{z}{5}$ и имеющей: а) абсциссу, равную 3; б) ординату, равную -1.

811. Найти точки пересечения прямых:

а) $\begin{cases} 2x - y + z - 4 = 0, \\ x + y + 5z - 2 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x = 4 - t, \\ y = -1 + 2t, \\ z = 6 + 3t \end{cases}$

с координатными плоскостями.

812. Составить уравнения прямой:

а) проходящей через две точки: $M_1\left(2, -3, \frac{1}{2}\right)$, $M_2\left(3, 5, \frac{3}{2}\right)$;

б) проходящей через точку $M_0(2, 1, -3)$ и параллельной вектору $\boldsymbol{p}\{1, -3, 1\}$;

в) образованной пересечением плоскости $x + 3y - z + 1 = 0$ с координатной плоскостью Oxy;

г) образованной пересечением плоскости $x - y + z = 0$ с плоскостью, проходящей через точки $A(2, 0, 3)$, $B(1, 1, 1)$, $C(2, 4, -3)$.

813. Написать параметрические уравнения следующих прямых:

а) $\begin{cases} x - 3y + z = 0, \\ y = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + 2y + z - 1 = 0, \\ x - y + 1 = 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x = 0, \\ y + z = 0. \end{cases}$

814. Через точку $M(1, -3, 4)$ провести прямую, параллельную прямой:

$$\begin{cases} 2x - y + z - 3 = 0, \\ x + 3y - z - 1 = 0. \end{cases}$$

815. Указать особенности в расположении следующих прямых:

а) $\begin{cases} 2x - y + z = 0, \\ x + y + 2z = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3y + 5z = 0, \\ 2y - z + 6 = 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x - 6 = 0, \\ 2y - z = 0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2x + 3y + 5z - 4 = 0, \\ x = 0. \end{cases}$

816. Доказать, что

а) прямая $\begin{cases} 2x - y + z + 1 = 0, \\ x - 2y + 3z + 2 = 0 \end{cases}$ пересекает ось Oy;

б) прямая $\begin{cases} x - y + z + 1 = 0, \\ x - 2y + 4z = 0 \end{cases}$ пересекает координатные плоскости.

Определить координаты точек пересечения.

817. Какому условию должны удовлетворять коэффициенты в уравнении прямой

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{cases}$$

чтобы прямая: а) была параллельна оси Ox, б) совпадала с осью Oy, в) лежала в плоскости Oxy и проходила через начало координат.

818. Установить взаимное расположение следующих пар прямых:

а) $\begin{cases} x = 1 + 2t, \\ y = 7 + t, \\ z = 3 + 4t \end{cases}$ и $\begin{cases} x = 6 + 3t, \\ y = -1 - 2t, \\ z = -2 + t; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x = 9t, \\ y = 5t, \\ z = -3 + t \end{cases}$ и $\begin{cases} 2x - 3y - 3z - 9 = 0, \\ x - 2y + z + 3 = 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x + 3y = 0, \\ z - 4 = 0 \end{cases}$ и $\begin{cases} x + z - 8 = 0, \\ 2y + 3z - 7 = 0; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x = t, \\ y = -8 - 4t, \\ z = -3 - 3t \end{cases}$ и $\begin{cases} x + y - z = 0, \\ 2x - y + 2z = 0. \end{cases}$

819. Доказать, что прямые: $x = 2 + 4t$, $y = -6t$, $z = -1 - 8t$ и $x = 7 - 6t$, $y = 2 + 9t$, $z = 12t$ лежат в одной плоскости, и написать уравнение этой плоскости.

820. Доказать, что прямые

$$\begin{cases} x + y - 3z - 1 = 0, \\ 2x - y - 9z - 2 = 0 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} 2x + y + 2z - 2 = 0, \\ 2x - 2y - z - 2 = 0 \end{cases}$$

пересекаются. Написать уравнение плоскости, проходящей через эти прямые.

821. Доказать, что следующие пары прямых параллельны:

а) $x = 1 + 2t,\ y = -t,\ z = 1 + t$ и $\begin{cases} x + 3y + z + 2 = 0, \\ x - y - 3z - 2 = 0; \end{cases}$

б) $\dfrac{x+2}{3} = \dfrac{y+1}{-2} = \dfrac{z}{1}$ и $\begin{cases} x + y - z = 0, \\ x - y - 5z - 8 = 0. \end{cases}$

Составить уравнения плоскостей, проходящих через эти прямые.

822. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую $\dfrac{x+5}{1} = \dfrac{y-3}{4} = \dfrac{z-1}{2}$ и параллельную прямой

$$\begin{cases} 2x - y + z - 3 = 0, \\ x + 2y - 3z + 5 = 0. \end{cases}$$

823. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M\ (1,\ 1,\ -3)$ и параллельную прямым:

$$\begin{cases} 2x - 2y + 3z - 4 = 0, \\ x + 2y - 4z + 1 = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x - y - z = 0, \\ x + y - 3z + 1 = 0. \end{cases}$$

824. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M\ (1,\ 3,\ 7)$ и прямую $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y-3}{5} = \dfrac{z-5}{-1}$.

825. Составить уравнения прямой, проходящей через начало координат и пересекающей каждую из прямых: а) $x = t,\ y = 1 - t,\ z = 3 + t$; б) $x = 2 + 2t,\ y = 3 - t,\ z = 4 + 3t$.

826. Составить уравнения прямой, проходящей через точку $(0,\ 0,\ 1)$ и пересекающей каждую из прямых:

$$\begin{cases} x - 2y + z - 1 = 0, \\ 2x - y + 2z - 3 = 0; \end{cases} \qquad \frac{x-1}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{-1}.$$

827. Доказать, что прямая $x = 1 + 2t;\ y = 3t;\ z = -2 + t$ пересекает плоскость $2x - y + z + 1 = 0$. Найти координаты точки пересечения.

828. Показать, что прямая $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y-1}{3} = \dfrac{z+2}{1}$ параллельна плоскости $x - 2y + 5z - 6 = 0$, а прямая $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z-1}{1}$ лежит в этой плоскости.

829. Через точку пересечения плоскости $x - 2y + 3z + 5 = 0$ с осью Ox провести прямую так, чтобы она лежала в данной плоскости и была параллельна плоскости Oyz.

§ 42. Метрические задачи на сочетание прямых и плоскостей

830. Написать[1] уравнения прямой, проходящей через точку M (2, —3, 3) и перпендикулярной к плоскости $x - 3y + 4z - 1 = 0$.

831. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку M (1, —3, 4) и перпендикулярной к прямой:

а) $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{-3} = \dfrac{z+2}{5}$; б) $\begin{cases} 2x - y + 3z - 1 = 0, \\ x + y - z + 5 = 0. \end{cases}$

832. Написать уравнения прямой, проходящей через точку A (2, 3, —1), пересекающей прямую $\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y-2}{4} = \dfrac{z}{3}$ и перпендикулярной к ней.

833. Через точку M (1, 5, —1) провести прямую, перпендикулярную к прямым:

$$\frac{x+1}{-1} = \frac{y}{3} = \frac{z+2}{-1}; \quad \begin{cases} x = 2 - 3t, \\ y = -1 + t, \\ z = -2t. \end{cases}$$

834. Через точку M (1, 5, —1) провести прямую, перпендикулярную к прямым:

$$\begin{cases} 2x - y + 3z + 4 = 0, \\ -x + 2y + 2z - 2 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x - y - z + 1 = 0, \\ 2x + y + 4z = 0. \end{cases}$$

835. Найти точку, симметричную началу координат относительно плоскости $x - 2y + 4z - 21 = 0$.

836. Найти точку, симметричную точке M (1, 5, 2) относительно плоскости $2x - y - z + 11 = 0$.

837. Составить уравнения плоскостей, проектирующих на координатные плоскости следующие прямые:

а) $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+5}{-1} = \dfrac{z}{1}$; б) $\begin{cases} x = 2 + 4t, \\ y = -1 + t, \\ z = 2 - t; \end{cases}$

[1] В данном параграфе система координат предполагается прямоугольной декартовой.

в) $\begin{cases} 2x - y + 3z - 1 = 0, \\ x + y - z + 5 = 0. \end{cases}$

Составить уравнения проекций данных прямых на координатные плоскости.

838. Составить уравнения проекции прямой

$$\begin{cases} 2x - y + z - 3 = 0, \\ x + y + 2z + 1 = 0 \end{cases}$$

на плоскость $3x - y + z - 4 = 0$.

839. Составить уравнения проекции прямой $\frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-2}{1}$ на плоскость $3x - y + z - 1 = 0$.

840. Составить уравнение плоскости, проходящей через начало координат, параллельной прямой $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-2}{-1}$ и перпендикулярной к плоскости $x - 2y + z - 1 = 0$.

841. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(-1, 1, 3)$, параллельной прямой $x = y = z$ и перпендикулярной к плоскости $3x - 2y = 0$.

842. Через точку пересечения плоскости $2x - y + 3z - 4 = 0$ с осью Oy провести прямую так, чтобы она лежала в данной плоскости и была перпендикулярна к прямой:

$$\begin{cases} x - y + 4z - 1 = 0, \\ 2x + y - 3z + 2 = 0. \end{cases}$$

843. Найти расстояние от точки $P(7, 9, 7)$ до прямой $\frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{2}$.

844. Найти расстояние между скрещивающимися прямыми $\frac{x-2}{4} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{-1}$ и $\frac{x+4}{2} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+2}{-3}$.

845. Даны две прямые

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{2} \text{ и } \frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{0}.$$

а) Доказать, что они скрещиваются.

б) Написать уравнения плоскостей, проходящих через каждую из них параллельно второй прямой;

в) Найти расстояние между скрещивающимися прямыми и между плоскостями; убедиться в том, что эти расстояния равны.

846. Найти угол между прямой $\frac{x}{2} = \frac{y+12}{3} = \frac{z-4}{6}$ и плоскостью $6x + 15y - 10z = 0$.

847. Найти угол между следующими прямыми:

$$\begin{cases} y + 1 = 0, \\ x + 2z - 1 = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 0, \\ z = 1. \end{cases}$$

848. Определить угол между прямой

$$\frac{x+3}{1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+1}{2}$$

и плоскостью $4x + 2y + 2z - 5 = 0$.

§ 43. Приложение теории прямой и плоскости к доказательству стереометрических теорем и решению задач элементарной геометрии

849. Доказать, что если прямая l и плоскость α перпендикулярны к одной и той же прямой l', то они параллельны[1] между собой.

850. Доказать, что если плоскость α и прямая l перпендикулярны к одной и той же плоскости β, то они параллельны между собой.

851. Доказать, что если прямая l параллельна двум пересекающимся плоскостям α и α', то она параллельна их линии пересечения.

852. Доказать, что две параллельные плоскости пересекают третью плоскость по параллельным прямым.

853. Доказать, что если две перпендикулярные плоскости α и β пересекаются по прямой l и если другая прямая l' проведена в плоскости α и перпендикулярна к l, то l' перпендикулярна к β.

854. В пространстве даны две прямые l_1 и l_2. При каком условии через l_1 можно провести плоскость, перпендикулярную к l_2?

855. Доказать, что через каждую из двух скрещивающихся прямых можно провести одну и только одну плоскость, параллельную другой прямой.

---

[1] В этом параграфе термин «параллельность» понимается в широком смысле слова. Например, предложение «Прямая l параллельна плоскости α» следует понимать так: либо $l \parallel \alpha$ в обычном смысле, либо l принадлежит α.

856. Доказать, что внутренние равноделящие плоскости двугранных углов трехгранного угла пересекаются по одной прямой.

857. Найти геометрическое место точек пространства, равноудаленных от трех вершин данного треугольника.

858. Найти геометрическое место точек, разность квадратов расстояний которых от двух данных точек постоянна.

859. Доказать, что в тетраэдре все шесть плоскостей, проходящих через каждое ребро и через середину не пересекающегося с ним ребра, проходят через одну точку.

860. Доказать, что плоскости, перпендикулярные к ребрам треугольной пирамиды и делящие их пополам, пересекаются в одной точке.

861. Доказать, что перпендикуляры, опущенные из концов диагонали параллелограмма на плоскость, проходящую через другую диагональ, равны по длине.

862. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ боковая грань наклонена к основанию под углом β. Найти угол φ между плоскостями AKC и SAB, если K — середина ребра SB.

863. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ высота SH равна h, сторона основания равна a. Найти угол φ между плоскостями AKC и HBC, где K — середина ребра SB.

864. Доказать, что для высоты h треугольной пирамиды с взаимно перпендикулярными боковыми ребрами, равными a, b и c, справедливо соотношение:

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{1}{h^2}.$$

865. Доказать, что во всяком тетраэдре четыре прямые, соединяющие каждую вершину с центром тяжести противоположной грани, пересекаются в одной точке[1].

866. Доказать, что во всяком тетраэдре три прямые, соединяющие середины непересекающихся ребер, пересекаются в одной точке[2].

867. В усеченной (параллельно основанию) треугольной пирамиде $A_1A_2A_3A_1'A_2'A_3'$ середина каждого из боковых ребер A_1A_1', A_2A_2', A_3A_3' соединена с точкой пересе-

---

[1] См. задачу 640.

[2] См. задачу 637.

чения диагоналей противоположной боковой грани. Доказать, что полученные три прямые пересекаются в одной точке.

868. Дан куб, ребро которого равно a. Вычислить расстояние между вершиной A куба и его диагональю, не проходящей через точку A и лежащей в том диагональном сечении куба, которое содержит эту точку.

ГЛАВА XII

ПРОСТЕЙШИЕ ПОВЕРХНОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ

Пусть $F(x, y, z)$—некоторое выражение, зависящее от трех переменных: x, y и z. Будем говорить, что x_0, y_0, z_0 являются **допустимыми значениями** данного выражения, если $F(x_0, y_0, z_0)$ — некоторое действительное число. Соотношение

$$F(x, y, z) = 0 \qquad (1)$$

называется **уравнением**, если оно выполняется не для всех допустимых значений переменных.

Поверхность в аналитической геометрии рассматривается как геометрическое место точек, удовлетворяющих определенным условиям. Пусть S — некоторая поверхность в пространстве, где задана система координат Oe_1, e_2 e_3. Будем говорить, что соотношение (1) является **уравнением поверхности** S, если координаты каждой точки поверхности S удовлетворяют уравнению (1) и координаты точки пространства, не принадлежащей S, не удовлетворяют этому уравнению.

Рассмотрим уравнения простейших поверхностей в пространстве.

Сферическая поверхность есть геометрическое место точек пространства, равноудаленных от данной точки—центра поверхности. Если в пространстве выбрана прямоугольная декартова система координат $Oijk$, то уравнение сферической поверхности с центром в точке $C(x_0, y_0, z_0)$ и радиуса r имеет вид:

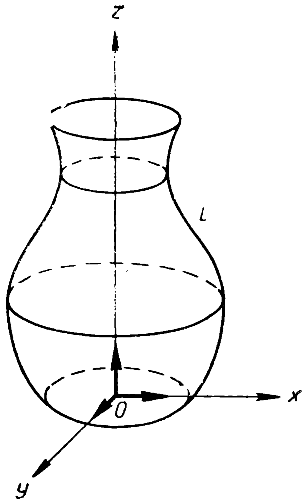
$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2 . \qquad (2)$$

В частности, если центр совпадает с началом координат, то это уравнение принимает вид: $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$.

Пусть на плоскости дана линия L и некоторая прямая l. Поверхность S, образованная вращением линии L вокруг прямой l, называется поверхностью вращения (черт. 33). Кривая L называется образующей, а прямая l—осью вращения. Если в пространстве выбрана прямоугольная декартова система координат так, что ось l совпадает с осью Oz, а линия L лежит в плоскости yOz и имеет в этой плоскости уравнение

$$F(y, z) = 0,$$

то в выбранной системе координат поверхность вращения S имеет уравнение:



Черт. 33

$$F(\pm\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0. \tag{3}$$

Например, уравнение параболоида вращения, образованного вращением параболы $y^2 - 2pz = 0$ вокруг оси Oz, имеет вид: $x^2 + y^2 - 2pz = 0$.

Очевидно, сферическая поверхность есть частный случай поверхности вращения; образующей является окружность, а ось вращения проходит через ее центр.

Пусть L — некоторая линия пространства, а $\boldsymbol{p}$ — ненулевой вектор. Если через каждую точку L провести прямую, параллельную $\boldsymbol{p}$, то получим поверхность, которая называется цилиндрической. Линия L называется направляющей, а проведенные прямые— образующими.

Уравнения цилиндрической поверхности, образующие которой параллельны вектору $\boldsymbol{p}\{\alpha, \beta, \gamma\}$, а направляющая лежит в плоскости xOy и имеет в этой плоскости уравнение $F(x, y) = 0$, имеет вид:

$$F\left(x - \frac{\alpha}{\gamma} z, \quad y - \frac{\beta}{\gamma} z\right) = 0. \tag{4}$$

Здесь предполагается, что вектор p не параллелен плоскости xOy, т. е. $\gamma \neq 0$. В частности, если p параллелен оси Oz, то уравнение (4) принимает вид: $F(x, y) = 0$.

Пусть L — некоторая линия пространства, а M_0 — точка, не лежащая на L. Если провести всевозможные прямые, соединяющие точку M_0 со всеми точками кривой L, то получим поверхность, которая называется *конической*. Линия L называется *направляющей*, а точка M_0 — *вершиной*. Прямые, соединяющие точку M_0 со всеми точками кривой L, называются *образующими*.

Уравнение конической поверхности с вершиной в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$, направляющая которой лежит в плоскости xOy, имеет в этой плоскости уравнение $F(x, y) = 0$, записывается так:

$$F\left(x_0 + \frac{x - x_0}{z_0 - z},\ y + \frac{y - y_0}{z_0 - z}\right) = 0.$$

Геометрическое место точек пространства, координаты которых в некоторой аффинной системе координат удовлетворяют уравнению

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + \\ + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0,$$

называется *поверхностью второго порядка*. Существует 17 типов поверхностей второго порядка. Основными поверхностями второго порядка являются следующие: эллипсоид, однополостный гиперболоид, двуполостный гиперболоид, эллиптический параболоид, гиперболический параболоид, действительный конус второго порядка, действительный эллиптический цилиндр, гиперболический цилиндр и параболический цилиндр. Полный список поверхностей второго порядка и их канонических уравнений дан на странице 167.

§ 44. Поверхности вращения; сферические поверхности

869. Написать уравнение сферической поверхности: а) с центром в точке (0, 1, 0) радиуса $R = 5$; б) с центром в начале координат радиуса $R = 6$; в) с центром в точке (5, 1, — 3) и проходящей через точку (2, — 3, — 3).

870. Составить уравнение сферической поверхности, проходящей через точки A (1, 7, 3), B (7, 1, 3), C (1, 1, — 3), D ($\sqrt{11} + 1$, 1, 8).

871. Написать уравнение сферической поверхности, проходящей через точку (1, 5, 1) и через окружность $x^2 + y^2 - 2x - 10y + 23 = 0$, расположенную на плоскости Oxy.

872. Определить координаты центра и длину радиуса для каждой из следующих сферических поверхностей:

а) $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 10z + 22 = 0$;
б) $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 8y + 2z + 10 = 0$;
в) $x^2 + y^2 + z^2 + 12x - 6y + 37 = 0$.

873. В плоскости Oyz дана окружность с центром в точке (0, 4, 0) радиуса $r = 1$. Написать уравнение поверхности, образованной вращением данной окружности вокруг оси Oz.

874. Окружность радиуса r расположена на плоскости Oyz так, что она касается оси Oz в начале координат. Написать уравнение поверхности, образованной вращением данной окружности вокруг оси Oz.

875. Составить уравнение поверхности, образованной вращением параболы $z^2 = 10y$, $x = 0$ вокруг оси Oz.

876. Парабола с параметром $p = 5$ расположена на плоскости Oyz так, что директриса совпадает с осью Oz. Написать уравнение поверхности, образованной вращением данной параболы вокруг оси Oz.

877. Составить уравнение поверхности, образованной вращением вокруг оси Oy каждой из следующих кривых, расположенных на плоскости Oxy:

а) эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$;
б) гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$;
в) гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$;
г) параболы $x^2 = 2py$.

878. Написать уравнение поверхности, образованной вращением синусоиды $z = \sin y$ вокруг оси Oz.

879. Доказать, что поверхности, заданные каждым из следующих уравнений, являются поверхностями вращения. Найти образующие кривые и оси вращения:

а) $x^4 + 2x^2y^2 + y^4 + x^2 + y^2 + z = 0$;

б) $x^2+y^2+z^2=3\pm\sqrt{x^2+y^2}$;

в) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{a^2}=1$.

880. Доказать, что поверхность, определяемая уравнением $(x^2+y^2+z^2+21)^2=100(x^2+y^2)$ является поверхностью вращения. Определить ее сечение с плоскостью Oxy.

881. Пусть в прямоугольной декартовой системе дана линия L уравнениями: $x=f_1(z)$, $y=f_2(z)$. Доказать, что поверхность, образованная вращением L вокруг оси Oz, имеет уравнение: $x^2+y^2=f_1^2(z)+f_2^2(z)$.

882. Даны две скрещивающиеся прямые: l_1 и l_2. Определить поверхность, образованную вращением прямой l_2 вокруг прямой l_1.

§ 45. Составление уравнений цилиндрических, конических и других поверхностей второго порядка; метод сечений

883. Написать[1] уравнение эллипсоида, оси которого совпадают с осями координат и который:

а) проходит через точку $M(2, 0, 1)$ и пересекает плоскость Oxy по эллипсу: $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{1}=1$;

б) проходит через точку $N(1, \sqrt{3}, \sqrt{3})$ и пересекает плоскость Oyz по эллипсу $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{5}=1$;

в) пересекает плоскость Oyz по эллипсу $\frac{y^2}{25}+\frac{z^2}{2}=1$, а плоскость Oxy — по окружности $x^2+y^2=25$.

884. Написать каноническое уравнение однополостного гиперболоида, если поверхность:

а) проходит через точку $(\sqrt{5}, 3, 2)$ и пересекает плоскость Oxz по гиперболе $\frac{x^2}{5}-\frac{z^2}{4}=1$;

б) пересекает плоскость Oxy по окружности $x^2+y^2=9$, а плоскость Oxz — по гиперболе $\frac{x^2}{9}-\frac{z^2}{10}=1$.

[1] Во всех задачах этого параграфа, где нет специальных оговорок, предполагается, что система координат прямоугольная декартова.

885. Составить уравнение круговой цилиндрической поверхности, если известны уравнения ее оси: $x = 7 + 3t$, $y = 1 + 4t$, $z = 3 + 2t$ и координаты одной из ее точек $M_0(2, -1, 0)$.

886. Составить уравнение круговой цилиндрической поверхности, если известны уравнения ее оси: $x = t$, $y = 1 + 2t$, $z = -3 - 2t$ и координаты одной из ее точек $M_0(1, -2, 1)$.

887. Составить уравнение цилиндрической поверхности в каждом из следующих случаев:

а) направляющая лежит в плоскости Oxy и имеет уравнение $x^2 + 2xy + 3y^2 - x = 0$, а образующие параллельны вектору $\{1, 0, 1\}$;

б) направляющая лежит в плоскости Oyz и имеет уравнение $y^2 - yz + 5 = 0$, а образующие параллельны оси Ox;

в) направляющая лежит в плоскости Oxy и имеет уравнение $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$, а образующие параллельны вектору $\{1, 2, -1\}$;

г) направляющая лежит в плоскости Oxz и является окружностью $(x - 1)^2 + z^2 = 4$, а образующие параллельны оси Oy.

888. Написать уравнение цилиндрической поверхности вращения, если ось вращения совпадает с осью Oz, а радиус $r = 5$.

889. Написать уравнение цилиндрической поверхности вращения, если ось вращения проходит через начало координат и параллельна вектору $\{0, -1, 1\}$, а $r = 3$.

890. Написать уравнение конической поверхности, если:

а) направляющая в плоскости Oxy задана уравнением $x^2 + y^2 - y = 0$, а вершина имеет координаты $(1, 0, 1)$;

б) направляющая в плоскости Oxy задана уравнением $x^2 + y^2 = 16$, а вершина имеет координаты $(0, 0, 1)$.

891. Составить уравнение конической поверхности с вершиной в точке $S(1, 2, 4)$, образующие которой составляют с плоскостью $2x + 2y + z = 0$ угол $\varphi = 45°$.

892. Составить уравнение круговой конической поверхности, вершина которой находится в точке $S(1, 2, 3)$, ось перпендикулярна к плоскости $2x + 2y - z + 1 = 0$, а образующие составляют с осью угол, равный $30°$.

893. Найти уравнение геометрического места точек,

лежащих на всех прямых, параллельных плоскости Oxy и пересекающих две прямые:

1) $x = 0, y = 0$; 2) $x = 1 + 2t,\ y = 2 + 3t,\ z = t$.

894. Найти уравнение геометрического места точек, лежащих на всех прямых, параллельных плоскости Oxy и пересекающих прямые

$$\begin{cases} x = 0, \\ y = z \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x = 2, \\ y = 0. \end{cases}$$

895. Найти сечение эллипсоида $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$ координатными плоскостями канонической системы координат.

896. Определить сечение однополостного гиперболоида $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} - z^2 = 1$ с плоскостью, проведенной через точку (0, 0, 1) параллельно плоскости Oxy.

897. Найти проекцию на плоскость Oxy линии пересечения однополостного гиперболоида $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{4} = 1$ с плоскостью $x = 2z$.

898. Исследовать методом сечений следующие поверхности второго порядка:

а) $z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16}$;

б) $x^2 + 2y^2 - 4z^2 - 8z - 8 = 0$;

в) $x^2 + y^2 + z^2 - 4z + 5 = 0$;

г) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$;

д) $x^2 - 2x + z^2 - 3 = 0$.

ГЛАВА XIII

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Поверхностью второго порядка называется геометрическое место точек пространства, координаты которых в некоторой аффинной системе координат удовлетворяют уравнению:

$$\Phi(x, y, z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + \\ + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0. \qquad (1)$$

Коэффициенты a_{ij} зависят от выбора системы координат. Одной из основных задач теории поверхностей второго порядка является упрощение общего уравнения (1) путем надлежащего подбора новой системы координат. Упрощение уравнения (1), так же как и в случае кривой второго порядка, проводится в два этапа.

а) Упрощение уравнения поверхности путем поворота системы координат. Если поверхность задана в прямоугольной декартовой системе $Oxyz$ уравнением (1), то всегда существует такая новая прямоугольная декартова система, полученная из исходной путем поворота системы, в которой поверхность имеет уравнение, не содержащее произведений переменных. Направления осей этой системы называются главными направлениями поверхности второго порядка.

Для нахождения главных направлений сначала составляют характеристическое уравнение поверхности:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - s & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - s & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - s \end{vmatrix} = 0. \qquad (2)$$

Корни s_1, s_2 и s_3 характеристического уравнения всегда действительные числа, и каждому корню соответствует главное направление. Если s_k — корень уравнения (2), то координаты вектора главного направления, соответствующего корню S_k, определяются из систем уравнений:

$$\begin{aligned} (a_{11} - s_k) p_k^1 + a_{12}p_k^2 + a_{13}p_k^3 &= 0, \\ a_{21}p_k^1 + (a_{22} - s_k) p_k^2 + a_{23}p_k^3 &= 0, \\ a_{31}p_k^1 + a_{32}p_k^2 + (a_{33} - s_k) p_k^3 &= 0. \end{aligned} \qquad (3)$$

Определив координаты единичных векторов $\boldsymbol{i}'\{p_1^1, p_1^2, p_1^3\}$, $\boldsymbol{j}'\{p_2^1, p_2^2, p_2^3\}$, $\boldsymbol{k}'\{p_3^1, p_3^2, p_3^3\}$, имеющих главные направления, легко записать формулы преобразования при переходе от искомой системы к новой. Уравнение данной поверхности в новой системе $Ox'y'z'$ в общем виде запишется так:

$$s_1x'^2+s_2y'^2+s_3z'^2+2a'_{14}x'+2a'_{24}y'+2a'_{34}z'+a_{44}=0, \qquad (4)$$

где $a'_{l4}=a_{14}p'_l+a_{24}p^2_l+a_{34}p^3_l \quad (l=1, 2, 3)$.

б) Упрощение уравнения поверхности путем переноса начала координат. Дальнейшее упрощение уравнения (4) проводится при помощи переноса начала координат. Путем надлежащего подбора нового начала уравнение (4) можно привести к одному из следующих видов:

$$s_1\tilde{x}^2+s_2\tilde{y}^2+s_3\tilde{z}^2+a'_{33}=0;$$

$$s_1\tilde{x}^2+s_2\tilde{y}^2=2a'_{14}\tilde{z}.$$

Пользуясь этими соотношениями, можно дать полную классификацию поверхностей второго порядка. Существует 17 типов поверхностей второго порядка, перечень которых с соответствующими каноническими уравнениями дан в таблице на странице 167.

Пусть поверхность второго порядка дана уравнением (1), а прямая — параметрическими уравнениями:

$$x=p_1t+x_1,\quad y=p_2t+x_2,\quad z=p_3t+x_3. \qquad (5)$$

Здесь $p\{p_1,\ p_2,\ p_3)$ — направляющий вектор, а $M_0(x_1,\ x_2,\ x_3)$ — начальная точка.

Для нахождения параметров точек пересечения необходимо подставить значения x, y и z из (5) в соотношение (1). После элементарных преобразований получаем:

$$Pt^2+2Qt+R=0, \qquad (6)$$

где

$$P=\sum_{\alpha,\ \beta=1}^{3} a_{\alpha\beta}p_\alpha p_\beta,\quad Q=\sum_{\alpha,\ \beta=1}^{3} a_{\alpha\beta}p_\alpha x_\beta,\quad R=\Phi(x_1,\ x_2,\ x_2).$$

Прямые, направляющие векторы которых удовлетворяют условию $P=0$, называются **прямыми асимптотического направления** по отношению к данной поверхности, а направляющие векторы этих прямых — **векторами асимптотического направления или асимптотическими векто-**

№ п/п	Название кривой	Каноническое уравнение
1	Эллипсоид	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$
2	Мнимый эллипсоид	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$
3	Однополостный гиперболоид	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$
4	Двуполостный гиперболоид	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$
5	Действительный конус	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$
6	Мнимый конус	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$
7	Эллиптический параболоид	$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z;\ p>0,\ q>0$
8	Гиперболический параболоид	$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z;\ p>0,\ q>0$
9	Действительный эллиптический цилиндр	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$
10	Мнимый эллиптический цилиндр	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$
11	Гиперболический цилиндр	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$
12	Две пересекающиеся действительные плоскости	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$
13	Две мнимые пересекающиеся плоскости	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$
14	Параболический цилиндр	$x^2=\pm 2py$
15	Две действительные параллельные плоскости	$x^2-a^2=0$
16	Две мнимые параллельные плоскости	$x^2+a^2=0$
17	Две совпавшие плоскости	$x^2=0$

рами. Конусом асимптотических направлений данной поверхности называется коническая поверхность с вершиной в любой точке пространства, все образующие которой имеют асимптотическое направление.

Так же как и в случае кривой, число точек пересечения поверхности (1) с прямой (5) определяется числом различных корней уравнения (6).

Если прямая не имеет асимптотического направления по отношению к поверхности, то она пересекается с ней в двух точках:

а) действительных и различных, если $Q^2 - PR > 0$,

б) комплексно сопряженных, если $Q^2 - PR < 0$,

в) совпадающих, если $Q^2 - PR = 0$. В этом случае говорят, что прямая касается поверхности.

Если прямая имеет асимптотическое направление по отношению к поверхности, то она либо пересекается с ней в одной точке ($P = 0$, $Q \neq 0$), либо не имеет с ней ни одной общей точки ($P = Q = 0$, $R \neq 0$), либо принадлежит поверхности ($P = Q = R = 0$).

Асимптотой поверхности второго порядка называется всякая прямая, которая не имеет ни одной общей точки (ни действительной, ни комплексной!) с поверхностью.

Прямолинейной образующей называется прямая, целиком принадлежащая поверхности.

Геометрическое место середин всех хорд поверхности (1), параллельных вектору $\boldsymbol{p}\{p_1, p_2, p_3\}$ неасимптотического направления, есть плоскость, заданная уравнением:

$$p_1(a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}) + p_2(a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24}) + p_3(a_{31} + a_{32}y + a_{33}z + a_{34}) = 0. \qquad (7)$$

Эта плоскость называется диаметральной плоскостью, соответствующей или сопряженной вектору $\boldsymbol{p}$.

Точка C пространства называется центром поверхности второго порядка, если поверхность симметрична относительно C. Для того чтобы точка $C(x_0, y_0, z_0)$ была центром поверхности (1), необходимо и достаточно, чтобы

$$\begin{aligned} a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}z_0 + a_{14} &= 0, \\ a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}z_0 + a_{24} &= 0, \\ a_{31}x_0 + a_{32}y_0 + a_{33}z_0 + a_{34} &= 0. \end{aligned}$$

Поверхности, имеющие единственный центр, называются **центральными**, а остальные поверхности — **нецентральными**. Нецентральные поверхности либо не имеют ни одного центра, либо имеют прямую или плоскость центров.

Если координаты двух ненулевых векторов $\boldsymbol{p}\{p_1, p_2, p_3\}$ и $\boldsymbol{q}\{q_1, q_2, q_3\}$ удовлетворяют условию:

$$\sum_{\alpha,\ \beta=1}^{3} a_{\alpha\beta}\, p_\alpha\, q_\beta = 0,$$

то векторы $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$ называются **сопряженными относительно поверхности** (1).

Направление ненулевого вектора $\boldsymbol{p}$ называется **главным относительно данной поверхности**, если любой вектор, перпендикулярный ему, сопряжен с ним.

Если поверхность задана в прямоугольной декартовой системе уравнением (1), то главные направления определяются из системы (3), где s_k — корень характеристического уравнения (2).

Каждая поверхность второго порядка имеет по крайней мере три взаимно перпендикулярных главных направления. Оси координат имеют главные направления[1] тогда и только тогда, когда $a_{12} = a_{13} = a_{23} = 0$.

Диаметральная плоскость поверхности второго порядка называется **главной**, если она перпендикулярна соответствующим хордам. Для определения главных диаметральных плоскостей можно воспользоваться следующей теоремой: *для того чтобы диаметральная плоскость была главной, необходимо и достаточно, чтобы соответствующий вектор был вектором главного, но не асимптотического направления.*

§ 46. Приведение общего уравнения поверхности второго порядка к каноническому виду

С помощью преобразования вращения прямоугольной декартовой системы координат привести к каноническому

---

[1] См. определение главных направлений, данное на странице 165.

виду следующие уравнения поверхностей второго порядка и написать формулы преобразования.

899. $7x^2 + 6y^2 + 5z^2 - 4xy - 4yz - 36 = 0.$

900. $5x^2 + 2y^2 + 5z^2 - 4xy - 2xz - 4yz - 24 = 0.$

901. $2x^2 + 2y^2 - 5z^2 + 2xy - 15 = 0.$

902. $3x^2 + 2y - 4z = 0.$

903. $x^2 + 5y^2 + z^2 + 2xy + 6xz + 2yz - 12 = 0.$

904. $x^2 + y^2 + 4z^2 + 2xy + 4xz + 4yz - 24 = 0.$

905. $x^2 - 2y^2 + z^2 + 4xy - 10xz + 4yz - 6 = 0.$

906. $5x^2 + 5y^2 - 3z^2 + 8xy - 9 = 0.$

907. $5y^2 + 4x^2 + 6z = 0.$

908. $x^2 + y^2 + \frac{1}{2} z^2 + xz - yz = 3.$

909. $\frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{2} y^2 + \frac{5}{2} z^2 - 3xy - xz + yz - 6 = 0.$

910. $x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 2xz - 2yz = 4.$

С помощью переноса начала прямоугольной декартовой системы координат привести к каноническому виду следующие уравнения поверхностей второго порядка.

911. $x^2 - 6y^2 + 2z^2 - 2x + 12y + 4z + 9 = 0.$

912. $3x^2 - 2z^2 + 12x - 2y + 4z + 6 = 0.$

913. $y^2 + 2z^2 - 4y + 12z + 10 = 0.$

914. $2x^2 + y^2 + 4z^2 - 4x + 6y + 16z - 1 = 0.$

915. $x^2 + 2z^2 - 6x + 4y - 8z + 13 = 0.$

916. $2x^2 + 3y^2 - 4x + 12y - 12z + 2 = 0.$

917. $x^2 - 2z^2 + 6x + 4y - 4z + 3 = 0.$

918. $x^2 - y^2 + z^2 + 2x + 4y - 3 = 0.$

919. $x^2 - 3y^2 + 10x + 12y + 13 = 0.$

920. $5x^2 + 10y^2 + 2z^2 - 40y + 50 = 0.$

921. $x^2 + 14x + 44 = 0.$

С помощью преобразования вращения системы координат и переноса начала координат привести к каноническому виду уравнения следующих поверхностей второго порядка.

922. $5x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 2xy + 2xz - 2yz + 4x + 8y + 12z - 4 = 0.$

923. $x^2 + y^2 + 4z^2 + 2xy + 4xz + 4yz + 8x + 4y - 5 = 0.$

924. $2xz + 4x - 6y + 8z - 2 = 0.$

925. $6x^2 + 4y^2 + 5z^2 + 4xz - 4yz + 4x + 4y + 6z - 27 = 0.$

926. $5x^2 + 5y^2 + 8xy - 4xz + 4yz - 36x + 36y - 18z - 18 = 0.$

927. $4x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4xz - 4yz + 8x - 4y + 8z = 0$.

928. $5y^2 - 2x + 10y - 4z + 1 = 0$.

929. $3x^2 + 2yz - 6x + 4y - 4z + 1 = 0$.

930. $2x^2 - 3y^2 + 2z^2 - 8xz + 4x - 6y + 8z - \frac{35}{3} = 0$.

§ 47. Пересечение поверхности с прямой; асимптотические направления

931. Определить точки пересечения поверхности второго порядка $x^2 - 2xy + 2z^2 + xz - x - y = 0$ с прямой $\frac{x-3}{4} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-3}{4}$.

932. Дана поверхность второго порядка: $x^2 - 3xy + xz + y^2 - x - 2y + 1 = 0$. Выяснить, какие из векторов $\boldsymbol{a}\{1, 0, 0\}$, $\boldsymbol{b}\{2, 2, 2\}$, $\boldsymbol{c}\{1, 2, 0\}$, $\boldsymbol{d}\{0, 0, 5\}$ имеют асимптотические направления по отношению к данной поверхности.

933. Найти те прямолинейные образующие поверхности $x^2 + y^2 - z^2 = 1$, которые проходят через точку $(1, 1, 1)$.

934. Найти те прямолинейные образующие поверхности $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 2xz - yz + 4x + 3y - 5z + 4 = 0$, которые проходят через точку $(-1, -1, 1)$.

935. Найти условие, при котором для данной поверхности $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0$ все направления, параллельные плоскости Oxy, являются асимптотическими.

936. Ответить на следующие вопросы.

а) Существует ли такая поверхность, для которой всякое направление является асимптотическим? Объяснить результат.

б) При каком условии все прямые, параллельные оси Ox, являются асимптотами или прямолинейными образующими?

937. Пусть поверхность задана уравнением $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0$. Найти условия, при которых эта поверхность:

а) имеет только одно асимптотическое направление, совпадающее с направлением оси Ox;

б) не имеет асимптотических направлений.

938. Найти конус асимптотических направлений следующих поверхностей второго порядка:

а) пары параллельных плоскостей;

б) гиперболического параболоида;

в) эллиптического параболоида;

г) пары пересекающихся плоскостей.

§ 48. Диаметральные плоскости; центр; главные направления

939. Найти уравнение той диаметральной плоскости поверхности $x^2 - y^2 + 2z^2 - 4xy + 2xz - 6yz - 2x + 4y - 5 = 0$, которая сопряжена направлению прямой:

$$\begin{cases} 2x - y - z + 1 = 0, \\ x + y - 2z + 3 = 0. \end{cases}$$

940. Найти уравнение той диаметральной плоскости поверхности $6x^2 + 9y^2 + z^2 + 6xy - 4xz - 2y - 3 = 0$, которая параллельна плоскости $x + 3y - z + 5 = 0$.

941. Найти уравнение той диаметральной плоскости поверхности $4x^2 + 9y^2 + z^2 - 12xy - 4xz - 5 = 0$, которая проходит через прямую $x = 1 - 3t$, $y = 2t$, $z = 2 - t$.

942. Найти уравнение той диаметральной плоскости поверхности $2x^2 + 10y^2 - 2z^2 + 12xy + 8yz + 12x + 4y + 8z - 1 = 0$, которая проходит через прямую $x = 1 + t$, $y = -1 - t$, $z = t$.

943. Найти уравнение той диаметральной плоскости поверхности $x^2 + 2y^2 - z^2 - 2xy - 2yz + 2xz - 4x - 1 = 0$, которая проходит через точки $O\ (0,\ 0,\ 0)$ и $M\ (1,\ 1,\ 0)$.

944. Найти общую диаметральную плоскость следующих трех поверхностей:

$$x^2 - 2y^2 + z^2 - 4xz + 6yz - 8x + 10y = 0,$$
$$3x^2 + 2y^2 - 2xz + 4yz - 4x - 8z - 8 = 0,$$
$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 6xz - 2yz + 2x - 6y - 2z = 0.$$

945. Найти общую диаметральную плоскость поверхностей:

$$4x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4xz - 4yz + 8x - 4y + 8z = 0,$$
$$x^2 + 9y^2 + 2z^2 - 4xy - 6xz + 2yz + 8x - 16y + 1 = 0.$$

946. Составить уравнение диаметральной плоскости поверхности $x^2 - xy + 2yz + x - z = 0$, проходящей через точку (1, 1, 1) и сопряженной направлению вектора $\boldsymbol{a}$, параллельного плоскости Oxy.

947. При каком условии плоскость Oxy является одной из диаметральных плоскостей поверхности второго порядка?

948. Ответить на следующие вопросы:

а) Существует ли такая поверхность второго порядка, для которой все диаметральные плоскости совпадают?

б) Как расположены диаметральные плоскости пары пересекающихся плоскостей?

949. Найти центры следующих поверхностей второго порядка:

а) $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 6xz - 2yz + 2x - 6y - 2z = 0$;

б) $3x^2 + 2y^2 - 2xz + 4yz - 4x - 8z - 8 = 0$;

в) $2x^2 + 12y^2 + 4z^2 + 8xy - 4xz + 12yz - 10x + 14z + 7 = 0$.

950. Найти геометрическое место центров и определить тип каждой из следующих поверхностей второго порядка:

а) $9x^2 + 5y^2 + 9z^2 - 12xy - 6yz + 12y - 36z = 0$;

б) $2x^2 + 10y^2 - 2z^2 + 12xy + 8yz + 12x + 4y - 8z - 1 = 0$;

в) $x^2 + 4y^2 + 4xz - 2yz = 0$;

г) $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 4xy - 4xz - 4yz + 5x + 5y - 5z + 2 = 0$.

951. Привести к каноническому виду уравнения следующих центральных поверхностей:

а) $x^2 + y^2 + 5z^2 - 6xy - 2xz + 2yz - 6x + 6y - 6z - 3 = 0$;

б) $x^2 + y^2 - 3z^2 - 2xy - 6xz - 6yz + 2x + 2y + 4z = 0$;

в) $x^2 - 2y^2 + z^2 + 4xy - 8xz - 4yz - 14x - 4y + 14z + 16 = 0$.

952. Поверхность задана уравнением (1), страница 165. При каком условии плоскость Oxy является плоскостью центров этой поверхности?

953. Поверхность задана уравнением (1), страница 165. При каком условии ось Ox является линией центров для данной поверхности?

954. Доказать теорему: для того чтобы вектор $p\{p_1, p_2, p_3\}$ имел одновременно и главное и асимптотическое направления, необходимо и достаточно, чтобы его координаты удовлетворяли уравнениям:

$$a_{11}p_1 + a_{12}p_2 + a_{13}p_3 = 0,$$
$$a_{21}p_1 + a_{22}p_2 + a_{23}p_3 = 0,$$
$$a_{31}p_1 + a_{32}p_2 + a_{33}p_3 = 0.$$

955. Для того чтобы вектор главного направления имел одновременно и асимптотическое направление, необходимо и достаточно, чтобы характеристическое число, соответствующее этому вектору, равнялось нулю. Доказать.

956. Пусть поверхность дана общим уравнением (1), страница 165. Ответить на следующие вопросы:

а) При каком условии для данной поверхности второго порядка всякое направление является главным?

б) При каком условии координатная ось Ox имеет главное направление?

в) При каком условии любой вектор, параллельный плоскости Oxy, имеет главное направление?

957. Найти уравнения главных диаметральных плоскостей и осей следующих поверхностей второго порядка:

а) $x^2 + y^2 + 5z^2 - 6xy - 2xz + 2yz - 4x + 6y + 2z - 8 = 0$;

б) $5x^2 - y^2 + z^2 + 4xy + 6xz + 2x + 8y + 6z - 10 = 0$;

в) $5x^2 + 2y^2 + 5z^2 - 4xy - 2xz - 4yz - 6x + 6y - 7 = 0$;

г) $x^2 + y^2 + 3z^2 + 2xy - 6xz + 6yz - 4x + 4y - 2z - 12 = 0$;

д) $2x^2 + 3y^2 + 2z^2 + 2xy + 4xz + 2yz + 2x + 6y + 2z = 0$.

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ

1. а) $\overline{AN} = \overline{MP}$; б) $\overline{NP} \parallel \overline{CA}$; $\overline{NP} \neq \overline{CA}$; г) $\overline{PC} \parallel \overline{BC}$; $\overline{PC} \neq \overline{BC}$; д) $\overline{AM} = \overline{MC}$; е) $\overline{NP} \parallel \overline{CM}$; $\overline{NP} = -\overline{CM}$; **2.** а) $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$; $\overline{AB} \neq \overline{CD}$; б) $\overline{AB} = \overline{DC}$; в) $\overline{BC} \parallel \overline{CB}$; $\overline{BC} \neq \overline{CB}$; д) $\overline{OA} = \overline{CO}$. **3.** Указанные свойства будут выполнены для случаев а) и в). **8.** а) Если векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ не коллинеарны или коллинеарны, но имеют противоположные направления, то $|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}| < |\boldsymbol{a}| + |\boldsymbol{b}|$; б) если векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ сонаправлены или хотя бы один из них нулевой, то $|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}| + |\boldsymbol{b}|$. **9.** Да. Например, если в треугольнике ABC сторона AB меньше сторон AC и BC, то векторы $\overline{BC} = \boldsymbol{a}$ и $\overline{CA} = \boldsymbol{b}$ удовлетворяют указанным неравенствам. **10.** Да. См. задачу 9. **13.** Р е ш е н и е. Если векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ не коллинеарны, то данное в условии равенство означает, что диагонали параллелограмма, построенного на данных векторах, имеют равные длины. Этим свойством характеризуется прямоугольник, поэтому векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ взаимно перпендикулярны. Если хотя бы один из векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ равен нулю, то условие задачи всегда выполнено. Если, наконец, $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ ненулевые коллинеарные векторы, то $|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}| \neq |\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}|$. **16.** В тросах возникают растягивающие силы: $10\sqrt{3}$ *кг* и $20\sqrt{3}$ *кг*. **17.** На стержень AB действует растягивающая сила 120 *кг*, а на стержень BC — сжимающая сила $60\sqrt{3}$ *кг*. **21.** $\overline{AK} = \frac{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}}{2}$; $\overline{BL} = \frac{1}{2}\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}$; $\overline{CM} = \frac{1}{2}\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$. **22.** $\overline{AB} = 2\boldsymbol{a}$; $\overline{BC} = 2(\boldsymbol{b} - 2\boldsymbol{a})$; $\overline{AC} = 2(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a})$. **23.** а) -1; б) -2; в) $\frac{7}{2}$; г) $\frac{2}{3}$; д) $\frac{1}{3}$. **26.** У к а з а н и е. Доказать, что длины векторов $|\boldsymbol{b}|\,\boldsymbol{a}$ и $|\boldsymbol{a}|\,\boldsymbol{b}$ равны и воспользоваться теоремой: диагонали ромба делят углы пополам. **28.** У к а з а н и е. Воспользоваться задачей 27. **33.** $\boldsymbol{x} = \frac{2}{3}(\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b})$, $\boldsymbol{y} = \frac{2}{3}(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b})$.

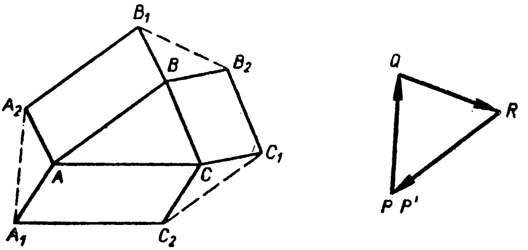
Р е ш е н и е. Так как свойства суммы, разности и умножения вектора на число формально совпадают с аналогичными свойствами числовых операций, то для решения векторных уравнений можно пользоваться теми же приемами, что и при решении линейных уравнений в алгебре. Вычитая из первого уравнения второе, получаем:

$$(x + 2y) - (x - y) = 2a - 2b,$$
$$(x - x) + (2y + y) = 2a - 2b,$$

отсюда $y = \frac{2}{3}(a - b)$.

Подставив значение y во второе уравнение данной системы, получаем: $x = y + 2b = \frac{2}{3} a + \frac{4}{3} b$. Таким образом, $x = \frac{2}{3}(a+2b)$; $y=\frac{2}{3}(a-b)$. Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что полученные значения x и y удовлетворяют данной системе векторных уравнений. **34.** Указание. Последовательно исключив y и z, сначала найти x. **36.** Указание. Пусть ABC — произвольный треугольник, E—середина AB и F—середина BC. Положив $\overline{BE}=a$ и $\overline{BF} = b$, выразить векторы $\overline{EF}$ и $\overline{AC}$ через a и b. **39.** Решение. На чертеже 34 изображен треугольник ABC с построенными на сторонах параллелограммами. Для решения задачи достаточно показать, что

$$\overline{A_1A_2} + \overline{B_1B_2} + \overline{C_1C_2} = 0. \qquad (1)$$



Черт. 34

В самом деле, если равенство (1) имеет место, то, взяв произвольную точку P плоскости и построив ломаную $PQRP'$ так, чтобы $\overline{PQ} = \overline{A_1A_2}$, $\overline{QR} = \overline{B_1B_2}$ и $\overline{RP'} = \overline{C_1C_2}$, получим, что точка P' совпадает с точкой P, т. е. ломаная $PQRP'$ образует треугольник PQR, стороны которого соответственно равны и параллельны отрезкам A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2. Для вывода соотношения (1) рассмотрим треугольники AA_1A_2, BB_1B_2, CC_1C_2 и выразим векторы $\overline{A_1A_2}$, $\overline{B_1B_2}$, $\overline{C_1C_2}$ через другие стороны соответственных треугольников. Имеем: $\overline{A_1A_2} = \overline{AA_2} - \overline{AA_1}$, $\overline{B_1B_2} = \overline{BB_2} - \overline{BB_1}$, $\overline{C_1C_2} = \overline{CC_2} - \overline{CC_1}$. Из этих соотношений, учитывая, что $\overline{AA_2} = \overline{BB_1}$, $\overline{BB_2} = \overline{CC_1}$ и $\overline{CC_2} = \overline{AA_1}$, получаем $\overline{A_1A_2} + \overline{B_1B_2} + \overline{C_1C_2} = 0$. **41.** $k = \frac{3}{4}$. **42.** Решение. Если m и n — единичные векторы, направленные соответственно вдоль сторон AB и AC, то вектор $\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n}$ будет направлен вдоль биссектрисы AM (черт. 35). Так как $\overline{AB} \parallel \boldsymbol{m}$, $\overline{AC} \parallel \boldsymbol{n}$ и $\overline{AM} \parallel (\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n})$, то $\overline{AB}=c\boldsymbol{m}$, $\overline{AC}=b\boldsymbol{n}$ и $\overline{AM}=\lambda(\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n})$. В этих соотношениях c и b — соответственно длины сторон AB и AC, а λ — некоторый коэффициент пропорциональности. Определим отношение $x=\frac{BM}{MC}$. Имеем: $\overline{BM}=x\overline{MC}$, $\overline{BM}=\overline{AM}-\overline{AB}=\lambda(\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n})-c\boldsymbol{m}=(\lambda-c)\boldsymbol{m}+\lambda\boldsymbol{n}$, $\overline{MC}=\overline{AC}-\overline{AM}=b\boldsymbol{n}-\lambda(\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n})=-\lambda\boldsymbol{m}+(b-\lambda)\boldsymbol{n}$. Таким образом,

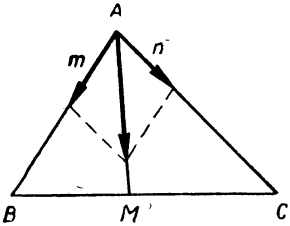
$$(\lambda-c)\boldsymbol{m}+\lambda\boldsymbol{n}=$$
$$=-\lambda x\boldsymbol{m}+x(b-\lambda)\boldsymbol{n}.$$

Так как векторы $\boldsymbol{m}$ и $\boldsymbol{n}$ не коллинеарны, то

$$\lambda-c=-\lambda x;\ \lambda=x(b-\lambda).$$

Отсюда

$$\lambda(1+x)=c,\ \lambda(1+x)=xb.$$



Черт. 35

Следовательно, $c=xb$ и $x=\frac{c}{b}$. Задача решена. **46.** Указание. Пусть $ABCD$ — произвольный четырехугольник, AM_1 — одна из медиан и P_1 — точка, удовлетворяющая условию $AP_1:P_1M_1=3:2$. Взяв произвольную точку O плоскости, выразить вектор $\overline{OP_1}$ через $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ и $\overline{OD}$. **48.** Указание. Полагая $\overline{AB}=\boldsymbol{a}$ и $\overline{AD}=\boldsymbol{b}$, выразить векторы $\overline{AP}$ и $\overline{AC}$ через $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ и записать условие их коллинеарности. **51.** $\boldsymbol{a}\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right\}$; $\boldsymbol{b}\left\{-\frac{2\sqrt{3}}{3}, -\frac{8\sqrt{3}}{9}\right\}$; $\boldsymbol{c}\left\{-\frac{3}{2}, -1\right\}$; $\boldsymbol{d}\left\{-\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right\}$. **52.** $\overline{AC}\left\{\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right\}$; $\overline{AD}\{1, 1\}$; $\overline{AF}\left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$; $\overline{EF}\left\{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\}$. **53.** $\overline{AB}\left\{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\}$; $\overline{BC}\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$; $\overline{CD}\left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$; $\overline{DA}\left\{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\}$. **54.** а) $\overline{CM}\{-1, 1\}$; $\overline{OB}\{-1, -2\}$; $\overline{KM}\{-1, -1\}$; $\overline{CB}\{-2, -2\}$; $\overline{NC}\{1, 1\}$; $\overline{AN}\{-1; -5\}$; б) $\overline{CM}\{2, 1\}$; $\overline{OB}\left\{-\frac{1}{2}, 1\right\}$; $\overline{KM}\{-1, 1\}$; $\overline{CB}\{-2, 2\}$; $\overline{NC}\{1, -1\}$; $\overline{AN}\{1, 1\}$. **55.** $\overline{BC}=-\frac{b}{a}\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$; $\overline{AC}=\frac{a-b}{a}\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$; $\overline{BD}=-\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$, где $a=AB$, $b=AD$. Указание. Предварительно доказать, что если AB — большее основание трапеции, а

CD — меньшее, то $\overline{CD} = \frac{b-a}{a} e_1$. **58.** $a = u + 7v$. Решение. Пусть $a = \alpha u + \beta v$. Определим коэффициенты α и β. Для этой цели воспользуемся теоремой о координатах линейной комбинации векторов. По этой теореме каждая координата вектора a равна такой же линейной комбинации соответствующих координат векторов u и v, поэтому

$$9 = \alpha \cdot 2 + \beta \cdot 1,\ 1 = \alpha \cdot 1 + \beta \cdot 0.$$

Отсюда получаем: $\alpha = 1, \beta = 7$. **59.** $a = 2v + w$; $v = \frac{1}{2}u - \frac{1}{2}w$; $w = u - 2v$. **60.** $p = 2u - 3v$. **61.** $\alpha = -2$. Указание. Выразить координаты векторов $p\ \{x_1, y_1\}$ и $q\ \{x_2, y_2\}$ через координаты векторов a, b и c и воспользоваться условием коллинеарности векторов. **62.** а) $\alpha = 0$; б) $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = -1$; в) при любом α векторы p и q не коллинеарны. **63.** Решение. Если точки A, B, C лежат на одной прямой, то векторы $\overline{AC}$ и $\overline{AB}$ коллинеарны, поэтому $\overline{OC} - \overline{OA} = \lambda\ (\overline{OB} - \overline{OA})$, откуда $\overline{OC} = (1-\lambda)\ \overline{OA} + \lambda\ \overline{OB}$. В силу единственности разложения вектора по двум неколлинеарным векторам получим $\alpha = 1 - \lambda$ и $\beta = \lambda$, или $\alpha + \beta = 1$. Обратно, если $\alpha + \beta = 1$, то $\overline{OC} - \overline{OA} = \alpha\ \overline{OA} + \beta\ \overline{OB} - \overline{OA} = \alpha\overline{OA} + \beta\overline{OB} - (\alpha + \beta)\overline{OA} = \beta\ (\overline{OB} - \overline{OA})$. Из последнего равенства следует, что векторы $\overline{AC}$ и $\overline{AB}$ коллинеарны, т. е. точки A, B, C лежат на одной прямой. **64.** $\overline{AM_1}\left\{\frac{3}{2}, 2\right\}$; $\overline{BM_2}\left\{0, -\frac{5}{2}\right\}$; $\overline{CM_3}\left\{-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right\}$. **66.** Существует. Указание. Из векторов a, b и c можно составить треугольник, удовлетворяющий условиям задачи в том и только в том случае, если имеет место одно из следующих соотношений: $a + b + c = 0$, $a + b - c = 0$, $a - b + c = 0$, $a - b - c = 0$. Используя координаты векторов a, b, c, убеждаемся, что для них выполнено третье соотношение. **67.** Так как $a \parallel c$ и $a + b + c - d = 0$, то трапеция $ABCD$ существует. **68.** $|a| = 5$; $|b| = 3$; $|c| = 4$; $|d| = \sqrt{5}$. **69.** $a_1\ \{6, 4\}$; $a_2\ \{6, -4\}$. **70.** $m_0 = \frac{m}{|m|}$; $m_0\left\{-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right\}$; $n_0\left\{-\frac{1}{5\sqrt{2}}, \frac{7}{5\sqrt{2}}\right\}$; $p_0\left\{-\frac{\sqrt{7}}{4}, \frac{3}{4}\right\}$; $q_0\ \{0, -1\}$. **71.** $m\left\{\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right\}$; $n\left\{-\frac{5\sqrt{2}}{2}, \frac{5\sqrt{2}}{2}\right\}$; $p\left\{\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$. **72.** а) 45°; б) 75°; в) —30°; г) —60°. **73.** $a_1 \perp b_1$; $a_3 \perp b_3$. **74.** $a_1'\ \{-3, 1\}$; $a_2'\ \{2, -1\}$; $a_3'\ \{0, 6\}$; $a_4'\ \{-3, 0\}$; $a_5'\ \{\sqrt{5}, 2\}$. **76.** $-\frac{18}{17}\sqrt{34}$. **77.** $\frac{7}{2}\sqrt{2} - \frac{7}{2}\sqrt{2}$. **83.** $A\ (0,\ 0)$; $B\ (1,\ 0)$; $C\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; $D\ (1, \sqrt{3})$; $E\ (0,\ \sqrt{3})$; $F\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. **84.** $A(-5, 0)$; $B(-5 + 2\sqrt{3},\ 2)$; $C(5 - 2\sqrt{3},\ 2)$; $D\ (5, 0)$; $M\left(0, \frac{5(5+\sqrt{3})}{22}\right)$;

$N\left(0, \frac{5\sqrt{3}}{3}\right)$. **85.** $A(0, 0)$; $B(0, 1)$; $C\left(\frac{5-2\sqrt{3}}{5}, 1\right)$; $D(1, 0)$; $M\left(\frac{5-2\sqrt{3}}{10-2\sqrt{3}}, \frac{5}{10-2\sqrt{3}}\right)$; $N\left(0, \frac{5\sqrt{3}}{6}\right)$. **89.** $D(-3, 12)$.

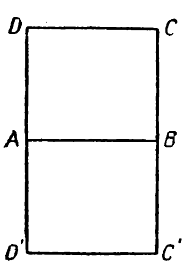
90. $A'(1, 3)$; $B'(0, -4)$; $C'(-3, -5)$; $D'(7, -2)$; $E'(-3, 2)$. **91.** $A'(5, 2)$; $B'(-5, 1)$; $C'(3, 6)$; $D'(-2, 0)$; $E'(3, 5)$. **92.** $A'(-1, -1)$; $B'(-3, 2)$; $C'(-3, 0)$; $D'(4, -3)$; $E'(2, 1)$. **93.** а) $A_1(5, -3)$; $B_1(-2, 5)$; $C_1(3, 2)$; $D_1(7, 2)$. б) $A_2(-5, 3)$; $B_2(2, -5)$; $C_2(-3, -2)$; $D_2(-7, -2)$. **95.** $(-2, 4)$; $\left(\frac{3}{2}, 3\right)$; $\left(-\frac{1}{2}, 5\right)$.

96. $\left(1, \frac{9}{2}\right)$. Указание. Центр тяжести однородного стержня находится в середине стержня. **97.** $M(7, -1)$; $N(-5, 8)$. **98.** $C(8, 0)$; $D(2, -4)$. **99.** $D(-4, 6)$; $C(1, 8)$ и $D'(0, -4)$; $C'(5, -2)$. Указание. Из чертежа 36 видно, что существует два квадрата: $ABCD$ и $ABC'D'$, удовлетворяющие условиям задачи. Для определения координат точек D и D' предварительно определить координаты векторов, полученных из $\overline{AB}$ поворотом на $+90°$ и $-90°$. **100.** $B(6, 5)$; $D(0, -3)$. **101.** $C_1(-1-\sqrt{3}; 3+2\sqrt{3})$; $C_2(-1+\sqrt{3}; 3-2\sqrt{3})$. Указание. Предварительно доказать предложение: если вектор $\boldsymbol{a}$ имеет координаты $\{x, y\}$, то вектор $\boldsymbol{b}$, полученный из $\boldsymbol{a}$ поворотом на 60°, имеет координаты $\left\{\frac{x-\sqrt{3}y}{2}, \frac{y+\sqrt{3}x}{2}\right\}$.

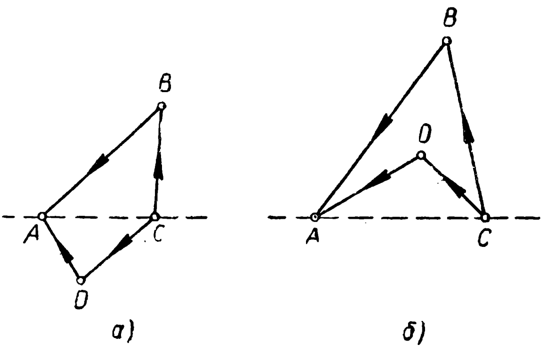
102. $B(-\sqrt{3}, 3+\sqrt{3})$; $C(-2-\sqrt{3}, 1+\sqrt{3})$; $D(-3, 0)$; $E(-2+\sqrt{3}, 1-\sqrt{3})$; $F(\sqrt{3}, 3-\sqrt{3})$. Указание. Воспользоваться указанием к предыдущей задаче. **103.** $\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$; $(-4, 1)$; $\left(1; \frac{8}{3}\right)$; $\left(-\frac{1}{4}, \frac{9}{4}\right)$. **104.** Имеются две точки, удовлетворяющие условию задачи: $C_1(-3, -5)$ и $C_2(3, -6)$. **105.** $A_1\left(3, \frac{13}{3}\right)$; $A_3\left(1, \frac{17}{3}\right)$; $A_4\left(0, \frac{19}{3}\right)$; $A_6\left(-2, \frac{23}{3}\right)$; $\lambda_1 = -\frac{1}{4}$; $\lambda_3 = \frac{1}{2}$; $\lambda_4 = 2$; $\lambda_6 = -4$.

107. $\left(1, \frac{4}{3}\right)$. Указание. Центр тяжести однородной треугольной пластинки находится в точке пересечения медиан. **108.** $A(1, -3)$; $B(3, 4)$; $C(7, -2)$. **109.** $C(0, 3)$. Указание. Центр тяжести C двух материальных точек: A и B находится в точке, расположенной на отрезке AB и делящей этот отрезок в отношении, обратно пропорциональном массам, сосредоточенным в точках A и B. Таким образом, точка C делит отрезок AB в отношении $\lambda = \frac{40}{60} = \frac{2}{3}$. Зная λ, определим координаты точки C. **111.** а) $(3, 4)$; б) $\left(\frac{8}{3}, \frac{14}{3}\right)$ — точка пересечения медиан треугольника ABC.

112. $A_1A_2=\sqrt{10}$; $B_1B_2=4$; $C_1C_2=5$; $D_1D_2=2\sqrt{5}$. **113.** $\left(3, \frac{1}{2}\right)$. Указание. Массы сторон треугольника, пропорциональные их длинам, следует поместить в центрах тяжести соответствующих сторон. **114.** $4\sqrt{2}$. **115.** $(\sqrt{5}, 2)$; $(-\sqrt{5}, 2)$; $(+2\sqrt{2}, -1)$; $(-2\sqrt{2}, -1)$; $(0, 3)$; $(\sqrt{7}, \sqrt{2})$; $(-\sqrt{7}, \sqrt{2})$. **116.** $AD = \frac{10}{3}\sqrt{2}$. Указание. Для определения биссектрисы AD достаточно узнать координаты точки D. Биссектриса AD делит отрезок BC на две части, пропорциональные прилежащим сторонам AB и AC. Отсюда легко определяется отношение λ, в котором точка D делит отрезок BC. **117.** $\frac{\sqrt{157}}{2}$. **119.** $C(-6, 4)$; $r = 4$. **120.** Задача имеет два решения: $C_1(-20, 20)$, $r_1 = 20$; $C_2(-4, 4)$, $r_2 = 4$. **121.** а) $S = 4$; б) $S = \frac{27}{2}$; в) $S = 13$. **122.** $S = \frac{15}{2}$. Указание. Пусть AC — диагональ четырехугольника $ABCD$, а S_{ACB} и S_{ACD} — площади ориентированных треугольников ACB и ACD. Возможны два случая. а) Вершины B и D лежат по разные стороны от AC. В этом случае треугольники ACB и ACD имеют разные ориентации, поэтому S_{ACB} и S_{ACD} имеют разные знаки (черт. 37, *а*) и $S = |S_{ACB} - S_{ACD}|$. б) Вершины B и D лежат по одну и ту же сторону от AC. В этом случае треугольники ACB и ACD имеют одну и ту же ориентацию, поэтому S_{ACB} и S_{ACD} имеют один и тот же знак (черт. 37, *б*) и $S = |S_{ACB} - S_{ACD}|$. Итак, в любом случае мы приходим к одной и той же формуле. **123.** $d = 13$. Указание $d = \frac{2|S_{AM_1M_2}|}{M_1M_2}$. **124.** $C_1(5, 0)$; $C_2\left(\frac{7}{3}, 0\right)$. **125.** $2p = 15 + 5\sqrt{5}$; $S = 25$; $h_a = 5$; $h_b = 2\sqrt{5}$; $h_c = 10$; $\cos A = \frac{\sqrt{5}}{5}$. **126.** $\left(\frac{31}{5}, \frac{36}{5}\right)$.



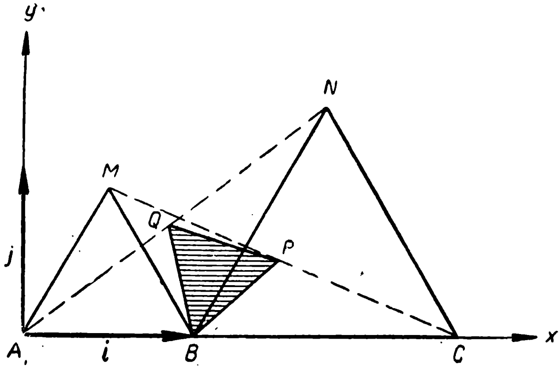
Черт. 36



Черт. 37

Указание. Четырехугольник следует разделить на два треугольника и определить центры тяжести каждого из них. В эти центры поместить массы соответствующих треугольников, которые будут пропорциональны их площадям. Таким образом, задача сведется к определению центра тяжести системы двух материальных точек. **132.** Если обозначить через M_1', M_2', M_3', M_4' точки, симметричные данным по отношению к полюсу, а через M_1'', M_2'', M_3'', M_4'' — по отношению к полярной оси, то $M_1'\left(2, -\frac{3\pi}{4}\right)$; $M_2'\left(3, -\frac{2\pi}{3}\right)$; $M_3'\left(1, -\frac{3\pi}{4}\right)$; $M_4'\left(3, \frac{2\pi}{3}\right)$; $M_1''\left(2, -\frac{\pi}{4}\right)$; $M_2''\left(3, -\frac{\pi}{3}\right)$; $M_3''\left(1, -\frac{\pi}{4}\right)$; $M_4''\left(3, \frac{\pi}{3}\right)$. **133.** $A(1, \sqrt{3})$; $B(-1, 1)$; $C(0, 5)$; $D\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{2}\right)$. **134.** $M_1\left(6, \frac{\pi}{2}\right)$; $M_2(2, \pi)$; $M_3\left(\sqrt{2}, \frac{3}{4}\pi\right)$; $M_4\left(2, \frac{\pi}{6}\right)$; $M_5\left(3, -\frac{\pi}{2}\right)$; $M_6\left(2, -\frac{\pi}{3}\right)$. **135.** $S = \frac{1}{2}\rho_1\rho_2|\sin(\varphi_2 - \varphi_1)|$; а) $S = 1$; б) $S = \frac{3}{2}$; в) $S = \frac{15}{4}\sqrt{2}$. **136.** $M_1M_2 = \sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1\rho_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$.

Указание. Пусть Oi — данная полярная система координат. Построим вспомогательную прямоугольную декартову систему координат Oij так, чтобы вектор j был получен из вектора i поворотом последнего на угол $+90°$. В построенной системе взятые точки будут иметь координаты: $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, где $x_1 = \rho_1\cos\varphi_1$, $y_1 = \rho_1\sin\varphi_1$, $x_2 = \rho_2\cos\varphi_2$, $y_2 = \rho_2\sin\varphi_2$. Далее воспользоваться формулой: $M_1M_2 = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$. **137.** а) $\sqrt{19}$; б) 5; в) 10. Указание. См. предыдущую задачу. **138.** $AB = BC = 7$. **140.** а), б) — на окружностях с центрами в полюсе и радиусами, соответственно равными 3 и 5; в), г) — на лучах, исходящих из полюса и образующих с полярной осью углы 60° и 45°; д) — на прямой, перпендикулярной к полярной оси и пересекающей ее в точке (5, 0); е) — на прямой, параллельной полярной оси и отстоящей от полюса на расстоянии $\rho = 3$. **141.** Указание. Направить оси прямоугольной декартовой системы координат по катетам CA и CB треугольника. Если $CB = a$ и $CA = b$, то вершины треугольника, очевидно, будут иметь координаты: $A(0, b)$, $B(a, 0)$, $C(0, 0)$. Используя формулу для определения расстояния между двумя точками, вычислить квадраты сторон треугольника. **145.** Решение. Пусть P — середина отрезка MC, а Q — середина отрезка AN (черт. 38). Требуется доказать, что треугольник PQB — равносторонний. Возьмем на плоскости прямоугольную декартову систему координат, определим координаты вершин треугольника PQB, найдем длины его сторон и убедимся в том, что $PQ = QB = BP$. Систему координат выберем следующим образом: начало O совместим с точкой A, за вектор i примем вектор $\overline{AB}$, а вектор j направим так, чтобы его конец и точки M и N лежали по одну сторону от прямой l. Если $BC = a$, то легко убедиться в том, что вершины данных треугольников в системе Oij имеют координа-

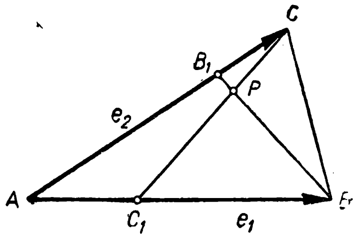


Черт. 38

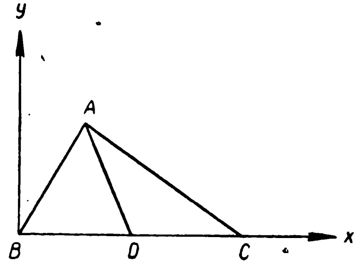
ты: $A\ (0,\ 0)$; $B\ (1,\ 0)$; $C(1+a,\ 0)$; $M\left(\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; $N\left(1+\frac{a}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}a\right)$.

Определим координаты точек $P\,(x_1,\ y_1)$ и $Q\,(x_2,\ y_2)$: $x_1 = \dfrac{\frac{1}{2}+1+a}{2} = \dfrac{3+2a}{4}$, $y_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$; $x_2 = \dfrac{2+a}{4}$, $y_2 = \dfrac{\sqrt{3}}{4}a$. Пользуясь формулой для вычисления длины отрезка по координатам концов, получаем: $BQ = PQ = PB = \dfrac{\sqrt{a^2-a+1}}{2}$. **146.** Указание. Взять точку A за начало, а $\overline{AB} = e_1$ и $\overline{AC} = e_2$ — за координатные векторы. Если ввести обозначения: $\lambda_3 = \dfrac{\overline{AC_1}}{\overline{C_1B}}$, $\lambda_1 = \dfrac{\overline{BA_1}}{\overline{A_1C}}$, $\lambda_2 = \dfrac{\overline{CB_1}}{\overline{B_1A}}$, то легко выразить координаты точек A_1, B_1, C_1 через λ_1, λ_2 и λ_3. Далее воспользоваться условием коллинеарности этих точек. **147.** Решение. Обозначим через P точку пересечения отрезков BB_1 и CC_1, а через ν_1 и ν_2 отношения $\dfrac{BP}{PB_1} = \nu_1$, $\dfrac{CP}{PC_1} = \nu_2$.

Выберем точку A за начало координат, а векторы $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$ — за координатные векторы e_1 и e_2 (черт. 39). В этой системе координат вершины треугольника, очевидно, будут иметь следующие координаты: $A\ (0,\ 0)$, $B\ (1,\ 0)$, $C\ (0,\ 1)$. Далее, пользуясь соотношениями $\lambda = \dfrac{AC_1}{C_1B}$ и $\mu = \dfrac{AB_1}{B_1C}$, определяем координаты точек B_1 и C_1: $B_1\left(0,\ \dfrac{\mu}{1+\mu}\right)$, $C_1\left(\dfrac{\lambda}{1+\lambda},\ 0\right)$. Определим координаты точки $P\,(x,\ y)$,

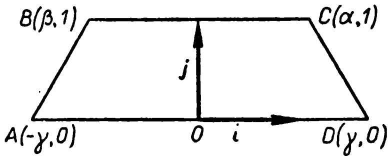


Черт. 39

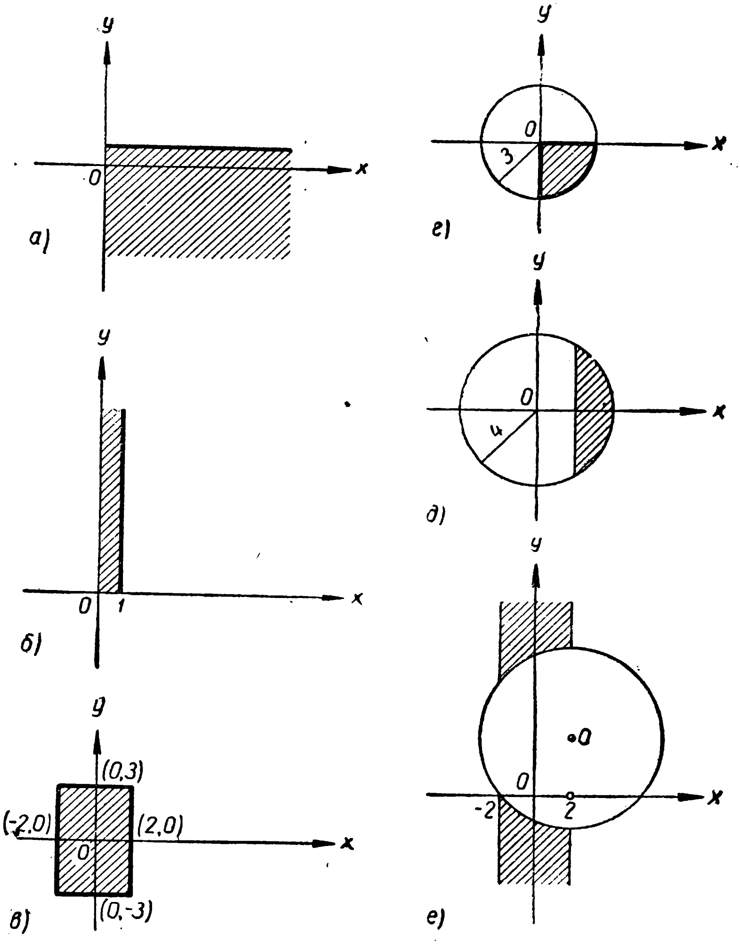


Черт. 40

учитывая, что $\frac{BP}{PB_1} = \nu_1$: $P\left(\frac{1}{1+\nu_1}, \frac{\nu_1\mu}{(1+\mu)(1+\nu_1)}\right)$. Определим координаты той же точки, учитывая, что $\frac{CP}{PC_1} = \nu_2$: $P\left(\frac{\nu_2\lambda}{(1+\lambda)(1+\nu_2)}, \frac{1}{1+\nu_2}\right)$. Таким образом, для определения искомых величин ν_1 и ν_2 получаем соотношения: $\frac{1}{1+\nu_1} = \frac{\nu_2\lambda}{(1+\lambda)(1+\nu_2)}$, $\frac{\nu_1\mu}{(1+\mu)(1+\nu_1)} = \frac{1}{1+\nu_2}$. Из этих соотношений, после элементарных преобразований получаем: $\nu_1 = \frac{1+\mu}{\lambda}$, $\nu_2 = \frac{1+\lambda}{\mu}$. Если $\lambda = \mu = 1$, т. е. если BB_1 и CC_1 являются медианами треугольника, то $\nu_1 = \nu_2 = 2$. Таким образом, мы доказали, что если P — точка пересечения любых двух медиан треугольника ABC, то этой точкой каждая медиана делится в отношении $2:1$. Отсюда непосредственно следует известная теорема о том, что медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся ею в отношении $2:1$. **148.** Доказательство. Систему прямоугольных декартовых координат возьмем так, как указано на чертеже 40. Введем обозначения для координат точек A, C и D: $A(\alpha, \beta)$, $C(\gamma, 0)$, $D(\delta, 0)$. При данном выборе системы координат $BD = \delta$, $BC = \gamma$. Далее вычислим все величины, входящие в формулу Стюарта: $AB^2 = \alpha^2 + \beta^2$, $BC = \gamma$, $AC^2 = (\alpha-\gamma)^2 + \beta^2$, $BD = \delta$, $AD^2 = (\alpha-\delta)^2 + \beta^2$, $DC = \gamma - \delta$. Подставив эти значения в левую часть формулы Стюарта, получаем: $AB^2 \cdot DC + AC^2 \cdot BD - AD^2 \cdot BC = (\alpha^2+\beta^2)(\gamma-\delta) + [(\alpha-\gamma)^2+\beta^2]\,\delta - [(\alpha-\delta)^2+\beta^2]\gamma = \alpha^2\gamma - \alpha^2\delta + \beta\gamma - \beta^2\gamma + \alpha^2\delta + \gamma^2\delta + \beta^2\delta - 2\alpha\gamma\delta - \alpha^2\gamma - \delta^2\gamma - \beta^2\gamma + 2\alpha\delta\gamma = \gamma^2\delta - \delta^2\gamma = \gamma\delta(\gamma-\delta) = BC \cdot BD \cdot DC$. Теорема доказана. **149.** Указание. Принять две стороны треугольника за векторы аффинной системы координат и учесть, что если $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ и $C(x_3, y_3)$, то точка пересечения медиан треугольника ABC имеет координаты: $\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$. **150.** Указание. Взять точку O за начало координат и учесть указание к предыдущей задаче. **152.** Указание. Пусть A лежит между O и B. Примем точку O за начало прямоугольной декартовой системы координат, а вектор $\overline{OA}$ — за единичный вектор $\mathbf{i}$. В этой системе координат вершины четырехугольника могут быть записаны так: A (1, 0), B (λ, 0), D (α, β), C ($\mu\alpha$, $\mu\beta$), причем $\lambda > 1$, $\mu > 1$. Вычислить площади треугольников OAD, OBC, OSP и показать, что $S_{OBC} - S_{OAD} = 4S_{OSP}$. **153.** Указание. Если систему координат выбрать так, как указано на чертеже 41, то из условия $AC = BD$ получаем: $\alpha + \beta = 0$. **156.** A и D. **157.** б) и в). **158.** а) M_1 (4, 4), M_2 (— 4, — 4); б) M_1 (1, 1), M_2 $\left(2, \frac{9}{4}\right)$; в) точек пересечения нет. **159.** а) Биссектриса первого и третьего координатных углов; б) две прямые, параллельные оси Oy; в) прямая, параллельная оси Ox; г) две прямые; ось абсцисс и биссектриса второго и четвертого координатных углов; д) биссектрисы координатных углов; е) прямая, параллельная оси Oy; ж) пара прямых: ось абсцисс и прямая, проходящая через точки (0, 0) и (1, 2); з) пара прямых: прямая, параллельная оси Ox, отсекающая от оси Oy отрезок, равный 4, и прямая, параллельная оси Oy, отсекающая от оси Ox отрезок, равный — 1; и) точка $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{7}{2}\right)$; к) окружность с центром в точке (+ 5, — 3) и радиусом $r = 4$; л) пустое множество. **160.** а) Пара прямых, параллельных оси Oy и проходящих через точки (1, 0) и (— 1, 0); б) пара прямых, одна из которых проходит через точки (0, 0), (1,1), а другая — через точки (0, 0), (— 1, 1); в) пара лучей, исходящих из начала координат и содержащих соответственно точки (1, 0) и (1, 2); г) пара лучей, исходящих из точки (1, 0) и содержащих соответственно точки (0, 1) и (2, 1). Указание. При рассмотрении примера в) возвести данное соотношение в квадрат и учесть, что $x \geqslant 0$. Поступить аналогично при рассмотрении примера г). **161.** а), б) — не совпадают; в) — совпадают. **162.** а) Окружность с центром в полюсе радиуса 4; б) прямая, перпендикулярная к полярной оси и проходящая через точку $\rho = 2$, $\varphi = 0$; в) окружность радиуса 5 с центром в точке C (0, 5); г) луч, исходящий из полюса и образующий с полярной осью угол $\frac{\pi}{4}$; д) прямая, параллельная полярной оси и проходящая через точку $\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$; е) два луча, исходящие из полюса и образующие с полярной осью углы $\frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4}$; ж) прямая, проходящая через полюс и образующая с полярной осью угол $\frac{\pi}{4}$. Указание. В примерах б)



Черт. 41

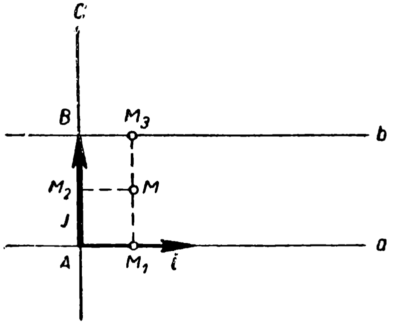


Черт. 42

в), д) и ж) целесообразно перейти к прямоугольной декартовой системе координат. **163.** Данными уравнениями соответственно задаются заштрихованные области, изображенные на чертеже 42, *а, б, в, г, д, е*. При этом, если граница области изображена жирной линией, то она принадлежит области, а если обычной, то не принадлежит. Указание. В примере а) сначала найти области Ω_1 и Ω_2, заданные каждым из соотношений $x > 0$ и $y \leqslant 1$. Искомая область есть пересечение областей Ω_1 и Ω_2. Остальные примеры рассмотреть ана-

логично. **164.** а) $\left.\begin{array}{l}0 \leqslant x \leqslant 5\\0 \leqslant y \leqslant 3\end{array}\right\}$; б) $y \geqslant 0$; в) $\left.\begin{array}{l}x^2+y^2 \leqslant 9\\y \geqslant 1\end{array}\right\}$; г) $\left.\begin{array}{c}x+y \leqslant 1\\x \geqslant 0\\y \geqslant 0\end{array}\right\}$;
д) $\left.\begin{array}{l}x^2+y^2 \leqslant 8\\|x| \geqslant 2\\|y| \geqslant 2\end{array}\right\}$; е) $\left.\begin{array}{l}x^2+y^2 \leqslant 9\\x \leqslant y\end{array}\right\}$. Решение. На чертеже 13, а)

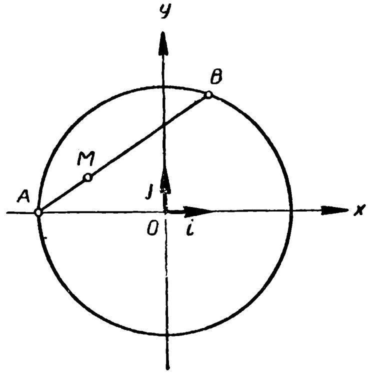
изображен прямоугольник $OABC$, измерения которого соответственно равны 5 и 3. Очевидно, первые координаты всех точек, лежащих в полосе между параллельными прямыми OA и CB, вместе с точками этих прямых, удовлетворяют неравенствам: $0 \leqslant x \leqslant 5$, вторые же координаты этих точек произвольны. Аналогично вторые координаты всех точек, лежащих в полосе между параллельными прямыми OC и AB, вместе с точками этих прямых удовлетворяют неравенствам: $0 \leqslant y \leqslant 3$, а первые координаты этих точек произвольны. Данный четырехугольник есть пересечение рассматриваемых двух полос, поэтому координаты точек четырехугольника удовлетворяют системе неравенств: $0 \leqslant x \leqslant 5$, $0 \leqslant y \leqslant 3$. Эти соотношения могут быть названы «уравнениями» данной фигуры. Остальные примеры решаются аналогично. **165.** $2x - 3y + 8 = 0$. **166.** Две точки. Если систему координат выбрать так, как указано на чертеже 43, то точки будут иметь следующие координаты: $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ и $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Решение. Пусть A и B — точки пересечения прямой с соответственно прямыми a и b. Примем точку A за начало координат, вектор i направим вдоль прямой a, а в качестве j возьмем вектор $\overline{AB}$ (черт. 43). Для того чтобы точка M принадлежала г.м.т., необходимо и достаточно, чтобы $M_1M = M_2M$ и $M_1M = M_3M$. Так как $M_1M = |y|$, $M_2M = |x|$, $M_3M = |1 - y|$, то предыдущие соотношения запишутся так: $|y| = |x|$ и $|y| = |1 - y|$. Эти соотношения являются уравнениями искомого г.м.т. Выясним, что представляет собой искомое г.м.т. Отметим, что $|y| \neq 0$, так как в противном случае из второго соотношения следует, что $|y - 1| = 0$. Соотношения: $|y| = 0$ и $|y - 1| = 0$, очевидно, противоречивы. Легко видеть также, что $y > 0$. В самом деле, если $y < 0$, то $|1 - y| = 1 - y$, $|y| = -y$ и, следовательно, $|1 - y| \neq |y|$. Таким образом, $y > 0$ и $|y| = y$. Возможны два случая: а) $1 - y > 0$; б) $1 - y < 0$. В первом случае $y = 1 - y$, поэтому $y = \frac{1}{2}$. Во втором случае $y = -(1 - y)$, что противоречиво. Итак, соотношение $|y| = |1 - y|$ эквивалент-



Черт. 43

но соотношению $y = \frac{1}{2}$. Подставив это значение y в соотношение $|x| = |y|$, получаем: $x = \pm\frac{1}{2}$. Следовательно, искомое г. м. т. состоит из двух точек: $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. **167.** Пусть h — расстояние между параллельными прямыми, а α — данное число. Возможны три случая: а) $\alpha < h$; искомое г.м.т. не существует; б) $\alpha = h$; искомое г.м.т. представляет собой совокупность всех точек, расположенных на заданных прямых и в полосе между ними; в) $\alpha > h$; искомое г.м.т. представляет собой пару прямых l_1 и l_2, параллельных данным. Прямые l_1 и l_2 расположены симметрично относительно данных прямых; расстояние между ними равно α. **168.** Прямые, соединяющие середины противоположных сторон. Указание. За оси координат принять прямые, соединяющие середины противоположных сторон. **169.** $2x - 3y = 0$. **170.** Две гиперболы: $xy = a^2$ и $xy = -a^2$. **171.** а) $x - 3y + 15 = 0$; б) $x - 2y^2 + 24y + 71 = 0$; в) $x^2 + y^2 = a^2$; г) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$.

172. $(x + 3)^2 + (y - 5)^2 = 16$. **173.** $x^2 + (y - 3)^2 = 9$ и $x^2 + (y+3)^2 = 9$. **174.** а) $(x-1)^2 + (y + 2)^2 = 25$; $C(1, -2)$, $r = 5$; д) $(x - 1)^2 + y^2 = 1$, $C(1, 0)$, $r = 1$; ж) $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 4$; $C(2, 1)$, $r = 2$. Остальные уравнения не определяют окружность. **175.** Окружность, концентрическая данной, если $\alpha \neq -R^2$, и центр данной окружности, если $\alpha = -R^2$. **176.** Указание. За ось Ox выбрать линию центров данных окружностей. **180.** При $\lambda \neq 1$ искомое геометрическое место представляет собой окружность, центр которой лежит на прямой AB, а при $\lambda = 1$ — прямую, перпендикулярную к отрезку AB и проходящую через его середину. Указание. Если начало прямоугольной декартовой системы координат поместить в точку B, а направление оси Ox определить вектором $\overline{BA}$, то уравнение искомого г.м.т. будет иметь вид: $x^2(1 - \lambda^2) + y^2(1 - \lambda^2) - 2ax + a^2 = 0$, где a — длина отрезка AB. **181.** Пусть $AB = 2a$, а α^2 — данная сумма квадратов. а) $\alpha^2 > 2a^2$. Искомое г.м.т. есть окружность с центром в середине отрезка AB; б) $\alpha^2 = 2a^2$. Искомое г.м.т. представляет собой точку — середину отрезка AB; в) $\alpha^2 < 2a^2$. На плоскости не существует ни одной точки, удовлетворяющей условию задачи. **182.** Окружность, центр которой совпадает с центром тяжести треугольника ABC. **183.** Окружность, концентрическая данной окружности. **184.** Окружность, построен-



Черт. 44

ная на диаметре AB. Указание. Начало координат взять в середине отрезка AB и воспользоваться теоремой Пифагора. **185.** Окружность. Решение. Возьмем прямоугольную декартову систему координат так, чтобы центр данной окружности совпал с началом координат, а точка A имела координаты $A(-r, 0)$ (черт. 44). Пусть AB — произвольная хорда, проходящая через точку A, а M — точка геометрического места, т. е. $\frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} = \lambda$. Обозначая координаты точек B и M соответственно через (x_1, y_1) и (x, y), будем иметь: $x = \frac{-r + \lambda x_1}{1+\lambda}$, $y = \frac{\lambda y_1}{1+\lambda}$. Отсюда, учитывая, что $\lambda \neq 0$, получаем:

$$x_1 = \frac{1+\lambda}{\lambda}\left(x + \frac{r}{1+\lambda}\right), \quad y_1 = \frac{1+\lambda}{\lambda} y. \qquad (1)$$

Так как точка $B(x_1, y_1)$ лежит на данной окружности, то $x_1^2 + y_1^2 = r^2$, поэтому $\left(\frac{1+\lambda}{\lambda}\right)^2\left(x + \frac{r}{1+\lambda}\right)^2 + \left(\frac{1+\lambda}{\lambda}\right)^2 y^2 = r^2$, или

$$\left(x + \frac{r}{1+\lambda}\right)^2 + y^2 = \frac{r^2\lambda^2}{(1+\lambda)^2}. \qquad (2)$$

Мы доказали, что если $M(x, y)$ — произвольная точка г.м.т., то ее координаты удовлетворяют уравнению (2). Теперь возьмем произвольную точку $M(x, y)$, координаты которой удовлетворяют уравнению (2), и покажем, что она принадлежит г.м.т. Уравнение (2) может быть записано в виде:

$$\left(\frac{1+\lambda}{\lambda}\right)^2\left(x + \frac{r}{1+\lambda}\right)^2 + \left(\frac{1+\lambda}{\lambda}\right)^2 y^2 = r^2. \qquad (3)$$

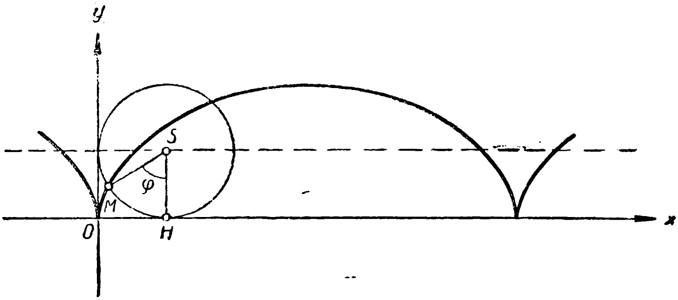
Рассмотрим на плоскости точку B с координатами:

$$x_1 = \frac{1+\lambda}{\lambda}\left(x + \frac{r}{1+\lambda}\right) = \frac{(1+\lambda)x + r}{\lambda}; \quad y_1 = \frac{(1+\lambda)y}{\lambda}. \qquad (4)$$

Из (3) следует, что точка B лежит на данной окружности. С другой стороны, из соотношений (4) получаем:

$$x = \frac{-r + \lambda x_1}{1+\lambda}, \quad y = \frac{\lambda y_1}{1+\lambda},$$

откуда следует, что M делит отрезок AB в отношении λ и, следовательно, M принадлежит геометрическому месту точек. Таким образом, соотношение (2) является уравнением искомого геометрического места точек. Этим уравнением определяется окружность радиуса $\rho = \frac{r\lambda}{1+\lambda}$ с центром в точке $\left(-\frac{r}{1+\lambda}, 0\right)$. Легко видеть, что эта окружность при любом λ проходит через точку A. Если $\lambda = 1$, то она проходит также через начало координат. **186.** Две окружности. Указание. Написать уравнение искомого г.м.т. в полярной системе координат, приняв точку O за полюс, а диаметр, проходящий через нее, — за полярную ось; затем перейти к прямоугольной декартовой системе координат. **187.** Окружность.

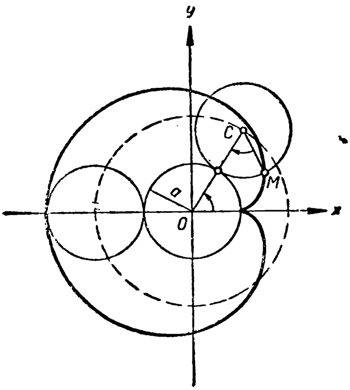


Черт. 45

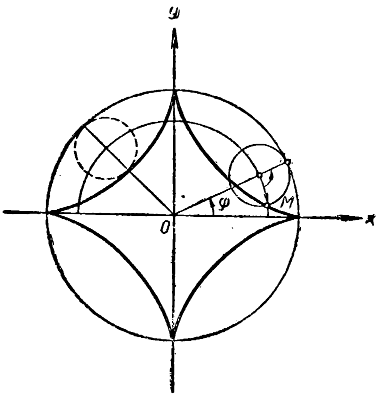
концентрическая данной окружности. 188. Окружность. 189. а) Окружность с центром в середине основания BC и радиусом $r = \frac{b}{2}$; б) окружность с центром в точке, делящей основание BC в отношении $\lambda = \frac{1}{3}$ и радиусом $r = \frac{b}{3}$. 190. Параметрическое задание: $x = r(1 - \sin\varphi)$, $y = r(1 - \cos\varphi)$. В декартовых координатах циклоида имеет уравнение:

$$x + \sqrt{y(2r - y)} = r \arccos\frac{r - y}{r}.$$

Решение. Сначала напишем параметрическое задание циклоиды. Пусть $M(x, y)$ — произвольная точка циклоиды, S — центр катящейся окружности, а H — основание перпендикуляра, опущенного из точки S на ось абсцисс (черт. 45). Примем в качестве



Черт. 46



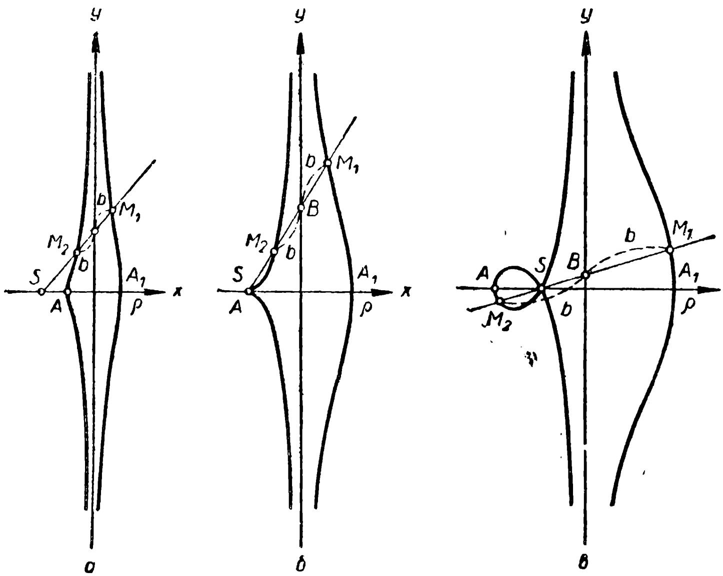
Черт. 47

параметра угол, который образует луч SM с лучом SH, т. е. $\varphi = \angle MSH$. Если M_1 — основание перпендикуляра, опущенного из точки M на ось абсцисс, а M_2 — основание перпендикуляра, опущенного из той же точки на ось ординат (точки M_1 и M_2 на чертеже 45 не изображены), то, очевидно, $x = OM_1 = r\varphi - r\sin\varphi = r(\varphi - \sin\varphi)$; $y = OM_2 = r - r\cos\varphi = r(1 - \cos\varphi)$.

Таким образом, циклоида имеет следующее параметрическое задание:

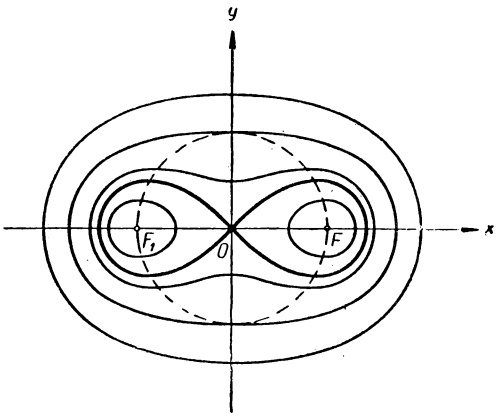
$$\left.\begin{aligned} x &= r(\varphi - \sin\varphi) \\ y &= r(1 - \cos\varphi) \end{aligned}\right\}.$$

Отсюда, исключив φ, получаем уравнение циклоиды в прямоугольных декартовых координатах. Для построения циклоиды по точкам заметим, что она периодическая: период (б а з и с циклоиды) $OA = 2\pi r$. Поэтому при построении кривой достаточно рассмотреть только те точки, для которых $x \leqslant 2\pi r$. Кривая изображена на чертеже 45. **191.** $x = (R + r)\cos\varphi - r\cos\frac{R+r}{r}\varphi$, $y = (R+r)\times\sin\varphi - r\sin\frac{R-r}{r}\varphi$. Кардиоида изображена на чертеже 46. **192.** $x = (R - r)\cos\varphi + r\cos\frac{R-r}{r}\varphi$, $y = (R - r)\sin\varphi - r\sin\frac{R-r}{r}\varphi$.

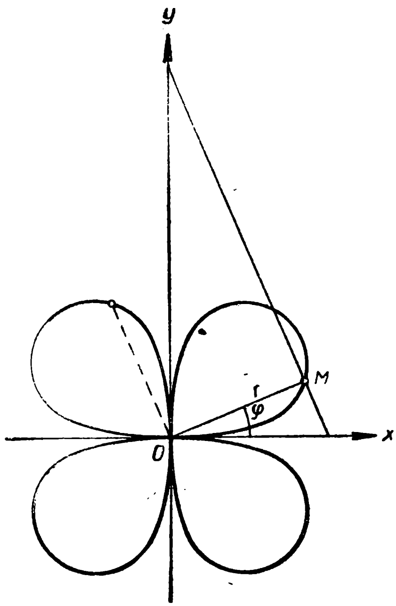


Черт. 48

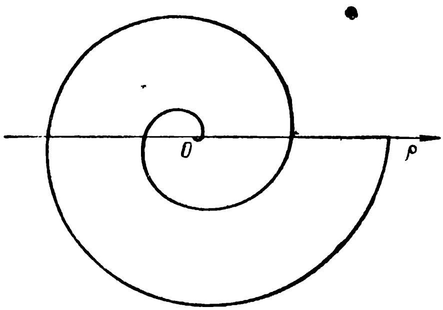
Астроида изображена на чертеже 47. **193.** $\rho = \dfrac{a}{\cos\varphi} \pm b$. Р е ш е н и е. Пусть SB — произвольная прямая, проходящая через S и пересекающая прямую l в точке B (черт. 48, *а*). Тогда точки M_1 и M_2, лежащие на этой прямой и отстоящие от точки B на расстоянии b, принадлежат искомому геометрическому месту точек. Если (ρ_1, φ) и (ρ_2, φ) — обобщенные полярные координаты точек M_1 и M_2, то, очевидно, $\rho_1 = SM_1 = SB + BM_1 = \dfrac{a}{\cos\varphi} + b$; $\rho_2 = SM_2 = SB - BM_2 = \dfrac{a}{\cos\varphi} - b$. Таким образом, в обобщенной полярной системе кривая задается следующим уравнением: $\rho = \dfrac{a}{\cos\varphi} \pm b$. Отметим, что это уравнение эквивалентно уравнению $\left(\rho - \dfrac{a}{\cos\varphi}\right)^2 = b^2$. Кривая для случая $a > b$ изображена на чертеже 48,*а*, для случая $a = b$ — на чертеже 48, *б*, а для случая $b > a$ — на чертеже 48,*в*. **194.** $\rho = 2r\cos\varphi + b$. У к а з а н и е. Если $\rho = f(\varphi)$ — уравнение данной кривой в полярных координатах, то $\rho = f(\varphi) \pm b$ — уравнение конхоиды этой кривой, где b — отрезок, который откладывается от точек кривой. **195.** $(x^2 + y^2)^2 - 2c^2(x^2 - y^2) = b^4 - c^4$ — уравнение овала Кассини; $(x^2 + y^2)^2 - 2c^2(x^2 - y^2) = 0$ — уравнение лемнискаты Бернулли. Р е ш е н и е. Выведем уравнение овала Кассини. Пусть $M(x, y)$ — произвольная точка геометрического места. Если $F_1F = 2c$, то точки F_1 и F будут иметь координаты $F_1(-c, 0)$, $F(c, 0)$, поэтому соотношение $F_1M \cdot FM = b^2$ в координатах запишется так: $\sqrt{(x+c)^2 + y^2} \cdot \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = b^2$. Это уравнение эквивалентно уравнению $[(x+c)^2 + y^2][(x-c)^2 + y^2] = b^4$. После элементарных преобразований получаем:



Черт. 49



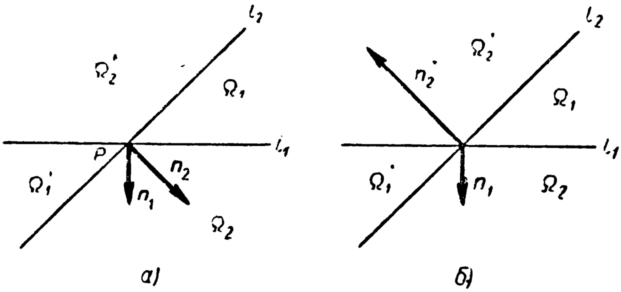
Черт. 50



Черт. 51

$[(x^2+y^2+c^2)+2xc]\times$ $\times[(x^2+y^2+c^2)-2xc]=$ $=b^4$. Отсюда имеем: $(x^2+$ $+y^2+c^2)^2-4x^2c^2=b^4$, или $(x^2+y^2)^2+2(x^2+$ $+y^2)c^2+c^4-4x^2c^2=b^4$. Окончательно получаем следующее уравнение овала Кассини: $(x^2+y^2)^2-$ $-2c^2(x^2-y^2)=b^4-c^4$. При $b=c$ получаем уравнение лемнискаты Бернулли: $(x^2+y^2)^2-$ $-2c^2(x^2-y^2)=0$. Овалы Кассини и лемниската Бернулли изображены на чертеже 49. При $b>c$ овал Кассини является замкнутой линией; при $b<c$ состоит из пары обособленных овалов; при $b=c$ овал Кассини есть лемниската Бернулли. На чертеже лемниската Бернулли проходит через начало координат. **196.** $r=a\times$ $\times\sin 2\varphi$. Кривая изображена на чертеже 50. **197.** $\rho=a\varphi$, где $a=$ $=\frac{v}{\omega}$. Кривая изображена на чертеже 51. **198.** $\rho=$ $=\frac{2a\sin^2\varphi}{\cos\varphi}$; $y^2=\frac{x^3}{2a-x}$. **199.** $y=\frac{a^3}{x^2+a^2}$. Указание. Воспользоваться соотношением: $OP:PS=OC:PM$. **204.** а) $4x-3y+7=0$; б) $5x-2y=0$; в) $x+$ $+y+4=0$; г) $\frac{x}{3}-$ $-\frac{y}{2}=1$; д) $y-5=0$; е) $x+1=0$; ж) $x-3y-16=$ $=0$; з) $x+y-4=0$. **205.** а) и в). **206.** а) $a=-2$, $b=3$; $\frac{x}{-2}+\frac{y}{3}=1$; б) $a=-6$; $b=-6$; $\frac{x}{-6}+\frac{y}{-6}=1$; в) $a=-\frac{3}{2}$,

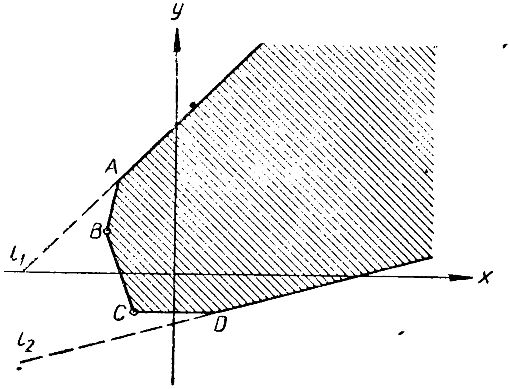
$b = 3$; $\dfrac{x}{-\frac{3}{2}} + \dfrac{y}{3} = 1$. **207.** а) $x = -2 + 5t$, $y = 3 - t$; б) $x = 3t$, $y = -2 - 2t$; в) $x = t$, $y = t$; г) $x = t$, $y = -3$; д) $x = 1$, $y = t$. **208.** а) $\bar{p}\,\{4, -1\}$; б) $M_1\,(11, -1)$; $M_2\,(-1, 2)$; $M_3\,(-9{,}0)$; $M_4\,(-5, 3)$; в) $t_1 = 2$, $t_2 = \frac{1}{4}$; г) M_2, M_3, M_4. **209.** а) $x = -2 + t$, $y = -1 + 3t$; б) $x = 2 - t$, $y = 1 + t$; в) $x = -\frac{5}{2}$, $y = t$; г) $x = 1 - 5t$, $y = -2 + 4t$; д) $x = -3t$; $y = t$. **210.** а) $x + 3y - 10 = 0$; б) $y - 2 = 0$; в) $3x - y - 15 = 0$. **212.** а) $2x + y = 0$; б) $x = 0$; в) $5x + y - 6 = 0$. **213.** $AB \parallel CD$; $3x + y - 1 = 0$; $x - y = 0$; $y - 1 = 0$. **214.** $(AB)\ 2x - y - 4 = 0$; $(BC)\ x + y - 5 = 0$; $(CD)\ 2x - y + 2 = 0$; $(DA)\ x + y + 1 = 0$. Указание. Сначала определить координаты вершин C и D. **215.** $x - y - 7 = 0$; $x - 2y - 10 = 0$. **216.** $x + y - 3 = 0$; $x - y + 1 = 0$. **217.** $3x - 2y - 8 = 0$; $x + 3y + 12 = 0$; $2x - 5y + 2 = 0$. Указание. Через каждую из данных точек провести прямую, параллельную вектору, образованному двумя другими точками. **218.** а) $3x - y - 1 = 0$; б) $y + 2x = 0$; в) $x - y = 0$; г) $3y - \sqrt{3}x = 0$; д) $y + \sqrt{3}x = 0$; е) $y = -3x + 2$; ж) $y = x - 3$. **219.** а) $k = -2$, $b = -5$; б) $k = \frac{1}{3}$, $b = 2$; в) $k = -1$, $b = 0$. **220.** а) $135°$; б) $45°$; в) $150°$. **221.** а) $2x + y - 1 = 0$; б) $x + y - 15 = 0$; в) $3x + 2y = 0$. **223.** а) 5; б) $(15, -10)$; в) $t = 4$. **224.** а) $x = 2 - 12t$, $y = -3 + 9t$; б) $\frac{21}{15}$. **225.** $p\,\{5, 2\}$; $n\{2, -5\}$; $k = \frac{2}{5}$; $a = -\frac{3}{2}$; $b = \frac{3}{5}$. **226.** $2x - 5y + 29 = 0$. **227.** $2x + 3y - 12 = 0$. **228.** $2x - 4y - 21 = 0$. **229.** а) $x - 1 = 0$; $2x - 3y + 8 = 0$; $2x + 3y - 12 = 0$; б) $y - 5 = 0$; $3x + 2y - 1 = 0$; $3x - 2y - 5 = 0$. **230.** $3x + 4y - 17 = 0$; $3x - 4y - 1 = 0$; $2x - 5y + 27 = 0$. **231.** $2x - 2y + \sqrt{2}a = 0$; $2x + 2y - \sqrt{2}a = 0$; $2x - 2y - \sqrt{2}a = 0$; $2x + 2y + \sqrt{2}a = 0$. **232.** $(3, 1)$. **233.** $(-2, 8)$. **234.** $(5, 7)$. **235.** $Q\,(4, -2)$. Указание. Найти координаты точки N', симметричной точке N относительно данной прямой l. Q есть точка пересечения l и MN'. **236.** $(AB)\ y = 0$; $(BC)\ \sqrt{3}x - y - a\sqrt{3} = 0$; $(CD)\ \sqrt{3}x + y - 2a\sqrt{3} = 0$; $(DE)\ y - a\sqrt{3} = 0$; $(EF)\ \sqrt{3}x - y + a\sqrt{3} = 0$; $(AF)\ y + \sqrt{3}x = 0$. **237.** а) $13x - 9y + 7 = 0$; б) $36x - 23y + 29 = 0$; в) $4x + 3y - 19 = 0$. Указание. Вектор $p = \dfrac{\overline{AB}}{AB} + \dfrac{\overline{AC}}{AC}$ является направляющим вектором биссектрисы внутреннего угла A. **238.** $(AM)\ 2x + y - 4 = 0$; $(AP)\ 2x - y = 0$; $(MN)\ 6x - 3y + 16 = 0$; $(NP)\ 6x + 3y - 28 = 0$. **239.** $(0, -4)$, $(-4, 4)$; $(2, 2)$; $(-6, -2)$. **241.** а) Пересекаются, $M\,(3{,}0)$; б) параллельны; в) совпадают; г) пересекаются, $M\,(-3, 3)$; д) параллельны; е) параллельны; ж) совпадают. **242.** $t_1 = -\frac{2}{3}$, $t_2 = 2$. **243.** Да; $\lambda = -9$, $\mu = 6$. **244.** а) Две прямые параллельны, третья их пересекает; б) прямые попарно пересекаются и не проходят через одну точку; г) прямые проходят через одну точку $(-5, 1)$. **245.** $3\lambda + 7\mu + 3 = 0$. **246.** $x + y - 7 = 0$. Указание. Пусть $y - 6 = k(x - 1)$ — уравнение искомой прямой. Определить координаты точек пересечения M и N этой прямой с данными параллельными прямыми и потребовать, чтобы середина отрезка MN лежала на данной прямой. Из полученного условия определить k. **247.** $2x + y - 4 = 0$. **248.** $x + 11y - 15 = 0$. **249.** $5x - 3y + 6 = 0$. **250.** $x - y = 0$. **251.** $y + 1 = 0$.



Черт. 52

252. $13x - 13y + 4 = 0$. Решение. Уравнение пучка, определяемого заданными прямыми, имеет вид: $3x - y + \lambda(x + 4y - 2) = 0$, или $(3 + \lambda)x + (4\lambda - 1)y - 2\lambda = 0$. Записывая далее условие перпендикулярности прямой пучка и прямой $x + y = 0$, получим: $1 \cdot (3 + \lambda) + 1 \cdot (4\lambda - 1) = 0$. Откуда получаем: $5\lambda + 2 = 0$, или $\lambda = -\frac{2}{5}$. Подставив найденное значение λ в уравнение пучка, получаем искомое уравнение. **253.** а) $4x - 5y + 22 = 0$; $4x + y - 18 = 0$; $2x - y + 1 = 0$; б) $x + 2y - 7 = 0$; $5x + 4y + 7 = 0$; $x - 4y - 13 = 0$. **254.** а) $y - 17 = 0$; б) $2x + 13 = 0$; в) $34x - 13y = 0$. **255.** $3x - y + 2 = 0$; $3x - 6y + 14 = 0$. **256.** $\lambda = -5$; $\mu = -5$; $13x + 39y + 5 = 0$. **257.** $7x - y - 6 = 0$; $x + 8y - 21 = 0$. **258.** а) M_1, M_2, M_3, M_4, M_6; б) M_1, M_3, M_5, M_6; в) M_2, M_3, M_4, M_6; г) M_1, M_3, M_5, M_6; д) M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6; **259.** Пары A_1 и A_2, C_1 и C_2, D_1 и D_2. **260.** а) AC и BC; б) AB и BC; в) AC и AB. **261.** Ось Ox пересекает AC и BC, а ось Oy — AB и AC. **262.** M_1, M_3, M_5, M_6. Указание. Точка M лежит внутри треугольника ABC, если одновременно выполняются следующие три условия: а) M и A лежат по одну и ту же сторону от BC; б) M и B лежат по одну и ту же сторону от AC; в) M и C лежат по одну и ту же сторону от AB. **263.** Указание. Написать уравнения сторон четырехугольника и для каждой стороны показать, что вершины, не лежащие на ней, лежат по одну и ту же сторону от нее. **264.** Указание. Вершины A и D лежат по разные стороны от стороны

BC. **266.** M_1, M_3, M_4. Указание. Точка M лежит внутри угла ACB, если одновременно выполнены следующие два условия: а) M и A лежат по одну и ту же сторону от прямой AC; б) M и B лежат по одну и ту же сторону от прямой AC. **267.** M_1, M_4, M_5. **268.** $x - y + 5 < 0$ и $2x + y - 3 > 0$. Решение. Четыре угла, определяемые данными пересекающимися прямыми, характеризуются следующими неравенствами: а) $x - y + 5 > 0$ и $2x + y - 3 > 0$; б) $x - y + 5 > 0$ и $2x + y - 3 < 0$; в) $x - y + 5 < 0$ и $2x + y - 3 > 0$; г) $x - y + 5 < 0$ и $2x + y - 3 < 0$. Подставив координаты данной точки в эти неравенства, убеждаемся в том, что имеет место случай в). **270.** Решение. Прямые l_1 и l_2, пересекаясь в точке P, образуют четыре угла, внутренние области которых обозначим через Ω_1, Ω_1', Ω_2, Ω_2' (черт. 52, *а*,*б*). Пусть Ω_1 и Ω_1' — внутренние области острых углов, а Ω_2, Ω_2' — внутренние области тупых углов. Приложим векторы $\boldsymbol{n}_1\{A_1, B_1\}$ и $\boldsymbol{n}_2\{A_2, B_2\}$ к точке P. Так как $\boldsymbol{n}_1 \perp l_1$, и $\boldsymbol{n}_2 \perp l_2$, то концы этих векторов будут лежать либо в Ω_2, либо в Ω_2'. Возможны два случая. а) Концы векторов $\boldsymbol{n}_1$ и $\boldsymbol{n}_2$ лежат в одной и той же области, скажем в Ω_2 (черт. 52,*а*). В этом случае угол между $\boldsymbol{n}_1$ и $\boldsymbol{n}_2$ равен острому углу, образованному данными прямыми, поэтому $\boldsymbol{n}_1\boldsymbol{n}_2 = A_1A_2 + B_1B_2 > 0$. С другой стороны, в этом случае область Ω_2 характеризуется неравенствами $A_1x + B_1y + C_1 > 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 > 0$, а область Ω_2' — неравенствами $A_1x + B_1y + C_1 < 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 < 0$. Таким образом, для всех внутренних точек областей Ω_2 и Ω_2' имеем: $(A_1x + B_1y + C_1)(A_2x + B_2y + C_2)(A_1A_2 + B_1B_2) > 0$. Область Ω_1 характеризуется неравенствами: $A_1x + B_1y + C_1 < 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 > 0$, а область Ω_1' — неравенствами: $A_1x + B_1y + C_1 > 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 < 0$. Таким образом, для всех внутренних точек областей Ω_1 и Ω_1' имеем: $(A_1x + B_1y + C_1) \times (A_2x + B_2y + C_2)(A_1A_2 + B_1B_2) < 0$. б) Конец вектора $\boldsymbol{n}_1$ лежит в Ω_2, а конец $\boldsymbol{n}_2$ — в Ω_2' (черт. 52,*б*). В этом случае угол между $\boldsymbol{n}_1$ и $\boldsymbol{n}_2$ равен тупому углу, образованному данными прямыми, поэтому $\boldsymbol{n}_1\boldsymbol{n}_2 = A_1A_2 + B_1B_2 < 0$. Рассуждая аналогично предыдущему, получаем тот же результат. **271.** M_1, M_3, M_4, M_6. Указание. См. предыдущую задачу. **272.** а) $3x + 8y - 9 > 0$; $3x - y - 9 < 0$; $3x - 10y + 45 > 0$; б) (Ω_1) $3x - 10y + 45 < 0$; $3x + 8y - 9 < 0$; (Ω_2) $3x + 8y - 9 < 0$; $3x - y - 9 < 0$; $3x - 10y + 45 > 0$. Указание. Сначала определить координаты вершин треугольника и воспользоваться неравенствами, которые характеризуют полуплоскости, определяемые сторонами треугольника. **273.** Точки M_1, M_3 и M_6 принадлежат Ω_0, M_2 и M_7 — Ω_1, M_4 и M_5 — Ω_2. **274.** Внутренняя область пятиугольника с вершинами $A(-2, 3)$, $B(2, 7)$, $C(7, 8)$, $D(7, 3)$, $E(1, 0)$. **275.** Область, изображенная на чертеже 53. Точки, указанные на этом чертеже, имеют координаты: $A(-3, 5)$, $B(-4, 2)$, $C(-2, -2)$, $D(2, -2)$. Прямая l_1 имеет уравнение $x - y + 8 = 0$, а l_2 — уравнение $x - 4y - 10 = 0$. **276.** Точек, координаты которых удовлетворяли бы данной системе неравенств, не существует. **277.** а) $-\frac{4}{5}x -$



Черт. 53

$-\frac{3}{5}y-\frac{6}{5}=0$; б) $\frac{\sqrt{2}}{2}x-\frac{\sqrt{2}}{2}y-\frac{3\sqrt{2}}{2}=0$; в) $-x-\frac{3}{2}=0$, г) $-y-1=0$; д) уравнение прямой записано в нормальном виде; е) $-\frac{2}{\sqrt{5}}x-\frac{1}{\sqrt{5}}y-2=0$. **278.** а) $\frac{6}{5}$; б) 3; в) $\frac{8}{5}\sqrt{5}$; г) $\frac{11}{2}$. **279.** $\frac{4}{5}$; $\frac{14}{5}$; 4. **280.** $\frac{18\sqrt{5}}{5}$; $\frac{36\sqrt{137}}{137}$; 4. Указание. Определить координаты вершин треугольника и вычислить расстояния от вершин треугольника до противоположных сторон. **281.** $(x-6)^2+(y+3)^2=9$. Указание. Радиус окружности равен расстоянию от точки P до прямой. **282.** 5; $h=\frac{|C_1-C_2|}{\sqrt{A^2+B^2}}$. Указание. На одной из прямых выбрать произвольную точку и найти расстояние до второй прямой. **283.** $5x+12y-43=0$; $y-4=0$. Решение. Уравнение пучка прямых, проходящих через точку $M(-1, 4)$, имеет вид: $y-4=k(x+1)$, или $kx-y+(k+4)=0$. Среди прямых данного пучка необходимо найти такую прямую, которая находится от точки $Q(-2, -1)$ на расстоянии 5. Используя формулу для вычисления расстояния от точки до прямой, получим: $\frac{|k(-2)-(-1)+(k+4)|}{\sqrt{k^2+1}}=5$. Возводя полученное уравнение в квадрат, будем иметь: $12k^2+5k=0$, откуда $k_1=0$, $k_2=-\frac{5}{12}$. Подставляя найденные угловые коэффициенты в уравнение пучка, получим уравнения искомых прямых. **284.** $x-y=0$; $x+y-2=0$. Указание. См. решение предыдущей задачи. **285.** $3x+4y+30=0$; $3x+4y-20=0$. Указание. Для решения задачи полезно сформулировать ее следующим образом: провести прямые, параллельные прямой $3x+4y+1=0$ и

отстоящие от точки $(1, -2)$ на расстоянии 5. **286.** $4x + 3y - 26 = 0$. **287.** $x - 3y + 10 = 0$; $x - 3y - 30 = 0$. **288.** $(x+2)^2+(y-1)^2 = 20$; $\left(x-\frac{6}{5}\right)^2 + \left(y-\frac{37}{5}\right)^2 = 20$. **289.** $4x - 3y - 22 = 0$; $4x - 3y + 8 = 0$. **290.** а) $2x - 5y - 1 = 0$; б) $3x + 5y + 5 = 0$. **291.** $(0, 6)$; $\left(-1, \frac{13}{2}\right)$. Решение. Искомая точка (x', y') лежит на прямой $x + 2y - 12 = 0$, поэтому $x' + 2y' - 12 = 0$ (1). Точка (x', y') находится на одинаковом расстоянии от прямых $x+y-5 = 0$ и $7x - y + 11 = 0$, поэтому $\frac{|x'+y'-5|}{\sqrt{2}} = \frac{|7x'-y'+11|}{5\sqrt{2}}$.
Последнее уравнение равносильно системе двух уравнений:

$$\frac{x'+y'-5}{\sqrt{2}} = \frac{7x'-y'+11}{5\sqrt{2}}, \qquad (2)$$

$$\frac{x'+y'-5}{\sqrt{2}} = -\frac{7x'-y'+11}{5\sqrt{2}}. \qquad (3)$$

Решая системы, состоящие из уравнений (1), (2) и (1), (3), получим две точки: $(0, 6)$ и $\left(-1, \frac{13}{2}\right)$. **292.** Два решения: а) $C\,(13, -9)$; $D\,(8, -4)$; (AB) $x + y + 6 = 0$; (AD) $x - y - 12 = 0$; (DC) $x + y - 4 = 0$; (CB) $x - y - 22 = 0$; б) $C'(3, -19)$; $D'(-2, -14)$; (AB) $x + y + 6 = 0$; (AD') $x - y - 12 = 0$; $(D'C')$ $x + y + 16 = 0$; $(C'B)$ $x - y - 22 = 0$. **293.** а) $2x + 4y - 3 = 0$ и $4x - 2y + 1 = 0$; б) $2x - 6y - 13 = 0$ и $6x + 2y + 7 = 0$; в) $11x + (8 - 5\sqrt{3})y + 30 = 0$ и $x + (8 + 5\sqrt{3})\,y - 90 = 0$. Решение. а) Биссектриса есть г.м.т., равноудаленных от данных прямых. Если (X, Y) — произвольная точка, лежащая на одной из биссектрис, то

$$\frac{|X - 3Y + 2|}{\sqrt{10}} = \frac{|3X + Y - 1|}{\sqrt{10}}.$$

Обратно, если координаты точки (X, Y) удовлетворяют этому уравнению, то она равноудалена от данных прямых и, следовательно, лежит на одной из биссектрис. Таким образом, записанное выше соотношение есть уравнение двух биссектрис углов, образованных данными прямыми. Оно эквивалентно двум уравнениям:

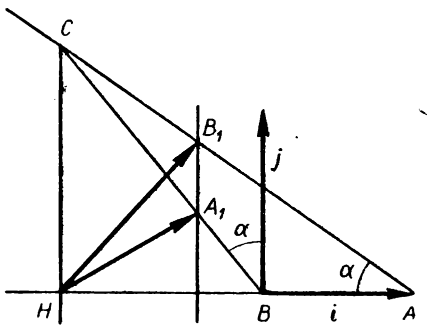
$$\frac{X-3Y+2}{\sqrt{10}} = \frac{3X+Y-1}{\sqrt{10}}, \quad \frac{X-3Y+2}{\sqrt{10}} = -\frac{3X+Y-1}{\sqrt{10}},$$

или $2X + 4Y - 3 = 0$, $4X - 2Y + 1 = 0$. **294.** $6x - 13 = 0$. **295.** $9x - 9y + 13 = 0$. **296.** $64x + 112y - 9 = 0$. **297.** $2x - 2y + 17 = 0$. **298.** Задача имеет четыре решения: 1) $\left(x-\frac{144}{14}\right)^2 + \left(y-\frac{29}{28}\right)^2 = 25$; 2) $\left(x+\frac{3}{7}\right)^2 + \left(y+\frac{24}{7}\right)^2 = 25$; 3) $\left(x+\frac{68}{7}\right)^2 + \left(y-\frac{99}{28}\right)^2 = 25$; 4) $(x-1)^2 + (y-8)^2 = 25$. **299.** $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 5$;

$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(y-1)^2=\frac{5}{4}$. 300. $x^2+(y-4)^2=5$; $\left(x+\frac{16}{5}\right)^2+\left(y-\frac{8}{5}\right)^2=5$. **301.** $(x-3)^2+(y+2)^2=1$ — уравнение вписанной окружности; $(x+1)^2+y^2=9$, $(x-8)^2+(y-3)^2=36$, $(x-4)^2+(y+5)^2=4$ — уравнения вневписанных окружностей. **302.** а) $135°$; б) $30°$; в) $90°$. **303.** $4x-y+9=0$; $x-4y+21=0$. Указание. Записать уравнения искомых прямых с угловыми коэффициентами и воспользоваться формулой: $\operatorname{tg}\varphi=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}$. **304.** $2x+y-7=0$; $x-2y-6=0$. **305.** Уравнения диагоналей: $x-2y+2=0$, $2x+y+4=0$; уравнения сторон: $x+3y+7=0$, $3x-y+11=0$, $3x-y+1=0$, координаты вершин: $(-3, 2)$, $(0, 1)$, $(-1, -2)$, $(-4, -1)$. **306.** $x-2y-5=0$; $2x-y-6=0$. Указание. Для определения угловых коэффициентов искомых прямых воспользоваться формулой: $\operatorname{tg}\varphi=\frac{k_1-k}{1+kk_1}$. При этом следует учесть, что если угол между прямой l и падающим на нее лучом l_1 равен α, то угол между прямой l и отраженным лучом l_2 равен $180°-\alpha$. **307.** $x-7y-5=0$. **308.** а) $x-1=0$; $x-y+2=0$; $3x-y+2=0$; б) $x-1=0$; $x+y-4=0$; $3x+y-8=0$. **309.** $2x+11y+31=0$. **310.** $\operatorname{tg}A=\frac{5}{3}$, $\operatorname{tg}B=-\frac{14}{5}$, $\operatorname{tg}C=\frac{1}{5}$. **311.** $S=\frac{26}{5}$. **312.** $x-y+5=0$; $3x+y-5=0$; $5x+3y-7=0$. **313.** $x-y+7=0$; $5x-y-13=0$. Указание. Воспользоваться уравнением пучка прямых с центром в точке P. **314.** $2x+3y-23=0$; $2x+3y+1=0$. Указание. Записать уравнение пучка прямых, параллельных третьей прямой в виде: $2x+3y+m=0$. **315.** $3x+3y+8=0$; $3x+y+8=0$. Указание. Использовать уравнение пучка, определяемого двумя данными прямыми. **316.** $x+y+3=0$. **317.** Задача имеет два решения: а) $3x+4y-11=0$; б) $9x+10y-27=0$. **318.** $y+5=0$ (BC); $A(-5, 4)$, $B(-3, -5)$, $C(5, -5)$. Указание. Сначала определить координаты вершины A, затем координаты середины стороны BC, используя тот факт, что точка пересечения медиан треугольника делит медиану в отношении $\lambda=2$. **319.** Задача имеет три решения: 1) $(2, 1)$, $(0, 5)$, $(1, 6)$, $x-y+5=0$, $5x+y-11=0$; 2) $(2, 1)$, $(-2, 9)$, $(3, 2)$, $x-y-1=0$, $7x+5y-31=0$; 3) $(0, 5)$, $(4, -3)$, $(-1, 10)$, $5x+y-5=0$, $13x+5y-37=0$. **320.** (AC) $x+y-3=0$; (AB) $x-2y-3=0$; (BC) $5x-y+21=0$. Указание. Сначала определить координаты точки пересечения медиан, затем найти координаты середины стороны BC. Далее см. решение задачи 318. **321.** $x-5y-3=0$; $5x-y-27=0$; $23x+11y-249=0$. Указание. Данные биссектрисы не проходят через A; точки A_1 и A_2, симметричные точке A относительно этих биссектрис, лежат на стороне BC. **322.** Решение. Пусть ABC — данный треугольник. Точку A примем за начало, а вектор $\overline{AB}$ за единичный вектор i прямоугольной декартовой системы координат. В этой системе вершины A, B и C будут иметь следующие координаты: $A(0, 0)$, $B(1, 0)$, $C(\alpha, \beta)$. Запишем уравнения высот треугольника. Высота AH_1 есть прямая, проходящая через точку $A(0, 0)$ и перпендикулярная к вектору $\overline{BC}\{\alpha - 1, \beta\}$, поэтому она определяется уравнением: $(\alpha - 1)x + \beta y = 0$. Высота BH_2 есть прямая, проходящая через точку $B(1, 0)$ и перпендикулярная к вектору $\overline{AC}\{\alpha, \beta\}$, поэтому она определяется уравнением: $\alpha(x - 1) + \beta y = 0$. Высота CH_3 есть прямая, проходящая через точку $C(\alpha, \beta)$ и перпендикулярная к вектору $\overline{AB}\{1, 0\}$, поэтому она определяется уравнением: $x - \alpha = 0$. Эти прямые проходят через одну точку, так как

$$\begin{vmatrix} \alpha-1 & \beta & 0 \\ \alpha & \beta & -\alpha \\ 1 & 0 & -\alpha \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha-1 & \beta & 0 \\ \alpha-1 & \beta & 0 \\ 1 & 0 & -\alpha \end{vmatrix} = 0.$$

323. Указание. Пусть ABC — данный треугольник. Начало прямоугольной декартовой системы координат поместить в середину M стороны AB, а за единичный вектор $\boldsymbol{i}$ принять вектор $\overline{MB}$. **324.** Указание. Пусть ABC — данный треугольник. Точку A принять за начало аффинной системы координат и положить $\overline{AB} = \boldsymbol{e}_1$ и $\overline{AC} = \boldsymbol{e}_2$. **325.** Указание. Систему координат выбрать так, как указано в задаче 322. **326.** Указание. Систему координат выбрать так, как указано в задаче 322. **327.** Указание. Если прямые a и b пересекаются, то за начало аффинной системы координат взять точку их пересечения O и положить $\boldsymbol{e}_1 = \overline{OA}$, $\boldsymbol{e}_2 = \overline{OD}$. Если прямые a и b параллельны, то за начало аффинной системы взять точку A и положить $\boldsymbol{e}_1 = \overline{AB}$, $\boldsymbol{e}_2 = \overline{AD}$. **328.** Указание. За начало аффинной системы координат принять точку A и положить $\overline{AB} = \boldsymbol{e}_1$, $\overline{AC} = \boldsymbol{e}_2$. **329.** Решение. В этой задаче выбор системы координат существен, так как при неудачном ее выборе решение задачи значительно осложняется. Так как $\measuredangle B - \measuredangle A = 90°$, то желательно использовать перпендикуляр к BA, восставленный в точке B (черт. 54). Этот перпендикуляр образует с лучом BC угол $\alpha = \measuredangle A$. Примем точку B за начало прямоугольной декартовой системы координат и векторы $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ возьмем так, как указано на чертеже 54. В этой системе координат точки A и B будут иметь координаты $A(1, 0)$, $B(0, 0)$. Дальнейший план решения задачи таков. 1) Записав уравнения прямых AC и BC, определяем координаты точки C как точки пересечения этих прямых. 2) Определяем координаты точки H. 3) Определяем координаты точек B_1 и A_1 и по этим координатам обнаруживаем, что $AB \perp A_1B_1$. Переходим



Черт. 54

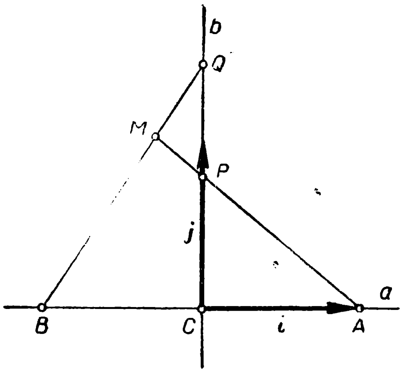
к решению задачи. 1) Пусть $y = kx + b$ и $y = k'x + b'$ — уравнения прямых AC и BC. Так как прямые проходят соответственно через точки $A(1, 0)$ и $B(0, 0)$, то $b = -k$ и $b' = 0$, поэтому предыдущие уравнения имеют вид: $y = kx - k$, $y = k'x$. Из геометрических соображений следует, что $k = \operatorname{tg}(180^\circ - A) = -\operatorname{tg} A$, $k' = \operatorname{tg}(90^\circ + A) = -\operatorname{ctg} A$, отсюда $kk' = 1$. Таким образом, получаем следующие уравнения прямых AC и BC: (AC) $y = kx - k$ (1), (BC) $y = \frac{1}{k}x$ (2). Так как прямые (1) и (2) пересекаются, то их угловые коэффициенты не равны, т. е. $k \neq \frac{1}{k}$, или $k^2 - 1 \neq 0$. Это означает, что $\measuredangle A \neq 45^\circ$. Если $\measuredangle A = 45^\circ$, то $\measuredangle B = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$, поэтому прямые AC и BC параллельны. Решив совместно уравнения (1) и (2), получаем координаты их точки пересечения: $C\left(\frac{k^2}{k^2-1}, \frac{k}{k^2-1}\right)$. 2) Точки C и H лежат на одной прямой, параллельной оси ординат; кроме того, H лежит на оси абсцисс, поэтому $H\left(\frac{k^2}{k^2-1}, 0\right)$. 3) Запишем уравнения прямых HB_1 и HA_1. Если k_1 и k_2 — угловые коэффициенты прямых HA_1 и HB_1, то в силу условий $HA_1 \perp BC$ и $HB_1 \perp BC$ получаем: $k_1 \cdot \frac{1}{k} = -1$ и $k_2 k = -1$. Отсюда $k_1 = -k$, $k_2 = -\frac{1}{k}$. Имея координаты H точки и угловые коэффициенты k_1 и k_2, легко записать уравнения прямых HA_1 и HB_1:

$$(HA_1)\quad y = -k\left(x - \frac{k^2}{k^2-1}\right), \tag{3}$$

$$(HB_1)\quad y = -\frac{1}{k}\left(x - \frac{k^2}{k^2-1}\right). \tag{4}$$

Имея уравнения (1) — (4), можно определить координаты точек $A_1(x_1, y_1)$ и $B_1(x_2, y_2)$. Мы должны доказать, что $A_1B_1 \perp AB$ или $A_1B_1 \parallel$ оси Oy. Для этой цели достаточно показать, что $x_1 = x_2$. Из уравнений (2) и (3) получаем: $x_1 = \frac{k^4}{(k^2-1)(k^2+1)}$. Из уравнений (1) и (4) получаем: $x_2 = \frac{k^4}{(k^2-1)(k^2+1)}$. Задача решена. **330.** Указание. Систему координат выбрать так, как указано в задаче 324. **331.** $d = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Указание. Примем точку пересечения диагоналей ромба за начало координат, а оси направим по диагоналям. В этой системе вершины ромба будут иметь координаты: $A\left(-\frac{a}{2}, 0\right)$, $B\left(0, \frac{b}{2}\right)$, $C\left(0, -\frac{b}{2}\right)$ и $D\left(0, -\frac{b}{2}\right)$. Задача сводится к определению расстояния от точки A до прямой

BC. 332. $d=\frac{14}{\sqrt{29}}$. 333. Прямая, параллельная l. Указание. Аффинную систему координат выбрать так, чтобы ось абсцисс совпала с прямой l. 334. Прямая, параллельная прямой b. Решение. Возьмем точку C за начало прямоугольной декартовой системы координат, а прямые a и b — за координатные оси (черт. 55). Если $\boldsymbol{i}=\overline{CA}$, то точка A будет иметь координаты $(1, 0)$. Пусть B $(\alpha, 0)$. Если λ и λ' — ординаты точек Q и P, то из условий задачи следует, что $\frac{\lambda}{\lambda'}=\frac{1}{k}$, поэтому $\lambda'=k\lambda$. Таким образом, точки P и Q будут иметь координаты: P $(0, k\lambda)$, Q $(0, \lambda)$. При изменении точек P и Q координата λ, очевидно, меняется. Если M (x, y) — произвольная точка искомого геометрического места, то, выразив x и y через координаты точек A, B и переменную величину λ, получим параметрическое задание искомого геометрического места (λ — параметр). Исключив λ, получим уравнение геометрического места в прямоугольных декартовых координатах. Для осуществления этого плана найдем уравнения прямых AP и BQ.



Черт. 55

Имеем: A $(1, 0)$, P $(0, k\lambda)$, B $(\alpha, 0)$, Q $(0, \lambda)$, Уравнения искомых прямых имеют вид:

$$(AP)\ \begin{vmatrix} x-1 & y \\ -1 & k\lambda \end{vmatrix}=0 \text{ или } k\lambda x+y-k\lambda=0;$$

$$(BQ)\ \begin{vmatrix} x-\alpha & y \\ -\alpha & \lambda \end{vmatrix}=0 \text{ или } \lambda x+\alpha y-\alpha\lambda=0.$$

Для определения координат точки пересечения M (x, y) следует совместно решать эту систему: $x=\frac{\alpha(k-1)}{k\alpha-1}$, $y=\frac{k\lambda(\alpha-1)}{k\alpha-1}$.

Так как выражение x не содержит λ, то $x=\frac{\alpha(k-1)}{k\alpha-1}$ есть уравнение искомого геометрического места. Этим уравнением задается прямая, параллельная прямой b. 335. Прямая, проходящая через точку Q. Указание. За ось Ox принять прямую a. 336. Прямая, проходящая через точку O. Указание. Точку O принять за начало аффинной системы координат и положить $e_1=\overline{OA}_0$, $e_2=\overline{OB}_0$, где A_0B_0 одна из прямых пучка $\{m\}$. 337. $9x^2+25y^2-225=0$, или $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$. 338. $MF_2=5$;

$M_1(-2, 2\sqrt{6})$, $M_2(-2, -2\sqrt{6})$, $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{27}=1$. Указание. Воспользоваться формулами для вычисления фокальных радиусов. **339.** а) $\frac{x^2}{10^2}+\frac{y^2}{6^2}=1$; б) $\frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{4^2}=1$; в) $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{20}=1$. **340.** а) $a=3$, $b=2$; $F_1(-\sqrt{5}, 0)$, $F_2(\sqrt{5}, 0)$; б) $a=12$, $b=2$; $F_1(-2\sqrt{35}, 0)$, $F_2(2\sqrt{35}, 0)$; в) $a=3$, $b=1$; $F_1(-2\sqrt{2}, 0)$, $F_2(2\sqrt{2}; 0)$; г) $a=\frac{1}{3}$, $b=\frac{1}{5}$; $F_1\left(-\frac{4}{15}, 0\right)$; $F_2\left(\frac{4}{15}, 0\right)$. **341.** а) $M_1(2, \sqrt{3})$, $M_2(2, -\sqrt{3})$; б) $M_1\left(3, \frac{\sqrt{7}}{2}\right)$, $M_2\left(3, -\frac{\sqrt{7}}{2}\right)$; в) $M_1\left(1, \frac{\sqrt{15}}{2}\right)$, $M_2\left(1, -\frac{\sqrt{15}}{2}\right)$. **343.** $\frac{2b^2}{a}$. **344.** $F_2M_1=$ $=F_2M_2=\frac{a^2+c^2}{a}$. **345.** $\left(\frac{a^2}{2c}, \frac{b}{2c}\sqrt{4c^2-a^2}\right)$, $\left(\frac{a^2}{2c}, -\frac{b}{2c}\sqrt{4c^2-a^2}\right)$. **346.** $(0, b)$, $(0, -b)$. **347.** а) $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{9}=1$; б) $\frac{x^2}{50}+\frac{y^2}{25}=1$; в) $\frac{x^2}{9}+$ $+\frac{y^2}{6}=1$; г) $\frac{x^2}{10}+\frac{y^2}{4}=1$; д) $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{48}=1$. **348.** а) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{1}=1$; б) $\frac{8x^2}{143}+\frac{15y^2}{143}=1$; в) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{7}=1$; г) $\frac{x^2}{15}+\frac{y^2}{11}=1$. **349.** $x-15=$ $=0$; $x+15=0$; $d=30$. **350.** а) $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{8}=1$; б) $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{25}=1$; в) $\frac{x^2}{30}+\frac{y^2}{15}=1$; г) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$, или $\frac{x^2}{\frac{16}{3}}+\frac{y^2}{4}=1$. **352.** а) Эллипсу принадлежат точки: M_3, M_8; б) внутри эллипса лежат точки: M_2, M_4, M_5, M_{10}; в) вне эллипса лежат точки: M_1, M_6, M_7, M_9. **354.** 4. **355.** $F_1M_1=4$; $F_2M_1=8$; $F_1M_2=\frac{22}{3}$; $F_2M_2=\frac{14}{3}$; **356.** $a=\frac{m\varepsilon}{1-\varepsilon^2}$, $b=\frac{m\varepsilon}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}$, $c=\frac{m\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2}$. **357.** Указание. Воспользовавшись предыдущей задачей, найти a и b. **358.** $\frac{5}{4}$, $\frac{45}{4}$.

359. Указание. Центр окружности взять за начало координат, а прямую d — за ось абсцисс. В этой системе сжатие к прямой аналитически задается так: $x'=x$, $y'=ky$. **360.** Решение. Равномерное сжатие в данной системе координат аналитически задается так: $x'=x$, $y'=ky$. Если $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ — данный эллипс, то $\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{k^2b^2}=1$ — его образ. Отсюда $\varepsilon'=\frac{c'}{a'}=$

$= \sqrt{1 - k^2\frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 - k^2 + k^2\varepsilon^2}$; $\varepsilon'^2 - \varepsilon^2 = (1 - k^2)(1 - \varepsilon^2) > 0$; и $\varepsilon' > \varepsilon$. **361.** $\frac{1+\sqrt{7}}{20}x + \frac{\sqrt{7}-1}{16}y = 1$; $\frac{1-\sqrt{7}}{20}x - \frac{1+\sqrt{7}}{16}y = 1$. Решение. Если эллипс дан уравнением $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ и точка $M_0(x_0, y_0)$ лежит на этом эллипсе, то касательная, проходящая через эту точку, задается уравнением: $\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$ (1). Пусть соотношение (1) является уравнением искомой касательной. Так как точка $C(10, -8)$ лежит на этой касательной и $a^2 = 25$, $b^2 = 16$, то $\frac{10x_0}{25} - \frac{8y_0}{16} = 1$ или $\frac{2x_0}{5} - \frac{y_0}{2} = 1$ (2). Так как точка $M_0(x_0, y_0)$ лежит на данном эллипсе, то $\frac{x_0^2}{25} + \frac{y_0^2}{16} = 1$. Решив совместно уравнения (2) и (3), получаем координаты двух точек касания: $M_0\left(\frac{5(1+\sqrt{7})}{4}, -1+\sqrt{7}\right)$, $N_0\left(\frac{5(1-\sqrt{7})}{4}, -1-\sqrt{7}\right)$. Подставив эти значения, а также значения a и b в соотношение (1), получаем уравнения двух касательных: $\frac{1+\sqrt{7}}{20}x + \frac{\sqrt{7}-1}{16}y = 1$; $\frac{1-\sqrt{7}}{20}x - \frac{1+\sqrt{7}}{16}y = 1$. **362.** $\sqrt{5}x + 10y - 25 = 0$. **363.** $x + y - 5 = 0$, $x + y + 5 = 0$. **364.** $4x - 9y - 13 = 0$. **365.** Решение. Пусть эллипс задан уравнением: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Фокусы F_1 и F_2 этого эллипса имеют координаты: $F_1(c, 0)$ и $F_2(-c, 0)$, где $c = \sqrt{a^2 - b^2}$. Возьмем произвольную точку $M_0(x_0, y_0)$ данного эллипса и запишем уравнение касательной в этой точке: $\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$, или $xx_0b^2 + yy_0a^2 - a^2b^2 = 0$. (1) Расстояния этой касательной до фокусов F_1 и F_2 определяются соотношениями: $\rho_1 = \frac{|x_0cb^2 - a^2b^2|}{\sqrt{x_0^2b^4 + y_0^2a^4}}$; $\rho_2 = \frac{|x_0cb^2 + a^2b^2|}{\sqrt{x_0^2b^4 + y_0^2a^4}}$. Отсюда $\rho_1\rho_2 = \frac{|x_0cb^2 - a^2b^2| \cdot |x_0cb^2 + a^2b^2|}{x_0^2b^4 + y_0^2a^4} = \frac{|x_0^2c^2b^4 - a^4b^4|}{x_0^2b^4 + y_0^2a^4}$. Учитывая, что $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$, получаем: $y_0^2a^2 = a^2b^2 - x_0^2b^2$. Подставив это значение в предыдущее соотношение, будем иметь: $\rho_1\rho_2 = \frac{|x_0^2c^2b^4 - a^4b^4|}{|x_0^2b^4 + a^4b^2 - x_0^2b^2a^2|} = \frac{|x_0^2c^2b^4 - a^4b^4|}{|a^4b^2 - x_0^2b^2c^2|} = b^2$. **367.** Решение. Пусть $M_0(x_0, y_0)$ — произвольная точка эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Касательная в точке M_0 имеет уравнение $\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$. Очевидно, вектор $\boldsymbol{n}\left\{\frac{x_0}{a^2},\ \frac{y_0}{b^2}\right\}$ перпендикулярен касательной. Нам необходимо доказать, что вектор $\boldsymbol{n}$ направлен вдоль биссектрисы угла $F_1M_0F_2$. Другими словами, необходимо доказать, что $\boldsymbol{p}\parallel\boldsymbol{n}$, где $\boldsymbol{p}=$ $=\frac{\overline{F_1M_0}}{F_1M_0}+\frac{\overline{F_2M_0}}{F_2M_0}$. Имеем: $\overline{F_1M_0}\{x_0-c,\ y_0\}$, $\overline{F_2M_0}\ \{x_0+c,\ y_0\}$. $\frac{\overline{F_1M_0}}{F_1M_0}\left\{\frac{x_0-c}{a-\varepsilon x_0},\ \frac{y_0}{a-\varepsilon x_0}\right\}$, $\frac{\overline{F_2M_0}}{F_2M_0}\left\{\frac{x_0+c}{a+\varepsilon x_0},\ \frac{y_0}{a+\varepsilon x_0}\right\}$. Отсюда получаем: $\boldsymbol{p}\left\{\frac{2x_0b^2}{a(a^2-\varepsilon^2x_0^2)},\ \frac{2ay_0}{a^2-\varepsilon^2x_0^2}\right\}$. Векторы $\boldsymbol{n}$ и $\boldsymbol{p}$ коллинеарны, так как их координаты пропорциональны. **368.** Окружность: $x^2+y^2=a^2+$ $+b^2$. **369.** $a=2\sqrt{2}$, $b=\sqrt{6}$, $2c=2\sqrt{2}$. **370.** а) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{3}=1$; б) $\frac{x^2}{4}+y^2=1$. **371.** а) $\rho=\frac{2\sqrt{5}}{2-\sqrt{2}\cos\varphi}$; б) $\rho=\frac{9}{5-4\cos\varphi}$.

372. $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{7}=1$. **373.** а) $a=2$, $b=3$; $F_1(\sqrt{13},\ 0)$, $F_2(-\sqrt{13},\ 0)$; б) $a=\frac{1}{5}$, $b=\frac{1}{4}$; $F_1\left(\frac{\sqrt{41}}{20},\ 0\right)$, $F_2\left(-\frac{\sqrt{41}}{20},\ 0\right)$; в) $a=\sqrt{5}$, $b=\sqrt{5}$; $F_1(\sqrt{10},0)$, $F_2(-\sqrt{10},\ 0)$; г) $a=1$; $b=\sqrt{5}$; $F_1\ (\sqrt{6},\ 0)$, $F_2(-\sqrt{6},\ 0)$. **374.** $S=4\varepsilon b^2$; $S=20\sqrt{6}$. **375.** а) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$; б) $\frac{x^2}{9}-$ $-\frac{y^2}{4}=1$; в) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$. **376.** а) $a=3$, $b=2$, $c=\sqrt{13}$; $F_1\ (\sqrt{13},0)$, $F_2(-\sqrt{13},\ 0)$, $\varepsilon=\frac{\sqrt{13}}{3}$; $y=\pm\frac{2}{3}x$, $x=\pm\frac{9\sqrt{13}}{13}$; б) $a=3$, $b=4$; $F_1(+5,\ 0)$, $F_2(-5,\ 0)$, $\varepsilon=\frac{5}{3}$, $y=\pm\frac{4}{3}x$, $x=\pm\frac{9}{5}$. **377.** а) $\frac{x^2}{16}-$ $-y^2=1$; б) $x^2-y^2=16$; в) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$; г) $x^2-y^2=1$. **378.** а) $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{12}=1$; б) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{3}=1$. **379.** $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$. **380.** $\frac{x^2}{12}-$ $-\frac{y^2}{6}=1$. **381.** $-\frac{x^2}{24}+\frac{y^2}{12}=1$. Для гиперболы $\frac{x^2}{24}-\frac{y^2}{12}=1$: $\varepsilon=\frac{\sqrt{6}}{2}$; $x\pm 4=0$ — уравнения директрис; $x\pm\sqrt{2}y=0$ — уравнения асимптот. Для сопряженной гиперболы: $\varepsilon=\sqrt{3}$; $y\pm 2=0$ — уравнения директрис; $x\pm\sqrt{2}y=0$ — уравнения асимптот. **382.** а) $90°$; б) $120°$; в) $60°$. **385.** $x-y-4=0$. **386.** $a^2k^2-b^2-$ $-x_0^2=0$. Решение. Потребуем, чтобы данная прямая пересеклась с гиперболой в двух слившихся точках. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{(kx+x_0)^2}{b^2}=$ $=1$, $b^2x^2-a^2(kx+x_0)^2-a^2b^2=0$, $(b^2-a^2k^2)x^2-2a^2kx_0x-$ $-a^2x_0^2-a^2b^2=0$. Так как данная прямая не параллельна асимптотам гиперболы, то $b^2-a^2k^2\neq 0$. Приравняв дискриминант этого квадратного уравнения к нулю, после элементарных преобразований получаем искомый результат. **387.** $a^2A^2 - b^2B^2 - C^2 = 0$. Указание. Рассмотреть два случая: а) $B \neq 0$. В этом случае уравнение прямой записать в виде $y = kx + x_0$ и воспользоваться результатом предыдущей задачи; б) $B = 0$. В этом случае задача решается по аналогии с предыдущей задачей. **388.** Существуют четыре касательные, удовлетворяющие условиям задачи: а) $x - \sqrt{3}y - 3 = 0$, $\left(4, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$; б) $x - \sqrt{3}y + 3 = 0$, $\left(-4, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$; в) $x + \sqrt{3}y - 3 = 0$, $\left(4, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$; г) $x + \sqrt{3}y + 3 = 0$, $\left(-4, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$. **389.** Указание. Воспользоваться результатом задачи 387. **391.** $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1$. **392.** Окружность $x^2 + y^2 = a^2 - b^2$. **393.** Постоянная равна b^2, см. 365. **395.** $d = b$. **396.** Директриса, соответствующая тому фокусу, из которого проведены перпендикуляры к касательным. **398.** Указание. См. решение задачи 367. **400.** а) $F\left(\frac{3}{2}, 0\right)$, $x + \frac{3}{2} = 0$; б) $F(0, -1)$, $y - 1 = 0$; в) $F\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$, $x - \frac{1}{2} = 0$; г) $F\left(0, \frac{3}{4}\right)$, $y + \frac{3}{4} = 0$; д) $F\left(0, \frac{3}{8}\right)$, $y + \frac{3}{8} = 0$; е) $F\left(-\frac{4}{3}, 0\right)$, $x - \frac{4}{3} = 0$. **401.** а) $y^2 = 16x$; б) $x^2 = 24y$; в) $y^2 = 4x$; г) $x^2 = 25y$. **402.** а) $y^2 = 12x$; б) $x^2 = 20y$; в) $y^2 = 60x$; г) $x^2 = 48y$. **403.** 10. **404.** $M_1(6\sqrt{2}, -6)$; $M_2(-6\sqrt{2}, -6)$. **405.** $p = 12$. **406.** p^2. **407.** $4\sqrt{3}p$. **408.** $2p\sqrt{5}$; $\frac{3}{2}p\sqrt{5}$. $\frac{3}{2}p\sqrt{5}$. **409.** а) $y^2 = 8x$; б) $y^2 = 14x$. **410.** а) $\rho = \frac{1}{1 - \cos\varphi}$; б) $\rho = \frac{5}{1 - \cos\varphi}$. **411.** $2x - y - 5 = 0$. **412.** Прямая, параллельная оси параболы: $ky - p = 0$. **413.** Указание. См. решение задачи 386. **414.** Указание. Воспользоваться результатом предыдущей задачи. **415.** $x + y + 2 = 0$. **416.** $y = kx + \frac{p}{2k}$. Указание. Воспользоваться задачей 413. **417.** а) $x - 2y + 5 = 0$; б) $36x + 12y + 5 = 0$; в) $4x - 4y + 5 = 0$. Указание. Воспользоваться предыдущей задачей. **420.** $2\sqrt{2}$. Указание. Провести касательную к параболе, параллельную данной прямой. **421.** Касательная к параболе в ее вершине. **422.** Директриса параболы. **424.** Указание. См. решение задачи 367. **425.** Решение. Пусть $y^2 = 2px$ — каноническое уравнение данной параболы, а $B_1(x_1, y_1)$, $B_2(x_2, y_2)$ и $B_3(x_3, y_3)$ — точки, в которых соответственно прямые l_1, l_2, l_3 касаются параболы. При этих обозначениях прямые l_1, l_2 и l_3 имеют уравнения:

$$(l_1) \qquad yy_1 = p(x + x_1), \qquad (1)$$
$$(l_2) \qquad yy_2 = p(x + x_2), \qquad (2)$$
$$(l_3) \qquad yy_3 = p(x + x_3). \qquad (3)$$

Определим уравнение высоты h_1, проведенной через точку A_1. Если A_1 есть точка пересечения прямых l_1 и l_2, то высоту h_1 можно определить как прямую пучка, определяемого прямыми l_2 и l_3, перпендикулярную к прямой l_1. Пучок, определяемый прямыми l_2 и l_3, имеет уравнение:

$$\lambda\,[(yy_2 - p\,(x + x_2)] + [yy_3 - p\,(x + x_3)] = 0. \tag{4}$$

Прямые (1) и (4) перпендикулярны тогда и только тогда, когда $y_1\,(\lambda y_2 + y_3) + p\,(\lambda p + p) = 0$. Отсюда получаем: $\lambda = -\dfrac{p^2+y_1y_3}{y_1y_2+p^2}$. Подставив это значение в соотношение (4), получаем уравнение высоты h_1: $-\dfrac{y_1y_3+p^2}{y_1y_2+p^2}\cdot[yy_2 - p\,(x + x_2)] + [yy_3 - p\,(x + x_3)] = 0$, или $(y_1y_3 + p^2)\,[yy_2 - p\,(x + x^2)] - (y_1y_2 + p^2)\,[yy_3 - p\,(x + x_3)] = 0$. Учитывая, что $x_2 = \dfrac{y_2^2}{2p}$ и $x_3 = \dfrac{y_3^2}{2p}$, после элементарных преобразований получим: $pxy_1\,(y_2 - y_3) + yp^2(y_2 - y_3) - \dfrac{y_1y_2y_3}{2p}\,p\,(y_2 - y_3) - \dfrac{p^2}{2}\,(y_2 - y_3)\,(y_2 + y_3) = 0$. Так как для различных точек $(x_2,\ y_2)$ и $(x_3,\ y_3)$ $y_2 \neq y_3$, то после сокращения на $p\,(y_2 - y_3)$ будем иметь: $xy_1 + yp - \dfrac{y_1y_2y_3}{2p} - \dfrac{py_2}{2} - \dfrac{py_3}{2} = 0$. Эта прямая пересекается с директрисой $x = -\dfrac{p}{2}$ в точке $Q\left(-\dfrac{p}{2},\ \dfrac{y_1y_2y_3}{2p^2} + \dfrac{y_1 + y_2 + y_3}{2}\right)$. Координаты точек B_1, B_2 и B_3 входят в полученное выражение симметрично, поэтому для других высот треугольника $A_1A_2A_3$ получим те же значения координат точек пересечений с директрисой. Таким образом, все высоты проходят через одну и ту же точку директрисы. Задача решена. **426.** Р е ш е н и е. Пусть F' другой фокус данного конического сечения. Если за полюс принять фокус F, а за полярную ось — луч FF', то уравнение конического сечения запишется так: $\rho = \dfrac{p}{1 - \varepsilon\cos\varphi}$. Обозначим через $(\rho_1,\ \varphi_1)$ и $(\rho_2,\ \varphi_2)$ полярные координаты точек A и B. Очевидно, $\varphi_2 = \varphi_1 + 180^\circ$, поэтому $\rho_1 = \dfrac{p}{1 - \varepsilon\cos\varphi_1}$, $\rho_2 = \dfrac{p}{1 + \varepsilon\cos\varphi_1}$. Так как $FA = \rho_1$, $FB = \rho_2$ и

$$AB = \rho_1 + \rho_2,\quad \text{то}\ \frac{FA\cdot FB}{AB} = \frac{\rho_1\rho_2}{\rho_1+\rho_2} = \frac{\dfrac{p^2}{1 - \varepsilon^2\cos^2\varphi_1}}{\dfrac{p\,(1 + \varepsilon\cos\varphi_1 + 1 - \varepsilon\cos\varphi_1)}{1 - \varepsilon^2\cos^2\varphi_1}} =$$

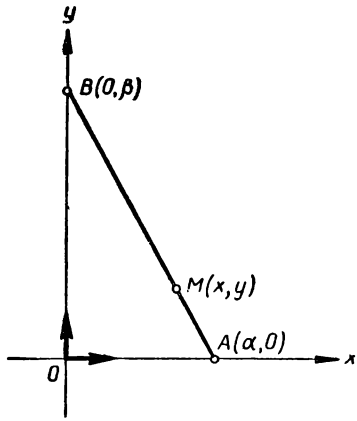
$= \dfrac{p}{2}$. **427.** У к а з а н и е. Задача решается аналогично предыдущей. **428.** Р е ш е н и е. Пусть парабола дана своим каноническим уравнением $y^2 = 2px$. В этом случае, как известно, вершина параболы совпадает с началом координат O. Возьмем две произвольные ортогональные прямые, проходящие через начало координат. Если угловой коэффициент первой прямой обозначить через k, то угловой коэффициент второй прямой равен $-\frac{1}{k}$, поэтому прямые будут иметь уравнения: $y = kx$, $y = -\frac{1}{k}x$. Определим точки пересечения рассматриваемых прямых с данной параболой, решая следующие системы: $\begin{cases} y^2 = 2px, \\ y = kx; \end{cases}$ $\left| \begin{array}{l} y^2 = 2px, \\ y = -\frac{1}{k}x; \end{array}\right.$ $P\left(\frac{2p}{k^2}, \frac{2p}{k}\right)$; $Q(2pk^2, -2pk)$. Напишем уравнение прямой PQ:

$$\begin{vmatrix} x - 2pk^2 & y + 2pk \\ 2p(k^4 - 1) & -2pk(k^2 + 1) \end{vmatrix} = 0.$$

После элементарных преобразований получаем:

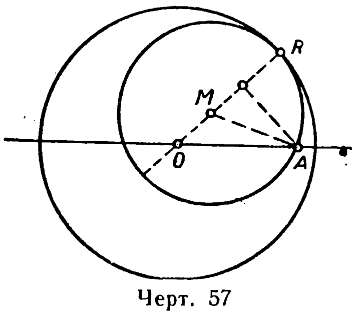
$$xk + y(k^2 - 1) - 2pk = 0. \qquad (1)$$

Положение этой прямой на плоскости зависит от k, т. е. от положения прямого угла POQ. Прямая (1) пересекает ось параболы ($y = 0$) в точке R ($2p$, 0), которая не меняется при изменении k. Таким образом, при вращении угла POQ вокруг точки O прямая (1) вращается вокруг точки R. **429.** Эллипс. Решение. Данные взаимно перпендикулярные прямые примем за координатные оси (черт. 56). Пусть в некоторый произвольный момент времени концы скользящего отрезка AB имеют координаты A (α, 0), B (0, β). Если (x, y) — координаты произвольной точки M геометрического места, l —длина отрезка AB, а λ—отношение, в

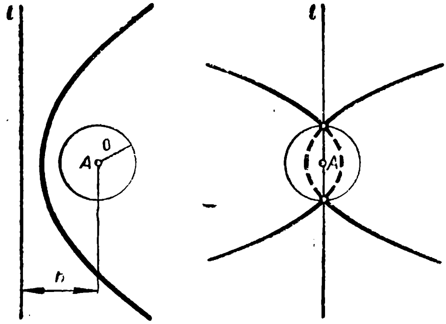


Черт. 56.

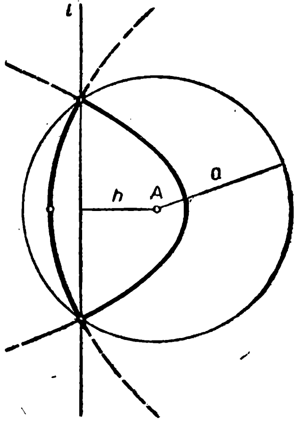
котором точка M делит отрезок AB, то $x = \frac{\alpha}{1+\lambda}$, $y = \frac{\lambda\beta}{1+\lambda}$, $l^2 = \alpha^2 + \beta^2$ (1). Из этих соотношений, исключив α и β, получаем: $l^2 = (1 + \lambda)^2x^2 + \frac{(1+\lambda)^2}{\lambda^2}y^2$, или $\frac{\frac{x^2}{l^2}}{(1+\lambda)^2} + \frac{\frac{y^2}{\lambda^2 l^2}}{(1+\lambda)^2} = 1$ (2). Таким образом, если точка M (x, y) принадлежит геометрическому месту, то ее координаты удовлетворят уравнению (2). Докажем обратное предложение. Пусть M (x, y) — некоторая точка плоскости, координаты которой удовлетворяют уравнению (2). Положим: $\alpha = x(1 + \lambda)$, $\beta = \frac{y(1+\lambda)}{\lambda}$ (3), где λ — данное отношение, в котором точка, описывающая искомую траекторию, делит отрезок AB. Из соотношений (3) следует: $x=\frac{\alpha+\lambda\cdot 0}{1+\lambda}$; $y=\frac{0+\lambda\beta}{1+\lambda}$. Если обозначить через M_1 и M_2 точки с координатами $(\alpha, 0)$ и $(0, \beta)$, то предыдущие соотношения показывают, что M делит отрезок M_1M_2 в отношении λ. Точка M_1 лежит на оси абсцисс, а M_2 — на оси ординат; кроме того, в силу соотношений (3) и (2) имеем: $M_1M_2=\sqrt{x^2(1+\lambda)^2+\frac{y^2(1+\lambda)^2}{\lambda^2}}=\sqrt{l^2}=l$. Отсюда следует, что M принадлежит искомой траектории. Уравнением (2) задается эллипс; в частном случае при $\lambda=1$ — окружность. **430.** Эллипс. Указание. Если прямые l и m принять за оси координат, а радиусы окружностей обозначить через R и r, то уравнение искомого геометрического места точек имеет вид: $\frac{x^2}{R^2}+\frac{y^2}{r^2}=1$. **431.** Эллипс с полуосями $\frac{a}{2}$ и $\frac{b}{2}$ и с центром в середине отрезка OA. Здесь O — центр, A — конец малой оси, а a и b — полуоси данного эллипса. **432.** Гипербола с полуосями $\frac{a}{2}$ и $\frac{b}{2}$ и с центром в середине отрезка OA. Здесь O — центр, A — выбранная вершина, а a и b — полуоси данной гиперболы. **433.** Гипербола. Если прямые l и m принять за оси координат, то уравнение гиперболы имеет вид: $(1+\lambda)^2 xy = 2\lambda\delta$. **434.** Две сопряженные гиперболы, для которых данные прямые служат асимптотами. Указание. Если оси координат направить по биссектрисам углов, образованных данными прямыми, то уравнение искомого геометрического места имеет вид: $\frac{k^2x^2-y^2}{1+k^2}=\pm a$, где k — модуль углового коэффициента данных прямых в выбранной системе координат, а a — постоянное произведение расстояний. **435.** Равносторонняя гипербола. Если оси координат направить по двум данным перпендикулярным прямым, то уравнение гиперболы имеет вид: $x^2-y^2=a^2-b^2$. **436.** Равносторонняя гипербола. Если начало координат поместить в середину отрезка $AB=2a$ и ось Ox направить по прямой AB, то уравнение гиперболы имеет вид: $x^2-y^2=a^2$. **437.** Парабола, для которой точка A является фокусом, а прямая l — директрисой. Указание. Центры рассматриваемых окружностей равноудалены от точки A и прямой l. **438.** Эллипс. Решение. Пусть O — центр данной окружности, а M — произвольная точка геометрического места (черт. 57). Если



Черт. 57



Черт. 58



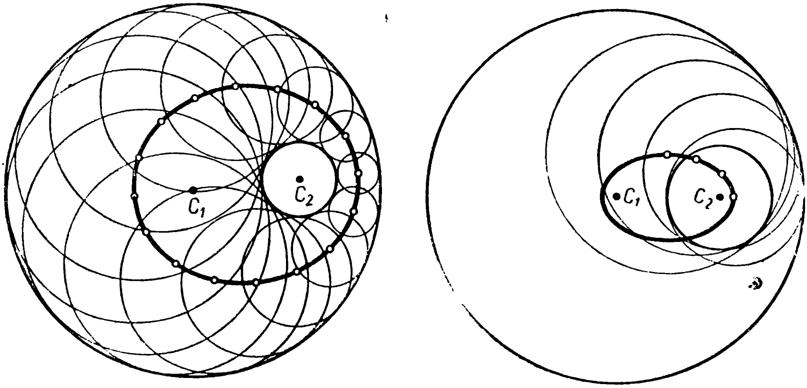
Черт. 59

окружность M (MA)[1] касается данной окружности $O(r)$ в точке R, то, очевидно,

$$r = OR = OM + MR = OM + MA. \qquad (1)$$

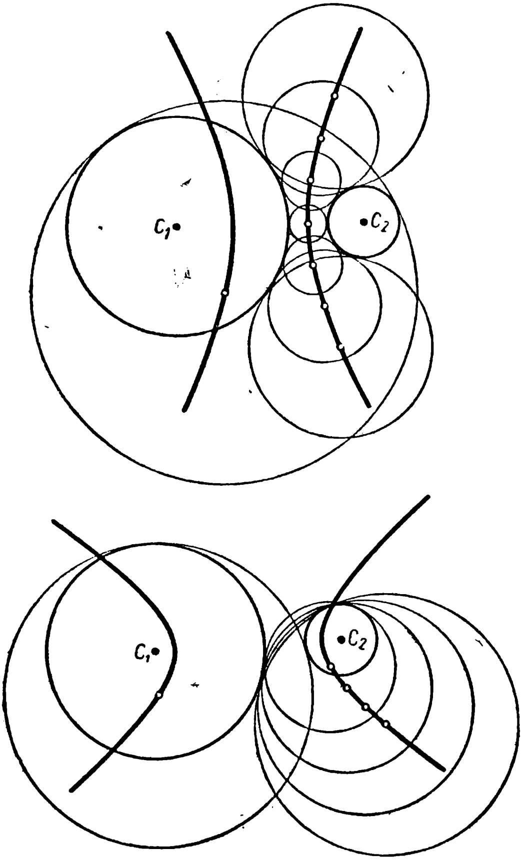
Докажем обратное предложение, т. е. докажем, что если для некоторой точки M плоскости имеет место соотношение (1), то M принадлежит геометрическому месту точек. Так как $OA < r$, то точка M не совпадает с точками O и A. В самом деле, если бы, например, M и O совпали, то из (1) следовало бы, что $r = OO + OA = OA$. Таким образом, $MA > 0$ и $OM < r$, т. е. M является внутренней точкой окружности. Рассмотрим луч OM и обозначим через R точку пересечения этого луча с данной окружностью. Так как $OM + MR = r$ и $OM + MA = r$, то $MA = MR$. Это означает, что окружность M (MR), которая касается окружности O (OR), проходит через точку A. Таким образом, мы доказали, что искомое геометрическое место совпадает с геометрическим местом точек, удовлетворяющих условию (1). Этим условием задается эллипс, фокусами которого являются точки A и O, а большая ось равна r (фокальное свойство эллипса). **439.** Гипербола. **440.** Пусть h — расстояние от точки A до прямой l. Возможны два случая: а) $h \geqslant a$. Парабола, осью которой служит перпендикуляр, опущенный из точки A на прямую l (черт. 58, *а*); б) $h < a$. Части двух парабол, изображенных на чертеже 58, *б* сплошной линией. **441.** Пусть h — расстояние от точки A до прямой l. Возможны три случая: а) $h < a$. Части двух парабол, изображенных на чертеже 59 сплошной линией; б) $h = a$. Точки отрезка HA, где H — основание перпендикуляра, опущенного из точки A на прямую l; в) $h > a$. Геометрическое место пустое. **442.** Парабола с вершиной в точке A и с осью AC,

[1] M (MA) — окружность с центром в точке M и радиусом MA.



Черт. 60

где C — центр окружности Ω. **443.** Пусть перпендикуляр h, опущенный из центра окружности на прямую l, пересекает l в точке H, а Ω — в точках A_1 и A_2. Искомое геометрическое место есть две параболы с общей осью h и с вершинами в серединах отрезков HA_1 и HA_2. **444.** Если $C_1 (r_1)$ — внешняя окружность, а $C_2 (r_2)$ — внутренняя, то искомое геометрическое место точек есть два эллипса с фокусами в точках C_1 и C_2, причем большая ось первого эллипса, равная $r_1 + r_2$, а второго — $r_1 - r_2$ (черт. 60). **445.** Если $C_1 (r_1)$ и $C_2 (r_2)$ — данные окружности, то искомое геометрическое место точек есть две гиперболы с фокусами в точках C_1 и C_2, причем действительная ось первой гиперболы равна $r_1 + r_2$, а второй — $(r_1 - r_2)$ (см. черт. 61). **446.** а) $x = 4x' + 3$; $y = 3x' + 5y' - 1$; б) $x = x' + 2$, $y = y' + 5$; в) $x = 4x' + y'$, $y = -x' + y'$; г) $x = x' + y' + 2$, $y = + 2y'$; д) $x = -x'$, $y = y' - 5$. **447.** а) $x = -x' - y' + 1$, $y = x'$; б) $x = y'$, $y = x'$; в) $x = y'$, $y = -x' - y' + 1$. **448.** $x = \frac{2}{3}x' - \frac{1}{3}y' + \frac{1}{3}$; $y = -\frac{1}{3}x' + \frac{2}{3}y' + \frac{1}{3}$. **449.** Да; $O'(0, 1)$, $e_1' \{2, 0\}$, $e_2' \left\{-\frac{3}{2}, 2\right\}$. **450.** Нет. Р е ш е н и е. Пусть $Oe_1'e_2'$ — искомая система. Если $e_1' \{\alpha_1, \beta_1\}$, $e_2' \{\alpha_2, \beta_2\}$, то формулы преобразования имеют вид: $x_1 = \alpha_1 x' + \alpha_2 y'$, $y' = \beta_1 x' + \beta_2 y'$. Так как точка A в обеих системах имеет координаты $(1, 1)$, то $1 = \alpha_1 + \alpha_2$, $1 = \beta_1 + \beta_2$ (1). С другой стороны, точка B в старой системе имеет координаты $(2, 2)$, а в новой системе координаты $(-1, -2)$, поэтому $2 = -\alpha_1 - 2\alpha_2$, $2 = -\beta_1 - 2\beta_2$ (2). Из первых уравнений (1) и (2) получаем: $\alpha_1 = 4$, $\alpha_2 = -3$. Из вторых уравнений (1) и (2) получаем: $\beta_1 = 4$, $\beta_2 = -3$. Таким образом, векторы e_1' и e_2' имеют координаты: $e_1' \{4, 4\}$, $e_2' \{-3, -3\}$. Отсюда следует, что e_1' и e_2' коллинеарны, что невозможно. **451.** $(1, 1)$. **452.** Р е ш е н и е. Координаты точек,



Черт. 61

имеющих одни и те же координаты в двух системах, при аффинном повороте определяются из условий: $(\alpha_1 - 1)x + \alpha_2 y = 0$, $\beta_1 x + (\beta_2 - 1) y = 0$. Эта система имеет ненулевое решение, тогда и только тогда, когда $(\alpha_1 - 1)(\beta_2 - 1) - \beta_1 \alpha_2 = 0$. **453.** а) $x = x' + 5$, $y = y' + \sqrt{2}$; б) $x = x' - 1$, $y = y'$; в) $x = x' + 1$, $y = y' - 3$; г) $x = x' + 5$, $y = y' + \frac{1}{2}$. **454.** а) $x = 2x' - 2y'$, $y = x' + y'$; б) $x = x' + 2y'$, $y = -\sqrt{2}y'$; в) $x = y'$, $y = x'$; г) $x = y'$, $y = -5x' + y'$. **455.** а) $e_1'\{1, 1\}$, $e_2'\{-3, 1\}$, $O'(0, 1)$;

б) $e_1'\{1, 0\}$, $e_2'\{0, 1\}$, $O'(3, -4)$; в) $e_1'\{1, 0\}$, $e_2'\{-1, 1\}$, $O'(1, 0)$; г) $e_1'\{0, 1\}$, $e_2'\{1, -1\}$, $O'(5, -6)$; д) $e_1'\{1, 0\}$, $e_2'\{0, 1\}$, $O'(0, 1)$; е) $e_1'\left\{0, -\frac{1}{2}\right\}$, $e_2'\left\{1, \frac{1}{2}\right\}$, $O'(0, 0)$. Указание. В примерах б), г) и е) сначала выразить x, y через x', y'. **456.** а) $x = \frac{\sqrt{2}}{10}x' - \frac{7\sqrt{2}}{10}y' - 3$, $y = \frac{7\sqrt{2}}{10}x' + \frac{\sqrt{2}}{10}y' + \sqrt{2}$; б) $x = \frac{\sqrt{3}}{2}x' + \frac{1}{2}y'$, $y = \frac{1}{2}x' - \frac{\sqrt{3}}{2}y' - 2$; в) $x = \frac{\sqrt{2}}{2}x' - \frac{\sqrt{2}}{2}y'$, $y = \frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y'$; г) $x = \frac{1}{\sqrt{5}}x' - \frac{2}{\sqrt{5}}y' + 2$, $y = -\frac{2}{\sqrt{5}}x' - \frac{1}{\sqrt{5}}y' - 12$. **457.** а) $x = \frac{\sqrt{2}}{2}x' - \frac{\sqrt{2}}{2}y' + \frac{a}{2}$, $y = \frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y' + \frac{a}{2}$; б) $x = -x' + a$, $y = -y' + a$; в) $x = x'$, $y = y' + a$. **458.** $d = 6$. **459.** а), в), г). **460.** а) $7x' - 4y' + 2 = 0$; б) $-2x' + 8y' + 1 = 0$; в) $-3x' + 4y' - 3 = 0$. **461.** а) $(Ox')\, y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$, $(Oy')\, y = -\sqrt{3}x$; б) $(Ox)\, y' = -\frac{\sqrt{3}}{3}x'$, $(Oy)\, y' = \sqrt{3}x'$. **462.** $x' + y' + 2 = 0$, $x' - y' - 8 = 0$. **463.** $x'^2 + 9y'^2 - 9 = 0$. **464.** $x'^2 - 2y'^2 - 1 = 0$. **465.** $11x'^2 + 9y'^2 + 14x'y' - 1 = 0$. **467.** Перенести начало координат в точку $\left(-\frac{14}{33}, \frac{31}{33}\right)$. **468.** Если начало координат перенести в точку $(2, -1)$, то уравнение кривой примет вид: $x'^2 + y'^2 = 6$. **469.** Нет. Решение. Рассмотрим параболу $y^2 = 2px$ в канонической системе координат Oij и поставим задачу: найти такую систему координат $O'e_1'e_2'$, в которой уравнение рассматриваемой параболы не содержит членов первой степени. Пусть $O'(x_0, y_0)$, $e_1'\{\alpha_1, \beta_1\}$, $e_2'\{\alpha_2, \beta_2\}$, тогда формулы преобразования имеют вид:

$$x = \alpha_1 x' + \alpha_2 y' + x_0,$$
$$y = \beta_1 x' + \beta_2 y' + y_0.$$

Подставив эти значения в уравнение $y^2 = 2px$, получаем уравнение параболы в новой системе координат: $(\beta_1 x' + \beta_2 y' + y_0)^2 = 2p(\alpha_1 x' + \alpha_2 y' + x_0)$, или $\beta_1^2 x'^2 + \beta_2^2 y'^2 + 2\beta_1\beta_2 x'y' + 2(\beta_1 y_0 - p\alpha_1)x' + 2(\beta_2 y_0 - p\alpha_2)y' + y_0^2 - 2px = 0$. Так как в этом уравнении коэффициенты при x' и y' должны быть равны нулю, то $\beta_1 y_0 - p\alpha_1 = 0$, $\beta_2 y_0 - p\alpha_2 = 0$, откуда $\alpha_1 = \frac{y_0}{p}\cdot\beta_1$, $\alpha_2 = \frac{y_0}{p}\cdot\beta_2$. Но тогда $\begin{vmatrix}\alpha_1 & \beta_1\\ \alpha_2 & \beta_2\end{vmatrix} = 0$, т. е. векторы e_1' и e_2' коллинеарны, что невозможно. 470. Если Oij — исходная каноническая система координат, в которой эллипс имеет уравнение $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, то $O'\equiv O$, $e_1\{a,\ 0\}$, $e_2\{0,\ b\}$. 471. См. задачу 470. 472. $xy=a\neq 0$. Решение. Пусть $O\ e_1\ e_2$ — исходная система координат, а $O'i'j'$ — каноническая система координат гиперболы, имеющей в этой системе уравнение: $\frac{x'^2}{a^2}-\frac{y'^2}{b^2}=1$. Так как O — точка пересечения асимптот, то O' и O совпадают. Векторы e_1 и e_2 параллельны асимптотам, поэтому $e_1=\alpha\ (ai'+bj')$, $e_2=\beta\ (ai'-bj')$. Если $x,\ y$ — координаты точки в исходной системе координат, а $x',\ y'$ — координаты той же точки в канонической, то $x'=\alpha ax+$ $+\beta ay$, $y'=\alpha bx-\beta by$. Подставив эти значения в каноническое уравнение гиперболы, после элементарных преобразований получаем: $xy=\frac{1}{4\alpha\beta}$. 473. Указание. В качестве осей новой прямоугольной декартовой системы взять биссектрисы координатных углов системы Oe_1e_2. 474. Каноническое уравнение: $\frac{4}{9}\ x'^2+$ $+y'^2=1$. Уравнение в исходной системе: $5x^2-4xy+8y^2+10x-$ $-10y+41=0$. Решение. По координатам двух фокусов легко определить фокальное расстояние. $2c=F_1F_2=\sqrt{(1+1)^2+(3-2)^2}=$ $=\sqrt{5}$. С другой стороны, пользуясь фокальным свойством эллипса, получаем: $2a=F_1M+MF_2=\sqrt{4+0}+\sqrt{0+1}=3$. Таким образом, $a=\frac{3}{2}$, $c=\frac{\sqrt{5}}{2}$, поэтому $b=1$. Если $O'i'j'$ — каноническая система координат для данного эллипса, то в этой системе эллипс задается уравнением $\frac{4}{9}x'^2+y'^2=1$. Для канонической системы координат середина O' отрезка F_1F_2 является началом координат, направленная прямая F_2F_1 — осью абсцисс, а прямая, проходящая через O' и перпендикулярная к F_1F_2, — осью ординат. Таким образом, если $O'(x_0,\ y_0)$, то $x_0=\frac{1-1}{2}=0$, $y_0=\frac{3+2}{2}=\frac{5}{2}$;

$i'=\frac{\overline{F_2F_1}}{|F_2F_1|}$, $i'=\left\{\frac{2}{\sqrt{5}},\ \frac{1}{\sqrt{5}}\right\}$, $j=\left\{-\frac{1}{\sqrt{5}},\ \frac{2}{\sqrt{5}}\right\}$. Формулы преобразования имеют вид: $x=\frac{2}{\sqrt{5}}x'-\frac{1}{\sqrt{5}}y'$; $y=\frac{1}{\sqrt{5}}x'+\frac{2}{\sqrt{5}}y'+\frac{5}{2}$.

Отсюда получаем: $x'=\frac{2x+y-\frac{5}{2}}{\sqrt{5}}$, $y'=\frac{-x+2y-5}{\sqrt{5}}$. Подставив эти значения в каноническое уравнение, получаем уравнение эллипса в исходной системе. 475. $a=\frac{1}{2}$, $c=\frac{\sqrt{5}}{2}$; $4x'^2-y'^2=1$. Формулы преобразования: $\sqrt{5}x'=2x+y-\frac{11}{2}$, $\sqrt{5}y'=-x+2y-6$. В исходной системе гипербола имеет уравнение: $3x^2+4xy-20x-4y+16=0$. **476.** Задача имеет два решения: а) $4x^2+4xy+y^2-10y-15=0$, $p=\frac{2}{\sqrt{5}}$ (расстояние от фокуса до директрисы); б) $4x^2+4xy+y^2-20x+30y-15=0$, $p=\frac{8}{\sqrt{5}}$. Указание. Пользуясь координатами точки M, определить расстояние от фокуса до директрисы. Кроме того, учесть, что каноническая ось Ox' проходит через точку F. **477.** а) Гипербола. Указание. Записать данное уравнение в виде: $x(2y-x)=1$ и выбрать новую систему так, чтобы $x'=x$, $y'=2y-x$. Далее воспользоваться задачей 473; б) эллипс. Указание. Записать данное уравнение в виде $5(x^2+2xy+y^2)+(x^2-2xy+y^2)+12=0$ и выбрать новую систему так, чтобы оси были направлены по биссектрисам координатных углов старой системы; в) пара пересекающихся прямых: $x=0$, $1-5y=0$; г) парабола; д) пара параллельных прямых: $x-1=0$, $x+1=0$. **478.** Парабола: $y'^2=x'$, $x=\frac{1}{\sqrt{10}}x'-\frac{3}{\sqrt{10}}y'$, $y=\frac{3}{\sqrt{10}}x'+\frac{1}{\sqrt{10}}y'$. **479.** Гипербола: $x'^2-2y'^2=1$, $x'=\frac{3}{5}x-\frac{4}{5}y$, $y'=\frac{4}{5}x+\frac{3}{5}y$. **480.** Пара параллельных прямых: $y'^2=3$, $x=\frac{x'-2y'}{\sqrt{5}}$, $y=\frac{2x'-y'}{\sqrt{5}}$. **481.** Пара параллельных прямых: $x'^2-1=0$, $10x=\sqrt{2}x'+7\sqrt{2}y'$, $10y=-7\sqrt{2}x'+\sqrt{2}y'$. **482.** Парабола: $y'^2=x'$, $2x'=\sqrt{3}x-y$, $2y'=x+\sqrt{3}y$. **483.** Мнимый эллипс: $\frac{x'^2}{8}+\frac{y'^2}{2}=-1$, $2x=\sqrt{2}x'-\sqrt{2}y'$, $2y=\sqrt{2}x'+\sqrt{2}y'$. **484.** Эллипс: $x'^2+2y'^2=1$, $5x'=4x-3y$, $5y'=3x+4y$. **485.** Парабола: $y'^2=2x'$, $5x'=4x-3y$, $5y'=3x+4y$. **486.** Гипербола: $\frac{x'^2}{2}-\frac{y'^2}{4}=1$, $\sqrt{5}x'=x-2y$, $\sqrt{5}y'=2x+y$. **487.** Пара слившихся прямых: $x'^2=0$, $2x'=\sqrt{2}(x+y)$, $2y'=\sqrt{2}(x-y)$. **488.** Пара пересекающихся прямых: $x'^2-y'^2=0$, $6x'=x+\sqrt{35}y$, $6y'=-\sqrt{35}x+y$. **489.** Парабола: $y'^2=4x'$, $10x'=\sqrt{2}x+7\sqrt{2}y$, $10y'=-7\sqrt{2}x+\sqrt{2}y$. **490.** Пара мнимых параллельных прямых: $x'^2+1=0$, $2x'=\sqrt{3}x-y$, $2y'=x+\sqrt{3}y$. **491.** Эллипс: $x'^2+6y'^2-2=0$, $x=x'+3$, $y=y'-1$. **492.** Пара мнимых пересекающихся прямых: $x'^2+y'^2=0$; $x=x'+1$, $y=y'-2$. **493.** Окружность $x'^2+y'^2=1$, $x=x'+1$, $y=y'-3$. **494.** Гипербола: x'^2-

$-\frac{1}{4}y'^2=-1$, $x=x'+\frac{1}{2}$, $y=y'-3$. **495.** Парабола: $y'^2=2x'$, $x=x'-5$, $y=y'$. **496.** Две пересекающиеся прямые: $\sqrt{3}(x+1)+\sqrt{2}(y-1)=0$, $\sqrt{3}(x+1)-\sqrt{2}(y-1)=0$, $x=x'-1$, $y=y'+1$. **497.** Парабола: $x'^2-4y'=0$, $x=x'+3$, $y=y'-1$. **498.** Мнимый эллипс: $x'^2+2y'^2+1=0$, $x=x'+2$, $y=y'+3$. **499.** Пара мнимых параллельных прямых: $x'^2+1=0$, $x=x'+5$, $y=y'+a$. **500.** Эллипс: $\frac{x'^2}{9}+\frac{y'^2}{4}=1$, $x=x'+1$, $y=y'$. **501.** Гипербола: $\frac{x'^2}{4}-\frac{y'^2}{1}=1$, $x=x'+2$, $y=y'-1$. **502.** Пара пересекающихся прямых: $x'^2-2y'^2=0$; $x=x'-\sqrt{3}$, $y=y'+5$. **503.** Пара мнимых пересекающихся прямых: $2x'^2+y'^2=0$, $x=x'$, $y=y'-2$. **504.** $y'=4x'^2$, $y'=y$, $x'=x-2$. **505.** Равнобочная гипербола: $x'^2-y'^2=5$, $x=x'$, $y=y'-10$. **506.** Гипербола: $5x'^2-y'^2=1$, $5x'=3x+4y$, $5y'=4x-3y+5$. **507.** Эллипс: $52x'^2+13y'^2=1$, $x=\frac{3}{\sqrt{13}}x'-\frac{2}{\sqrt{13}}y'-\frac{1}{26}$, $y=\frac{2}{\sqrt{13}}x'+\frac{3}{\sqrt{13}}y'+\frac{42}{13}$. **508.** Парабола: $y'^2=\frac{6}{\sqrt{5}}x'$, $x=\frac{1}{\sqrt{5}}x'-\frac{2}{\sqrt{5}}y'+\frac{\sqrt{5}}{5}$, $y=\frac{2}{\sqrt{5}}x'+\frac{1}{\sqrt{5}}y'+\frac{1}{\sqrt{5}}$. **509.** Равнобочная гипербола: $x'^2-y'^2=1$, $x=-\frac{\sqrt{2}}{2}x'+\frac{\sqrt{2}}{2}y'-1$; $y=\frac{\sqrt{2}}{2}x'+\frac{\sqrt{2}}{2}y'-2$. **510.** Парабола: $\tilde{y}^2=2\tilde{x}$, $5x=-4\tilde{x}+3\tilde{y}+18$, $5y=-3\tilde{x}+4\tilde{y}+1$. **511.** Пара параллельных прямых: $\tilde{x}^2-2=0$, $5\tilde{x}=3x-4y-5$, $5\tilde{y}=4x+3y$. **512.** Пара пересекающихся прямых: $\tilde{x}\tilde{y}=0$, $2\tilde{x}=\sqrt{3}x-y-2$, $2\tilde{y}=x+\sqrt{3}y$. **513.** Эллипс: $\tilde{x}^2+2\tilde{y}^2=1$, $\sqrt{5}\tilde{x}=x-2y+1$, $\sqrt{5}\tilde{y}=2x+y$. **514.** Парабола: $\tilde{y}^2=3\tilde{x}$, $\sqrt{10}\tilde{x}=x+3y-3\sqrt{10}$, $\sqrt{10}\tilde{y}=-3x+y$. **515.** Пара мнимых пересекающихся прямых $\tilde{x}^2+4\tilde{y}^2=0$, $\sqrt{13}\tilde{x}=3x-2y+5$, $\sqrt{13}\tilde{y}=2x+3y-4$. **516.** Пара слившихся прямых: $\tilde{x}^2=0$; $5\tilde{x}=-4x+3y+11$, $5\tilde{y}=3x-4y+5$. **517.** Пара комплексных параллельных прямых: $x'^2+3=0$, $x'=\frac{3}{\sqrt{13}}x-\frac{2}{\sqrt{13}}y$, $y'=\frac{2}{\sqrt{13}}x+\frac{3}{\sqrt{13}}y+a$. **518.** $I_1=15$, $I_2=50$, $I_3=-50$. Эллипс: $5x'^2+$

$+10y'^2=1$. **519.** $I_2=0$, $I_3\neq 0$; парабола $x'^2+4y'=0$. **520.** $I_1=5$, $I_2=-36$, $I_3=1296$; гипербола: $4x'^2-9y'^2-36=0$. **521.** $I_2=I_3=K=0$; пара слившихся прямых: $x'^2=0$. **522.** $I_1=2$, $I_2=0$, $I_3=-1$; парабола: $x'^2+\frac{1}{\sqrt{2}}y'=0$. **523.** $I_1=10$, $I_2=0$, $I_3=-250$; парабола: $x'^2+y'=0$. **524.** $I_1=10$, $I_2=9$, $I_3=-81$; эллипс: $x'^2+9y'^2-9=0$. **525.** $I_1=5$, $I_2=0$, $I_3=0$, $k=-75$; пара параллельных прямых: $5x'^2-15=0$. **526.** $I_1=3$, $I_2=2$, $I_3=0$; пара комплексных пересекающихся прямых. **527.** $I_1=1$, $I_2=-\frac{9}{4}$, $I_3=0$; пара пересекающихся прямых: $(\sqrt{6}+1)x'^2-(\sqrt{6}-1)y'^2=1$. **528.** Решение. Пусть Oe_1e_2 — исходная система. Возьмем новую прямоугольную декартову систему координат $O'\boldsymbol{i}\boldsymbol{j}$ так, чтобы $O'\equiv 0$, $\boldsymbol{i}=e_1$. Очевидно, $\boldsymbol{i}\{1,0\}$, $\boldsymbol{j}\{\alpha,\beta\}$ и $\beta\neq 0$. Формулы преобразования имеют вид: $x=x'+\alpha y'$, $y=\beta y'$. Кривая в новой системе координат имеет вид: $(x'+\alpha y')^2+(\beta y')^2=1$, или $x'^2+(\alpha^2+\beta^2)y'^2+2\alpha x'y'-1=0$. Выясним тип этой кривой по инвариантам: $I_1=1+\alpha^2+\beta^2>0$, $I_2=\begin{vmatrix}1 & \alpha\\ \alpha & \alpha^2+\beta^2\end{vmatrix}=\beta^2>0$, $I_3=-\beta^2<0$. Итак, кривая является эллипсом. **529.** Указание. Перейти к новой прямоугольной декартовой системе так, как при решении задачи 528. **530.** См. указание к предыдущей задаче. **531.** Решение. Из таблицы, приведенной на странице 93, видим, что кривая, заданная в прямоугольной декартовой системе, распадается на пару прямых тогда и только тогда, когда $I_3=0$. Требуется доказать, что аналогичное предложение имеет место в аффинной системе. Пусть $O\,e_1\,e_2$ — исходная система. Рассмотрим новую прямоугольную декартову систему $O'\,\boldsymbol{i}\,\boldsymbol{j}$ так, чтобы $O'\equiv 0$, $\boldsymbol{i}=e_1$. Тогда $\boldsymbol{i}\{1,0\}$, $\boldsymbol{j}\{\alpha,\beta\}$, $\beta\neq 0$ и формулы преобразования имеют вид: $x=x'+\alpha y'$, $y=\beta y'$. Уравнение кривой в новой прямоугольной декартовой системе $O'\boldsymbol{i}\boldsymbol{j}$ запишется так: $a_{11}x'^2+(\alpha a_{11}+\beta a_{12})x'y'+(a_{11}\alpha^2+a_{22}\beta^2+2a_{12}\alpha\beta)y'^2+2a_{13}x'+2(\alpha a_{13}+\beta a_{23})y'+a_{33}=0$. Отсюда получаем:

$$I_3'=\begin{vmatrix}a_{11} & \alpha a_{11}+\beta a_{12} & a_{13}\\ \alpha a_{11}+\beta a_{12} & \alpha(\alpha a_{11}+\beta a_{12})+\beta(\alpha a_{21}+\beta a_{22}) & \alpha a_{13}+\beta a_{23}\\ a_{13} & \alpha a_{13}+\beta a_{23} & a_{33}\end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix}a_{11} & \alpha a_{11}+\beta a_{12} & a_{13}\\ \beta a_{12} & \beta(\alpha a_{21}+\beta a_{22}) & \beta a_{23}\\ a_{13} & \alpha a_{13}+\beta a_{23} & a_{33}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11} & \beta a_{12} & a_{13}\\ \beta a_{12} & \beta^2 a_{22} & \beta a_{23}\\ a_{13} & \beta a_{23} & a_{33}\end{vmatrix}=\beta^2 I_3.$$

Итак $I_3'=\beta^2 I_3$. Отсюда следует, что если $I_3'=0$, то $I_3=0$, и наоборот. **532.** Указание. Выбрать новую прямоугольную декартову систему координат так, как в предыдущей задаче. Тогда $I_2'=\beta^2 I_2$, $I_3'=\beta^2 I_3$. **533.** См. указание к предыдущей задаче. **534.** а) $M_1(1,0)$, $M_2\left(\frac{1}{2},-\frac{5}{2}\right)$; б) прямая касается кривой в точке

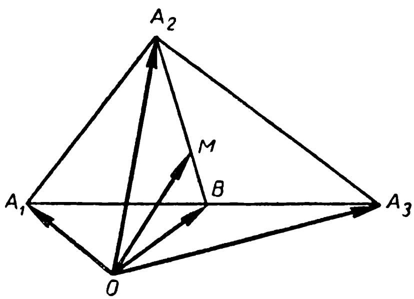
$M\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{6}\right)$. **535.** а) (1, 1), (2, 0); б) ось Ox касается кривой в точке (— 2,0); в) действительных точек пересечений нет. **536.** а) Прямая целиком принадлежит кривой; б) прямая пересекает кривую в одной точке (1, 2). **537.** Существуют две касательные: $2x + 5y - 2 = 0$ и $2x + y - 2 = 0$. **538.** Существуют две касательные: $5x - 11y = 0$, $3x - 5y = 0$. **539.** $2x - 4y + 5 = 0$. **541.** Угловые коэффициенты векторов асимптотического направления имеют следующие значения: а) $k_1 = 4$, $k_2 = 1$; б) $k_1 = k_2 = \frac{1}{3}$; в) нет асимптотических направлений; г) $\alpha_1 = 0$, β_1 — произвольно, $k_2 = \frac{1}{2}$; д) $k_1 = k_2 = 0$; е) $k_1 = -4$, $k_2 = 1$. **542.** а) $2x + y + 4 = 0$ и $x + y - 3 = 0$; б) $2x - 3y + 1 = 0$ и $x - 1 = 0$; в) $6x + 14y + 11 = 0$ и $2x + 2y - 1 = 0$; г) асимптот нет; д) все прямые, параллельные вектору $\{1, -1\}$. **544.** а) Кривая $x^2 - x + y = 0$ имеет только одно асимптотическое направление $\{0, 1\}$, в то время как эллипс не имеет асимптотических направлений, а гипербола имеет два асимптотических направления; б) кривая $xy + x + 1 = 0$ имеет два асимптотических направления, в то время как эллипс не имеет асимптотических направлений, а парабола имеет одно асимптотическое направление. **545.** а) $a_{11} = 0$; б) $a_{11} = a_{13} = 0$; в) $a_{11} = a_{22} = a_{13} = a_{23} = 0$. **546.** $2x^2 - xy - x + y + 5 = 0$. **547.** а) $xy = 0$; б) $xy - 2 = 0$. Указание. Воспользоваться задачей 545 в). **548.** а) $2x - y + 1 = 0$ и $x + y + 2 = 0$; б) $x - 1 = 0$ и $2x + 2y + 5 = 0$; в) $x - 2y + 3 = 0$ и $x - 2y - 1 = 0$; г) $x + 3y = 0$ и $x + 3y - 6 = 0$; д) $2x + 3y + 2 = 0$ и $2x + 3y - 5 = 0$. Указание. Если кривая гиперболического типа распадается на пару прямых, то эти прямые совпадают с асимптотами кривой. Если кривая параболического вида распадается на пару прямых и если $p\{\alpha, \beta\}$ — вектор асимптотического направления этой кривой, то уравнение кривой можно представить в виде: $(\beta x - \alpha y + a)(\beta x - \alpha y + b) = 0$. **549.** а) $4x - 5y + 8 = 0$; б) $7x - 10y - 6 = 0$; в) $13x - 18y - 2 = 0$. **550.** $7x - 4y + 4 = 0$. **551.** а) $x - y - 3 = 0$; б) $x - 4y - 1 = 0$. **553.** а) Парабола; б) пара параллельных или слившихся прямых; в) существует вектор $\{\alpha, \beta\}$ не асимптотического направления, координаты которого удовлетворяют условиям: $\alpha a_{11} + \beta a_{21} = 0$; $\alpha a_{13} + \beta a_{23} = 0$. **554.** а) (3, —2); б) нет центров; в) линия центров: $x - y - 3 = 0$; г) $\left(0, \frac{1}{6}\right)$; д) (—1, — 1); е) линия центров: $x + 2y = 0$. **555.** Указание. Написать уравнения асимптот в общем виде и показать, что их точка пересечения совпадает с центром кривой. **556.** $4x - 7y + 17 = 0$. **557.** $x - y - 1 = 0$. **558.** Для того, чтобы кривая имела линию центров, совпадающую с осью Ox, необходимо и достаточно, чтобы $a_{11} = a_{21} = a_{23} = a_{13} = 0$. **559.** Указание. Воспользоваться предыдущей задачей. **560.** а) $a \neq 9$; б) $a = 9$, $b \neq 9$; в) $a = 9$, $b = 9$. **561.** Нет. **562.** Для того, чтобы кривая имела хотя бы один центр, совпадающий с началом координат, необходимо и достаточно, чтобы $a_{13} = a_{23} = 0$. **563.** а) $4x^2 - 2xy + y^2 - 20 = 0$; б) $3x^2 - 4xy + 2y^2 - 2 = 0$. **564.** $a_1' \{-5, 3\}$, $a_2' \{-2, 1\}$,

$a_3'\{3, 1\}$, $a_4'\{-1, 2\}$. **565.** $k = 0$. **566.** $x - 1 = 0$, $x - 2y + 3 = 0$. **567.** $x - 10y - 12 = 0$, $7x - 28y - 30 = 0$. **568.** $19x - 12y - 5 = 0$, $64x + 48y + 55 = 0$. **569.** а) $kk' = -\frac{b^2}{a^2}$; б) $kk' = \frac{b^2}{a^2}$. **570.** $6x + 5y - 17 = 0$. **571.** $x - 3y = 0$, $4x + 3y = 0$; $4\sqrt{2}$, $2\sqrt{5}$. **572.** Две пары сопряженных диаметров: а) $x + 2y = 0$, $3x + y = 0$; б) $x - 2y = 0$, $3x - y = 0$. **573.** $y + 2 = 0$. **574.** $2y + 3 = 0$. **575.** а) $\{1, -2\}$, $\{2, 1\}$; б) $\{1, 1\}$, $\{-1, 1\}$; в) $\{1, 1\}$, $\{1, -1\}$; г) $\{1, -2\}$, $\{2, 1\}$; д) $\{1, 1 + \sqrt{2}\}$, $\{1, 1 - \sqrt{2}\}$. Решение. Для определения главных направлений воспользуемся формулой (8) на странице 99. Подставляя в нее значения коэффициентов a_{11}, a_{12} и a_{22} для примера а), получим: $(4 - 1)p_1p_2 - 2(p_1^2 - p_2^2) = 0$. Так как $p_1 \neq 0$, то, разделив на p_1^2, получаем: $3\frac{p_2}{p_1} - 2 + 2\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^2 = 0$, или $2k^2 + 3k - 2 = 0$, где $k = \frac{p_2}{p_1}$. Решив квадратное уравнение, получаем $k_1 = -2$, $k_2 = \frac{1}{2}$. Векторы главных направлений имеют координаты: $\{1, -2\}$; $\{2, 1\}$. **576.** а) $2x - 4y - 5 = 0$; б) $x + y - 2 = 0$, $x - y = 0$; в) $x + y - 1 = 0$, $x - y + 3 = 0$; г) $2x - 4y - 1 = 0$; д) $7(1 + \sqrt{2})x - 7y - 18 - 13\sqrt{2} = 0$, $7(1 - \sqrt{2})x - 7y - 18 + 13\sqrt{2} = 0$. Указание. Воспользоваться теоремой о том, что ось есть диаметр, соответствующий хордам главного, но не асимптотического направления. **577.** $a_{11} = a_{22}$, $a_{12} = 0$. Указание: потребовать, чтобы условие (8) (стр. 99) выполнялось для любых значений p_1 и p_2. **578.** а) $a_{12} = 0$, $a_{23} = 0$, $a_{22} \neq 0$; б) диаметр коллинеарен вектору $\{a_{13}, a_{23}\}$. **579.** а) Биссектрисы углов, образованных данными прямыми; б) прямая, проходящая между данными параллельными прямыми, на равном расстоянии от них. **581.** Парабола; пара параллельных действительных прямых, пара параллельных комплексных прямых и пара слившихся прямых. Указание. Воспользоваться результатом предыдущей задачи. **582.** а) $4x + 4y + 3 = 0$; б) $10x - 5y - 2 = 0$; в) $x + y - 2 = 0$; г) $26x - 39y - 11 = 0$. **583.** Пары слившихся или параллельных прямых. **584.** Указание. Воспользоваться задачей 578. **586.** $\overline{AC}\{0, 1, 1\}$, $\overline{AE}\left\{\frac{1}{2}, 0, 0\right\}$, $\overline{EC_1}\left\{\frac{1}{2}, 1, 1\right\}$, $\overline{B_1C_1}\{0, 1, 0\}$, $\overline{FG}\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right\}$, $\overline{GD}\left\{-\frac{1}{2}, 0, -1\right\}$, $\overline{CB_1}\{1, -1, 0\}$, $\overline{A_1G}\left\{-\frac{1}{2}, 1, 1\right\}$. **587.** $\overline{AC}\{1, -2, 1\}$, $\overline{AE}\{0, 1, 0\}$, $\overline{EC_1}\{1, -1, 1\}$, $\overline{B_1C_1}\{1, -2, 0\}$, $\overline{FG}\left\{\frac{1}{2}, 0, 1\right\}$, $\overline{CD}\{0, 0, -1\}$, $\overline{CB_1}\{-1, 4, 0\}$, $\overline{A_1G}\{1, -3, 1\}$. **588.** $\overline{CS}\{-2, 0, 2\}$, $\overline{AC}\{4, 2, 0\}$,

$\overline{CA'}\{-3, -1, 1\}$, $\overline{O'A}\{-2, -2, -1\}$, $\overline{AS}\{2, 2, 2\}$, $\overline{AC'}$ $\{3, 2, 1\}$, $\overline{BE'}$ $\left\{0, -\frac{5}{2}, 1\right\}$, $\overline{AE'}\{2, \frac{3}{2}, 1\}$. **589.** $\overline{CS}\{2, -4, -2\}$, $\overline{AC}\{-4, 4, 0\}$, $\overline{CA'}\{3, -4, -1\}$, $\overline{O'A}\{2, 0, 1\}$, $\overline{AS}\{-2, 0, -2\}$, $\overline{AC'}\{-3, 2, -1\}$, $\overline{BE'}\{0, 5, -1\}$, $\overline{AE'}\{-2, 1, -1\}$. **591.** а) $\boldsymbol{a}_3$; б) $\boldsymbol{a}_4$, $\boldsymbol{a}_{10}$; в) $\boldsymbol{a}_7$, г) $\boldsymbol{a}_3$, $\boldsymbol{a}_4$, $\boldsymbol{a}_8$, $\boldsymbol{a}_{10}$; д) $\boldsymbol{a}_3$, $\boldsymbol{a}_5$, $\boldsymbol{a}_7$, $\boldsymbol{a}_9$; е) $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_4$, $\boldsymbol{a}_7$, $\boldsymbol{a}_{10}$. **592.** $\boldsymbol{p}_1\{2, 5, 0\}$, $\boldsymbol{p}_2\{-1, 2, 4\}$, $\boldsymbol{p}_3\{5, 5, -2\}$, $\boldsymbol{p}_4\{1, 2, -2\}$, $\boldsymbol{p}_5\left\{1, 2, \frac{3}{2}\right\}$, $\boldsymbol{p}_6\left\{1, \frac{1}{3}, -4\right\}$. **593.** а) $2\boldsymbol{a} + 3\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} - 2\boldsymbol{d} = 0$; б) $\boldsymbol{a} - 2\boldsymbol{b} - \boldsymbol{c} + 3\boldsymbol{d} = 0$; в) $3\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} + 2\boldsymbol{c} - 4\boldsymbol{d} = 0$. Решение. а) Четыре вектора $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ и $\boldsymbol{d}$ всегда линейно зависимы, поэтому существуют коэффициенты λ_1, λ_2, λ_3, λ_4, одновременно не равные нулю и удовлетворяющие условию: $\lambda_1\boldsymbol{a} + \lambda_2\boldsymbol{b} + \lambda_3\boldsymbol{c} + \lambda_4\boldsymbol{d} = 0$. Известно, что та же линейная зависимость имеет место для координат этих векторов, поэтому:

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 + 5\lambda_2 + 4\lambda_3 + \frac{21}{2}\lambda_4 &= 0, \\ 3\lambda_1 + 10\lambda_2 - 2\lambda_3 + 17\lambda_4 &= 0, \\ 6\lambda_3 + 3\lambda_4 &= 0. \end{aligned}\right\}$$

Мы получили систему однородных линейных уравнений относительно λ_1, λ_2, λ_3 и λ_4. Очевидно, $\lambda_4 \neq 0$, так как в противном случае, как нетрудно видеть, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Пусть $\lambda_4 = -2$, тогда $\lambda_3 = +1$. Подставив эти значения в первое и второе уравнения, получаем $\lambda_1 = +2$, $\lambda_2 = +3$. **594.** $\overline{AC_1} - \overline{A_1C} - 2\overline{DB_1} + 2\overline{DB} = 0$. **595.** б) b_1 и b_2; в) c_1 и c_2. **596.** а) $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$; с) $\boldsymbol{c}_1$, $\boldsymbol{c}_2$, $\boldsymbol{c}_3$. **597.** Решение. Если B — середина стороны A_1A_3, то $\overline{OM} = \overline{OA_2} + \frac{2}{3}\overline{A_2B}$ (см. черт. 62). Но $\overline{A_2B} = \overline{OB} - \overline{OA_2} =$



Черт. 62

$= \dfrac{\overline{OA_1} + \overline{OA_3}}{2} - \overline{OA_2}$. Таким образом, $\overline{OM} = \overline{OA_2} + \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{\overline{OA_1}+\overline{OA_3}}{2} - \overline{OA_2}\right) = \dfrac{\overline{OA_1} + \overline{OA_2} + \overline{OA_3}}{3}$. **598.** Указание. Воспользоваться предыдущей задачей. **599.** $\overline{AM}\left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1\right\}$. **600.** $\cos(\widehat{ia}) = \frac{5}{6}$; $\cos(\widehat{ja}) = -\frac{\sqrt{2}}{6}$; $\cos(\widehat{ka}) = \frac{1}{2}$. **601.** 60° или 120°. **602.** $\{2, 2\sqrt{2}, 2\}$ или $\{2, 2\sqrt{2}, -2\}$. **603.** 10 *кг*, 10 *кг*, $10\sqrt{2}$ *кг*. **604.** На стержни AO и BO действуют растягивающие силы, равные $5\sqrt{6}$ *кг*, а на стержень CO — сжимающая сила, равная $20\sqrt{3}$ *кг*. **606.** $D(6, 5, 7)$. **607.** $B_1(3, 6, 3)$, $C_1(7, 7, 3)$, $D_1(8, 3, 0)$, $C(5, 4, 4)$. **608.** а) $(-2, 1, -1)$; б) $(2, -1, -1)$, $(2, 1, 1)$, $(-2, -1, 1)$; в) $(2, 1, -1)$, $(-2, -1, -1)$, $(-2, 1, 1)$. **609.** а) $A_1(-2, -3, 1)$, $B_1(-3, 0, 1)$, $C_1(-1, -1, -1)$; б) $A_1(2, 3, 1)$, $B_1(3, 0, 1)$, $C_1(1, 1, -1)$, $A_2(2, -3, -1)$, $B_2(3, 0, -1)$, $C_2(1, -1, 1)$, $A_3(-2, 3, -1)$, $B_3(-3, 0, -1)$, $C_3(-1, 1, 1)$; в) $A_1(2, -3, 1)$, $B_1(3, 0, 1)$, $C_1(1, -1, -1)$, $A_2(-2, 3, 1)$, $B_2(-3, 0, -1)$, $C_2(-1, 1, -1)$, $A_3(-2, -3, -1)$, $B_3(-3, 0, -1)$, $C_3(-1, -1, 1)$. **610.** а) A_1, B_1, C_1; в) A_3, B_3, C_3. **611.** а) A_1, B_1, C_1, D_1; г) A_4, B_4, C_4, D_4. **612.** $(1, 2, 4)$. **613.** $A_1A_2 = 5$, $B_1B_2 = \sqrt{50}$, $C_1G_2 = \sqrt{30}$; $OM = 5$, $ON = \sqrt{13}$, $OP = 5$, $OQ = \sqrt{62}$. **614.** $r = \sqrt{26}$. **615.** 7. **616.** $\left(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{6}\right)$. **617.** $\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}\right)$, $r = \sqrt{\frac{7}{2}}$. **618.** $A_1(0, -3, 8)$; $A_2\left(\frac{1}{2}, -2{,}5\right)$; $A_4\left(\frac{3}{2}, 0, -1\right)$; $A_6\left(\frac{5}{2}, 2, -7\right)$. **619.** $C(7, -3, -2)$. **620.** $\lambda_1 = -\frac{1}{2}$, $\lambda_2 = \frac{1}{5}$, $\lambda_3 = \frac{7}{2}$. **622.** а) $(1, -2, 2)$; б) $\left(4, 1, \frac{7}{3}\right)$. Указание. См. предыдущую задачу. **623.** Сравнить с задачей 110. **624.** $\left(\frac{10}{7}, \frac{1}{7}, 2\right)$. **626.** $\left(\dfrac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4}, \dfrac{y_1 + y_2 + y_3 + y_4}{4}, \dfrac{z_1 + z_2 + z_3 + z_4}{4}\right)$. Указание. Массы, пропорциональные длинам сторон, поместить в серединах сторон тетраэдра. **627.** а) $x' = x - \frac{1}{2}y + 7z$, $y' = \frac{1}{4}y - \frac{1}{2}z$, $z' = 2z$; б) $x' = x + 2y - 5$, $y' = x + y - 5$, $z' = \frac{1}{5}z + \frac{2}{5}$; в) $x' = -x + 1$, $y' = y - 1$, $z' = -z + 2$; г) $x' = x - 2$, $y' = y - 5$, $z' = z + 1$; д) $x' = \frac{5}{8}x + \frac{1}{8}y + \frac{3}{8}z$, $y' = \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}y + \frac{1}{4}z + 1$, $z' = \frac{3}{8}x - \frac{1}{8}y - \frac{3}{8}z$. **628.** $x = -\frac{1}{2}x' +$

$+\frac{1}{2}y'+\frac{1}{2}z'+\frac{1}{2}$, $y=-\frac{1}{2}x'-\frac{1}{2}y'+\frac{1}{2}z'+\frac{1}{2}$ $z=-\frac{1}{2}x'-$ $-\frac{1}{2}y'-\frac{1}{2}z'+\frac{1}{2}$. **629.** $x'=-x-y-z+1$, $y'=y$, $z'=z$. **630.** Да. $O'(0,\ 1,\ 1)$, $e_1'\{2,\ 0,\ -2\}$, $e_2'\{1, 0, -2\}$, $e_3'\{0,\ 1, 0\}$. **631.** а) $e_1'\ \{1,\ 1,\ 1\}$, $e_2'\{-3,\ 1,\ 0\}$, $e_3'\{1,\ 0, 0\}$, $O'(0,\ 0,\ 1)$; б) $e_1'\{1, 0, 0\}$, $e_2'\{0, 1, 0\}$, $e_3'\{0, 0, 1\}$, $O'(-1,\ 3,\ 0)$; в) $e_1'\ \{1,\ -1,\ 0\}$, $e_2'\ \{-1,\ -1,\ 0\}$, $e_3'\{1, 2, 1\}$, $O'(1,\ 2,\ -3)$; г) $e_1'\ \{0,\ 1,\ 1\}$, $e_2'\{1, 0, 1\}$, $e_3'\{0, 0, 1\}$, $O'(0,\ 0, 1)$; д) $e_1'\{-1, 0, 0\}$, $e_2'\{0, -1, 0\}$, $e_3\{0,0,1\}$, $O'(1, 1, 1)$. **632.** Нет, так как определитель системы равен нулю. **633.** $x=-z'+a$, $y=-x'+a$, $z=-y'+a$. Матрица $\left\|\begin{matrix}0 & 0 & -1\\ -1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\end{matrix}\right\|$ ортогональная.

634. а), в), г). **635.** Да. **636.** $x'=\sqrt{2}x$, $y'=\sqrt{2}\ x+\sqrt{2}y$, $z'=-x-y+z$. **637.** Указание. Если r_1, r_2, r_3, r_4 — радиус-векторы вершин тетраэдра, то радиус-вектор точки O равен $\frac{r_1+r_2+r_3+r_4}{4}$. **642.** Указание. Пусть $ABCD$ — данный четырехугольник, а P, Q, R, S — середины сторон AB, BC, CD и DA. Доказать, что $\overline{PQ}=\overline{SR}$. **644.** Решение. Пусть аффинная система координат выбрана так, что A — начало координат, а $\overline{AB}=e_1$, $\overline{AD}=e_2$, $\overline{AA_1}=e_3$. Тогда центр тяжести G_1 треугольника A_1BD имеет координаты $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$, а центр тяжести G_2 треугольника B_1D_1C — координаты $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$. Очевидно, точки $A\ (0,\ 0,\ 0)$, $G_1\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$, $G_2\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ и $G_1(1,\ 1,\ 1)$ лежат на одной прямой. **645.** Указание. См. решение предыдущей задачи. **646.** Указание. Пусть $AB=a$, $AC=b$, $AD=c$. Прямоугольную декартову систему координат выбрать так, чтобы A совпало с началом, а ребра AB, AC и AD — с осями. Показать, что в этой системе центр сферы имеет координаты $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{c}{2}\right)$.

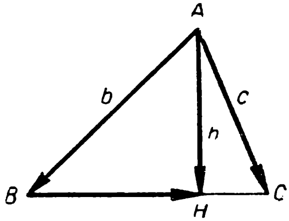
647. Указание. Ввести в рассмотрение радиус-векторы или координаты рассматриваемых точек и, пользуясь ими, доказать, что точка M, делящая отрезок A_1C_1 в отношении μ, совпадает с точкой N, делящей отрезок D_1B_1 в отношении λ. **648.** Указание. Систему координат выбрать так, чтобы начало совпадало с точкой A и $\overline{AB}=e_1$, $\overline{AC}=e_2$, $\overline{AD}=e_3$. Если $(\lambda,\ 0,\ 0)$ координаты точки S в этой системе, то середины отрезков AD, BC, SD и SC будут иметь соответственно координаты $\left(0, 0, \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$, $\left(\frac{\lambda}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{\lambda}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$. Далее показать, что эти точки лежат в одной плоскости. **649.** а) -12; б) 2; в) 6; г) -49; д) 89. **650.** $ab = 2 - \sqrt{2}$, $ac = 0$; $ad = 2$, $bc = -24 + 2\sqrt{2}$, $bd = -9$, $cd = 11$. **651.** $\widehat{ab}$ — тупой, $\widehat{ac}$ — острый, $\widehat{ad}$ — острый, $\widehat{bc}$ — прямой, $\widehat{bd}$ — острый, $\widehat{cd}$ — острый. **653.** а) $\frac{15}{2\sqrt{91}}$; б) $\frac{2}{15}$; в) 0. **654.** 30°, 60°, 90°. **656.** $\varphi_1 = 60°$, $\varphi_2 = 120°$. Решение. Так как пары векторов $a + 3b$, $7a - 5b$ и $a - 4b$, $7a - 2b$ взаимно перпендикулярны, то $(a + 3b)(7a - 5b) = 0$ и $(a - 4b)(7a - 2b) = 0$. Отсюда $7a^2 + 16ab - 15b^2 = 0$, $7a^2 - 30ab + 8b^2 = 0$, или $7a^2 + 16ab \cos\varphi - 15b^2 = 0$, $7a^2 - 30ab\cos\varphi + 8b^2 = 0$, где $a = |a|$, $b = |b|$. Разделив эти соотношения на a^2 и введя обозначение $\lambda = \frac{b}{a}$, получим: $7 + 16\lambda\cos\varphi - 15\lambda^2 = 0$, $7 - 30\lambda\cos\varphi + 8\lambda^2 = 0$. Исключив из этих двух соотношений λ, получим одно уравнение для определения $\cos\varphi$. Вычитая из первого соотношения второе, получим: $46\lambda\cos\varphi - 23\lambda^2 = 0$, или $2\cos\varphi = \lambda$. Подставив это значение в одно из предыдущих уравнений, будем иметь: $7 + 32\cos^2\varphi - 60\cos^2\varphi = 0$, или $\cos^2\varphi = \frac{1}{4}$; $\cos\varphi = \pm\frac{1}{2}$; $\varphi_1 = 60°$; $\varphi_2 = 120°$. **657.** Указание.

$\cos(\widehat{ab'}) = \cos(\widehat{ab} + \widehat{bb'}) = \cos(90° + \widehat{ab}) = -\sin(\widehat{ab})$,
$\cos(\widehat{a'b}) = \cos(\widehat{a'a} + \widehat{ab}) = \cos(-90° + \widehat{ab}) = \sin(\widehat{ab})$.

658. $\cos\varphi = \frac{4}{5}$. **659.** $h = b + \frac{(b-c)b}{(c-b)^2}(c-b)$. Решение. Вектор $\overline{BH}$ коллинеарен с вектором $\overline{BC}$ (черт. 63), поэтому $\overline{BH} = \lambda\overline{BC} = \lambda(c-b)$, $h = \overline{AB} + \overline{BH} = b + \lambda(c-b)$ (1). Так как векторы h и $\overline{BC}$ перпендикулярны, то $h\cdot\overline{BC} = 0$, или $[b + \lambda(c-b)](c-b) = 0$, откуда $\lambda = \frac{(b-c)b}{(c-b)^2}$. Подставляя найденное значение λ в выражение (1), получим: $h = b + \frac{(b-c)b}{(c-b)^2}(c-b)$. **660.** $\overline{BH}\{-3, -3, 1\}$ $\sqrt{19}$. **661.** $\overline{OH}\left\{\frac{1}{3}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}\right\}$. **662.** Если $b = \lambda a$, то $\beta \doteq \lambda\alpha$. **663.** Указание. Взять систему координат, записать данные уравнения в координатах и применить теорему Крамера для решения системы линейных уравнений. **664.** $x\{-4, -6, 4\}$. **665.** Нет. **666.** $x\{1, 2, -2\}$. **667.** Решение. Пусть вектор $p = a + b$ направлен вдоль биссектрисы угла (a, b). Тогда $\measuredangle(a, a+b) = \measuredangle(a+b, b)$, или $\cos[a(a+b)] = \cos[(a+b), b]$, откуда $\frac{a(a+b)}{|a|\,|a+b|} = \frac{(a+b)\cdot b}{|b|\,|a+b|}$;

$|b|\,a(a+b) = |a|\,(a+b)b$, $|b|\,(a^2 + ab) = |a|\,(ab + b^2)$; $|b|\,|a|^2 - |a|\,|b|^2 = ab\,(|a| - |b|)$; $|a|\,|b|\,(|a| - |b|) = (ab)(|a| - |b|)$. Окончательно получаем: $(|a| - |b|)\cdot[(ab) - |a|\,|b|] = 0$. Так как векторы a и b не коллинеарны, то $ab -$

$-|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}| \neq 0$, поэтому из предыдущего соотношения получаем: $|\boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{b}|$. Докажем обратное предложение. Пусть $|\boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{b}| = \alpha$, $\measuredangle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \varphi_1$ и $\measuredangle(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \varphi_2$. Докажем, что $\varphi_1 = \varphi_2$. Пользуясь распределительным свойством скалярного произведения, получаем: $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{ab} = \boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{ab}$ и $\boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{ba} + \boldsymbol{b}^2 = \boldsymbol{ba} + \alpha^2$. Таким образом, $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$, $|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}| \cos\varphi_1 = |\boldsymbol{b}|\,|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}| \cos\varphi_2$, или $\cos\varphi_1 = \cos\varphi_2$. Так как $\varphi_1 < \pi$ и $\varphi_2 < \pi$, то $\varphi_1 = \varphi_2$. **668.** $\left\{\frac{19}{15}, \frac{22}{15}, \frac{1}{3}\right\}$.

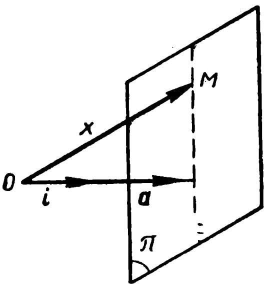


Черт. 63

669. $60°$. **671.** $45°$. **672.** 1. **673.** $\frac{1}{\sqrt{3}}$. **677.** а) $2[\boldsymbol{ab}]$; б) $4[\boldsymbol{ba}] + [\boldsymbol{ac}] + 2[\boldsymbol{cb}]$; в) $[\boldsymbol{ab}] + [\boldsymbol{ac}]$. **678.** а) $\{3, 0, -2\}$, $\sqrt{13}$; б) $\{-2, 0, 0,\}$, 2; в) $\{-3, 9, 5\}$, $\sqrt{115}$; г) $\{3, 0, 1\}$, $\sqrt{10}$; д) $\{-3, 0, -1\}$, $\sqrt{10}$; е) $\{-13, 4, 10\}$, $\sqrt{285}$. **679.** а) $\{-6, 6, -1\}$; б) $\{-1, 5, 2\}$. **680.** а) $\frac{\sqrt{2331}}{2}$; б) $3\sqrt{10}$; в) $\frac{\sqrt{1326}}{2}$. Указание. Площадь S треугольника ABC вычисляется по формуле $S = \frac{|[\overline{AB}, \overline{AC}]|}{2}$. Если $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$, то $S = \frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix} y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_2-z_1 & x_2-x_1 \\ z_3-z_1 & x_3-x_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix}^2}$.
681. $\sin\measuredangle A = \sqrt{\frac{187}{315}}$. **682.** $\frac{\sqrt{104}}{5}$. Указание. Площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$, разделить на длину вектора $\overline{AB}$. **683.** а) $\{15, -3, -14\}$; б) $\{0, 0, 0\}$; в) $\{-3, 11, 9\}$. **685.** а) Левая; б) правая; в) левая; г) левая; д) левая. **686.** Указание. Если $ABCA'B'C'$ — данная призма, то построенные векторы можно выразить при помощи векторного произведения через $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ и $\overline{AA'}$. **687.** См. указание к предыдущей задаче. **688.** $\alpha = 0$, $\beta = -10$, $\gamma = -20$. **689.** а) -29; б) 68; в) 19. **690.** $\boldsymbol{abc} = -29$, $\boldsymbol{b}[\boldsymbol{ac}] = 29$. **694.** а) $v_1 = 0,5$; б) $v_2 = 22,5$. **695.** $AH = 3$. **696.** а) $V = 12$; б) $S_{ABCD} = 2\sqrt{26}$, $S_{ABB'A'} = \sqrt{626}$, $S_{ADD'A'} = \sqrt{338}$; в) $h = \frac{6}{\sqrt{26}}$; г) $\cos\varphi_1 = \frac{4}{5\sqrt{10}}$; д) $\cos\varphi_2 = \frac{46}{13\sqrt{13}}$. **697.** а) $V = \frac{17}{2}$; б) $S_{ABC} = \frac{\sqrt{17}}{2}$, $S_{ABB'A'} = \sqrt{34}$, $S_{ACC'A'} = \sqrt{357}$, $S_{BCC'B'} = \sqrt{561}$; в) $h = \sqrt{17}$; г) $\cos\varphi = 0$.

698. а) $V = \frac{8}{3}$; б) $S_{ABC} = 4$, $S_{ACD} = 5$, $S_{ABD} = 2\sqrt{5}$, $S_{BCD} = \sqrt{33}$; в) $h = 2$; г) $\cos\varphi_1 = \frac{1}{\sqrt{17}}$; д) $\varphi_2 = \frac{\pi}{2}$. **699.** а) $S = \sqrt{51}$; б) $\cos A = \frac{7}{10}$, $\cos B = -\frac{3}{2\sqrt{15}}$, $\cos C = \frac{18}{5\sqrt{15}}$; в) $BH = \frac{\sqrt{102}}{5}$, $\overline{BH}\left\{-\frac{29}{25}, \frac{7}{5}, \frac{22}{25}\right\}$; г) $\boldsymbol{a}\{8, 5, -9\}$; д) $M\left(\frac{2}{3}, \frac{8}{3}, 0\right)$.

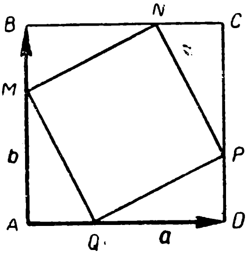
700. а) $S = \frac{75}{2}$; б) $\cos A = 0$, $\cos B = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos C = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos D = 0$; в) $\boldsymbol{a}\{-3, 4, 5\}$; г) $\overline{BH}\left\{6, -\frac{28}{3}, -\frac{10}{3}\right\}$; д) $M\left(-\frac{1}{4}, 0, \frac{7}{2}\right)$. **701.** $S = 2\sqrt{2}$; $h\{t, t,\}\ 0$. **702.** а) Да; б) нет. **703.** Нет. а) Например: $\boldsymbol{a} \neq 0$; $\boldsymbol{b} \neq 0$, $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$; б) например: $\boldsymbol{a} \neq 0$, $\boldsymbol{b} \neq 0$, $\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{b}$. **704.** Нет. Решение. Возьмем в пространстве прямоугольную декартову систему координат $O\boldsymbol{ijk}$ так, чтобы вектор $\boldsymbol{i}$ был сонаправлен с вектором $\boldsymbol{a}$. Приложим искомый вектор $\boldsymbol{x}$ к точке O и обозначим через x, y, z прямоугольные декартовы координаты конца M этого вектора. В этом случае $\boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}|\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{x} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$, поэтому данное уравнение равносильно соотношению $|\boldsymbol{a}|\, x = \alpha$ (1). Уравнение (1) является уравнением геометрического места концов всех решений векторного уравнения $\boldsymbol{ax} = \alpha$, если начала их приложены к точке O. Уравнением (1) задается плоскость π, перпендикулярная к вектору $\boldsymbol{a}$ (черт. 64). При $\alpha = 0$ плоскость π проходит через точку O и, следовательно, уравнению (1) удовлетворяют те и только те векторы, которые перпендикулярны $\boldsymbol{a}$.



Черт. 64

705. Пусть $O\boldsymbol{ijk}$ — некоторая система, в которой вектор $\boldsymbol{a}$ имеет координаты $\{\alpha, \beta, \gamma\}$. а) $|\boldsymbol{a}|^2 - k > 0$. Геометрическое место концов искомых векторов, приложенных к точке O, есть сфера с центром в точке $(-\alpha, -\beta, -\gamma)$ и радиуса $R = \sqrt{|\boldsymbol{a}|^2 - k}$; б) $|\boldsymbol{a}|^2 - k = 0$. Данное уравнение имеет одно решение $\boldsymbol{x} = -\boldsymbol{a}$; в) $|\boldsymbol{a}|^2 - k < 0$. Действительных решений нет. Решение. Пусть $O\boldsymbol{ijk}$ — некоторая система, в которой $\boldsymbol{a}$ имеет координаты $\{\alpha, \beta, \gamma\}$. Обозначим через x, y, z координаты искомого вектора $\boldsymbol{x}$. В этом случае данное уравнение принимает вид: $(x^2 + y^2 + z^2) + 2(\alpha x + \beta y + \gamma z) + k = 0$ или $(x + \alpha)^2 + (y + \beta)^2 + (z + \gamma)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - k = |\boldsymbol{a}|^2 - k$. Отсюда вытекает искомый результат. **706.** а) $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}$; б) геометрическое место концов векторов $\boldsymbol{x}$, приложенных к началу координат, есть сфера с центром в точке $(0, -2, 0)$ и радиуса $R = \sqrt{3}$; в) нет решений. Указание. См. решение предыдущей

задачи. **707.** Если $\boldsymbol{b} \perp \boldsymbol{a}$, то все решения параллельны плоскости, перпендикулярной вектору $\boldsymbol{b}$. Если $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ не перпендикулярны, то данное уравнение не имеет решений. **708.** Решение. а) Второе уравнение разрешимо только в том случае, когда $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{a} \neq 0$ (см. предыдущую задачу). Возьмем вспомогательный единичный вектор $\boldsymbol{c}$, перпендикулярный к плоскости векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ так, чтобы $\boldsymbol{abc} > 0$. Разложим искомый вектор $\boldsymbol{x}$ по реперу: $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$, векторы которого взаимно перпендикулярны: $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{a} + x_2\boldsymbol{b} + x_3\boldsymbol{c}$ (1). Подставив это значение в данные уравнения, получаем: $x_1(\boldsymbol{aa}) = \alpha$; $x_2\ [\boldsymbol{ba}] + x_3\,[\boldsymbol{ca}] = \boldsymbol{b}$ (2). Отсюда получаем: $x_1 = \dfrac{\alpha}{a^2}$. Умножив уравнение (2) скалярно на $\boldsymbol{c}$, получаем: $x_2\,(\boldsymbol{bac}) + x_3\,(\boldsymbol{cac}) = \boldsymbol{bc}$. Отсюда $x_2 = 0$. Для определения x_3 умножим соотношение (2) скалярно на $\boldsymbol{b}$, $x_3\,(\boldsymbol{cab}) = \boldsymbol{b}^2$, так как $(\boldsymbol{abc}) = |\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|$, то $x_3 = \dfrac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}$. Учитывая, что $\boldsymbol{c} = \dfrac{[\boldsymbol{ab}]}{|[\boldsymbol{ab}]|} = \dfrac{[\boldsymbol{ab}]}{|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|}$, из (1) окончательно получаем: $\boldsymbol{x} = \dfrac{\alpha}{\boldsymbol{a}^2}\boldsymbol{a} + \dfrac{[\boldsymbol{ab}]}{|\boldsymbol{a}|^2} = \dfrac{\alpha\boldsymbol{a} + [\boldsymbol{ab}]}{\boldsymbol{a}^2}$ (3).
Непосредственной подстановкой убеждаемся в том, что вектор $\boldsymbol{x}$, определяемый соотношением (3), является решением исходной системы. Таким образом, при $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{a} \neq 0$ система имеет единственное решение (3). Если хотя бы одно из условий $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$ или $\boldsymbol{a} \neq 0$ не выполняется, то система не имеет решений; б) если векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ не коллинеарны, то $x = \alpha\,[ab]$, где α — произвольный числовой множитель. Если $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ коллинеарны, то одно из уравнений есть следствие второго. В этом случае задача сводится к задаче 704. Если в пространстве выбрана прямоугольная декартова система координат и если $\boldsymbol{a}\{a_1, a_2, a_3\}$, $\boldsymbol{b}\{b_1, b_2, b_3\}$, $\boldsymbol{x}\{x_1, x_2, x_3\}$, то данные уравнения в координатах запишутся так: $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$, $b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 = 0$. Предыдущее исследование показывает, что если векторы $a\,\{a_1, a_2, a_3\}$ и $b\{b_1, b_2, b_3\}$ не коллинеарны, то $x_1 : x_2 : x_3 = \begin{vmatrix} a_2 a_3 \\ b_2 b_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_3 a_1 \\ b_3 b_1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_1 a_2 \\ b_1 b_2 \end{vmatrix}$. **709.** Если положить $\boldsymbol{p} = [\boldsymbol{ab}]$, то данное уравнение сводится к следующему: $\boldsymbol{px} = \alpha$; см. задачу 704. **710.** Нет. **711.** Да. **712.** Нет. **713.** Нет. **715.** а) $\boldsymbol{x} = |\boldsymbol{a}|^{-\frac{2}{3}}\boldsymbol{a}$; б) если $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ не коллинеарны, то задача не имеет решений. При $\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{b}$ задача сводится к 705. Решение. а) Если $\boldsymbol{a}_0$ — единичный вектор направления $\boldsymbol{a}$, а $\boldsymbol{x}_0$ — единичный вектор искомого вектора, то данное уравнение сводится к следующему: $\boldsymbol{x}_0|\boldsymbol{x}|^3 = \boldsymbol{a}_0|\boldsymbol{a}|$. Отсюда $\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{a}_0$, $|\boldsymbol{x}|^3 = |\boldsymbol{a}|$, $|\boldsymbol{x}| = \sqrt[3]{|\boldsymbol{a}|}$, $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0|\boldsymbol{x}| = \boldsymbol{a}_0\sqrt[3]{|\boldsymbol{a}|} = \boldsymbol{a}\cdot|\boldsymbol{a}|^{-\frac{2}{3}}$. **716.** Решение. Пусть $ABCD$ — данный ромб. Если ввести обозначения $\overline{AB} = \boldsymbol{a}$, $\overline{AD} = \boldsymbol{b}$, то $\overline{AC} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$, $\overline{DB} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$. $\overline{AC}\cdot\overline{DB} = (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})\,(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a}^2 - \boldsymbol{b}^2 = 0$, так как $|a| = |b|$. Отсюда вытекает, что $\overline{AC} \perp \overline{DB}$. **717.** Указание. а) Полагая $\overline{CA} = \boldsymbol{a}$, $\overline{CB} = \boldsymbol{b}$, определить $c^2 = \overline{AB}^2$; б) $\operatorname{ctg} C = \dfrac{\cos C}{\sin C} = \dfrac{\boldsymbol{ab}}{|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\sin C} =$



Черт. 65

$= \frac{ab}{2S}$. Аналогично определить $\operatorname{ctg} B$ и $\operatorname{ctg} A$. 720. Указание. Положить $\overline{AM} = \frac{\overline{AB} + \lambda \overline{AC}}{1+\lambda}$ и использовать результат задачи 667. 722. Указание. В данном четырехугольнике $ABCD$, полагая $\overline{AC} = \boldsymbol{a}$, $\overline{AB} = \boldsymbol{b}$, $\overline{AD} = \boldsymbol{c}$, воспользоваться векторным тождеством: $2\boldsymbol{a}(\boldsymbol{c} - \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{c}^2 - \boldsymbol{b}^2 + (\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a})^2 - (\boldsymbol{c} - \boldsymbol{a})^2$. 723. Решение. Пусть $\overline{AD} = \boldsymbol{a}$, $\overline{AB} = \boldsymbol{b}$. Так как векторы $\overline{AQ}$ и $\overline{NC}$ коллинеарны $\boldsymbol{a}$, то $\overline{AQ} = \alpha\boldsymbol{a}$ и $\overline{CN} = \lambda\boldsymbol{a}$ (черт. 65). Точно так же в силу коллинеарности векторов $\overline{AB}$ и $\overline{AM}$, $\overline{AB}$ и $\overline{CP}$ получаем: $\overline{AM} = \beta\boldsymbol{b}$, $\overline{CP} = \mu\boldsymbol{b}$. Воспользуемся далее тем, что $MNPQ$— прямоугольник. Это означает, что выполнены следующие условия:

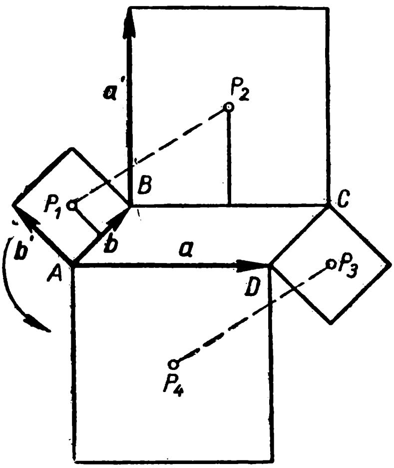
$$\overline{MQ} = \overline{NP} \text{ и } \overline{MQ} \cdot \overline{MN} = 0; \tag{1}$$

$$\left.\begin{aligned} \overline{MQ} &= \overline{AQ} - \overline{AM} = \alpha\boldsymbol{a} - \beta\boldsymbol{b}, \\ \overline{NP} &= \overline{CP} - \overline{CN} = \mu\boldsymbol{b} - \lambda\boldsymbol{a}. \\ \overline{MN} &= \overline{BN} - \overline{BM} = (\overline{BC} + \overline{CN}) - (\overline{BA} + \overline{AM}) = (1+\lambda)\boldsymbol{a} + (1-\beta)\boldsymbol{b}. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Подставив эти значения в соотношения (1), получаем: $\alpha\boldsymbol{a} - \beta\boldsymbol{b} = \mu\boldsymbol{b} - \lambda\boldsymbol{a}$; $(\alpha\boldsymbol{a} - \beta\boldsymbol{b})[(1+\lambda)\boldsymbol{a} + (1-\beta)\boldsymbol{b}] = 0$. Из первого соотношения в силу неколлинеарности $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ получаем: $\alpha = -\lambda$, $\beta = -\mu$. Из второго соотношения имеем: $\alpha(1+\lambda)\boldsymbol{a}^2 - \beta(1-\beta)\boldsymbol{b}^2 = 0$. Отсюда в силу равенства $\boldsymbol{a}^2 = \boldsymbol{b}^2$ получаем: $\alpha(1+\lambda) - \beta(1-\beta) = 0$, или $\alpha(1-\alpha) - \beta(1-\beta) = 0$, $(\alpha - \beta)(1 - \alpha - \beta) = 0$. Возможны два случая: а) $\alpha - \beta = 0$, $\alpha = \beta$. Тогда из соотношений (2) имеем: $\overline{MQ} = \alpha(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b})$, $\overline{MN} = (1-\alpha)(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})$. Эти соотношения показывают, что $\overline{MQ} \parallel (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b})$ и $\overline{MN} \parallel (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})$, т. е. стороны прямоугольника $MNPQ$ параллельны диагоналям квадрата; б) $1 - \alpha - \beta = 0$, $\overline{MQ}^2 = \alpha^2\boldsymbol{a}^2 + \beta^2\boldsymbol{b}^2 = (\alpha^2 + \beta^2)\boldsymbol{a}^2$; $\overline{MN}^2 = (1-\alpha)^2\boldsymbol{a}^2 + (1-\beta)^2\boldsymbol{b}^2 = [(1-\alpha)^2 + (1-\beta^2)]\boldsymbol{a}^2 = [2(1-\alpha-\beta) + \alpha^2 + \beta^2]\boldsymbol{a}^2 = (\alpha^2 + \beta^2)\boldsymbol{a}^2$. Таким образом, $\overline{MQ}^2 = \overline{MN}^2$, или $MQ = MN$; в этом случае прямоугольник $MNPQ$ является квадратом. 724. Решение. Пусть $\overline{AD} = \boldsymbol{a}$, $\overline{AB} = \boldsymbol{b}$, а $\boldsymbol{a}'$ и $\boldsymbol{b}'$ — векторы, полученные из $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ поворотом на 90° против часовой стрелки (черт. 66). Легко видеть, что $\overline{P_1P_2} = \frac{1}{2}(-\boldsymbol{b}' + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} + \boldsymbol{a}')$, $\overline{P_1P_4} = \frac{1}{2}(-\boldsymbol{b}' - \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} - \boldsymbol{a}')$, $\overline{P_4P_3} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{a}' + \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} - \boldsymbol{b}')$. Отсюда непосредственно следует, что

$\overline{P_1P_2} = \overline{P_4P_3}$. Используя результат задачи 657, легко показать, что $\overline{P_1P_2} \cdot \overline{P_1P_4} = 0$. Таким образом, $P_1P_2P_3P_4$ — квадрат. **725.** Указание. Положить $\overline{OA} = \boldsymbol{a}$, $\overline{OB} = \boldsymbol{b}$ и $\overline{OC} = \boldsymbol{c}$. **726.** Решение. Пусть $OABC$ —данный тетраэдр, а OA и BC— рассматриваемые ребра. Введем обозначения: $\overline{OA} = \boldsymbol{a}$, $\overline{OB} = \boldsymbol{b}$, $\overline{OC} = \boldsymbol{c}$; $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$, $BC = a'$, $AC = b'$, $AB = c'$. Искомое соотношение может быть записано следующим образом: $2aa' \cos\theta = c^2 + c'^2 - b'^2 - b'^2$, или $2\boldsymbol{a} \cdot \overline{BC} = c^2 - b^2 + \overline{AB}^2 - \overline{AC}^2$, $2\boldsymbol{a}(\boldsymbol{c} - \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{c}^2 - \boldsymbol{b}^2 + (\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a})^2 - (\boldsymbol{c} - \boldsymbol{a})^2$. Пользуясь распределительным свойством скалярного произведения, непосредственно убеждаемся в справедливости этого соотношения. **727.** Указание. Использовать результат предыдущей задачи. **728.** Указание. Воспользоваться задачей 726. **729.** Если M и M' — середины двух противоположных ребер, длины которых равны a и a', а b, c, b', c' — длины остальных четырех ребер, то $MM'^2 = \frac{1}{4}(b^2 + c^2 + b'^2 + c'^2 - a^2 - a'^2)$. **730.** $\frac{1}{12}$. **731.** $\frac{1}{3}$.

733. (1, 0, 4). **734.** а) $x + y - z + 1 = 0$; б) $x + 3y - z + 1 = 0$. **735.** а) $6x + 2y - 5z + 5 = 0$; б) $x - z + 1 = 0$; в) $y - z = 0$. **736.** а) $x + y - 4z + 9 = 0$; б) $x - 2y + z = 0$. **737.** $ABC : z = 0$; $ABD : y = 0$; $ACD : x = 0$; $BCD : x + y + z = 1$; $CDE : 2x + y + z = 1$. **738.** а) Нет; б) да: $x + y + z - 2 = 0$; в) нет; г) нет. **739.** а) $10x + 9y + 5z - 50 = 0$; б) $6x + 5y + 3z - 30 = 0$. **741.** а) Параллельна оси Oy; б) проходит через начало координат; в) параллельна оси Oz; г) содержит ось Oy; д) параллельна плоскости Oyz; е) параллельна оси Ox; ж) параллельна плоскости xOz; з) содержит ось Ox; и) совпадает с плоскостью xOy.

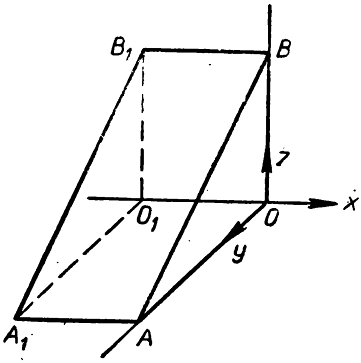


Черт. 66

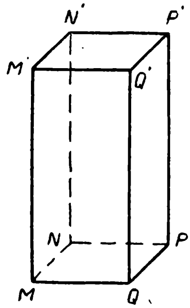
742. а) $x = 1$, $y = 2$, $z = -1$; б) $y + 2z + 6 = 0$, $x - z - 5 = 0$, $2x + y - 4 = 0$; в) $5y + z = 0$, $5x + 2z = 0$, $x - 2y = 0$. **743.** $3y + 2z = 0$, $3x - z = 0$, $2x + y = 0$. **744.** а) $\frac{x}{-1} + \frac{y}{2} + \frac{z}{-\frac{2}{3}} = 1$; б) $\frac{x}{-2} + \frac{y}{\frac{1}{3}} + \frac{z}{-1} = 1$; в) $\frac{x}{\frac{3}{2}} + \frac{y}{\frac{3}{2}} + \frac{z}{-3} = 1$. **745.** $\frac{x}{-3} + \frac{y}{\frac{6}{11}} +$

$+\frac{z}{1}=1$. **746.** а) $\frac{x}{3}-\frac{y}{4}=1$; б) $\frac{y}{4}+\frac{z}{4}=1$. **747.** $x+y+z=9$; $-x+y+z=3$; $x-y+z=5$; $x+y-z=1$. **749.** Векторы $\boldsymbol{p}_2$ и $\boldsymbol{p}_4$ параллельны, а $\boldsymbol{p}_1$ и $\boldsymbol{p}_3$ не параллельны данной плоскости. **751.** а) $x+2y-4z-12=0$; б) $3y-4z=0$. **752.** $x-6y+11=0$; $3x-6y+4z-7=0$; $x+2z-9=0$. **753.** $x+3y-3z-9=0$. **754.** а) $\{1, 2, -1\}$; б) $\{1, 0, -3\}$; в) $\{0, 1, 0\}$; г) $\{1, -3, 1\}$. **755.** $3x+y-3z+7=0$. **756.** а) $-7x+y+5z=0$; б) $3x+y-2z-8=0$. **757.** $2x-3y+6z-49=0$. Указание. Через точку M_0 провести плоскость, перпендикулярную к вектору $\overline{OM_0}\,\{2, -3, 6\}$, где O — центр сферы, совпадающий с началом координат. **758.** $x+y-2z+5=0$. **760.** а) $2x-4y+5z=0$; б) $2y-7z=0$; в) $x=0$. **761.** а) $3x-y+z-11=0$; б) $x-3y-10=0$; в) $z-5=0$. **762.** Указание. Воспользоваться задачей 748. **763.** а) На линии пересечения лежит, например, точка $(1, -2, -4)$; б) $p\{-1, 3, 5\}$. Указание. Воспользоваться результатом предыдущей задачи. **764.** $(2, 1, 1)$. **768.** $\left(-\frac{4}{11}, -\frac{5}{11}, \frac{13}{11}\right)$.

769. $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} \neq 0$ и $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & D_3 \end{vmatrix}=0$. Указание. Написать условие, при котором система уравнений имеет единственное решение, и если x_0, y_0, z_0 — решение, то потребовать, чтобы $z_0=0$. **770.** Выполняется одно из условий: 1) $C_1=C_2=D_1=D_2=0$; 2) хотя бы один из коэффициентов C_1 и C_2 отличен от нуля и $\begin{vmatrix} C_1 & D_1 \\ C_2 & D_2 \end{vmatrix}=0$. **771.** $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}=0$; $\begin{vmatrix} B_1 & D_1 \\ B_2 & D_2 \end{vmatrix}=0$. **772.** $x-z+1=0$. Решение. Напишем уравнение пучка, определяемого плоскостями π и Oxz: $(x+y-z+1)+\lambda y=0$ (1), и подберем λ так, чтобы эта плоскость была перпендикулярна к плоскости $x-3y+z=0$. Условие перпендикулярности плоскостей $x+(1+\lambda)y-z+1=0$, $x-3y+z=0$ запишется так: $1\cdot 1-3(1+\lambda)-1\cdot 1=0$. Отсюда получаем: $\lambda=-1$. Подставляя найденное значение λ в уравнение (1), получаем уравнение искомой плоскости. **773.** $-66x+61y+89z-134=0$, $x-3y-z+1=0$, $14x+95y-37z-82=0$. **774.** а) $9x+3y+5z=0$; б) $23x-32y+26z-17=0$; в) $21x+14z-3=0$. **775.** $5x+3y-z+4=0$. **776.** $x-11y+25z-5=0$. **777.** $x-2y+3z-4=0$, $9x+24y+13z+34=0$. **778.** а) M_1, M_2, M_3, M_5, M_6; б) M_2, M_3, M_6; в) M_2; г) нет точек; д) M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6. **779.** Пары O и A, B_1 и B_2. **780.** Плоскость xOy пересекает AC и BC; плоскость yOz пересекает AC и BC; плоскость xOz пересекает AB и BC. **781.** Грани имеют уравнения: $(ABC): z=0$, (ABD) $7x+7y-4z-14=0$, (BCD) $7x-z=0$, (ACD) $7x-7y+4z=0$. Поэтому, для того чтобы точка принадлежала внутренней области, необходимо и достаточно, чтобы ее координаты одновременно удовлетворяли следующим неравенствам: $z>0$, $7x+7y-4z-14<0$, $7x-z>0$, $7x-7y+4z<0$. **782.** M_2 и M_4. **783.** $5x-y+z+1>0$ и $x+y-5z+1<0$. Указание. Задача решается аналогично задаче 268. **784.** Указание. Воспользоваться условием параллельности вектора и плоскости (см. задачу 748). **785.** Область Ω: $(Ax + By + Cz + D_1)(Ax + By + Cz + D_2) < 0$. Область Ω_1: $Ax + By + Cz + D_1 > 0$ и $Ax + By + Cz + D_2 > 0$. Область Ω_2: $Ax + By + Cz + D_1 < 0$ и $Ax + By + Cz + D_2 < 0$. Указание. Воспользоваться результатом предыдущей задачи. **786.** Указание. Задача решается аналогично задаче 270. **787.** A, B и E. **788.** а) Внутренняя область тетраэдра с вершинами (0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0) и (0, 0, 1); б) область, внешняя по отношению к двум параллельным плоскостям $x = 0$ и $x + 1 = 0$; в) внутренняя



Черт. 67



Черт. 68

область треугольной призмы $AOBA_1O_1B_1$, изображенной на чертеже 67; вершины A и B имеют координаты $A(0, 3, 0)$, $B(0, 0, 3)$; г) параллелепипед $MNPQM'N'P'Q'$, изображенный на чертеже 68; вершины M, N, P, Q имеют координаты: $M(5, 5, 0)$, $N(5, 3, 0)$, $P(7, 3, 0)$, $Q(7, 5, 0)$. **789.** $y > 0$, $x > 0$, $y + z - 2 < 0$. **790.** $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$, $\frac{x}{5} + \frac{y}{3} + \frac{z}{6} - 1 < 0$. **792.** а) $p = 10$; б) $p = \frac{3}{\sqrt{38}}$. **793.** $5x + 7y - 17z + 22 = 0$, $x - y - z + 2 = 0$.

Решение. Так как искомая плоскость не проходит через начало координат, то ее уравнение можно записать в виде: $Ax + By + Cz + 1 = 0$. Искомые коэффициенты A, B и C должны удовлетворять следующим уравнениям: $A(-1) + C \cdot 1 + 1 = 0$ (точка M_1 принадлежит искомой плоскости), $A + B + 2C + 1 = 0$ (точка M_2 принадлежит искомой плоскости). $\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$ (искомая плоскость отстоит от начала координат на расстоянии $\frac{2}{\sqrt{3}}$). Решая данную систему уравнений, получаем два решения: $A_1 = \frac{5}{22}$, $B_1 = \frac{7}{22}$, $C_1 = -\frac{17}{22}$; $A_2 = \frac{1}{2}$, $B_2 = -\frac{1}{2}$, $C_2 = -\frac{1}{2}$.

794. а) 1; б) $\frac{14}{13}\sqrt{13}$; в) $\frac{3}{2}$. **795.** а) Плоскость проходит вне сферы; б) плоскость пересекает сферу; в) плоскость касается сферы; г) плоскость пересекает сферу и проходит через ее центр. **796.** $6x + 2y + 3z - 42 = 0$. Указание. Написать уравнение искомой плоскости в отрезках. **797.** $4x + 3y - 15 = 0$; $58x + 33y + 6z - 201 = 0$. Указание. В пучке, определяемом данными плоскостями, выбрать плоскость, отстоящую от центра сферы на расстоянии, равном радиусу сферы. **798.** $\rho = \frac{1}{2\sqrt{14}}$. **799.** $\rho = \frac{|D_2 - D_1|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$. **800.** а) 8; б) $\frac{1}{2}$; в) $9\sqrt{3}$; г) $\frac{26\sqrt{3}}{9}$. Указание. Воспользоваться результатом предыдущей задачи. **801.** $M_1(0, 0, 3\sqrt{5})$, $M_2(0, 0, -3\sqrt{5})$. **802.** $M_1(0, 3, 0)$, $M_2(0, -2, 0)$. **803.** $6x - 3y + 2z + 7 = 0$; $6x - 3y + 2z - 35 = 0$. **804.** $6x + 3y + 2z - 14 = 0$ и $6x + 3y + 2z + 28 = 0$. **805.** а) $4x - 2y + 6z - 9 = 0$; б) $x + y - 2z + 2 = 0$; в) $3x - y + z + 10 = 0$. **806.** $(x + 3)^2 + y^2 + z^2 = \frac{225}{29}$; $(x - 7)^2 + y^2 + z^2 = \frac{1225}{29}$. **807.** а) $x + 2y - 6z + 3 = 0$, $4x + y + z - 1 = 0$; б) $2x + 3y + 5z - 12 = 0$, $4x - 13y + 5z = 0$. **808.** а) $\cos\alpha = \frac{1}{3}$; б) $\alpha = 90°$. **810.** а) (3, 4, 5); б) (—22, —1, —20). **811.** а) Прямая пересекает плоскости XOY и XOZ в точке (2, 0, 0), а плоскость YOZ — в точке (0, —3, 1); б) (0, 7, 18), $\left(\frac{7}{2}, 0, \frac{15}{2}\right)$, (6, —5, 0). **813.** а) $x = -t$, $y = 0$, $z = t$; б) $x = t$, $y = t + 1$, $z = -3t - 1$; в) $x = 0$, $y = -t$, $z = t$. **814.** $\frac{x-1}{-2} = \frac{y+3}{3} = \frac{z-4}{7}$. **815.** а) Прямая проходит через начало координат; в) прямая параллельна оси Ox; б) прямая пересекает ось Ox и параллельна координатной плоскости Oyz; г) прямая лежит в координатной плоскости Oyz. **816.** а) (0, 1, 0); б) (0, 2, 1); $\left(-\frac{4}{3}, 0, \frac{1}{3}\right)$; (—2,—1, 0). **817.** а) $A_1=0$, $A_2=0$; б) $B_1=0$, $D_1=0$, $B_2=0$, $D_2=0$; $A_1B_1 - B_1A_2 = 0$, $D_1 = D_2 = 0$. **818.** а) Пересекаются; б) совпадают; в) скрещиваются; г) параллельны. **819.** $5x - 22y + 19z + 9 = 0$. **820.** $y + z = 0$. **821.** а) $x + 2y - 1 = 0$; б) $x + 2y + z + 4 = 0$. **822.** $2x - y + z + 12 = 0$. **823.** $x - 4y + 7z + 24 = 0$. **824.** $2x - y - z + 8 = 0$. **825.** $4x + 3y - z = 0$, $13x + 2y - 8z = 0$ или в параметрическом виде: $x = 22t$, $y = -19t$, $z = 31t$. Решение. Первый способ. Искомая прямая является линией пересечения двух плоскостей, каждая из которых проходит через начало координат и через одну из данных прямых. Так как первая прямая проходит через точку M (0, 1, 3) и параллельна вектору

$p_1\{1, -1, 1\}$, то плоскость, проходящая через эту прямую и начало координат, имеет уравнение: $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$ или $4x + 3y - z = 0$. Аналогично получаем уравнение плоскости, проходящей через вторую прямую и начало координат: $13x + 2y - 8z = 0$. Следовательно, искомая прямая имеет уравнения: $4x + 3y - z = 0$, $13x + 2y - 8z = 0$. Второй способ. Так как искомая прямая проходит через точку $O(0, 0, 0)$, то для составления ее уравнения достаточно определить координаты направляющего вектора $p\ \{\alpha, \beta, \gamma\}$. Записывая условия пересечения искомой прямой с данными прямыми, получим уравнения, откуда определяются координаты вектора p: $p\{22, -19, 31\}$. **826.** $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{3}$.

827. $\left(0, -\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}\right)$. **829.** $\frac{x+5}{0} = \frac{y}{3} = \frac{z}{2}$. **830.** $\frac{x-2}{1} = \frac{y+3}{-3} = \frac{z-3}{4}$. **831.** а) $2x - 3y + 5z - 31 = 0$; б) $2x - 5y - 3z - 5 = 0$.

832. $\begin{cases} 3x + 4y + 3z - 15 = 0, \\ 7x - 6y + z + 5 = 0. \end{cases}$ **833.** $\frac{x-1}{-5} = \frac{y-5}{1} = \frac{z+1}{8}$.

834. $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-5}{5} = \frac{z+1}{9}$. **835.** $(2, -4, 8)$. **836.** $(-3, 7, 4)$.

837. а) $x + 2y + 9 = 0$, $\begin{cases} x + 2y + 9 = 0, \\ x - 2z - 1 = 0, \\ z = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x - 2z - 1 = 0, \\ y + z + 5 = 0, \\ y = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} y + z + 5 = 0, \\ x = 0; \end{cases}$ б) $x - 4y - 6 = 0$, $\begin{cases} x - 4y - 6 = 0, \\ z + y - 1 = 0, \\ z = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} z + y - 1 = 0, \\ x + 4z - 10 = 0, \\ x = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x + 4z - 10 = 0, \\ y = 0; \end{cases}$ в) $5x + 2y + 14 = 0$, $\begin{cases} 5x + 2y + 14 = 0, \\ 3x + 2z + 4 = 0, \\ z = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} 3x + 2z + 4 = 0, \\ 3y - 5z + 11 = 0, \\ y = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} 3y - 5z + 11 = 0, \\ x = 0. \end{cases}$

838. $\begin{cases} 3y + 3z + 5 = 0, \\ 3x - y + z - 4 = 0. \end{cases}$ **839.** $\begin{cases} 2x + y - 5z + 5 = 0, \\ 3x - y + z - 1 = 0. \end{cases}$

840. $x - 3y - 7z = 0$. **841.** $2x + 3y - 5z + 14 = 0$.

842. $\begin{cases} 2x - y + 3z - 4 = 0, \\ x - 11y - 3z - 44 = 0. \end{cases}$ **843.** $\sqrt{22}$. **844.** 6. **845.** б) $2x - 3y - 6z - 7 = 0$, $2x - 3y - 6z + 14 = 0$; в) 3. **846.** $\arcsin \frac{3}{133}$.

847. $90°$. **848.** $\sin \varphi = \frac{\sqrt{6}}{9}$. **849.** Доказательство. Пусть в произвольно выбранной прямоугольной декартовой системе данные прямые l и l' и плоскость α имеют уравнения: (l) $\frac{x - x_0}{p_1} = \frac{y - y_0}{p_2} = \frac{z - z_0}{p_3}$, ($l'$) $\frac{x - x_1}{p'_1} = \frac{y - y_1}{p'_2} = \frac{z - z_1}{p'_3}$, ($\alpha$) $Ax + By +$

$+Cz+D=0$. Так как $l \perp l'$, то $p_1p'_1 + p_2p'_2 + p_3p'_3 = 0$ (1). С другой стороны, в силу того, что $\alpha \perp l'$, имеем: $p'_1 = \lambda A$, $p'_2 = \lambda B$, $p'_3 = \lambda C$. Подставив эти выражения в (1), получаем: $Ap_1 + Bp_2 + Cp_3 = 0$. Это соотношение показывает, что направляющий вектор прямой l параллелен плоскости α. Таким образом, прямая l либо параллельна плоскости α, либо принадлежит этой плоскости. **851.** Доказательство. Пусть в некоторой аффинной системе координат данные плоскости α и α' и прямая l имеют уравнения:

$$(\alpha)\quad Ax+By+Cz+D=0, \tag{1}$$

$$(\alpha')\quad A'x+B'y+C'z+D'=0, \tag{2}$$

$$(l)\quad \frac{x-x_0}{p_1}=\frac{y-y_0}{p_2}=\frac{z-z_0}{p_3}. \tag{3}$$

Так как $l \parallel \alpha$ и $l \parallel \alpha'$, то

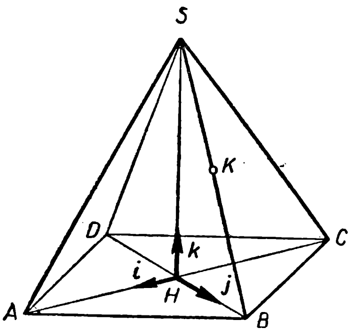
$$Ap_1 + Bp_2 + Cp_3 = 0,\quad A'p_1 + B'p_2 + C'p_3 = 0. \tag{4}$$

В силу того что плоскости α и α' пересекаются, коэффициенты в уравнениях (1) и (2) не пропорциональны, поэтому хотя бы один из определителей $\begin{vmatrix} B & C \\ B' & C' \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} C & A \\ C' & A' \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} A & B \\ A' & B' \end{vmatrix}$ не равен нулю. Пусть, например $\begin{vmatrix} A & B \\ A' & B' \end{vmatrix} \neq 0$. Решив систему (4) относительно p_1 и p_2, получаем: $p_1 = -\dfrac{\begin{vmatrix} C & B \\ C' & B' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B \\ A' & B' \end{vmatrix}}\,p_3$, $p_2 = -\dfrac{\begin{vmatrix} A & C \\ A' & C' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B \\ A' & B' \end{vmatrix}}\,p_3$. Если ввести обозначение

$\dfrac{p_3}{\begin{vmatrix} A & B \\ A' & B' \end{vmatrix}} = \lambda$, то предыдущие соотношения запишутся так: $p_1 = \lambda \begin{vmatrix} B & C \\ B' & C' \end{vmatrix}$,

$p_2 = \lambda \begin{vmatrix} C & A \\ C' & A' \end{vmatrix}$, $p_3 = \lambda \begin{vmatrix} A & B \\ A' & B' \end{vmatrix}$. Таким образом, векторы $\{p_1, p_2, p_3\}$ и $\left\{\begin{vmatrix} B & C \\ B' & C' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} C & A \\ C' & A' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A & B \\ A' & B' \end{vmatrix}\right\}$ коллинеарны. Так как второй вектор параллелен линии пересечения данных плоскостей (см. задачу 762), то теорема доказана. **853.** Указание. Прямоугольную декартову систему координат выбрать так, чтобы плоскость α совпала с плоскостью Oxy. **854.** Решение. Пусть прямые l_1 и l_2 даны своими уравнениями в прямоугольной декартовой системе: $\dfrac{x-x_1}{\alpha_1}=\dfrac{y-y_1}{\beta_1}=\dfrac{z-z_1}{\gamma_1}$, $\dfrac{x-x_2}{\alpha_2}=\dfrac{y-y_2}{\beta_2}=\dfrac{z-z_2}{\gamma_2}$. (1)

Сначала предположим, что через прямую l_1 можно провести плоскость $Ax+By+Cz+D=0$, перпендикулярную прямой l_2. Так как эта плоскость проходит через прямую l_1, то $A\alpha_1 + B\beta_1 + C\gamma_1 = 0$. Кроме того, плоскость перпендикулярна l_2, поэтому векторы $\{\alpha_2, \beta_2, \gamma_2\}$ и $\{A, B, C\}$ коллинеарны, т. е. $A = \lambda\alpha_2$, $B = \lambda\beta_2$, $C = \lambda\gamma_2$. Подставив эти значения в предыдущее соотношение, получаем: $\lambda(\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2) = 0$. В силу условия $\lambda \neq 0$ будем иметь: $\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2 = 0$ (2). Таким образом, мы пришли к выводу, что если через l_1 проходит плоскость, перпендикулярная l_2, то $l_1 \perp l_2$. Теперь докажем обратное утверждение. Пусть $l_1 \perp l_2$. Рассмотрим плоскость: $\alpha_2(x-x_1) + \beta_2(y-y_1) + \gamma_2(z-z_1) = 0$ (3). Очевидно, прямая l_1 лежит в плоскости (3), так как точка (x_1, y_1, z_1) принадлежит этой плоскости и вектор $\{\alpha_1, \beta_1, \gamma_1\}$ параллелен ей. Последнее утверждение следует из условия (2) (см. задачу 748). Кроме того, направляющий вектор плоскости (3) совпадает с направляющим вектором прямой l_2, поэтому плоскость (3) перпендикулярна l_2. Итак, для того, чтобы через l_1 можно было провести плоскость, перпендикулярную l_2, необходимо и достаточно, чтобы прямые l_1 и l_2 были перпендикулярны. **856.** Указание. Вершину трехгранного угла принять за начало координат, а одну из граней — за плоскость Oxy. **857.** Прямая, перпендикулярная плоскости треугольника. **858.** Плоскость, перпендикулярная прямой, проходящей через данные точки. **859.** Решение. Пусть $OABC$ — данный тетраэдр. Примем за начало координат точку O, а за координатные векторы $e_1 = \overline{OA}$, $e_2 = \overline{OB}$, $e_3 = \overline{OC}$. Обозначив середины ребер OA, OB, OC, AB, BC, CA соответственно через M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 и M_6, будем иметь: $M_1\left(\frac{1}{2}, 0, 0\right)$, $M_2\left(0, \frac{1}{2}, 0\right)$, $M_3\left(0, 0, \frac{1}{2}\right)$, $M_4\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$, $M_5\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $M_6\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$. Отсюда получаем уравнения данных плоскостей:



Черт. 69

$$\begin{array}{llll} (OAM_5) & y - z = 0, & (ABM_3) & x + y + 2z = 1, \\ (OBM_6) & x - z = 0, & (BCM_1) & 2x + y + z = 1, \\ (OCM_4) & x - y = 0, & (CAM_2) & x + 2y + z = 1. \end{array}$$

Легко убедиться в том, что все плоскости проходят через точку $Q\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$. Других общих точек плоскости не имеют. **861.** Указание. Систему координат выбрать так, чтобы данная плоскость совпала с плоскостью Oxy, а концы диагонали, лежащей в этой плоскости, имели координаты (0, 0, 0) и (1, 0, 0). Ввести в рассмотрение координаты концов другой диагонали и вычислить расстояние от этих концов до плоскости Oxy. **862.** Решение. За начало прямоугольной декартовой системы координат возьмем основание H высоты SH, опущенной из вершины S на плоскость $ABCD$ (черт. 69), а за координатные оси — диагонали AC, BD и высоту SH. Положительные направления осей выберем так, как указано на чертеже 69. Если $AC = BD = 2a$, $SH = h$, то вершины пирамиды и точка K будут иметь координаты: $A\ (a, 0, 0)$, $B\ (0, a, 0)$, $C\ (-a, 0, 0)$, $D\ (0, -a, 0)$, $S\ (0, 0, h)$, $K\left(0, \frac{a}{2}, \frac{h}{2}\right)$. Запишем уравнения плоскостей SAB, ABC и AKC. Плоскость ABC совпадает с координатной плоскостью Oxy, поэтому она имеет уравнение: $z = 0$ (1). Плоскость SAB отсекает на координатных осях отрезки a, a, h, поэтому она имеет уравнение «в отрезках»: $\frac{x}{a} + \frac{y}{a} + \frac{z}{h} = 1$ (2). Уравнение третьей плоскости AKC легко записать как уравнение плоскости, проходящей через ось Ox и через точку K: $-hy + az = 0$ (3). По уравнениям (1), (2) определяем: $\cos\beta = \frac{\frac{1}{h}}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{h^2}}} = \frac{\frac{1}{h}}{\sqrt{\frac{2}{a^2} + \frac{1}{h^2}}} = \frac{a}{\sqrt{2h^2 + a^2}}$ (4). По уравнениям (2) и (3) определяем: $\cos\varphi = \frac{-\frac{h}{a} + \frac{a}{h}}{\sqrt{\frac{2}{a^2} + \frac{1}{h^2}} \cdot \sqrt{a^2 + h^2}} = \frac{a^2 - h^2}{\sqrt{2h^2 + a^2} \cdot \sqrt{a^2 + h^2}}$. Если ввести обозначение $k = \frac{h}{a}$, то из предыдущих соотношений легко получить: $\cos\beta = \frac{1}{\sqrt{2k^2 + 1}}$, $\cos\varphi = \frac{1 - k^2}{\sqrt{2k^2 + 1} \cdot \sqrt{1 + k^2}} = \frac{1 - k^2}{\sqrt{1 + k^2}} \cos\beta$. Из первого соотношения получаем $k^2 = \frac{1 - \cos^2\beta}{2\cos^2\beta}$. Подставив это выражение во второе соотношение, после элементарных преобразований получаем: $\cos\varphi = \frac{3\cos^2\beta - 1}{\sqrt{2(1 + \cos^2\beta)}}$. **863.** $\cos\varphi = \frac{3h^2 - 2a^2}{\sqrt{3h^2 + 4a^2}\sqrt{12h^2 + a^2}}$.

864. Указание. Боковые ребра принять за координатные оси и написать уравнение основания «в отрезках»; далее вычислить расстояние от начала координат до этой плоскости. **865.** Решение. Примем вершину O данного тетраэдра $OABC$ за начало аффинной системы координат, а векторы $e_1 = \overline{OA}$, $e_2 = \overline{OB}$, $e_3 = \overline{OC}$ — за координатные векторы. В этой системе вершины тетраэдра имеют координаты: $O(0, 0, 0)$, $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C(0, 0, 1)$, поэтому центры тяжести граней имеют координаты (см. задачу 621): $OAB\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0\right)$, $OAC\left(\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}\right)$, $OBC\left(0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$, $ABC\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$. Если обозначить через l_1, l_2, l_3 и l_4 прямые, соединяющие соответственно вершины O, A, B и C с центрами тяжести противоположных граней, то легко записать уравнения этих прямых: (l_1) $\frac{x}{\frac{1}{3}} = \frac{y}{\frac{1}{3}} = \frac{z}{\frac{1}{3}}$, или $x = y = z$; (l_2) $\frac{x - 1}{-1} = \frac{y}{\frac{1}{3}} = \frac{z}{\frac{1}{3}}$, или $-\frac{1}{3}(x-1)=y=z$; $(l_3)\ \frac{x}{\frac{1}{3}}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z}{1}$, или $x=-\frac{1}{3}(y-1)=$ $=z$; $(l_4)\ \frac{x}{\frac{1}{3}}=\frac{y}{\frac{1}{3}}=\frac{z-1}{-1}$, или $x=y=-\frac{1}{3}(z-1)$. Непосредственной подстановкой убеждаемся в том, что все эти прямые проходят через точку $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$. **867.** Указание. Пусть O — точка пересечения ребер A_1A_1', A_2A_2' и A_3A_3'. Принять точку O за начало аффинной системы координат, а векторы $e_1=\overline{OA}_1$, $e_2=\overline{OA}_2$, $e_3=\overline{OA}_3$ — за координатные векторы. **868.** $\frac{\sqrt{6}}{3}a$. **869.** а) $x^2+(y-1)^2+z^2=25$; б) $x^2+y^2+z^2=36$; в) $(x-5)^2+(y-1)^2+(z+3)^2=25$. **870.** $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-3)^2=36$. **871.** $(x-1)^2+(y-5)^2+(z+1)^2=4$. **872.** а) $(-1, 0, 5)$, $R=2$; б) $(3, -4, -1)$, $R=4$; в) $(-6, 3, 0)$, $R=2\sqrt{2}$. **873.** $(x^2+y^2+z^2+15)^2=64(x^2+y^2)$. Эта поверхность называется т о р о м. **874.** $(x^2+y^2+z^2)^2=4r^2(x^2+y^2)$. **875.** $z^4=100(x^2+y^2)$. **876.** $z^2+25=10\sqrt{x^2+y^2}$. **877.** а) $\frac{x^2+z^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$; б) $\frac{x^2+z^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$; в) $\frac{x^2+z^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$; г) $x^2+z^2=2py$. **878.** $z^2=\sin^2\sqrt{x^2+y^2}$. **879.** а) Поверхность образована вращением кривой $\begin{cases} y^4+y^2+z=0 \\ x=0 \end{cases}$ вокруг оси Oz; б) поверхность образована вращением окружности радиуса 2 около хорды, стягивающей дугу 60°; в) однополостный гиперболоид, образованный вращением гиперболы $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ вокруг оси Oy. **880.** Поверхность представляет собой тор (см. задачу 873). Сечение — две концентрические окружности с центром в начале координат: $(x^2+y^2-9)(x^2+y^2-49)=0$. **882.** Однополостный гиперболоид. Решение. Ось Oz совместим с прямой l_1, а ось Oy направим вдоль общего перпендикуляра данных скрещивающихся прямых. В этой системе прямая l_2 имеет уравнения $y=a$, $x=kz$, где a — кратчайшее расстояние между прямыми. Согласно предыдущей задаче уравнение искомой поверхности имеет вид: $x^2+y^2-k^2z^2=a^2$. **883.** а) $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{1}+\frac{z^2}{2}=1$; б) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{5}+\frac{z^2}{20}=1$; в) $\frac{x^2+y^2}{25}+\frac{z^2}{2}=1$. **884.** а) $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{4}=1$; б) $\frac{x^2+y^2}{9}-\frac{z^2}{10}=1$. **885.** $20x^2+13y^2+25z^2-24xy-12xz-16yz-220x+190y-50z+641=0$. Решение. Все точки $M(x, y, z)$ круговой цилиндрической поверхности находятся на одинаковом расстоянии ρ от ее оси, где ρ — расстояние от точки $M_0(2, -1, 0)$ до данной прямой. Как известно, $\rho = \frac{|[p \cdot \overline{M_0M_1}]|}{|p|}$, где M_0—данная точка, M_1 — начальная точка, а p — направляющий вектор прямой. Непосредственным подсчетом убеждаемся в том, что $\rho = 3$. Для того чтобы точка $M(x, y, z)$ лежала на круговой цилиндрической поверхности, необходимо и достаточно, чтобы $\frac{[p\overline{M_0M}]}{|p|} = 3$. Подставив сюда координаты данных точек и вектора p, после элементарных преобразований, получаем уравнение поверхности. **886.** $8x^2 + 5y^2 + 5z^2 - 4xy + 8yz + 4xz + 16x + 14y + 22z - 39 = 0$. **887.** а) $(x - z)^2 + 2(x - z)y + 3y^2 - (x - z) = 0$; б) $y^2 - yz + 5 = 0$; в) $\frac{(x+z)^2}{5} - \frac{(y+2z)^2}{4} = 1$; г) $(x-1)^2 + z^2 = 4$. **888.** $x^2 + y^2 = 25$. **889.** $2x^2 + (y + z)^2 - 18 = 0$. **890.** а) $(x - z)^2 + y^2 - y(1 - z) = 0$; б) $x^2 + y^2 - 16(1 - z)^2 = 0$. **891.** $x^2 + y^2 + 7z^2 - 16xy - 8xz - 8yz + 62x + 44y - 32z - 11 = 0$. Решение. Для того чтобы точка $M(x, y, z)$ лежала на конической поверхности, необходимо и достаточно, чтобы вектор $\overline{SM}$ составлял с нормальным вектором n данной плоскости угол $\Theta = 90^\circ - \varphi = 45^\circ$. Так как $\overline{SM}\{x - 1, y - 2, z - 4\}$ и $n\{2, 2, 1\}$, то $\cos\Theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2(x-1) + 2(y-2) + (z-4)}{3\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-4)^2}}$. Отсюда получаем уравнение искомой поверхности. **892.** $27[(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2] = 4(2x + 2y - z - 3)^2$. **893.** Гиперболический параболоид: $3xz - 2yz + 2x - y = 0$. Решение. Пусть $M(x, y, z)$ — произвольная точка искомого геометрического места, а $p\{p_1, p_2, p_3\}$ — направляющий вектор прямой l, параллельной плоскости Oxy, на которой лежит точка M. Так как $p \parallel Oxy$, то $p_3 = 0$. Принимая M за начальную точку прямой l, напишем ее уравнение: $X = x + p_1t$, $Y = y + p_2t$, $Z = z$. Эта прямая пересекает данные прямые, поэтому $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 0 & 1 \\ p_1 & p_2 & 0 \end{vmatrix} = 0$ и $\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z \\ 2 & 3 & 1 \\ p_1 & p_2 & 0 \end{vmatrix}$. Мы получили систему уравнений относительно p_1 и p_2:

$$\left.\begin{aligned} &yp_1 - xp_2 = 0, \\ &(y - 3z - 2)p_1 + (-x + 2z + 1)p_2 = 0. \end{aligned}\right\}$$

Так как p_1 и p_2 одновременно не равны нулю, то

$$\begin{vmatrix} y & -x \\ y - 3z - 2 & -x + 2z + 1 \end{vmatrix} = 0,$$

или в развернутом виде: $3xz - 2yz + 2x - y = 0$ (1). Итак, если точка $M(x, y, z)$ принадлежит геометрическому месту, то ее координаты удовлетворяют уравнению (1). Легко показать, что любая точка поверхности (1) принадлежит данному геометрическому месту точек. **894.** $xz + 2y - 2z = 0$. **895.** (XOY) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$, (YOZ) $\frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$; (XOZ) $\frac{x^2}{16} + \frac{z^2}{4} = 1$. **896.** Эллипс: $\frac{x^2}{50} + \frac{y^2}{32} = 1$. **897.** Две прямые:

$y - 4 = 0$, $y + 4 = 0$. **898.** а) Эллиптический параболоид; б) однополостный гиперболоид: $a = 2$, $b = \sqrt{2}$, $c = 1$; в) мнимая сферическая поверхность; г) гиперболический цилиндр; д) цилиндрическая поверхность, направляющая которой является окружностью.

899. $\frac{x'^2}{12} + \frac{y'^2}{4} + \frac{z'^2}{6} = 1$; $x = \frac{x' + 2y' + 2z'}{3}$, $y = \frac{2x' - 2y' + z'}{3}$, $z = \frac{2x' + y' - 2z'}{3}$. **900.** $y'^2 + z'^2 = 4$; $x = \frac{x'}{\sqrt{6}} + \frac{y'}{\sqrt{2}} - \frac{z'}{\sqrt{3}}$, $y = \frac{2x'}{\sqrt{6}} + \frac{z'}{\sqrt{3}}$, $z = \frac{x'}{\sqrt{6}} - \frac{y'}{\sqrt{2}} - \frac{z'}{\sqrt{3}}$. **901.** $\frac{x'^2}{15} + \frac{y'^2}{5} - \frac{z'^2}{3} = 1$; $x = \frac{\sqrt{2}x' + \sqrt{2}y'}{2}$, $y = \frac{\sqrt{2}y' - \sqrt{2}x'}{2}$, $z = z'$.

902. $x'^2 = -\frac{2\sqrt{5}}{3}y'$; $x = x'$, $y = \frac{y' - 2z'}{\sqrt{5}}$, $z = \frac{-2y' - z'}{\sqrt{5}}$.

903. $\frac{x'^2}{4} + \frac{y'^2}{2} - \frac{z'^2}{6} = 1$; $(\lambda_1 = 3;\ \lambda_2 = 6;\ \lambda_3 = -2)$; $x = \frac{1}{\sqrt{3}}x' + \frac{1}{\sqrt{6}}y' + \frac{1}{\sqrt{2}}z'$, $y = -\frac{1}{\sqrt{3}}x' + \frac{2}{\sqrt{6}}y'$, $z = \frac{1}{\sqrt{3}}x' + \frac{1}{\sqrt{6}}y' - \frac{1}{\sqrt{2}}z'$. **904.** $z^2 - 4 = 0$ $(\lambda_1 = \lambda_2 = 0,$ $\lambda_3 = 6)$; $x = \frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{3}}y' + \frac{1}{\sqrt{6}}z'$, $y = -\frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{3}}y' + \frac{1}{\sqrt{6}}z'$, $z = -\frac{1}{\sqrt{3}}y' + \frac{2}{\sqrt{6}}z'$. **905.** $y'^2 - z'^2 = 1$ $(\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 6,\ \lambda_3 = -6)$; $x = \frac{1}{\sqrt{6}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y' + \frac{1}{\sqrt{3}}z'$, $y = \frac{2}{\sqrt{6}}x' - \frac{1}{\sqrt{3}}z'$, $z = \frac{1}{\sqrt{6}}x' - \frac{1}{\sqrt{2}}y' + \frac{1}{\sqrt{3}}z'$. **906.** $\frac{x'^2}{1} + \frac{y'^2}{9} = 1$, $x = \frac{1}{\sqrt{2}}x' - \frac{1}{\sqrt{2}}y'$, $y = \frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y'$, $z = z'$. **907.** $5y'^2 + 2\sqrt{13}x' = 0$, $x = \frac{2x' + 3z'}{\sqrt{13}}$, $y = y'$, $z = \frac{3x' - 2y'}{\sqrt{13}}$. **908.** $\frac{x'^2}{3} + \frac{y'^2}{2} = 1$; $x + y = x'\sqrt{2}$, $x - y + z = y'\sqrt{3}$, $x - y - 2z = z'\sqrt{6}$. **909.** $\frac{x'^2}{4} + \frac{y'^2}{2} - \frac{z'^2}{6} = 1$ $(\lambda_1 = 3,$ $\lambda_2 = 6,\ \lambda_3 = -2)$; $x - y + z = x'\sqrt{3}$, $x - y - 2z = y'\sqrt{6}$, $x + y = z'\sqrt{2}$. **910.** $3z'^2 = 4$ $(\lambda_1 = \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 = 3)$; $x + y = x'\sqrt{2}$, $x - y - 2z = \sqrt{6}\,y'$; $x - y + z = \sqrt{3}z'$. **911.** $-\frac{x'^2}{12} + \frac{y'^2}{2} - \frac{z'^2}{6} = 1$. **912.** $3x'^2 - 2z'^2 = 2y'$. **913.** $\frac{y'^2}{12} + \frac{z'^2}{6} = 1$. **914.** $\frac{x'^2}{14} +$

$+\frac{y'^2}{28}+\frac{z'^2}{7}=1$. **915.** $\frac{x'^2}{2}+\frac{z'^2}{1}=-2y'$. **916.** $\frac{x'^2}{3}+\frac{y'^2}{2}=2z'$. **917.** $-\frac{x'^2}{2}+\frac{z'^2}{1}=2y'$. **918.** $x'^2-y'^2+z'^2=0$. **919.** $x'^2-3y'^2=0$. **920.** $\frac{x'^2}{2}+\frac{y'^2}{1}+\frac{z'^2}{5}=-1$. **921.** $x'^2-5=0$. **922.** $\frac{x'^2}{15}+\frac{y'^2}{5}+\frac{z'^2}{10}=1$. **923.** $x'^2=-\frac{\sqrt{5}}{3}y'$. **924.** $\frac{x'^2}{3}-\frac{z'^2}{3}=2y'$. **925.** $\frac{x'^2}{16}+\frac{y'^2}{\frac{32}{5}}+\frac{z'^2}{4}=1$. **926.** $x'^2+z'^2=2y'$. **927.** $\frac{x'^2}{1}+\frac{y'^2}{2}=1$. **928.** $y'^2=\frac{2}{\sqrt{5}}z'$. **929.** $-\frac{x'^2}{2}-\frac{y'^2}{6}-\frac{z'^2}{6}=1$. **930.** $\frac{x'^2}{3}+\frac{y'^2}{2}-\frac{z'^2}{1}=0$. **931.** $A(0,\ 0,\ 0)$, $B(1,\ 1,\ 1)$. Указание. Перейти к параметрическому уравнению прямой. **932.** b и d. **933.** Решение. Если $p\{\alpha,\ \beta,\ \gamma\}$ — направляющий вектор искомой прямолинейной образующей, то параметрические уравнения этой образующей запишутся так: $x=1+\alpha t$, $y=1+\beta t$, $z=1+\gamma t$. Подставив эти значения в уравнение поверхности, после элементарных преобразований получаем: $(\alpha^2+\beta^2-\gamma^2)t^2+2(\alpha+\beta-\gamma)t=0$. Прямая l будет прямолинейной образующей в том и только в том случае, если $\alpha^2+\beta^2-\gamma^2=0$, $\alpha+\beta-\gamma=0$. Очевидно, $\gamma\neq 0$. Разделив эти соотношения на γ и вводя новые неизвестные $\frac{\alpha}{\gamma}=\xi$, $\frac{\beta}{\gamma}=\eta$, будем иметь: $\xi^2+\eta^2=1$, $\xi+\eta=1$. Из этих двух уравнений легко получить значения ξ и η: $\xi_1=0$, $\eta_1=1$; $\xi_2=1$, $\eta_2=0$. Положив $\gamma=1$, получаем координаты двух направляющих векторов прямолинейных образующих: $p_1\{0,\ 1,\ 1\}$, $p_2\{0,\ 1,\ 1\}$. Таким образом:

$$x=1,\quad y=1+t,\quad z=1+t;$$
$$x=1+t,\quad y=1,\quad z=1+t.$$

934. $$\begin{cases} x+y-z+3=0, \\ z-1=0 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x-z+2=0, \\ x+y+2=0. \end{cases}$$

935. Решение. Для того, чтобы вектор $p\{\alpha,\beta,\gamma\}$ имел асимптотическое направление относительно поверхности, необходимо и достаточно, чтобы $P=a_{11}\alpha^2+a_{22}\beta^2+a_{33}\gamma^2+2a_{12}\alpha\beta+2a_{13}\alpha\gamma+2a_{23}\beta\gamma=0$. Если p параллелен плоскости Oxy, то $\gamma=0$, поэтому условие асимптотичности этого вектора имеет вид: $a_{11}\alpha^2+a_{22}\beta^2+2a_{12}\alpha\beta=0$. Так как любой вектор, параллельный плоскости, имеет асимптотическое направление, то последнее уравнение есть тождество относительно α и β. Это возможно тогда и только тогда, когда $a_{11}=0$, $a_{22}=0$, $a_{12}=0$. **936.** а) Нет; б) $a_{11}=a_{12}=a_{13}=a_{14}=0$. **937.** а) $a_{11}=0$, $a_{22}>0$, $a_{33}>0$; б) $a_{11}>0$, $a_{22}>0$, $a_{33}>0$, или $a_{11}<0$, $a_{22}<0$, $a_{33}<0$. **938.** а) Плоскость, параллельная данным плоскостям; б) пара пересекающихся плоскостей; в) одна прямая, имеющая асимптотическое направление; г) пара пересекающихся плоскостей. Указание. Если поверхность дана уравнением (1) (стр. 165), то конус асимптотических направлений с вершиной в точке (x_0, y_0, z_0) имеет уравнение: $a_{11}(x-x_0)^2+a_{22}(y-y_0)^2+a_{33}(z-z_0)^2+2a_{12}(x-x_0)\times\times(y-y_0)+2a_{13}(x-x_0)(z-z_0)+2a_{23}(y-y_0)(z-z_0)=0$. **939.** $6y-1=0$. **940.** $x+3y-z-1=0$. Решение. Найдем координаты вектора $\boldsymbol{a}\{a_1, a_2, a_3\}$, сопряженного искомой диаметральной плоскости $\frac{a_{11}a_1+a_{12}a_2+a_{13}a_3}{A}=\frac{a_{21}a_1+a_{22}a_2+a_{23}a_3}{B}=$ $=\frac{a_{31}a_1+a_{32}a_2+a_{33}a_3}{C}$. Для данной задачи получаем: $\frac{6a_1+3a_2+2a_3}{1}=$ $=\frac{3a_1+9a_2}{3}=\frac{-2a_1+a_3}{-1}$. Отсюда $\boldsymbol{a}\{2; -1; 5\}$. Напишем уравнение диаметральной плоскости, сопряженной вектору $\boldsymbol{a}$: $x+3y-z-1=0$. **941.** $4x+5y-2z=0$. Указание. При решении задачи использовать центр поверхности. **942.** $x+3y+$ $+2z+2=0$. **943.** $x-y-z=0$. **944.** $10x-7y+17z-20=$ $=0$. **945.** $38x+39y-20z-1=0$. **946.** $4x-y-4z+1=0$. **947.** Решение. Диаметральная плоскость поверхности второго порядка имеет уравнение (7) стр. 168. Таким образом, задача сводится к тому, чтобы подобрать такие α, β, γ, для которых

$$\left.\begin{aligned} &a_{11}\alpha+a_{21}\beta+a_{31}\gamma=0,\\ &a_{12}\alpha+a_{22}\beta+a_{32}\gamma=0,\\ &a_{13}\alpha+a_{23}\beta+a_{33}\gamma\neq 0,\\ &a_{14}\alpha+a_{24}\beta+a_{34}\gamma=0,\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

причем $P=(a_{11}\alpha+a_{12}\beta+a_{13}\gamma)\alpha+(a_{21}\alpha+a_{22}\beta+a_{23}\gamma)\beta+$ $+(a_{31}\alpha+a_{32}\beta+a_{33}\gamma)\gamma\neq 0$. Последнее условие означает, что вектор $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ не имеет асимптотического направления. Из соотношений (1) следует, что условие $P\neq 0$ равносильно условию $\gamma\neq 0$. Разделив уравнения (1) на γ и обозначив $\frac{\alpha}{\gamma}=p$, $\frac{\beta}{\gamma}=q$, получаем:

$$a_{11}p+a_{21}q+a_{31}=0, \tag{2}$$

$$a_{12}p+a_{22}q+a_{32}=0, \tag{3}$$

$$a_{14}p+a_{24}q+a_{34}=0, \tag{4}$$

$$a_{13}p+a_{23}q+a_{33}\neq 0. \tag{5}$$

Таким образом, плоскость Oxy является одной из диаметральных плоскостей тогда и только тогда, когда существует такое число $A\neq 0$, что система

$$\begin{aligned} &a_{11}p+a_{21}q+a_{31}=0, && a_{12}p+a_{22}q+a_{32}=0,\\ &a_{14}p+a_{24}q+a_{34}=0, && a_{13}p+a_{23}q+a_{33}-A=0\end{aligned}$$

имеет хотя бы одно решение, т. е. совместна. Мы пришли к следующему выводу: для того, чтобы плоскость Oxy была одной из диаметральных плоскостей, необходимо и достаточно, чтобы существовало такое число $A \neq 0$, чтобы ранги матриц

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{14} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33}-A \end{pmatrix}$$

совпадали. **948.** а) Да, например, пара параллельных плоскостей; б) все диаметральные плоскости проходят через линию пересечения данных плоскостей. **949.** а) $(1, 1, -1)$; б) $(0, 2, -2)$; в) $\left(\frac{3}{2}, 0, -1\right)$. **950.** а) Прямая центров: $3x-2y=0$, $y-3z+6=0$; поверхность третьего типа: $\lambda_1 x'^2+\lambda_2 y'^2+a'_{44}=0$; б) нет центров; поверхность второго типа; в) единственный центр $(0, 0, 0)$, принадлежащий поверхности; поверхность коническая; г) плоскость центров $x+4y-4z+5=0$; поверхность пятого типа: $\lambda_1 x'^2+$ $+a'_{44}=0$. **951.** а) $O'(1, -1, 1)$, $\lambda_1=-2$, $\lambda_2=3$, $\lambda_3=6$, $\frac{x'^2}{6}-\frac{y'^2}{4}-\frac{z'^2}{2}=1$; б) $O'\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}\right)$, $\lambda_1=2$, $\lambda_2=3$, $\lambda_3=-6$, $2x^2+3y^2-6z^2+\frac{4}{3}=0$; в) $O'(1, 1, -1)$; $\lambda_1=-3$, $\lambda_2=-3$, $\lambda_3=6$; $x'^2+y'^2-2z'^2=0$. **952.** $a_{11}=a_{21}=a_{31}=a_{22}=a_{32}=a_{14}=$ $=a_{24}=a_{34}=0$. Решение. Пусть для поверхности $F(x, y, z)=$ $=0$ плоскость $z=0$ (1) является плоскостью центров. Это означает, что всякое решение уравнения (1) является решением системы

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z+a_{14}&=0,\\ a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z+a_{24}&=0,\\ a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z+a_{34}&=0, \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

и наоборот. Возьмем точки $O(0, 0, 0)$, $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, координаты которых удовлетворяют уравнению (1). Подставив координаты этих точек в систему (2), получаем: $a_{11}=a_{21}=a_{31}=a_{12}=$ $=a_{22}=a_{32}=a_{14}=a_{24}=a_{34}=0$. Следовательно, если плоскость Oxy является плоскостью центров для данной поверхности, то ее уравнение имеет вид: $a_{33}z^2+a_{44}=0$. Обратное утверждение очевидно. **953.** $a_{11}=a_{21}=a_{31}=a_{14}=a_{24}=$ $=a_{34}=0$. **954.** Указание. Доказательство проводится точно так же, как и доказательство аналогичной теоремы на плоскости (см. задачу 580). **955.** Указание. Воспользоваться предыдущей задачей. **956.** а) $a_{11}=a_{22}=a_{33}$, $a_{12}=a_{13}=a_{23}=0$; б) $a_{13}=a_{12}=0$; в) $a_{11}=a_{22}$, $a_{12}=a_{13}=a_{23}=0$. **957** а) Главные диаметральные плоскости: $2x+2y-1=0$, $3x-3y+$ $+3z-4=0$, $6x-6y-12z-7=0$; оси: $\begin{cases} 3x-3y+3z-4=0, \\ 6x-6y-12z-7=0; \end{cases}$

$$\begin{cases} 6x-6y-12z-7=0, \\ 2x+2y-1=0; \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x+2y-1=0, \\ 3x-3y+3z-4=0; \end{cases}$$

б) главные диаметральные плоскости: $4x+y+2z+7=0$; $x-2y-z+5=0$, ось: $\begin{cases} 4x+y+2z+7=0, \\ x-2y-z+5=0; \end{cases}$ в) главные диаметральные плоскости: $x-z-1=0$, $x-y+z=0$, ось: $\begin{cases} x-z-1=0, \\ x-y+z=0; \end{cases}$ г) главные диаметральные плоскости: $x+y=0$, $3x-3y-6z-1=0$, $3x-3y+3z+5=0$, оси: $\begin{cases} 3x-3y-6z-1=0, \\ 3x-3y+3z+5=0; \end{cases}$ $\begin{cases} 3x-3y+3z+5=0, \\ x+y=0; \end{cases}$ $\begin{cases} x+y=0, \\ 3x-3y-6z-1=0; \end{cases}$ д) главные диаметральные плоскости: $x+y+z+1=0$, $2x-4y+2z-1=0$, ось: $\begin{cases} x+y+z+1=0, \\ 2x-4y+2z-1=0. \end{cases}$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

I. Учебники и учебные пособия

1. Бахвалов С. В., Бабушкин Л. И., Иваницкая В. П., Аналитическая геометрия, Учпедгиз, 1962.
2. Болтянский В. Г., Яглом И. М., Векторы в курсе геометрии средней школы, Учпедгиз, 1962.
3. Болтянский В. Г., Яглом И. М., Преобразования. Векторы, изд. «Просвещение», 1964.
4. Выгодский М. Я., Аналитическая геометрия, Государственное издательство физико-математической литературы, 1963.
5. Выгодский М. Я., Справочник по высшей математике, изд. VI, 1963.
6. Гольдфайн И. А., Элементы векторного исчисления, Гостехиздат, 1948.
7. Делоне Б. Н. и Райков Д. А., Аналитическая геометрия, т. I, II, Огиз, Гостехиздат, 1948, 1949.
8. Дзиобек О., Курс аналитической геометрии, ч. I, II, Одесса, 1911.
9. Дубнов Я. С., Основы векторного исчисления, ч. I, Гостехиздат, 1939.
10. Ефимов Н. В., Краткий курс аналитической геометрии, Физматгиз, 1964.
11. Лопшиц А. М., Аналитическая геометрия, Учпедгиз, 1948.
12. Моденов П. С., Аналитическая геометрия, изд. МГУ, 1955.
13. Мусхелишвили Н. И., Курс аналитической геометрии, Огиз, Гостехиздат, 1947.
14. Минорский В. П. и Улановский В. П., Векторная алгебра, Гостехиздат, 1951.
15. Савелов А. А., Плоские кривые, Физматгиз, 1960.

II. Задачники

16. Адамов А. А., Сборник задач по аналитической геометрии и дифференциальному исчислению, Государственное издательство, 1924.
17. Атанасян Л. С., Васильева М. В., Гуревич Г. Б., Ильин А. С., Кузьмина Т. Л., Редозубова О. С., Сборник задач по элементарной геометрии, изд. 2, изд. «Просвещение», 1964.

18. Атанасян Л. С., Задачник-практикум по аналитической геометрии, изд. 2, Учпедгиз, 1963.

19. Бахвалов С. В., Моденов П. С. и Пархоменко А. С., Сборник задач по аналитической геометрии, Гостехиздат, 1957.

20. Гюнтер Н. М. и Кузьмин Р. О., Сборник задач по высшей математике, Гостехиздат, 1957.

21. Клетеник Д. В., Сборник задач по аналитической геометрии, Физматгиз, 1960.

22. Майоров В. М., Скопец З. А., Задачник-практикум по векторной алгебре, Учпедгиз, 1961.

23. Скопец З. А. и Жаров В. А., Задачи и теоремы элементарной геометрии, Учпедгиз, 1962.

24. Цубербиллер О. Н., Задачи и упражнения по аналитической геометрии, Физматгиз, 1961.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Левон Сергеевич Атанасян,
Вера Алексеевна Атанасян

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

Редактор *В. Г. Долгополов*
Переплет *Н. Н. Румянцева*
Художественный редактор *В. С. Эрденко*
Технический редактор *В. Ф. Коскина*
Корректор *Т. Н. Смирнова*

35 коп.

ПРОСВЕЩЕНИЕ 1968