

**сборник задач  
и упражнений  
по дифференциальной  
геометрии**

---

# Сборник задач и упражнений по дифференциальной геометрии

Под общей редакцией  
канд. физ.-мат. наук  
доц. В. Т. ВОДНЕВА

Допущено Министерством высшего  
и среднего специального образования БССР  
в качестве учебного пособия  
для математических специальностей  
университетов и пединститутов

**517.4**

**С23**

**УДК 513(075.8)**

**$\frac{2-2-3}{29-70}$**

## Предисловие

Настоящий сборник соответствует ныне действующей программе по курсу «Дифференциальная геометрия с элементами теории поля», изучаемому на механико-математических факультетах университетов. Он может быть использован также студентами и преподавателями физических факультетов университетов и физико-математических факультетов педагогических институтов.

Данная книга является существенной переработкой «Сборника задач по дифференциальной геометрии», изданного в 1963 г. Отметим основные изменения, внесенные в книгу. Во «Введении» даны определения и вытекающие из них различные способы аналитического задания линий и поверхностей. В отдельную главу выделены задачи, относящиеся к векторным функциям одного и нескольких скалярных аргументов. Добавлен ряд новых разделов. Отдельный параграф посвящен различным отображениям одной поверхности на другую. Учитывая важность метода подвижного репера в дифференциальной геометрии, авторы сочли целесообразным включить в сборник задачи на применение метода подвижного репера в теории поверхностей. В ранее изданных задачниках излагался лишь метод подвижного репера в теории линий. Чтобы сохранить преемственность с курсом аналитической геометрии, отдельную главу авторы посвятили изучению групповых свойств линий и поверхностей. Для основных понятий и свойств линий и поверхностей выясняется, к какому классу они принадлежат: метрическому, аффинному или проективному. В связи с тем что в новую программу входят элементы теории поля, отдельная глава сборника посвящена задачам, относящимся к скалярному и векторному полям.

Зачастую при формальном аналитическом решении задачи ускользает геометрическая сущность исследуемого вопроса. Имея это в виду, авторы включили в сборник большое количество задач и упражнений, способствующих выяснению геометрической сущности исследуемых объектов. Общее количество задач в новом издании сборника увеличено более чем в три раза.

В конце задачника помещен предметный указатель.



При составлении сборника авторы использовали большое количество учебников и сборников задач по дифференциальной геометрии советских и зарубежных авторов. Многие задачи составлены авторами сборника.

Мы выражаем глубокую благодарность профессору Киевского государственного университета Н. И. Кованцову и доценту Минского государственного педагогического института А. А. Дадаюну, которые внимательно прочитали рукопись сборника и сделали ряд ценных замечаний. Мы благодарим также лаборантов математического факультета Белорусского государственного университета, принимавших участие в подготовке рукописи к печати.

*В. Т. Воднев.*

# Введение

Основными объектами, изучаемыми в курсе дифференциальной геометрии, являются линии и поверхности в трехмерном вещественном евклидовом пространстве.

## Линия и ее уравнения

Множество  $U$  точек пространства называется *открытым*, если для каждой точки  $M$  этого множества можно указать такое положительное число  $\varepsilon$ , что все точки пространства, расстояние которых от  $M$  меньше  $\varepsilon$ , тоже принадлежат  $U$ . Множество  $V$  точек пространства называется *связным*, если не существует открытых множеств  $U_1$  и  $U_2$ , разбивающих множество  $V$  на два непустых подмножества, одно из которых принадлежит только  $U_1$ , другое — только  $U_2$ .

Пусть  $U$  — произвольное множество точек. Говорят, что задано *отображение  $f$  множества  $U$  в пространство*, если каждой точке  $M \in U$  поставлена в соответствие некоторая точка  $f(M)$  — образ точки  $M$ . Множество всех точек  $f(M)$ , где  $M \in U$ , называется *образом множества  $U$*  и обозначается  $f(U)$ . Отображение называется *взаимно однозначным*, если образы различных точек различны. Для взаимно однозначного отображения  $f$  существует *обратное отображение  $f^{-1}$* , которое точке  $f(M)$  сопоставляет точку  $M$ .

Пусть  $\varepsilon$  — положительное число. Назовем  $\varepsilon$ -*окрестностью точки  $M$*  множества  $U$  множество всех точек, принадлежащих  $U$ , расстояние которых от точки  $M$  меньше  $\varepsilon$ .

Отображение  $f$  множества  $U$  называется *непрерывным*, если для любой точки  $M \in U$  и любого положительного числа  $\varepsilon$  найдется такое число  $\delta > 0$ , что образ  $\delta$ -окрестности точки  $M$  принадлежит  $\varepsilon$ -окрестности точки  $f(M)$ . Взаимно однозначное и непрерывное отображение  $f$  множества  $U$  называется *топологическим*, если отображение  $f^{-1}$  также непрерывно; множества  $U$  и  $f(U)$  называются в этом случае *гомеоморфными*.

*Элементарной линией* называется множество точек, гомеоморфное открытому отрезку (интервалу) прямой. Так, элементарными линиями являются: открытый отрезок прямой, прямая, парабола, одна ветвь гиперболы, синусоида и т. д. Пусть  $U$  — элементарная линия и  $AB$  — открытый отрезок, образом кото-

рого при отображении  $f$  является эта линия. Введем на отрезке  $AB$  декартову координату  $t$ ,  $a < t < b$ , и рассмотрим в пространстве декартову прямоугольную систему координат  $Oxyz$ . Тогда отображение  $f$  каждому значению  $t$  поставит в соответствие точку на линии  $U$ , и координаты этой точки будут непрерывными функциями  $t$ :

$$x=f_1(t), \quad y=f_2(t), \quad z=f_3(t). \quad (1)$$

Эти соотношения называются *параметрическими уравнениями линии  $U$* .

Аналогично можно ввести параметрические уравнения для точечного множества, гомеоморфного окружности.

*Простой линией* называется топологический образ открытого отрезка или окружности.

Отображение  $f$  множества  $U$  в пространство называется *локально топологическим*, если у каждой точки  $M \in U$  есть  $\varepsilon$ -окрестность, в которой отображение  $f$  является топологическим.

*Линией* (или *кривой*) называется образ простой линии при локально топологическом отображении ее в пространство. Пусть  $U$  — образ простой линии  $U_1$  при отображении  $f_1$  и пусть это же множество  $U$  является образом простой линии  $U_2$  при отображении  $f_2$ . Будем считать, что отображения  $f_1$  и  $f_2$  определяют одну и ту же линию, если между точками простых линий  $U_1$  и  $U_2$  может быть установлено топологическое соответствие, при котором образы соответствующих точек этих линий на линии  $U$  совпадают.

Пусть линия  $f(U)$  является образом простой линии  $U$ . *Окрестностью точки  $f(M)$*  линии  $f(U)$  будем считать образ любой окрестности точки  $M$  в множестве  $U$ . В окрестности любой своей точки линия может быть задана уравнениями (1). Мы будем считать, что функции  $f_1(t)$ ,  $f_2(t)$  и  $f_3(t)$  в уравнениях (1) непрерывно дифференцируемы столько раз, сколько требуют условия задачи. Если при некотором значении  $t$   $f'_1(t) \neq 0$ , то в окрестности соответствующей точки линию можно задать уравнениями:

$$y=\varphi(x), \quad z=\psi(x). \quad (2)$$

Если ввести в рассмотрение радиус-вектор  $\bar{r}$  произвольной точки  $M$  и единичные векторы координатных осей  $\bar{i}$ ,  $\bar{j}$ ,  $\bar{k}$ , то параметрические уравнения (1) можно представить в векторном виде

$$\bar{r}=f_1(t)\bar{i}+f_2(t)\bar{j}+f_3(t)\bar{k}. \quad (3)$$

Мы также будем использовать запись

$$\bar{r} = \{f_1(t), f_2(t), f_3(t)\} \quad (4)$$

или, короче,

$$\bar{r} = \bar{r}(t). \quad (5)$$

Линия называется *плоской*, если все ее точки принадлежат некоторой плоскости. Считая эту плоскость совмещенной с плоскостью  $Oxy$ , мы получим уравнения линии в следующих видах:

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t); \quad (6)$$

$$y = \varphi(x); \quad (7)$$

$$\bar{r} = f_1(t)\bar{i} + f_2(t)\bar{j}. \quad (8)$$

## Поверхность и ее уравнения

*Элементарной поверхностью*  $\Phi$  называется образ открытого круга при его топологическом отображении в пространство. Введем в плоскости круга декартовы координаты  $u, v$ , а в пространстве — декартову прямоугольную систему координат  $Oxyz$ . Тогда координаты  $x, y, z$  точки поверхности  $\Phi$  будут функциями  $u, v$ :

$$x = f_1(u, v), \quad y = f_2(u, v), \quad z = f_3(u, v). \quad (9)$$

Эти соотношения называются *параметрическими уравнениями поверхности*  $\Phi$ , а величины  $u, v$  — *криволинейными координатами* на ней. Линии

$$u = \text{const}, \quad v = \text{const}$$

на поверхности  $\Phi$  называются координатными.

*Простой поверхностью* называется связное множество точек, каждая из которых имеет окрестность, являющуюся элементарной поверхностью.

*Общей поверхностью* или, короче, *поверхностью* называется образ простой поверхности при локально топологическом ее отображении в пространство. Считают, что отображение  $f_1$  простой поверхности  $\Phi_1$  и отображение  $f_2$  простой поверхности  $\Phi_2$  определяют одну и ту же общую поверхность  $\Phi$ , если между точками поверхностей  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  может быть установлено топологическое соответствие, при котором образы соответствующих точек этих поверхностей на поверхности  $\Phi$  совпадают. В окрестности любой своей точки поверхность может быть задана уравнениями (9). Мы будем считать, что функции  $f_1(u, v)$ ,

$f_2(u, v)$ ,  $f_3(u, v)$  непрерывно дифференцируемы достаточное число раз. Если в точке  $M$  поверхности  $\Phi$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} & \frac{\partial f_2}{\partial u} \\ \frac{\partial f_1}{\partial v} & \frac{\partial f_2}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0, \quad (10)$$

то в некоторой окрестности точки  $M$  поверхность может быть задана уравнением

$$z = f(x, y). \quad (11)$$

Вместо уравнений (9) можно рассматривать векторное уравнение поверхности

$$\vec{r} = f_1(u, v)\vec{i} + f_2(u, v)\vec{j} + f_3(u, v)\vec{k} \quad (12)$$

или, короче,

$$\vec{r} = \vec{r}(u, v). \quad (13)$$

## О неявном задании линий и поверхностей

Пусть задано уравнение

$$F(x, y) = 0 \quad (14)$$

и на плоскости выбрана декартова прямоугольная система координат  $Oxy$ . Множество всех точек плоскости, координаты которых удовлетворяют уравнению (14), часто называют линией. Однако это множество не всегда является линией в смысле данного выше определения. Так, уравнение

$$x^2 - y^2 = 1$$

задает гиперболу, которая состоит из двух линий (ветвей), а уравнение

$$x^2 + y^2 + 1 = 0$$

не задает никакой линии.

Если функция  $F(x, y)$  непрерывно дифференцируема и в точке  $M$ , координаты которой удовлетворяют уравнению (14),

$$\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0,$$

то в некоторой  $\varepsilon$ -окрестности точки  $M$  множество всех точек,

координаты которых удовлетворяют уравнению (14), является элементарной линией, которая может быть задана уравнением (7).

Наряду с декартовыми прямоугольными координатами мы будем пользоваться также полярными координатами  $r$ ,  $\varphi$ . В этом случае линии мы будем задавать уравнением вида

$$F(r, \varphi) = 0. \quad (15)$$

Множество всех точек, координаты которых удовлетворяют уравнению

$$F(x, y, z) = 0, \quad (16)$$

часто называют поверхностью. Однако это множество не всегда является поверхностью в смысле данного выше определения.

Если функция  $F(x, y, z)$  непрерывно дифференцируема и в точке  $M$ , координаты которой удовлетворяют уравнению (16),

$$\frac{\partial F}{\partial z} \neq 0,$$

то в некоторой  $\varepsilon$ -окрестности точки  $M$  множество всех точек, координаты которых удовлетворяют уравнению (16), является элементарной поверхностью, которая может быть задана уравнением (11).

Линия может быть задана системой уравнений

$$\left. \begin{aligned} F(x, y, z) &= 0, \\ \Phi(x, y, z) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Однако и здесь следует иметь в виду, что множество всех точек, координаты которых удовлетворяют системе (17), не всегда является линией в смысле данного выше определения. Задание линий и поверхностей с помощью уравнений (14)—(17) называется *явным*.

## Вектор-функция скалярных аргументов

Пусть  $U$  — множество точек на прямой, плоскости или в пространстве. Говорят, что на множестве  $U$  задана *вектор-функция*, если с каждой его точкой  $M$  сопоставлен вектор  $\vec{r}(M)$ . Длина этого вектора является скалярной функцией  $r(M)$ .

Вектор  $\vec{a}$  называют *пределом* вектор-функции  $\vec{r}(M)$  в точке  $M_0$  и пишут

$$\lim_{M \rightarrow M_0} \vec{r}(M) = \vec{a},$$

если для любого положительного числа  $\epsilon$  найдется такое  $\delta > 0$ , что из неравенства  $|M_0 M| < \delta$  будет следовать

$$|\vec{r}(M) - \vec{a}| < \epsilon.$$

Вектор-функция  $\vec{r}(M)$  называется *непрерывной в точке  $M_0$* , если

$$\lim_{M \rightarrow M_0} \vec{r}(M) = \vec{r}(M_0).$$

Функция, непрерывная в каждой точке множества  $U$ , называется *непрерывной на множестве  $U$* .

Выберем в пространстве декартову прямоугольную систему координат  $Oxyz$ . Тогда вектор-функцию  $\vec{r}(M)$  можно представить в виде

$$\vec{r}(M) = x(M)\vec{i} + y(M)\vec{j} + z(M)\vec{k}.$$

Задание одной вектор-функции  $\vec{r}(M)$  равносильно заданию трех скалярных функций  $x(M)$ ,  $y(M)$  и  $z(M)$ .

Пусть  $U$  — множество точек на прямой. Если на этой прямой ввести декартову координату  $t$ , то вектор-функция, заданная на множестве  $U$ , является вектор-функцией одного скалярного аргумента  $\vec{r}(t)$ .

*Производной* вектор-функции  $\bar{r}(t)$  называется

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\bar{r}(t+h) - \bar{r}(t)}{h}.$$

Эта производная обозначается символом  $\frac{d\bar{r}}{dt}$  или  $\bar{r}'(t)$ .

*Дифференциалом* вектор-функции  $\bar{r}(t)$  называется вектор-функция

$$d\bar{r} = \bar{r}'(t) dt.$$

Производные высших порядков определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} \bar{r}''(t) &= (\bar{r}'(t))', \quad \bar{r}'''(t) = (\bar{r}''(t))', \quad \dots, \quad \bar{r}^{(n)}(t) = \\ &= (\bar{r}^{(n-1)}(t))'. \end{aligned}$$

Для  $n$  раз дифференцируемой вектор-функции  $\bar{r}(t)$  имеет место *формула Тейлора*

$$\begin{aligned} \bar{r}(t+\Delta t) &= \bar{r}(t) + \Delta t \bar{r}'(t) + \frac{(\Delta t)^2}{2!} \bar{r}''(t) + \dots + \\ &+ \frac{(\Delta t)^n}{n!} (\bar{r}^{(n)}(t) + \bar{\varepsilon}(t, \Delta t)), \end{aligned}$$

где

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \bar{\varepsilon}(t, \Delta t) = 0.$$

Будем откладывать значения вектор-функции  $\bar{r}(t)$  от фиксированной точки  $O$ , т. е. при каждом значении  $t$  построим направленный отрезок  $\overrightarrow{OM}$ , изображающий вектор  $\bar{r}(t)$ . Множество всех так построенных точек  $M$  называется *годографом вектор-функции*  $\bar{r}(t)$ . Если вектор-функция  $\bar{r}(t)$  определена и имеет производную  $\bar{r}'(t)$  на интервале  $(a, b)$ , причем ни при каком значении  $t \in (a, b)$  эта производная не



обращается в нуль, то годограф вектор-функции  $\bar{r}(t)$  является линией. Если в некоторой точке  $M(t_0)$

$$\bar{r}'(t_0) \neq 0,$$

то вектор  $\bar{r}'(t_0)$  коллинеарен касательной к годографу в точке  $M$ . Если

$$\bar{r}'(t_0) = \bar{r}''(t_0) = \dots = \bar{r}^{(k-1)}(t_0) = 0, \quad \bar{r}^{(k)}(t_0) \neq 0,$$

то касательная к годографу в точке  $M_0(t_0)$  коллинеарна вектору  $\bar{r}^{(k)}(t_0)$ .

Пусть  $U$  — множество точек на плоскости. Если на этой плоскости ввести декартову систему координат  $Ouv$ , то вектор-функция, заданная на множестве  $U$ , является вектор-функцией  $\bar{r}(u, v)$  двух скалярных аргументов  $u, v$ . Частные производные и полные дифференциалы функции  $\bar{r}(u, v)$  определяются следующим образом:

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial u} = \bar{r}_u = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\bar{r}(u+h, v) - \bar{r}(u, v)}{h},$$

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial v} = \bar{r}_v = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\bar{r}(u, v+h) - \bar{r}(u, v)}{h},$$

$$d\bar{r} = \bar{r}_u du + \bar{r}_v dv,$$

$$\frac{\partial^2 \bar{r}}{\partial u^2} = \bar{r}_{uu} = \frac{\partial}{\partial u} (\bar{r}_u),$$

$$\frac{\partial^2 \bar{r}}{\partial v^2} = \bar{r}_{vv} = \frac{\partial}{\partial v} (\bar{r}_v),$$

$$\frac{\partial^2 \bar{r}}{\partial u \partial v} = \bar{r}_{uv} = \bar{r}_{vu} = \frac{\partial}{\partial v} (\bar{r}_u) = \frac{\partial}{\partial u} (\bar{r}_v),$$

$$d^2 \bar{r} = \bar{r}_{uu} du^2 + 2\bar{r}_{uv} dudv + \bar{r}_{vv} dv^2 \text{ и т. д.}$$

Для  $n$  раз дифференцируемой вектор-функции  $\bar{r}(u, v)$  имеет место *формула Тейлора*

$$\begin{aligned} \bar{r}(u+\Delta u, v+\Delta v) = & \bar{r}(u, v) + d\bar{r}(u, v) + \frac{1}{2!} d^2\bar{r}(u, v) + \\ & + \dots + \frac{1}{n!} d^n\bar{r}(u, v) + (\Delta u^2 + \Delta v^2)^{\frac{n}{2}} \bar{\varepsilon}(u, v, du, dv), \end{aligned}$$

где

$$du = \Delta u, \quad dv = \Delta v$$

и

$$\lim_{(\Delta u^2 + \Delta v^2) \rightarrow 0} \bar{\varepsilon}(u, v, \Delta u, \Delta v) = 0.$$

Аналогично тому, как говорилось выше, для вектор-функции  $\bar{r}(u, v)$  также можно построить годограф. Если в некоторой точке  $M_0(u_0, v_0)$

$$\bar{r}_u(u_0, v_0) \nparallel \bar{r}_v(u_0, v_0), \quad (1)$$

т. е. векторы  $\bar{r}_u(u_0, v_0)$  и  $\bar{r}_v(u_0, v_0)$  неколлинеарны, то в окрестности этой точки годограф является элементарной поверхностью.

Мы всегда будем считать, что условие (1) выполнено.

1—5. Доказать, что если

$$\lim_{M \rightarrow M_0} \bar{r}_i(M) = \bar{a}_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad \lim_{M \rightarrow M_0} f(M) = \alpha,$$

то имеют место формулы:

$$(1) \quad \lim_{M \rightarrow M_0} (\bar{r}_1(M) \pm \bar{r}_2(M)) = \bar{a}_1 \pm \bar{a}_2;$$

$$(2) \quad \lim_{M \rightarrow M_0} (f(M) \bar{r}_1(M)) = \alpha \bar{a}_1;$$

$$(3) \quad \lim_{M \rightarrow M_0} (\bar{r}_1(M) \bar{r}_2(M)) = \bar{a}_1 \bar{a}_2;$$

$$(4) \quad \lim_{M \rightarrow M_0} [\bar{r}_1(M) \bar{r}_2(M)] = [\bar{a}_1 \bar{a}_2];$$

$$(5) \quad \lim_{M \rightarrow M_0} (\bar{r}_1(M) \bar{r}_2(M) \bar{r}_3(M)) = (\bar{a}_1 \bar{a}_2 \bar{a}_3).$$

6— Доказать, что если функции  $\bar{r}_i(M)$  и  $f(M)$  непрерывны в точке  $M_0$ , то в этой точке непрерывны следующие функции:

$$\begin{aligned} (6) \quad & \bar{r}_1(M) \pm \bar{r}_2(M); & (7) \quad & f(M) \bar{r}_1(M); \\ (8) \quad & \bar{r}_1(M) \bar{r}_2(M); & (9) \quad & [\bar{r}_1(M) \bar{r}_2(M)]; \\ (10) \quad & (\bar{r}_1(M) \bar{r}_2(M) \bar{r}_3(M)). \end{aligned}$$

11— Доказать, что если функции  $\bar{r}_i(t)$  и  $f(t)$  дифференцируемы, то имеют место следующие формулы:

$$\begin{aligned} (11) \quad & (\bar{r}_1(t) \pm \bar{r}_2(t))' = \bar{r}'_1(t) \pm \bar{r}'_2(t); \\ (12) \quad & (f(t) \bar{r}(t))' = f'(t) \bar{r}(t) + f(t) \bar{r}'(t); \\ (13) \quad & (\bar{r}_1(t) \bar{r}_2(t))' = \bar{r}'_1(t) \bar{r}_2(t) + \bar{r}_1(t) \bar{r}'_2(t); \\ (14) \quad & [\bar{r}_1(t) \bar{r}_2(t)]' = [\bar{r}'_1(t) \bar{r}_2(t)] + [\bar{r}_1(t) \bar{r}'_2(t)]; \\ (15) \quad & (\bar{r}_1(t) \bar{r}_2(t) \bar{r}_3(t))' = (\bar{r}'_1(t) \bar{r}_2(t) \bar{r}_3(t)) + \\ & + (\bar{r}_1(t) \bar{r}'_2(t) \bar{r}_3(t)) + (\bar{r}_1(t) \bar{r}_2(t) \bar{r}'_3(t)). \end{aligned}$$

16— Найти производные по  $t$  от следующих функций:  
22.

$$\begin{aligned} (16) \quad & \bar{r}^2; & (17) \quad \bar{r}'^2; \\ (18) \quad & [\bar{r}' \bar{r}'']; & (19) \quad (\bar{r}' \bar{r}'' \bar{r}'''); \\ (20) \quad & [[\bar{r}' \bar{r}''] \bar{r}''']; & (21) \quad \sqrt{\bar{r}^2}; \\ (22) \quad & \sqrt{[\bar{r} \bar{r}']^2}, \end{aligned}$$

где  $\bar{r} = \bar{r}(t)$ .

23— Найти частные производные первого и второго порядка от следующих функций:

$$(23) \quad \bar{r}^2; \quad (24) \quad [\bar{r}_u \bar{r}_v]; \quad (25) \quad (\bar{r} \bar{r}_u \bar{r}_v),$$

где  $\bar{r} = \bar{r}(u, v)$ .

26. Можно ли утверждать, что

а)  $|\bar{r}'| = |\bar{r}|'$ ;

б)  $\bar{r} \bar{r}' = r r'$ ?

27. Доказать равенство

$$dr = \text{пр}_{\bar{r}} d\bar{r}.$$

28. Используя результат предыдущей задачи, доказать биссекториальное свойство касательной к эллипсу: касательная к эллипсу в произвольной его точке  $M$  является биссектрисой угла, смежного с углом между фокальными радиусами точки касания.

29. Доказать биссекториальное свойство касательной к гиперболе (см. предыдущую задачу).

30. Отрезок постоянной длины скользит концами по линиям  $\bar{r} = \bar{r}(u)$  и  $\bar{\rho} = \bar{\rho}(v)$ . Найти направление касательной к линии, описываемой серединой отрезка.

31. Доказать, что если производная вектор-функции  $\bar{r} = \bar{r}(t)$  равна нулю при всех  $t$  из некоторого промежутка, то  $\bar{r} = \text{const}$  в этом промежутке. Верно ли обратное утверждение?

32. Доказать, что если  $\bar{r}_u = \bar{r}_v = \bar{0}$  в некоторой области изменения параметров  $u$  и  $v$ , то в этой области  $\bar{r} = \text{const}$ .

33. Доказать, что если в некотором интервале  $|\bar{r}| = \text{const}$ , то  $\bar{r} \perp \bar{r}'$ . Верно ли обратное?

34. Доказать, что если

$$|\bar{r}(u, v)| = \text{const}$$

в некоторой области изменения параметров  $u$  и  $v$ , то  $\bar{r} \perp \bar{r}_u$  и  $\bar{r} \perp \bar{r}_v$ .

35. Для того чтобы вектор  $\bar{r}(t)$  имел постоянное направление, необходимо и достаточно, чтобы в интервале изменения  $t$   $\bar{r}(t)$  и  $\bar{r}'(t)$  были коллинеарны. Доказать.
36. Для того чтобы вектор  $\bar{r}(u, v)$  имел постоянное направление, необходимо и достаточно, чтобы в некоторой области изменения параметров  $u$  и  $v$   $\bar{r} \parallel \bar{r}_u$  и  $\bar{r} \parallel \bar{r}_v$ . Доказать.
37. Для того чтобы вектор  $\bar{r}(t)$  был параллелен неизменной плоскости, необходимо и достаточно, чтобы в интервале изменения  $t$  выполнялось условие  $(\bar{r} \bar{r}' \bar{r}'') = 0$ . Доказать.
38. Векторная функция

$$\bar{e}(\varphi) = \cos \varphi \bar{i} + \sin \varphi \bar{j}$$

называется *векторной круговой функцией*.  
Доказать, что имеют место соотношения:

$$a) \bar{e}(\varphi + \alpha) = \bar{e}(\varphi) \cos \alpha + \bar{g}(\varphi) \sin \alpha;$$

$$б) \frac{d\bar{e}}{d\varphi} = \bar{g}, \quad \frac{d\bar{g}}{d\varphi} = -\bar{e},$$

$$\text{где } \bar{g}(\varphi) = \bar{e}\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right).$$

39. Вектор-функция  $\bar{r} = \bar{r}(t)$  определена на сегменте  $[t_1, t_2]$  и имеет на нем непрерывные производные  $\bar{r}', \bar{r}'', \bar{r}'''$ , которые при всех  $t \in [t_1, t_2]$  компланарны, но  $\bar{r}' \nparallel \bar{r}''$ . Доказать, что годограф вектор-функции  $\bar{r} = \bar{r}(t)$  есть плоская линия. Верно ли обратное?
40. Доказать, что если на некотором сегменте  $[t_1, t_2]$  вектор-функция  $\bar{r}(t)$  непрерывна вместе со своей производной  $\bar{r}'$ , причем  $\bar{r} \parallel \bar{r}'$ , но  $\bar{r}' \neq 0$  и  $\bar{r} \neq 0$ , то годограф вектор-функции  $\bar{r} = \bar{r}(t)$  есть отрезок прямой линии.

41. Доказать, что если на некотором сегменте  $[t_1, t_2]$  вектор-функция  $\bar{r} = \bar{r}(t)$  непрерывна вместе с производными  $\bar{r}'$  и  $\bar{r}''$ , которые отличны от нуля и коллинеарны при всех  $t \in [t_1, t_2]$ , то годографом вектор-функции  $\bar{r} = \bar{r}(t)$  является отрезок прямой линии.

42. Доказать, что годограф вектор-функции

$$\bar{r} = \bar{r}_0 + \bar{r}_1 t + \bar{r}_2 t^2,$$

где  $\bar{r}_0, \bar{r}_1, \bar{r}_2$  — постоянные векторы, есть парабола, если векторы  $\bar{r}_1$  и  $\bar{r}_2$  неколлинеарны. Что будет в случае коллинеарности векторов  $\bar{r}_1$  и  $\bar{r}_2$ ?

43. Доказать, что годограф вектор-функции

$$\bar{r} = \bar{r}_0 + \bar{r}_1 \cos t + \bar{r}_2 \sin t$$

есть эллипс, если  $\bar{r}_1$  и  $\bar{r}_2$  неколлинеарны. Что будет в случае их коллинеарности?

44. Доказать, что годограф вектор-функции

$$\bar{r} = \bar{r}_0 + \bar{r}_1 \operatorname{ch} t + \bar{r}_2 \operatorname{sh} t$$

есть гипербола, если векторы  $\bar{r}_1$  и  $\bar{r}_2$  неколлинеарны.

45. Для того чтобы годографом вектор-функции  $\bar{r}(u, v)$  была некоторая область плоскости, необходимо и достаточно, чтобы векторы  $\bar{r}_u$  и  $\bar{r}_v$  были параллельны некоторой фиксированной плоскости. Доказать.

- 46—49. Выяснить, что является годографом следующих вектор-функций:

$$(46) \quad \bar{r} = \bar{r}_0 + u \bar{r}_1 + u^2 \bar{r}_2 + v \bar{r}_3;$$

$$(47) \quad \bar{r} = \bar{r}_0 + \cos u \bar{r}_1 + \sin u \bar{r}_2 + v \bar{r}_3;$$

$$(48) \quad \bar{r} = \bar{r}_0 + \left(u + \frac{1}{u}\right) \bar{r}_1 + \left(u - \frac{1}{u}\right) \bar{r}_2 + v \bar{r}_3;$$

$$(49) \quad \bar{r} = \bar{r}_0 + u \cos v \bar{r}_1 + u \sin v \bar{r}_2 + u^2 \bar{r}_3,$$

где  $\vec{r}_0, \vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3$  — постоянные векторы, причем векторы  $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3$  некопланарны.

50. Найти линии, определяемые дифференциальными  
51. уравнениями:

$$(50) \quad \vec{r}' = [\vec{\omega} \vec{r}], \quad \text{где } \vec{\omega} = \text{const}; \quad (51) \quad \vec{r}' = [\vec{e} [\vec{r} \vec{e}]],$$

где  $\vec{e}$  — постоянный единичный вектор.

52. Доказать, что если в пространстве движутся две материальные точки, расстояние между которыми постоянно, то проекции скоростей этих точек на направление прямой, их соединяющей, равны.  
53. Доказать, что материальная точка под действием центральной силы описывает плоскую линию.

## Плоские линии

## § 1. Уравнения линии

54. Написать уравнение геометрического места точек, произведение расстояний которых до двух данных точек  $F_1$  и  $F_2$  ( $F_1F_2=2b$ ) есть величина постоянная, равная  $a^2$  (*овалы Кассини*).
55. Дана окружность диаметра  $OA=2a$  и касательная к ней в точке  $A$ . Через точку  $O$  проведен луч  $OC$  и на нем отложен отрезок  $OM$ , равный отрезку  $BC$ , заключенному между окружностью и касательной. Если луч  $OC$  вращается вокруг точки  $O$ , то точка  $M$  описывает линию, называемую *циссоидой Диоклеса*. Составить уравнение линии.
56. Произвольный луч  $OE$  пересекает в точках  $D$  и  $E$  окружность

$$x^2 + \left(y - \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4}$$

и касательную к ней, проходящую через точку  $C$ , диаметрально противоположную  $O$ . Через точки  $D$  и  $E$  проведены прямые, параллельные соответственно осям  $Ox$  и  $Oy$ , до пересечения в точке  $M$ . Составить уравнение геометрического места точек  $M$  (*локон Аньези*).

57. Точка  $M$  равномерно движется по прямой  $ON$ , равномерно вращающейся вокруг точки  $O$ . Составить уравнение траектории точки  $M$  (*спираль Архимеда*).
58. Прямая  $OL$  вращается около точки  $O$  с постоянной угловой скоростью  $\omega$ . Точка  $M$  движется по прямой  $OL$  со скоростью, пропорциональной расстоянию  $OM$ . Составить уравнение линии, описываемой точкой  $M$  (*логарифмическая спираль*).
59. Отрезок постоянной длины  $2a$  своими концами  $A$  и  $B$  скользит по осям прямоугольной системы координат. Из начала координат на отрезок  $AB$  опущен перпендикуляр  $OM$ . Составить уравнение



- геометрического места точек  $M$  (*четырёхлепестковая роза*).
60. На окружности радиуса  $a$  дана точка  $O$ , вокруг которой вращается луч, пересекающий окружность в переменной точке  $A$ . На этом луче по обе стороны от точки  $A$  откладываются отрезки  $AM_1 = AM_2 = 2a$ . Написать уравнение линии, описываемой точками  $M_1$  и  $M_2$  (*кардиоида*).
61. На произвольном луче  $OA$  от точки  $A$  пересечения его с окружностью  $r = 2a \cos \varphi$  по обе стороны отложены отрезки  $AM_1 = AM_2 = 2b$ . Составить уравнение геометрического места точек  $M_1$  и  $M_2$  (*улитка Паскаля*). Какая линия получается при  $a = b$ ?
62. Прямая  $x = a$  пересекает ось  $Ox$  в точке  $A$ , произвольный луч  $OB$  — в точке  $B$ . На луче по обе стороны от точки  $B$  отложены отрезки  $BM_1$  и  $BM_2$ , равные  $AB$ . Написать уравнение геометрического места точек  $M_1$  и  $M_2$  (*строфоида*).
63. Через точку  $E \left( a, \frac{\pi}{2} \right)$ , заданную полярными координатами, проведена прямая, параллельная полярной оси. Произвольный луч  $OK$  пересекает эту прямую в точке  $K$ . На луче по обе стороны от точки  $K$  отложены отрезки  $KM_1 = KM_2 = l$ . Составить уравнение геометрического места точек  $M_1$  и  $M_2$  (*конхоида Никомеда*).
64. Концы отрезка  $AB = a$  скользят по осям прямоугольной системы координат. Прямые  $AC$  и  $BC$ , параллельные осям координат, пересекаются в точке  $C$ , из которой на  $AB$  опущен перпендикуляр  $CM$ . Написать уравнение геометрического места точек  $M$  (*астроида*).
65. Составить параметрические уравнения *развертки окружности*, т. е. траектории конца туго натянутой нити, сматываемой с неподвижной круглой плоской катушки.
66. Круг радиуса  $a$  катится по прямой без скольжения. Составить параметрические уравнения линии, описанной точкой  $M$  граничной окружности круга (*циклоида*).

67. Круг радиуса  $a$  катится по прямой без скольжения. Составить параметрические уравнения линии, описываемой точкой  $M$ , жестко связанной с кругом и находящейся на расстоянии  $d$  от его центра (при  $d < a$  — *укороченная циклоида*, при  $d > a$  — *удлиненная циклоида*).
68. Круг радиуса  $r$  катится без скольжения по кругу радиуса  $R$ , оставаясь вне его. Составить параметрические уравнения линии, описываемой точкой  $M$  граничной окружности катящегося круга (*эпициклоида*). Какая линия получается при  $r = R$ ?
69. Круг радиуса  $r$  катится без скольжения по кругу радиуса  $R > r$  внутри его. Составить параметрические уравнения линии (*гипоциклоида*), описанной точкой  $M$  граничной окружности катящегося круга. Какая линия получается при  $R = 4r$ ? при  $R = 2r$ ?
70. Пусть дана линия  
 $x = t^3 - 2t, \quad y = t^2 - 2.$   
Проверить, лежат ли на ней точки  $M(-1, -1)$ ,  $N(4, 2)$ ,  $P(1, 2)$ . Найти точки пересечения линии с осями координат. Найти точку линии с минимальной ординатой. Записать неявное уравнение линии.
71. Составить параметрические уравнения окружности  $x^2 + y^2 - 2ax = 0$ ,  
приняв за параметр:  
а) угловой коэффициент прямой, проходящей через начало координат и точку линии;  
б) угол между осью  $Ox$  и прямой, проходящей через центр окружности.
- 72—  
79. Указать, какие линии изображаются параметрическими уравнениями:
- (72)  $x = t^2 - t + 1, \quad y = t^2 + t + 1;$
- (73)  $x = t^2 - 2t + 3, \quad y = t^2 - 2t + 1;$
- (74)  $x = a \sin^2 t, \quad y = b \cos^2 t;$

$$(75) \quad x = \frac{a}{\sqrt{1+t^2}}, \quad y = \frac{at}{\sqrt{1+t^2}};$$

$$(76) \quad x = 3^t + 3^{-t}, \quad y = 3^t - 3^{-t};$$

$$(77) \quad x = \frac{a-t}{a+t}, \quad y = \frac{t}{a+t};$$

$$(78) \quad x = a \ln t, \quad y = \frac{a}{2} \left( t + \frac{1}{t} \right);$$

$$(79) \quad x = a + R \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad y = b + R \frac{2t}{1+t^2}.$$

80. Параметрические уравнения гиперболы можно взять в виде

$$x = \frac{a}{2} \left( t + \frac{1}{t} \right), \quad y = \frac{b}{2} \left( t - \frac{1}{t} \right).$$

Как движется точка по гиперболе, когда параметр  $t$  растет от  $-\infty$  до  $\infty$ ? Какое преобразование параметра нужно сделать, чтобы параметрические уравнения гиперболы приняли вид

$$x = a \operatorname{ch} \varphi, \quad y = b \operatorname{sh} \varphi?$$

81. Показать, что

$$x = a \frac{1+t^2}{1-t^2}, \quad y = b \frac{2t}{1-t^2}$$

параметрические уравнения гиперболы. Как движется точка по гиперболе при изменении параметра в пределах  $-\infty < t < \infty$ ,  $t \neq \pm 1$ ?

82. Показать, что уравнения

$$x = a \cos \theta, \quad y = b \sin \theta$$

и

$$x = a \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad y = b \frac{2t}{1+t^2}$$

представляют одну и ту же линию. Как движется

точка по линии, когда параметр  $t$  растёт от  $-\infty$  до  $\infty$ ?

- 83— Указать, какие линии задаются уравнениями в полярных координатах:

$$(83) \quad r=4; \quad (84) \quad \varphi=\frac{\pi}{3};$$

$$(85) \quad r=2a \cos \varphi; \quad (86) \quad r=\frac{a}{\cos \varphi};$$

$$(87) \quad r=\frac{b}{\sin \varphi}; \quad (88) \quad r=\frac{16}{5-3 \cos \varphi};$$

$$(89) \quad r=\frac{16}{3-5 \cos \varphi}; \quad (90) \quad r=\frac{2}{1-\cos \varphi};$$

$$(91) \quad r^2 \cos 2\varphi=a^2; \quad (92) \quad r=b \sin \varphi;$$

$$(93) \quad r=\sec^2 \frac{\varphi}{2}; \quad (94) \quad r=\operatorname{cosec}^2 \frac{\varphi}{2}.$$

95. Линии, декартовы координаты точек которых могут быть выражены рациональными функциями некоторого параметра, называются *уникурсальными*. Показать, что линия  $C$ , уравнение которой в декартовых координатах имеет вид

$$\varphi_n(x, y) + \varphi_{n-1}(x, y) = 0,$$

где  $\varphi_p(x, y)$  — однородный полином степени  $p$ , есть уникурсальная.

- 96— Показать, что линии являются уникурсальными и  
100. записать их параметрические уравнения:

$$(96) \quad x^2+y^2-2ax=0; \quad (97) \quad x^3+y^3-3axy=0;$$

$$(98) \quad (x^2+y^2)x-2ay^2=0; \quad (99) \quad r=a(1+\cos \varphi);$$

$$(100) \quad (x^2+y^2)x+a(x^2-y^2)=0.$$

101. Показать, что линия, уравнение которой в полярных координатах имеет вид

$$r = f(\sin \varphi, \cos \varphi),$$

где  $f$  — рациональная функция, есть уникурсальная линия.

## § 2. Касательная и нормаль

Уравнения касательных к линиям, заданным уравнениями (5) — (7), (14) введения, имеют соответственно вид:

$$\bar{\rho} = \bar{r} + \lambda \bar{r}',$$

$$\frac{X-x}{x'} = \frac{Y-y}{y'},$$

$$Y-y = \varphi'(x)(X-x),$$

$$(X-x)F_x + (Y-y)F_y = 0,$$

где  $X, Y$  — текущие координаты точки на касательной,  $\bar{\rho}$  — радиус-вектор этой точки,  $x, y$  — координаты точки касания.

Уравнения нормалей соответственно имеют вид:

$$(\bar{\rho} - \bar{r})\bar{r}' = 0,$$

$$(X-x)x' + (Y-y)y' = 0,$$

$$X-x + (Y-y)\varphi'(x) = 0,$$

$$\frac{X-x}{F_x} = \frac{Y-y}{F_y}.$$

Если в точке касания

$$\bar{r}'(t) = \bar{r}''(t) = \dots = \bar{r}^{(k-1)}(t) = 0, \quad \bar{r}^{(k)}(t) \neq 0,$$

то касательная задается уравнением

$$\bar{\rho} = \bar{r} + \lambda \bar{r}^{(k)}.$$

Если в общей точке двух линий

$$\bar{r}_1 = \bar{r}_1(s), \quad \bar{r}_2 = \bar{r}_2(s)$$

при  $s = s_0$

$$\bar{r}_1 = \bar{r}_2, \quad \frac{d\bar{r}_1}{ds} = \frac{d\bar{r}_2}{ds}, \quad \dots, \quad \frac{d^k \bar{r}_1}{ds^k} = \frac{d^k \bar{r}_2}{ds^k},$$

$$\frac{d^{k+1} \bar{r}_1}{ds^{k+1}} \neq \frac{d^{k+1} \bar{r}_2}{ds^{k+1}},$$

то эти линии в указанной точке имеют *соприкосновение  $k$ -го порядка*.

Если одна линия дана в параметрическом виде

$$x = x(t), \quad y = y(t),$$

а другая — в неявном виде

$$F(x, y) = 0,$$

и в точке, принадлежащей обеим линиям,

$$F[x(t), y(t)] = 0, \quad \frac{dF}{dt} = 0, \quad \dots, \quad \frac{d^k F}{dt^k} = 0,$$

$$\frac{d^{k+1} F}{dt^{k+1}} \neq 0,$$

то линии имеют *соприкосновение  $k$ -го порядка*.

**102—** Составить уравнения касательной и нормали  
**119.** к следующим линиям:

(102)  $y = x^2 + 4x + 3$  в точках  $A, B, C$  с абсциссами  $-1, 0, 1$ ;

(103)  $y = x^3$  в точках  $A, B$  с абсциссами  $0$  и  $1$ ;

(104)  $y = \sin x$  в точках  $A, B, C$  с абсциссами  $0, \frac{\pi}{2}, \pi$ ;

(105)  $y = \operatorname{tg} x$  в точках  $A, B$  с абсциссами  $0, \frac{\pi}{4}$ ;

(106)  $x = t^3 - 2t, \quad y = t^2 + 1$  в точке  $A (t = 1)$ ;

(107)  $x = a \cos^3 t, \quad y = a \sin^3 t$ ;

$$(108) \quad x=a(t-\sin t), \quad y=a(1-\cos t);$$

$$(109) \quad x=\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{4}t^4, \quad y=\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{3}t^3 \text{ в точке } A \ (t=0);$$

$$(110) \quad x=a \cos t, \quad y=b \sin t;$$

$$(111) \quad x=\frac{a}{2}\left(1+\frac{1}{t}\right), \quad y=\frac{b}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right);$$

$$(112) \quad x^3+y^3-3axy=0 \text{ в точке } A\left(\frac{3a}{2}, \frac{3a}{2}\right);$$

$$(113) \quad (x^2+y^2)x-ay^2=0 \text{ в точке } A\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right);$$

$$(114) \quad (x^2+y^2)^2-2a^2(x^2-y^2)=C;$$

$$(115) \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1; \quad (116) \quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1;$$

$$(117) \quad y^2=2px; \quad (118) \quad r=a\varphi;$$

$$(119) \quad r=2a \cos \varphi \text{ в точке } A, \text{ для которой } \varphi=\frac{\pi}{4}.$$

120. В какой точке касательная к параболе  $y=x^2$  образует с осью  $Ox$  угол в  $45^\circ$ ?

121. Может ли угол наклона касательной в некоторой точке линии  $y=x^3$  к оси  $Ox$  равняться  $\frac{3}{4}\pi$ ?

122. Показать, что угол  $\varphi$  наклона касательной в произвольной точке линии

$$y=x^5+2x^3+x-1$$

к оси  $Ox$  заключен в пределах  $\frac{\pi}{4} \leq \varphi < \frac{\pi}{2}$ .

123. Найти касательную к параболе  $y=x^2$ , параллельную прямой

$$y=4x-5.$$

124. В какой точке касательная к параболе

$$y=x^2-6x+5$$

перпендикулярна прямой

$$x - 2y + 8 = 0?$$

125. В уравнении параболы

$$y = x^2 + bx + c$$

постоянные  $b$  и  $c$  определить так, чтобы парабола касалась прямой

$$y = 3x - 5$$

в точке с абсциссой  $x = 2$ .

126. В уравнении параболы

$$y = ax^2 + bx + c$$

постоянные  $a$ ,  $b$ ,  $c$  определить так, чтобы парабола касалась прямой

$$y = 4x - 1$$

в точке с абсциссой  $x = 1$  и проходила через точку  $A(0, 1)$ .

127. Написать уравнения касательной и нормали к линии

$$y = x^3 + 3x^2 - 1$$

в точке ее пересечения с параболой

$$y = 3x^2.$$

128. Написать уравнения касательных к линии

$$y = \frac{1}{1 + x^2}$$

в точках ее пересечения с гиперболой

$$y = \frac{1}{x + 1}.$$

129. В каких точках с одной и той же абсциссой касательные к линиям

$$y = x^2 \text{ и } y = x^3$$

параллельны?



130. Доказать, что только одна нормаль линии  $y=x^n$  ( $n$  — целое положительное число) проходит через начало координат.

131. Найти касательные к линии

$$x=t^2-1, \quad y=t^3+1,$$

параллельные прямой

$$2x-y+3=0.$$

132. Найти касательные к линии

$$x=t^3, \quad y=t^2,$$

проходящие через точку  $M(-7, -1)$ .

133. Показать, что линии

$$y=a \sin \frac{x}{a}, \quad y=a \operatorname{tg} \frac{x}{a}, \quad y=a \ln \frac{x}{a}$$

пересекают ось  $Ox$  под одинаковым углом независимо от величины  $a$ .

134. Найти наиболее удаленные от начала координат касательные к астроиде

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}.$$

135. Доказать, что для любой точки  $M$  равносторонней гиперболы

$$x^2 - y^2 = a^2$$

отрезок нормали от точки  $M$  до точки пересечения с осью  $Ox$  равен отрезку  $OM$ .

136. Доказать, что все нормали к развертке окружности

$$x=a(\cos t + t \sin t), \quad y=a(\sin t - t \cos t)$$

одинаково удалены от начала координат.

137. Показать, что если все нормали плоской линии проходят через фиксированную точку, то линия есть окружность или некоторая ее часть.

- 138— Найти точки пересечения и углы, под которыми

143. пересекаются следующие линии:

$$(138) \quad y^2=4x, \quad x^2=4y;$$

$$(139) \quad x^2+y^2=9, \quad x^2+y^2-6x=9;$$

$$(140) \quad x^2+y^2+2x=7, \quad y^2=4x;$$

$$(141) \quad x^2+y^2=8, \quad y^2=2x;$$

$$(142) \quad x^2+y^2=8x, \quad y^2(2-x)=x^3;$$

$$(143) \quad y=\sin x, \quad y=\cos x.$$

**144—** Доказать, что следующие линии пересекаются под прямым углом:

$$(144) \quad y=x-x^2, \quad y=x^2-x;$$

$$(145) \quad y^2=2ax+a^2, \quad y^2=-2bx+b^2;$$

$$(146) \quad x^2-y^2=a, \quad xy=b.$$

**147.** Найти угол пересечения двух парабол с общей осью, если фокус каждой из них помещается в вершине другой.

**148.** Показать, что тангенс угла, образованного касательной к линии  $r=r(\varphi)$  с радиус-вектором, проведенным в точку касания, определяется по формуле

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{r}{\frac{dr}{d\varphi}}.$$

**149.** Показать, что угол между касательной и радиус-вектором в произвольной точке кардиоиды равен половине полярного угла.

**150.** Доказать, что касательные к кардиоиде

$$r=2a(1-\cos \varphi),$$

проведенные в концах хорды, проходящей через полюс, взаимно перпендикулярны.

**151.** Доказать, что угол между касательной к спирали Архимеда  $r=a\varphi$  и радиус-вектором, проведенным из полюса в точку касания, стремится к  $90^\circ$  при  $\varphi \rightarrow \infty$ .

152. Доказать, что угол  $\mu$ , составленный касательной в произвольной точке логарифмической спирали

$$r = ca^{\varphi}, \quad a > 0,$$

с радиус-вектором точки касания, постоянный.

153. Доказать, что только логарифмические спирали и окружности обладают свойством, указанным в задаче 152.

154. Доказать, что угол  $\mu$ , составленный касательной в произвольной точке лемнискаты Бернулли

$$r^2 = 2a^2 \cos 2\varphi$$

с радиус-вектором точки касания, равен  $2\varphi + \frac{\pi}{2}$ ,

где  $\varphi$  — полярный угол точки касания. На основе этого свойства указать способ построения касательной и нормали в произвольной точке лемнискаты.

155. Пусть даны две линии в полярных координатах:

$$r = r(\varphi) \text{ и } r_1 = r_1(\varphi).$$

Показать, что они пересекаются под прямым углом, если

$$rr_1 + r'r'_1 = 0.$$

- 156— Доказать, что следующие линии пересекаются под  
158. прямым углом:

$$(156) \quad r = ae^{\varphi}, \quad r = be^{-\varphi};$$

$$(157) \quad r = a(1 + \cos \varphi), \quad r = a(1 - \cos \varphi);$$

$$(158) \quad r = a \sec^2 \frac{\varphi}{2}, \quad r = a \operatorname{cosec}^2 \frac{\varphi}{2}.$$

159. Пусть касательная к линии  $y = y(x)$  в точке  $M$  пересекает ось  $Ox$  в точке  $T$ , а нормаль — в точке  $N$ , и пусть  $P$  — проекция точки  $M$  на ось  $Ox$ . Доказать, что длины касательной  $MT$ , нормали  $MN$ , подкасательной  $PT$  и поднормали  $PN$  выражаются формулами:

$$MT = \left| \frac{y}{y'} \right| \sqrt{1+y'^2}, \quad MN = |y| \sqrt{1+y'^2},$$

$$PT = \left| \frac{y}{y'} \right|, \quad PN = |yy'|.$$

- 160.** Найти длины касательной, подкасательной, нормали, поднормали линий:

(160)  $y = \operatorname{tg} x$  в точке  $M$  с абсциссой  $\frac{\pi}{4}$ ;

(161)  $y = \frac{1}{2} (e^x + e^{-x})$  в произвольной точке.

- 162.** Найти линии, у которых длина поднормали постоянна и равна  $k$ .

- 163.** Найти линии, у которых длина подкасательной постоянна и равна  $k$ .

- 164.** Показать, что единственными линиями, у которых длина нормали есть величина постоянная, являются окружности с центрами на оси  $Ox$ .

- 165.** Найти линии, у которых длина касательной есть постоянная величина  $a$ .

- 166.** Показать, что площадь  $S$ , ограниченная трактрисой (см. ответ задачи 165) и осью абсцисс, конечна.

- 167.** Пусть касательная к линии  $r = r(\varphi)$  в точке  $M$  пересекает прямую, проходящую через полюс и перпендикулярную к радиус-вектору точки касания, в точке  $T$ , а нормаль — в точке  $N$ . Доказать, что длины полярной касательной  $MT$ , полярной нормали  $MN$ , полярной подкасательной  $OT$  и полярной поднормали  $ON$  выражаются формулами:

$$MT = \left| \frac{r}{r'} \right| \sqrt{r^2 + r'^2}, \quad MN = \sqrt{r^2 + r'^2},$$

$$OT = \frac{r^2}{|r'|}, \quad ON = |r'|.$$

- 168.** Найти линии, у которых длина полярной подкасательной постоянна и равна  $k$ .

- 169.** Найти линии, у которых длина полярной поднормали постоянна.

170. Найти линии, у которых длина полярной нормали постоянна и равна  $k$ .
171. Через фокус параболы проведена хорда, перпендикулярная ее оси. Доказать, что касательные к параболе, проведенные в точках пересечения этой хорды с параболой, взаимно перпендикулярны.
172. Доказать, что касательная к линии

$$x=a(1-\cos t), \quad y=a(1-\sin t)$$

образует вместе с осями координат треугольник, периметр которого не зависит от точки касания.

173. Показать, что касательная к циклоиде в произвольной точке проходит через высшую точку производящего круга, а нормаль — через низшую. Пользуясь этим свойством, указать способ построения касательной и нормали в любой точке циклоиды.
174. Показать, что проекция ординаты произвольной точки цепной линии

$$y=a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$$

на нормаль в этой точке является величиной постоянной, равной параметру  $a$  цепной линии. Указать следующий из этого свойства простой способ построения касательной и нормали цепной линии в произвольной точке.

175. Доказать следующий способ построения касательной к цепной линии: на ординате  $MN$  точки  $M$ , как на диаметре, строим полуокружность, обращенную выпуклостью к оси ординат; находим на этой полуокружности точку  $P$ , такую, что  $NP=a$ ; прямая  $MP$  — касательная к цепной линии в точке  $M$ .
176. Показать, что касательная в произвольной точке  $M_0(x_0, y_0)$  цепной линии

$$y=a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$$

параллельна одной из касательных, проведенных из точки  $T$  оси  $Oy$ , ордината которой  $y_0$ , к окружности радиуса  $a$  с центром в начале координат.

177. Показать, что касательная к цепной линии в точке  $P(x_0, y_0)$  перпендикулярна прямой  $AK$ , где  $A$  — вершина цепной линии, а  $K$  — точка на оси  $Ox$ , находящаяся по ту же сторону от оси ординат, что и точка  $P$ , и  $AK = y_0$ . Получить отсюда геометрический способ построения касательной.
178. Доказать, что длина отрезка касательной к астрониде

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}},$$

заключенного между осями координат, равна  $a$ .

179. Показать, что касательные к лемнискате Бернулли  $r^2 = 2a^2 \cos 2\varphi$ ,

проведенные в концах хорды, проходящей через полюс полярной системы координат, параллельны.

180. Доказать, что каждая касательная пересекает астроида в двух точках, касательные в которых пересекаются в точке, лежащей на описанной около астроида окружности.

181. Если на всех нормалях линии  $C$  отложить по одну сторону от нее постоянный отрезок  $a$ , то геометрическое место концов таких отрезков образует новую линию  $C^*$ , которая называется *параллельной* по отношению к данной.

Доказать, что нормаль линии  $C$  будет также нормалью линии  $C^*$ .

182. Доказать, что для того, чтобы две линии в общей точке имели соприкосновение порядка не ниже первого, необходимо и достаточно, чтобы они имели общую касательную.

183. Доказать, что линия

$$y = e^{hx} \sin mx$$

касается каждой из линий

$$y = e^{hx} \text{ и } y = -e^{hx}$$

во всех общих с ними точках.

184. Найти порядок соприкосновения в начале координат следующих линий:

(184)  $y = \sin x$  и  $y = \operatorname{tg} x$ ;

(185)  $y = x^3$  и  $y = x \sin x$ .

186. Доказать, что линии

$$y = \sin x \text{ и } y = x^4 - \frac{1}{6}x^3 + x$$

имеют в начале координат соприкосновение третьего порядка.

187. Выяснить, какой порядок соприкосновения имеют линии

$$x^2 + y^2 - 6x - 6y + 10 = 0 \text{ и } \sqrt{x} + \sqrt{y} - 2 = 0$$

в точке  $A(1, 1)$ .

188. Найти уравнение параболы вида

$$y = x^2 + ax + b,$$

касающейся окружности

$$x^2 + y^2 = 2$$

в точке  $M(1, 1)$ .

189. Найти уравнение окружности, имеющей в начале координат с параболой

$$y = x^2$$

соприкосновение второго порядка.

190. Доказать, что линия

$$(x^2 - 3y^2)x - 3(x^2 + y^2) = 0$$

касается окружности

$$x^2 + y^2 = 9$$

в трех равноотстоящих одна от другой точках. Найти эти точки.

191. Составить уравнение параболы, имеющей с линией

$$y = \ln x$$

в точке  $(1, 0)$  наивысший порядок соприкосновения.

192. Найти гиперболу, касающуюся вершиной линии

$$y = 1 - \cos x$$

в начале координат и имеющую наивысший порядок соприкосновения.

193. Найти линию

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n,$$

имеющую с данной линией  $y = f(x)$  в точке  $A(0, f(0))$  соприкосновение  $n$ -го порядка.

194. Найти уравнения эллипса, гиперболы и параболы, вершины которых совпадают с вершиной  $A(\pi R, 2R)$  циклоиды

$$x = R(t - \sin t), \quad y = R(1 - \cos t)$$

и которые имеют с циклоидой наивысший порядок соприкосновения.

### § 3. Асимптоты. Особые точки. Исследование и построение линий

Если линия

$$x = x(t), \quad y = y(t) \tag{1}$$

допускает асимптоту при  $t \rightarrow t_0$ , уравнение которой

$$Y = kX + b,$$

то

$$k = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{y(t)}{x(t)}, \quad b = \lim_{t \rightarrow t_0} (y(t) - kx(t)).$$

Если линия (1) допускает вертикальную асимптоту, то уравнение последней имеет вид

$$x = a,$$

$$\text{где } a = \lim_{t \rightarrow t_0} x(t), \quad \lim_{t \rightarrow t_0} y(t) = \infty.$$



Точка  $M$  линии называется *обыкновенной*, если в окрестности этой точки линия может быть задана уравнением

$$\bar{r} = \bar{r}(t),$$

где функция  $\bar{r}(t)$  непрерывно дифференцируема, и в точке  $M$   $\bar{r}' \neq 0$ . В противном случае точка называется *особой*.

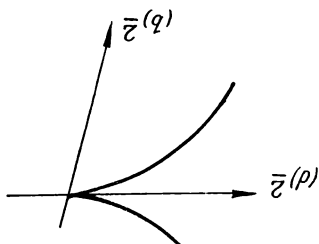


Рис. 1

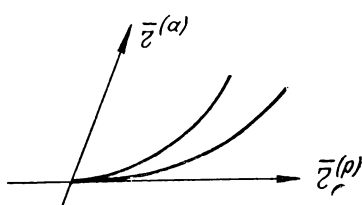


Рис. 2

Пусть  $\bar{r}^{(p)}$  — первая отличная от нуля производная в точке  $M$  и  $\bar{r}^{(q)}$  — первая из производных, неколлинеарных вектору  $\bar{r}^{(p)}$ . Тогда возможны следующие случаи:

- 1)  $p$  — нечетное,  $q$  — четное;
- 2)  $p$  — нечетное,  $q$  — нечетное;
- 3)  $p$  — четное,  $q$  — нечетное;
- 4)  $p$  — четное,  $q$  — четное.

В первом случае линия в окрестности точки  $M$  имеет такой же вид, как и в окрестности обыкновенной точки. Во втором случае точка  $M$  является *точкой перегиба*. В третьем случае точка  $M$  называется *точкой возврата первого рода*. В ее окрестности линия ведет себя так, как показано на рис. 1. В четвертом случае точка  $M$  называется *точкой возврата второго рода*. В ее окрестности линия имеет такой вид, как на рис. 2.

Точка линии, заданной уравнением

$$F(x, y) = 0, \tag{2}$$

называется *обыкновенной*, если в ее окрестности линия может быть представлена уравнением  $y=f(x)$ . В противном случае точка линии (2) называется *особой*. Особыми могут быть только те точки, в которых

$$F_x(x, y)=0, \quad F_y(x, y)=0.$$

Особая точка  $M$  линии (2) называется *двойной особой точкой*, если в ней по крайней мере одна из вторых частных производных от функции  $F(x, y)$  отлична от нуля.

Если через двойную особую точку  $M$  проходит элементарная линия, принадлежащая линии (2), и в этой точке  $F_{yy} \neq 0$ , то угловой коэффициент  $k$  касательной к этой элементарной линии определяется из уравнения

$$F_{xx} + 2F_{xy}k + F_{yy}k^2 = 0.$$

Если в двойной особой точке выполняется условие

$$F_{xy}^2 - F_{xx}F_{yy} > 0,$$

то в окрестности этой точки можно выделить две элементарные линии, проходящие через нее. Такая точка называется *точкой самопересечения*.

Если в точке  $M$

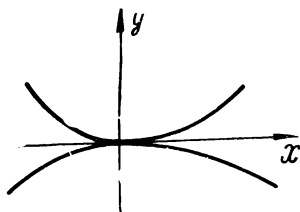
$$F_{xy}^2 - F_{xx}F_{yy} < 0,$$

то в некоторой ее окрестности, кроме самой этой точки, не существует других точек, удовлетворяющих уравнению (2). Такая точка называется *изолированной*.

Если в точке  $M$

$$F_{xy}^2 - F_{xx}F_{yy} = 0,$$

то она может быть точкой возврата первого или второго рода или *точкой самоприкосновения*. В последнем случае в некоторой окрестности точки линия имеет вид такой, как на рис. 3.



Рис

Если в особой точке  $M$  все частные производные от функции  $F(x, y)$  до  $(k-1)$ -го порядка включительно обращаются в нуль, а среди производных  $k$ -го порядка есть хотя бы одна отличная от нуля, то  $M$  называется *особой точкой  $k$ -го порядка*. Исследовать линию — значит выявить совокупность важнейших свойств линии, позволяющих достаточно точно построить ее график. К важнейшим свойствам можно отнести наличие или отсутствие особых точек, точек перегиба, асимптот, точек самопересечения, точек, в которых касательные параллельны осям координат и в которых линия пересекает оси координат.

**195—** Найти асимптоты линий, заданных уравнениями  
**200.** в явном виде:

$$\begin{aligned} (195) \quad y &= \frac{2}{x-3}; & (196) \quad y &= \frac{5}{x^2-16}; \\ (197) \quad y &= \frac{a^3}{a^2+x^2}; & (198) \quad y &= \frac{x^2-4x+7}{x}; \\ (199) \quad y &= \frac{x^2}{x+2}; & (200) \quad y &= \frac{x^3+1}{x}. \end{aligned}$$

**201—** Найти асимптоты линий, заданных уравнениями  
**203.** в параметрическом виде:

$$\begin{aligned} (201) \quad x &= \frac{2t}{(t-1)(t-2)}, \quad y = \frac{t^2}{(t-1)(t-3)}; \\ (202) \quad x &= \frac{2t-1}{t^2-1}, \quad y = \frac{t^2}{t-1}; \\ (203) \quad x &= \frac{t^2}{t-1}, \quad y = \frac{t}{t^2-1}. \end{aligned}$$

**204—** Найти асимптоты линий, заданных неявными урав-  
**206.** нениями:

$$\begin{aligned} (204) \quad 9x^2+4y^2 &= x^2y^2; \\ (205) \quad (x^2-4)y^2 &= x^4; \\ (206) \quad a^2x^2 &= (x^2+y^2)y^2. \end{aligned}$$

207. Найти асимптоты линий, заданных уравнениями  
 208. в полярных координатах:

$$(207) \quad r = \frac{a}{\sin \varphi} + l \text{ (конхоида Никомеда);}$$

$$(208) \quad r = \frac{2a \sin^2 \varphi}{\cos \varphi} \text{ (циссоида Диоклеса).}$$

209. Показать, что если существует предельное положение касательных к линии, когда точка касания стремится по линии в бесконечность, то это предельное положение есть асимптота.

- 210— Найти асимптоты линий, исходя из определения,  
 212. приведенного в задаче 209:

$$(210) \quad x^3 + y^3 - 3axy = 0 \text{ (декартов лист);}$$

$$(211) \quad y^3 + 3y^2 - x^2 = 0;$$

$$(212) \quad (2a - x)y^2 = x(x - a)^2 \text{ (строфоида).}$$

213. Предположим, что в уравнении алгебраической линии  $n$ -го порядка выделено произведение  $n$  линейных относительно  $x$  и  $y$  множителей, группа же остальных членов содержит  $x$  и  $y$  в степени не выше  $n-2$ , так что уравнение линии может быть написано в виде

$$(y - a_1x - b_1)(y - a_2x - b_2) \dots (y - a_nx - b_n) + b_{n-2}(x, y) = 0.$$

Показать, что в таком случае каждое из уравнений  
 $y - a_ix - b_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$

будет изображать одну из асимптот данной линии.

214. Найти асимптоты линии

$$xy(x^2 - y^2) + a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a = 0.$$

- 215— Найти особые точки линий:

222.

$$(215) \quad y^2 = x^3 + x^2;$$

$$(216) \quad x^2 = y^2 + x^4;$$

$$(217) \quad y^2 = x^3 - x^2;$$

$$(218) \quad y^2(x^2 - 9) = x^4;$$

$$(219) \quad y^2 = x(x-3)^2; \quad (220) \quad x^2 = y(y-2)^2;$$

$$(221) \quad x^2 y^2 = x^2 + y^2; \quad (222) \quad 4y^2 = x^5 + 5x^4.$$

**223—** Найти особые точки и написать уравнения касательных в них для следующих линий:

$$(223) \quad (x^2 + y^2)x - 2ay^2 = 0 \text{ (циссоида Диоклеса);}$$

$$(224) \quad (x^2 + y^2)(y - a)^2 - l^2 y^2 = 0 \text{ (конхоида Никомеда);}$$

$$(225) \quad (2a - x)y^2 = x(x - a)^2 \text{ (строфоида);}$$

$$(226) \quad (x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2) \text{ (лемниската Бернулли);}$$

$$(227) \quad (x^2 + y^2 - 2ax)^2 = 4a^2(x^2 + y^2) \text{ (кардиоида);}$$

$$(228) \quad x = a \cos^3 t, \quad y = a \sin^3 t \text{ (астроида);}$$

$$(229) \quad x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t) \text{ (циклоида).}$$

**230—** Существуют ли касательная и нормаль в указанных точках у следующих линий? Если существуют, то написать их уравнения:

$$(230) \quad x = t^2 + 1, \quad y = t^4 - t^5 \text{ в точке } t = 0;$$

$$(231) \quad y = x \sin \frac{1}{x} \text{ в точке } x = 0;$$

$$(232) \quad y = \frac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}} \text{ в точке } x = 0;$$

$$(233) \quad y = \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{x-1}}} \text{ в точке } x = 1;$$

$$(234) \quad x^3 + y^3 - x^2 - y^2 = 0 \text{ в точке } O(0, 0);$$

$$(235) \quad xy^2 + \left(\frac{1}{2}x - 1\right)^2 = 0 \text{ в точке } A(2, 0).$$

**236.** Показать, что если поместить начало координат в особой точке кратности  $k$ , то разложение функции  $F(x, y) = 0$  в ряд по степеням  $x$  и  $y$  начинается с членов  $k$ -го порядка, и уравнения касательных в этой точке получим, приравнявая нулю группу членов наименьшего  $k$ -го порядка.

**237.** Показать, что алгебраическая линия  $n$ -го порядка, имеющая особую точку кратности  $n-1$ , является универсальной.

**238.** Показать, что координаты точки перегиба линии, заданной уравнением  $F(x, y) = 0$ , удовлетворяют уравнению

$$F_{xx}F_y^2 - 2F_{xy}F_xF_y + F_{yy}F_x^2 = 0.$$

**239.** Найти уравнение, которое определяет точки перегиба линии, заданной уравнением  $r = r(\varphi)$  в полярных координатах.

**240—** Исследовать и построить линии, заданные уравне-

**247.** ниями в явном виде:

$$(240) \quad y = \frac{x^2}{x^2 - 1}; \quad (241) \quad y = \frac{x^3}{x^2 - 3};$$

$$(242) \quad y = \frac{x^3}{2(x+1)^2}; \quad (243) \quad y = \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right|;$$

$$(244) \quad y = \sqrt{\frac{125 - x^3}{3x}}; \quad (245) \quad y = \frac{\ln x}{x};$$

$$(246) \quad y = e^{-x^2}; \quad (247) \quad y = e^{\frac{1}{x}}.$$

**248—** Исследовать и построить линии, заданные пара-

**263.** метрическими уравнениями:

$$(248) \quad x = \frac{3at}{1+t^3}, \quad y = \frac{3at^2}{1+t^3} \text{ (декартов лист);}$$

$$(249) \quad x = \frac{t^2}{1+t^2}, \quad y = \frac{t(1-t)}{1+t^2};$$

$$(250) \quad x = \frac{t^2}{1+t^2}, \quad y = \frac{t^3}{1+t^2};$$

$$(251) \quad x = \frac{t^2}{1+t^2}, \quad y = \frac{t(1-t^2)}{1+t^2};$$

$$(252) \quad x = t^2, \quad y = \frac{2}{3} t(3-t^2);$$

$$(253) \quad x = \frac{t^2}{1-t}, \quad y = \frac{t^3}{1-t^2};$$

$$(254) \quad x = \frac{t^2}{1-t^2}, \quad y = \frac{t^3}{1-t^2};$$

$$(255) \quad x = 4t^2, \quad y = 3t(t^2+1);$$

$$(256) \quad x = t^4, \quad y = t^2 - t^5;$$

$$(257) \quad x = \frac{t^5}{10(1-t)}, \quad y = t^3;$$

$$(258) \quad x = \frac{t}{1-t^2}, \quad y = \frac{t(1-2t^2)}{1-t^2};$$

$$(259) \quad x = t^2, \quad y = t^4 + t^5;$$

$$(260) \quad x = \frac{5t^2}{1+t^5}, \quad y = \frac{5t^3}{1+t^5};$$

$$(261) \quad x = \frac{(t+2)^2}{t+1}, \quad y = \frac{(t-2)^2}{t-1};$$

$$(262) \quad x = \frac{4t}{1-t^4}, \quad y = \frac{4t^2}{1-t^4};$$

$$(263) \quad x = 2 \sin t, \quad y = \frac{2 \cos^2 t}{2 + \cos t}.$$

**264—** Исследовать и построить линии, заданные неявными уравнениями:

$$(264) \quad x^3 - y^2 + 1 = 0;$$

$$(265) \quad xy^2 - y^2 - 4x = 0;$$

$$(266) \quad x(x^2 + y^2) - y^2 + x = 0;$$

$$(267) \quad xy^2 = x^2 + 2x - \frac{5}{4};$$

$$(268) \quad x^4 + y^4 = a^4;$$

$$(269) \quad x^4 - 4x^2y^2 - 6x^2 - 4y^2 = 0;$$

$$(270) \quad (x^2 - y^2)^2 = 2x;$$

$$(271) \quad (x^2 - y^2)(x - y) = 1;$$

$$(272) \quad xy(x-y) + x + y = 0;$$

$$(273) \quad x^2y^2 + y = 1;$$

$$(274) \quad x^3 + xy^2 - x^2 - y^2 = 0;$$

$$(275) \quad x^2 + y^2 = x^2y^2;$$

$$(276) \quad x^4 - y^4 + x^2 + 2y^2 = 0;$$

$$(277) \quad x^3 - xy^2 + x^2 + y^2 = 0;$$

$$(278) \quad (x^2 - y^2)^2 = a^2(x^2 + y^2);$$

$$(279) \quad xy^2 = - \left( \frac{x}{2} - 1 \right)^2;$$

$$(280) \quad x(x^2 - 3y^2) - 4(x^2 + y^2) = 0;$$

$$(281) \quad x^4 + y^4 = x^2 + y^2;$$

$$(282) \quad x^3 + xy^2 + x^2 - y^2 = 0;$$

$$(283) \quad x^4 + y^4 + x^2 - y^2 = 0;$$

$$(284) \quad xy^2 = (x-1)^2;$$

$$(285) \quad x^4 + y^4 - 2xy = 0;$$

$$(286) \quad x^2 = y^2 + x^4;$$

$$(287) \quad (x+1)(x+2)y^2 = x^2;$$

$$(288) \quad y^2 = x^3 - 2x^2 + x;$$

$$(289) \quad (x^2 + y^2)^2 = xy;$$

$$(290) \quad x^3 + y^3 - x^2 = 0;$$

$$(291) \quad x^3 - 27(x-y)^2 = 0;$$

$$(292) \quad x^3 - xy^2 + ay^2 = 0;$$

$$(293) \quad x^5 - x^4 + 4x^2y - 4y^2 = 0;$$

$$(294) \quad x^4 - x^2y + y^3 = 0;$$

$$(295) \quad x^4 + x^2y^2 - 18x^2y + 9y^2 = 0;$$

$$(296) \quad x^4 + y^4 = 8xy^2;$$

$$(297) \quad x^6 - x^4 + y^2 = 0;$$

$$(298) \quad x^4 - y^4 + xy = 0;$$

$$(299) \quad (x^2 + y^2)^3 = 27x^2y^2.$$



**300—** Исследовать и построить линии, заданные уравнениями в полярных координатах:

$$(300) \quad r = \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2};$$

$$(301) \quad r^2 = a^2 \varphi, \quad a \neq 0 \text{ (спираль Ферма);}$$

$$(302) \quad r^2 \varphi = a^2, \quad a \neq 0 \text{ (жезл);}$$

$$(303) \quad r^2 = a^2 \varphi^4, \quad a \neq 0 \text{ (спираль Галилея);}$$

$$(304) \quad r = a + \frac{l}{\varphi}, \quad a \geq 0, \quad l > 0, \quad \varphi > 0;$$

$$(305) \quad r = a \sin \frac{\varphi}{2}, \quad a > 0;$$

$$(306) \quad r = a \sin 3\varphi, \quad a > 0 \text{ (трехлепестковая роза).}$$

#### § 4. Семейство линий. Огибающая

Пусть задано уравнение однопараметрического семейства линий

$$F(x, y, C) = 0, \quad (1)$$

где  $C$  — параметр. Множество всех точек, удовлетворяющих системе уравнений

$$F(x, y, C) = 0, \quad F_C(x, y, C) = 0, \quad (2)$$

называется *дискриминантной линией семейства* (1). Это множество может не удовлетворять определению линии, данному во введении; например, для семейства  $y - Cx = 0$  системе (2) удовлетворяет лишь одна точка  $O(0, 0)$ .

Если  $F_x$  и  $F_y$  в точках дискриминантной линии одновременно в нуль не обращаются, то дискриминантная линия совпадает с *огибающей семейства*, т. е. такой линией, которая в каждой своей точке касается некоторой линии семейства. В противном случае дискриминантная линия может не быть огибающей. Этот случай требует дополнительного исследования.

Дискриминантная линия семейства, заданного уравнением в векторном виде

$$\bar{r} = \bar{r}(t, C),$$

определяется системой уравнений

$$\bar{r} = \bar{r}(t, C), \quad [\bar{r}_t, \bar{r}_C] = \bar{0}.$$

**307—** Исследовать семейства линий и сделать рисунки:  
**309.**

$$(307) \quad C^2 x^2 + y^2 = Cx;$$

$$(308) \quad x^2 + 2Cy = 2xy;$$

$$(309) \quad x = \cos u \operatorname{ch} v, \quad y = \sin u \operatorname{sh} v$$

при а)  $v = \operatorname{const}$ , б)  $u = \operatorname{const}$ .

**310.** Доказать, что любая линия семейства  $\varphi(x, y) = a$  ортогональна к любой линии семейства  $\psi(x, y) = b$  в их общей точке, если выполняется условие

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0.$$

**311.** Показать, что семейство линий, ортогональных к линиям семейства  $\varphi(x, y) = a$ , определяется дифференциальным уравнением

$$\frac{dx}{\frac{\partial \varphi}{\partial x}} = \frac{dy}{\frac{\partial \varphi}{\partial y}}.$$

**312.** Найти семейство линий, ортогональных к пучку прямых.

**313.** Найти семейство линий, ортогональных к семейству окружностей, касающихся оси  $Ox$  в начале координат.

**314.** Найти семейство линий, ортогональных к семейству парабол

$$y^2 = 2ax.$$

**315.** Найти семейство линий, ортогональных к семейству

окружностей, проходящих через две фиксированные точки.

**316—** Найти огибающую следующих семейств линий:  
**324.**

$$(316) \quad (x-C)^2 + y^2 = a^2;$$

$$(317) \quad (x-C)^2 + (y-C)^2 = C^2;$$

$$(318) \quad x \cos C + y \sin C - p = 0;$$

$$(319) \quad y = (x-C)^3;$$

$$(320) \quad y^2 - (x-C)^3 = 0;$$

$$(321) \quad y^3 - (x-C)^2 = 0;$$

$$(322) \quad 3(y-C)^2 - 2(x-C)^3 = 0;$$

$$(323) \quad (1-C^2)x + 2Cy - a = 0;$$

$$(324) \quad C^2(x-a) - Cy - a = 0.$$

**325.** Найти огибающую семейства прямых, образующих с осями координат треугольники постоянной площади  $S$ .

**326.** Окружность

$$x^2 + y^2 = R^2$$

является огибающей семейства прямых

$$Ax + By + C = 0.$$

Какому соотношению должны удовлетворять коэффициенты  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ?

**327.** Найти уравнение огибающей семейства прямых, на которых лежит отрезок постоянной длины  $a$ , если его концы скользят по осям прямоугольной системы координат.

**328.** Найти огибающую семейства прямых, являющихся сторонами прямого угла, перемещающегося на плоскости так, что одна из его сторон проходит через фиксированную точку  $F$ , а прямой угол описывает: а) прямую; б) окружность.

**329.** Прямая вращается с постоянной угловой скоростью вокруг точки, равномерно движущейся по вто-

рой прямой. Найти огибающую этого семейства прямых.

330. Найти огибающую семейства окружностей радиуса  $r$ , центры которых описывают окружность радиуса  $R$ .

331. Найти огибающую семейства окружностей, построенных, как на диаметрах, на фокальных радиус-векторах данной параболы.

332. Найти огибающую семейства окружностей, построенных, как на диаметрах, на фокальных хордах параболы

$$y^2 = 2px.$$

333. Дан эллипс

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

На хордах, параллельных одной из осей симметрии, как на диаметрах, строятся окружности. Найти огибающую каждого семейства окружностей.

334. На хордах гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

параллельных одной из осей координат, строятся, как на диаметрах, окружности. Найти огибающую каждого семейства.

335. Найти огибающую семейства окружностей, построенных, как на диаметрах, на хордах параболы

$$y^2 = 2px,$$

перпендикулярных к ее оси.

336. Дано семейство парабол параметра  $p$ , оси которых параллельны оси  $Ox$ , а вершины описывают параболу

$$y^2 = 2qx.$$

Найти огибающую этого семейства.

337. Найти условия, которым должны удовлетворять точки огибающей семейства линий

$$F(x, y, z, \alpha, \beta) = 0,$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  связаны соотношением  $\varphi(\alpha, \beta) = 0$ .

338. Найти огибающую линий

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 1,$$

где  $p + q = 1$ .

339. Найти огибающую прямых

$$\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} - 1 = 0,$$

зная, что параметры  $\alpha, \beta$  связаны соотношением

$$\alpha^m + \beta^m - a^m = 0, \quad a = \text{const.}$$

Отметить случаи  $m = 2, 1, -2$ .

340. Из данной точки под разными углами к горизонту в одной вертикальной плоскости с одной и той же начальной скоростью  $v_0$  выбрасываются материальные точки. Найти огибающую их траекторий (*парабола безопасности*).

341. Радиусы окружности

$$x^2 + y^2 = a^2$$

проектируются на оси координат. На проекциях, как на полуосях, строятся эллипсы. Найти огибающую этого семейства эллипсов.

## § 5. Длина дуги. Кривизна. Формулы Френе

*Длина дуги (натуральный параметр) линии, заданной уравнениями (6), (7), (15) введения, вычисляется соответственно по формулам:*

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'^2 + y'^2} dt,$$

$$s = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+y'^2} dx,$$

$$s = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{r^2+r'^2} d\varphi.$$

*Кривизна линии*, заданной уравнениями (6), (7), (15) введения, вычисляется соответственно по формулам:

$$k = \frac{|x'y'' - x''y'|}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$k = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$k = \frac{|r^2 + 2r'r'' - rr''|}{[r^2 + r'^2]^{\frac{3}{2}}}.$$

*Соприкасающейся окружностью* линии в заданной точке называется окружность, имеющая с линией соприкосновения не ниже второго порядка. *Центр соприкасающейся окружности*, который называется также *центром кривизны* линии в заданной точке, расположен на нормали, проведенной в данной точке, с той стороны от касательной, где расположена линия. Ее *радиус*, называемый также *радиусом кривизны* линии в заданной точке, находится

по формуле  $R = \frac{1}{k}$ . Круг, ограниченный соприкасающейся окружностью, часто называют *кругом кривизны линии*.

*Формулы Френе* линии имеют вид

$$\frac{d\bar{t}}{ds} = k\bar{n}, \quad \frac{d\bar{n}}{ds} = -k\bar{t},$$

где  $\bar{t}$  — единичный вектор касательной,  $\bar{n}$  — единичный вектор нормали линии.

**342—** Вычислить длину дуги между двумя точками  $M_1$   
**349.** и  $M_2$  следующих линий:

$$(342) y = x^{3/2}; \quad (343) y = x^2;$$

$$(344) y = \ln x; \quad (345) y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a};$$

$$(346) y = e^x; \quad (347) y = \ln \frac{e^x + 1}{e^x - 1};$$

$$(348) x = a(\cos t + t \sin t), \quad y = a(\sin t - t \cos t);$$

$$(349) x = a \left( \ln \operatorname{tg} \frac{t}{2} + \cos t \right), \quad y = a \sin t.$$

**350—** Вычислить длину дуги между указанными точками  
**355.** следующих линий:

$$(350) y = \ln \cos x; \quad x_1 = 0, \quad x_2 = \frac{\pi}{3};$$

$$(351) y = \frac{1}{3} x \sqrt{x} - \sqrt{x}; \quad \text{точки пересечения с осью } Ox;$$

$$(352) y = \frac{1}{4} x^2 - \frac{1}{2} \ln x; \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 4;$$

$$(353) y = \ln \sec x; \quad x_1 = -\frac{\pi}{3}, \quad x_2 = \frac{\pi}{3};$$

$$(354) x = t - \frac{1}{2} \operatorname{sh} 2t, \quad y = 2 \operatorname{ch} t; \quad t_1 = 0, \quad t_2 = 2;$$

$$(355) x = 8at^3, \quad y = 3a(2t^2 - t^4); \quad t_1 = 0, \quad t_2 = \sqrt[4]{2}.$$

**356.** Найти длину дуги линии

$$y^2 = x^3,$$

отсеченной прямой  $x = 5$ .

**357.** Найти длину дуги параболы

$$r = a \sec^2 \frac{\varphi}{2},$$

отсекаемой осью  $Oy$ .

358. Найти длину одной арки циклоиды.

359. Найти длину одной ветви эпициклоиды (гипоциклоиды).

360— Найти длину всей линии:

364.

$$(360) \quad x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}; \quad (361) \quad x = a \cos^5 t, \quad y = a \sin^5 t;$$

$$(362) \quad r = a(1 + \cos \varphi); \quad (363) \quad r = a \cos^4 \frac{\varphi}{4};$$

$$(364) \quad r = a \sin^3 \frac{\varphi}{3}.$$

365. Найти длину дуги первого витка спирали Архимеда

$$r = a\varphi.$$

366. Показать, что длина дуги логарифмической спирали

$$r = ca^{\varphi}$$

от произвольной точки до полюса равна длине полярной касательной, проведенной к спирали в этой точке.

367. Найти уравнение линии, длина дуги которой, отсчитываемая от некоторой фиксированной точки  $A$  до произвольной точки  $M$ , пропорциональна угловому коэффициенту касательной, проведенной в конце дуги.

368. Доказать, что длина дуги цепной линии

$$y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$$

от ее вершины до некоторой точки равна проекции ординаты этой точки на касательную, проведенную в этой точке.

369. Показать, что площадь, ограничиваемая цепной линией, двумя ординатами ее точек и осью абсцисс, пропорциональна длине соответствующей дуги, причем коэффициентом пропорциональности служит параметр цепной линии  $a$ .



370. Доказать, что произведение длин дуг, отсчитываемых от вершины цепной линии до точек касания двух взаимно перпендикулярных касательных, является величиной постоянной.
371. Составить параметрические уравнения окружности, взяв за параметр длину дуги.
372. Составить параметрические уравнения цепной линии

$$y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a},$$

приняв за параметр длину дуги, отсчитываемую от вершины в сторону положительных абсцисс.

- 373— Найти кривизну следующих линий:  
386.

- (373)  $y = \sin x$ ;                      (374)  $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$ ;  
(375)  $y^2 = 2px$ ;                      (376)  $x = t^2, \quad y = t^3$ ;  
(377)  $x = a \cos t, \quad y = b \sin t$ ;  
(378)  $x = a \operatorname{ch} t, \quad y = b \operatorname{sh} t$ ;  
(379)  $x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t)$ ;  
(380)  $x = a(1+m) \cos mt - am \cos(1+m)t$ ,  
 $y = a(1+m) \sin mt - am \sin(1+m)t$ ;  
(381)  $x = a \cos^3 t, \quad y = a \sin^3 t$ ;  
(382)  $x = a(\cos t + t \sin t), \quad y = a(\sin t - t \cos t)$ ;  
(383)  $r = a\varphi$ ;                      (384)  $r = ae^{h\varphi}$ ;  
(385)  $r = a(1 + \cos \varphi)$ ;                      (386)  $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$ .

387. Найти кривизну линии, заданной уравнением  
 $F(x, y) = 0$ .

- 388— Найти кривизну следующих линий:  
390.

(388)  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ;

$$(389) \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1;$$

$$(390) \quad x^3 = y^2(2a - x).$$

391. Вычислить кривизну линии

$$y = x^4$$

в точке  $O(0, 0)$ .

392. Вычислить кривизну линии

$$(x - y)^2 = x^5$$

в точке  $O(0, 0)$ .

393. Линии даны своим дифференциальным уравнением

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0.$$

Найти их кривизну.

394. Доказать, что в произвольной точке линии

$$k = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{2h}{\Delta s^2},$$

где  $h$  — расстояние от точки линии при значении параметра  $s + \Delta s$  до касательной, проведенной в точке линии при значении параметра  $s$ .

395. Доказать, что в соответствующих точках параллельных линий  $C$  и  $C^*$  имеют место соотношения:

$$R^* = R \pm a,$$

$$ds^* = \left(1 \pm \frac{a}{R}\right) ds,$$

где  $R$ ,  $s$  и  $R^*$ ,  $s^*$  — радиус кривизны и длина дуги соответственно линий  $C$  и  $C^*$ .

396. Доказать, что кривизну линии можно найти следующим образом:

$$k = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{ds - d\sigma}{ads},$$

где  $d\sigma$  — дифференциал дуги параллельной линии.

397. Доказать, что радиус кривизны кардиоиды

$$r = 2a(1 - \cos \varphi)$$

в любой точке равняется  $2/3$  длины полярной нормали в той же точке. Указать построение центра кривизны для любой точки кардиоиды.

398. Доказать, что радиус кривизны параболы

$$y = \frac{x^2}{2p}$$

равен

$$R = \frac{p}{\cos^3 \alpha},$$

где  $\alpha$  — угол наклона касательной к оси абсцисс.

399. Доказать, что радиус кривизны логарифмической спирали

$$r = ca^{\varphi}$$

в любой точке равен длине полярной нормали для этой точки. Используя это свойство, дать построение соприкасающейся окружности в любой точке логарифмической спирали.

400. Вычислить радиус кривизны и указать способ построения центра кривизны в произвольной точке трактрисы

$$x = a \left( \ln \operatorname{tg} \frac{t}{2} + \cos t \right), \quad y = a \sin t.$$

401. Доказать, что отрезок, соединяющий произвольную точку циклоиды с центром кривизны, соответствующим этой точке, делится базой циклоиды пополам. Указать вытекающий отсюда способ построения центра кривизны для любой точки циклоиды.

402. Показать, что ордината любой точки цепной линии есть средняя пропорциональная между ее параметром и радиусом кривизны в этой точке.

403. Показать, что радиус кривизны лемнискаты Бернулли

$$r^2 = 2a^2 \cos 2\varphi$$

в любой ее точке в три раза меньше длины полярной нормали в этой точке. На основании этого свойства указать способ построения центра кривизны в произвольной точке лемнискаты.

404. Дать геометрический способ построения центров кривизны, соответствующих вершинам эллипса.

405. Написать уравнения соприкасающихся окружностей в вершинах  $A(a, 0)$ ,  $B(0, b)$  эллипса.

406. Написать уравнение соприкасающейся окружности линии

$$y = \sin x$$

в точке  $A\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$ .

407. Найти соприкасающуюся окружность равносторонней гиперболы

$$xy = 1,$$

радиус которой имеет минимальное значение.

- 408— На следующих линиях найти точки, в которых кривизна принимает экстремальное значение:

411. визна принимает экстремальное значение:

(408)  $y = e^x$ ;

(409)  $x = at - d \sin t, \quad y = a - d \cos t$ ;

(410)  $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = \sqrt[3]{a}$ ;

(411)  $r = a \sin^3 \frac{\varphi}{3}$ .

412. Показать, что разность между длиной дуги и хордой, соединяющей две бесконечно близкие точки  $M$  и  $M'$  линии, третьего порядка малости относительно дуги и равна

$$\overset{\smile}{MM'} - MM' = \frac{(\Delta s)^3}{24r^2} + \dots,$$

где  $r$  — радиус кривизны.

413. Доказать, что для того, чтобы две линии в общей точке имели соприкосновение порядка не ниже второго, необходимо и достаточно, чтобы они имели общую касательную и равные кривизны.
414. Пусть линии  $l_1$  и  $l_2$  имеют в общей точке  $M$  касание, в окрестности этой точки расположены по одну сторону от касательной  $l$  и  $0 < k_1 < k_2$ , где  $k_1, k_2$  — кривизны линий  $l_1$  и  $l_2$  в точке  $M$ . Доказать, что в окрестности точки  $M$  линия  $l_1$  объемлет линию  $l_2$ .
415. Пусть  $C$  — окружность, расположенная относительно касательной к линии в заданной точке с той же стороны, что и соприкасающаяся окружность  $C^*$  линии. Если радиус  $r$  окружности  $C$  больше радиуса  $r^*$  окружности  $C^*$ , то в окрестности точки касания окружность  $C$  объемлет данную линию. Если  $r < r^*$ , то окружность  $C$  объемлется этой линией. Доказать.
416. Показать, что в точке линии, в которой радиус кривизны имеет максимум или минимум, линия имеет с соприкасающейся окружностью соприкосновение не ниже третьего порядка.
417. Найти координаты центра и радиус соприкасающейся окружности параболы

$$y^2 = 2px.$$

В какой точке параболы окружность имеет с ней соприкосновение третьего порядка?

418. Доказать, что если в окрестности точки  $A$  кривизна линии меняется монотонно, то в направлении возрастания радиуса кривизны линия выходит из круга кривизны, а в направлении убывания радиуса кривизны — входит в него.
419. Если в точке  $A$  радиус кривизны имеет максимум, то линия в окрестности точки  $A$  лежит внутри круга кривизны. Доказать.
420. Если в точке  $A$  радиус кривизны имеет минимум, то линия в окрестности точки  $A$  лежит вне круга кривизны. Доказать.
421. Найти параболу
- $$y = ax^2 + bx + c,$$

имеющую с синусоидой  $y = \sin x$  в точке  $A \left( \frac{\pi}{2}, 1 \right)$  общие касательную и кривизну.

422. Окружность

$$x^2 + y^2 = 5$$

является соприкасающейся в точке  $A (1, 2)$  к параболе, ось которой параллельна оси  $Ox$ . Найти уравнение этой параболы.

423. Окружность

$$x^2 + y^2 = 5$$

является соприкасающейся в точке  $A (1, 2)$  к параболе, ось которой параллельна оси  $Oy$ . Найти уравнение этой параболы.

## § 6. Эволюты и эвольвенты

*Эволюта*, т. е. геометрическое место центров кривизны линии, заданной уравнениями (6) введения, имеет уравнения

$$X = x - y' \frac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - x''y'}, \quad Y = y + x' \frac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - x''y'}.$$

*Эвольвентой* данной линии  $L$  называется линия  $L^*$ , по отношению к которой  $L$  является эволютой.

Если линия  $L$  задана уравнением  $\bar{r} = \bar{r}(s)$ , то уравнение семейства ее эвольвент имеет вид

$$\bar{\rho} = \bar{r} + (\alpha - s)\bar{t},$$

где  $\bar{t}$  — единичный вектор касательной линии  $L$ , а  $\alpha$  — произвольный параметр.

424. Что представляет собой эволюта окружности?

425— Составить уравнения и начертить графики эволют

434. следующих линий:

(425)  $x = a \cos t, \quad y = b \sin t;$

(426)  $x = a \operatorname{ch} t, \quad y = b \operatorname{sh} t;$

(427)  $y = x^2$ ;

(428)  $y = x^{2k}$ ,  $k$  — натуральное число, большее единицы;

(429)  $y = x^{2k+1}$ ,  $k$  — любое натуральное число;

(430)  $y = \ln x$ ;

(431)  $y = \sin x$ ;

(432)  $y = \operatorname{tg} x$ ,  $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ ;

(433)  $x = a \left( \ln \operatorname{tg} \frac{t}{2} + \cos t \right)$ ,  $y = a \sin t$ ;

(434)  $r = (1 + \cos \varphi)$ .

435. Доказать, что эволюта циклоиды есть циклоида, конгруэнтная данной.

436. Показать, что эволюта астроида есть астроида, подобная данной, с коэффициентом подобия 2, повернутая относительно данной на угол  $\frac{\pi}{4}$ .

437. Показать, что эволютой логарифмической спирали  $r = ca^\varphi$

является логарифмическая спираль, полученная из данной поворотом вокруг полюса на некоторый угол.

438. Найти такое условие для параметра  $a$  логарифмической спирали

$$r = ca^\varphi,$$

чтобы эволюта спирали совпала с самой спиралью.

439. Составить уравнения эвольвент окружности

$$x^2 + y^2 = a^2$$

и сделать рисунок.

440. Составить уравнение и сделать рисунок эвольвенты цепной линии

$$y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a},$$

проходящей через ее вершину.

441. Составить уравнения эвольвент параболы

$$x=t, \quad y=\frac{1}{4}t^2.$$

442— Найти длины дуг нижеперечисленных линий, представляя эти линии в виде эволют некоторых других линий:

(442) астроида

$$x=a \cos^3 t, \quad y=a \sin^3 t;$$

(443) одной арки циклоиды

$$x=a(t-\sin t), \quad y=a(1-\cos t);$$

(444) кардиоиды

$$r=a(1+\cos \varphi).$$

## § 7. Натуральные уравнения

В этом параграфе будем приписывать кривизне линии определенный знак, вычисляя ее по формуле

$$k=\frac{1}{R}=\frac{d\alpha}{ds},$$

где  $\alpha$  — угол, который образует касательная к линии с осью  $Ox$ .

*Натуральными уравнениями линии* называют уравнения вида:

$$k=k(s),$$

$$F(k, s)=0,$$

$$\left. \begin{aligned} k &= k(t), \\ s &= s(t). \end{aligned} \right\}$$

Если заданы натуральные уравнения линии, то уравнения линии в параметрическом виде будут:

$$x=\int \cos \alpha(s) ds, \quad y=\int \sin \alpha(s) ds,$$



**445—** Составить натуральные уравнения следующих  
**449.** линий:

$$(445) \quad y = x^{\frac{3}{2}}; \quad (446) \quad y = \ln x;$$

$$(447) \quad x = a(\cos t + t \sin t), \quad y = a(\sin t - t \cos t);$$

$$(448) \quad x = a \left( \ln \operatorname{tg} \frac{t}{2} + \cos t \right), \quad y = a \sin t;$$

$$(449) \quad r = a(1 + \cos \varphi).$$

**450—** Какие линии определяются следующими натураль-  
**454.** ными уравнениями:

$$(450) \quad k = a; \quad (451) \quad R = as;$$

$$(452) \quad R = \frac{a^2 + s^2}{a}; \quad (453) \quad s^2 + R^2 = 16a^2;$$

$$(454) \quad \frac{s^2}{a^2} + \frac{R^2}{b^2} = 1.$$

**455.** Пусть  $l$  — некоторая линия, касающаяся в начале координат оси  $Ox$ , и  $F(k, s) = 0$  — ее натуральное уравнение, причем  $s$  отсчитывается от точки касания. Если покатить линию  $l$  по оси  $Ox$  и для каждой точки касания на нормали в сторону вогнутости линии  $l$  отложить отрезок, равный радиусу кривизны линии в этой точке, то геометрическое место этих центров кривизны будем называть *разверткой эволюты данной линии*. Доказать, что уравнение развертки эволюты имеет вид

$$F\left(\frac{1}{y}, x\right) = 0.$$

**456.** Найти развертку эволюты логарифмической спирали

$$r = ca^{\varphi}.$$

**457.** Показать, что разверткой эволюты астроида

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$$

является эллипс

$$4x^2 + y^2 = \left(\frac{3}{2}a\right)^2.$$

458. Показать, что развертка эволюты циклоиды есть окружность, радиус которой в четыре раза больше радиуса производящей окружности.

459. Доказать, что развертка эволюты цепной линии есть парабола.

460— Составить параметрические уравнения линий, для  
464. которых:

$$(460) R \sin^3 \alpha = a;$$

$$(461) R = ae^\alpha;$$

$$(462) R = a\alpha;$$

$$(463) s = a \operatorname{tg} \alpha;$$

$$(464) s = a \cos \alpha, \quad a — \text{постоянная.}$$

## § 8. Разные задачи

465. *Подэрой* данной линии  $C$  относительно данной точки  $P$  называется геометрическое место оснований перпендикуляров, опущенных из точки  $P$  на касательные к линии  $C$ . Составить уравнение подэры линии  $\vec{r} = \vec{r}(t)$  относительно точки с радиус-вектором  $\vec{r}_0$ .

466— Найти подэры следующих линий:

470.

(466) эвольвенты окружности

$$x = a(\cos t + t \sin t), \quad y = a(\sin t - t \cos t)$$

относительно начала координат;

(467) астроида

$$\frac{2}{x^3} + \frac{2}{y^3} = \frac{2}{a^3}$$

относительно начала координат;

(468) параболы

$$y^2 = 2px$$

относительно ее вершины;

(469) эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

относительно начала координат;

(470) окружности

$$x^2 + y^2 - 2ax = 0$$

относительно начала координат.

471. Найти линию, для которой парабола

$$y^2 = 2px + p^2$$

служит подэрой относительно фокуса параболы.

472— Катакаустикой данной линии называется огибаю-

474. щая лучей, отраженных этой линией. Найти катакаустiku следующих линий:

(472) окружности

$$x^2 + y^2 = a^2,$$

когда лучи параллельны оси абсцисс;

(473) окружности

$$x^2 + y^2 = 2ax,$$

когда лучи исходят из начала координат;

(474) параболы

$$y^2 = 2px,$$

когда лучи параллельны оси ординат.

475. Найти траекторию, описываемую полюсом логарифмической спирали

$$r = ca^{\varphi}$$

при ее качении по прямой.

476. Найти траекторию фокуса параболы

$$x^2 = 2py$$

при качении параболы по оси абсцисс.

477. Доказать, что циклоида является *изохронной линией*. Это означает, что если арку циклоиды расположить в вертикальной плоскости вершиной  $A$  вниз, то время, затрачиваемое материальной точкой на передвижение по циклоиде под действием силы тяжести Земли из некоторого начального положения  $M$  до вершины  $A$ , не зависит от начального положения материальной точки.

478. Через некоторую точку  $A$  плоскости проведены всевозможные касательные к логарифмической спирали

$$r = ca^{\varphi}.$$

Показать, что все точки касания лежат на окружности, проходящей через полюс спирали и точку  $A$ . Найти диаметр этой окружности.

479. Найти длину всей эволюты эллипса с полуосями  $a$  и  $b$ .
480. Выразить радиус кривизны  $k$  данной линии и ее дугу  $s$  через радиус кривизны  $\rho$  и дугу  $\sigma$  эвольвенты.
481. Зная натуральное уравнение

$$R = a + \frac{s^2}{a}$$

цепной линии, составить натуральные уравнения ее эволюты и эвольвенты.

482. Выразить кривизну  $k^*$  линии, описываемой концом единичного вектора касательной  $\bar{t}$  линии

$$\bar{r} = \bar{r}(s),$$

через кривизну  $k$  этой линии.

483. Найти линии, проекции радиуса кривизны  $R$  которых на ось ординат постоянны и равны  $a$ .

## Пространственные линии

## § 9. Уравнения линии

484. Точка  $M$  вращается равномерно вокруг некоторой прямой и равномерным движением переносится параллельно этой прямой. Линия, описываемая точкой  $M$ , называется *винтовой*. Приняв указанную прямую за ось  $Oz$ , написать параметрические уравнения винтовой линии. Найти ее проекции на координатные плоскости.
485. Точка  $M$  движется вдоль образующей прямого кругового цилиндра со скоростью, пропорциональной пройденному пути; при этом цилиндр вращается вокруг своей оси с постоянной угловой скоростью. Найти параметрические уравнения траектории точки  $M$ .
486. Поверхность сферы радиуса  $R$  пересечена круглой цилиндрической поверхностью, диаметр которой равен радиусу сферы, и одна из образующих проходит через центр сферы. Линия пересечения указанных поверхностей называется *линией Вивиани*. Составить ее уравнения в неявном и параметрическом видах.
487. Прямая  $OL$ , не перпендикулярная оси  $Oz$ , равномерно вращается вокруг нее с постоянной угловой скоростью  $\omega$ . Точка  $M$  движется по прямой  $OL$ : а) со скоростью, пропорциональной расстоянию  $OM$  подвижной точки до точки  $O$ ; б) с постоянной скоростью. В первом случае точка  $M$  описывает *коническую спираль*, во втором — *коническую винтовую линию*. Написать параметрические уравнения этих линий.
488. Оси двух цилиндров с радиусами  $a$  и  $b$  пересекаются под прямым углом. В пересечении цилиндров образуются две замкнутые линии, совокупность которых называется *бицилиндрикой*. Записать неявные уравнения бицилиндрики, указать одно из параметрических представлений. Какие линии получаются в случае  $a=b$ ?

489. Показать, что линия

$$x=at \cos t, \quad y=at \sin t, \quad z=\frac{a^2 t^2}{2p}$$

лежит на параболоиде вращения и что ее проекция на плоскость  $xOy$  является спиралью Архимеда.

490. Найти проекции линии

$$x=t, \quad y=t^2, \quad z=t^3$$

на координатные плоскости.

491. Показать, что линия

$$x=a \operatorname{ch} t, \quad y=b \operatorname{sh} t, \quad z=ct$$

лежит на гиперболическом цилиндре. Найти ее проекции на координатные плоскости.

492. Найти проекцию на плоскость  $xOy$  линии пересечения гиперболического параболоида

$$z=x^2-y^2$$

и плоскости

$$x+y-z-1=0.$$

493. Найти проекцию на плоскость  $yOz$  линии пересечения эллиптического параболоида

$$x=y^2+z^2$$

и плоскости

$$x-2y+4z-4=0.$$

494. Доказать, что проекцией на плоскость  $yOz$  линии пересечения эллиптического параболоида

$$x=y^2+z^2$$

и плоскости

$$x-2y+4z-4=0$$

является окружность радиуса  $R=3$  с центром в точке  $M(0, 1, -2)$ .

495. Доказать, что проекцией на плоскость  $xOy$  линии пересечения эллиптического параболоида

$$z = x^2 + 2y^2$$

и плоскости

$$2x - 4y + z - 1 = 0$$

является эллипс. Найти параметры этого эллипса.

496. Найти проекцию на плоскость  $xOz$  линии пересечения конуса

$$y^2 = xz$$

и плоскости

$$x - y + z + 1 = 0.$$

497. Показать, что линия

$$x = a \operatorname{tg} t, \quad y = b \cos t, \quad z = b \sin t$$

расположена на гиперболическом параболоиде. Найти проекции этой линии на координатные плоскости.

498. Написать векторные уравнения проекций линии

$$\vec{r} = \vec{r}(t)$$

на координатные плоскости.

499. Показать, что линия

$$x = a \cos^3 t, \quad y = a \sin^3 t, \quad z = a \cos 2t$$

лежит на ограниченной части цилиндрической поверхности, направляющая которой — астроида, а образующая параллельна оси  $Oz$ .

500. Линию

$$x = t, \quad y = t^2, \quad z = e^t$$

представить как пересечение двух поверхностей.

501. Показать, что линия

$$x = \sin 2\varphi, \quad y = 1 - \cos 2\varphi, \quad z = 2 \cos \varphi$$

лежит на сфере и является линией пересечения параболического и кругового цилиндров.

502. Показать, что

$$x = a \sin \Theta \cos \varphi, \quad y = a \sin \Theta \sin \varphi, \quad z = a \cos \Theta,$$

где  $\Theta = \Theta(\varphi)$ , есть линия, лежащая на сфере.

503. Показать, что линия

$$x = a \sin^2 t, \quad y = b \sin t \cos t, \quad z = c \cos t$$

лежит на эллипсоиде.

504. Показать, что линия

$$x = \frac{t}{1+t^2+t^4}, \quad y = \frac{t^2}{1+t^2+t^4}, \quad z = \frac{t^3}{1+t^2+t^4}$$

лежит на сфере с центром в точке  $C\left(0, \frac{1}{2}, 0\right)$   
Найти радиус этой сферы.

505. Показать, что линия

$$x = t \cos t, \quad y = t \sin t, \quad z = ct$$

лежит на круговом конусе.

506. Что получается в пересечении однополостных гиперболоидов

$$x^2 - y^2 + z^2 = 1 \text{ и } y^2 + z^2 - x^2 = 1?$$

## § 10. Сопровождающий трехгранник. Длина дуги

Пусть линия задана уравнениями

$$\bar{r} = \bar{r}(t)$$

или

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t).$$

Запишем уравнения ребер и граней сопровождающего репера Френе.

Уравнения касательной

$$\bar{R} = \bar{r} + \lambda \bar{r}',$$



где  $\bar{R}$  — радиус-вектор текущей точки касательной,  
или

$$\frac{X-x}{x'} = \frac{Y-y}{y'} = \frac{Z-z}{z'},$$

где  $X, Y, Z$  — координаты вектора  $\bar{R}$ .

Уравнения главной нормали:

$$\bar{R} = \bar{r} + \lambda [\bar{r}'\bar{r}'']\bar{r}'$$

или

$$\left. \begin{aligned} X &= x + \lambda \left\{ z' \begin{vmatrix} z' & x' \\ z'' & x'' \end{vmatrix} - y' \begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix} \right\}, \\ Y &= y + \lambda \left\{ x' \begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix} - z' \begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix} \right\}, \\ Z &= z + \lambda \left\{ y' \begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix} - x' \begin{vmatrix} z' & x' \\ z'' & x'' \end{vmatrix} \right\}. \end{aligned} \right\}$$

Уравнения бинормали:

$$\bar{R} = \bar{r} + \lambda [\bar{r}'\bar{r}'']$$

или

$$\frac{X-x}{\begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix}} = \frac{Y-y}{\begin{vmatrix} z' & x' \\ z'' & x'' \end{vmatrix}} = \frac{Z-z}{\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}}.$$

Уравнение соприкасающейся плоскости:

$$(\bar{R} - \bar{r}, \bar{r}', \bar{r}'') = 0$$

или

$$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} = 0.$$

Уравнение нормальной плоскости:

$$(\bar{R} - \bar{r})\bar{r}' = 0$$

или

$$(X-x)x' + (Y-y)y' + (Z-z)z' = 0.$$

Уравнение спрямляющей плоскости:

$$(\bar{R} - \bar{r}, \bar{r}', [\bar{r}' \bar{r}'']) = 0$$

или

$$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ x' & y' & z' \\ y'z'' & z'x'' & x'y'' \end{vmatrix} = 0.$$

Единичные векторы касательной, главной нормали и бинормали находятся по формулам:

$$\bar{t} = \frac{\bar{r}'}{|\bar{r}'|}, \quad \bar{n} = \frac{[[\bar{r}' \bar{r}''] \bar{r}']}{|[\bar{r}' \bar{r}'']| |\bar{r}'|}, \quad \bar{b} = \frac{[\bar{r}' \bar{r}'']}{|[\bar{r}' \bar{r}'']|}.$$

Длина дуги линии, или натуральный параметр, определяется формулой

$$s = \int_{t_0}^t \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} dt.$$

507— Составить уравнения касательных к следующим  
 509. линиям в указанных точках:

(507)  $x = \sec t$ ,  $y = \operatorname{tg} t$ ,  $z = at$  при  $t = \frac{\pi}{4}$ ;

(508)  $x = e^t$ ,  $y = e^{-t}$ ,  $z = t^2$  при  $t = 1$ ;

(509)  $x = e^t \cos t$ ,  $y = e^t \sin t$ ,  $z = e^t$  при  $t = 0$ .

510. Составить уравнения касательной к линии

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t), \quad z = 4a \sin \frac{t}{2}$$

в точке  $t = \frac{\pi}{2}$ . Какой угол образует эта касательная с осью  $Oz$ ?

511. В каких точках касательная к линии

$$x=3t-t^3, \quad y=3t^2, \quad z=3t+t^3$$

параллельна плоскости

$$3x+y+z+2=0?$$

512. Составить уравнения касательной прямой и нормальной плоскости винтовой линии

$$x=2 \cos t, \quad y=2 \sin t, \quad z=4t$$

в точке  $t=0$ .

513. Задана линия

$$x=t, \quad y=t^2, \quad z=t^3.$$

Написать уравнения касательной прямой и нормальной плоскости в точке  $t=1$ . Какая линия получается в пересечении касательных с плоскостью  $xOy$ ?

514. Найти геометрическое место точек пересечения касательных к линии

$$x=a \cos t, \quad y=-a \sin t, \quad z=be^t$$

с плоскостью  $xOy$ .

515. Составить уравнение касательной к линии

$$x=a \operatorname{ch} t, \quad y=a \operatorname{sh} t, \quad z=ct$$

в ее произвольной точке.

516. Доказать, что линия

$$x=e^{\frac{t}{\sqrt{2}}} \cos t, \quad y=e^{\frac{t}{\sqrt{2}}} \sin t, \quad z=e^{\frac{t}{\sqrt{2}}}$$

лежит на конусе

$$x^2+y^2=z^2$$

и пересекает его образующие под углом  $45^\circ$ .

517. Написать уравнения касательной прямой и нормальной плоскости к линии Вивiani (см. задачу 486).

518. Определить наименьший угол, образуемый линией Вивиани с осью цилиндрической поверхности, на которой она взята.
519. *Сферической индикатрисой линии* называется геометрическое место концов единичных векторов касательных, отложенных от начала координат. Найти сферическую индикатрису винтовой линии.
520. Показать, что если все нормальные плоскости пространственной линии проходят через фиксированную точку, то линия лежит на сфере (такие линии называются *сферическими*).
521. Составить уравнения касательной прямой и нормальной плоскости линии, заданной пересечением двух поверхностей:

$$F(x, y, z) = 0, \quad \Phi(x, y, z) = 0.$$

522. Записать уравнения касательной прямой и нормальной плоскости линии

$$x^2 = 2az, \quad y^2 = 2bz$$

в произвольной точке.

523. Найти уравнение нормальной плоскости в произвольной точке линии

$$x^2 + y^2 - z^2 = 1, \quad x^2 - y^2 - z^2 = 1.$$

524. Найти уравнение нормальной плоскости в произвольной точке линии

$$x^2 + y^2 = 1, \quad y^2 + z^2 = 1.$$

525. Показать, что нормальные плоскости линии

$$x = a \sin^2 t, \quad y = a \sin t \cos t, \quad z = a \cos t$$

проходят через начало координат.

526. Доказать, что соприкасающуюся плоскость линии в заданной точке  $M_0$  можно определить одним из следующих условий:

а) плоскость векторов  $\vec{r}'(t_0)$  и  $\vec{r}''(t_0)$ , если они неколлинеарны;

б) предельное положение плоскости, проходящей через три бесконечно близкие точки  $M_0, M_1, M_2$  линии, когда точки  $M_1, M_2$  стремятся к точке  $M_0$ ;  
 в) предельное положение плоскости, проходящей через касательную  $M_0T$  и точку  $M_1$ , которая, оставаясь на линии, стремится к точке  $M_0$ ;  
 г) плоскость, имеющая с линией в точке  $M_0$  касание не ниже второго порядка (определение касания линии с поверхностью см. в § 14).

527. Доказать, что если все соприкасающиеся плоскости некоторой линии проходят через фиксированную точку, то эта линия плоская.

528. Найти соприкасающиеся плоскости линии

$$x=t, \quad y=t^2, \quad z=t^3,$$

проходящие через точку  $M_0 \left( 2, -\frac{1}{3}, -6 \right)$ .

529. Показать, что прямая, проведенная из произвольной точки  $M$  линии

$$x=t, \quad y=t^2, \quad z=t^3$$

параллельно плоскости  $z=0$  до встречи с осью  $Oz$ , лежит в соприкасающейся плоскости точки  $M$ .

530. Написать уравнение соприкасающейся плоскости линии

$$x=\cos^3 t, \quad y=\sin^3 t, \quad z=\cos 2t$$

в ее произвольной точке.

531. Составить уравнение соприкасающейся плоскости линии

$$x=t \cos t, \quad y=-t \sin t, \quad z=at$$

в начале координат.

532. Написать уравнение соприкасающейся плоскости линии

$$x=a \cos t, \quad y=b \sin t, \quad z=e^t$$

в точке  $t=0$ .

533. На бинормальных линии

$$x = \cos \alpha \cos t, \quad y = \cos \alpha \sin t, \quad z = t \sin \alpha$$

в положительном направлении отложены отрезки постоянной длины, равной единице. Написать уравнение соприкасающейся плоскости новой линии.

534. Составить уравнение соприкасающейся плоскости линии пересечения сферы

$$x^2 + y^2 + z^2 = 9$$

и гиперболического цилиндра

$$x^2 - y^2 = 3$$

в точке  $M(2, 1, 2)$ .

535. Доказать, что линия

$$x = e^t \cos t, \quad y = e^t \sin t, \quad z = 2t$$

расположена на поверхности

$$x^2 + y^2 - e^z = 0$$

и ее соприкасающаяся плоскость совпадает с касательной плоскостью поверхности.

536— Составить уравнения главной нормали и бинор-

539. мали следующих линий в указанных точках:

(536)  $x = t, \quad y = t^2, \quad z = e^t$  при  $t = 0$ ;

(537)  $x = t, \quad y = t^2, \quad z = t^3$  при  $t = 1$ ;

(538)  $x = y^2, \quad x^2 = z$  в точке  $M(1, 1, 1)$ ;

(539)  $xy = z^2, \quad x^2 + y^2 = z^2 + 1$  в точке  $M(1, 1, 1)$ .

540. От каждой точки линии

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t), \quad z = 4a \sin \frac{t}{2}$$

на главной ее нормали отложен отрезок длины

$$a \sqrt{1 + \sin^2 \frac{t}{2}}.$$

Доказать, что геометрическое место концов этих отрезков есть синусоида.

541. Найти точки на линии

$$x = \frac{2}{t}, \quad y = \ln t, \quad z = -t^2,$$

в которых бинормаль параллельна плоскости

$$x - y + 8z + 2 = 0.$$

542. На бинормальных винтовой линии отложены отрезки равной длины. Доказать, что концы этих отрезков лежат на другой винтовой линии.

543. Найти единичные векторы касательной, главной нормали и бинормали линии

$$x = t \sin t, \quad y = t \cos t, \quad z = te^t$$

в начале координат.

- 544— Найти единичные векторы касательной, главной нормали и бинормали в произвольной точке следующих линий:

$$(544) \quad x = \cos^3 t, \quad y = \sin^3 t, \quad z = \cos 2t;$$

$$(545) \quad x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t), \quad z = 4a \cos \frac{t}{2};$$

$$(546) \quad x = e^t \cos t, \quad y = e^t \sin t, \quad z = e^t;$$

$$(547) \quad x^3 = 3a^2y, \quad 2xz = a^2.$$

548. Доказать, что векторы  $\bar{t}$ ,  $\bar{n}$ ,  $\bar{b}$  линии

$$x = t, \quad y = t^2, \quad z = t^3$$

в точке  $O(0, 0, 0)$  совпадают с единичными векторами координатных осей.

549. Составить уравнения касательной, нормальной плоскости, бинормали, соприкасающейся плоскости, главной нормали и спрямляющей плоскости винтовой линии

$$x = a \cos t, \quad y = a \sin t, \quad z = bt.$$

Доказать, что главная нормаль пересекает ось

винтовой линии под прямым углом, а бинормаль образует с ней постоянный угол. Найти векторы репера Френе.

550. Написать уравнения касательной, главной нормали, бинормали и плоскостей сопровождающего трехгранника линии Вивиани. Найти векторы  $\bar{t}$ ,  $\bar{n}$ ,  $\bar{b}$  репера Френе.

551. Написать векторные уравнения линий, описываемых точками пересечения касательных, главных нормалей и бинормалей линии  $\bar{r}=\bar{r}(s)$  с плоскостью  $xOy$ .

552. Найти длину винтовой линии

$$x=a \cos t, \quad y=a \sin t, \quad z=bt$$

от точки пересечения с плоскостью  $xOy$  до произвольной точки  $M$ .

553. Показать, что длина соответствующей дуги винтовой линии пропорциональна длине направляющей окружности цилиндра, на котором лежит винтовая линия.

554. Написать параметрические уравнения винтовой линии, приняв за параметр длину дуги.

555. Найти длину дуги одного витка линии

$$x=a(t-\sin t), \quad y=a(1-\cos t), \quad z=4a \cos \frac{t}{2}$$

между двумя ее точками пересечения с плоскостью  $xOz$ .

556. Найти длину дуги линии

$$x^3=3a^2y, \quad 2xz=a^2$$

между плоскостями

$$y=\frac{a}{3}, \quad y=9a.$$

557. Показать, что замкнутая линия

$$x=\cos^3 t, \quad y=\sin^3 t, \quad z=\cos 2t$$

имеет длину  $s=10$ .



558. Найти длину дуги линии

$$x = a \operatorname{ch} t, \quad y = a \operatorname{sh} t, \quad z = at,$$

заключенной между точками, соответствующими значениям параметра 0 и  $t$ .

559. Найти длину дуги линии

$$x = ct, \quad y = c\sqrt{2} \ln t, \quad z = \frac{c}{t}$$

между точками  $t=1$ ,  $t=10$ .

560. Найти выражение дифференциала длины дуги линии в цилиндрических координатах.

561. Найти выражение дифференциала длины дуги линии в сферических координатах.

## § 11. Формулы Френе. Кривизна и кручение.

### Натуральные уравнения линии

Формулы Френе имеют вид:

$$\frac{d\bar{t}}{ds} = k\bar{n},$$

$$\frac{d\bar{n}}{ds} = -k\bar{t} + \kappa\bar{b},$$

$$\frac{d\bar{b}}{ds} = -\kappa\bar{n},$$

где  $\bar{t}$ ,  $\bar{n}$ ,  $\bar{b}$  — единичные векторы касательной, главной нормали, бинормали,  $s$  — натуральный параметр,  $k$  — кривизна,  $\kappa$  — *кручение* линии.

*Соприкасающейся окружностью* линии в заданной точке  $M$  называется окружность, которая лежит в соприкасающейся плоскости, проведенной в этой точке, и центр которой расположен на главной нормали в положительном направлении на расстоянии

$R = \frac{1}{k}$  от точки  $M$ . Центр соприкасающейся

окружности называется центром кривизны, а  $R$  — радиусом кривизны линии в заданной точке. Кривизна линии вычисляется по формуле

$$k = |\overline{r' r''}]| : |\overline{r'}|^3$$

или

$$k = \frac{\sqrt{\left| \begin{smallmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{smallmatrix} \right|^2 + \left| \begin{smallmatrix} z' & x' \\ z'' & x'' \end{smallmatrix} \right|^2 + \left| \begin{smallmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{smallmatrix} \right|^2}}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Формула для вычисления кручения

$$\kappa = (\overline{r' r'' r'''}) : [\overline{r' r''}]^2$$

или

$$\kappa = \frac{\left| \begin{smallmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{smallmatrix} \right|}{\left| \begin{smallmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{smallmatrix} \right|^2 + \left| \begin{smallmatrix} z' & x' \\ z'' & x'' \end{smallmatrix} \right|^2 + \left| \begin{smallmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{smallmatrix} \right|^2}.$$

В частности, если в качестве параметра взят натуральный параметр  $s$ , то

$$k = |\ddot{r}|,$$

$$k = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2},$$

$$\kappa = (\overline{\ddot{r} \ddot{r} \ddot{r}}) : \ddot{r}^2,$$

$$\kappa = \frac{\left| \begin{smallmatrix} \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ \ddot{x} & \ddot{y} & \ddot{z} \\ \ddot{\ddot{x}} & \ddot{\ddot{y}} & \ddot{\ddot{z}} \end{smallmatrix} \right|}{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}.$$

Уравнения

$$k=k(s), \quad \kappa=\kappa(s)$$

называются *натуральными уравнениями линии*.

562. Проверить, что для линии  $\bar{r}=\bar{r}(s)$  выполняются следующие соотношения:

$$\bar{r}^2=1, \quad \bar{r}^2=k^2, \quad |\bar{r}^3|=k^4+k^2\kappa^2+k^2,$$

$$\bar{r}^1\bar{r}^1=0, \quad \bar{r}^1\bar{r}^2=-k^2, \quad \bar{r}^1\bar{r}^3=k\dot{k}.$$

563. Написать разложения приращений  $\Delta\bar{t}$ ,  $\Delta\bar{n}$ ,  $\Delta\bar{b}$  векторов  $\bar{t}$ ,  $\bar{n}$ ,  $\bar{b}$  по самим этим векторам, ограничиваясь членами третьего порядка.

564. Доказать, что формулы Френе

$$\bar{t}^1=k\bar{n}, \quad \bar{n}^1=-k\bar{t}+\kappa\bar{b}, \quad \bar{b}^1=-\kappa\bar{n}$$

можно записать в виде

$$\bar{t}^1=[\bar{\omega}\bar{t}], \quad \bar{n}^1=[\bar{\omega}\bar{n}], \quad \bar{b}^1=[\bar{\omega}\bar{b}].$$

Найти вектор  $\bar{\omega}$  (вектор Дарбу) и выяснить его кинематический смысл.

565. Доказать, что

$$1) \quad \bar{t}^1\bar{b}^1\bar{b}^1=\kappa,$$

$$2) \quad \bar{b}^1\bar{b}^1\bar{b}^1=\kappa^5\left(\frac{k}{\kappa}\right)^{\cdot},$$

$$3) \quad \bar{t}^1\bar{t}^1\bar{t}^1=k^5\left(\frac{\kappa}{k}\right)^{\cdot}.$$

566. Для того чтобы линия была прямой, необходимо и достаточно, чтобы  $k\equiv 0$ . Доказать.

567. Для того чтобы линия была плоской, необходимо и достаточно, чтобы  $\kappa\equiv 0$ . Доказать.

568. Доказать, что в точке  $M_0$  кривизна линии  $L$  равна кривизне проекции  $L^*$  линии  $L$  на ее соприкасающуюся плоскость в точке  $M_0$ .

**569.** Доказать, что для следующих линий кривизна и кручение равны:

$$(569) \quad x = a \operatorname{ch} t, \quad y = a \operatorname{sh} t, \quad z = at;$$

$$(570) \quad x = 3t - t^3, \quad y = 3t^2, \quad z = 3t + t^3.$$

**571.** Найти кривизну и кручение винтовой линии

$$x = a \cos t, \quad y = a \sin t, \quad z = bt.$$

**572.** Найти кривизну конической винтовой линии

$$x = t \cos t, \quad y = t \sin t, \quad z = at$$

в начале координат.

**573—578.** Найти кривизну и кручение следующих линий:

$$(573) \quad x = a \operatorname{ch} t, \quad y = a \operatorname{sh} t, \quad z = at;$$

$$(574) \quad x = e^t, \quad y = e^{-t}, \quad z = t\sqrt{2};$$

$$(575) \quad x = 2t, \quad y = \ln t, \quad z = t^2;$$

$$(576) \quad x = \cos^3 t, \quad y = \sin^3 t, \quad z = \cos 2t;$$

$$(577) \quad y^2 = x, \quad x^2 = z;$$

$$(578) \quad x^3 = 3a^2y, \quad 2xz = a^2.$$

**579.** Найти, при каких  $a$  и  $b$  кручение линии

$$x = a \operatorname{ch} t, \quad y = a \operatorname{sh} t, \quad z = bt$$

во всех точках равно ее кривизне.

**580.** Найти точки на линии

$$x = \cos^3 t, \quad y = \sin^3 t, \quad z = \cos 2t,$$

в которых кривизна имеет минимальное значение (локальное).

**581.** В каких точках радиус кривизны линии

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t), \quad z = 4a \cos \frac{t}{2}$$

достигает локального минимума?

**582.** Доказать, что радиус кривизны конической спирали

$$x = a \cos \varphi \cdot e^{k\varphi}, \quad y = a \sin \varphi \cdot e^{k\varphi}, \quad z = be^{k\varphi}$$

пропорционален расстоянию точки спирали до оси конуса.

- 583— Доказать, что следующие линии плоские, и составить уравнения плоскостей, в которых они расположены:

$$(583) \quad x = \frac{1+t}{1-t}, \quad y = \frac{1}{1-t^2}, \quad z = \frac{t}{1+t};$$

$$(584) \quad x = a_1 t^2 + b_1 t + c_1, \quad y = a_2 t^2 + b_2 t + c_2, \\ z = a_3 t^2 + b_3 t + c_3;$$

$$(585) \quad x = a_1 t^n + b_1 t^p + c_1, \quad y = a_2 t^n + b_2 t^p + c_2, \\ z = a_3 t^n + b_3 t^p + c_3 \quad (n \text{ и } p — \text{натуральные числа}).$$

586. Доказать, что линия

$$x^2 = 2az, \quad y^2 = 2bz$$

целиком лежит в двух пересекающихся плоскостях. Составить уравнения этих плоскостей.

587. Найти такую функцию  $f(t)$ , чтобы линия

$$x = a \cos t, \quad y = a \sin t, \quad z = f(t)$$

была плоской.

588. *Обобщенной винтовой линией* называется пространственная линия, касательные к которой образуют постоянный угол с фиксированным направлением.

Доказать, что линия будет обобщенной винтовой тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий:

- а) главные нормали перпендикулярны фиксированному направлению;
- б) бинормали образуют постоянный угол с фиксированным направлением;
- в) отношение кривизны к кручению постоянно.

589. Показать, что условие

$$(\ddot{r} \ddot{r} \ddot{r}^{(4)}) = 0$$

необходимо и достаточно для того, чтобы линия была обобщенной винтовой.

590. Доказать, что линия

$$x^2 = 3y, \quad 2xy = 9z$$

является обобщенной винтовой.

591. Показать, что линия

$$x = 2t, \quad y = \ln t, \quad z = t^2$$

является обобщенной винтовой линией, лежащей на цилиндрической поверхности, образующие которой параллельны вектору  $\bar{a}$  (0, 1, 1).

592. Найти условия, при которых линия

$$x = at, \quad y = bt^2, \quad z = ct^3$$

будет обобщенной винтовой линией.

593. Доказать, что если все нормальные плоскости линии содержат постоянный вектор  $\bar{e}$ , то данная линия плоская.

594. Доказать, что если все соприкасающиеся плоскости линии перпендикулярны некоторой фиксированной прямой, то линия — плоская.

595. Доказать, что если различные линии имеют в соответствующих точках общие бинормали, то они плоские.

596. Если между точками двух линий можно установить такое соответствие, что в соответствующих точках касательные параллельны, то отношения кручения к кривизне в этих точках одинаковы по абсолютной величине. Доказать.

597. *Линией Бертрана* называется такая линия, главные нормали которой являются одновременно главными нормальными некоторой второй линии, отличной от первой.

Доказать, что линии Бертрана характеризуются зависимостью

$$\lambda k + \mu \kappa = 1,$$

где  $\lambda, \mu$  — const.

598. Показать, что угол между касательными в соответствующих точках линий Бертрана постоянен.
599. Доказать, что расстояние между двумя соответствующими точками линий Бертрана постоянно.
600. Доказать, что линия с постоянной кривизной является линией Бертрана. Показать при этом, что соответствующая линия имеет ту же кривизну и что каждая из этих линий есть геометрическое место центров кривизны другой. Показать, что в соответствующих точках касательные перпендикулярны.
601. Между точками двух линий установлено взаимно однозначное соответствие таким образом, что касательные, главные нормали и бинормали в соответствующих точках параллельны. Доказать, что

$$\frac{k^*}{k} = \frac{ds}{ds^*} = \frac{\kappa^*}{\kappa},$$

где  $k, \kappa, s$  — кривизна, кручение и длина дуги одной линии,  $k^*, \kappa^*, s^*$  — соответствующие величины другой линии.

602. Назовем *эвольвентой* неплоской линии  $\bar{r} = \bar{r}(s)$  линию  $\bar{\rho} = \bar{r} - st$ . Выразить кривизну и кручение этой линии через кривизну и кручение линии  $\bar{r} = \bar{r}(s)$ . Доказать, что если линия  $\bar{r} = \bar{r}(s)$  обобщенная винтовая, то линия  $\bar{\rho} = \bar{r} - st$  — плоская.
603. Вывести формулы для кривизны и кручения линии, заданной уравнениями

$$y = y(x), \quad z = z(x),$$

и найти ее векторы  $\bar{t}, \bar{n}, \bar{b}$ .

604. Показать, что если кривизна и кручение линии постоянны, то линия является винтовой.
605. Зная кривизну  $k$  и кручение  $\kappa$  винтовой линии, составить ее параметрические уравнения.
606. Показать, что из всех линий Бертрана только для винтовой линии существует бесконечное множество линий с общими главными нормальными.

607. Составить натуральные уравнения следующих  
608. линий:

$$(607) \quad x = a \operatorname{ch} t, \quad y = a \operatorname{sh} t, \quad z = at;$$

$$(608) \quad x = ct, \quad y = c \sqrt{2} \ln t, \quad z = ct^{-1}.$$

609. Линия задана натуральными уравнениями

$$k = k(s), \quad \kappa = \kappa(s).$$

Показать, что натуральные уравнения линии, симметричной данной относительно начала координат, будут

$$k = k(s), \quad \kappa = -\kappa(s).$$

## § 12. Разные задачи

610. Говорят, что две линии

$$\bar{r} = \bar{r}_1(s) \quad \text{и} \quad \bar{r} = \bar{r}_2(s)$$

имеют в общей точке *соприкосновение порядка не ниже  $n$* , если в этой точке

$$\bar{r}_1(s) = \bar{r}_2(s), \quad \bar{r}_1'(s) = \bar{r}_2'(s), \quad \bar{r}_1''(s) = \bar{r}_2''(s), \quad \dots, \quad \bar{r}_1^{(n)}(s) = \bar{r}_2^{(n)}(s).$$

Найти геометрический признак соприкосновения линий не ниже второго порядка.

611. Доказать, что в случае соприкосновения двух линий не ниже третьего порядка кручения в их общей точке равны. Верно ли обратное?

612. Найти порядок малости кратчайшего расстояния между касательными линии относительно расстояния между точками касания. Решить аналогичную задачу для главных нормалей и бинормалей.

613. Доказать, что линия и ее соприкасающаяся окружность в данной точке имеют соприкосновение не ниже второго порядка.

614. При каком условии центр кривизны винтовой линии лежит на том же цилиндре, что и сама винтовая линия?



615. Сфера, имеющая с линией в данной точке касание порядка не ниже третьего, называется *соприкасающейся сферой* в этой точке (определение касания линии с поверхностью см. в § 14).

Доказать, что если линия задана уравнением  $\bar{r} = \bar{r}(s)$ , то радиус-вектор центра соприкасающейся сферы задается формулой

$$\bar{r}_s = \bar{r} + R\bar{n} + \frac{\dot{R}}{\kappa} \bar{b},$$

а радиус соприкасающейся сферы —

$$R_s = \sqrt{R^2 + \frac{\dot{R}^2}{\kappa^2}}.$$

616. Найти радиус соприкасающейся сферы линии

$$x=t, \quad y=t^2, \quad z=t^3$$

в точке  $t=0$ .

617. Найти радиус соприкасающейся сферы в произвольной точке следующих линий:

$$(617) \quad x=e^t, \quad y=e^{-t}, \quad z=\sqrt{2}t;$$

$$(618) \quad x=e^t \sin t, \quad y=e^t \cos t, \quad z=e^t.$$

619. Показать, что две линии, имеющие в точке соприкосновение не ниже третьего порядка, имеют в этой точке одну и ту же соприкасающуюся сферу.

620. Если радиус соприкасающейся сферы постоянен, то линия является сферической (лежит на сфере) или имеет постоянную кривизну. Доказать.

621. Найти геометрическое место центров соприкасающихся сфер винтовой линии

$$x=a \cos t, \quad y=a \sin t, \quad z=bt.$$

622. Доказать, что соприкасающаяся плоскость линии пересекает ее соприкасающуюся сферу в той же точке по соприкасающейся окружности.

623. *Огибающей семейства пространственных линий*

называется линия, которая в каждой своей точке касается некоторой линии семейства.

Найти условия, которым удовлетворяют точки огибающей однопараметрического семейства линий, заданного системой уравнений

$$F(x, y, z, C) = 0, \quad G(x, y, z, C) = 0.$$

624. Найти условия, которым удовлетворяют точки огибающей однопараметрического семейства линий, заданного уравнением

$$\bar{r} = \bar{r}(t, C).$$

625. Найти условия, которым удовлетворяют точки огибающей семейства прямых

$$\bar{r} = \bar{r}_0(C) + t\bar{a}(C).$$

626. *Подэрой* пространственной линии по отношению к точке  $O$  называется геометрическое место оснований перпендикуляров, опущенных из точки  $O$  на касательные к этой линии.

Найти подэру линии

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t)$$

относительно начала координат.

627. Найти подэру винтовой линии

$$x = a \cos t, \quad y = a \sin t, \quad z = bt$$

относительно начала координат. Показать, что она лежит на однополостном гиперболоиде

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{b^2}{a^4} z^2 = 1.$$

## Поверхности

## § 13. Уравнения поверхности

628. В плоскости  $xOz$  задана линия

$$x=f(u), \quad z=\varphi(u).$$

Написать параметрические уравнения поверхности, полученной при вращении этой линии вокруг оси  $Oz$ .

629— Написать параметрические уравнения следующих  
635. поверхностей вращения второго порядка:

(629) сферы;

(630) эллипсоида вращения;

(631) однополостного гиперболоида вращения;

(632) двуполостного гиперболоида вращения;

(633) параболоида вращения;

(634) кругового цилиндра;

(635) кругового конуса.

636. Написать уравнения *тора*, который получается при вращении окружности

$$x=a+b \cos u, \quad y=0, \quad z=b \sin u, \quad b < a,$$

вокруг оси  $Oz$ .

637. Написать уравнения *катеноида*, который получается при вращении цепной линии

$$x=a \operatorname{ch} \frac{u}{a}, \quad y=0, \quad z=u$$

вокруг оси  $Oz$ .

638. Написать уравнения *псевдосферы*, которая получается при вращении трактрисы

$$x=a \sin u, \quad y=0, \quad z=a \left( \ln \operatorname{tg} \frac{u}{2} + \cos u \right)$$

вокруг оси  $Oz$ .

639— Написать параметрические уравнения следующих  
644. поверхностей второго порядка:

- (639) эллипсоида;
- (640) однополостного гиперболоида;
- (641) двуполостного гиперболоида;
- (642) эллиптического параболоида;
- (643) эллиптического цилиндра;
- (644) конуса.

645. Написать параметрические уравнения гиперболического параболоида

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z,$$

приняв за координатные линии его прямолинейные образующие. Как запишутся эти уравнения, если уравнение поверхности взято в виде  $z = xy$ ?

646. Написать параметрические уравнения цилиндрической поверхности, образующие которой параллельны оси  $Oz$ , а направляющая задается уравнением  $x = f(u)$ ,  $y = \varphi(u)$ ,  $z = 0$ .

647. Написать параметрические уравнения гиперболического и параболического цилиндров.

648. Написать уравнение цилиндрической поверхности, для которой линия  $\bar{\rho} = \bar{\rho}(u)$  является направляющей, а образующие параллельны вектору  $\bar{e}$ .

649. Написать параметрические уравнения цилиндрической поверхности, образующие которой параллельны вектору  $\bar{a}$  (1, 2, 3), а направляющая которой  $x = u$ ,  $y = u^2$ ,  $z = u^3$ .

650. Записать неявное уравнение цилиндрической поверхности с направляющей линией

$$x = \cos u, \quad y = \sin u, \quad z = 0$$

и прямолинейными образующими, параллельными вектору  $\bar{a}$  (−1, 3, −2).

651. Доказать, что уравнение цилиндрической поверх-

ности, направляющие которой параллельны вектору  $\bar{a}(l, m, n)$ , имеет вид  

$$f(nx-lz, ny-mz)=0.$$

652. Найти уравнение цилиндрической поверхности, направляющая которой есть линия

$$z=0, \quad x^2+y^2=ay,$$

а образующие параллельны вектору  $\bar{a}(l, m, n)$ .

653. Дана поверхность

$$x=3u+v^2+1, \quad y=2u+v^2-1, \quad z=-u+2v.$$

1. Показать, что эта поверхность цилиндрическая.

2. Записать какую-нибудь ее направляющую линию.

3. Найти прямолинейную образующую, проходящую через точку  $M(u=2, v=3)$ .

654. Задана точка  $M(a, b, c)$  и линия  $L$

$$x=f(u), \quad y=\varphi(u), \quad z=\psi(u).$$

Написать в параметрическом и неявном виде уравнения конической поверхности с вершиной в точке  $M$  и с направляющей линией  $L$ .

655. Составить уравнение конической поверхности, образуемой прямыми, проходящими через точку  $M(a, b, c)$  и пересекающимися параболу

$$y^2=2px, \quad z=0.$$

656. Составить уравнение конической поверхности, имеющей вершину в точке  $M(-1, 0, 0)$  и описанной около параболоида

$$2y^2+z^2=4x.$$

657. Дана поверхность

$$x=u+v, \quad y=u-v, \quad z=uv.$$

Проверить, принадлежат ли ей точки  $A(4, 2, 3)$ ,  $B(1, 4, -2)$ .

658. Какая поверхность задается уравнениями

$$x=u+\sin v, \quad y=u+\cos v, \quad z=u+a?$$

659. Найти неявное уравнение поверхности, заданной параметрическими уравнениями

$$x=x_0+a \cos u \cos v, \quad y=y_0+b \cos u \sin v, \\ z=z_0+c \sin u.$$

660. Показать, что уравнения

$$x=\frac{u}{u^2+v^2}, \quad y=\frac{v}{u^2+v^2}, \quad z=\frac{1}{u^2+v^2}$$

и

$$x=u \cos v, \quad y=u \sin v, \quad z=u^2$$

задают одну и ту же поверхность.

661. Задано уравнение конической поверхности

$$\bar{r}=u\bar{e}(v), \quad |\bar{e}|=|\bar{e}'|=1.$$

Какой геометрический смысл имеют параметры  $u$  и  $v$ ?

662—664. Выяснить вид координатных линий на плоскости:

$$(662) \quad x=u, \quad y=v, \quad z=0;$$

$$(663) \quad x=u \cos v, \quad y=u \sin v, \quad z=0;$$

$$(664) \quad x=\cos u \operatorname{ch} v, \quad y=\sin u \operatorname{sh} v, \quad z=0.$$

665. Показать, что параметрические уравнения однополостного гиперболоида можно представить в виде

$$x=a \frac{uv+1}{u+v}, \quad y=b \frac{u-v}{u+v}, \quad z=\frac{uv-1}{u+v}.$$

Каковы координатные линии поверхности при указанной параметризации?

666. Написать параметрические уравнения кругового цилиндра таким образом, чтобы координатными линиями служили: а) винтовые линии и окружно-

- сти; б) винтовые линии и прямолинейные образующие; в) два семейства винтовых линий.
667. Написать параметрические уравнения поверхности, образованной касательными к данной линии  $\bar{\rho} = \bar{\rho}(u)$ , и выяснить характер координатной сети.
668. Написать параметрические уравнения поверхности, образованной касательными к винтовой линии  $x = a \cos u, y = a \sin u, z = bu$ .
- По какой линии эта поверхность пересекает плоскость  $z = 0$ ?
669. Написать в параметрическом и неявном виде уравнения поверхности, образованной касательными к линии  $x = u, y = u^2, z = u^3$ .
670. *Геликоидом общего вида* называется поверхность, образованная некоторой линией (*профилем*), вращающейся около оси и одновременно поступательно движущейся в направлении этой оси, причем скорости этих движений пропорциональны. Составить уравнения геликоида общего вида.
671. Геликоид, профилем которого служит прямая, пересекающая ось, называется *прямым*, если прямая перпендикулярна оси, и *косым*, если прямая не перпендикулярна оси. Написать уравнения этих поверхностей, принимая за ось вращения ось  $Oz$ .
672. Найти уравнение поверхности, образованной главными нормальными винтовой линии.
673. *Прямым коноидом* называется поверхность, образованная вращением прямой линии вокруг оси, пересекающей ее под прямым углом, и одновременным переносом прямой вдоль оси. Написать уравнение коноида, ось которого совпадает с осью  $Oz$ .
674. Написать в неявном виде уравнение прямого коноида, у которого перемещение вдоль оси  $Oz$  определяется формулой  $z = a \sin 2v$ , где  $v$  — угловая скорость вращения прямой.

675. Написать параметрические уравнения поверхности  $x^2z^2 = a^2(x^2 + y^2)$ .

Доказать, что это прямой коноид.

676. Окружность радиуса  $a$  перемещается так, что ее центр движется по заданной линии  $\bar{\rho} = \bar{\rho}(s)$ , а плоскость, в которой она расположена, является в каждый момент нормальной плоскостью этой линии. Составить уравнение поверхности, описываемой окружностью (*трубчатая поверхность*).

677. *Поверхностью переноса* называется поверхность, описываемая некоторой линией  $L$  при ее поступательном перемещении.

Пусть  $\bar{r} = \bar{r}_1(u)$  — уравнение линии  $L$ , а  $\bar{r} = \bar{r}_2(v)$  — уравнение линии, описываемой некоторой точкой линии  $L$  при переносе. Тогда уравнение поверхности переноса имеет вид

$$\bar{r} = \bar{r}_1(u) + \bar{r}_2(v)$$

и, обратно, любое такое уравнение задает поверхность переноса. Доказать.

678. Показать, что поверхность, являющаяся геометрическим местом середин отрезков, концы которых принадлежат двум данным линиям, есть поверхность переноса.

679. Доказать, что часть прямого геликоида

$$x = v \cos u, \quad y = v \sin u, \quad z = au$$

для  $v \leq c$  (где  $c$  — некоторое положительное число) является поверхностью переноса.

680. Показать, что эллиптический и гиперболический параболоиды являются поверхностями переноса. Написать их уравнения в виде

$$\bar{r} = \bar{r}_1(u) + \bar{r}_2(v).$$

681. Доказать, что координаты  $x, y, z$  произвольной точки поверхности второго порядка можно всегда выразить рациональными функциями двух параметров  $u$  и  $v$ .



## § 14. Касательная плоскость и нормаль к поверхности. Линейчатые поверхности. Касание линии с поверхностью

Уравнения касательной плоскости, соответствующие заданиям поверхности (9), (11), (13), (16) введения, имеют вид

$$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} = 0,$$

где  $x_u = \frac{\partial x}{\partial u}$ ,  $x_v = \frac{\partial x}{\partial v}$ , ... ;

$$Z-z = p(X-x) + q(Y-y),$$

где  $p = \frac{\partial z}{\partial x}$ ,  $q = \frac{\partial z}{\partial y}$ ;

$$(\bar{R} - \bar{r}, \bar{r}_u, \bar{r}_v) = 0;$$

$$(X-x)F_x + (Y-y)F_y + (Z-z)F_z = 0;$$

уравнения нормали

$$\frac{X-x}{\begin{vmatrix} y_u z_u \\ y_v z_v \end{vmatrix}} = \frac{Y-y}{\begin{vmatrix} z_u x_u \\ z_v x_v \end{vmatrix}} = \frac{Z-z}{\begin{vmatrix} x_u y_u \\ x_v y_v \end{vmatrix}};$$

$$\frac{X-x}{-p} = \frac{Y-y}{-q} = \frac{Z-z}{1};$$

$$\bar{R} = \bar{r} + \lambda[\bar{r}_u \bar{r}_v];$$

$$\frac{X-x}{F_x} = \frac{Y-y}{F_y} = \frac{Z-z}{F_z}.$$

Линейчатую поверхность можно задать векторным уравнением

$$\bar{R} = \bar{r}(u) + v\bar{l}(u), \tag{1}$$

где  $\bar{r} = \bar{r}(u)$  — направляющая линия, а  $\bar{l}(u)$  — направляющий вектор прямолинейной образующей. Линейчатая поверхность называется *развертывающейся*, если во всех ее точках

$$(\bar{r}_u \bar{l}_u) = 0.$$

В противном случае поверхность называется *косой линейчатой* поверхностью.

Уравнение *горловой* (или *стрикционной*) линии линейчатой поверхности (1) имеет вид

$$\bar{R} = \bar{r}(u) - \frac{d\bar{r}d\bar{l}}{(d\bar{l})^2} \bar{l}(u).$$

Единичный вектор нормали  $\bar{m}$  к поверхности  $\bar{r} = \bar{r}(u, v)$  находится по формуле

$$\bar{m} = [\bar{r}_u \bar{r}_v] : |[\bar{r}_u \bar{r}_v]|.$$

Пусть линия

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t) \quad (2)$$

имеет с поверхностью

$$F(x, y, z) = 0 \quad (3)$$

общую точку  $M(t_0)$ .

Рассмотрим функцию

$$\Phi(t) = F(x(t), y(t), z(t)).$$

Когда точка  $M(t)$  стремится по линии (2) к точке  $M(t_0)$ ,  $\Phi(t)$  будет бесконечно малой величиной. Если порядок малости этой величины относительно  $t - t_0$  равен  $k+1$ , то говорят, что линия (2) имеет с поверхностью (3) *касание  $k$ -го порядка*.

682. Если через точку  $M$  поверхности проходит прямая, лежащая на поверхности, то касательная плоскость в точке  $M$  к поверхности содержит данную прямую. Доказать.

683. На поверхности

$$x = u + \cos v, \quad y = u - \sin v, \quad z = \lambda u$$

дана точка  $M \left( u = 1, v = \frac{\pi}{2} \right)$ :

а) написать уравнения касательных прямых и нормальных плоскостей к линиям  $u = 1$ ,  $v = \frac{\pi}{2}$  в точке  $M$ ;

б) найти угол между линиями  $u = 1$ ,  $v = \frac{\pi}{2}$ ;

в) показать, что касательная в точке  $M$  к линии  $u = \sin v$  является касательной к линии  $u = 1$  в той же точке.

684. Показать, что нормаль в произвольной точке поверхности, образованной касательными к винтовой линии, образует постоянный угол с осью линии.

685. Написать уравнение касательной плоскости к поверхности

$$x = 2u - v, \quad y = u^2 + v^2, \quad z = u^3 - v^3$$

в точке  $M (3, 5, 7)$ .

686. Написать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности

$$x = u + v, \quad y = u - v, \quad z = uv$$

в точке  $M (u = 2, v = 1)$ .

687. Написать уравнения касательной плоскости и нормали в точке  $M (1, 3, 4)$  поверхности

$$x = u, \quad y = u^2 - 2v, \quad z = u^3 - 3uv.$$

688. Дана поверхность

$$x = u \cos v, \quad y = u \sin v, \quad z = u.$$

В ее точке  $M \left( u = 2, v = \frac{\pi}{4} \right)$  написать уравнения касательной плоскости, нормали к поверхности и касательной к линии  $u = 2$ .

**689—** Написать уравнения касательной плоскости и нормали к следующим поверхностям в указанных точках:

(689)  $z = x^3 + y^3$  в точке  $M(1, 2, 9)$ ;

(690)  $x^2 + y^2 + z^2 = 169$  в точке  $M(3, 4, 12)$ ;

(691)  $x^2 - 2y^2 - 3z^2 - 4 = 0$  в точке  $M(3, 1, -1)$ ;

(692)  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  в точке  $M(x_0, y_0, z_0)$ .

**693.** Написать уравнение касательной плоскости к псевдосфере

$$x = a \sin u \cos v, \quad y = a \sin u \sin v,$$

$$z = a \left( \ln \operatorname{tg} \frac{u}{2} + \cos u \right).$$

**694.** Составить уравнения касательной плоскости и нормали к прямому геликоиду

$$x = u \cos v, \quad y = u \sin v, \quad z = av.$$

Исследовать поведение нормали при смещении ее вдоль координатных линий.

**695.** Написать уравнение касательной плоскости к тору

$$x = (1 + 5 \cos u) \cos v, \quad y = (1 + 5 \cos u) \sin v, \\ z = 5 \sin u$$

в точке  $M(u, v)$ , для которой

$$\cos u = \frac{3}{5}, \quad \cos v = \frac{4}{5} \quad \left( 0 < u, v < \frac{\pi}{2} \right).$$

**696.** К поверхности

$$xyz = 1$$

провести касательную плоскость, параллельную плоскости

$$x + y + z - 3 = 0.$$

697. Доказать, что касательные плоскости к поверхности

$$xyz = a^3$$

образуют с плоскостями координат тетраэдр постоянного объема.

698. Показать, что касательная плоскость в произвольной точке конической поверхности проходит через ее вершину.

699. Показать, что все плоскости, касательные к поверхности

$$z = x^3 + y^3$$

в точках  $M(\alpha, -\alpha, 0)$ , образуют пучок плоскостей.

700. Найти точки тора

$$x = (a + b \cos u) \cos v, \quad y = (a + b \cos u) \sin v, \\ z = b \sin u,$$

в которых нормаль перпендикулярна плоскости

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

701. Дана поверхность

$$x^n + y^n + z^n - d^n = 0$$

и точка  $M(a, b, c)$  на ней ( $a, b, c, d$  — положительные). Показать, что если  $A, B, C$  — точки, в которых касательная плоскость в точке  $M$  пересекает оси  $Ox, Oy, Oz$ , то

$$\frac{a}{OA} + \frac{b}{OB} + \frac{c}{OC} = 1.$$

702. Показать, что касательная плоскость в произвольной точке поверхности

$$f(x - az, y - bz) = 0$$

параллельна фиксированному направлению.

703. Показать, что касательная плоскость в произвольной точке поверхности

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} + z^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$$

отсекает на осях координат отрезки, сумма квадратов которых есть величина постоянная.

704. Доказать, что касательная плоскость к трубчатой поверхности (см. задачу 676) параллельна касательной к направляющей линии, а нормальными к поверхности являются нормали направляющей линии.

705. Показать, что касательные плоскости поверхности

$$z = x\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

проходят через начало координат.

706. Доказать, что касательные плоскости поверхности переноса

$$\bar{r} = \bar{r}_1(u) + \bar{r}_2(v)$$

вдоль каждой линии переноса ( $u = \text{const}$  или  $v = \text{const}$ ) параллельны некоторой прямой.

707. Поверхность  $S'$  называется *параллельной* поверхности  $S$ , если она является геометрическим местом концов отрезков постоянной длины, отложенных на нормалях поверхности  $S$  от точек этой поверхности. Будем считать соответствующими точками поверхностей  $S$  и  $S'$  концы отрезков, о которых идет речь в определении.

Показать, что

а) касательные плоскости в соответствующих точках параллельных поверхностей  $S$  и  $S'$  параллельны; б) свойство параллельности взаимно (т. е. если  $S'$  параллельна  $S$ , то  $S$  параллельна  $S'$ ).

708. Написать уравнение касательной плоскости в произвольной точке поверхности, образованной касательными к линии  $\bar{r} = \bar{r}(s)$ . Исследовать ее поведение при смещении точки касания вдоль прямолинейных образующих поверхности.

**709.** Доказать, что поверхности

$$z = \operatorname{tg} xy \text{ и } x^2 - y^2 = a$$

ортогональны вдоль линии их пересечения.

**710—** Доказать, что следующие семейства поверхностей

**712.** попарно ортогональны ( $u, v, w$  — параметры семейств):

$$(710) \quad 4x + y^2 + z^2 = u, \quad y = vz, \quad y^2 + z^2 = we^x;$$

$$(711) \quad x^2 + y^2 + z^2 = ux, \quad x^2 + y^2 + z^2 = vy, \quad x^2 + y^2 + z^2 = wz;$$

$$(712) \quad xy = uz^2, \quad x^2 + y^2 + z^2 = v, \quad x^2 + y^2 + z^2 = w(x^2 - y^2).$$

**713.** Показать, что касательная плоскость, проведенная в любой точке линии  $v = c$  на поверхности

$$x = u \cos v, \quad y = u \sin v, \quad z = f(v) + au,$$

проходит через фиксированную прямую.

**714.** Доказать, что если все нормали поверхности проходят через одну точку, то эта поверхность есть сфера или область на сфере.

**715.** Доказать, что нормаль поверхности вращения совпадает с главной нормалью меридиана и пересекает ось вращения.

**716.** Если все нормали поверхности пересекают одну и ту же прямую, то поверхность будет поверхностью вращения. Доказать.

**717.** Доказать, что линейчатая поверхность является развертывающейся тогда и только тогда, когда каждая касательная плоскость касается ее вдоль прямолинейной образующей.

**718.** Доказать, что поверхность, параллельная развертывающейся, есть также развертывающаяся поверхность.

**719.** Доказать, что любая развертывающаяся поверхность есть либо цилиндрическая, либо коническая, либо состоит из касательных к некоторой пространственной линии. В последнем случае указанная линия называется *ребром возврата*.

**720.** Доказать, что соприкасающаяся плоскость ребра возврата развертывающейся поверхности совпадает с касательной плоскостью этой поверхности.

**721.** Поверхность, образованная касательными к линии  $x=u, y=u^2, z=u^3$ ,

пересечена плоскостью  $x=0$ . Найти уравнение линии, полученной в сечении.

**722.** Найти уравнение линии пересечения развертывающейся поверхности и нормальной плоскости ребра возврата в некоторой его точке. Доказать, что точка ребра возврата является для этой линии особой (точкой возврата первого рода).

**723.** Доказать, что линия пересечения развертывающейся поверхности с соприкасающейся плоскостью ребра возврата имеет в точке возврата кривизну, равную  $\frac{3}{4}$  кривизны ребра возврата в данной точке.

**724.** Доказать, что линия пересечения развертывающейся поверхности и спрямляющей плоскости ребра возврата имеет в точке ребра возврата точку перегиба.

**725.** Поверхностью Каталана называется косая линейчатая поверхность, все образующие которой параллельны некоторой плоскости, называемой направляющей.

Доказать, что необходимыми и достаточными условиями того, чтобы линейчатая поверхность

$$\bar{r} = \bar{\rho}(u) + v\bar{e}(u)$$

была поверхностью Каталана, являются условия

$$(\bar{e}'\bar{e}'')=0, \quad \bar{e}'' \neq 0.$$

**726—** Найти горловую линию следующих поверхностей:

**729.**

(726) прямого геликоида;

(727) однополостного гиперболоида вращения;



- (728) поверхности, образованной бинормальными пространственной линией;
- (729) поверхности, образованной главными нормальными пространственной линией.
730. Доказать, что поверхность, образованная нормальными, проведенными в точках одной образующей косоугольной поверхности, есть гиперболический параболоид.
731. Показать, что линия  
 $yz=x, \quad xz=y+1$   
 имеет с поверхностью  $z=xy$  в точке  $M(0, -1, 0)$  касание второго порядка.
732. Найти порядок касания линии  
 $x=t^3, \quad y=t^3+2t, \quad z=t^2$   
 с поверхностью  
 $x^2+y^2=x(y+z)$   
 в начале координат.
733. Прямая, имеющая с поверхностью второго порядка касание не ниже второго порядка, целиком лежит на этой поверхности. Доказать.
734. Если линия в каждой своей точке имеет с соприкасающейся плоскостью касание не ниже третьего порядка, то эта линия плоская. Доказать.
735. Пусть линия  $L$  имеет с поверхностью  $S$  в точке  $M_0$  касание порядка  $n$ . Показать, что проекция  $L'$  линии  $L$  на  $S$  параллельно некоторому направлению, не лежащему в касательной плоскости к  $S$  в точке  $M_0$ , имеет с линией  $L$  в точке  $M_0$  касание порядка  $n$ .

## § 15. Семейство поверхностей. Огибающая

Пусть

$$F(x, y, z, C) = 0 \quad (1)$$

уравнение однопараметрического семейства поверхностей. Множество всех точек, удовлетворяющих системе уравнений

$$F(x, y, z, C) = 0, \quad F_C(x, y, z, C) = 0, \quad (2)$$

называют *дискриминантной поверхностью* семейства (1). Заметим, что это множество может не удовлетворять определению поверхности, данному во введении (см., например, задачи 739, 740).

Если  $F_x, F_y, F_z$  в точках дискриминантной поверхности не обращаются одновременно в нуль, то дискриминантная поверхность совпадает с *огibaющей семейства* (1), т. е. с такой поверхностью, которая в каждой своей точке касается некоторой поверхности семейства. В противном случае дискриминантная поверхность может не быть *огibaющей*, этот случай требует дополнительного исследования.

Если *огibaющая* семейства (1) существует, она касается поверхности семейства (1) вдоль линии, которая называется *характеристикой* и задается системой (2) при фиксированном значении  $C$ .

Множество точек, удовлетворяющих системе уравнений

$$F(x, y, z, C) = 0, \quad F_C(x, y, z, C) = 0, \\ F_{CC}(x, y, z, C) = 0,$$

называют *ребром возврата огibaющей*. Если семейство характеристик имеет *огibaющую*, то эта *огibaющая* принадлежит *ребру возврата*.

**736—** Найти *огibaющую* семейства поверхностей:

**738.**

$$(736) \quad x^2 + y^2 + (z - C)^2 - 1 = 0;$$

$$(737) \quad x + C^2y + z - 2C = 0;$$

$$(738) \quad (x - C)^2 + (y - C)^2 + (z - C)^2 - C^2 = 0.$$

**739.** Привести пример семейства поверхностей, дискриминантная поверхность которого вырождается в линию.

**740.** Привести пример семейства поверхностей, дискриминантная поверхность которого вырождается в точку.

741. Найти огибающую, характеристики и ребро возврата семейства сфер

$$(x-C)^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0.$$

742. На хордах эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad z = 0,$$

параллельных одной из осей симметрии, как на диаметрах, строятся сферы. Найти огибающую этих сфер. Та же задача для гиперболы.

743. Найти ребро возврата огибающей семейства плоскостей

$$x \sin \alpha - y \cos \alpha + z = k\alpha,$$

где  $k = \text{const}$ ,  $\alpha$  — параметр.

744. Найти огибающую семейства плоскостей, каждая из которых образует с координатными плоскостями тетраэдр заданного объема  $V$ .

745. Составить уравнение семейства сфер, для которого огибающей поверхностью является конус

$$x^2 + y^2 = a^2 z^2.$$

746. Найти огибающую семейства сфер постоянного радиуса, центры которых расположены на данной линии  $\bar{\rho} = \bar{\rho}(s)$  (трубчатая поверхность).

747. Найти огибающую, характеристики и ребро возврата семейства сфер радиуса  $a$ , центры которых расположены на окружности

$$x^2 + y^2 = b^2, \quad z = 0.$$

748. Найти огибающую, характеристики и ребро возврата семейства поверхностей

$$[(x-C)^2 + (y-R)^2 + z^2 - R^2][(x-C)^2 + (y+R)^2 + z^2 - R^2] = 0.$$

749. Найти огибающую соприкасающихся плоскостей пространственной линии, ее характеристики и ребро возврата.

750. Найти огибающую нормальных плоскостей пространственной линии, ее характеристики и ребро возврата.
751. Найти огибающую спрямляющих плоскостей пространственной линии, ее характеристики и ребро возврата.
752. Найти огибающую семейства одинаковых круговых конусов (с углом осевого сечения, равным  $2\alpha$ ), имеющих вершину в начале координат и касающихся плоскости  $z=0$ .
753. Доказать, что развертывающиеся поверхности и только они являются огибающими однопараметрического семейства плоскостей.
754. Развертывающаяся поверхность  $\sigma$  пересечена семейством параллельных плоскостей. Доказать, что эволюты сечений лежат тоже на развертывающейся поверхности.
755. При каком условии уравнение

$$F(x, y, z) = 0$$

задает развертывающуюся поверхность?

- 756— Найти условия, при которых следующие семейства

758. поверхностей допускают огибающую ( $\alpha$  и  $\beta$  независимые параметры):

$$(756) \quad F(x, y, z, \alpha, \beta) = 0;$$

$$(757) \quad \bar{r} = \bar{r}(u, v, \alpha);$$

$$(758) \quad \bar{r} = \bar{r}(u, v, \alpha, \beta).$$

759. Найти огибающую семейства сфер постоянного радиуса  $a$ , имеющих центры в плоскости  $z=0$ .
760. Если все касательные плоскости некоторой поверхности касаются ее по линиям, то эти линии прямые. Доказать.
761. Найти огибающую семейства плоскостей, для которых сумма расстояний до  $n$  фиксированных точек постоянна.

## § 16. Первая квадратичная форма

Квадрат дифференциала

$$d\bar{r} = \bar{r}_u du + \bar{r}_v dv,$$

т. е.

$$\varphi_1 = d\bar{r}^2 = ds^2 = \bar{r}_u^2 du^2 + 2\bar{r}_u \bar{r}_v du dv + \bar{r}_v^2 dv^2,$$

называется *первой квадратичной формой* поверхности. Коэффициенты этой формы обозначают соответственно

$$E = \bar{r}_u^2, \quad F = \bar{r}_u \bar{r}_v, \quad G = \bar{r}_v^2.$$

Если  $\varphi$  — угол между двумя линиями на поверхности, то

$$\cos \varphi = \frac{Ed_1 u d_2 u + F(d_1 u d_2 v + d_1 v d_2 u) + Gd_1 v d_2 v}{\sqrt{h_1} \sqrt{h_2}}$$

где  $h_1 = Ed_1 u^2 + 2Fd_1 u d_1 v + Gd_1 v^2$ ,  $h_2 = Ed_2 u^2 + 2Fd_2 u d_2 v + Gd_2 v^2$ ,  $d_1 u$ ,  $d_1 v$  — дифференциалы функций  $u$  и  $v$ , взятые из уравнений  $u = u_1(t)$ ,  $v = v_1(t)$  первой линии, а  $d_2 u$ ,  $d_2 v$  — дифференциалы от  $u$  и  $v$ , взятые из уравнений  $u = u_2(t)$ ,  $v = v_2(t)$  второй линии.

Площадь замкнутой области  $D$  на поверхности вычисляется по формуле

$$S = \iint_D \sqrt{EG - F^2} du dv.$$

**762—** Найти первую квадратичную форму следующих  
**772.** поверхностей вращения:

(762)  $x = f(u) \cos v$ ,  $y = f(u) \sin v$ ,  $z = \varphi(u)$  —

поверхность вращения с осью вращения  $Oz$ ;

(763)  $x = R \cos u \cos v$ ,  $y = R \cos u \sin v$ ,  $z = R \sin u$  — сфера;

(764)  $x = a \cos u \cos v$ ,  $y = a \cos u \sin v$ ,  $z = c \sin u$  — эллипсоид вращения;

(765)  $x=a \operatorname{ch} u \cos v$ ,  $y=a \operatorname{ch} u \sin v$ ,  $z=c \operatorname{sh} u$  —  
однополостный гиперболоид вращения;

(766)  $x=a \operatorname{sh} u \cos v$ ,  $y=a \operatorname{sh} u \sin v$ ,  $z=c \operatorname{ch} u$  —  
двуполостный гиперболоид вращения;

(767)  $x=u \cos v$ ,  $y=u \sin v$ ,  $z=u^2$  —  
параболоид вращения;

(768)  $x=R \cos v$ ,  $y=R \sin v$ ,  $z=u$  —  
круговой цилиндр;

(769)  $x=u \cos v$ ,  $y=u \sin v$ ,  $z=ku$  —  
круговой конус;

(770)  $x=(a+b \cos u) \cos v$ ,  $y=(a+b \cos u) \sin v$ ,  
 $z=b \sin u$  —  
тор;

(771)  $x=a \operatorname{ch} \frac{u}{a} \cos v$ ,  $y=a \operatorname{ch} \frac{u}{a} \sin v$ ,  $z=u$  —  
катеноид;

(772)  $x=a \sin u \cos v$ ,  $y=a \sin u \sin v$ ,  
 $z=a \left( \ln \operatorname{tg} \frac{u}{2} + \cos u \right)$  —

псевдосфера.

773. Найти первую квадратичную форму прямого геликоида

$$x=u \cos v, \quad y=u \sin v, \quad z=av.$$

774. Найти первую квадратичную форму геликоида общего вида

$$x=u \cos v, \quad y=u \sin v, \quad z=f(u)+av.$$

775. Найти первую квадратичную форму поверхностей, образованных касательными, главными нормальными и бинормальными линиями

$$\bar{r}=\bar{r}(u),$$

где  $u$  — натуральный параметр.

776. Найти первую квадратичную форму поверхности  $z=z(x, y)$ .

777. Указать, какая из приведенных квадратичных форм может служить первой квадратичной формой некоторой поверхности:

а)  $ds^2=du^2+4dudv+dv^2$ ;

б)  $ds^2=du^2+4dudv+4dv^2$ ;

в)  $ds^2=du^2-4dudv+6dv^2$ ;

г)  $ds^2=du^2+4dudv-2dv^2$ .

778. Дать формулы преобразования коэффициентов первой квадратичной формы и выражения

$$H=\sqrt{EG-F^2}$$

при переходе к новой криволинейной системе координат.

779. Показать, что при соответствующем выборе криволинейных координат на поверхности вращения ее первая квадратичная форма может быть приведена к виду

$$ds^2=du^2+G(u)dv^2.$$

780. Сеть координатных линий на поверхности называется *чебышевской*, если отрезки координатных линий одного семейства, заключенные между двумя линиями другого семейства, имеют равные длины. Доказать, что сеть координатных линий на поверхности является чебышевской тогда и только тогда, когда  $E_v=0$ ,  $G_u=0$ .

781. Первая квадратичная форма поверхности имеет вид

$$ds^2=du^2+2Fdudv+dv^2.$$

Что можно сказать о криволинейных координатах в этом случае?

782. Привести первую квадратичную форму псевдосферы

$$ds^2 = a^2 \operatorname{ctg}^2 u du^2 + a^2 \sin^2 u dv^2$$

к виду

$$ds^2 = d\tilde{u}^2 + G(\tilde{u}) d\tilde{v}^2.$$

783. Представить первую квадратичную форму псевдосферы в виде

$$ds^2 = \frac{a^2(dx^2 + dy^2)}{y^2}.$$

784. Найти угол, под которым пересекаются прямолинейные образующие гиперболического параболоида

$$z = axy.$$

785. Показать, что площади областей на параболоидах

$$z = \frac{a}{2}(x^2 + y^2) \text{ и } z = axy,$$

проектирующиеся на одну и ту же область плоскости  $xOy$ , равны.

786. Найти уравнения линий, пересекающих меридианы поверхности вращения под постоянным углом  $\alpha$  (*локсодромы*).

787. Найти уравнение локсодром на поверхности сферы.

788. Если семейство линий на поверхности задано дифференциальным уравнением

$$Adu + Bdv = 0,$$

то уравнение *ортогональных траекторий*, т. е. линий, пересекающих заданные линии под прямым углом, имеет вид

$$(BE - AF)du + (BF - AG)dv = 0.$$

Доказать.

789. Найти ортогональные траектории прямолинейных образующих конической поверхности.



790. Составить дифференциальное уравнение линий, пересекающих прямолинейные образующие развёртывающейся поверхности, образованной касательными к пространственной линии, под постоянным углом  $\alpha$ .
791. Найти ортогональные траектории прямолинейных образующих поверхности, образованной касательными к некоторой линии.
792. Составить дифференциальное уравнение ортогональных траекторий семейства линий  

$$\varphi(u, v) = \text{const}$$
на поверхности.
793. Найти ортогональные траектории семейства линий  

$$u + v = \text{const},$$
лежащих на сфере  

$$x = R \cos u \cos v, \quad y = R \cos u \sin v, \quad z = R \sin u.$$
794. Найти ортогональные траектории семейства линий  

$$u = Ce^v,$$
лежащих на косом геликоиде  

$$x = u \cos v, \quad y = u \sin v, \quad z = u + v.$$
795. На круговом конусе  

$$x = u \cos v, \quad y = u \sin v, \quad z = u$$
рассматривается семейство линий  

$$v = u^2 + \alpha,$$
где  $\alpha$  — параметр. Найти семейство их ортогональных траекторий.
796. Записать уравнения косого геликоида  

$$x = u \cos v, \quad y = u \sin v, \quad z = u + v,$$
приняв линии  $v = \text{const}$  и их ортогональные траектории за координатные линии.

797. Вывести условие ортогональности двух семейств линий на поверхности, определяемых дифференциальным уравнением

$$P(u, v)du^2 + Q(u, v)dudv + R(u, v)dv^2 = 0.$$

798. Доказать, что на прямом геликоиде

$$x = u \cos v, \quad y = u \sin v, \quad z = av$$

дифференциальное уравнение

$$du^2 - (u^2 + a^2)dv^2 = 0$$

определяет ортогональную сеть.

799. На поверхности

$$z = axy$$

найти ортогональные траектории ее прямолинейных образующих.

800. Доказать, что линии, которые в каждой своей точке делят пополам углы между координатными линиями, задаются дифференциальными уравнениями

$$\sqrt{E} du \pm \sqrt{G} dv = 0.$$

801. Найти уравнения линий на прямом геликоиде

$$x = u \cos v, \quad y = u \sin v, \quad z = av,$$

делящих пополам углы между координатными линиями.

802. Найти уравнения линий на сфере

$$x = a \cos u \sin v, \quad y = a \sin u \sin v, \quad z = a \cos v,$$

делящих углы между параллелями и меридианами пополам.

803. Найти уравнения линий, делящих пополам углы между прямолинейными образующими в каждой точке поверхности

$$z = axy.$$

804. Дана поверхность

$$x=u^2+v^2, \quad y=u^2-v^2, \quad z=uv.$$

1. Найти первую квадратичную форму.

2. Вычислить дифференциал длины дуги для линий  $u=2$ ,  $v=1$ ,  $v=au$ .

3. Вычислить длину дуги линии  $v=au$  между точками ее пересечения с линиями  $u=1$ ,  $u=2$ .

805. Найти, под каким углом пересекаются линии

$$u+v=0, \quad u-v=0$$

на прямом геликоиде

$$x=u \cos v, \quad y=u \sin v, \quad z=av.$$

806. Найти периметр и внутренние углы криволинейного треугольника

$$u=\pm \frac{1}{2} av^2, \quad v=1,$$

расположенного на поверхности, у которой

$$ds^2=du^2+(u^2+a^2)dv^2.$$

807. На поверхности с первой квадратичной формой

$$ds^2=du^2+\operatorname{sh}^2 u dv^2$$

найти длину дуги линии  $u=v$  между точками

$$M_1(u_1, v_1) \text{ и } M_2(u_2, v_2).$$

808. Найти угол между линиями

$$v=2u \text{ и } v=-2u$$

на поверхности, имеющей первую квадратичную форму

$$ds^2=du^2+dv^2.$$

809. Найти угол между линиями

$$v=u+1 \text{ и } v=3-u$$

на поверхности

$$x=u \cos v, \quad y=u \sin v, \quad z=u^2.$$

810. На прямом геликоиде

$$x = u \cos v, \quad y = u \sin v, \quad z = av$$

заданы линии

$$v = \ln(u \pm \sqrt{u^2 + a^2}) + C.$$

Вычислить длины дуг этих линий между двумя точками

$$M_1(u_1, v_1) \text{ и } M_2(u_2, v_2).$$

811. На псевдосфере

$$x = a \sin u \cos v, \quad y = a \sin u \sin v,$$

$$z = a \left( \ln \operatorname{tg} \frac{u}{2} + \cos u \right)$$

заданы два семейства линий:

$$v = \pm a \ln \operatorname{tg} \frac{u}{2} + C.$$

Вычислить длину дуги линии каждого семейства между двумя точками

$$M_1(u_1, v_1) \text{ и } M_2(u_2, v_2).$$

Доказать, что длины дуг всех линий одного семейства между двумя фиксированными линиями второго семейства одинаковы.

812. На поверхности сферы задан прямоугольный треугольник, сторонами которого являются дуги больших кругов сферы. Найти: а) соотношение между сторонами треугольника; б) его площадь.

813. Найти площадь четырехугольника на прямом геликоиде

$$x = u \cos v, \quad y = u \sin v, \quad z = av,$$

ограниченного линиями

$$u = 0, \quad u = a, \quad v = 0, \quad v = 1.$$

814. Найти площадь криволинейного треугольника

$$u = \pm av, \quad v = 1,$$

расположенного на поверхности с первой квадратичной формой

$$ds^2 = du^2 + (u^2 + a^2) dv^2.$$

815. Найти площадь выпуклой сферической области, ограниченной петлей линии Вивiani.

816. *Сферическим двуугольником* называется фигура, образованная двумя большими полуокружностями, имеющими общие концы. Найти площадь  $S$  сферического двуугольника с углом  $\varphi_0$  при вершине.

## § 17. Вторая квадратичная форма

*Второй квадратичной формой поверхности* называют дифференциальную форму

$$\varphi_2 = \overline{m} d^2 \overline{r} = -d\overline{r} d\overline{m} = L du^2 + 2M du dv + N dv^2,$$

где

$$L = \overline{m} \overline{r}_{uu} = -\overline{m}_u \overline{r}_u = \frac{(\overline{r}_{uu} \overline{r}_u \overline{r}_v)}{\sqrt{EG - F^2}}$$

$$M = \overline{m} \overline{r}_{uv} = -\overline{m}_u \overline{r}_v = -\overline{m}_v \overline{r}_u = \frac{(\overline{r}_{uv} \overline{r}_u \overline{r}_v)}{\sqrt{EG - F^2}}$$

$$N = \overline{m} \overline{r}_{vv} = -\overline{m}_v \overline{r}_v = \frac{(\overline{r}_{vv} \overline{r}_u \overline{r}_v)}{\sqrt{EG - F^2}},$$

$\overline{m}$  — единичный вектор нормали к поверхности.

*Нормальной кривизной*  $k_n$  линии на поверхности называют величину проекции вектора кривизны  $\overline{k}\overline{n}$  на нормаль к поверхности. Нормальные кривизны всех линий, идущих через заданную точку в заданном направлении, равны.

Имеет место формула

$$k_n = k \cos(\overset{\wedge}{n}, \overset{\wedge}{m}) = \frac{\varphi_2}{\varphi_1}. \quad (1)$$

Сечение поверхности плоскостью, проходящей через нормаль к поверхности и касательную к линии (нормальное сечение), в заданной точке имеет кривизну, равную  $|k_n|$ . Если направление вектора

$\overset{\wedge}{m}$  выбрать так, чтобы угол  $\Theta = (\overset{\wedge}{n}, \overset{\wedge}{m})$  был острым, то формулу (1) можно записать в виде

$$R = R_0 \cos \Theta, \quad (2)$$

где  $R = \frac{1}{k}$ ,  $R_0 = \frac{1}{|k_n|}$ . Формула (2) называется *формулой Менье*.

Если нормальные кривизны всевозможных линий, проведенных через данную точку  $M$  поверхности, равны, то точка  $M$  называется *точкой округления* (или *омбилической*). Для того чтобы точка на поверхности была точкой округления, необходимо и достаточно, чтобы в ней

$$\frac{L}{E} = \frac{M}{F} = \frac{N}{G}.$$

Частным случаем точки округления является *точка уплощения*, которая характеризуется тем, что в ней кривизна нормального сечения равна нулю во всех направлениях.

*Главными направлениями* в заданной точке поверхности называются направления, которые определяются дифференциалами, удовлетворяющими уравнению

$$\begin{vmatrix} Ldu + Mdv & Mdu + Ndv \\ Edu + Fdv & Fdu + Gdv \end{vmatrix} = 0.$$

Кривизны нормальных сечений, соответствующих главным направлениям, имеют экстремальные

значения и называются *главными кривизнами*. Их находят из уравнения

$$(EG - F^2)k^2 - (EN + LG - 2FM)k + LN - M^2 = 0.$$

Если точка не является точкой округления, то в ней существуют два взаимно перпендикулярных главных направления. Соответствующие главные кривизны  $k_1$  и  $k_2$  связаны с кривизной произвольного нормального сечения *формулой Эйлера*

$$k_n = k_1 \cos^2 \varphi + k_2 \sin^2 \varphi,$$

где  $\varphi$  — угол между направлениями, соответствующими нормальным кривизнам  $k_1$  и  $k_2$ .

В точке округления любое направление является главным.

Главные направления характеризуются тем, что при смещении по поверхности вдоль них верна *формула Родрига*

$$d\bar{m} = -k d\bar{r},$$

где  $k$  — кривизна соответствующего нормального сечения.

Если от некоторой точки  $M$  поверхности отложить на касательной к каждому нормальному сечению отрезок, равный корню квадратному из радиуса кривизны этого сечения, то получится линия, которая называется *индикатрисой Дюпена*.

*Полная (или гауссова) кривизна  $K$  поверхности* в точке определяется формулой

$$K = k_1 k_2 = \frac{LN - M^2}{EG - F^2},$$

*средняя кривизна  $H$  поверхности* — формулой

$$H = \frac{k_1 + k_2}{2} = \frac{EN + LG - 2FM}{2(EG - F^2)}.$$

Если  $K > 0$ , то точка поверхности называется *эллиптической*, если  $K < 0$  — *гиперболической*, если  $K = 0$  — *параболической*.

**817—** Найти вторую квадратичную форму следующих  
**827.** поверхностей вращения:

$$(817) \quad x=f(u)\cos v, \quad y=f(u)\sin v, \quad z=\varphi(u) —$$

поверхность вращения с осью вращения  $Oz$ ;

$$(818) \quad x=R\cos u\cos v, \quad y=R\cos u\sin v, \quad z=R\sin u —$$

сфера;

$$(819) \quad x=a\cos u\cos v, \quad y=a\cos u\sin v, \quad z=c\sin u —$$

эллипсоид вращения;

$$(820) \quad x=a\operatorname{ch} u\cos v, \quad y=a\operatorname{ch} u\sin v, \quad z=c\operatorname{sh} u —$$

однополостный гиперболоид вращения;

$$(821) \quad x=a\operatorname{sh} u\cos v, \quad y=a\operatorname{sh} u\sin v, \quad z=c\operatorname{ch} u —$$

двуполостный гиперболоид вращения;

$$(822) \quad x=u\cos v, \quad y=u\sin v, \quad z=u^2 —$$

параболоид вращения;

$$(823) \quad x=R\cos v, \quad y=R\sin v, \quad z=u —$$

круговой цилиндр;

$$(824) \quad x=u\cos v, \quad y=u\sin v, \quad z=ku —$$

круговой конус;

$$(825) \quad x=(a+b\cos u)\cos v, \quad y=(a+b\cos u)\sin v, \\ z=b\sin u —$$

тор;

$$(826) \quad x=a\operatorname{ch}\frac{u}{a}\cos v, \quad y=a\operatorname{ch}\frac{u}{a}\sin v, \quad z=u —$$

катеноид;

$$(827) \quad x=a\sin u\cos v, \quad y=a\sin u\sin v, \\ z=a\left(\ln\operatorname{tg}\frac{u}{2}+\cos u\right) —$$

псевдосфера.

**828.** Найти вторую квадратичную форму прямого геликоида

$$x=u\cos v, \quad y=u\sin v, \quad z=av.$$



829. Показать, что при любом выборе криволинейных координат на плоскости вторая квадратичная форма тождественно равна нулю.

830. Если вторая квадратичная форма поверхности

$$z=f(x, y)$$

тождественно равна нулю, то поверхность является плоскостью или ее частью.

831. Показать, что уравнения катеноида (задача 637) можно представить в виде:

$$x=\sqrt{u^2+a^2} \cos v,$$

$$y=\sqrt{u^2+a^2} \sin v,$$

$$z=a \ln [u+\sqrt{u^2+a^2}].$$

Найти вторую квадратичную форму катеноида при указанной параметризации и подсчитать нормальную кривизну координатных линий.

832. Найти главные кривизны разветвляющейся поверхности, образованной касательными к пространственной линии.

833. Вычислить главные кривизны в вершинах двуполостного гиперболоида

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0.$$

834. Найти главные направления и главные кривизны прямого геликоида

$$x=u \cos v, \quad y=u \sin v, \quad z=av.$$

835. Доказать, что главные направления прямого геликоида делят пополам углы между направлениями образующей и винтовой линии.

836. Вычислить главные кривизны поверхности

$$z=xy$$

в точке  $M(1, 1, 1)$ .

837. Вычислить главные кривизны поверхности

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z$$

в точке  $M(0, 0, 0)$ .

838. Показать, что в любой точке поверхности

$$x = u \cos v, \quad y = u \sin v, \quad z = \lambda u$$

одно из главных нормальных сечений есть прямая.

839. Найти кривизны нормальных сечений поверхности

$$y = \frac{1}{2} x^2:$$

а) в произвольной точке;

б) в точках линий, получающихся в сечениях поверхности плоскостями  $z = k$ , и в направлениях, идущих по касательным к этим линиям;

в) в точке  $M(2, 2, 4)$  в направлении касательной к линии

$$y = \frac{1}{2} x^2, \quad z = x^2.$$

840. На поверхности

$$x = u^2 + v^2, \quad y = u^2 - v^2, \quad z = uv$$

дана точка

$$P(u=1, v=1).$$

1. Вычислить главные кривизны поверхности в точке  $P$ .

2. Найти уравнения касательных  $PT_1$ ,  $PT_2$  к главным нормальным сечениям в указанной точке.

3. Вычислить кривизну нормального сечения, проходящего через касательную к линии  $v = u^2$ .

841. Дана поверхность

$$z = 2x^2 + \frac{9}{2} y^2.$$

1. Найти в начале координат уравнение индикатрисы Дюпена.

2. Вычислить в начале координат радиус кривизны нормального сечения, касательная к которому составляет угол в  $45^\circ$  с осью  $Ox$ .
842. В касательной плоскости точки  $M$  поверхности проведено  $n$  прямых, образующих между собой равные углы  $\frac{\pi}{n}$ . Показать, что
- $$\frac{1}{n} \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \dots + \frac{1}{r_n} \right) = H,$$
- где  $\frac{1}{r_i}$  — нормальные кривизны линий на поверхности, касающихся данных прямых.
843. Через вершину  $M$  эллипсоида вращения проводятся по нему всевозможные линии. Найти геометрическое место центров кривизны этих линий в точке  $M$ .
844. Показать, что развертывающиеся поверхности характеризуются тем, что их полная кривизна во всех точках равна нулю.
845. Найти поверхности, для которых вторая квадратичная форма есть полный квадрат.
846. Показать, что один из главных радиусов кривизны поверхности вращения равен отрезку нормали, заключенному между поверхностью и осью вращения.
847. Найти полную кривизну поверхностей, указанных в задачах 628—638, как произведение главных кривизн (не вычисляя квадратичных форм).
848. Если вращать параболу вокруг директрисы, то получится поверхность, у которой
- $$|R_1| = 2|R_2|,$$
- где  $R_1$  и  $R_2$  — главные радиусы кривизны. Доказать.
849. Найти выражение полной кривизны поверхности, отнесенной к *изотермическим координатам*, т. е. к таким, в которых первая квадратичная форма имеет вид
- $$ds^2 = \lambda^2 (du^2 + dv^2).$$

850. Найти выражение полной кривизны поверхности, отнесенной к *полугеодезическим координатам*, т. е. к таким, в которых первая квадратичная форма имеет вид

$$ds^2 = du^2 + G(u, v)dv^2.$$

851. Найти полную кривизну поверхности, первая квадратичная форма которой имеет вид

$$ds^2 = du^2 + e^{2u}dv^2.$$

852. Найти полную кривизну параболоида

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z.$$

853. Показать, что если первая квадратичная форма поверхности имеет вид

$$ds^2 = du^2 + 2 \cos \omega \, du dv + dv^2,$$

то ее полная кривизна вычисляется по формуле

$$K = \frac{\omega_{uv}}{\sin \omega}.$$

854. Найти полную кривизну поверхности, заданной уравнением

$$F(x, y, z) = 0.$$

855. Доказать, что полная кривизна поверхности с первой квадратичной формой

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{(x^2 + y^2 + c)^2}$$

постоянна.

856. Найти полную кривизну поверхности, образованной главными нормальными пространственной линии.

857. Найти полную кривизну поверхности, образованной бинормальными пространственной линии.

858. Найти полную и среднюю кривизну прямого геликонда

$$x = u \cos v, \quad y = u \sin v, \quad z = av.$$

На каких линиях полная кривизна постоянна?

859. Найти полную и среднюю кривизну поверхности

$$z = f(x, y).$$

860. Найти полную и среднюю кривизну поверхности вращения

$$z = f(\rho),$$

$$\text{где } \rho = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

861. Вычислить среднюю кривизну кругового конуса, используя формулу Менье.

862. Найти среднюю кривизну круглого цилиндра, радиус которого равен  $a$ .

863. Пусть поверхность получена от вращения вокруг оси  $l$  линии  $L$ , не имеющей точек с нулевой кривизной. Если линия  $L$  обращена вогнутостью к оси  $l$ , то поверхность состоит из эллиптических точек, если выпуклостью — из гиперболических точек. Доказать.

864. Найти эллиптические, гиперболические и параболические точки на торе.

- 865— Исследовать характер точек на поверхностях, по-

869. лученных вращением следующих линий:

- (865) синусоида

$$y = \sin x$$

вращается вокруг оси  $Ox$ ;

- (866) синусоида

$$y = \sin x$$

вращается вокруг оси  $Oy$ ;

- (867) линия

$$y = \ln x$$

вращается вокруг оси  $Ox$ ;

- (868) линия

$$y = \ln x$$

вращается вокруг оси  $Oy$ ;

(869) ветвь гиперболы

$$xy=1, \quad x>0,$$

вращается вокруг прямой

$$Ax+By=0.$$

**870—** Исследовать характер точек на следующих поверхностях второго порядка:

(870) эллипсоид;

(871) однополостный гиперболоид;

(872) двуполостный гиперболоид;

(873) эллиптический параболоид;

(874) гиперболический параболоид;

(875) эллиптический цилиндр;

(876) параболический цилиндр;

(877) гиперболический цилиндр;

(878) конус.

**879.** Определить характер точек поверхности

$$z=f(u),$$

$$\text{где } u=\sqrt{x^2-y^2}.$$

**880.** Найти геометрическое место параболических точек на поверхности

$$x=u+v, \quad y=uv, \quad z=u^3+v^3.$$

**881.** Показать, что все точки поверхности

$$x+y=z^3$$

параболические.

**882.** Доказать, что единственной поверхностью с ненулевой полной кривизной, состоящей целиком из точек округления, является сфера или часть сферы.

**883.** Для того чтобы поверхность была сферой, необходимо и достаточно, чтобы вторая квадратичная форма была пропорциональна первой. Доказать.

884. Для того чтобы точка поверхности была точкой округления, необходимо и достаточно, чтобы корни уравнения, определяющего главные кривизны, были равны. Доказать.
885. Указать геометрический способ построения точек округления поверхности вращения.
886. Синусоида\*

$$y = \sin x$$

вращается вокруг оси  $Ox$ . Найти на поверхности вращения точки округления.

- 887— 891. Найти точки округления следующих поверхностей:

- (887) эллипсоида вращения;
- (888) параболоида вращения;
- (889) эллиптического параболоида;
- (890) трехосного эллипсоида;
- (891) двуполостного гиперболоида.

892. Показать, что точки округления поверхности

$$x = \frac{u^2}{2} + v, \quad y = u + \frac{v^2}{2}, \quad z = uv$$

находятся на линиях

$$u = v, \quad u + v + 1 = 0.$$

893. Доказать, что точки округления характеризуются равенством  $H^2 = K$ .
894. Привести пример поверхности с единственной точкой уплощения.
895. Привести пример поверхности, на которой точки уплощения образуют линию.
896. Доказать, что единственной поверхностью, состоящей целиком из точек уплощения, является плоскость или часть плоскости.

## § 18. Сопряженные сети и асимптотические линии

Однопараметрическое семейство линий на поверхности, заданное уравнением

$$f(u, v, C) = 0,$$

называется *правильным*, если через каждую точку рассматриваемой области проходит одна и только одна линия семейства. *Сетью линий* на поверхности называется совокупность двух правильных семейств, линии которых, пересекаясь, не касаются друг друга.

Два направления касательных векторов поверхности в точке  $M$ , определяемые дифференциалами

$$d_1\bar{r} = \bar{r}_u d_1u + \bar{r}_v d_1v, \quad d_2\bar{r} = \bar{r}_u d_2u + \bar{r}_v d_2v,$$

называют *сопряженными*, если удовлетворяется соотношение

$$Ld_1ud_2u + M(d_1ud_2v + d_2ud_1v) + Nd_1vd_2v = 0,$$

где  $L$ ,  $M$  и  $N$  вычислены в данной точке. Два семейства линий, удовлетворяющих этому уравнению при переменных  $u$  и  $v$ , образуют сеть, которая называется *сопряженной*.

Самосопряженное направление, т. е. направление, удовлетворяющее в данной точке соотношению

$$Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2 = 0, \quad (1)$$

называется *асимптотическим*. Асимптотическое направление характеризуется тем, что кривизна нормального сечения в этом направлении равна нулю. Линия на поверхности, удовлетворяющая дифференциальному уравнению (1), называется *асимптотической*. На поверхности, состоящей из эллиптических точек, асимптотических линий нет. На поверхности, состоящей из гиперболических точек, через каждую точку проходят две асимптотические линии. На поверхности, состоящей из параболических точек, не являющихся точками уплощения, через каждую точку проходит одна асимптотическая линия.



897. Составить дифференциальные уравнения семейства линий на поверхности, образующих сопряженную сеть с семейством координатных линий  $u = \text{const.}$  Решить аналогичную задачу для линий  $v = \text{const.}$

898. Вывести условие сопряженности двух семейств линий на поверхности, определяемых дифференциальным уравнением

$$P(u, v) du^2 + Q(u, v) dudv + R(u, v) dv^2 = 0.$$

899. Линии

$$v^2 du^2 - u^2 dv^2 = 0,$$

лежащие на геликоиде

$$x = u \cos v, \quad y = u \sin v, \quad z = av,$$

образуют сопряженную сеть. Доказать.

900. Составить дифференциальное уравнение семейства линий на поверхности, образующих сопряженную сеть с семейством линий

$$\varphi(u, v) = C.$$

901. Показать, что координатные линии поверхности переноса

$$\bar{r} = \bar{r}_1(u) + \bar{r}_2(v)$$

образуют сопряженную сеть.

902. Эллиптический параболоид

$$2z = \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b}$$

пересечен плоскостями

$$x + y = C,$$

где  $C$  — произвольная постоянная.

Найти семейство линий, образующих с этими сечениями сопряженную сеть.

903. В точке  $M(1, 1, 1)$  поверхности

$$xyz=1,$$

найти направление, сопряженное направлению  $\vec{a}(1, -2, 1)$ .

904. Однопараметрическое семейство линий на поверхности задано дифференциальным уравнением

$$A(u, v)du + B(u, v)dv = 0.$$

Найти дифференциальное уравнение семейства линий, сопряженных с данными.

905. На развортывающейся поверхности семейство прямолинейных образующих сопряжено с любым однопараметрическим семейством линий. Доказать.

906. Найти линии, сопряженные семейству линий

$$u+v=C,$$

на косом геликоиде

$$x=u \cos v, \quad y=u \sin v, \quad z=u+v.$$

907. Доказать, что линия на поверхности является асимптотической тогда и только тогда, когда она удовлетворяет одному из следующих условий:

а) в каждой ее точке касательная имеет асимптотическое направление;

б) в каждой точке нормальная кривизна линии равна нулю;

в) линия является прямой или в каждой ее точке соприкасающаяся плоскость совпадает с касательной плоскостью к поверхности.

908. Для того чтобы координатные линии на поверхности были асимптотическими линиями, необходимо и достаточно, чтобы  $N=L=0$ . Доказать.

909. Найти асимптотические линии псевдосферы. Доказать, что они образуют чебышевскую сеть.

910. Пусть  $l$  — асимптотическая линия на поверхности  $\Phi$ . Доказать, что характеристики однопараметрического семейства касательных плоскостей к по-

верхности  $\Phi$  вдоль линии  $l$  совпадают с касательными к линии  $l$ .

**911.** Составить дифференциальное уравнение асимптотических линий поверхности вращения.

**912.** Найти асимптотические линии катеноида

$$x = \operatorname{ch} u \cos v, \quad y = \operatorname{ch} u \sin v, \quad z = u.$$

**913.** Исследовать асимптотические линии тора.

**914.** Найти асимптотические линии прямого геликоида.

**915.** Найти асимптотические линии однополостного гиперболоида.

**916.** Прямая перемещается параллельно плоскости  $xOy$ , пересекая ось  $Oz$  и линию

$$x = u, \quad y = u^2, \quad z = u^3.$$

Найти асимптотические линии поверхности, описываемой этой прямой.

**917.** Показать, что линия

$$x = \frac{2}{1+t}, \quad y = \frac{2}{1-t}, \quad z = t$$

является асимптотической линией поверхности

$$z = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2}.$$

**918.** На поверхности, образованной главными нормальными пространственной линии, эта линия является асимптотической. Доказать.

**919.** Поверхность называется *минимальной*, если ее средняя кривизна тождественно равна нулю. Показать, что на минимальной поверхности сеть асимптотических линий ортогональна, т. е. во всех точках линии одного семейства ортогональны линиям другого.

**920.** Если в некоторой точке поверхности средняя кривизна равна нулю, то асимптотические направления индикатрисы Дюпена взаимно перпендикулярны. Доказать.

921. Показать, что на плоскости любая линия является асимптотической, и, наоборот, поверхность, на которой любая линия является асимптотической, есть плоскость, либо часть плоскости.
922. Показать, что на поверхности, параллельной данной, линии, соответствующие асимптотическим линиям данной поверхности, будут асимптотическими тогда и только тогда, когда данная поверхность развертывающаяся.

## § 19. Линии кривизны

Линия на поверхности, удовлетворяющая дифференциальному уравнению

$$\begin{vmatrix} Ldu + Mdv & Mdu + Ndv \\ Edu + Fdv & Fdu + Gdv \end{vmatrix} = 0,$$

называется *линией кривизны*. Через каждую точку поверхности, не являющуюся точкой округления, проходят две взаимно перпендикулярные линии кривизны.

923. Доказать, что линия на поверхности является линией кривизны тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий:
- а) линия в каждой своей точке идет по главному направлению;
  - б) нормальная кривизна в каждой ее точке равна одной из главных кривизн;
  - в) нормали к поверхности вдоль линии образуют развертывающуюся поверхность.
- 924—931. Найти линии кривизны следующих поверхностей:
- (924) произвольной цилиндрической поверхности;
  - (925) произвольной конической поверхности;
  - (926) произвольной поверхности вращения;
  - (927) поверхности
 
$$x = u^2 + v^2, \quad y = u^2 - v^2, \quad z = v;$$
  - (928) произвольной развертывающейся поверхности;

- (929) поверхности, образованной касательными пространственной линии;
- (930) прямого геликоида;
- (931) эллиптического параболоида.
- 932.** На плоскости и сфере любая линия является линией кривизны. Доказать.
- 933.** Доказать, что координатные линии поверхности являются линиями кривизны тогда и только тогда, когда  $F=M=0$ .
- 934.** Показать, что координатные линии поверхности  $x=3u-u^3+3uv^2$ ,  $y=v^3-3u^2v-3v$ ,  $z=3(u^2-v^2)$  являются линиями кривизны.
- 935.** Доказать, что прямолинейная образующая косой линейчатой поверхности не может быть линией кривизны.
- 936.** Найти огибающую семейства нормалей поверхности, проведенных в точках линии кривизны.
- 937.** Доказать, что в области гиперболических точек поверхности линии кривизны в каждой точке делят пополам углы между асимптотическими линиями.
- 938.** Показать, что линиям кривизны поверхности  $S$  на параллельной ей поверхности также соответствуют линии кривизны.
- 939.** Выяснить, при каких условиях ортогональной сети на данной поверхности будет соответствовать ортогональная сеть на параллельной ей поверхности.
- 940.** При каком условии система круговых сечений эллипсоида является системой линий кривизны?
- 941.** На любой поверхности существует единственная сопряженная ортогональная сеть, совпадающая с линиями кривизны поверхности. Доказать.
- 942.** Для того чтобы линия кривизны некоторой поверхности, по которой она пересекает другую поверхность, была линией кривизны и этой последней, необходимо и достаточно, чтобы эти поверхности пересекались под постоянным углом. Доказать.

## § 20. Геодезические линии

*Геодезической линией* на поверхности называют линию, в каждой точке которой нормаль к поверхности является главной нормалью линии.

Если координатная сеть ортогональна, то дифференциальные уравнения геодезических линий имеют вид

$$\left. \begin{aligned} 2E \frac{d^2u}{ds^2} + E_u \left( \frac{du}{ds} \right)^2 + 2E_v \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} - G_u \left( \frac{dv}{ds} \right)^2 &= 0, \\ 2G \frac{d^2v}{ds^2} - E_v \left( \frac{du}{ds} \right)^2 + 2G_u \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} + G_v \left( \frac{dv}{ds} \right)^2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Считая, что  $dv \neq 0$ , эту систему можно заменить одним уравнением

$$\begin{aligned} \frac{d^2u}{dv^2} + \frac{E_v}{2G} \left( \frac{du}{dv} \right)^3 + \left( \frac{E_u}{2E} - \frac{G_u}{G} \right) \left( \frac{du}{dv} \right)^2 + \\ + \left( \frac{E_v}{E} - \frac{G_v}{2G} \right) \frac{du}{dv} - \frac{G_u}{2E} = 0. \end{aligned}$$

Будут ли при этом линии  $v = \text{const}$  геодезическими, следует проверить, исходя из системы (1).

Через каждую точку поверхности в заданном направлении проходит единственная геодезическая линия.

*Геодезической кривизной* линии на поверхности в данной точке называется длина проекции вектора кривизны линии  $\overline{kn}$  на касательную плоскость к поверхности в этой точке.

*Геодезическим кручением*, соответствующим данному направлению, называется кручение геодезической линии, проходящей по этому направлению. Если на поверхности криволинейные координаты выбраны так, что одно семейство координатных линий состоит из геодезических, а второе — из их ортогональных траекторий, причем одна из криволинейных координат совпадает с длиной дуги координатных линий первого семейства, то система

координат является полугеодезической. В такой системе координат первая квадратичная форма имеет вид

$$ds^2 = du^2 + G(u, v)dv^2.$$

- 943.** Доказать, что геодезическая линия на поверхности вполне характеризуется одним из следующих свойств:

а) в каждой точке линии нормаль к поверхности является главной нормалью линии;  
 б) в каждой точке линии нормаль к поверхности лежит в соприкасающейся плоскости линии;  
 в) в каждой точке линии ее геодезическая кривизна равна нулю;  
 г) в каждой точке линии ее кривизна равна абсолютной величине нормальной кривизны;  
 д) в каждой точке линии ее спрямляющая плоскость совпадает с касательной плоскостью к поверхности.

- 944.** Доказать, что всякая прямая на поверхности является геодезической линией.

- 945.** Две поверхности касаются по линии  $l$ . Доказать, что если  $l$  — геодезическая линия на одной поверхности, то она должна быть геодезической и на другой поверхности.

- 946.** Показать, что дифференциальное уравнение геодезических линий поверхности

$$\bar{r} = \bar{r}(u, v)$$

можно представить в виде

$$(\bar{N} d\bar{r} d^2\bar{r}) = 0,$$

где  $\bar{N}$  — вектор нормали поверхности.

- 947.** Доказать, что геодезическими линиями плоскости являются прямые, и только они.

- 948.** Доказать, что геодезическими линиями цилиндрической поверхности являются прямолинейные образующие и обобщенные винтовые линии, и только они.

949. Доказать, что меридианы поверхности вращения являются геодезическими линиями.
950. Доказать, что параллель поверхности вращения будет геодезической тогда и только тогда, когда касательная к меридиану в ее точках параллельна оси вращения.
951. Найти геодезические линии на сфере.
952. Доказать, что геодезическая линия является асимптотической тогда и только тогда, когда она прямая.
953. Доказать, что геодезическая линия является линией кривизны тогда и только тогда, когда она плоская.
954. Огибающая спрямляющих плоскостей геодезической линии на развертывающейся поверхности есть данная поверхность. Доказать.
955. Вектор Дарбу геодезической линии на развертывающейся поверхности направлен по образующей в данной точке. Доказать.
956. На поверхности, огибающей спрямляющие плоскости пространственной линии, она является геодезической. Доказать.
957. Доказать, что геодезическая кривизна линии на поверхности может быть вычислена по формуле

$$k_g = |(\bar{m} \cdot \ddot{r})|,$$

где  $\bar{m}$  — единичный вектор нормали к поверхности.

958. Доказать, что геодезическая кривизна равна кривизне проекции линии на плоскость, касающуюся поверхности в данной точке линии.
- 959 — Найти геодезическую кривизну:
- 961.

(959) окружности радиуса  $r$ , лежащей на сфере радиуса  $R$ ;

(960) винтовых линий  $u = \text{const}$ , лежащих на прямом геликоиде

$$x = u \cos v, \quad y = u \sin v, \quad z = av;$$

(961) линий  $u = \text{const}$  и  $v = \text{const}$  на поверхности

$$x = u \cos v, \quad y = u \sin v, \quad z = f(v).$$



962. Показать, что геодезическая кривизна в точках асимптотической линии равна ее кривизне.

963. Доказать, что геодезическое кручение линии на поверхности может быть вычислено по формуле

$$\kappa_g = (\dot{\bar{r}} \cdot \bar{m} \cdot \bar{m}),$$

где  $\bar{m}$  — единичный вектор нормали к поверхности.

964. Для того чтобы линия на поверхности была линией кривизны, необходимо и достаточно, чтобы в каждой ее точке геодезическое кручение равнялось нулю. Доказать.

965. Показать, что геодезическое кручение в точках асимптотической линии равно кручению асимптотической линии.

966. Найти геодезические линии:

967.

(966) прямого геликоида;

(967) псевдосферы.

968. Поверхностью Лиувилля называется поверхность, первая квадратичная форма которой может быть приведена к виду

$$ds^2 = (f(u) + \varphi(v)) (du^2 + dv^2).$$

Показать, что геодезические линии поверхности Лиувилля задаются уравнениями

$$\frac{du}{\sqrt{f(u)+a}} = \pm \int \frac{dv}{\sqrt{\varphi(v)-a}} + b,$$

где  $a$  и  $b$  — произвольные постоянные.

969. Доказать, что на поверхности вращения вдоль любой геодезической линии выполняется соотношение

$$\rho \cos \mu = c,$$

где  $\rho$  — расстояние точки геодезической от оси вращения,  $\mu$  — угол между геодезической и параллелью,  $c$  — постоянное для данной геодезической число (теорема Клеро).

Верна ли обратная теорема, т. е. следует ли из выполнения указанного соотношения вдоль некоторой линии на поверхности вращения утверждение о том, что эта линия геодезическая?

**970—** Пользуясь теоремой Клеро, исследовать поведение

**972.** геодезических линий следующих поверхностей:

(970) эллипсоида вращения;

(971) однополостного гиперболоида вращения;

(972) тора.

**973.** Если через точку  $M_0$  поверхности по всевозможным направлениям провести геодезические линии и отложить на них, начиная от точки  $M_0$ , дуги равной длины, то геометрическое место концов этих дуг есть ортогональная траектория геодезических. Доказать.

## § 21. Отображения поверхностей

Пусть  $S$  — некоторая поверхность. Если откладывать единичные векторы  $\vec{m}$  нормали к поверхности, соответствующие всем ее точкам, от фиксированной точки  $O$ , концы их заполняют некоторое множество  $S'$  на единичной сфере с центром в точке  $O$ . Отображение поверхности  $S$  на множество  $S'$  называется *сферическим отображением* поверхности  $S$ .

Взаимно однозначное отображение поверхности  $S$  на поверхность  $S'$  называют *изометрическим*, если длина любой линии на поверхности  $S$  равна длине соответствующей линии на поверхности  $S'$ . О таких двух поверхностях говорят, что они *наложимы* друг на друга. Для того чтобы поверхности были наложимы, необходимо и достаточно, чтобы их первые квадратичные формы в соответствующих системах криволинейных координат совпадали.

Отображение поверхности  $S$  на поверхность  $S'$  называют *конформным*, если угол между любыми двумя линиями на поверхности  $S$  равен углу между соответствующими линиями на поверхности  $S'$ .

Для существования конформного отображения одной поверхности на другую необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты первых квадратичных форм этих поверхностей в соответствующих системах криволинейных координат были пропорциональными.

- 974—** Найти множества точек на сфере, в которые отображаются указанные ниже поверхности при их сферическом отображении:
- 987.**
- (974) сфера;
  - (975) эллипсоид;
  - (976) эллиптический параболоид;
  - (977) однополостный гиперболоид вращения;
  - (978) двуполостный гиперболоид вращения;
  - (979) эллиптический цилиндр;
  - (980) параболический цилиндр;
  - (981) гиперболический цилиндр;
  - (982) круговой конус;
  - (983) катеноид;
  - (984) псевдосфера;
  - (985) тор;
  - (986) цилиндр  $y = x^3$ ;
  - (987) прямой геликоид.
- 988.** Доказать, что при сферическом отображении только разветвляющиеся поверхности отображаются в линию.
- 989.** Доказать, что линия  $l$  поверхности и ее сферическое отображение  $l'$  имеют в соответствующих точках перпендикулярные касательные тогда и только тогда, когда  $l$  есть асимптотическая линия.
- 990.** Доказать, что сферическое отображение плоской линии кривизны поверхности есть окружность.
- 991.** Доказать, что при сферическом отображении поверхности линия  $l$  на поверхности и ее образ  $l'$  будут иметь параллельные касательные в соответствующих точках тогда и только тогда, когда  $l$  — линия кривизны,

992. Доказать, что любая цилиндрическая поверхность наложима на плоскость.
993. Доказать, что любая коническая поверхность наложима на плоскость.
994. Доказать, что поверхность, образованная касательными к пространственной линии  $l$ , наложима на плоскость.
995. Доказать, что только развертывающиеся поверхности наложимы на плоскость.
996. Что можно сказать о поверхности, у которой первая квадратичная форма имеет вид
- $$ds^2 = E(u) du^2 + G(v) dv^2?$$
997. У каких поверхностей коэффициенты первой квадратичной формы могут быть преобразованы в постоянные?
998. Доказать, что при наложении поверхностей геодезические линии переходят в геодезические.
999. Если на поверхности существуют два семейства геодезических линий, таких, что геодезические линии одного семейства пересекают под постоянным углом геодезические другого семейства, то поверхность есть развертывающаяся. Обратно, у любой развертывающейся поверхности существуют семейства геодезических линий, обладающие указанным свойством. Доказать.
1000. Доказать, что соприкасающиеся плоскости геодезической линии на конической поверхности одинаково удалены от вершины конической поверхности. Обратно, линии на конической поверхности, обладающие указанным свойством, являются геодезическими.
1001. Доказать, что две поверхности одинаковой постоянной полной кривизны наложимы друг на друга.
1002. Доказать, что всякая поверхность постоянной положительной полной кривизны наложима на сферу.
1003. Доказать, что всякая поверхность постоянной отрицательной полной кривизны наложима на псевдосферу.
1004. Доказать, что прямой геликоид наложим на катеноид.

- 1005.** Доказать, что при наложении геликоида на катеноид линии кривизны одной поверхности переходят в асимптотические линии другой и наоборот.
- 1006.** Доказать, что поверхности, наложимые на поверхности вращения, являются поверхностями Лиувилля.
- 1007.** Доказать, что любую поверхность вращения можно конформно отобразить на плоскость.
- 1008.** Отображение одной поверхности на другую называется *эквиареальным*, если соответствующие при этом отображении области имеют одинаковые площади.  
Доказать, что если отображение одной поверхности на другую конформно и эквиареально, то оно изометрическое.

## § 22. Метод подвижного репера в теории поверхностей

Будем записывать уравнение поверхности  $(A)$  относительно фиксированного ортонормированного репера в виде

$$\bar{A} = \bar{A}(u^1, u^2),$$

где  $u^1, u^2$  — криволинейные координаты,  $\bar{A}$  — радиус-вектор текущей точки  $A$  поверхности  $(A)$ .

Пусть  $(\bar{A}, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$  — подвижный ортонормированный репер с началом в точке  $A$ .

Дифференциал функции  $\bar{A}(u^1, u^2)$  будем записывать в виде

$$d\bar{A} = \frac{\partial \bar{A}}{\partial u^1} du^1 + \frac{\partial \bar{A}}{\partial u^2} du^2 = \frac{\partial \bar{A}}{\partial u^\alpha} du^\alpha, \quad (1)$$

а разложение векторов  $\frac{\partial \bar{A}}{\partial u^1}, \frac{\partial \bar{A}}{\partial u^2}$  по базисным векторам подвижного репера в виде

$$\frac{\partial \bar{A}}{\partial u^1} = a_1^1 \bar{e}_1 + a_1^2 \bar{e}_2 + a_1^3 \bar{e}_3 = a_1^i \bar{e}_i,$$

$$\frac{\partial \bar{A}}{\partial u^2} = a_2^1 \bar{e}_1 + a_2^2 \bar{e}_2 + a_2^3 \bar{e}_3 = a_2^i \bar{e}_i,$$

где  $a_1^i, a_2^i$  — функции от  $u^1$  и  $u^2$ .

Всюду в дальнейшем мы будем считать, что индексы  $i, j, k$  принимают значения 1, 2, 3, а индексы  $\alpha, \beta$  — значения 1, 2, и подразумевать суммирование во всяком выражении, содержащем два одинаковых индекса, если один из них находится вверху, а другой внизу тех букв, при которых они поставлены.

Перепишем формулы (1) в виде

$$d\bar{A} = \omega^i \bar{e}_i, \quad (2)$$

где

$$\omega^i = a_\alpha^i du^\alpha.$$

Если в каждой точке  $A$  поверхности  $(A)$  выбран определенный репер  $(\bar{A}, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ , то

$$\bar{e}_i = \bar{e}_i(u^1, u^2)$$

и

$$d\bar{e}_i = \omega_i^j \bar{e}_j, \quad (3)$$

где  $\omega_i^j = a_{i\alpha}^j du^\alpha$  ( $a_{i\alpha}^j$  — функции от  $u^1$  и  $u^2$ ).

Уравнения (2) и (3) называют *уравнениями дифференциальных перемещений репера*  $(\bar{A}, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$  по поверхности  $(A)$ .

Условимся записывать их в виде следующей таблицы:

	$\bar{e}_1$	$\bar{e}_2$	$\bar{e}_3$
$d\bar{A}$	$\omega^1$	$\omega^2$	$\omega^3$
$d\bar{e}_1$	$\omega_1^1$	$\omega_1^2$	$\omega_1^3$
$d\bar{e}_2$	$\omega_2^1$	$\omega_2^2$	$\omega_2^3$
$d\bar{e}_3$	$\omega_3^1$	$\omega_3^2$	$\omega_3^3$

(4)

*Вектором на поверхности* называют вектор, заданный в какой-нибудь точке поверхности и лежащий в касательной плоскости к поверхности в этой точке. Его можно представить в виде

$$\bar{a} = a^\alpha \bar{e}_\alpha.$$

Если вектор  $\bar{a}$  задан в каждой точке поверхности, то

$$\bar{a}^\alpha = \bar{a}^\alpha(u^1, u^2),$$

и используя формулы (4), получим

$$d\bar{a} = (da^\alpha + a^\beta \omega_\beta^\alpha) \bar{e}_\alpha + a^\beta \omega_\beta^3 \bar{e}_3. \quad (5)$$

*Абсолютным дифференциалом*  $D\bar{a}$  вектора  $\bar{a}$  при переходе из точки  $A$  в бесконечно близкую точку  $A'$  поверхности называется ортогональная проекция вектора  $d\bar{a}$  на касательную плоскость к поверхности в точке  $A$ , т. е.

$$D\bar{a} = (da^\alpha + a^\beta \omega_\beta^\alpha) \bar{e}_\alpha. \quad (6)$$

Вектор  $\bar{a}$  называется *параллельно переносимым* по поверхности вдоль линии

$$u^\alpha = u^\alpha(t),$$

если вдоль этой линии  $D\bar{a} = 0$ .

1009. Доказать, что матрица  $(\omega_i^j)$  — кососимметрическая.
1010. Если в каждой точке  $A$  поверхности  $(A)$  координатная плоскость  $A\bar{e}_1 \bar{e}_2$  совпадает с касательной плоскостью к поверхности, то в уравнениях (4)  $\omega^3 = 0$ . Доказать.
1011. Каким условиям будут удовлетворять  $\omega_i^j, \omega_j^i$  в уравнениях (4), если в каждой точке  $A$  поверхности  $(A)$  координатные оси  $A\bar{e}_1, A\bar{e}_2$  направлены по касательным к линиям кривизны?
1012. Если векторы  $\bar{e}_1$  и  $\bar{e}_2$  в каждой точке касаются ко-

ординатных линий, то  $\omega^1$  и  $\omega^2$  можно представить в виде

$$\left. \begin{aligned} \omega^1 &= \sqrt{g_{11}}(u^1, u^2) du^1, \\ \omega^2 &= \sqrt{g_{22}}(u^1, u^2) du^2. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

1013. Показать, что систему уравнений (4) относительно ортонормированного репера  $(\bar{A}, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ , оси которого  $A\bar{e}_1$  и  $A\bar{e}_2$  в каждой точке  $A$  поверхности  $(A)$  направлены по касательным к линиям кривизны, принятым за координатные линии, можно написать в виде

$$\begin{array}{cccc} & \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ d\bar{A} & \sqrt{g_{11}} du^1 & \sqrt{g_{22}} du^2 & 0 \\ d\bar{e}_1 & 0 & q_1 \sqrt{g_{11}} du^1 + q_2 \sqrt{g_{22}} du^2 & p_1 \sqrt{g_{11}} du^1 \\ d\bar{e}_2 & -q_1 \sqrt{g_{11}} du^1 - q_2 \sqrt{g_{22}} du^2 & 0 & p_2 \sqrt{g_{22}} du^2 \\ d\bar{e}_3 & -p_1 \sqrt{g_{11}} du^1 & -p_2 \sqrt{g_{22}} du^2 & 0 \end{array} \quad (8)$$

1014. Показать, что уравнения (8) равносильны следующей системе уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \bar{A}}{\partial u^1} &= \sqrt{g_{11}} \bar{e}_1, & \frac{\partial \bar{A}}{\partial u^2} &= \sqrt{g_{22}} \bar{e}_2, \\ \frac{\partial \bar{e}_1}{\partial u^1} &= q_1 \sqrt{g_{11}} \bar{e}_2 + p_1 \sqrt{g_{11}} \bar{e}_3, & \frac{\partial \bar{e}_1}{\partial u^2} &= q_2 \sqrt{g_{22}} \bar{e}_2, \\ \frac{\partial \bar{e}_2}{\partial u^1} &= -q_1 \sqrt{g_{11}} \bar{e}_1, & \frac{\partial \bar{e}_2}{\partial u^2} &= -q_2 \sqrt{g_{22}} \bar{e}_1 + p_2 \sqrt{g_{22}} \bar{e}_3, \\ \frac{\partial \bar{e}_3}{\partial u^1} &= -p_1 \sqrt{g_{11}} \bar{e}_1, & \frac{\partial \bar{e}_3}{\partial u^2} &= -p_2 \sqrt{g_{22}} \bar{e}_2. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

1015. Система дифференциальных уравнений вида

$$\frac{\partial \bar{b}_i}{\partial u^\alpha} = f_{i\alpha}^j \bar{b}_j$$



называется *вполне интегрируемой*, если выполнены условия

$$\frac{\partial^2 \bar{b}_i}{\partial u^\alpha \partial u^\beta} = \frac{\partial^2 \bar{b}_i}{\partial u^\beta \partial u^\alpha}.$$

Она характеризуется существованием единственного решения при задании начальных условий

$$\bar{b}_i(u_0^1, u_0^2) = \bar{b}_i^0.$$

Показать, что условия полной интегрируемости системы (9) имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sqrt{g_{11}}}{\partial u^2} + q_1 \sqrt{g_{11}g_{22}} &= 0, & \frac{\partial \sqrt{g_{22}}}{\partial u^1} &= q_2 \sqrt{g_{11}g_{22}}, \\ \frac{\partial q_1 \sqrt{g_{11}}}{\partial u^2} - \frac{\partial q_2 \sqrt{g_{22}}}{\partial u^1} &= p_1 p_2 \sqrt{g_{11}g_{22}}, \\ \frac{\partial p_1 \sqrt{g_{11}}}{\partial u^2} + p_2 q_1 \sqrt{g_{11}g_{22}} &= 0, & \frac{\partial p_2 \sqrt{g_{22}}}{\partial u^1} &= p_1 p_2 \sqrt{g_{11}g_{22}}. \end{aligned} \right\} (10)$$

Выяснить геометрический смысл начальных условий.

- 1016.** Если уравнения дифференциальных перемещений репера  $(\bar{A}, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$  по поверхности  $(A)$  имеют вид (8), то первая квадратичная форма поверхности будет

$$d\bar{A}^2 = g_{11}du^1{}^2 + g_{22}du^2{}^2.$$

Доказать.

- 1017.** Если уравнения дифференциальных перемещений репера  $(\bar{A}, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$  по поверхности  $(A)$  имеют вид (8), то вторая квадратичная форма поверхности будет

$$\varphi_2 = \bar{e}_3 d^2 \bar{A} = p_1 g_{11} du^1{}^2 + p_2 g_{22} du^2{}^2.$$

Доказать.

- 1018.** Показать, что  $p_1$  и  $p_2$  в уравнениях (8) есть главные кривизны поверхности  $(A)$  в точке  $A$ .

**1019.** Показать, что линейчатая поверхность, состоящая из касательных к линиям кривизны  $u^1$ , в точках линии кривизны  $u^2$  — развертывающаяся, и ее ребро возврата касается оси  $A\bar{e}_1$  в точках с радиус-вектором  $\bar{A} - \frac{1}{q_2} \bar{e}_1$ . Аналогично поверхность касательных к линиям  $u^2$  в точках линии  $u^1$  — развертывающаяся, и ее ребро возврата касается оси  $A\bar{e}_2$  в точке с радиус-вектором  $\bar{A} + \frac{1}{q_1} \bar{e}_2$ .

**1020.** Доказать формулу Эйлера

$$k_n = p_1 \cos^2 \varphi + p_2 \sin^2 \varphi.$$

**1021.** Показать, что уравнение индикатрисы Дюпена можно представить в виде

$$p_1 x^2 + p_2 y^2 = \pm 1.$$

**1022.** Показать, что полная кривизна поверхности зависит только от коэффициентов первой квадратичной формы и может быть выражена формулой

$$K = \frac{1}{\sqrt{g_{11}g_{22}}} \left\{ \frac{\partial}{\partial u^2} \left( \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial \sqrt{g_{11}}}{\partial u^2} \right) - \frac{\partial}{\partial u^1} \left( \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial \sqrt{g_{22}}}{\partial u^1} \right) \right\}.$$

**1023.** Доказать, что квадрат кручения асимптотической линии поверхности в каждой ее точке равен полной кривизне поверхности в этой точке, взятой с обратным знаком (*теорема Бельтрами — Эннепера*).

**1024.** Показать, что геодезическая кривизна линий кривизны в точке  $A$  выражается по формулам:

$$k_g \big|_{du^2=0} = q_1, \quad k_g \big|_{du^1=0} = -q_2.$$

**1025.** Показать, что уравнение геодезических линий на поверхности имеет вид

$$\omega^1 d\omega^2 - \omega^2 d\omega^1 + (q_1 \omega^1 + q_2 \omega^2) (\omega^1 + \omega^2) = 0, \quad (11)$$

где

$$\omega^1 = \sqrt{g_{11}} du^1, \quad \omega^2 = \sqrt{g_{22}} du^2.$$

- 1026.** Доказать, что при параллельном перенесении векторов по поверхности длины векторов и углы между ними сохраняются.
- 1027.** Для того чтобы линия на поверхности была геодезической, необходимо и достаточно, чтобы ее единичный касательный вектор был параллельно переносимым вдоль этой линии. Доказать.
- 1028.** Если единичный вектор на поверхности

$$\bar{a} = a^\alpha \bar{e}_\alpha$$

параллельно переносится по поверхности ( $A$ ) вдоль некоторой линии, причем

$$\bar{a} \bar{e}_1 = \cos \varphi,$$

то

$$-d\varphi = \omega_1^2 = q_1 \sqrt{g_{11}} du^1 + q_2 \sqrt{g_{22}} du^2. \quad (12)$$

Доказать.

- 1029.** Угол поворота вектора на поверхности при параллельном обнесении его по границе  $L$  односвязной области  $D$  на поверхности равен *интегральной кривизне* этой области, т. е.

$$\Delta\varphi = \iint_D K d\sigma.$$

Доказать.

- 1030.** Интегральная кривизна односвязной области  $D$  поверхности, ограниченной гладким контуром  $L$ , и *интегральная геодезическая кривизна* этого контура связаны соотношением

$$\iint_D K d\sigma + \oint_L K_g ds = 2\pi.$$

Доказать.

1031. Пусть  $D$  — односвязная область на поверхности, ограниченная криволинейным многоугольником  $L$ . Тогда

$$\iint_D K d\sigma + \oint_L k_g ds + \sum_{i=1}^n \alpha_i = 2\pi,$$

где  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  — внешние углы многоугольника  $L$  (теорема Гаусса — Бонне). Доказать.

1032. Если область  $D$  на поверхности ограничена геодезическим треугольником  $ABC$  ( $\cup AB, \cup BC, \cup CA$  — геодезические) и его внутренние углы соответственно  $\alpha, \beta, \gamma$ , то

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi + \iint_D K d\sigma.$$

Доказать.

1033. На поверхностях, во всех точках которых полная кривизна не положительна, не может быть замкнутой геодезической линии.

## § 23. Разные задачи

1034. Все точки поверхности

$$2x^2 + 3y^2 + 4z^2 - 2xy - 4x + 18y - 16z = 0$$

ортогонально проектируются на координатные плоскости. Какие области заполняют проекции?

1035. Если поверхность касается плоскости вдоль некоторой линии, то каждая точка этой линии является параболической точкой поверхности. Доказать.
1036. Показать, что если нормали к поверхности вдоль линии  $l$  параллельны, то все точки линии  $l$  являются параболическими точками поверхности.
1037. Если при сферическом отображении поверхности  $S$  каждая асимптотическая линия одного семейства изображается большой окружностью, то  $S$  — косая линейчатая поверхность. Доказать.
1038. Доказать, что плоскость и катеноид являются един-

ственными минимальными поверхностями вращения.

1039. Доказать, что среди линейчатых поверхностей единственной минимальной поверхностью (отличной от плоскости) является прямой геликоид.

1040. Найти все минимальные поверхности, которые могут быть заданы уравнением вида

$$z = f\left(\frac{y}{x}\right).$$

1041. Пусть

$$\bar{r} = \bar{r}(u, v) —$$

уравнение поверхности  $S$ , а

$$\bar{r}^* = \bar{r} + a\bar{m} —$$

уравнение параллельной ей поверхности  $S^*$ . Выразить полную и среднюю кривизну поверхности  $S^*$  через полную и среднюю кривизну поверхности  $S$ .

1042. Дана поверхность постоянной средней кривизны  $H$ , отличной от нуля. На всех ее нормалях отложены отрезки  $1:2H$ . Доказать, что полная кривизна построенной таким образом параллельной поверхности постоянна.

1043. Доказать, что для средней кривизны поверхности  $S$  имеет место формула

$$H = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{ds - ds^*}{2ads},$$

где  $ds$  и  $ds^*$  — соответствующие элементы площади параллельных поверхностей  $S$  и  $S^*$ .

1044. Доказать, что площадь любого куска минимальной поверхности не может быть меньше соответствующего куска параллельной поверхности.

1045. Доказать, что предел отношения площади сферического изображения поверхности  $S$  к площади соответствующей области поверхности  $S$  по величине и знаку равен полной кривизне поверхности.

**1046.** Доказать, что если один из главных радиусов кривизны поверхности постоянный, то поверхность есть огибающая семейства сфер постоянного радиуса, центры которых лежат на некоторой линии.

**1047.** Дана система прямых

$$x = tz + p, \quad y = pz + \frac{t^3}{3},$$

где  $t$  и  $p$  — переменные параметры. При какой зависимости между  $p$  и  $t$  эти прямые образуют развертывающуюся поверхность?

Найти геометрическое место ребер возврата таких поверхностей. Найти линии пересечения этих поверхностей с плоскостью  $xOy$ .

**1048.** Круговой цилиндр пересечен плоскостью, не параллельной его оси. В какую линию перейдет линия пересечения при наложении цилиндра на плоскость?

**1049.** Даны сфера и прямая  $d$ . Найти ортогональные траектории сечений, образованных на сфере плоскостями, проходящими через прямую  $d$ .

**1050.** Если на материальную точку, принужденную двигаться по некоторой поверхности, не действуют внешние силы, то она будет двигаться по геодезической. Доказать.

**1051.** *Подэрой* поверхности по отношению к данной точке называется геометрическое место оснований перпендикуляров, опущенных из данной точки на касательные плоскости поверхности.

Найти подэру поверхности

$$F(x, y, z) = 0$$

по отношению к началу координат.

**1052—** Найти подэры следующих поверхностей по отношению к началу координат:

$$(1052) \quad \frac{x^2}{a^2} + \varepsilon \frac{y^2}{b^2} + \varepsilon' \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad \varepsilon, \varepsilon' = \pm 1;$$

$$(1053) \quad \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 2z; \quad (1054) \quad xy = az.$$

## Метрические, аффинные и проективные свойства линий и поверхностей

Свойства линий и поверхностей в евклидовом пространстве, а также связанные с ними понятия можно подразделить на метрические, аффинные и проективные, т. е. такие, которые сохраняются соответственно при ортогональных, аффинных или проективных преобразованиях.

Уточним сказанное. Аффинные преобразования пространства в аффинном репере

$$\{O, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\} \quad (1)$$

задаются формулами

$$\left. \begin{aligned} \tilde{x}^i &= \alpha_j^i x^j + \alpha^i, \\ \det(\alpha_j^i) &\neq 0, \quad i, j = 1, 2, 3, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

где  $x^1, x^2, x^3$  — координаты произвольной точки  $M$ , т. е. коэффициенты в разложении

$$\overrightarrow{OM} = x^i \bar{e}_i,$$

а  $\tilde{x}^1, \tilde{x}^2, \tilde{x}^3$  — координаты точки  $\tilde{M}$ , являющейся образом точки  $M$  при рассматриваемом аффинном преобразовании.

Если репер (1) ортонормирован, а матрица  $(\alpha_{ij})$  ортогональна, то формулы (2) задают ортогональные преобразования (движения в комбинации с зеркальными отражениями).

Аналогично задаются аффинные и ортогональные преобразования плоскости.

Пополнив евклидово пространство несобственными элементами, мы получим проективное пространство. Для изучения проективного пространства его удобно представлять следующим образом. Пусть

$$x^0, x^1, x^2, x^3 \quad (3)$$

вещественные числа, не равные одновременно нулю. Рассмотрим множество (класс) всех упорядоченных четверок вещественных чисел, пропорциональных четверке (3)

$$(x^0:x^1:x^2:x^3).$$

Каждый такой класс будем называть геометрической точкой и обозначать  $M(x^i)$ , а любого представителя этого класса — аналитической точкой  $\bar{M}(x^i)$ .

Множество всех геометрических точек является моделью трехмерного вещественного проективного пространства. Множество всех аналитических точек, дополненное нулевой точкой  $(0, 0, 0, 0)$ , образует четырехмерное вещественное векторное пространство с обычными операциями сложения аналитических точек и умножения их на вещественные числа:

$$\bar{M}(x^i) + \bar{N}(y^i) = \bar{L}(x^i + y^i),$$

$$\alpha \bar{M}(x^i) = \bar{K}(\alpha x^i).$$

Прямая в проективном пространстве, проходящая через точки  $\bar{A}(a^i)$  и  $\bar{B}(b^i)$ , задается уравнением  $\bar{X} = \alpha \bar{A} + \beta \bar{B}$ ,

где  $\bar{X}$  — текущая точка прямой, а параметры  $\alpha$  и  $\beta$  принимают всевозможные вещественные значения, не равные одновременно нулю.

Плоскость, проходящая через точки  $\bar{A}(a^i)$ ,  $\bar{B}(b^i)$  и  $\bar{C}(c^i)$ , задается уравнением

$$\bar{X} = \alpha \bar{A} + \beta \bar{B} + \gamma \bar{C},$$

или

$$\begin{vmatrix} x^0 & x^1 & x^2 & x^3 \\ a^0 & a^1 & a^2 & a^3 \\ b^0 & b^1 & b^2 & b^3 \\ c^0 & c^1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = 0,$$



или, короче,

$$|\bar{X} \bar{A} \bar{B} \bar{C}| = 0.$$

Проективные преобразования задаются формулами:

$$\tilde{x}^i = \alpha_j^i x^j,$$

$$\det(\alpha_j^i) \neq 0, \quad i, j = 0, 1, 2, 3.$$

Аналогичным образом вводятся соответствующие понятия на проективной плоскости.

Линию в проективном пространстве или на проективной плоскости можно задать соответственно уравнениями

$$x^i = x^i(t), \quad i = 0, 1, 2, 3,$$

$$x^i = x^i(t), \quad i = 0, 1, 2,$$

или, короче,

$$\bar{M} = \bar{M}(t),$$

а поверхность — уравнениями

$$x^i = x^i(u, v), \quad i = 0, 1, 2, 3,$$

или

$$\bar{M} = \bar{M}(u, v).$$

- 1055.** Показать, что уравнение касательной к линии

$$\bar{M} = \bar{M}(t)$$

в произвольной ее точке можно задать в виде

$$\bar{X} = \alpha \bar{M} + \beta \frac{d\bar{M}}{dt}.$$

- 1056.** Показать, что уравнение касательной плоскости к поверхности

$$\bar{M} = \bar{M}(u, v)$$

в произвольной ее точке можно задать в виде

$$|\bar{X} \bar{M} \bar{M}_u \bar{M}_v| = 0,$$

$$\text{где } \bar{M}_u = \frac{\partial \bar{M}}{\partial u}, \quad \bar{M}_v = \frac{\partial \bar{M}}{\partial v}.$$

- 1057.** Показать, что понятие касательной плоскости к поверхности — проективное, т. е. касательная плоскость к поверхности при проективном преобразовании переходит в касательную плоскость к преобразованной поверхности.
- 1058.** Показать, что понятие касательной к линии — проективное.
- 1059.** Если однопараметрическое семейство линий на плоскости или поверхностей в пространстве имеет огибающую, то семейство, получающееся в результате проективного преобразования, также имеет огибающую, которая является образом огибающей исходного семейства. Доказать.
- 1060.** Показать, что понятие линейчатой поверхности — проективное.
- 1061.** Доказать, что развертывающаяся поверхность при проективном преобразовании переходит в развертывающуюся поверхность, причем ребро возврата исходной поверхности переходит в ребро возврата преобразованной поверхности.
- 1062.** Доказать, что косая линейчатая поверхность при проективном преобразовании переходит в косую линейчатую поверхность.
- 1063.** Показать, что понятие соприкасающейся плоскости линии — проективное.
- 1064—1082.** Выяснить, будут ли указанные понятия метрическими, аффинными или проективными:
- (1064) плоская линия;
  - (1065) кривизна линии;
  - (1066) эволюта плоской линии;
  - (1067) кручение линии;
  - (1068) нормаль линии;
  - (1069) бинормаль линии;

- (1070) нормальная плоскость линии;
- (1071) спрямляющая плоскость линии;
- (1072) сопряженные и асимптотические направления в данной точке поверхности;
- (1073) асимптотические линии на поверхности;
- (1074) линии кривизны на поверхности;
- (1075) геодезические линии на поверхности;
- (1076) полная кривизна поверхности;
- (1077) средняя кривизна поверхности;
- (1078) поверхность нулевой полной кривизны;
- (1079) поверхность нулевой средней кривизны (минимальная поверхность);
- (1080) эллиптические, гиперболические и параболические точки поверхности;
- (1081) точки округления поверхности;
- (1082) точки уплощения поверхности.

**1083.** Найти огибающую семейства прямых, соединяющих концы пар сопряженных диаметров эллипса.

**1084.** Найти уравнение огибающей семейства прямых, проходящих через пары точек эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

таких, что вместе с центром эллипса они определяют эллиптические секторы постоянной площади  $S$ .

**1085.** Найти уравнение огибающей семейства прямых, отсекающих от двух пересекающихся под углом  $2\alpha$  прямых треугольники постоянной площади  $S$ .

**1086.** Найти огибающую семейства прямых, отсекающих от данной параболы  $y=ax^2$  сегменты постоянной площади  $S$ .

**1087.** Доказать, что геометрическое место касательных к асимптотическим линиям кривой линейчатой поверхности вдоль одной образующей поверхности есть однополостный гиперболоид или гипербolicкий параболоид.

## Элементы теории поля

## § 24. Скалярное поле

*Скалярное поле* определяется скалярной функцией

$$u = u(P) = u(x, y, z) = u(\bar{r}),$$

где  $P(x, y, z)$  — точка пространства и

$$\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k} —$$

ее радиус-вектор.

Поле  $u = u(P)$  называется *плоским*, если существует такая система координат, что функция  $u$  фактически не зависит от  $z$ , т. е.

$$u = u(x, y).$$

Такое поле принимает одинаковые значения на каждой прямой, параллельной оси  $Oz$ , поэтому его обычно рассматривают только в плоскости  $xOy$ .

Поверхности

$$u(x, y, z) = C,$$

где  $C = \text{const}$ , называются *поверхностями уровня скалярного поля*.

В случае плоского поля поверхности уровня

$$u(x, y) = C \tag{1}$$

являются цилиндрическими поверхностями с образующими, параллельными оси  $Oz$ .

Если плоское поле рассматривать только на плоскости  $xOy$ , то уравнение (1) определяет совокупность его *линий уровня*.

Если функция

$$u(\bar{r}) = u(x, y, z),$$

определяющая скалярное поле, непрерывно диф-

ференцируема, то *градиентом* этого поля называется вектор

$$\text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \bar{k}.$$

Градиент поля  $u$  в данной точке  $P(x, y, z)$  направлен по нормали к поверхности уровня

$$u(x, y, z) = C,$$

проходящей через точку  $P$ . Этот вектор для каждой точки поля по величине

$$|\text{grad } u| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}$$

и направлению дает наибольшую скорость изменения функции  $u$ .

Градиент скалярного поля обозначают также символом  $\bar{\nabla} u$ , где знак  $\bar{\nabla}$  читается «набла». Таким образом

$$\bar{\nabla} u = \bar{i} \frac{\partial u}{\partial x} + \bar{j} \frac{\partial u}{\partial y} + \bar{k} \frac{\partial u}{\partial z}.$$

$\bar{\nabla}$  можно рассматривать как дифференциальный оператор (оператор Гамильтона)

$$\bar{\nabla} = \bar{i} \frac{\partial}{\partial x} + \bar{j} \frac{\partial}{\partial y} + \bar{k} \frac{\partial}{\partial z},$$

который будучи применен к скаляру  $u$ , дает  $\text{grad } u$ . Этот оператор удобно рассматривать как символический вектор и применять к нему обычные правила векторной алгебры. Например,

$$r \bar{\nabla} = x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z}.$$

Производная скалярного поля  $u(P)$  по направлению  $l$ , заданному вектором

$$\bar{a} = a_x \bar{i} + a_y \bar{j} + a_z \bar{k},$$

вычисляется по формуле

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma,$$

где

$$\cos \alpha = \frac{a_x}{|\bar{a}|}, \quad \cos \beta = \frac{a_y}{|\bar{a}|}, \quad \cos \gamma = \frac{a_z}{|\bar{a}|},$$

$$|\bar{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

Производная по направлению связана с градиентом скалярного поля формулой

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \bar{e} \operatorname{grad} u,$$

где  $\bar{e}$  — единичный вектор заданного направления.

Точка, в которой производная скалярного поля в любом направлении равна нулю, называется *стационарной точкой* этого поля.

**1088—** Найти линии уровня плоских полей (рассматриваемых только на плоскости  $xOy$ ):

$$(1088) \quad u = x^2 + y^2; \quad (1089) \quad u = x^2 - y^2;$$

$$(1090) \quad u = \frac{y}{x^2}; \quad (1091) \quad u = \frac{2x}{x^2 + y^2};$$

$$(1092) \quad u = \frac{2x - y + 1}{x^2}.$$

**1093—** Найти поверхности уровня следующих скалярных полей:

$$(1093) \quad u = x + y + z; \quad (1094) \quad u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2};$$

$$(1095) \quad u = x^2 + y^2 - z^2;$$

$$(1096) \quad u = \sqrt{x^2 + y^2 + (z+8)^2} + \sqrt{x^2 + y^2 + (z-8)^2}.$$

**1097.** Найти производную скалярного поля

$$u = x^3 - 2x^2y + xy^2 + 1$$

в точке  $M(1, 2)$  в направлении вектора, соединяющего эту точку с точкой  $N(4, 6)$ .

**1098.** Найти производную скалярного поля

$$u = xy^2 + z^3 - xyz$$

в точке  $M(1, 1, 2)$  в направлении, образующем с осями координат углы  $\alpha = 60^\circ$ ,  $\beta = 45^\circ$ ,  $\gamma = 60^\circ$ .

**1099.** Найти стационарные точки следующих скалярных

**1100.** полей:

(1099)  $u = x^3 + y^3 - 3xy$ ;

(1100)  $u = 2y^2 + z^2 - xy - yz + 2x$ .

**1101—** Найти градиенты следующих скалярных полей:

**1104.**

(1101)  $u = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - xz + yz - xy$ ;

(1102)  $u = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ ;

(1103)  $u = xyz e^{x+y+z}$ ;

(1104)  $u = \arctg \frac{x+y+z-xyz}{1-xy-yz-xz}$ .

**1105.** Найти градиент скалярного поля

$$u = x^3 + y^3 - 3xy$$

в точке  $M(2, 1)$ .

**1106.** Найти величину и направление градиента скалярного поля

$$u = x^2 + y^2 + z^2$$

в точке  $M(2, -2, 1)$ .

**1107.** Найти величину и направление градиента скалярного поля

$$u = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + xy + 3x - 2y - 6z$$

в точках  $O(0, 0, 0)$ ,  $A(2, 0, 1)$ . В какой точке градиент равен нулю?

- 1108.** Найти угол между градиентами указанных скалярных полей в данных точках:

(1108)  $u = \ln \frac{y}{x}, \quad A \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{4} \right), \quad B (1, 1).$

(1109)  $u = \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2}, \quad A (1, 2, 2), \quad B (-3, 1, 0).$

- 1110.** Найти угол между градиентами полей

$$u = x^2 + y^2 - z^2, \quad v = \arcsin \frac{z}{x+y}$$

в точке  $M (1, 1, \sqrt{7})$ .

- 1111.** Установить характер роста скалярного поля

$$u = 5x^2yz - 7xy^2z + 5xyz^2$$

в направлении вектора

$$\vec{a} = 8\vec{i} - 4\vec{j} + 8\vec{k}$$

в точке  $M (1, 1, 1)$ ;

найти величину скорости изменения данного поля.

- 1112.** Найти точки, в которых градиент функции

$$u = \ln \left( y + \frac{1}{x} \right)$$

$$\text{равен } -\frac{\pi}{16} \vec{i} + \vec{j}.$$

- 1113.** Найти производную поля

$$u = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$$

в точке  $M (x, y, z)$  в направлении ее радиус-вектора  $\vec{r}$ . В каком случае эта производная будет равна величине градиента?

- 1114.** Найти производную скалярного поля

$$u = u(x, y, z)$$



в направлении градиента поля

$$v=v(x, y, z).$$

В каком случае она будет равна нулю?

**1115—** Доказать справедливость следующих формул:

**1121.**

$$(1115) \operatorname{grad} c=0, \quad c-\text{const};$$

$$(1116) \operatorname{grad}(u+v)=\operatorname{grad} u+\operatorname{grad} v;$$

$$(1117) \operatorname{grad}(uv)=v \operatorname{grad} u+u \operatorname{grad} v;$$

$$(1118) \operatorname{grad}(cu)=c \operatorname{grad} u, \quad c-\text{const};$$

$$(1119) \operatorname{grad} \left( \frac{u}{v} \right) = \frac{v \operatorname{grad} u - u \operatorname{grad} v}{v^2};$$

$$(1120) \operatorname{grad} f(u)=f'(u) \operatorname{grad} u;$$

$$(1121) \operatorname{grad} u^n=n u^{n-1} \operatorname{grad} u.$$

**1122—** Найти градиент скалярного поля, зависящего

**1129.** от  $r=|\vec{r}|$ , в каждом из следующих случаев:

$$(1122) \operatorname{grad} r;$$

$$(1123) \operatorname{grad} f(r);$$

$$(1124) \operatorname{grad} r^n, \quad n-\text{натуральное число};$$

$$(1125) \operatorname{grad} \frac{1}{r};$$

$$(1126) \operatorname{grad} \ln r;$$

$$(1127) \operatorname{grad}(\bar{c} \bar{r}), \quad \bar{c}-\text{const};$$

$$(1128) \operatorname{grad}(\bar{a} \bar{r}; \bar{b} \bar{r}), \quad \bar{a}, \bar{b}-\text{const};$$

$$(1129) \operatorname{grad} [\bar{c} \bar{r}]^2, \quad \bar{c}-\text{const}.$$

**1130—** Доказать справедливость следующих формул:

**1132.**

$$(1130) \operatorname{grad} f(u, v, w) = \frac{\partial f}{\partial u} \operatorname{grad} u + \frac{\partial f}{\partial v} \operatorname{grad} v + \\ + \frac{\partial f}{\partial w} \operatorname{grad} w;$$

$$(1131) \quad (\bar{r}\nabla)r^n = nr^n; \quad (1132) \quad (\bar{v}\nabla)r = v.$$

**1133.** Найти формулу для вычисления градиента скалярного поля  $f(u, v, w)$ , заданного функцией от трех криволинейных ортогональных координат.

**1134.** Найти формулу для вычисления градиента скалярного поля в цилиндрических координатах.

**1135—1139.** Найти градиенты следующих скалярных полей в цилиндрических координатах:

$$(1135) \quad u = z + \rho\varphi; \quad (1136) \quad u = z\rho\varphi;$$

$$(1137) \quad u = z \sin \varphi + \rho; \quad (1138) \quad u = z \cos \varphi + \rho^2;$$

$$(1139) \quad u = z \sin^2 \varphi + \rho^3.$$

**1140.** Найти формулу для вычисления градиента скалярного поля в сферических координатах.

**1141—1145.** Найти градиенты следующих скалярных полей в сферических координатах:

$$(1141) \quad u = \rho\varphi; \quad (1142) \quad u = \rho\theta;$$

$$(1143) \quad u = \rho\theta\varphi; \quad (1144) \quad u = \varphi \sin \theta + \rho;$$

$$(1145) \quad u = \theta \cos \varphi + \rho.$$

## § 25. Векторное поле

*Векторное поле* определяется векторной функцией точки

$$\bar{a} = \bar{a}(P) = \bar{a}(\bar{r}) = a_x(x, y, z)\bar{i} + a_y(x, y, z)\bar{j} + a_z(x, y, z)\bar{k},$$

где  $P(x, y, z)$  — точка пространства и

$$\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k} —$$

ее радиус-вектор.

*Векторной линией поля* называется такая линия, в каждой точке которой касательная имеет направление вектора  $\bar{a}(P)$ .

Векторные линии (*силовые линии, линии тока*)

векторного поля находятся из системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{a_x} = \frac{dy}{a_y} = \frac{dz}{a_z}.$$

*Дивергенцией (расходимостью)* векторного поля

$$\bar{a}(P) = a_x \bar{i} + a_y \bar{j} + a_z \bar{k}$$

называется скаляр

$$\operatorname{div} \bar{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = \nabla \bar{a}.$$

*Ротацией (вихрем)* векторного поля  $\bar{a}(P)$  называется вектор

$$\operatorname{rot} \bar{a} = \left( \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) \bar{i} + \left( \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) \bar{j} + \\ + \left( \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) \bar{k}$$

или в символическом виде

$$[\nabla \bar{a}] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}.$$

*Потоком* векторного поля  $\bar{a}(P)$  через поверхность  $S$  в сторону, определяемую единичным вектором нормали

$$\bar{n} \{ \cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma \}$$

к поверхности  $S$ , называется интеграл

$$\Pi = \iint_S \bar{a} \bar{n} dS = \iint_S a_n dS = \iint_D (a_x \cos \alpha + \\ + a_y \cos \beta + a_z \cos \gamma) dS,$$

где  $a_n$  — величина проекции вектора  $\bar{a}$  на направление вектора  $\bar{n}$ .

Если  $S$  — замкнутая поверхность, ограничивающая объем  $V$ , а  $\bar{n}$  — единичный вектор внешней нормали к ней, то справедлива *формула Остроградского*.

$$\begin{aligned} \iiint_V \left( \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \right) dV = \\ = \iint_S (a_x \cos \alpha + a_y \cos \beta + a_z \cos \gamma) dS \end{aligned}$$

или в векторном виде

$$\iiint_V \operatorname{div} \bar{a} dV = \iint_S a_n dS.$$

*Линейный интеграл от вектора  $\bar{a}$  по линии  $L$*  определяется формулой

$$\int_L \bar{a} d\bar{r} = \int_L a_s ds = \int_L a_x dx + a_y dy + a_z dz,$$

где  $a_s$  — проекция вектора  $\bar{a}$  на касательную к  $L$ . Линейный интеграл выражает *работу* векторного поля  $\bar{a}$  вдоль линии  $L$ .

Если линия  $L$  — замкнутая, то линейный интеграл называется *циркуляцией векторного поля  $\bar{a}$  вдоль контура  $L$* .

Если замкнутая линия  $L$  ограничивает двустороннюю поверхность  $S$ , то справедлива *формула Стокса*

$$\oint_L \bar{a} d\bar{r} = \iint_S \bar{n} \operatorname{rot} \bar{a} dS,$$

где  $\bar{n}$  — вектор нормали к поверхности  $S$ , направление которого должно быть выбрано так, чтобы

наблюдатель, перемещающийся вдоль контура  $L$  вместе с вектором  $\bar{n}$ , видел непосредственно прилегающую к нему часть поверхности слева от себя.

Векторное поле  $\bar{a}(\bar{r})$  называется *потенциальным*, если

$$\bar{a} = \text{grad } u,$$

где  $u = u(\bar{r})$  — скалярная функция (потенциал векторного поля  $\bar{a}$ ).

Для потенциальности векторного поля  $\bar{a}$ , заданного в односвязной области, необходимо и достаточно, чтобы

$$\text{rot } \bar{a} = 0.$$

В этом случае потенциал  $u$  определяется из уравнения

$$du = a_x dx + a_y dy + a_z dz.$$

Если потенциал  $u$  определяется однозначно, то

$$\int_{AB} \bar{a} d\bar{r} = u(B) - u(A),$$

в частности, циркуляция векторного поля  $\bar{a}$  вдоль любого замкнутого контура равна нулю.

Векторное поле  $\bar{a}(\bar{r})$  называется *соленоидальным*, если в каждой его точке

$$\text{div } \bar{a} = 0;$$

в этом случае поток вектора через любую замкнутую поверхность равен нулю.

Если поле является одновременно потенциальным и соленоидальным, то

$$\text{div}(\text{grad } u) = 0$$

и потенциальная функция  $u$  является *гармониче-*

ской, т. е. удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0,$$

или

$$\Delta u = 0,$$

где

$$\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} -$$

оператор Лапласа.

**1146—** Найти векторные линии следующих векторных полей:

$$(1146) \quad \vec{a} = -cy\vec{i} + cx\vec{j}, \quad c = \text{const};$$

$$(1147) \quad \vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + 2z\vec{k};$$

$$(1148) \quad \vec{a} = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} + z^2\vec{k};$$

$$(1149) \quad \vec{a} = y\vec{i} + x\vec{j};$$

$$(1150) \quad \vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

**1151,** Найти дивергенцию следующих векторных полей:

$$(1151) \quad \vec{r} = xyz\vec{i} + (2x + 3y + z)\vec{j} + (x^2 + z^2)\vec{k};$$

$$(1152) \quad \vec{r} = (6x^2y^2 - z^3 + yz - 5)\vec{i} + (4x^3y + xz + 2)\vec{j} + \\ + (xy - 3xz^2 - 3)\vec{k}.$$

**1153—** Доказать справедливость следующих формул:

$$(1153) \quad \text{div } \vec{c} = 0, \quad \vec{c} = \text{const};$$

$$(1154) \quad \text{div}(\vec{a} + \vec{b}) = \text{div } \vec{a} + \text{div } \vec{b};$$

$$(1155) \quad \text{div}(c\vec{a}) = c \text{ div } \vec{a}, \quad c = \text{const};$$

$$(1156) \quad \text{div}(u\vec{a}) = u \text{ div } \vec{a} + \vec{a} \text{ grad } u;$$

$$(1157) \quad \text{div}(u\vec{c}) = \vec{c} \text{ grad } u, \quad \vec{c} = \text{const}.$$

**1158—** Найти дивергенцию векторного поля в следующих случаях:

$$(1158) \operatorname{div} \bar{r}; \quad (1159) \operatorname{div}(f(r)\bar{r});$$

$$(1160) \operatorname{div} \frac{\bar{r}}{r}; \quad (1161) \operatorname{div}(r^n \bar{r});$$

$$(1162) \operatorname{div}(\operatorname{grad} f(r)); \quad (1163) \operatorname{div}(\operatorname{grad} u);$$

$$(1164) \operatorname{div}(u \operatorname{grad} u); \quad (1165) \operatorname{div}(u \operatorname{grad} v).$$

**1166—** Считая, что  $\bar{c}$  и  $\bar{c}_1$  — постоянные векторы, найти дивергенцию векторного поля в следующих случаях:

$$(1166) \operatorname{div}(r\bar{c}); \quad (1167) \operatorname{div}(r^2\bar{c});$$

$$(1168) \operatorname{div}(f(r)\bar{c}); \quad (1169) \operatorname{div}[\bar{r}\bar{c}];$$

$$(1170) \operatorname{div}(\bar{c}(\bar{r}\bar{c}_1)); \quad (1171) \operatorname{div}(\bar{r}(\bar{r}\bar{c})).$$

**1172,** Считая  $\bar{e}$  постоянным единичным вектором, вычислить:

$$(1172) \operatorname{div}(\bar{e}(\bar{e}\bar{r})); \quad (1173) \operatorname{div}[\bar{e}[\bar{r}\bar{e}]].$$

**1174.** Найти

$$\operatorname{div} \frac{x+y+z}{xyz} \bar{r}.$$

**1175,** Найти функции  $f(r)$ , удовлетворяющие следующим уравнениям:

$$(1175) \operatorname{div}(\operatorname{grad} f(r)) = 0;$$

$$(1176) 2r \operatorname{div}(\operatorname{grad} f(r)) = \operatorname{div} \frac{\bar{r}}{r}.$$

**1177.** Найти формулу для дивергенции вектора  $\bar{a}$  в ортогональных криволинейных координатах  $u, v, w$ , если его прямоугольные декартовы координаты  $x, y, z$  выражаются формулами:

$$x=f(u, v, w), \quad y=g(u, v, w), \quad z=\psi(u, v, w).$$

**1178.** Найти выражение для  $\operatorname{div} \bar{a}$  в цилиндрических координатах.

**1179.** Найти выражение для  $\operatorname{div} \bar{a}$  в сферических координатах.

**1180.** Найти ротацию следующих векторных полей:

**1181.**

$$(1180) \quad \bar{a} = y^2 z \bar{i} + z^2 x \bar{j} + x^2 y \bar{k};$$

$$(1181) \quad \bar{a} = xy z \bar{i} + (2x + 3y - z) \bar{j} + (x^2 + z^2) \bar{k}.$$

**1182—** Доказать справедливость следующих формул:

**1184.**

$$(1182) \quad \operatorname{rot}(\bar{a} + \bar{b}) = \operatorname{rot} \bar{a} + \operatorname{rot} \bar{b};$$

$$(1183) \quad \operatorname{rot}(u \bar{a}) = u \operatorname{rot} \bar{a} + [\operatorname{grad} u, \bar{a}];$$

$$(1184) \quad \operatorname{div}[\bar{a} \bar{b}] = \bar{b} \operatorname{rot} \bar{a} - \bar{a} \operatorname{rot} \bar{b}.$$

**1185—** Считая, что  $\bar{c}$  и  $\bar{c}_1$  — постоянные векторы, найти

**1192.** ротацию векторного поля в следующих случаях:

$$(1185) \quad \operatorname{rot} \bar{c}; \quad (1186) \quad \operatorname{rot} \bar{r};$$

$$(1187) \quad \operatorname{rot}[\bar{r} \bar{c}]; \quad (1188) \quad \operatorname{rot}(\bar{r}(\bar{r} \bar{c}));$$

$$(1189) \quad \operatorname{rot}(\bar{c}(\bar{r} \bar{c}_1)); \quad (1190) \quad \operatorname{rot}[\bar{c} \bar{r} \bar{c}_1];$$

$$(1191) \quad \operatorname{rot}(f(r) \bar{r}); \quad (1192) \quad \operatorname{rot}(f(r) \bar{c}).$$

**1193—** Доказать справедливость следующих формул:

**1196.**

$$(1193) \quad \operatorname{rot}(\operatorname{grad} u) = \bar{0};$$

$$(1194) \quad \operatorname{div}(\operatorname{rot} \bar{a}) = 0;$$

$$(1195) \quad \operatorname{div}(\operatorname{grad} u) = \Delta u;$$

$$(1196) \quad \operatorname{rot} \operatorname{rot} \bar{a} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \bar{a} - \Delta \bar{a},$$

где

$$\Delta \bar{a} = \Delta a_x \bar{i} + \Delta a_y \bar{j} + \Delta a_z \bar{k}.$$



1197. Пользуясь формулой Остроградского, доказать, что поток векторного поля  $\vec{a} = \vec{r}$  через замкнутую поверхность, ограничивающую произвольный объем  $V$ , равен  $3V$ .

1198. Вычислить поток векторного поля

$$\vec{a} = xy^2\vec{i} + x^2y\vec{j} + z\vec{k}$$

через замкнутую поверхность, образованную координатными плоскостями

$$x=0, \quad y=0, \quad z=0$$

и частью поверхности параболоида

$$4-z=x^2+y^2,$$

лежащей в первом октанте.

1199. Вычислить поток векторного поля

$$\vec{a} = x^3\vec{i} + y^3\vec{j} + z^3\vec{k}$$

через поверхность сферы

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

1200. Вычислить поток поля напряженности

$$\vec{E} = \frac{q\vec{r}}{r^3}$$

точечного заряда  $q$  через сферу радиуса  $a$  с центром в точке заряда.

1201. Вычислить поток поля напряженности

$$\vec{E} = \frac{q\vec{r}}{r^3}$$

точечного заряда  $q$  через замкнутую поверхность  $S$ , не содержащую внутри себя заряда  $q$ .

1202. Вычислить поток векторного поля

$$\vec{a} = xy\vec{i} + (y+z)\vec{j} + (x+2z)\vec{k}$$

через часть плоскости

$$2x + y + z = 2,$$

лежащую в первом октанте.

1203. Вычислить поток вектора

$$\vec{a} = x^3 \vec{i} + y^3 \vec{j} + z^3 \vec{k}$$

а) через боковую поверхность конуса

$$\frac{x^2 + y^2}{R^2} = \frac{z^2}{H^2} \quad (0 \leq z \leq H);$$

б) через полную поверхность указанного конуса.

1204. Если  $S$  — замкнутая поверхность, ограничивающая объем  $V$ , а  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  постоянные векторы, то

$$\iint_S (\vec{a} \cdot \vec{r}) b_n dS = (\vec{a} \cdot \vec{b}) V.$$

Доказать.

1205. Вычислить линейный интеграл вектора

$$\vec{a} = x^3 \vec{i} - y^3 \vec{j}$$

вдоль первой четверти окружности

$$\vec{r} = R \cos t \vec{i} + R \sin t \vec{j}.$$

1206. Вычислить линейный интеграл вектора  $\vec{r}$  вдоль одного витка винтовой линии

$$x = a \cos \varphi, \quad y = a \sin \varphi, \quad z = b\varphi$$

от  $\varphi = 0$  до  $\varphi = 2\pi$ .

1207. Вычислить циркуляцию векторного поля

$$\vec{a} = y \vec{i} - x \vec{j}$$

вдоль замкнутой линии  $L$ , образованной осями координат и первой четвертью астроида

$$\vec{r} = R \cos^3 t \vec{i} + R \sin^3 t \vec{j}.$$

1208. Вычислить циркуляцию векторного поля

$$\vec{a} = y^2 \vec{i}$$

по замкнутой линии, составленной из правой половины эллипса

$$\vec{r} = b \cos t \vec{i} + c \sin t \vec{j}$$

и отрезка оси  $Oy$ .

1209. Вычислить циркуляцию векторного поля

$$\vec{a} = y \vec{i}$$

по контуру окружности

$$\vec{r} = b \cos t \vec{i} + (b + b \sin t) \vec{j}.$$

1210. Вычислить циркуляцию векторного поля

$$\vec{a} = -y \vec{i} + x \vec{j} + c \vec{k},$$

где  $c = \text{const}$ :

а) вдоль окружности

$$x^2 + y^2 = 1, \quad z = 0;$$

б) вдоль окружности

$$(x-2)^2 + y^2 = 1, \quad z = 0.$$

1211. С помощью формулы Стокса вычислить циркуляцию векторного поля

$$\vec{a} = x^2 y^3 \vec{i} + \vec{j} + z \vec{k}$$

вдоль окружности

$$x^2 + y^2 = R^2, \quad z = 0,$$

приняв в качестве поверхности, ограниченной данной окружностью, полусферу

$$z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}.$$

- 1212—
- 
1214. Выяснить, имеет ли данное векторное поле потенциал
- $u$
- , и найти
- $u$
- , если он существует:

$$(1212) \quad \vec{a} = (5x^2y - 4xy)\vec{i} + (3x^2 - 2y)\vec{j};$$

$$(1213) \quad \vec{a} = (y+z)\vec{i} + (x+z)\vec{j} + (x+y)\vec{k};$$

$$(1214) \quad \vec{a} = yz(2x+y+z)\vec{i} + xz(x+2y+z)\vec{j} + \\ + xy(x+y+2z)\vec{k}.$$

**1215.** Будет ли соленоидальным векторное поле

$$\vec{a} = r[\vec{c} \times \vec{r}],$$

где  $\vec{c}$  — постоянный вектор?

**1216.** Доказать, что векторное поле

$$\vec{a} = f(r)\vec{r}$$

будет соленоидальным только при

$$f(r) = \frac{k}{r^3}$$

где  $k = \text{const.}$

## Ответы

16.  $2 \bar{r} \bar{r}'.$

17.  $2 \bar{r}' \bar{r}''.$

18.  $[\bar{r}' \bar{r}''].$

19.  $(\bar{r}' \bar{r}'' \bar{r}^{(4)}).$

20.  $[[\bar{r}' \bar{r}'] \bar{r}^{(4)}].$

21.  $\bar{r} \bar{r}': \sqrt{\bar{r}^2}.$

22.  $[\bar{r} \bar{r}'] [\bar{r} \bar{r}'']: \sqrt{[\bar{r} \bar{r}']^2}.$

23.  $\frac{\partial}{\partial u} (\bar{r}^2) = 2 \bar{r} \bar{r}_u, \quad \frac{\partial}{\partial v} (\bar{r}^2) = 2 \bar{r} \bar{r}_v, \quad \frac{\partial^2}{\partial u^2} (\bar{r}^2) = 2 \bar{r}_u^2 + 2 \bar{r}_{uu},$

$\frac{\partial^2}{\partial u \partial v} (\bar{r}^2) = 2 \bar{r}_u \bar{r}_v + 2 \bar{r} \bar{r}_{uv}, \quad \frac{\partial^2}{\partial v^2} (\bar{r}^2) = 2 \bar{r}_v^2 + 2 \bar{r} \bar{r}_{vv}.$

24.  $\frac{\partial}{\partial u} [\bar{r}_u \bar{r}_v] = [\bar{r}_{uu} \bar{r}_v] + [\bar{r}_u \bar{r}_{vu}],$

$\frac{\partial}{\partial v} [\bar{r}_u \bar{r}_v] = [\bar{r}_{uv} \bar{r}_v] + [\bar{r}_u \bar{r}_{vv}],$

$\frac{\partial^2}{\partial u^2} [\bar{r}_u \bar{r}_v] = [\bar{r}_{uuu} \bar{r}_v] + 2 [\bar{r}_{uu} \bar{r}_{vu}] + [\bar{r}_u \bar{r}_{vuu}],$

$\frac{\partial^2}{\partial u \partial v} [\bar{r}_u \bar{r}_v] = [\bar{r}_{uuu} \bar{r}_v] + [\bar{r}_{uu} \bar{r}_{vv}] + [\bar{r}_u \bar{r}_{vvv}],$

$\frac{\partial^2}{\partial v^2} [\bar{r}_u \bar{r}_v] = [\bar{r}_{uvv} \bar{r}_v] + 2 [\bar{r}_{uv} \bar{r}_{vv}] + [\bar{r}_u \bar{r}_{vvv}].$

25.  $\frac{\partial}{\partial u} (\bar{r} \bar{r}_u \bar{r}_v) = (\bar{r} \bar{r}_{uu} \bar{r}_v) + (\bar{r} \bar{r}_u \bar{r}_{vu}),$

$\frac{\partial}{\partial v} (\bar{r} \bar{r}_u \bar{r}_v) = (\bar{r} \bar{r}_{uv} \bar{r}_v) + (\bar{r} \bar{r}_u \bar{r}_{vv}),$

$\frac{\partial}{\partial u^2} (\bar{r} \bar{r}_u \bar{r}_v) = (\bar{r}_{uu} \bar{r}_{uu} \bar{r}_v) + (\bar{r} \bar{r}_{uuu} \bar{r}_v) + 2 (\bar{r} \bar{r}_{uu} \bar{r}_{vv}) + (\bar{r} \bar{r}_u \bar{r}_{vvv}),$

$$\frac{\partial^2}{\partial u \partial v} (\overline{r r_u r_v}) = (\overline{r r_{uu} r_v}) + (\overline{r r_{uv} r_v}) + (\overline{r v r_{uv} r_u}) + (\overline{r r_{uv} r_{uv}}),$$

$$\frac{\partial^2}{\partial v^2} (\overline{r r_u r_v}) = (\overline{r r_{uv} r_v}) + 2(\overline{r r_{uv} r_{vv}}) + (\overline{r v r_{uv} r_v}) + (\overline{r r_{uv} r_{vv}}).$$

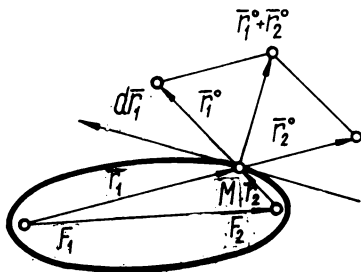


Рис. 4

26. а) Нет, например,  $\overline{r} = \{\cos t, \sin t\}$ ; б) да, из равенства  $\overline{r^2} = r^2$  получается требуемое соотношение.
27. У к а з а н и е. Продифференцировать соотношение  $\overline{r^2} = r^2$ .
28. Обозначим

$$\overline{r_1} = \overrightarrow{F_1 M}, \quad \overline{r_2} = \overrightarrow{F_2 M}$$

(рис. 4). Тогда

$$\overline{r_1} = \overrightarrow{F_1 F_2} + \overline{r_2}.$$

Дифференцируя это равенство, получим

$$d\overline{r_1} = d\overline{r_2}. \quad (*)$$

По определению эллипса

$$r_1 + r_2 = 2a.$$

Дифференцируем

$$dr_1 + dr_2 = 0.$$

В силу предыдущей задачи

$$r_1^0 d\overline{r_1} + \overline{r_2^0} d\overline{r_2} = 0, \quad (**)$$

где

$$\overline{r_1^0} = \frac{\overline{r_1}}{r_1}, \quad \overline{r_2^0} = \frac{\overline{r_2}}{r_2}.$$

Из равенств (\*) и (\*\*)

$$(\bar{r}_1^0 + \bar{r}_2^0) d\bar{r}_1 = 0. \quad (***)$$

Вектор  $\bar{r}_1^0 + \bar{r}_2^0$  идет по биссектрисе угла между прямыми  $\overrightarrow{F_1 M}$  и  $\overrightarrow{F_2 M}$ . Но в силу (\*\*\*) вектор  $d\bar{r}_1$  перпендикулярен вектору  $\bar{r}_1^0 + \bar{r}_2^0$  и, следовательно, идет по второй биссектрисе указанного угла.

$$30. \quad \frac{d\bar{r}}{du} \left\{ \frac{d\bar{\rho}}{dv} (\bar{r} - \bar{\rho}) \right\} + \frac{d\bar{\rho}}{dv} \left\{ \frac{d\bar{r}}{du} (\bar{r} - \bar{\rho}) \right\} -$$

направляющий вектор касательной.

31. Да.

33.

35. Необходимость очевидна. Докажем достаточность. Пусть

$$\bar{r}'(t) = \varphi(t) \bar{r}(t). \quad (*)$$

Положим

$$\bar{r}(t) = \psi(t) \bar{e}(t), \quad (**)$$

где  $|\bar{e}(t)| = 1$ .

Дифференцируя равенство (\*\*) и используя (\*), получим

$$\varphi' \bar{e} + \varphi \bar{e}' = \varphi \psi \bar{e}'.$$

Умножив это равенство скалярно на  $\bar{e}'$ , найдем

$$\varphi (\bar{e}')^2 = 0.$$

Так как  $\varphi \neq 0$ , то  $(\bar{e}')^2 = 0$  и  $\bar{e} = \text{const}$ .

39. Обозначим через  $\bar{a}$  единичный вектор, перпендикулярный трем компланарным векторам  $\bar{r}'$ ,  $\bar{r}''$ ,  $\bar{r}'''$ . Тогда

$$\bar{a} \bar{r}' = 0, \quad \bar{a} \bar{r}'' = 0, \quad \bar{a} \bar{r}''' = 0,$$

откуда

$$\bar{a}' \bar{r}' + \bar{a} \bar{r}'' = 0 \quad \text{или} \quad \bar{a}' \bar{r}' = 0,$$

и

$$\bar{a}' \bar{r}'' + \bar{a} \bar{r}''' = 0 \quad \text{или} \quad \bar{a}' \bar{r}'' = 0,$$

значит,  $\bar{a}' \perp \bar{r}'$  и  $\bar{a}' \perp \bar{r}''$ ; т. е.  $\bar{a} \parallel \bar{a}'$  и, следовательно,  $\bar{a} = \text{const}$ .

Теперь из соотношения  $\bar{a} \bar{r}' = 0$  находим  $(\bar{a} \bar{r})' = 0$ , т. е.  $\bar{a} \bar{r} = \text{const}$ ; следовательно, линия расположена в плоскости (перпендикулярной вектору  $\bar{a}$ ).

З а м е ч а н и е. Вектор-функция  $\bar{a}(t)$  имеет производную, так как

$$\bar{a} = [\bar{r}' \bar{r}''] : |[\bar{r}' \bar{r}'']|,$$

а по условию вектор-функция  $\bar{r}(t)$  имеет производные до третьего порядка включительно. Обратное положение имеет место.

40. См. задачу 35.

41. Согласно задаче 35

$$\bar{r}'(t) = \varphi(t) \bar{a}, \quad \bar{a} = \text{const.}$$

Отсюда

$$\bar{r}(t) = \int \varphi(t) dt \bar{a} + \bar{b}. \quad (*)$$

Если  $t$  меняется на сегменте  $[t_1, t_2]$ , то уравнение  $(*)$  задает отрезок прямой.

42. Возьмем начало системы координат в точке с радиус-вектором  $\bar{r}_0$ , а векторы  $\bar{r}_1$  и  $\bar{r}_2$  примем за базисные векторы осей  $Ox$  и  $Oy$  (система координат, вообще говоря, не прямоугольная). Тогда параметрические уравнения линии будут

$$x = t, \quad y = t^2.$$

Следовательно,  $y = x^2$ . Это уравнение параболы. В случае коллинеарности векторов  $\bar{r}_1$  и  $\bar{r}_2$  годографом будет полупрямая.

43. Отрезок прямой.

45. Необходимость очевидна. Докажем достаточность. Обозначив через  $A, B, C$  координаты некоторого постоянного вектора, перпендикулярного заданной плоскости, получим:

$$Ax_u + By_u + Cz_u = 0, \quad (*)$$

$$Ax_v + By_v + Cz_v = 0. \quad (**)$$

Интегрируя соотношение  $(*)$ , находим

$$Ax + By + Cz = \varphi(v).$$

Дифференцируя это равенство по  $v$  и сравнивая с  $(**)$ , будем иметь

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

46. Параболический цилиндр.

47. Эллиптический цилиндр.

48. Гиперболический цилиндр.

49. Эллиптический параболоид.

50. Умножая данное уравнение скалярно на  $\bar{\omega}$  и на  $\bar{r}$ , получим

$$\bar{r}' \bar{\omega} = 0, \quad \bar{r}' \bar{r} = 0,$$



откуда

$$\overline{r} \overline{\omega} = \text{const}$$

(плоскости, перпендикулярные вектору  $\overline{\omega}$ ),

$$\overline{r}^2 = \text{const}$$

(сферы с центром в начале радиус-векторов). Линии, определяемые уравнением

$$\overline{r}' = [\overline{\omega} \overline{r}] -$$

окружности, центры которых расположены на прямой, проходящей через начало радиус-векторов, коллинеарно вектору  $\overline{\omega}$ , а плоскости этих окружностей перпендикулярны указанной прямой.

51. Введем декартову систему координат, располагая ось  $Oz$  коллинеарно вектору  $\overline{e}$ . Тогда

$$[\overline{e}[\overline{r} \overline{e}]] = x\overline{i} + y\overline{j},$$

и указанное дифференциальное уравнение даст

$$x' = x, \quad y' = y, \quad z' = 0,$$

откуда

$$x = c_1 e^t, \quad y = c_2 e^t, \quad z = c_3.$$

Искомые линии — прямые, по которым пересекаются плоскости, перпендикулярные вектору  $\overline{e}$ , с плоскостями, проходящими через прямую, проведенную через полюс  $O$ , коллинеарно вектору  $\overline{e}$ .

52. Пусть  $\overline{r}_1(t)$  и  $\overline{r}_2(t)$  — законы движения точек. По условию

$$(\overline{r}_1 - \overline{r}_2)^2 = \text{const},$$

откуда

$$2(\overline{r}_1 - \overline{r}_2)(\overline{r}'_1 - \overline{r}'_2) = 0, \quad \overline{a} \overline{r}'_1 = \overline{a} \overline{r}'_2,$$

где  $\overline{a} = \overline{r}_1 - \overline{r}_2$ .

53. Если траектория  $\overline{r} = \overline{r}(t)$  материальной точки массы  $m$  описывается под действием центральной силы  $\overline{F}$ , то

$$\overline{F} = m\overline{r}'' = a\overline{r},$$

где  $a = a(t)$  — некоторая скалярная функция. Остается показать, что если  $\overline{r}$  некоторой движущейся точки удовлетворяет условию

$$m\overline{r}'' = a\overline{r}, \quad (*)$$

то траектория движения — плоская линия.

Дифференцируем равенство (\*) по  $t$ :

$$m\vec{r}''' = a'\vec{r} + a\vec{r}' = m \frac{a'}{a} \vec{r}'' + a\vec{r}',$$

т. е. в каждый данный момент векторы  $\vec{r}'$ ,  $\vec{r}''$ ,  $\vec{r}'''$  компланарны. Если  $\vec{r}'$  и  $\vec{r}''$  неколлинеарны, то траектория будет плоской в силу задачи 39. Если же  $\vec{r}'$  и  $\vec{r}''$  коллинеарны, то в силу задачи 41 траектория прямолинейна.

54. Выберем в качестве оси  $Ox$  прямую, проходящую через точки

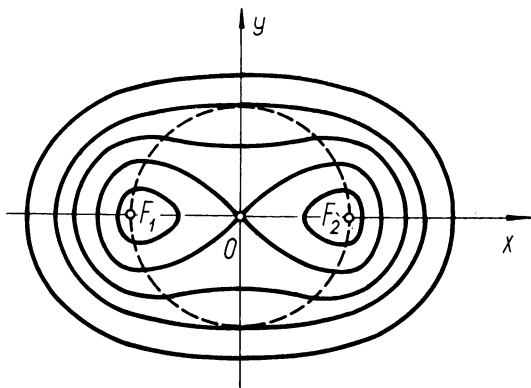


Рис. 5

$F_1, F_2$  и имеющую направление от точки  $F_1$  к точке  $F_2$ . За начало координат возьмем середину отрезка  $F_1F_2$ . Тогда  $F_1(-b, 0)$ ,  $F_2(b, 0)$ . Рассмотрим произвольную точку  $M(x, y)$  искомого геометрического места точек. Для нее

$$F_1M = \sqrt{(x+b)^2 + y^2}, \quad F_2M = \sqrt{(x-b)^2 + y^2}.$$

По условию задачи

$$\sqrt{(x+b)^2 + y^2} \sqrt{(x-b)^2 + y^2} = a^2. \quad (*)$$

Это и есть уравнение искомого геометрического места точек. Освободимся от иррациональности. Возведем обе части уравнения в квадрат

$$[(x+b)^2 + y^2][(x-b)^2 + y^2] = a^4. \quad (**)$$

Очевидно, что уравнения (\*) и (\*\*) равносильны. Раскрывая скобки и приводя подобные члены, получим

$$(x^2 + y^2)^2 - 2b^2(x^2 - y^2) = a^4 - b^4$$

уравнение овалов Кассини (рис. 5).

Подставляя сюда выражения декартовых прямоугольных координат

$$x=r \cos \varphi, \quad y=r \sin \varphi$$

через полярные, получим

$$r=b \sqrt{\cos 2\varphi \pm \sqrt{\cos^2 2\varphi + \left(\frac{a^4}{b^4} - 1\right)}}$$

уравнение искомого геометрического места в полярных координатах.

При  $a=b$  линия называется *лемнискатой Бернулли* (рис. 6). Ее уравнения

$$(x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2),$$

$$r^2=2a^2 \cos 2\varphi.$$

55.  $x^3=y^2(2a-x); \quad r=\frac{2a \sin^2 \varphi}{\cos \varphi} *$  (рис. 7). Параметрические уравнения можно привести к виду

$$x=2a \sin^2 t, \quad y=2a \frac{\sin^3 t}{\cos t}$$

или

$$x=\frac{a}{t^2+1}, \quad y=\frac{a}{t(t^2+1)}.$$

56.  $y=\frac{a^3}{x^2+a^2}; \quad x=a \operatorname{ctg} t, \quad y=a \sin^2 t$  (рис. 8).

57.  $r=a\varphi$  (рис. 9).

58.  $r=r_0 e^{k\varphi}$ , где  $\varphi=\omega t$  (рис. 10).

59.  $(x^2+y^2)^3-4a^2x^2y^2=0; \quad r=a \sin 2\varphi$  (рис. 11).

60.  $(x^2+y^2-2ax)^2=4a^2(x^2+y^2); \quad r=2a(\cos \varphi \pm 1)$  (рис. 12).

61.  $r=2a \cos \varphi \pm 2b; \quad (x^2+y^2-2ax)^2=4b^2(x^2+y^2)$  (рис. 13).

При  $a=b$  получаем кардиоиду (см. рис. 12).

62.  $r=\frac{a(1 \pm \sin \varphi)}{\cos \varphi}; \quad y^2=\frac{x(x-a)^2}{2a-x}; \quad x=\frac{2at^2}{1+t^2}; \quad y=\frac{at(t^2-1)}{1+t^2}$  (рис. 14).

---

\* Выбор системы координат указан на рисунках к задачам.

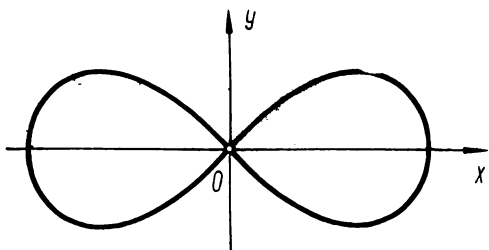


Рис. 6

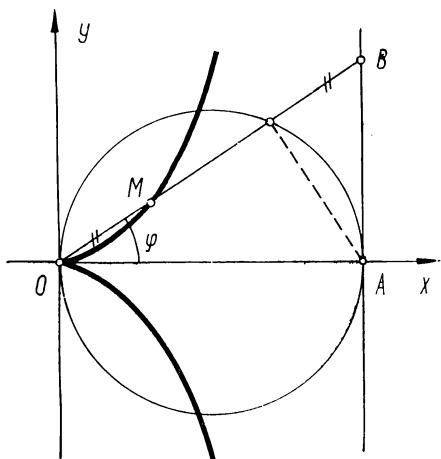


Рис. 7

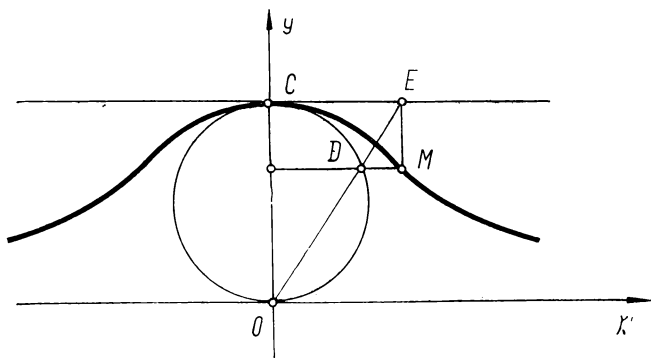


Рис. 8

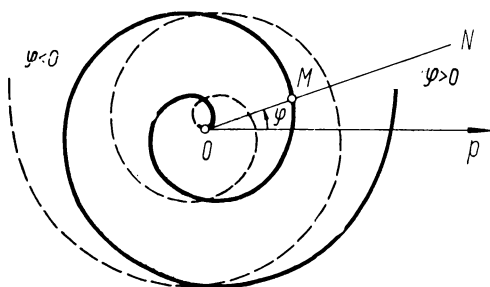


Рис. 9

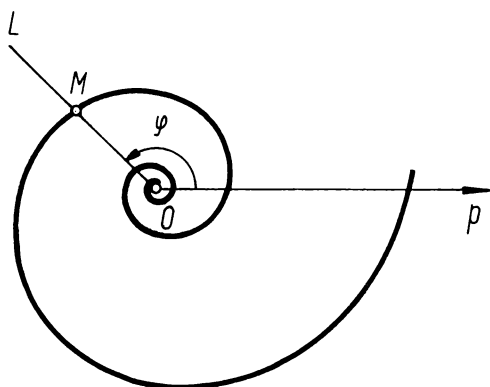


Рис. 10

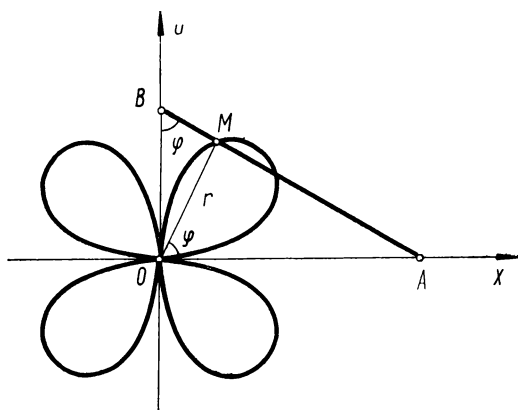


Рис. 11

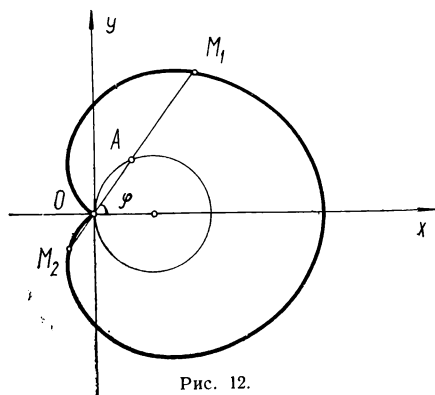


Рис. 12.

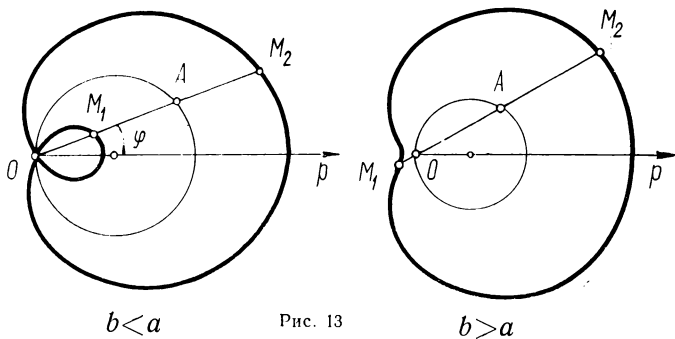


Рис. 13

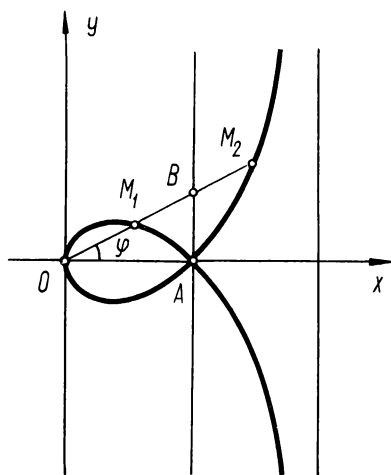


Рис. 14

$$63. \quad r = \frac{a}{\sin \varphi} \pm l; \quad (x^2 + y^2)(y - a)^2 - l^2 y^2 = 0 \quad (\text{рис. 15}).$$

$$64. \quad x = a \cos^3 t; \quad y = a \sin^3 t; \quad x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3} \quad (\text{рис. 16}).$$

$$65. \quad x = a(\cos t + t \sin t); \quad y = a(\sin t - t \cos t).$$

Эта линия называется также эвольвентой окружности (см. задачу 439).

У к а з а н и е. До сматывания конец нити находился в точке  $A$  (рис. 17). При сматывании натянутая нить совпадает с касательной к окружности, причем длина касательной

$$BM = \cup BA = at.$$

66. Примем указанную прямую за ось  $Ox$  и будем считать, что в начальном положении точка  $M$  совпадает с началом координат (рис. 18). Рассмотрим произвольное положение точки  $M(x, y)$ . Пусть центр окружности в рассматриваемый момент находится в точке  $C$ , а  $t$  — угол, который образует радиус  $CM$  с перпендикуляром  $CP$ , опущенным из точки  $C$  на ось  $Ox$ . Пусть  $S$  — проекция точки  $M$  на ось  $Ox$ , а  $N$  — на  $CP$ . Тогда

$$x = OS = OP - SP = \overset{\cup}{MP} - SP = at - a \sin t = a(t - \sin t).$$

Аналогично,

$$y = SM = PN = PC - NC = a - a \cos t = a(1 - \cos t).$$

$$67. \quad x = at - d \sin t; \quad y = a - d \cos t \quad (\text{рис. 19}).$$

68. Поместим начало координат в центр неподвижного круга. Будем считать, что в исходном положении точка  $M$  совпадает с точкой  $A$ , в которой катящийся круг касается неподвижного, и ось абсцисс направим через точку  $A$  (рис. 20).

Обозначим через  $t = \angle MO_1N$ ,  $m = r : R$ . Так как

$$\overset{\cup}{AN} = \overset{\cup}{MN} \quad \text{или} \quad R \angle NOA = rt, \quad \text{то}$$

$$\angle NOA = \frac{r}{R} t = mt.$$

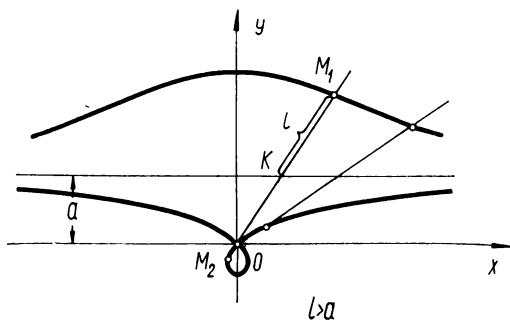
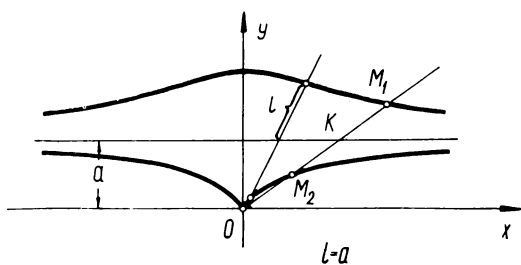
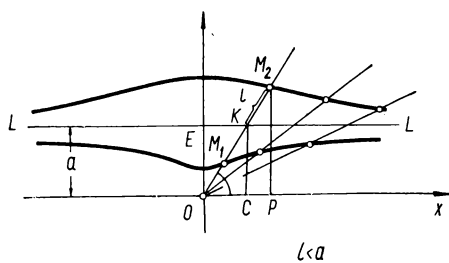


Рис. 15



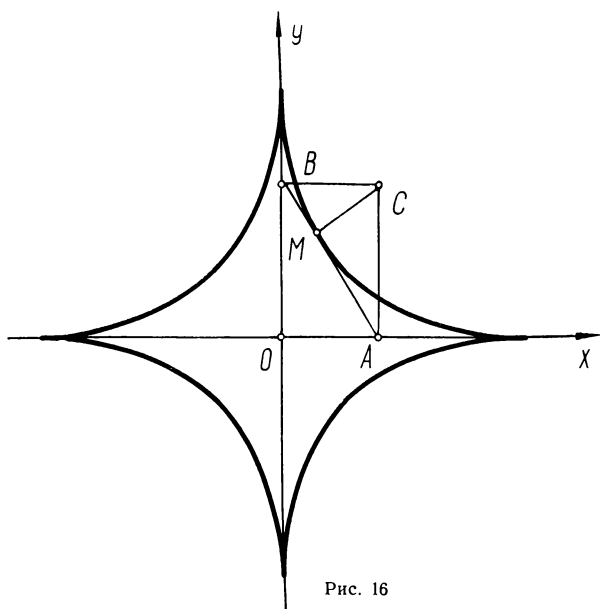


Рис. 16

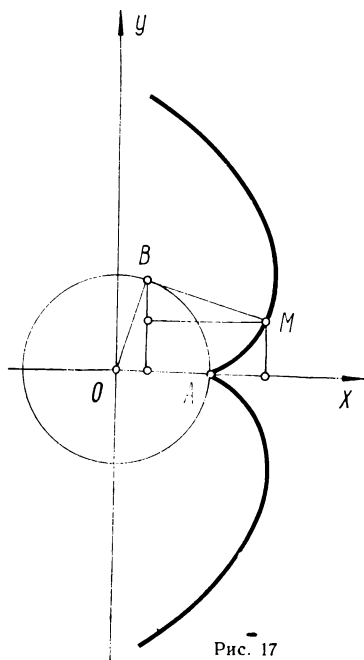


Рис. 17

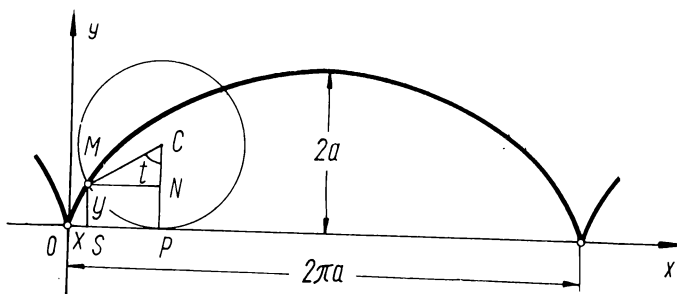


Рис. 18

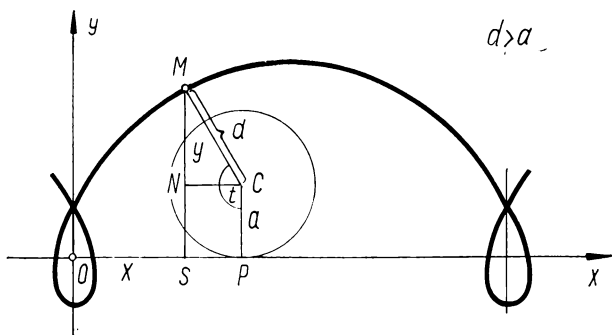
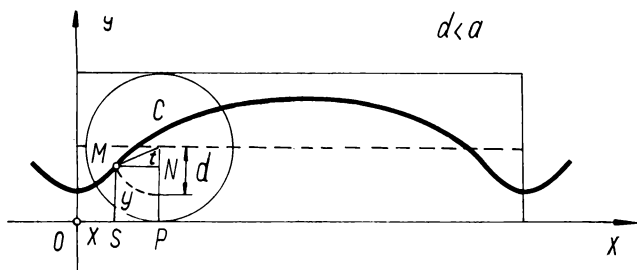


Рис. 19

Из чертежа получаем

$$x = OP = OD + DP = OD + EM = (R+r) \cos mt + r \sin \angle MO_1E,$$

$$y = MP = O_1D - O_1E = (R+r) \sin mt - r \cos \angle MO_1E.$$

Так как

$$\sin \angle MO_1E = \sin(t - \angle OO_1D) = \sin \left[ t - \left( \frac{\pi}{2} - mt \right) \right] =$$

$$= -\cos(t+mt), \quad \cos \angle MO_1E = \sin(t+mt), \quad r = mR,$$

то

$$x = (R+mR) \cos mt - mR \cos(t+mt),$$

$$y = (R+mR) \sin mt - mR \sin(t+mt).$$

Исключая  $m$ , получим

$$x = (R+r) \cos \frac{r}{R} t - r \cos \frac{R+r}{r} t,$$

$$y = (R+r) \sin \frac{r}{R} t - r \sin \frac{R+r}{r} t \quad (\text{рис. 21}).$$

При  $r=R$  получаем кардионду (рис. 22).

69.  $x(R-mR) \cos mt + mR \cos(t-mt),$

$$y = (R-mR) \sin mt - mR \sin(t-mt), \quad m = \frac{r}{R}.$$

При  $R=4r$  получаем астроиду, при  $R=2r$  — отрезок прямой (рис. 23).

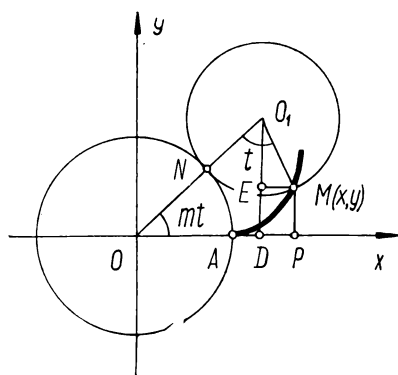


Рис. 20

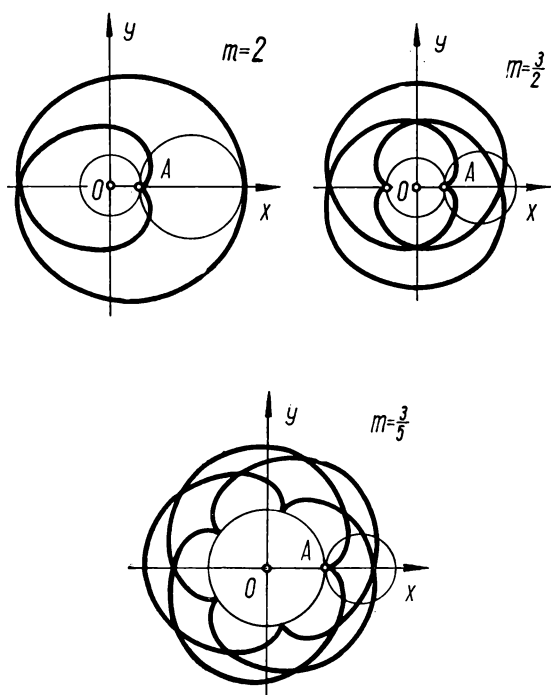


Рис. 21

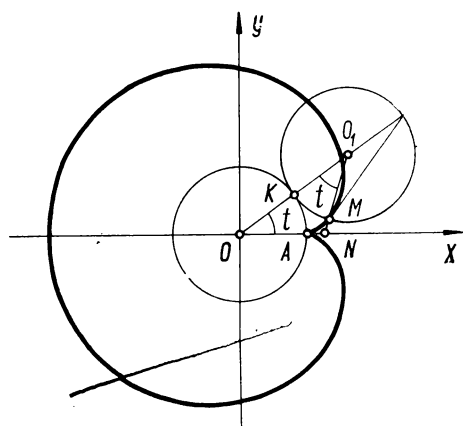


Рис. 22

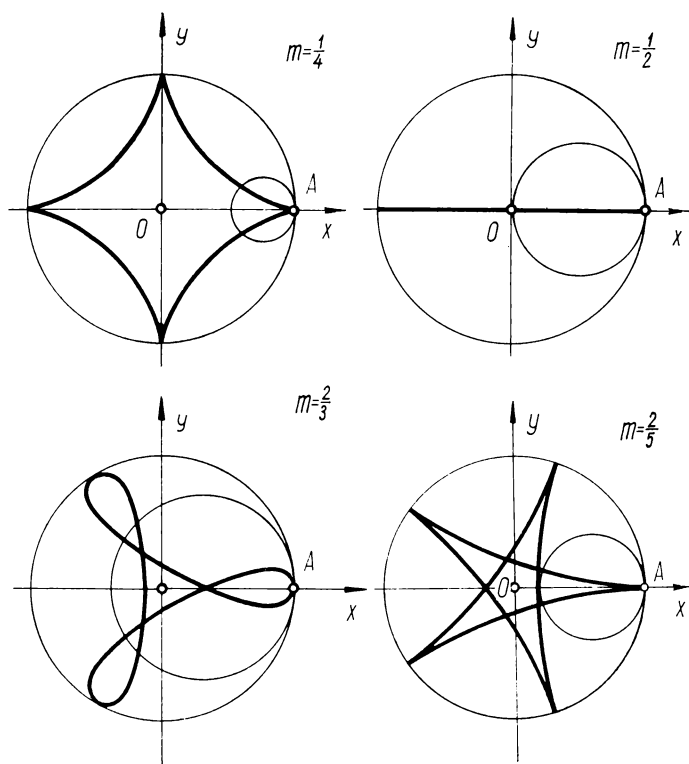


Рис. 23

70. Точки  $M$  и  $N$  лежат на линии, точка  $P$  не лежит. Линия пересекает ось  $Ox$  в точке  $O(0, 0)$ , ось  $Oy$  — в точках  $O(0, 0)$  и  $A(0, -2)$ . Линия имеет минимальную ординату в точке  $A(0, -2)$ .

Неявное уравнение

$$y^3 + 2y^2 - x^2 = 0.$$

71. а)  $x = \frac{2a}{1+k^2}, \quad y = \frac{2ak}{1+k^2};$

б)  $x = a + a \cos \varphi, \quad y = a \sin \varphi.$

72. Парабола.

73. Часть прямой

$$x - y - 2 = 0,$$

где  $x \geq 2$ .

74. Отрезок прямой

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,$$

заклученный между осями.

75. Полуокружность.

76. Ветвь гиперболы.

77. Прямая

$$x + 2y - 1 = 0.$$

78.  $y = \frac{a}{2} \left( e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right)$  — линия называется *цепной линией* (рис. 24).

79. Окружность

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2.$$

80.  $t = \operatorname{ch} \varphi \pm \operatorname{sh} \varphi$  (рис. 25).

82. Эллипс

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1;$$

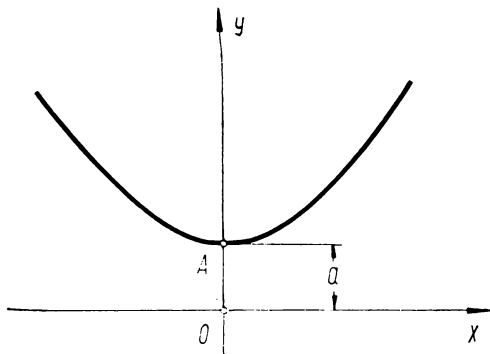


Рис. 24

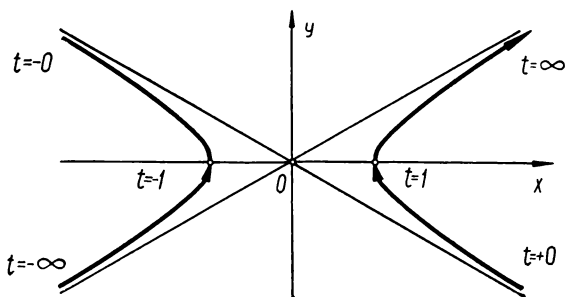


Рис. 25

переход от одного представления к другому получим, полагая

$$t = \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \quad (\text{рис. 26}).$$

83. Окружность

$$x^2 + y^2 = 16.$$

84. Часть прямой  $y = \sqrt{3}x$ , где  $x \geq 0$ .

85. Окружность

$$(x-a)^2 + y^2 = a^2.$$

86. Прямая  $x=a$ .87. Прямая  $y=b$ .

88. Эллипс

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1.$$

89. Гипербола

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1.$$

90. Парабола

$$y^2 = 4x.$$

91. Гипербола

$$x^2 - y^2 = a^2.$$

92. Окружность

$$x^2 + y^2 - by = 0.$$

93. Парабола

$$y^2 = -4x + 4.$$

94. Парабола

$$y^2 = 4x + 4.$$

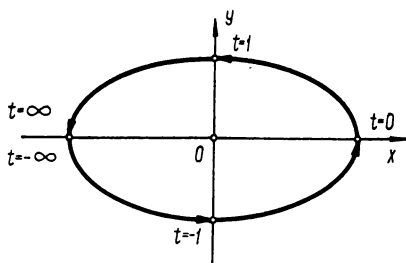


Рис. 26

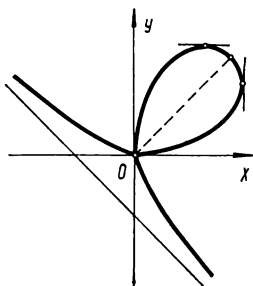


Рис. 27

$$95. \quad x = -\frac{\varphi_{n-1}(1, t)}{\varphi_n(1, t)}, \quad y = -\frac{t\varphi_{n-1}(1, t)}{\varphi_n(1, t)}.$$

У к а з а н и е. Принять за параметр угловой коэффициент прямой  $y=tx$ , проходящей через начало координат и точку линии.

$$96. \quad x = \frac{2a}{1+t^2}, \quad y = \frac{2at}{1+t^2}.$$

$$97. \quad x = \frac{3at}{1+t^3}, \quad y = \frac{3at^2}{1+t^3}. \quad \text{Линия называется декартовым листом (рис. 27).}$$

$$98. \quad x = \frac{2at^2}{1+t^2}, \quad y = \frac{2at^3}{1+t^2} \text{ — циссоида Диоклеса.}$$

$$99. \quad x = a(1 + \cos \varphi) \cos \varphi, \quad y = a(1 + \cos \varphi) \sin \varphi.$$

Полагая

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = t,$$



получим

$$x = \frac{2a(1-t^2)}{(1+t^2)^2}, \quad y = \frac{4at}{(1+t^2)^2} -$$

уравнения кардиоиды.

100.  $x = \frac{a(t^2-1)}{t^2-1}, \quad y = \frac{at(t^2-1)}{t^2-1}$  — строфонда. Указанные уравнения получаются из уравнений задачи 62 преобразованием  $x = x' + a, \quad y = y'$ .

101. У к а з а н и е. Положить  $\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = t$  и перейти к декартовым координатам.

102. В точке  $A$  касательная

$$2x - y + 2 = 0,$$

нормаль

$$x + 2y + 1 = 0;$$

в точке  $B$  касательная

$$4x - y + 3 = 0,$$

нормаль

$$x + 4y - 12 = 0;$$

в точке  $C$  касательная

$$6x - y + 2 = 0,$$

нормаль

$$x + 6y - 49 = 0.$$

103. В точке  $A$  касательная  $y = 0$ , нормаль  $x = 0$ ; в точке  $B$  касательная

$$3x - y - 2 = 0,$$

нормаль

$$x + 3y - 4 = 0.$$

104. В точке  $A$  касательная  $y = x$ , нормаль  $y = -x$ ; в точке  $B$  касательная  $y = 1$ , нормаль  $x = \frac{\pi}{2}$ ; в точке  $C$  касательная  $x + y - \pi = 0$ , нормаль  $x - y - \pi = 0$ .

105. В точке  $A$  касательная  $y = x$ , нормаль  $y = -x$ ; в точке  $B$  касательная

$$2x - y + 1 - \frac{\pi}{2} = 0,$$

нормаль

$$x+2y-2-\frac{\pi}{4}=0.$$

106. Касательная

$$2x-y+4=0,$$

нормаль

$$x+2y-3=0.$$

107. Касательная

$$2x \sin t + 2y \cos t - a \sin 2t = 0,$$

нормаль

$$x \cos t - y \sin t - a \cos 2t = 0.$$

108. При
- $t = (2k+1)\pi$
- , где
- $k$
- любое целое число, касательная
- $y=2a$
- , нормали

$$x = (2k+1)a\pi.$$

Во всех остальных точках касательная

$$x - y \operatorname{tg} \frac{t}{2} + a \left( 2 \operatorname{tg} \frac{t}{2} - t \right) = 0,$$

нормаль

$$x \operatorname{tg} \frac{t}{2} + y - at \operatorname{tg} \frac{t}{2} = 0.$$

109. Касательная
- $x-y=0$
- , нормаль
- $x+y=0$
- .

110. Касательная

$$\bar{\rho} = \{ a(\cos t - \lambda \sin t), \quad b(\sin t + \lambda \cos t) \}$$

или

$$b \cos t X + a \sin t Y - ab = 0,$$

нормаль

$$\bar{\rho} = \{ (a+b\lambda) \cos t, \quad (b+a\lambda) \sin t \}$$

или

$$a X \sin t - b Y \cos t + (b^2 - a^2) \sin t \cos t = 0.$$

111. Касательная

$$\bar{\rho} = \left\{ \frac{a}{2} \left( t + \frac{1}{t} \right) + \lambda \frac{a}{2} \left( 1 - \frac{1}{t^2} \right), \right.$$

$$\left. \frac{b}{2} \left( t - \frac{1}{t} \right) + \lambda \frac{b}{2} \left( 1 + \frac{1}{t^2} \right) \right\}$$

или

$$\frac{b}{2} \left( 1 + \frac{1}{t^2} \right) X - \frac{a}{2} \left( 1 - \frac{1}{t^2} \right) Y - \frac{ab}{t} = 0,$$

нормаль

$$\bar{\rho} = \left\{ \frac{a}{2} \left( t + \frac{1}{t} \right) - \lambda \frac{b}{2} \left( 1 + \frac{1}{t^2} \right), \right.$$

$$\left. \frac{b}{2} \left( t - \frac{1}{t} \right) + \lambda \frac{b}{2} \left( 1 - \frac{1}{t^2} \right) \right\}$$

или

$$\frac{a}{2} \left( 1 - \frac{1}{t^2} \right) X + \frac{b}{2} \left( 1 + \frac{1}{t^2} \right) Y - \frac{t^4 - 1}{4t^3} (a^2 + b^2) = 0.$$

112. Касательная  
 $x + y - 3a = 0,$

нормаль

$$x - y = 0.$$

113. Касательная  
 $4x - 2y - a = 0,$

нормаль

$$2x + 4y - 3a = 0.$$

114. Касательная  
 $x(x^2 + y^2 - a^2)(X - x) + y(x^2 + y^2 + a^2)(Y - y) = 0,$

нормаль

$$y(x^2 + y^2 + a^2)(X - x) - x(x^2 + y^2 - a^2)(Y - y) = 0.$$

115. Касательная

$$\frac{Xx}{a^2} + \frac{Yy}{b^2} = 1,$$

нормаль

$$\frac{(X-x)a^2}{x} - \frac{(Y-y)b^2}{y} = 0.$$

116. Касательная

$$\frac{Xx}{a^2} - \frac{Yy}{b^2} = 1,$$

нормаль

$$\frac{(X-x)a^2}{x} + \frac{(Y-y)b^2}{y} = 0.$$

117. Касательная  
 $Yy = p(X+x)$ ,  
нормаль  
 $y(X-x) + p(Y-y) = 0$ .
118. Касательная  
 $(\sin \varphi + \varphi \cos \varphi)x - (\cos \varphi - \varphi \sin \varphi)y - a\varphi^2 = 0$ ,  
нормаль  
 $(\cos \varphi - \varphi \sin \varphi)x + (\sin \varphi + \varphi \cos \varphi)y - a\varphi = 0$ .
119. Касательная  $y - a = 0$ , нормаль  $x - a = 0$ .
120.  $A\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ .
121. Нет.
123.  $y = 4x - 4$ .
124.  $A(2, -3)$ .
125.  $b = -1$ ,  $c = -1$ .
126.  $a = 2$ ,  $b = 0$ ,  $c = 1$ .
127. Касательная  
 $9x - y - 6 = 0$ ,  
нормаль  
 $x + 9y - 28 = 0$ .
128.  $y = 1$ ,  $x + 2y - 2 = 0$ .
129.  $M_1\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{9}\right)$  и  $M_2\left(\frac{2}{3}, \frac{8}{27}\right)$ .
131.  $y = 2x + 3$ ,  $y = 2x + \frac{49}{27}$ .
132.  $y + 1 = \frac{1}{7}(x + 7)$ ,  $y + 1 = \frac{1}{3}(x + 7)$ .
134.  $(x \pm y)\sqrt{2} = \pm a$ .
138.  $M_1(0, 0)$ ,  $M_2(4, 4)$ ;  $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$ ,  $\varphi_2 = \arctg \frac{3}{4}$ .
139.  $M_1(0, 3)$ ,  $M_2(0, -3)$ ;  $\varphi_1 = \varphi_2 = \frac{\pi}{4}$ .
140.  $M_1(1, 2)$ ,  $M_2(1, -2)$ ;  $\varphi_1 = \varphi_2 = \frac{\pi}{2}$ .
141.  $M_1(2, 2)$ ,  $M_2(2, -2)$ ;  $\varphi_1 = \varphi_2 = \arctg 3$ .

$$142. \quad M_1 \left( \frac{8}{5}, \frac{16}{5} \right), \quad M_2 \left( \frac{8}{5}, -\frac{16}{5} \right), \quad M_3(0, 0);$$

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \frac{\pi}{4}, \quad \varphi_3 = \frac{\pi}{2}.$$

$$143. \quad M_k \left( \frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\sqrt{2}}{2} \right), \quad \varphi_k = \arg \operatorname{tg} 2\sqrt{2}, \quad \text{где } k \text{ — любое целое число.}$$

$$147. \quad \operatorname{tg} \varphi = 2\sqrt{2}.$$

150. Из  $\triangle M_1 M_2 A$  получаем (рис. 28):

$$\mu_1 = \frac{\varphi}{2} \text{ (см. задачу 149)}, \quad \mu_2 = \frac{1}{2}(\varphi + \pi),$$

$$\angle M_1 A M_2 = \mu_2 - \mu_1 = \frac{\pi}{2}.$$

159. Полагая в уравнении касательной  $Y - y = y'(X - x)$

$$Y = 0, \quad X = x_T,$$

получим

$$x_T - x = -\frac{y}{y'}.$$

Следовательно,  $PT = \left| \frac{y}{y'} \right|$  (рис. 29). Остальные формулы получаются аналогичным образом.

$$160. \quad MT = \frac{\sqrt{5}}{2}, \quad PT = \frac{1}{2}, \quad MN = \sqrt{5}, \quad PN = 2.$$

$$161. \quad MT = \frac{(e^x + e^{-x})^2}{2(e^x - e^{-x})}, \quad PT = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}.$$

$$MN = \frac{1}{4}(e^x + e^{-x})^2, \quad PN = \frac{1}{4}(e^{2x} - e^{-2x}).$$

162.  $y^2 = \pm 2kx + C$ , где  $C$  — произвольная постоянная.

163.  $y = C e^{\pm \frac{x}{k}}$ , где  $C$  — произвольная постоянная.



165.  $x = a \left( \ln \operatorname{tg} \frac{t}{2} + \cos t \right) + C$ ,  $y = a \sin t$ , где  $t$  — угол, образуемый касательной с положительным направлением оси абсцисс. Это — семейство конгруэнтных линий, называемых *трактрисами*. На рис. 30 изображена трактриса, соответствующая  $C = 0$ .

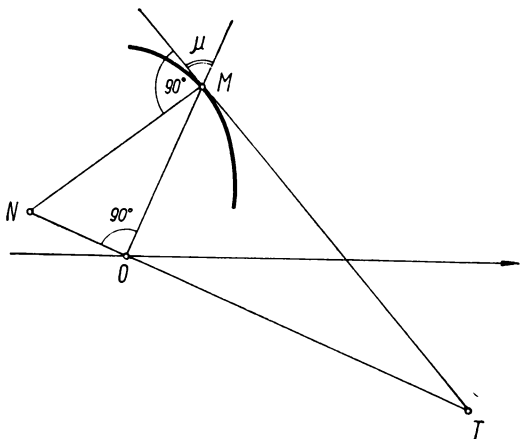


Рис. 31

166.  $S = \frac{\pi a^2}{2}.$

167. Из прямоугольного треугольника  $МОТ$  (рис. 31) имеем  $ОТ = ОМ \operatorname{tg} \mu$ . Учитывая, что  $\operatorname{tg} \mu = \left| \frac{r}{r'} \right|$  (задача 148), получим  $ОТ = \frac{r^2}{|r'|}$ . Остальные формулы получаются аналогичным образом.

168.  $r = \frac{c}{\varphi}$  (рис. 32). Такие линии называются *гиперболическими спиралями*.

169. Спирали Архимеда.  
170.  $r = \pm k \sin(\varphi - \varphi_0)$  — окружности (см. задачу 92).  
184. Соприкосновение второго порядка.  
185. Соприкосновение первого порядка.  
187. Третий.

188.  $y = x^2 - 3x + 3$ .

189.  $x^2 + y^2 - y = 0$ .

190.  $M_1(3, 0), M_2\left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\sqrt{3}\right), \left(-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\sqrt{3}\right)$ .

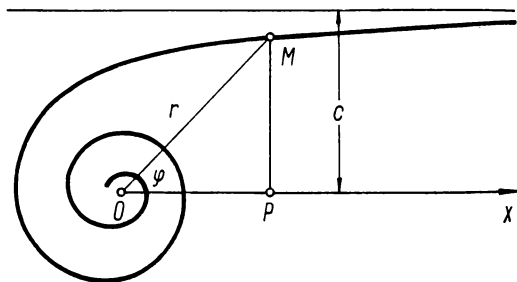


Рис. 32

191.  $x^2 + 4xy + 4y^2 - 20x + 14y + 19 = 0$  — соприкосновение третьего порядка.

192.  $\frac{(y+3)^2}{9} - \frac{x^2}{3} = 1$  — соприкосновение пятого порядка.

193. Если  $f(x)$  имеет при  $x=0$  производные до  $n$ -го порядка включительно, то задача имеет решение

$$y = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2!} + \dots + f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!}.$$

В противном случае задача решения не имеет.

194. а)  $\frac{(x-\pi R)^2}{12R^2} + \frac{(y+b-2R)^2}{9R^2} = 1$  — соприкосновение пятого порядка;

б)  $\frac{(x-\pi R)^2}{-12R^2} + \frac{(y-b-2R)^2}{9R^2} = 1$  — соприкосновение пятого порядка;

в)  $(x-\pi R)^2 = -8R(y-2R)$  — соприкосновение третьего порядка.

195.  $x=3$ .

196.  $x=\pm 4$ .

197.  $y=0$ .

198.  $y=x-4, x=0$ .

199.  $y=x-2, x=-2$



200.  $x=0$ .

201.  $x=3, y=-4, y=\frac{1}{4}x-\frac{1}{4}$ .

202.  $x=0, y=-\frac{1}{2}, y=2x-\frac{3}{2}$ .

203.  $x=0, x+y\pm 2=0$ .

204.  $x=\pm 2, y=\pm 3$ .

205.  $x=\pm 2, y=\pm x$ .

206.  $y=\pm a$ .

207.  $y=a$ .

208.  $x=2a$ .

210. Перейдем к однородным координатам по формулам:

$$x = \frac{x_1}{x_3}, \quad y = \frac{x_2}{x_3}.$$

Тогда уравнение линии примет вид

$$x_1^3 + x_2^3 - 3ax_1x_2x_3 = 0.$$

Ее несобственная точка (действительная)  $M(1 : -1 : 0)$ . Уравнение касательной в этой точке есть

$$x_1 + x_2 + ax_3 = 0.$$

Следовательно, уравнение асимптоты

$$x+y+a=0.$$

211. Асимптот нет.

212.  $x-2a=0$ .

214.  $x=0, y=0, x-y=0, x+y=0$  (см. задачу 213).

215, 216.  $O(0, 0)$  — точка самопересечения.217, 218.  $O(0, 0)$  — изолированная точка.219.  $A(3, 0)$  — точка самопересечения.220.  $A(0, 2)$  — точка самопересечения.221.  $O(0, 0)$  — изолированная точка.222.  $O(0, 0)$  — точка самоприкосновения.223.  $O(0, 0)$  — точка возврата первого рода. Касательная  $y=0$ .224.  $O(0, 0)$ . При  $l>a$  — точка самопересечения с касательными

$$y = \pm \frac{ax}{\sqrt{l^2 - a^2}}.$$

При  $l<a$  — изолированная точка. При  $l=a$  — точка возврата первого рода с касательной  $x=0$  (см. рис. 15).

225.  $A(a, 0)$  — точка самопересечения. Касательные  $y = \pm(x-a)$ .  
 226.  $O(0, 0)$  — точка самопересечения. Касательные  $y = \pm x$ .  
 227.  $A(a, 0)$  — точка возврата первого рода. Касательная  $y = 0$ .  
 228.  $A_{1,2}(\pm a, 0)$  — точки возврата первого рода с касательной  $y = 0$ ,  
 $A_{3,4}(0, \pm a)$  — точки возврата первого рода с касательной  $x = 0$ .

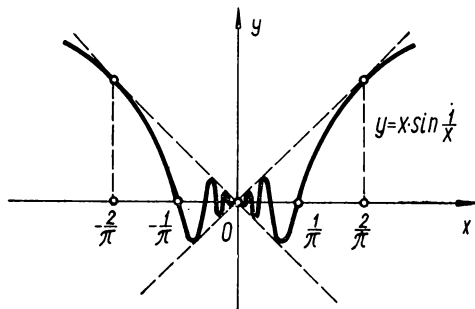


Рис. 33

229.  $A_k(2\pi ak, 0)$  — точки возврата первого рода с касательными  $x = 2\pi ak$  ( $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ).  
 230. Существуют. Касательная  $y = 0$ , нормаль  $x = 1$ .  
 231. Не существуют (см. рис. 33).

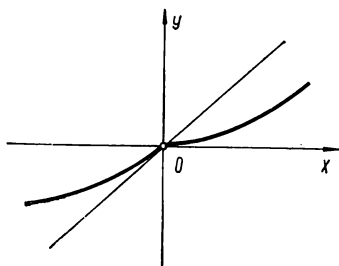


Рис. 34

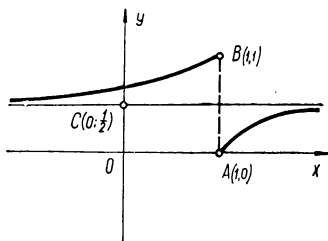


Рис. 35

232. Не существуют. Существуют предельные положения секущей в точке  $O(0, 0)$  слева ( $x-y=0$ ) и справа ( $y=0$ ) (см. рис. 34).  
 233. Не существуют (см. рис. 35).  
 234. Не существуют. Точка  $O(0, 0)$  — изолированная.  
 235. Не существуют. Точка  $A(2, 0)$  — изолированная.  
 239.  $rr'' - 2\dot{r}^2 - r^2 = 0$ .

240. Функция определена для всех значений  $x$ , кроме  $x = \pm 1$ . Особых точек нет. В начале координат линия касается оси  $Ox$ . Асимптоты  $x = \pm 1$ ,  $y = 1$ . Линия симметрична относительно оси  $Oy$  (рис. 36).

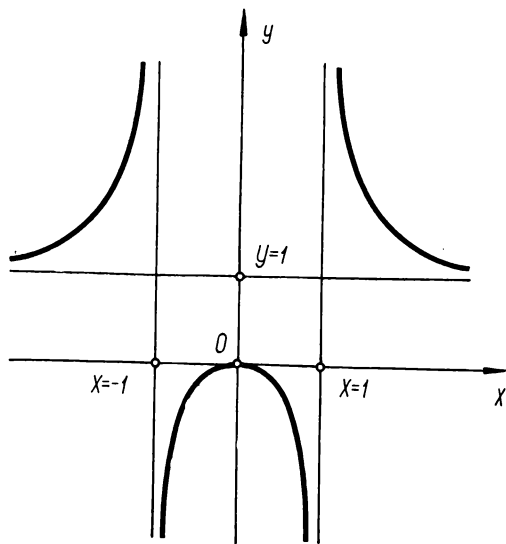


Рис. 36

241. Функция не определена лишь при  $x = \pm \sqrt[3]{3}$ .

$$y_{\max} = y(-3) = -\frac{9}{2}, \quad y_{\min} = y(3) = \frac{9^*}{2}.$$

$O(0, 0)$  — точка перегиба. Асимптоты  $x = \pm \sqrt[3]{3}$ ,  $y = x$  (рис. 37).

242. Функция не определена лишь при  $x = -1$ . В начале координат — точка перегиба с касательной  $y = 0$ . В точке  $M\left(-3, -\frac{27}{8}\right)$  касательная также параллельна оси  $Ox$ . Асимптоты  $x+1=0$ ,  $x-2y-2=0$  (рис. 38).

243. Функция не определена при  $x = \pm 2$ ;  $O(0, 0)$  — точка перегиба. Асимптоты  $x = \pm 2$ ,  $y = 0$  (рис. 39).

---

\* Здесь и в дальнейшем имеются в виду локальные максимальные и минимальные значения функции.

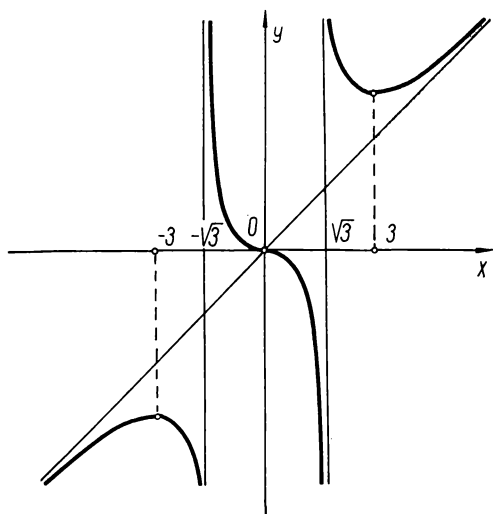


Рис. 37

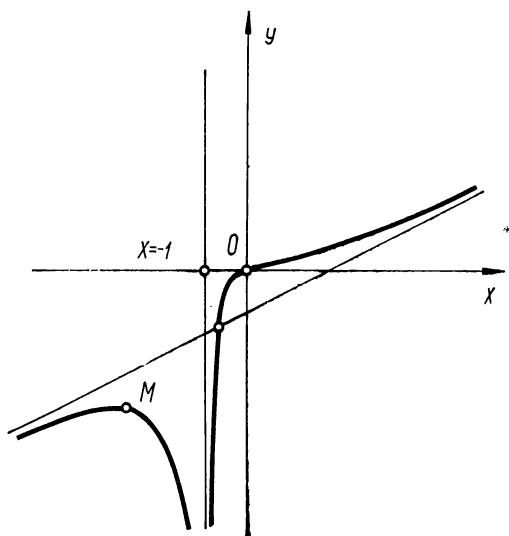


Рис. 38

244. Область определения  $(0, 5]$ .  $M\left(\frac{5}{\sqrt[3]{4}}, \frac{5}{\sqrt[3]{4}}\right)$  — точка перегиба. Асимптота  $x=0$  (рис. 40).

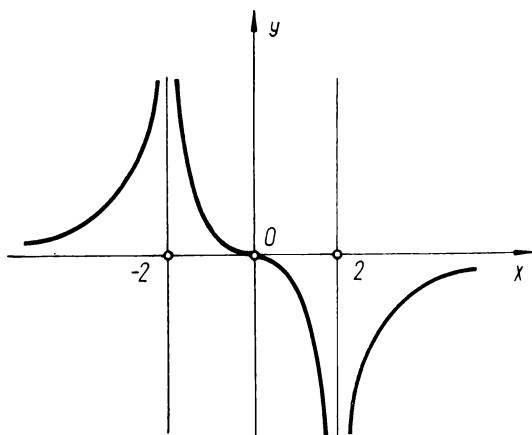


Рис. 39

245. Функция определена при  $x > 0$ ;  $y_{\max} = y(e) = \frac{1}{e}$ ;  $M\left(e^{\frac{3}{2}}, \frac{3}{2\sqrt[3]{e^3}}\right)$  — точка перегиба. Асимптоты  $x=0$ ,  $y=0$  (рис. 41).

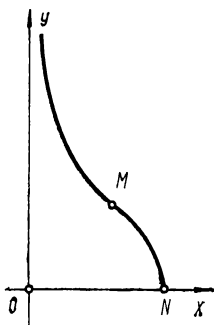


Рис. 40

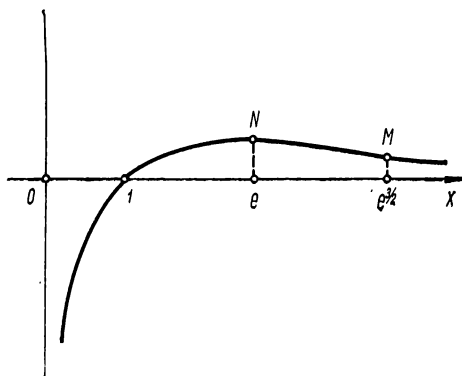


Рис. 41

246. Функция определена и положительна при всех  $x$ ;  $y_{\max} = y(0) = 1$ ;  $M_1\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, \frac{1}{\sqrt[3]{e}}\right)$ ,  $M_2\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, \frac{1}{\sqrt[3]{e}}\right)$  — точки перегиба. Асимптота  $y=0$  (рис. 42).

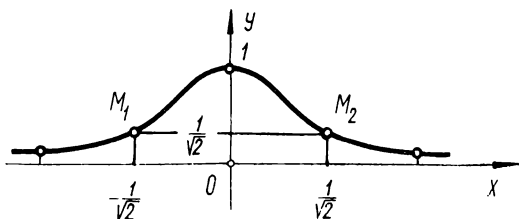


Рис. 42

247. Функция определена при всех значениях  $x$ , кроме  $x=0$ . Асимптоты  $x=0$  и  $y=1$  (рис. 43).
248. Линия симметрична относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов. Асимптота  $x+y+a=0$ .  $O(0, 0)$  — точка самопересечения с касательными  $x=0$  и  $y=0$  (рис. 27).

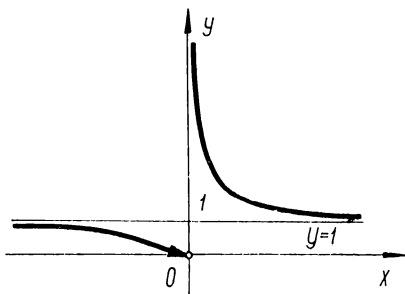


Рис. 43

249. Линия замкнутая, особых точек нет. Точки пересечения с осями  $O(0, 0)$  и  $M_1\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ . В точках  $M_2(t=-1+\sqrt[3]{2})$  и  $M_3(t=-1-\sqrt[3]{2})$

касательные параллельны оси  $Ox$ . В точках

$$O(t=0) \text{ и } M_4(t=\pm\infty)$$

касательные параллельны оси  $Oy$ . Записав уравнение линии в неявном виде, легко доказать, что это эллипс (рис. 44).

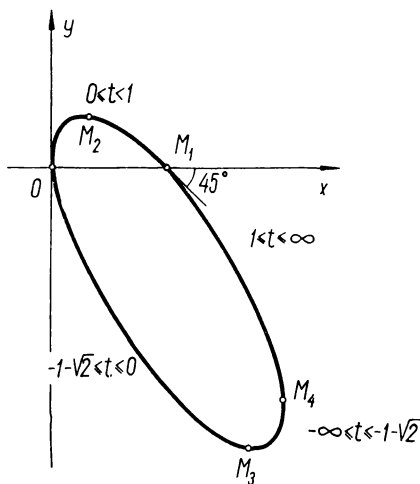


Рис. 44

**250.** Линия симметрична относительно оси  $Ox$  и расположена в полосе  $0 \leq x < 1$ . Асимптота  $x=1$ .  $O(0, 0)$  — точка возврата первого рода (рис. 45).

**251.** Линия симметрична относительно оси  $Ox$  и вся расположена в полосе  $0 \leq x < 1$ . Асимптота  $x=1$ . Линия пересекает оси

координат в точках  $O(0, 0)$  и  $M_1\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ . Через точку  $M_1$

линия проходит дважды (при  $t=\pm 1$ ); угловые коэффициенты касательных в ней  $k=\pm 2$ . Особых точек нет. Касательная к линии параллельна оси  $Oy$  в начале координат, оси  $Ox$  — в точках  $M_2$  и  $M_3$ , соответствующих значениям параметра

$$t = -\sqrt{\sqrt{5}-2} \text{ и } t = \sqrt{\sqrt{5}-2}$$

(рис. 46).

252. При  $t=0$  касательная в точке  $O(0, 0)$  совпадает с осью  $Oy$ . В точках

$$M_1\left(1, \frac{4}{3}\right) \text{ и } M_2\left(1, -\frac{4}{3}\right)$$

(при  $t=\pm 1$ ) касательные параллельны оси  $Ox$ . Через точку  $M_3(3, 0)$ , получаемую при  $t=\pm\sqrt{3}$ , линия проходит дважды.

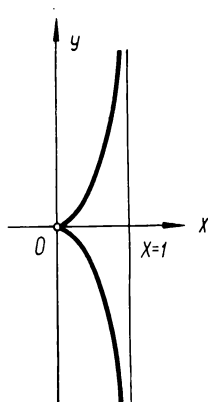


Рис. 45

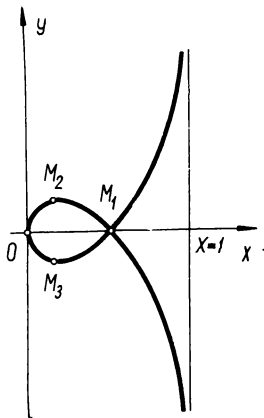


Рис. 46

Касательные в точке  $M_3$  имеют угловые коэффициенты

$$k = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Асимптот нет (рис. 47).

253. Асимптоты

$$x = \frac{1}{2}, \quad y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}, \quad y = x + 1.$$

Оси координат линия пересекает только в начале координат.  $O(0, 0)$  — точка возврата первого рода. Касательная парал-



тельна оси  $Ox$  в точке  $O$  и в точках  $M_{1,2}(t=\pm\sqrt{3})$ . Касательная параллельна оси  $Oy$  в точке  $M_3(t=2)$  (рис. 48).

254. Линия симметрична относительно оси  $Ox$ . Асимптоты

$$x=-1, \quad y=x-\frac{1}{2}, \quad y=-x+\frac{1}{2}.$$

Первая асимптота не пересекает линию, вторая и третья пересекают в точках

$$M_1\left(t=-\frac{1}{2}\right) \text{ и } M_2\left(t=\frac{1}{2}\right).$$

$O(0, 0)$  — точка возврата первого рода. Касательные параллельны оси  $Ox$  в точках  $M_{3,4}(t=\pm\sqrt{3})$  (рис. 49).

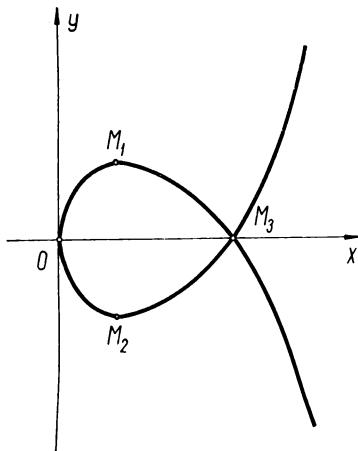


Рис. 47

255. Линия симметрична относительно оси  $Ox$ . Асимптот и особых точек нет. Точки

$$M_1\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\sqrt{3}\right) \text{ и } M_2\left(\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}\sqrt{3}\right),$$

получаемые при  $t=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$ , являются точками перегиба.

В начале координат линия касается оси  $Oy$  (рис. 50).

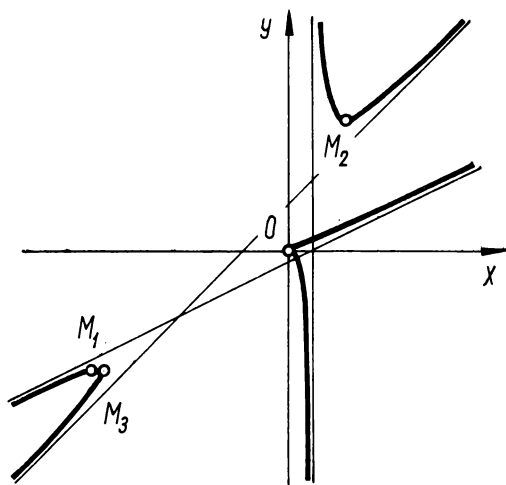


Рис. 48

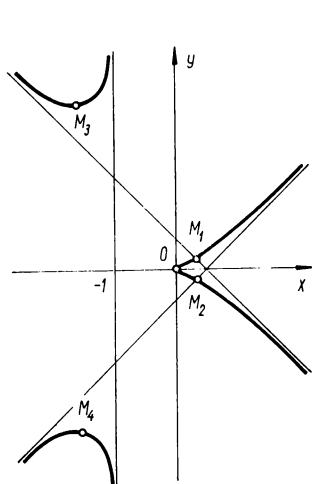


Рис. 49

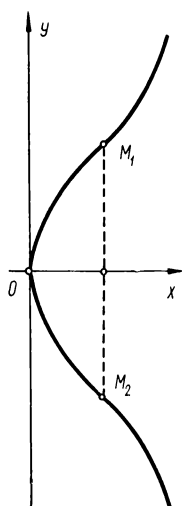


Рис. 50

256. Асимптот нет.  $O(0, 0)$  — точка возврата второго рода с касательной в ней  $x=0$ . Линия пересекает ось  $Ox$  в точках  $O$  и  $M_1(1, 0)$ .  $M_2(t=(-0,8)^{1/3})$  — точка перегиба. В точке  $M_3(t=(0, 4)^{1/3})$  — касательная параллельна оси  $Ox$  (рис. 51).

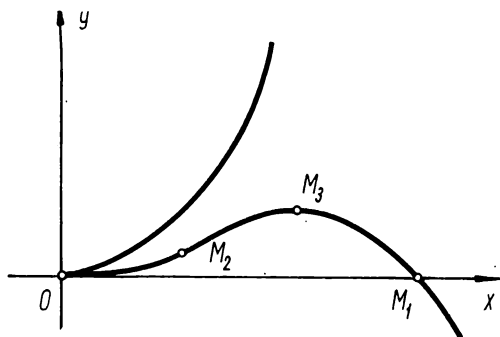


Рис. 51

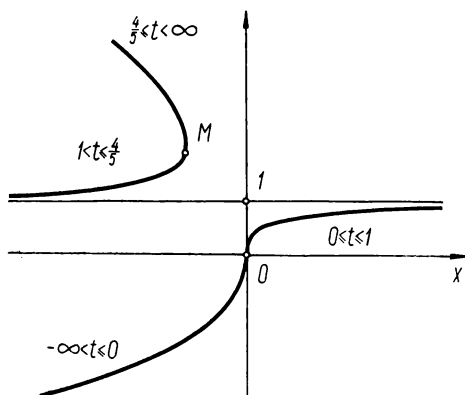


Рис. 52

257. Асимптота  $y=1$ .  $O(0, 0)$  — точка перегиба, касательная в которой совпадает с осью  $Oy$ . Касательная параллельна оси  $Oy$  в точке  $M\left(t=\frac{5}{4}\right)$  (рис. 52).
258. Асимптоты  $x=0$ ,  $x+y\pm 2=0$ .  $O(0, 0)$  — точка перегиба с касательной  $x-y=0$  (рис. 53).

259. Начало координат является точкой возврата второго рода, точки пересечения с осями координат —  $O(0, 0)$  и  $M(1, 0)$  (рис. 54).

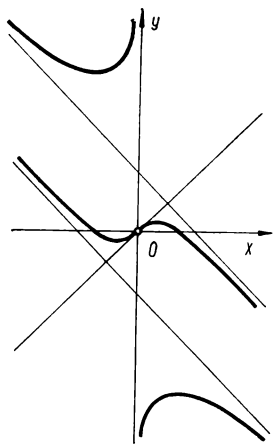


Рис. 53

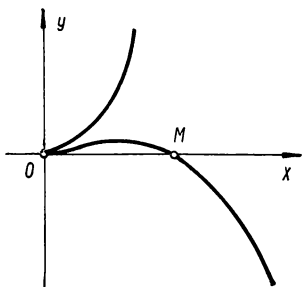


Рис. 54

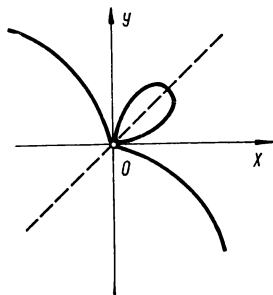


Рис. 55

260. Линия симметрична относительно прямой  $x=y$ . Начало координат — точка возврата первого рода (при  $t=0$ ) с касательной  $Ox$ . Кроме того, линия входит в начало координат, касаясь оси  $Oy$ , при  $t=\pm\infty$  (рис. 55).
261. Асимптоты  $2x+9=0$ ,  $2x-9=0$ ,  $x-y-6=0$ .  $M_1(4, -4)$  — точка возврата первого рода с касательной  $x+y=0$ . Ось  $Ox$  касается линии в точке  $M_2\left(\frac{16}{3}, 0\right)$ , ось  $Oy$  — в точке  $M_3\left(0, -\frac{16}{3}\right)$  (рис. 56).
262. Линия симметрична относительно оси  $Oy$ . Асимптоты  $y=\pm x-1$ .  $O(0, 0)$  — тройная особая точка с касательными в ней  $x=0$  и  $y=0$ . Точки перегиба  $M_{1,2}(\pm 2 \cdot 3^{\frac{1}{4}}, 2\sqrt{3})$  (рис. 57).

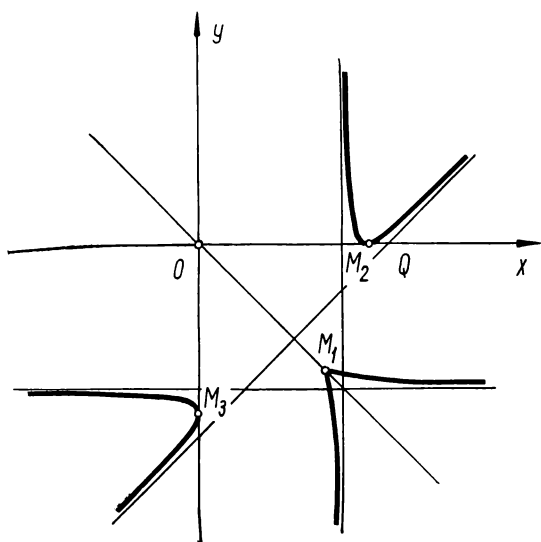


Рис. 56

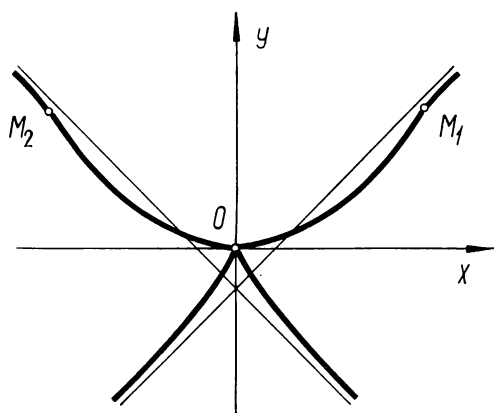


Рис. 57

263. Линия симметрична относительно оси  $Oy$ .  $M_1(2, 0)$  и  $M_2(-2, 0)$  — точки возврата первого рода с касательными  $\pm x + y - 2 = 0$ . В точках  $M_3\left(0, \frac{2}{3}\right)$  и  $M_4(0, 2)$  касательные параллельны оси  $Ox$ .  $M_{5, 6}\left(\pm \frac{2}{3}\sqrt[3]{5}, \frac{2}{3}\right)$  — точки перегиба (рис. 58).
264.  $Ox$  — ось симметрии. Асимптот и особых точек нет. Линия пересекает ось  $Ox$  в точке  $M_1(-1, 0)$ , ось  $Oy$  — в точках  $M_{2, 3}(0, \pm 1)$ . Касательные к линии параллельны оси  $Ox$  в точках  $M_{2, 3}$ , оси  $Oy$  — в точке  $M_1$ . Точки  $M_{2, 3}$  являются точками перегиба (рис. 59).
265. Линия симметрична относительно оси  $Ox$ . Асимптоты  $x=1$ ,  $y=\pm 2$ . Линия касается оси  $Oy$  в начале координат. В полосе плоскости, определенной неравенствами  $0 < x \leq 1$ , не существует точек, удовлетворяющих заданному уравнению (рис. 60).
266. Линия симметрична относительно оси  $Ox$ . Асимптота  $x=1$ . Вертикальная касательная  $x=0$ . Линия существует только для значений  $x$  в интервале  $0 \leq x < 1$ , что видно из представления уравнения линии в виде  $y^2 = \frac{x(x^2+1)}{1-x}$  (рис. 61).
267. Линия симметрична относительно оси  $Ox$ . Асимптота  $x=0$ . В точках  $M_1\left(-\frac{5}{2}, 0\right)$  и  $M_2\left(\frac{1}{2}, 0\right)$  касательные параллельны оси ординат. Есть две точки перегиба (рис. 62).
268. Линия целиком располагается внутри квадрата с центром в начале координат и со сторонами, равными  $2a$  и параллельными осям координат. Линия симметрична относительно осей координат и биссектрис координатных углов (рис. 63).
269. Линия похожа на гиперболу. Асимптоты  $2y = \pm x$ . Для  $x^2 < 6$  не существует точек, удовлетворяющих заданному уравнению, кроме точки  $O(0, 0)$ , которая является изолированной (рис. 64).
270. Асимптоты  $y = \pm x$ . Касательные параллельны оси  $Oy$  в точках  $O(0, 0)$ ,  $M_1(\sqrt[3]{2}, 0)$ . Есть две точки перегиба  $M_2$  и  $M_3$  (рис. 65).

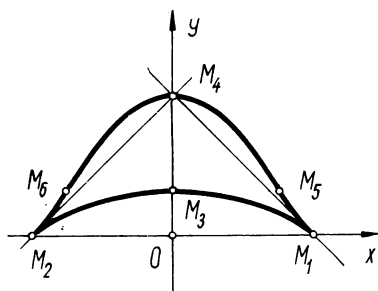


Рис. 58

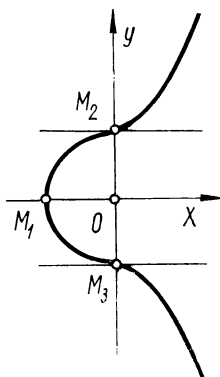


Рис. 59

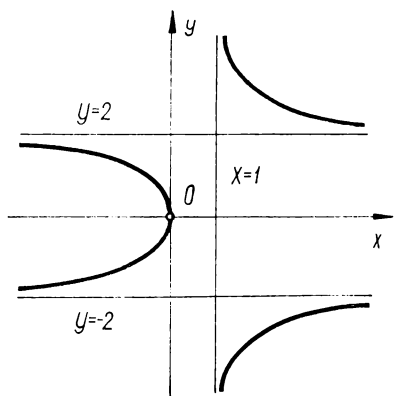


Рис. 60

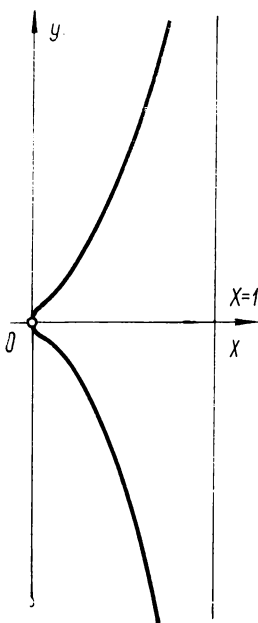


Рис. 61

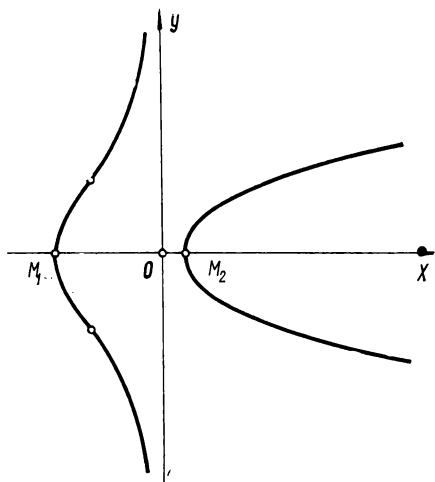


Рис. 62

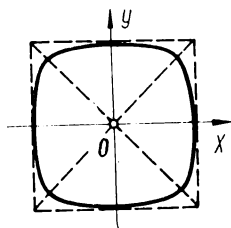


Рис. 63

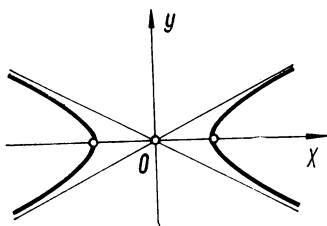


Рис. 64

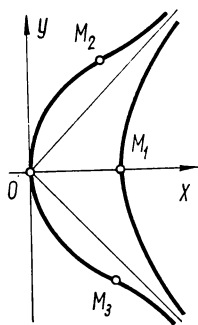


Рис. 65



271. Асимптоты  $y = \pm x$ . Касательные параллельны осям в точках

$$M_1 \left( -\frac{1}{\sqrt[3]{32}}, \frac{3}{\sqrt[3]{32}} \right) \text{ и } M_2 \left( \frac{3}{\sqrt[3]{32}}, -\frac{1}{\sqrt[3]{32}} \right) \quad (\text{рис. 66}).$$

272. Асимптоты  $x=0$ ,  $y=0$ ,  $y=x$ .  $O(0, 0)$  — точка перегиба с касательной  $y=-x$ . Касательные параллельны оси  $Ox$  в точках

$$M_{1,2}(\sigma, (\sqrt[3]{2}+1)\sigma), \quad M_{3,4}(-\sigma, \sigma(\sqrt[3]{2}-1)); \quad \sigma = \pm 1 \quad (\text{рис. 67}).$$

273. Асимптоты  $x=0$ ,  $y=0$ . Касательная параллельна оси  $Ox$  в точке  $M(0, 1)$  (рис. 68).

274. Прямая  $x=1$  и изолированная точка  $O(0, 0)$ .

275. Асимптоты  $x = \pm 1$ ,  $y = \pm 1$ ;  $O(0, 0)$  — изолированная точка (рис. 69).

276. Асимптоты  $y = \pm x$ .  $O(0, 0)$  — изолированная точка. Линия пересекает ось  $Oy$  в точках  $M_{1,2}(0, \pm \sqrt[3]{2})$ , в которых касательные параллельны оси  $Ox$  (рис. 70).

277. Линия симметрична относительно оси  $Ox$ . Асимптоты  $x=1$ ,  $y=x+1$ ,  $y=-x-1$ . Асимптоты  $y = \pm(x+1)$  пересекают линию в точке  $M_1(-1, 0)$ .  $O(0, 0)$  — изолированная точка. Кроме точки  $O$ , других точек в полосе  $-1 \leq x \leq 1$  нет. Касательная к линии параллельна оси  $Oy$  в точке  $M_1$ , оси  $Ox$  — в точках  $M_2$

$$\text{и } M_3 \text{ с абсциссой } x = \frac{1 + \sqrt[3]{5}}{2} \quad (\text{рис. 71}).$$

278. Асимптоты  $y-x \pm \frac{a}{\sqrt[3]{2}} = 0$ ,  $y+x \pm \frac{a}{\sqrt[3]{2}} = 0$ ; начало координат — изолированная точка. Касательная параллельна оси  $Ox$  в точках  $M_{1,2}(0, \pm a)$ , оси  $Oy$  — в точках  $M_{3,4}(\pm a, 0)$  (рис. 72).

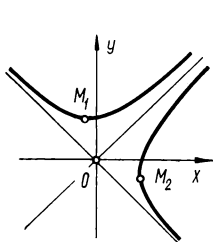


Рис. 66

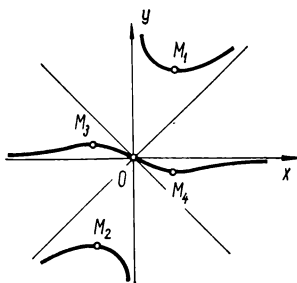


Рис. 67

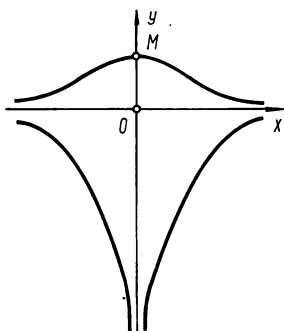


Рис. 68

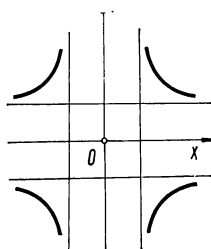


Рис. 69

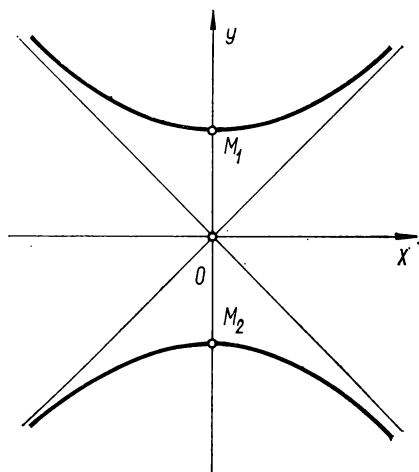


Рис. 70

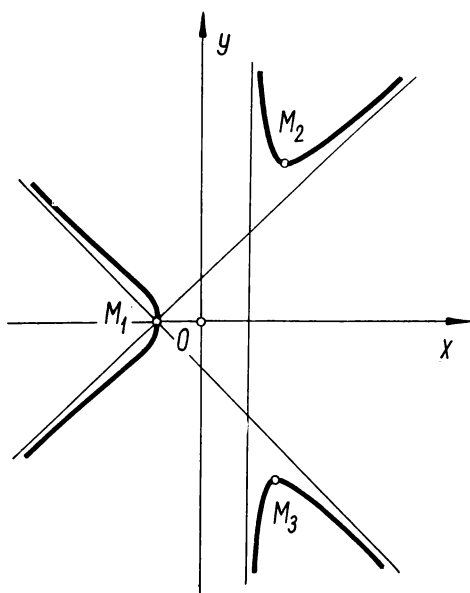


Рис. 71

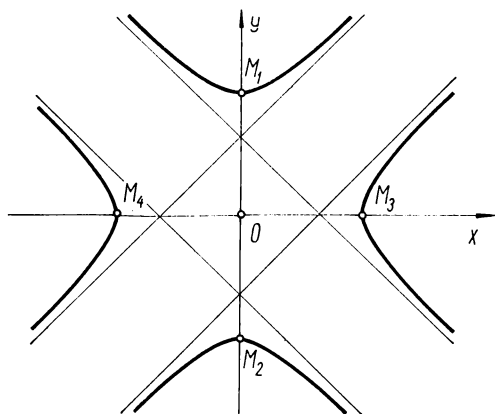


Рис. 72

279. Линия симметрична относительно оси  $Ox$ . Точка  $M_0(2, 0)$  — изолированная. В точках  $M_{1,2}(-2, \pm\sqrt{2})$  касательная параллельна оси  $Ox$ . Имеются две точки перегиба  $M_{3,4}$  и асимптота  $x=0$  (рис. 73).
280. Асимптоты  $3x+4=0$ ,  $3x\pm 3\sqrt{3}y-8=0$ .  $O(0, 0)$  — изолированная точка. В точке  $M_1(4, 0)$  линия пересекается с осью  $Ox$ ; касательная в этой точке  $x=4$  (рис. 74).
281. Линия целиком располагается внутри квадрата с центром в начале координат и сторонами, равными  $\sqrt{2+\sqrt{8}}$  и параллельными осям координат. Линия симметрична относительно осей координат и биссектрис координатных углов. Начало координат — изолированная точка. Касательные параллельны оси  $Ox$  в точках

$$M_{1,2}(0, \pm 1), M_{3-6}\left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \pm \frac{\sqrt{2+\sqrt{8}}}{2}\right)$$

Касательные параллельны оси  $Oy$  в точках

$$M_{7,8}(\pm 1, 0), M_{9-12}\left(\pm \frac{\sqrt{2+\sqrt{8}}}{2}, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad (\text{рис. 75}).$$

282. Линия симметрична относительно оси  $Ox$  и вся лежит в полосе  $-1 \leq x < 1$ . Асимптота  $x=1$ . В начале координат — точка самопересечения с угловыми коэффициентами касательных  $k=\pm 1$ . Касательная параллельна оси  $Oy$  в точке  $M_1(-1, 0)$ . Касательные параллельны оси  $Ox$  в точках  $M_{2,3}$  с абсциссой

$$x = \frac{-\sqrt{5}+1}{2}$$

(рис. 76).

283. Линия симметрична относительно координатных осей. Точки пересечения с осями координат —  $O(0, 0)$ ,  $M_1(0, 1)$ ,  $M_2(0, -1)$ . Касательные параллельны оси  $Ox$  в точках  $M_{1,2}(0, \pm 1)$  и оси  $Oy$  — в точках

$$M_{3-6}\left(\pm \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}, \pm \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

$O(0, 0)$  — точка самопересечения с касательными  $y=\pm x$  (рис. 77).

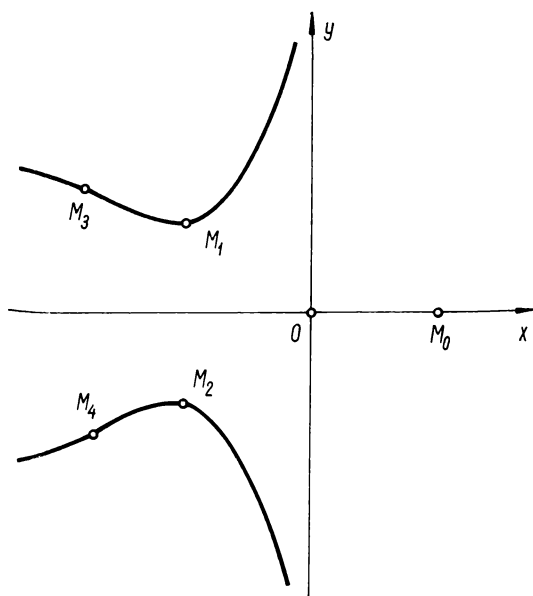


Рис. 73

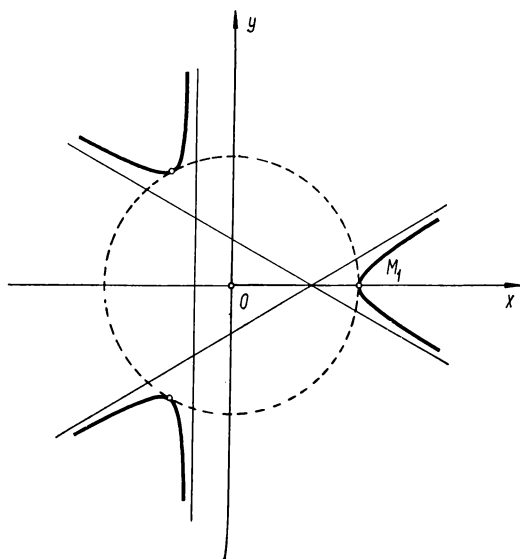


Рис. 74

284. Линия симметрична относительно оси  $Ox$ .  $M(1, 0)$  — точка самопересечения с касательными  $y = \pm(x-1)$ . Асимптота  $x=0$  (рис. 78).

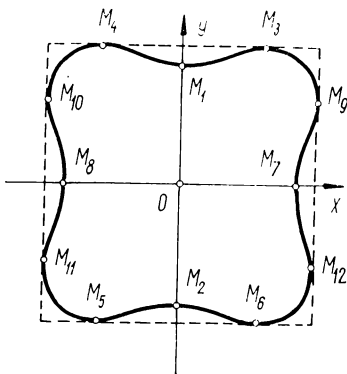


Рис. 75

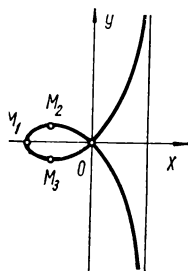


Рис. 76

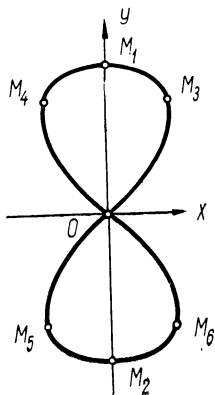


Рис. 77

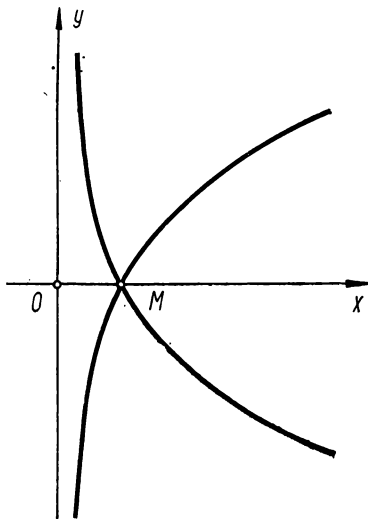


Рис. 78

285. Линия симметрична относительно биссектрис координатных углов.  $O(0, 0)$  — точка самопересечения с касательными  $x=0$ ,

$y=0$ . Других точек пересечения с осями координат нет. Касательные к линии параллельны оси  $Ox$  в точках

$$M_1\left(\sqrt[8]{\frac{3}{16}}, \sqrt[8]{\frac{27}{16}}\right) \text{ и } M_2\left(-\sqrt[8]{\frac{3}{16}}, -\sqrt[8]{\frac{27}{16}}\right)$$

и оси  $Oy$  — в точках

$$M_3\left(\sqrt[8]{\frac{27}{16}}, \sqrt[8]{\frac{3}{16}}\right) \text{ и } M_4\left(-\sqrt[8]{\frac{27}{16}}, -\sqrt[8]{\frac{3}{16}}\right).$$

Асимптот нет (рис. 79).

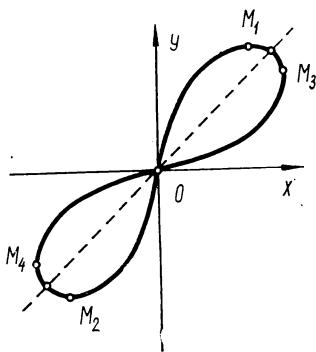


Рис. 79

286. Линия симметрична относительно осей координат и расположена внутри прямоугольника, ограниченного прямыми  $x=\pm 1$ ,  $y=\pm \frac{1}{2}$ .  $O(0, 0)$  — точка самопересечения с касательными  $y=\pm x$ . Касательные параллельны оси  $Oy$  в точках  $M_{1,2}(\pm 1, 0)$  и оси  $Ox$  — в точках  $M_{3,4}\left(\pm \frac{\sqrt{2}}{2}, \pm \frac{1}{2}\right)$  (рис. 80).
287. Линия симметрична относительно оси  $Ox$ . Асимптоты  $y=\pm 1$ ,  $x=-1$ ,  $x=-2$ .  $O(0, 0)$  — точка самопересечения с касательными  $y\sqrt{2}=\pm x$  (рис. 81).
288.  $M_1(1, 0)$  — точка самопересечения с касательными  $y=\pm(x-1)$ . Касательные параллельны оси  $Ox$  в точках  $M_{2,3}\left(\frac{1}{3}, \pm \frac{2}{3\sqrt{3}}\right)$ .

Касательная параллельна оси  $Oy$  в точке  $O(0, 0)$  (рис. 82).

289. Линия симметрична относительно биссектрис координатных углов.  $O(0, 0)$  — точка самопересечения с касательными  $x=0$ ,  $y=0$ . Касательные параллельны оси  $Ox$  в точках

$$M_{1,2}(\sigma \sqrt[4]{3}, \sigma \sqrt[4]{27})$$

и оси  $Oy$  — в точках

$$M_{3,4}(\sigma \sqrt[4]{27}, \sigma \sqrt[4]{3}),$$

где  $4\sigma = \pm 1$  (рис. 83).

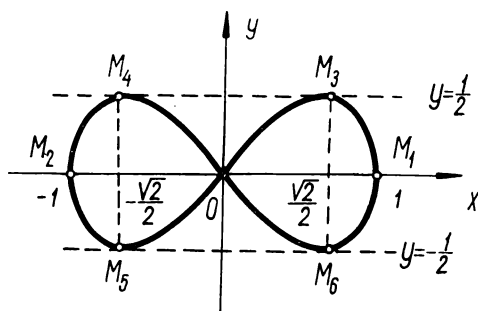


Рис. 80

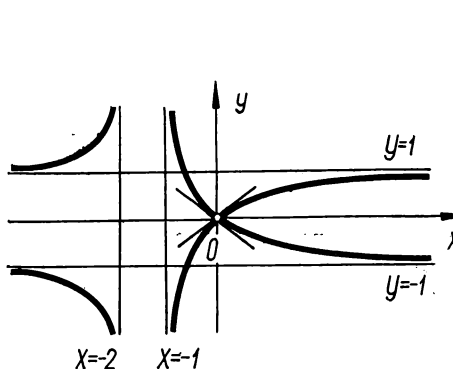


Рис. 81

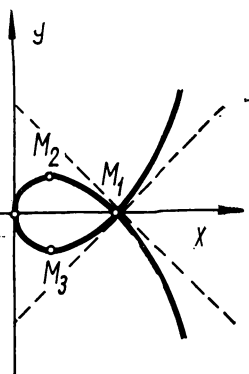


Рис. 82

290. Асимптота  $y = -x + \frac{1}{3}$  пересекается с линией в точке

$$M_1\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right).$$



$O(0, 0)$  — точка возврата первого рода с касательной  $x=0$ .  
 В точке  $M_2(1, 0)$  касательная параллельна оси  $Oy$  и в точке  
 $M_3\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\sqrt[3]{4}\right)$  — оси  $Ox$  (рис. 84).

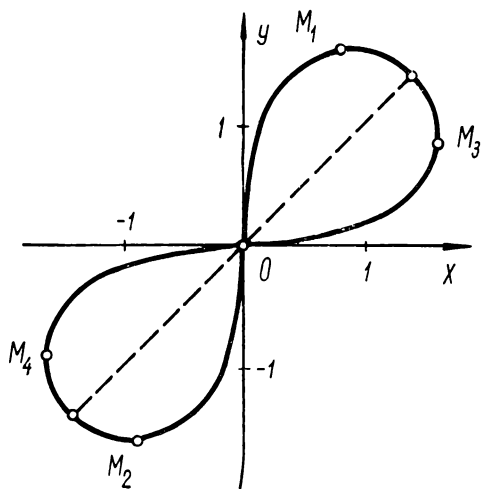


Рис. 83

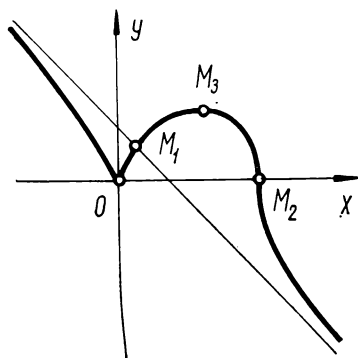


Рис. 84

291. Асимптот нет.  $O(0, 0)$  — точка возврата первого рода с касательной  $y=x$ . Линия также пересекает ось  $Ox$  в точке  $M_1(27, 0)$ . Касательная параллельна оси  $Ox$  в точке  $M_2(12, 4)$  (рис. 85).

292. Линия симметрична относительно оси  $Ox$ .  $O(0, 0)$  — точка возврата первого рода с касательной  $y=0$ . Асимптоты  $x=a$ ,

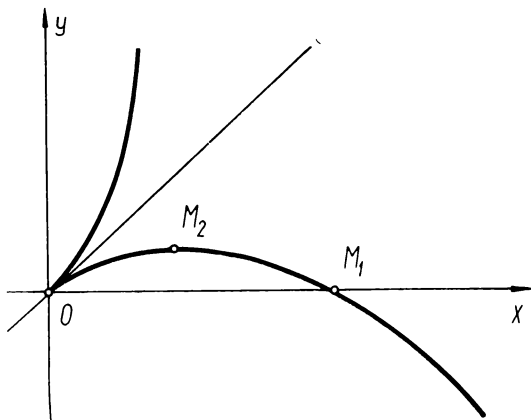


Рис. 85

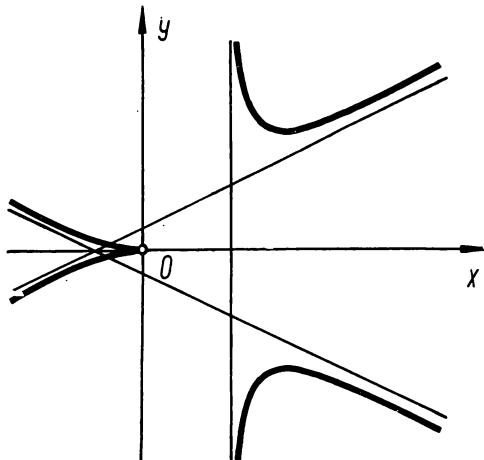


Рис. 86

$x \pm y = \pm \frac{a}{2}$ . В полосе плоскости  $0 < x \leq a$  нет точек, удовлетворяющих уравнению линии (рис. 86).

293.  $O(0, 0)$  — точка возврата второго рода с касательной  $y=0$ ;  $M_1(0,28; 0,02)$  — точка перегиба. В точке  $M_2(0,64; 0,4)$  касательная параллельна оси  $Ox$ . В точке  $M_3(1, 0)$  линия пересекает ось  $Ox$  (рис. 87).

294. Линия симметрична относительно оси  $Oy$ .  $O(0, 0)$  — особая точка, через которую проходят три дуги. Касательные в ней  $y=0$ ,  $x \pm y=0$ . Точек перегиба и асимптот нет. Точки, в которых касательные параллельны осям координат,

$$M_{1,2} \left( \pm \frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{1}{4} \right), \quad M_{3,4} \left( \pm \frac{2\sqrt{3}}{9}, \frac{2}{9} \right) \quad (\text{рис. 88}).$$

295. Линия симметрична относительно оси  $Oy$ .  $O(0, 0)$  — точка самоприкосновения с касательной  $y=0$ . Касательные параллельны оси  $Ox$  в точках  $M_{1,2}(\pm 6, 12)$  и оси  $Oy$  — в точках  $M_{3,4}(\pm 6\sqrt{2}, 8)$ . Есть две точки перегиба  $M_{5,6}$  (рис. 89).

296. Линия симметрична относительно оси  $Ox$ .  $O(0, 0)$  — тройная особая точка с касательными  $x=0$  и  $y=0$ . Касательные параллельны оси  $Ox$  в точках  $M_{1,2}(\sqrt{12} \pm \sqrt{6\sqrt{12}}, 0)$ , оси  $Oy$  — в точках  $M_{3,4}(4, \pm 4)$  (рис. 90).

297. Линия симметрична относительно осей координат.  $O(0, 0)$  — точка самоприкосновения с касательной  $y=0$ . Линия пересекает ось  $Ox$  в точках  $M_{1,2}(\pm 1, 0)$ , в которых касательные параллельны оси  $Oy$ . В точках

$$M_{3-6} \left( \pm \frac{\sqrt{6}}{3}, \pm \frac{2\sqrt{3}}{9} \right)$$

касательные параллельны оси  $Ox$ .  $M_{7-10}$  — точки перегиба (рис. 91).

298. Асимптоты  $y=\pm x$ .  $O(0, 0)$  — точка самопересечения с касательными  $x=0$  и  $y=0$ . Есть пять точек перегиба (рис. 92).

299. Линия целиком располагается внутри квадрата с центром в начале координат и сторонами, равными 4 и параллельными осям координат. Линия симметрична относительно осей координат и биссектрис координатных углов.  $O(0, 0)$  — четырехкратная особая точка с касательными  $x=0$  и  $y=0$ . Касательные параллельны оси  $Ox$  в точках  $M_{1-4}(\pm\sqrt{2}, \pm 2)$ , оси  $Oy$  — в точках  $M_{5-8}(\pm 2, \pm\sqrt{2})$  (рис. 93).

300. Поскольку функция  $\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$  периодична с периодом  $2\pi$ , то достаточно рассмотреть значения  $\varphi$  в пределах  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ . Так как

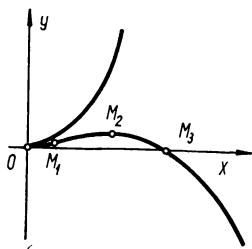


Рис. 87

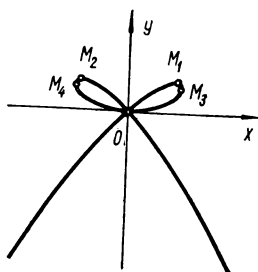


Рис. 88

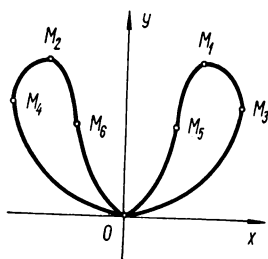


Рис. 89

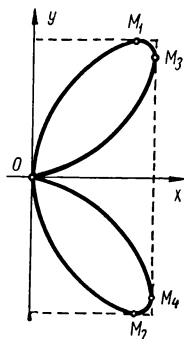


Рис. 90

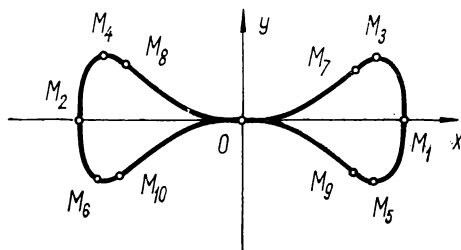


Рис. 91

точка  $(2\pi - \varphi, -r)$  тождественна с точкой  $(\pi - \varphi, r)$ , а точки  $(\varphi, r)$  и  $(\pi - \varphi, r)$  симметричны относительно прямой  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ , то эта прямая является осью симметрии линии.

При изменении полярного угла в пределах  $0 \leq \varphi \leq \pi$   $r = \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$  будет положителен, поэтому при указанных значениях  $\varphi$  линия будет лежать выше полярной оси.

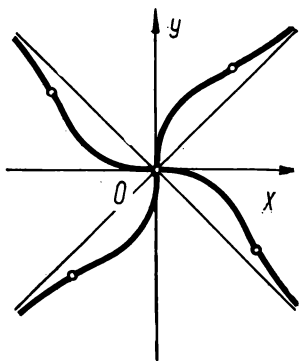


Рис. 92

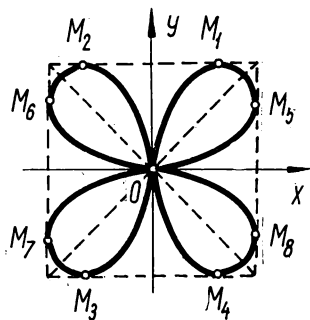


Рис. 93

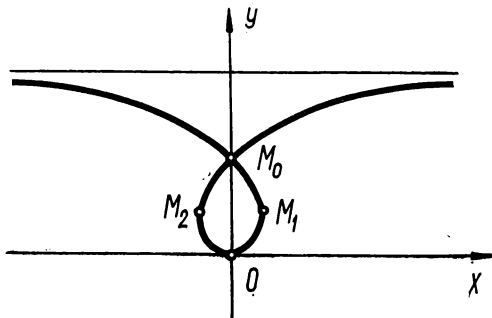


Рис. 94

В силу симметрии относительно прямой  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  вся линия будет располагаться выше полярной оси.

Линия имеет точку самопересечения  $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$ . Есть асимптота, параллельная полярной оси и удаленная от нее на две единицы

масштаба. По формуле  $\operatorname{tg} \mu = \frac{r}{r'}$  (см. задачу 148) получим

$$\operatorname{tg} \mu = \sin \varphi. \quad (*)$$

Следовательно, линия касается радиус-вектора точки касания только для  $\varphi=0$ . В точке самопересечения касательные пересекают ось симметрии под углом в  $45^\circ$ . Так как касательная к линии параллельна полярной оси, если  $\mu+\varphi=k\pi$ , то в этих точках

$$\operatorname{tg} \mu = -\operatorname{tg} \varphi.$$

Сопоставляя это с равенством (\*), получим  $\varphi=k\pi$ , следовательно, искомой касательной служит полярная ось. Так как касательная перпендикулярна к полярной оси, если

$$\mu + \varphi = k\pi + \frac{\pi}{2},$$

то

$$\operatorname{tg} \mu = \operatorname{ctg} \varphi,$$

а в силу (\*)

$$\operatorname{ctg} \varphi = \sin \varphi,$$

откуда

$$\cos \varphi = \frac{\sqrt{5}-1}{2}, \text{ а } \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \approx \frac{1}{2}.$$

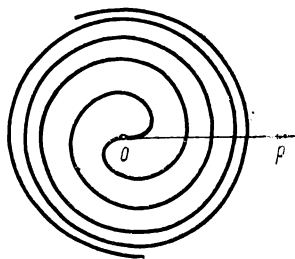


Рис. 95

Вводя декартовы координаты по формулам

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi,$$

получим две точки, в которых касательные перпендикулярны полярной оси

$$x_1 \approx 0,3, \quad y_1 \approx 0,4 \quad \text{и} \quad x_2 \approx -0,3, \quad y_2 \approx 0,4$$

(рис. 94).

301. (Рис. 95). В полюсе спираль имеет точку перегиба. По мере удаления от полюса расстояние между витками неограниченно убывает.

302. (Рис. 96). Линия состоит из двух ветвей, каждая из которых асимптотически приближается к полюсу. Полярная ось служит асимптотой. Имеются две точки перегиба

$$\left(\frac{1}{2}, a\sqrt[3]{2}\right) \text{ и } \left(-\frac{1}{2}, -a\sqrt[3]{2}\right).$$

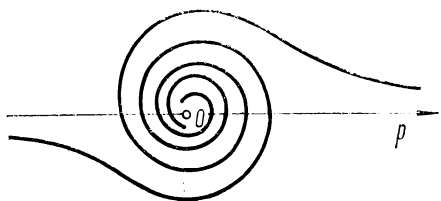


Рис. 96

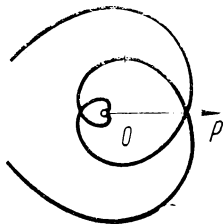


Рис. 97

303. (Рис. 97). Полюс является точкой возврата первого рода. Полярная ось в этой точке является касательной.
304. Пусть  $a > 0$ . При  $\varphi \rightarrow 0$  линия асимптотически подходит к прямой, параллельной полярной оси и отстоящей от нее на расстоянии  $l$ . Когда  $\varphi$  неограниченно возрастает, линия делает бесчисленное множество оборотов вокруг полюса, асимптотически приближаясь к окружности  $r=a$  (рис. 98).

При  $a=0$  получается гиперболическая спираль (см. задачу 168, рис. 32).

305. Линия симметрична относительно осей декартовой системы координат, ось  $Ox$  которой совпадает с полярной осью. Линия пересекает ось  $Ox$  в точках  $A(-a, 0)$ ,  $B(a, 0)$ ,  $O(0, 0)$ , причем точка  $O(0, 0)$  является точкой самоприкосновения с касательной  $y=0$ . Линия имеет две точки самопересечения

$$C\left(0, \frac{a}{\sqrt[3]{2}}\right) \text{ и } D\left(0, -\frac{a}{\sqrt[3]{2}}\right) \text{ (рис. 99).}$$

306. (Рис. 100).
307. При  $C \neq 0$  получаем семейство эллипсов, одна из осей которых расположена на оси  $Ox$ . Все эллипсы касаются оси  $Oy$  в начале координат. Огибающая  $y=\pm 1$  (рис. 101). При  $C=0$  получаем ось  $Ox$ , при  $C=\pm\infty$  — ось  $Oy$ .
308. При  $C=0$  — пара прямых  $x=0$ ,  $x-2y=0$ . При  $C \neq 0$  — подобные гиперболы, асимптоты которых параллельны указанным прямым. Центры гипербол  $O^*(c, c)$  заполняют биссектрису

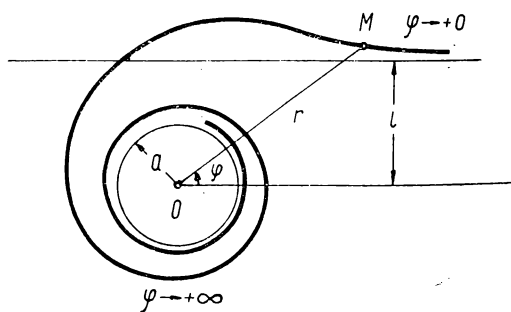


Рис. 98

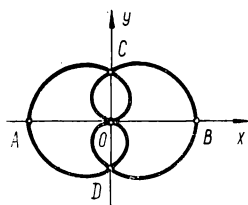


Рис. 99

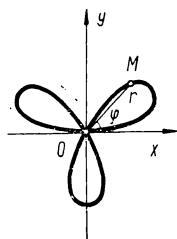


Рис. 100

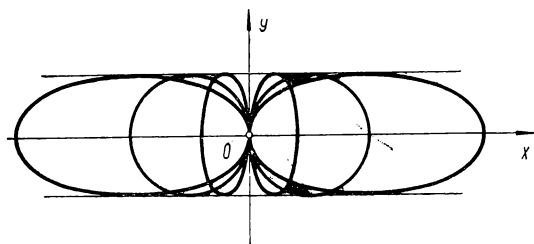


Рис. 101



$x-y=0$ . Одна из ветвей гипербол касается оси  $Ox$  в начале координат. При  $C=\pm\infty$  получаем прямую  $y=0$ . Огибающей нет (рис. 102).

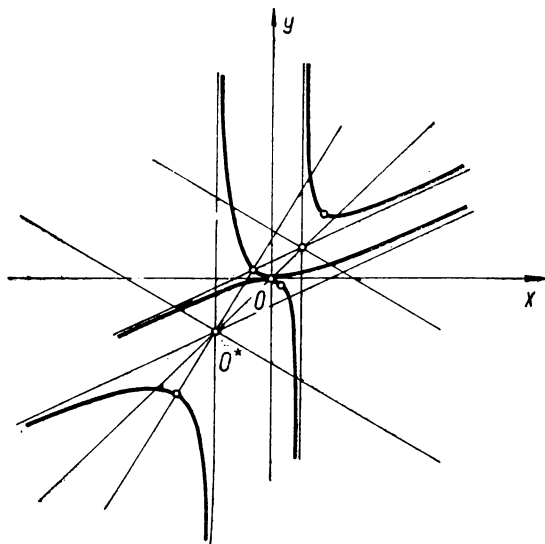


Рис. 102

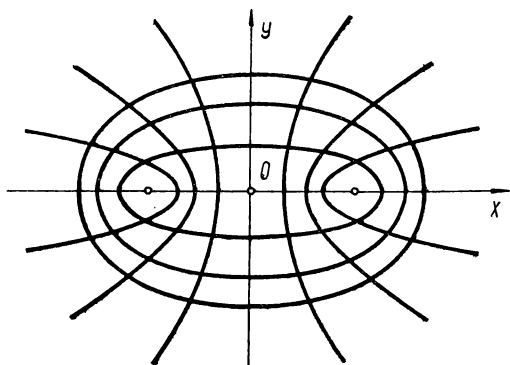


Рис. 103

309. а) Семейство софокусных эллипсов; б) семейство софокусных гипербол (рис. 103),

312. Окружности с центрами в центре пучка (рис. 104).

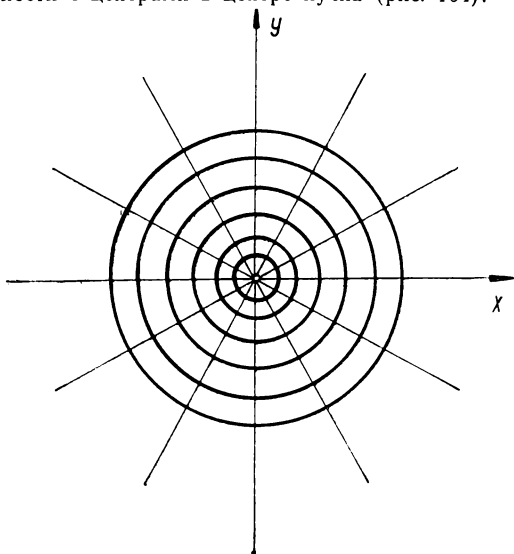


Рис. 104

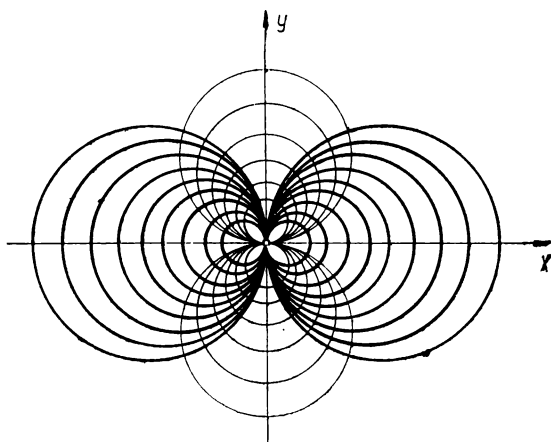


Рис. 105

313.  $(x-c)^2 + y^2 = c^2$  (рис. 105).

314.  $x^2 + \frac{y^2}{2} = c$  (рис. 106).

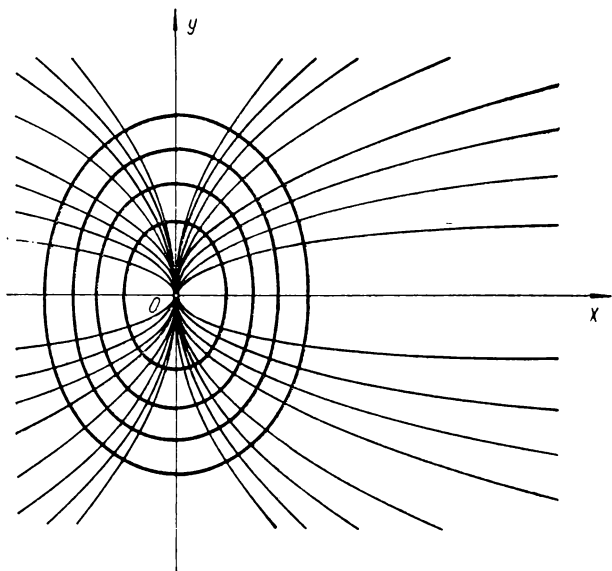


Рис. 106

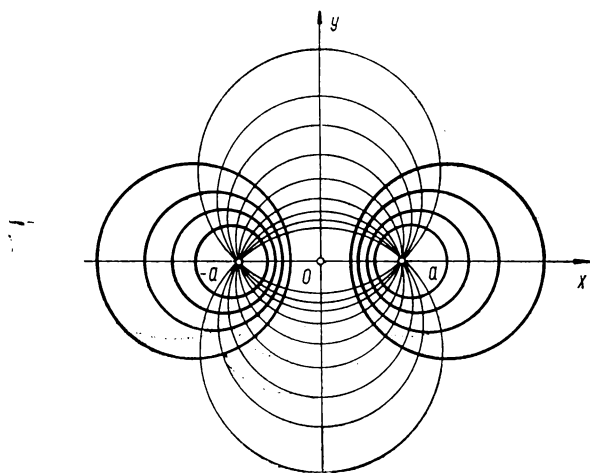


Рис. 107

315. Семейство непересекающихся окружностей, линия центров которых направлена по общей хорде заданного семейства. Поместив начало координат в середине общей хорды и направив ось  $Ox$  по данной хорде, получим уравнение  $(x-c)^2 + y^2 = c^2 - a^2$  (рис. 107).

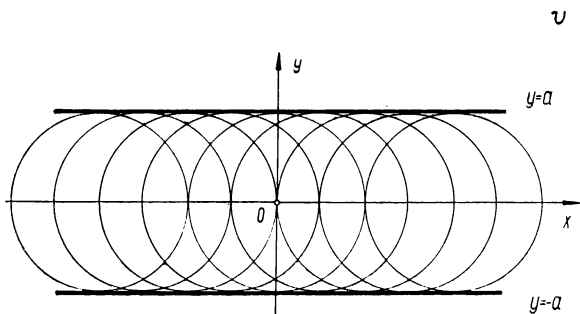


Рис. 108

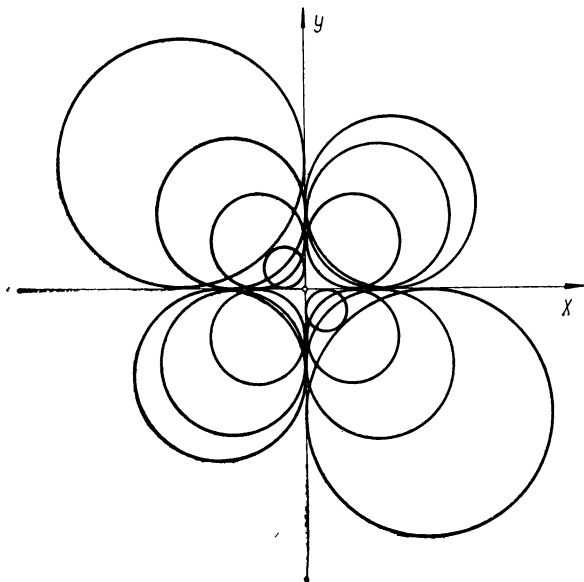


Рис. 109

316.  $y = \pm a$  (рис. 108).  
 317.  $x = 0, y = 0$  (рис. 109).

318.  $x^2 + y^2 = \rho^2$  (рис. 110).

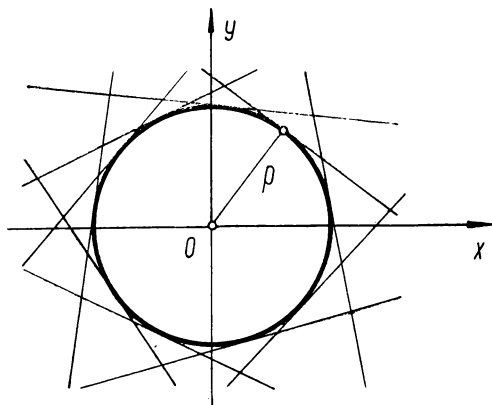


Рис. 110

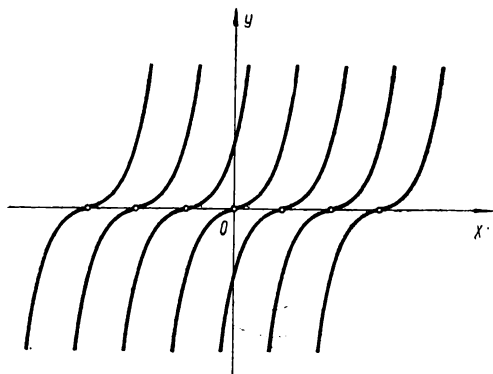


Рис. 111

319.  $y=0$  (рис. 111).

320. Огибающая  $y=0$  одновременно является геометрическим местом особых точек семейства линий (рис. 112).
321. Огибающей нет. Дискриминантная линия  $y=0$  есть геометрическое место особых точек линий семейства (рис. 113).

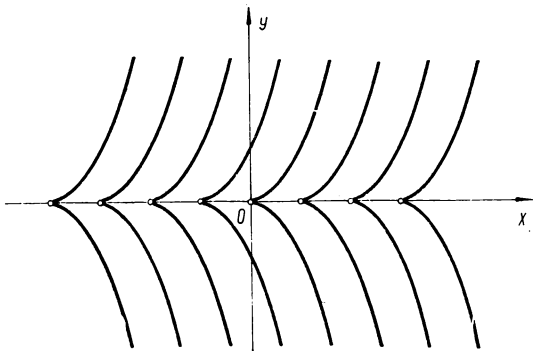


Рис. 112

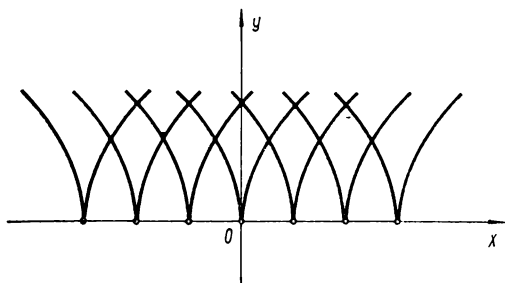


Рис. 113

322. Дискриминантная линия распадается на пару прямых  $x=y$  и  $x-y-\frac{2}{9}=0$ . Первая является местом особых точек, вторая — огибающей (рис. 114).
323. Окружность
- $$\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{a^2}{4}$$
- (рис. 115).

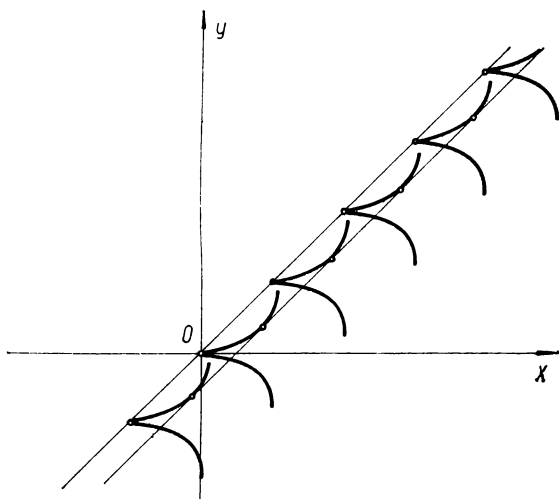


Рис. 114

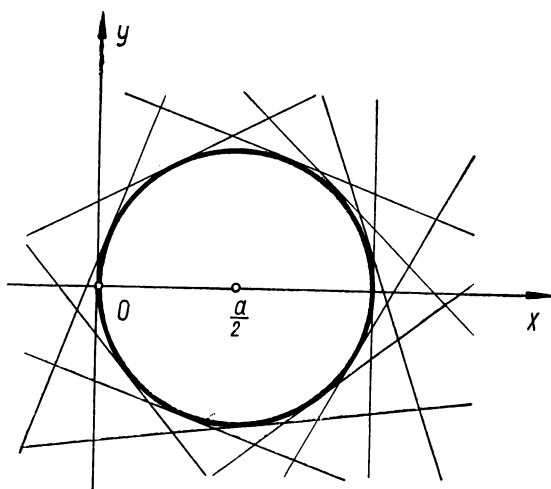


Рис. 115

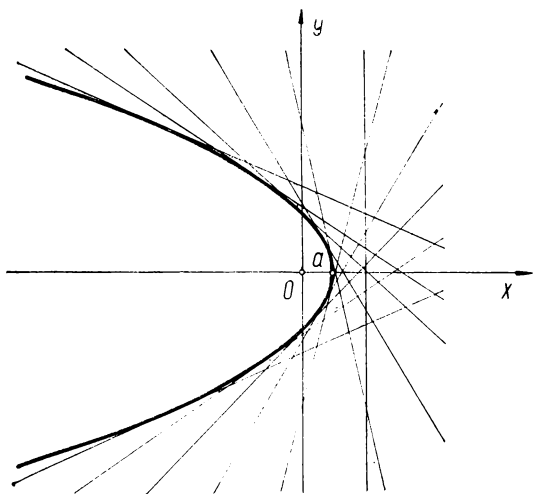


Рис. 116

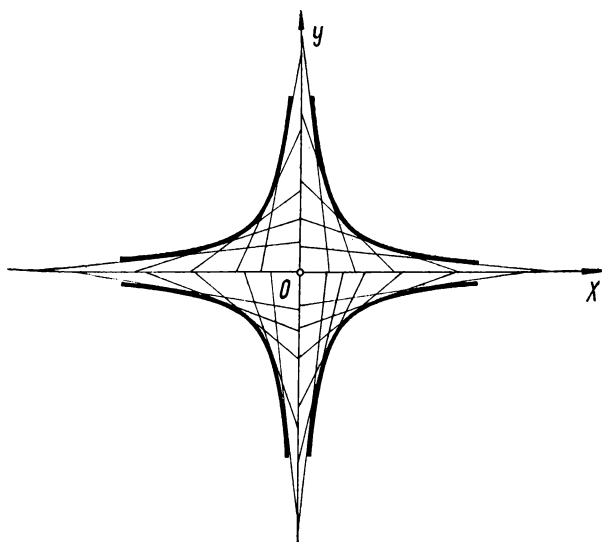


Рис. 117



324. Парабола  
 $y^2 + 4a(x-a) = 0$   
 (рис. 116).

325. Гиперболы  
 $xy = \pm \frac{S}{2}$   
 (рис. 117).

326.  $(A^2 + B^2)R^2 = C^2$ .

327. Астроида  
 $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$   
 (рис. 118).

328. а) Парабола  
 $y^2 = 4cx$   
 (рис. 119).

У к а з а н и е. Примем фиксированную прямую за ось  $Oy$ , а ось  $Ox$  направим через точку  $F$ . Пусть  $F(a, 0)$ . Записав урав-

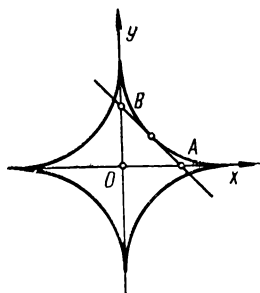


Рис. 118

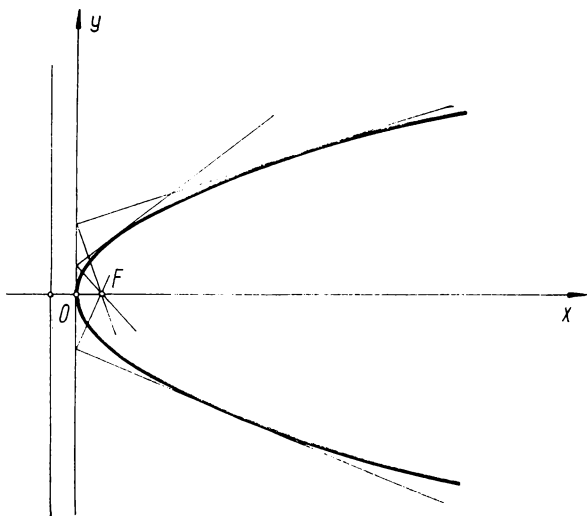


Рис. 119

нение пучка прямых, проходящих через точку  $F$  в виде  $y = c(x-a)$ , мы получим, что прямые указанного в задаче семейства проходят через точки оси  $Oy$  с координатами  $(0, -ca)$ , имея угловые коэффициенты  $k = -\frac{1}{c}$ ;

б) Если  $F(a, 0)$ , а окружность  $x^2 + y^2 = r^2$ , то при  $r > a$  получим эллипс

$$\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2 - a^2} = 1,$$

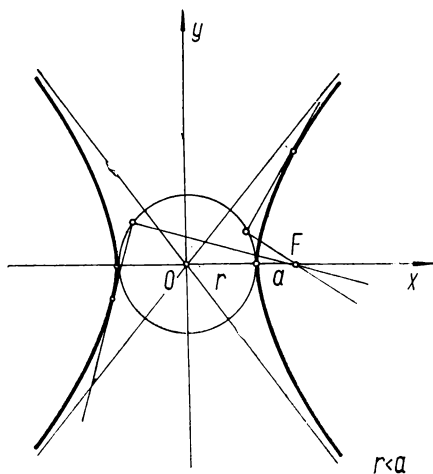
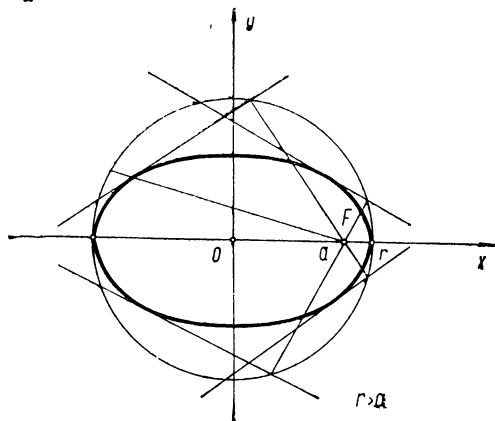


Рис. 120

а при  $r < a$  — гиперболу

$$\frac{x^2}{r^2} - \frac{y^2}{a^2 - r^2} = 1 \quad (\text{рис. 120}).$$

329. Циклоида (рис. 121).

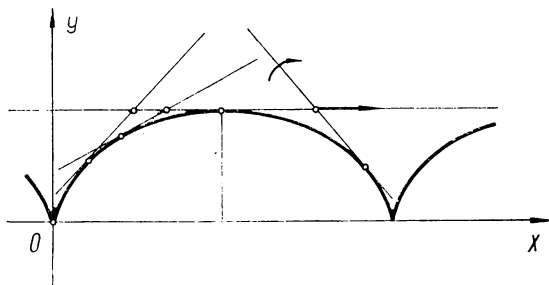


Рис. 121

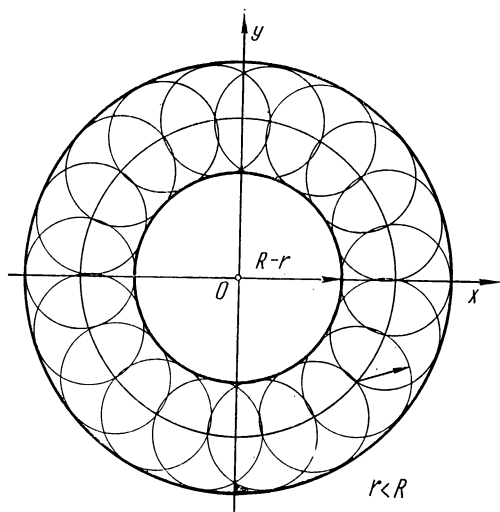


Рис. 122а

330.  $x^2 + y^2 = (R-r)^2$ ,  $x^2 + y^2 = (R+r)^2$  (рис. 122а, 122б и 122в).

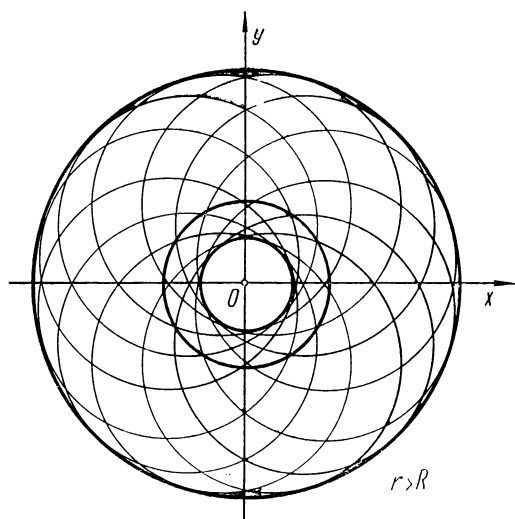


Рис. 122б

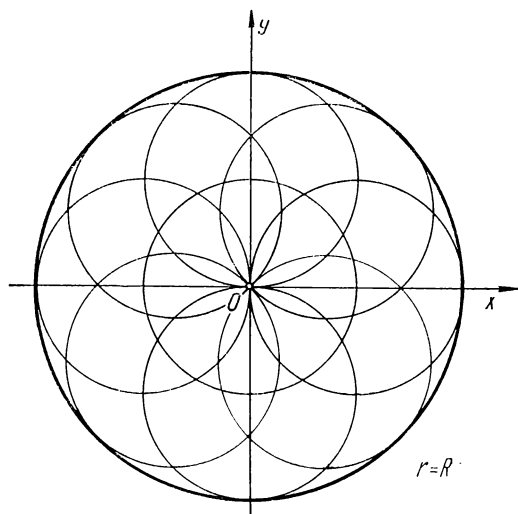


Рис. 122в

331. Касательная в вершине данной параболы (рис. 123).

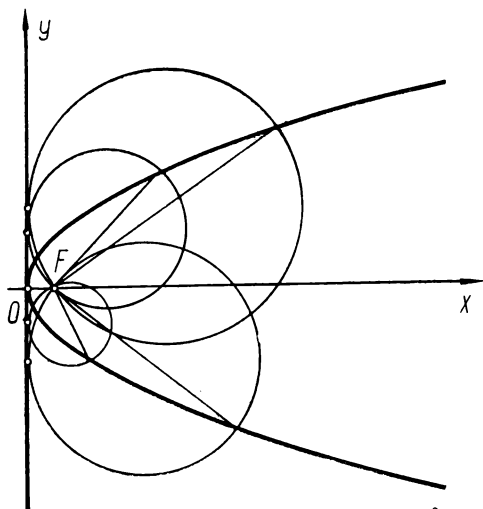


Рис. 123

332. Огибающая состоит из окружности

$$\left(x - \frac{3p}{4}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{3p}{4}\right)^2$$

и директрисы параболы

$$x = -\frac{p}{2}$$

(рис. 124).

333. Запишем уравнения эллипса в параметрической форме

$$x = a \cos \varphi, \quad y = a \sin \varphi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi.$$

Рассмотрим случай, когда хорды параллельны оси  $Oy$ . Координаты центра окружности семейства  $x_0 = a \cos \varphi$ ,  $y_0 = 0$ , радиус  $R = b \sin \varphi$ ,  $0 \leq \varphi \leq \pi$ . Уравнение семейства

$$(x - a \cos \varphi)^2 + y^2 = b^2 \sin^2 \varphi.$$

Дискриминантная линия определяется уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} (x - a \cos \varphi)^2 + y^2 &= b^2 \sin^2 \varphi, \\ a(x - a \cos \varphi) &= b^2 \cos \varphi. \end{aligned} \right\}$$

Так как из первого уравнения следует

$$|x - a \cos \varphi| \leq b \sin \varphi,$$

то из второго уравнения находим

$$b^2 |\cos \varphi| \leq ab \sin \varphi \quad \text{или} \quad |\operatorname{tg} \varphi| \geq \frac{b}{a},$$

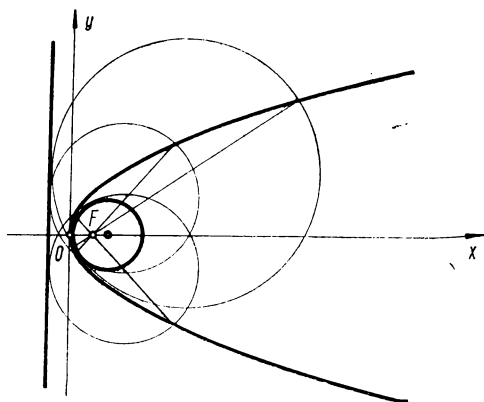


Рис. 124

т. е. дискриминантная линия определена лишь для тех окружностей, для которых

$$|\operatorname{tg} \varphi| \geq \frac{b}{a}.$$

Исключим параметр  $\varphi$ :

$$\cos \varphi = \frac{ax}{a^2 + b^2}; \quad \sin^2 \varphi = 1 - \frac{a^2 x^2}{(a^2 + b^2)^2}.$$

Уравнение семейства примет вид

$$\left( x - \frac{a^2 x}{a^2 + b^2} \right)^2 + y^2 = b^2 \left( 1 - \frac{a^2 x^2}{(a^2 + b^2)^2} \right),$$

откуда

$$b^4 x^2 + y^2 (a^2 + b^2)^2 - b^2 (a^2 + b^2)^2 + a^2 b^2 x^2 = 0$$

или

$$\frac{x^2}{a^2 + b^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Легко проверить, что при указанных значениях параметра  $\varphi$  дискриминантная линия будет огибающей (рис. 125а).

Если хорды параллельны оси  $Ox$  (рис. 125б), то аналогичными рассуждениями найдем:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 + b^2} = 1, \quad |\operatorname{tg} \varphi| \leq \frac{b}{a}.$$

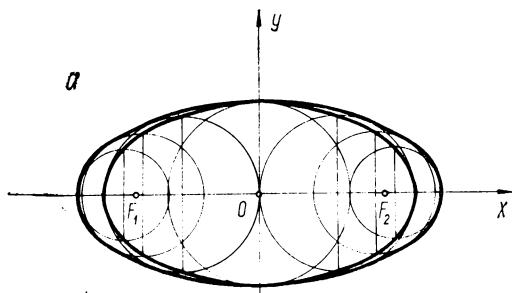


Рис. 125а

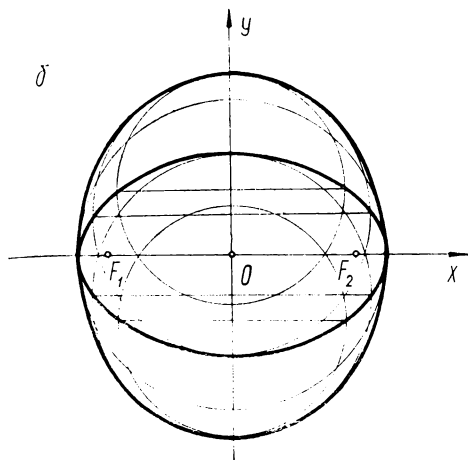


Рис. 125б

334. Указание. Задача решается так же, как и предыдущая. Параметрические уравнения гиперболы нужно взять в виде

$$x = a \operatorname{ch} \varphi, \quad y = b \operatorname{sh} \varphi.$$

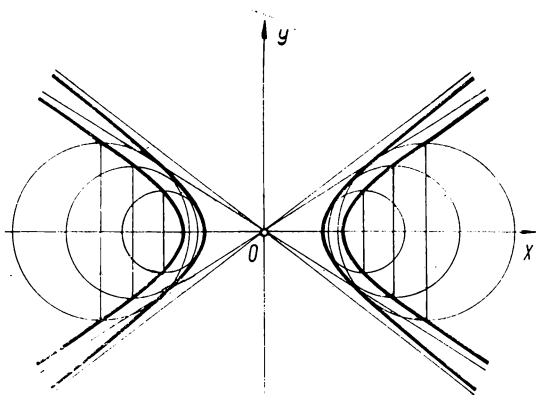


Рис. 126а

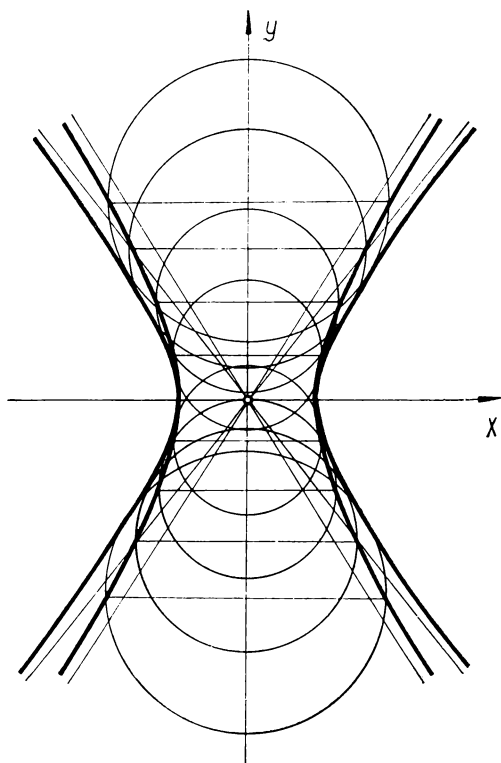


Рис. 126б



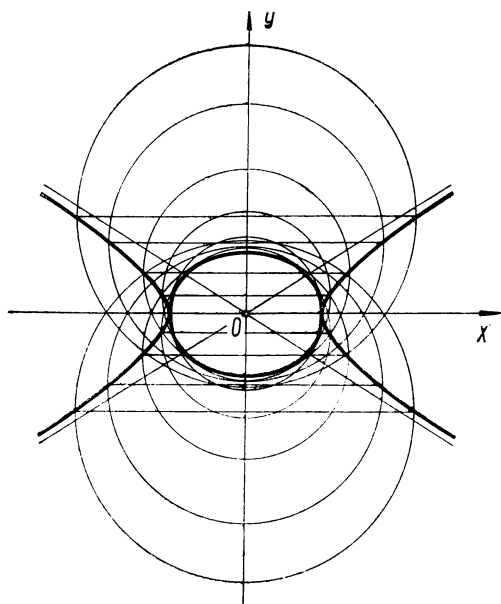


Рис. 126в

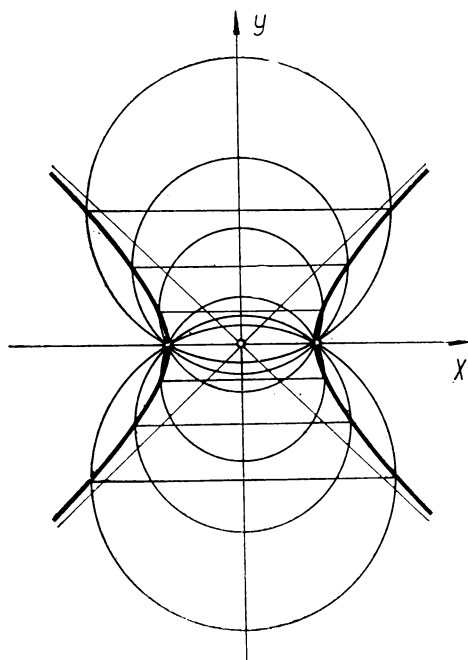


Рис. 126г

Если хорды параллельны оси  $Oy$ , то огибающая существует только, если  $b < a$ . Ее уравнение

$$\frac{x^2}{a^2 - b^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Она огибает лишь те окружности, для которых

$$|\operatorname{th} \varphi| \leq \frac{b}{a}$$

(рис. 126а). Если хорды параллельны оси  $Ox$ , то огибающая существует при любых значениях  $a$  и  $b$ . При  $b \neq a$  она задается уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - b^2} = 1,$$

причем при  $b > a$  она огибает все окружности (рис. 126б), а при  $b < a$  лишь те, для которых

$$|\operatorname{th} \varphi| \leq \frac{b}{a}$$

(рис. 126в). При  $b = a$  огибающая не существует (рис. 126г).

### 335. Парабола

$$y^2 = 2p \left( x + \frac{p}{2} \right).$$

Она является огибающей окружностей семейства, для которых  $c \geq \frac{p}{2}$  (рис. 127).

### 336. $y^2 = 2(p+q)x$ (рис. 128).

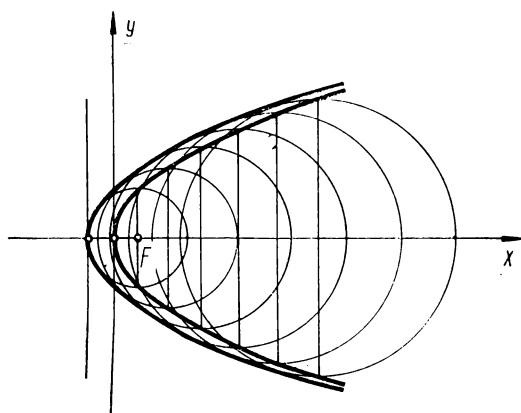


Рис. 127

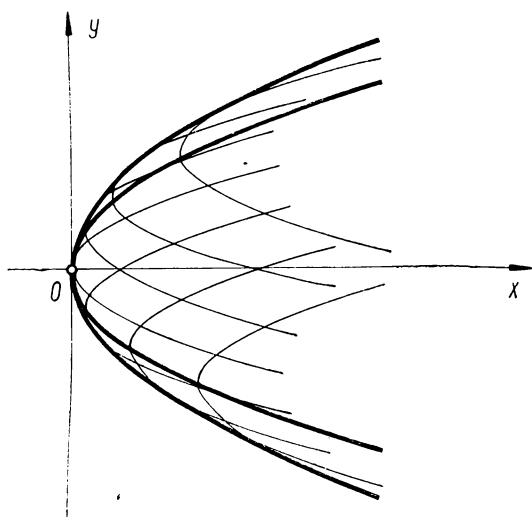


Рис. 128

337. Точки огибающей должны удовлетворять системе уравнений

$$F(x, y, \alpha, \beta) = 0, \quad \varphi(\alpha, \beta) = 0, \quad \frac{D(F, \varphi)}{D(\alpha, \beta)} = 0.$$

338. Четыре прямые

$$x \pm y = \pm 1$$

(рис. 129).

339.  $\frac{m}{x^{m+1}} + \frac{m}{y^{m+1}} = \frac{m}{a^{m+1}}$  при  $m=2$  — астроида; при  $m=1$  — парабола  $(x-y)^2 - a(2x+2y-a) = 0$ ; при  $m=-2$  — окружность  $x^2 + y^2 = a^2$ .

340. Выберем в заданной вертикальной плоскости систему координат  $xOy$ , поместив начало координат в заданную точку и направив ось  $Oy$  вертикально вверх. Тогда параметрические уравнения линий семейства будут

$$x = v_0 t \cos \alpha, \quad y = v_0 t \sin \alpha - \frac{\sigma t^2}{2},$$

где  $\alpha$  — параметр семейства.

Имеем:

$$\frac{\partial x}{\partial t} = v_0 \cos \alpha, \quad \frac{\partial y}{\partial t} = v_0 \sin \alpha - gt,$$

$$\frac{\partial x}{\partial \alpha} = -v_0 t \sin \alpha, \quad \frac{\partial y}{\partial \alpha} = v_0 t \cos \alpha.$$

Приравняв нулю якобиан  $\frac{D(x, y)}{D(t, \alpha)}$ , получим

$$v_0^2 t - gt^2 v_0 \sin \alpha = 0,$$

откуда  $t = \frac{v_0}{g \sin \alpha}$  и параметрические уравнения дискриминантной линии

$$x = \frac{v_0^2}{g} \operatorname{ctg} \alpha, \quad y = \frac{v_0^2}{g} - \frac{v_0^2}{2g \sin^2 \alpha}.$$

Исключив  $\alpha$ , получим

$$y = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v_0^2}.$$

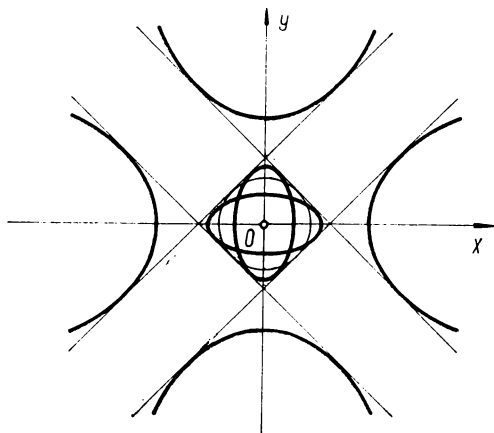


Рис. 129

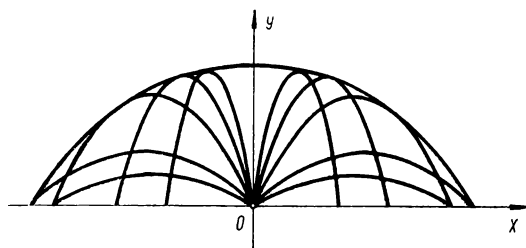


Рис. 130

Итак, дискриминантной линией является парабола, ось которой направлена вертикально вниз по оси  $Oy$ , параметр равен  $\frac{v_0^2}{g}$ , а вершина находится в точке  $M_0\left(0, \frac{v_0^2}{2g}\right)$ . Дискриминантная линия является огибающей, так как линии семейства не имеют особых точек (рис. 130).

341. Уравнения семейства (рис. 131)  
 $x = a \cos v \cos u, \quad y = a \sin v \sin u.$

Приравнявая нулю якобиан  $\frac{D(x, y)}{D(u, v)}$ , получим

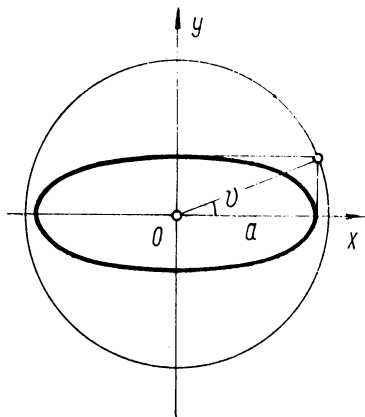


Рис. 131

$$\sin^2 v \cos^2 u - \cos^2 v \sin^2 u = 0,$$

$$\sin(u+v) \sin(u-v) = 0$$

или

$$v = -u, \quad v = \pi - u, \quad v = u, \quad v = -\pi + u.$$

Дискриминантная линия состоит из четырех отрезков прямых:

$$\begin{aligned} x &= a \cos^2 u, & y &= -a \sin^2 u; & x &= a \cos^2 u, & y &= a \sin^2 u; \\ x &= -a \cos^2 u, & y &= a \sin^2 u; & x &= -a \cos^2 u, & y &= -a \sin^2 u. \end{aligned}$$

Это четыре стороны квадрата, вершинами которого служат точки пересечения диаметров окружности, лежащих на осях координат, с самой окружностью. Каждая из сторон квадрата является огибающей, так как линии семейства не имеют особых точек (рис. 132).

$$342. \quad s = \frac{1}{27} \left[ (4+9x_2)^{\frac{3}{2}} - (4+9x_1)^{\frac{3}{2}} \right].$$

$$343. \quad s = \frac{1}{2} (x_2 \sqrt{1+4x_2^2} - x_1 \sqrt{1+4x_1^2}) +$$

$$+ \frac{1}{4} \ln \frac{2x_2 + \sqrt{1+4x_2^2}}{2x_1 + \sqrt{1+4x_1^2}}.$$

$$344. \quad s = \sqrt{1+x_2^2} - \sqrt{1+x_1^2} + \ln \left| \frac{x_2}{x_1} \right| + \ln \frac{1+\sqrt{1+x_1^2}}{1+\sqrt{1+x_2^2}}.$$

$$345. \quad s = a \left( \operatorname{sh} \frac{x_2}{a} - \operatorname{sh} \frac{x_1}{a} \right).$$

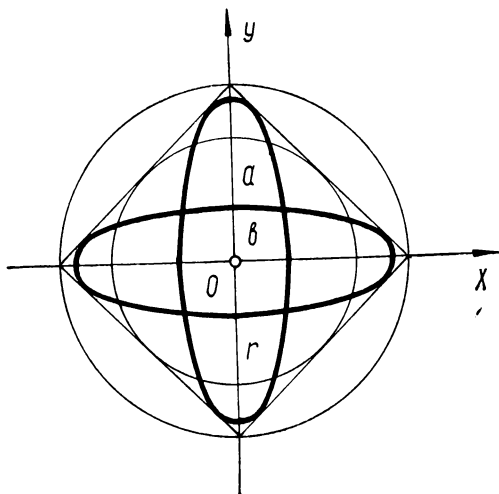


Рис. 132

$$346. \quad s = x_2 - x_1 + \sqrt{1+e^{2x_2}} - \sqrt{1+e^{2x_1}} + \ln \frac{1+\sqrt{1+e^{2x_1}}}{1+\sqrt{1+e^{2x_2}}}.$$

$$347. \quad s = \ln \left| \frac{e^{x_2} - e^{-x_2}}{e^{x_1} - e^{-x_1}} \right|.$$

$$348. \quad s = \frac{a}{2} (t_2^2 - t_1^2).$$

$$349. \quad s = a (\ln \sin t_2 - \ln \sin t_1),$$

$$\text{где } 0 < t_1, t_2 \leq \frac{\pi}{2} \text{ или } \frac{\pi}{2} \leq t_1, t_2 < \pi.$$

$$350. \quad s = \ln \operatorname{tg} 75^\circ.$$

$$351. \quad s = 2\sqrt{3}.$$

$$352. \quad s = \frac{15}{4} + \ln 2.$$

$$353. \quad s = \ln \operatorname{tg} \frac{5\pi}{12} - \ln \operatorname{tg} \frac{\pi}{12}.$$

$$354. \quad s = \frac{1}{2} (\operatorname{ch} 4 - \operatorname{ch} 0).$$

$$355. \quad s = 48a.$$

$$356. \quad s = 24 \frac{22}{27}.$$

$$357. \quad s = 2a [\sqrt[3]{2} + \ln(\sqrt[3]{2} + 1)].$$

$$358. \quad s = 8a.$$

$$359. \quad s = 8am(m+1).$$

$$360. \quad s = 6a.$$

$$361. \quad s = \frac{5}{2} \left[ 2 + \frac{1}{\sqrt[3]{3}} \ln(2 + \sqrt[3]{3}) \right] a.$$

$$362. \quad s = 8a.$$

$$363. \quad s = \frac{16}{3} a.$$

$$364. \quad s = \frac{3}{2} \pi a.$$

$$365. \quad s = \frac{a}{2} [2\pi \sqrt{1+4\pi^2} + \ln(2\pi + \sqrt{1+4\pi^2})].$$

367. Цепная линия. Точка  $A$  является вершиной.

$$371. \quad x = R \cos \frac{s}{R}, \quad y = R \sin \frac{s}{R}.$$

$$372. \quad x = \operatorname{arc sh} \frac{s}{a}, \quad y = \sqrt{a^2 + s^2}.$$

$$373. \quad k = \frac{|\sin x|}{(1 + \cos^2 x)^{\frac{3}{2}}}.$$

$$374. \quad k = \frac{a}{y^2}.$$

$$375. \quad k = \frac{\sqrt[3]{p}}{(p+2x)^{\frac{3}{2}}} = \frac{p^2}{(y^2+p^2)^{\frac{3}{2}}}$$



$$376. \quad k = \frac{6}{t(4+9t^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

$$377. \quad k = \frac{ab}{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{\frac{3}{2}}}.$$

$$378. \quad k = \frac{ab}{(a^2 \operatorname{sh}^2 t + b^2 \operatorname{ch}^2 t)^{\frac{3}{2}}}.$$

$$379. \quad k = \frac{1}{4a \left| \sin \frac{t}{2} \right|}.$$

$$380. \quad k = \frac{1+2m}{4am(m+1) \left| \sin \frac{t}{2} \right|}$$

$$381. \quad k = \frac{2}{3a |\sin 2t|}.$$

$$382. \quad k = \frac{1}{at}.$$

$$383. \quad k = \frac{2+\varphi^2}{a(1+\varphi^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

$$384. \quad k = \frac{1}{r \sqrt{1+h^2}}.$$

$$385. \quad k = \frac{3}{4a \left| \cos \frac{\varphi}{2} \right|}$$

$$386. \quad k = \frac{3r}{a^2} = \frac{3 \cos^2 \varphi}{r}$$

$$387. \quad k = \frac{\operatorname{mod} \begin{vmatrix} F_{xx} & F_{xy} & F_x \\ F_{yx} & F_{yy} & F_y \\ F_x & F_y & 0 \end{vmatrix}}{(F_x^2 + F_y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

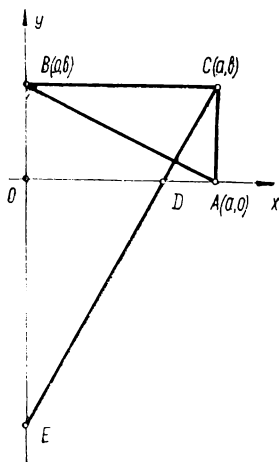


Рис. 133

$$388. \quad k = \frac{a^4 b^4}{(b^4 x^2 + a^4 y^2)^{3/2}} = \frac{ab}{(a^2 - e^2 x^2)^{3/2}}, \text{ где } e — \text{ эксцентриситет.}$$

389.

$$390. \quad k = \frac{3(2a-x)}{a \sqrt[3]{x} (8a-3x)^{3/2}}.$$

$$391. \quad k=0.$$

392.

$$393. \quad k = \frac{P \left( Q \frac{\partial Q}{\partial x} - P \frac{\partial Q}{\partial y} \right) + Q \left( P \frac{\partial P}{\partial y} - Q \frac{\partial P}{\partial x} \right)}{(P^2 + Q^2)^{3/2}}$$

$$394. \quad \text{У к а з а н и е.} \quad h = \frac{|[\bar{t} \Delta s, \Delta \bar{r}]|}{\Delta s}.$$

$$400. \quad R = a \operatorname{ctg} \dot{t}.$$

404. Центр кривизны эллипса

$$x = a \cos t, \quad y = a \sin t$$

в вершине  $A(t=0)$  есть  $D\left(\frac{c^2}{a}, 0\right)$ , а в вершине  $B\left(t=\frac{\pi}{2}\right)$  —

$E\left(0, -\frac{c^2}{b}\right)$ , где  $c^2 = a^2 - b^2$ .  $D$  и  $E$  находятся на пересечении

перпендикуляра, опущенного из точки  $C(a, b)$  на  $AB$ , с осями координат (рис. 133).

$$405. \quad \left(x - \frac{c^2}{a}\right)^2 + y^2 = \frac{b^4}{a^2}, \quad x^2 + \left(y + \frac{c^2}{b}\right)^2 = \frac{a^4}{b^2}.$$

$$406. \quad \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 + (y-1)^2 = 1.$$

$$407. \quad (x-2)^2 + (y-2)^2 = 2, \quad (x+2)^2 + (y+2)^2 = 2.$$

$$408. \quad \left(-\frac{1}{2} \ln 2, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

409. Точки, в которых кривизна минимальная  $((2n+1)a\pi, a+d)$ , точки, в которых кривизна максимальная  $(2n\pi, a-d)$  ( $n$  — любое натуральное число).

$$410. \quad A\left(\frac{a}{4}, \frac{a}{4}\right).$$

$$411. \quad A\left(\frac{3\pi}{2}, a\right).$$

412. Квадрат хорды, соединяющей точки
- $M$
- и
- $M'$
- , равен

$$\begin{aligned}
 (MM')^2 &= (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 = \left[ x' \Delta t + \frac{x''}{2} (\Delta t)^2 + \frac{x'''}{6} (\Delta t)^3 + \dots \right]^2 + \\
 &+ \left[ y' \Delta t + \frac{y''}{2} (\Delta t)^2 + \frac{y'''}{6} (\Delta t)^3 + \dots \right]^2 = (x'^2 + y'^2) (\Delta t)^2 + \\
 &+ (x'x'' + y'y'') (\Delta t)^3 + \left( \frac{x''^2 + y''^2}{4} + \frac{x'x''' + y'y'''}{3} \right) (\Delta t)^4 + \dots
 \end{aligned}$$

Если вместо произвольного параметра  $t$  взять длину дуги  $s$ , то  $x'^2 + y'^2 = 1$ . Дифференцируем это соотношение дважды по  $s$ :  $x'x'' + y'y'' = 0$ ,  $x'x''' + y'y''' + x''^2 + y''^2 = 0$ .

Учитывая, что

$$x''^2 + y''^2 = k^2 = \frac{1}{r^2},$$

получим

$$(MM')^2 = (\Delta s)^2 - \frac{1}{12r^2} (\Delta s)^4 + \dots,$$

откуда

$$\begin{aligned}
 MM' &= \sqrt{(\Delta s)^2 - \frac{1}{12r^2} (\Delta s)^4 + \dots} = \\
 &= \Delta s \sqrt{1 - \frac{1}{12} \left( \frac{\Delta s}{r} \right)^2 + \dots} = \Delta s \left[ 1 - \frac{1}{24} \left( \frac{\Delta s}{r} \right)^2 + \dots \right].
 \end{aligned}$$

Так как  $\overset{\smile}{MM'} = \Delta s$ , то

$$\overset{\smile}{MM'} - MM' = \frac{1}{24} \frac{(\Delta s)^3}{r^2} + \dots$$

414. Пусть линия  $l_1$  задана своим векторным уравнением  $\overline{r} = \overline{r}_1(s)$ , где  $s$  — длина дуги этой линии, отсчитываемой от точки  $M$ , а за начало отсчета радиус-векторов взята точка  $M$ . Запишем уравнения линии  $l_1$  относительно репера Френе, взятого в точке  $M$ .

Подставляя в разложение  $\overline{r}_1(s) = \overline{r}_1 s + \frac{\overline{r}_1''}{2} s^2 + \dots$  выражения  $\overline{\dot{r}}_1 = \overline{t}_1$ ,  $\overline{r}_1'' = k_1 n_1$ , получим

$$x = s + \dots, \quad y = \frac{k_1}{2} s^2 + \dots \quad (*)$$

Аналогично, для линии  $l_2$

$$x = s + \dots, \quad y = \frac{k_2}{2} s^2 + \dots \quad (**)$$

Пусть  $P$  точка на касательной  $l$ , близкая к точке  $M$ , и перпендикуляр к  $l$ , проведенный в точке  $P$ , пересекает линии  $l_1, l_2$

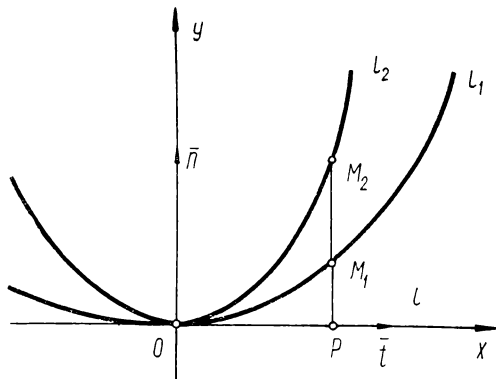


Рис. 134

в точках  $M_1, M_2$ . Тогда из уравнений (\*), (\*\*) соответственно получим

$$PM_1 = \frac{1}{2} k_1 x^2 + \dots, \quad PM_2 = \frac{1}{2} k_2 x^2 + \dots$$

Так как  $k_1 < k_2$ , то  $PM_1 < PM_2$  (рис. 134).

417.  $r = \frac{(y^2 + p^2)^{3/2}}{p^2}$ ,  $x_0 = p + \frac{3y^2}{2p}$ ,  $y_0 = -\frac{y^3}{p^2}$ . Соприкосновение третьего порядка в вершине  $O(0, 0)$  параболы.

421.  $y = -\frac{x^2}{2} + \frac{\pi x}{2} + 1 - \frac{\pi^2}{8}$ .

422.  $\left(y - \frac{8}{5}\right)^2 = \frac{2}{5} \left(\frac{7}{5} - x\right)$ .

423.  $\left(x - \frac{1}{5}\right)^2 = \frac{16}{5} \left(\frac{11}{5} - y\right)$ .

424. Точка — центр окружности.

425.  $X = \frac{a^2 - b^2}{a} \cos^3 t$ ,  $Y = \frac{b^2 - a^2}{b} \sin^3 t$  (рис. 135).

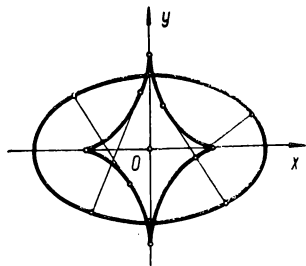


Рис. 135

426.  $X = \frac{a^2 + b^2}{a} \operatorname{ch}^3 t, \quad Y = -\frac{a^2 + b^2}{b} \operatorname{sh}^3 t$  (рис. 136).

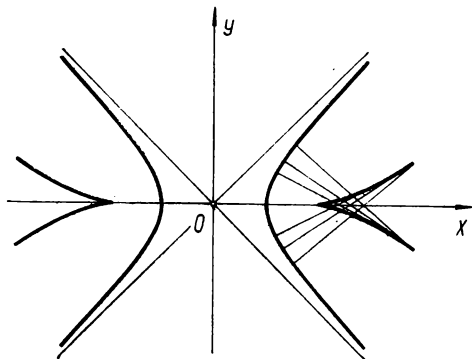


Рис. 136

427.  $X = -4x^3, \quad Y = \frac{1}{2} + 3x^2$  (рис. 137).

428.  $X = \frac{1}{2k-1} [(2k-2)x - 4k^2 x^{4k-1}],$   
 $Y = \frac{1+2k(4k-1)x^{4k-2}}{2k(2k-1)x^{2k-2}}$  (рис. 138).

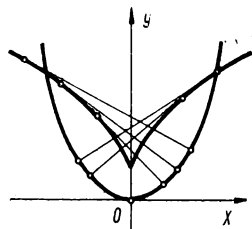


Рис. 137

429.  $X = \frac{1}{2k} [(2k-1)x - (2k+1)^2 x^{4k(h+1)}],$   
 $Y = \frac{1+(2k+1)(4k+1)x^{4k}}{2k(2k+1)x^{2k-1}}$  (рис. 139).

430.  $X = 2x + \frac{1}{x}, \quad Y = \ln x - x^2 - 1$  (рис. 140).

431.  $X = x + \cos x \frac{1 + \cos^2 x}{\sin x}, \quad Y = -\frac{2 \cos^2 x}{\sin x}$  (рис. 141).

432.  $X = x - \frac{1 + \cos^4 x}{\cos^2 x \sin 2x},$

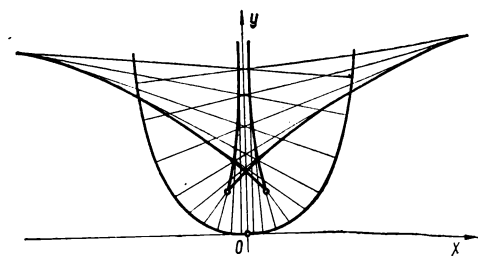


Рис. 138

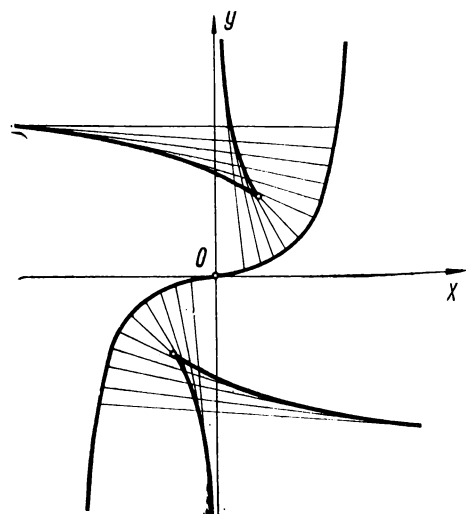


Рис. 139

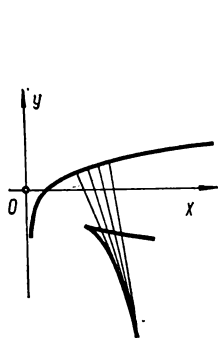


Рис. 140

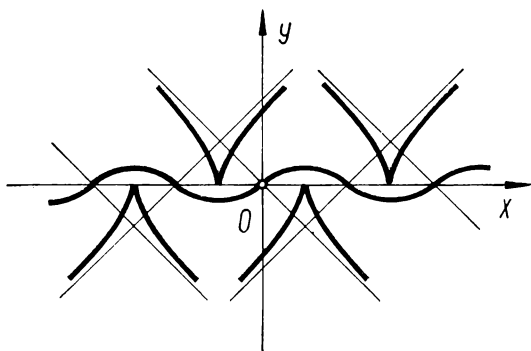


Рис. 141

$$Y = \operatorname{tg} x + \frac{1 + \cos^4 x}{\sin 2x}, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \quad (\text{рис. 142}).$$

$$433. \quad X = a \ln \operatorname{tg} \frac{t}{2}, \quad Y = \frac{a}{\sin t} \quad \text{или} \quad Y = a \operatorname{ch} \frac{X}{a} \quad (\text{рис. 143}).$$

$$434. \quad X = \frac{a}{3} (\cos \varphi - \cos^2 \varphi + 2), \quad Y = \frac{a}{3} \sin \varphi (1 - \cos \varphi).$$

Это кардиоида (рис. 144). Для доказательства достаточно произвести замену параметра  $\varphi = \pi - t$  и преобразование координат по формулам:

$$X' = -\left(X - \frac{2}{3}a\right), \quad Y' = Y.$$

435. Рис. 145.

436. Рис. 146.

437. Рис. 147.

$$438. \quad \ln a = a^{\frac{\pi}{2}}.$$

439.  $X = a [\cos t + (t - C) \sin t]$ ,  $Y = a [\sin t - (t - C) \cos t]$ , где  $C$  — параметр семейства эвольвент (рис. 148).

440.  $X = a \left( \ln \operatorname{tg} \frac{t}{2} + \cos t \right)$ ,  $Y = a \sin t$  — трактриса (см. рис. 143).

$$441. \quad X = \frac{t}{2} + \frac{2}{\sqrt{t^2 + 4}} [C - \ln(t + \sqrt{t^2 + 4})],$$

$$Y = \frac{t}{\sqrt{t^2 + 4}} [C - \ln(t + \sqrt{t^2 + 4})].$$

442.  $s = 6a$ . У к а з а н и е. Воспользоваться следующим свойством эволюты: если радиус кривизны линии меняется монотонно, то длина дуги эволюты между двумя ее точками равна разности значений радиуса кривизны исходной линии в этих точках.

443.  $s = 8a$ .

444.

$$445. \quad (27s + 8)^2 = \left[ 4 + 9 \frac{36R^2}{(27s + 8)^2} \right]^3.$$

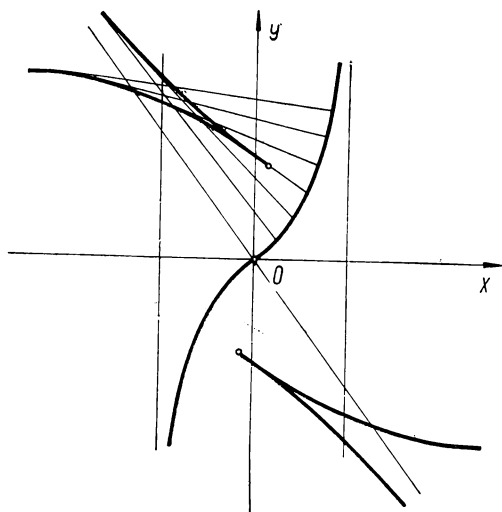


Рис. 142

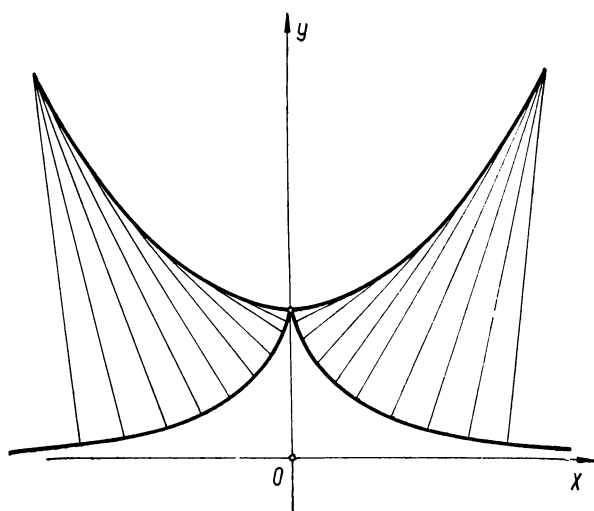


Рис. 143



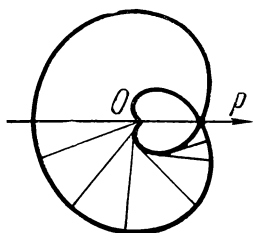


Рис. 144

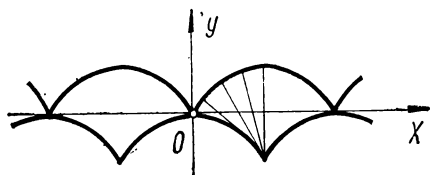


Рис. 145

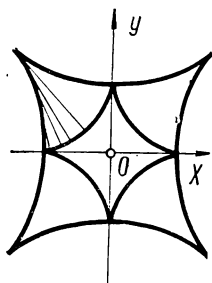


Рис. 146

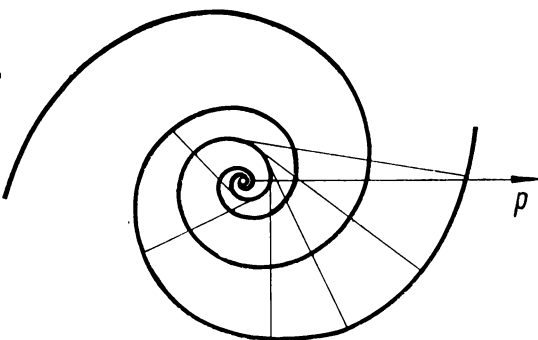


Рис. 147

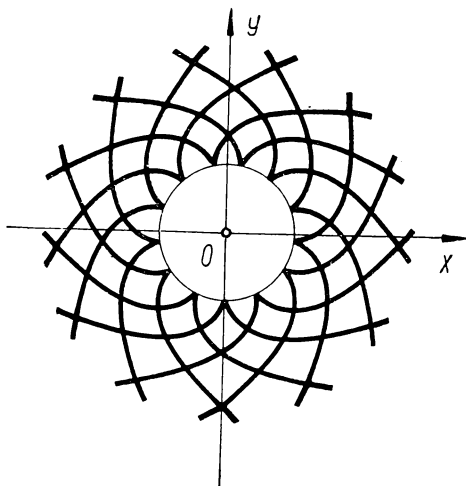


Рис. 148

446.  $s = \sec \alpha + \ln \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ ,  $k = \sin \alpha \cos^2 \alpha$ , где  $\operatorname{tg} \alpha = x$ .

447.  $R^2 = 2as$ .

448.  $R^2 + a^2 = a^2 e^{-\frac{2s}{a}}$ .

449.  $s^2 + 9R^2 = 16a^2$ .

450. Окружность радиуса  $\frac{1}{a}$ , если  $a \neq 0$ , и прямая, если  $a = 0$ .

451. Логарифмическая спираль.

452. Полагаем  $s = \operatorname{tg} \alpha$ . Тогда

$$x = \frac{a}{2} \ln \frac{1 + \sin \alpha}{1 - \sin \alpha}, \quad y = \frac{a}{\cos \alpha};$$

отсюда

$$y = \frac{a}{2} \left( e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right) = a \operatorname{ch} \frac{x}{a} -$$

цепная линия.

453.  $x = a(2t + \sin 2t)$ ,  $y = a(2 - \cos 2t)$  — циклоида.

454.  $s = a \sin t$ ,  $R = b \cos t$ ,  $\alpha = \frac{at}{b}$ .

Параметрические уравнения линии

$$x = \frac{a}{2} \left[ \frac{b}{a+b} \sin \left( \frac{a+b}{b} t \right) + \frac{b}{a-b} \sin \left( \frac{a-b}{b} t \right) \right],$$

$$y = -\frac{a}{2} \left[ \frac{b}{a+b} \cos \left( \frac{a+b}{b} t \right) + \frac{b}{a-b} \cos \left( \frac{a-b}{b} t \right) \right].$$

Это эпициклоида.

456. Натуральное уравнение логарифмической спирали есть  $R = s \ln a$ . Искомая линия есть полупрямая, исходящая из начала координат и наклоненная к оси  $Ox$  под углом, тангенс которого равен  $\ln a$ .

460.  $x = -\frac{a}{2 \sin^2 \alpha}$ ,  $y = -a \operatorname{ctg} \alpha$  — парабола.

461.  $x = \frac{a}{2} e^{\alpha} (\cos \alpha + \sin \alpha)$ ,  $y = \frac{a}{2} e^{\alpha} (\cos \alpha - \sin \alpha)$  — логарифмическая спираль.

462.  $x = a(\alpha \sin \alpha + \cos \alpha)$ ,  $y = a(\sin \alpha - \alpha \cos \alpha)$  — эвольвента окружности.

463.  $x = a \ln \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2} \right), \quad y = \frac{a}{\cos \alpha}$  — цепная линия.

464.  $x = -\frac{a}{4} (1 - \cos 2\alpha), \quad y = -\frac{a}{4} (2\alpha - \sin 2\alpha)$  — циклоида.

465.  $\bar{R} = \bar{r} - [(\bar{r} - \bar{r}_0, \bar{r}') : \bar{r}'^2] \bar{r}'$ .

466. Спираль Архимеда

$$r = a \left( \varphi + \frac{\pi}{2} \right).$$

467. Четырехлепестковая роза

$$(x^2 + y^2)^3 = \frac{a^2}{4} (x^2 - y^2).$$

468. Циссоида Диоклеса

$$y^2 = -\frac{x^3}{2p+x}.$$

469. Лемниската

$$a^2 x^2 + b^2 y^2 = (x^2 + y^2)^2.$$

470. Кардиоида

$$(x^2 + y^2 - ax)^2 = a^2 (x^2 + y^2).$$

471.  $2(2p+x)^3 = 27p(x^2 + y^2).$

472. Эпициклоида

$$x = \frac{a}{4} (3 \cos t - \cos 3t), \quad y = \frac{a}{4} (3 \sin t - \sin 3t),$$

которая получается при качении окружности радиуса  $\frac{a}{4}$  по окружности

$$x^2 + y^2 = \frac{a^2}{4}.$$

473. Улитка Паскаля

$$(x^2 + y^2 - 2ax)^2 + \frac{4a^2}{3} \left( x^2 + y^2 - \frac{16ax}{9} \right) = 0.$$

474.  $54py^2 = x(2x - 9p)^2.$

475. Луч, вершина которого лежит на данной прямой и который наклонен к ней под углом  $\alpha = \frac{\pi}{2} - \mu$ , где  $\mu$  — угол между касательной и радиус-вектором, проведенным в точку касания.

476. Цепная линия

$$y = \frac{p}{2} \operatorname{ch} \frac{2x}{p}.$$

477. Если оси координат выбрать так, как указано на рис. 149, то параметрические уравнения нужной нам циклоиды запишутся в виде

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t).$$

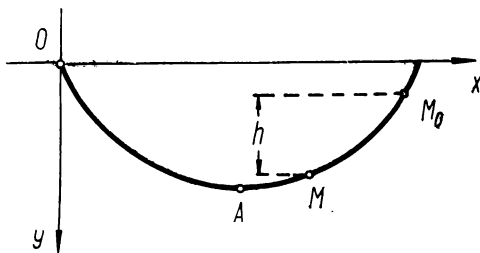


Рис. 149

Скорость падающего тела определяется по формуле  $v = \sqrt{2gh}$ . В нашей задаче

$$h = y - y_0 = a(\cos t_0 - \cos t),$$

где  $t_0$  и  $t$  соответствуют точкам  $M_0$  и  $M$ . Поэтому

$$v = \sqrt{2ga(\cos t_0 - \cos t)}.$$

Но скорость  $v$  есть производная пути  $s$  по времени  $T$ :

$$v = \frac{ds}{dT}.$$

Замечая, что для циклоиды

$$ds = 2a \sin \frac{t}{2} dt,$$

получаем дифференциальное уравнение для определения времени  $T$ :

$$\frac{dT}{dt} = \frac{2a \sin \frac{t}{2}}{\sqrt{2ga(\cos t_0 - \cos t)}}.$$

Интегрируя его, находим время  $T$ , затрачиваемое материальной точкой на перемещение из  $M_0$  в  $A$ ,

$$T = \int_{t_0}^{\pi} \frac{2a \sin \frac{t}{2} dt}{\sqrt{2ga(\cos t_0 - \cos t)}} =$$

$$= -2 \sqrt{\frac{a}{g}} \int_{t_0}^{\pi} \frac{d \cos \frac{t}{2}}{\sqrt{\cos^2 \frac{t_0}{2} - \cos^2 \frac{t}{2}}} = \pi \sqrt{\frac{a}{g}},$$

что и требовалось доказать.

478. Диаметр равен радиусу кривизны для той точки логарифмической спирали, радиус-вектор которой равен  $A\Theta$ .

479.  $s = 4 \frac{a^3 - b^3}{ab}.$

480.  $R = \rho \frac{d\rho}{d\sigma}, \quad s = \rho.$

481. Натуральное уравнение эволюты

$$4\sigma^3 = a(4\sigma^2 + \rho^2);$$

натуральное уравнение эвольвенты

$$a^2 + \rho_1^2 = C e^{\frac{2\sigma_1}{a}} -$$

трактриса.

У к а з а н и е. Воспользоваться результатом задачи 480.

482.  $k^* = \frac{|k + k^3 + k'|}{(1 + k^2)^{3/2}}.$

483.  $e^{\frac{x+C_1}{a}} = \sin \frac{y+C_2}{a},$  где  $C_1$  и  $C_2$  — произвольные постоянные.

484.  $x = a \cos t, \quad y = a \sin t, \quad z = bt$  (рис. 150). Проекция:

$$1) \quad x^2 + y^2 = a^2; \quad 2) \quad y = a \sin \frac{z}{b}; \quad 3) \quad x = a \cos \frac{z}{b}.$$

485.  $x = a \cos \varphi, \quad y = a \sin \varphi, \quad z = b e^{k\varphi}.$

486. Выбирая соответствующим образом систему координат, уравнения линии Вивiani (рис. 151) запишем в виде

$$\left. \begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= R^2, \\ x^2 + y^2 - Rx &= 0. \end{aligned} \right\}$$

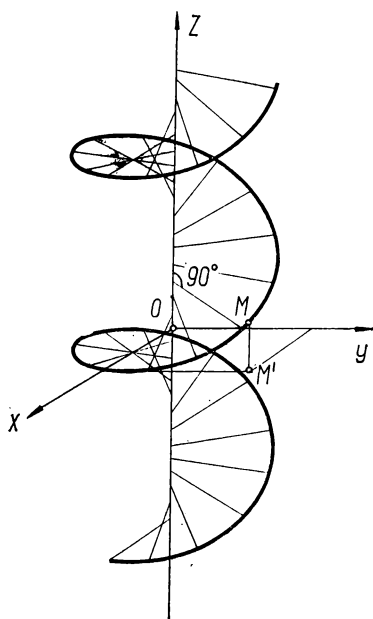


Рис. 150

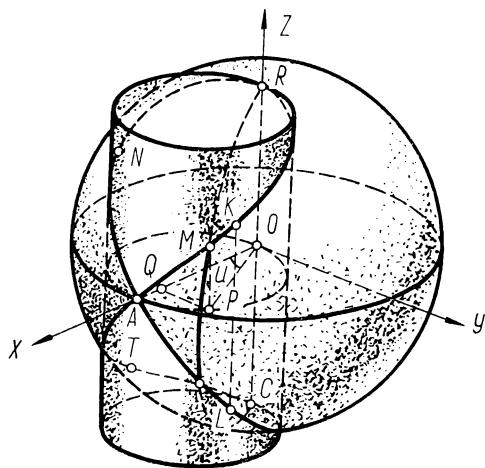


Рис. 151

Принимая за параметр  $u$  долготу точки  $M$  на сфере, из треугольников  $AOP$ ,  $OPM$  и  $OPQ$  находим

$$x = R \cos^2 u, \quad y = R \cos u \sin u, \quad z = \pm R \sin u.$$

Введя новый параметр  $u'$ , можно получить

$$x = R \cos^2 u', \quad y = R \cos u' \sin u', \quad z = R \sin u'.$$

Возможны и другие параметрические уравнения. В частности, переписывая уравнение

$$x^2 + y^2 - Rx = 0$$

в виде

$$\left(x - \frac{R}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{R^2}{4}$$

и полагая

$$x - \frac{R}{2} = \frac{R}{2} \cos t, \quad y = \frac{R}{2} \sin t,$$

получим

$$x = \frac{R}{2} (1 + \cos t), \quad y = \frac{R}{2} \sin t, \quad z = R \sin \frac{t}{2}.$$

487. 1) Введя полярную систему координат, положение точки  $M$  определим ее расстоянием  $r$  от точки  $O$ , широтой  $\psi = \angle POL$  и долготой  $\varphi = \angle xOP$  (рис. 152). По условию  $\psi = \frac{\pi}{2} - \lambda$ , где

$\lambda = \angle zOL$ , а  $\varphi = \omega t$ . Определяя  $r$  из условия  $\frac{dr}{dt} = mr$  и подставляя найденное значение  $r = r_0 e^{mt}$  в уравнения

$$\left. \begin{aligned} x &= r \cos \psi \cos \varphi, \\ y &= r \cos \psi \sin \varphi, \\ z &= r \sin \psi, \end{aligned} \right\}$$

получим

$$x = a e^{h\varphi} \cos \varphi, \quad y = a e^{h\varphi} \sin \varphi, \quad z = b e^{h\varphi},$$

где  $k = \frac{m}{\omega}$ ,  $a = r_0 \sin \lambda$ ,  $b = r_0 \cos \lambda$ ;

$$2) \quad x = at \cos t, \quad y = at \sin t, \quad z = bt.$$

488.  $\left. \begin{aligned} x^2 + z^2 &= a^2, \\ y^2 + z^2 &= b^2, \\ x &= a \cos t, \\ y &= \pm \sqrt{b^2 - a^2 \sin^2 t}, \\ z &= a \sin t. \end{aligned} \right\}$

При  $a = b$  получаем два эллипса (рис. 153).

489. У к а з а н и е. Исключить параметр  $t$ .

490.  $y = x^2$ ,  $z = 0$ ;  $z = x^3$ ,  $y = 0$ ;  $z^2 = y^3$ ,  $x = 0$ .

491.  $x^2 - y^2 = a^2$ ,  $z = 0$ ;  $x = a \operatorname{ch} \frac{z}{c}$ ,  $y = 0$ ;  $y = a \operatorname{sh} \frac{z}{c}$ ,  $x = 0$ .

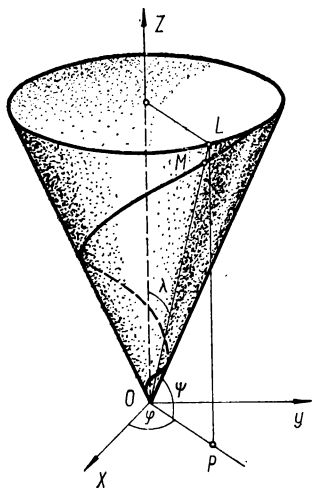


Рис. 152

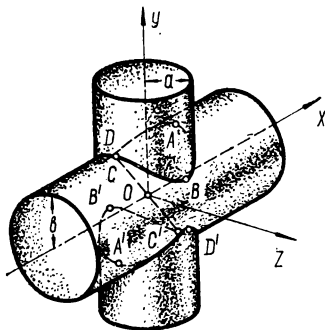


Рис. 153

492.  $x^2 - y^2 - x - y + 1 = 0$ ,  $z = 0$ .

У к а з а н и е. Исключить  $z$  из данных уравнений.

493.  $y^2 + z^2 - 2y + 4z - 4 = 0$ ,  $x = 0$ .

495.  $a = 2$ ,  $b = \sqrt{2}$ .

496.  $x^2 + z^2 + xz + 2x + 2z + 1 = 0$ ,  $y = 0$ .

497.  $z^2 + y^2 = b^2$ ,  $x = 0$ ;  $y^2(a^2 + x^2) = a^2b^2$ ,  $z = 0$ ;  
 $z^2(a^2 + x^2) = b^2x^2$ ,  $y = 0$ .

498. На плоскость  $yOz$

$$\bar{\rho}_1 = \bar{r} - (\bar{r} \bar{i}) \bar{i},$$

на плоскость  $xOz$

$$\bar{\rho}_2 = \bar{r} - (\bar{r} \bar{j}) \bar{j},$$

на плоскость  $xOy$

$$\bar{\rho}_3 = \bar{r} - (\bar{r} \bar{k}) \bar{k}.$$

500. Например,

$$y = x^2, \quad z = e^x.$$



501. Уравнения искоемых цилиндров

$$x^2 + (y-1)^2 = 1 \quad \text{и} \quad \frac{y}{2} + \left(\frac{z}{2}\right)^2 = 1.$$

504.  $R = \frac{1}{2}.$

506. Прямые

$$x=y, \quad z=1; \quad x=-y, \quad z=1; \quad x=y, \quad z=-1; \\ x=-y, \quad z=-1.$$

507. 
$$\frac{x-\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-\frac{\pi}{4}}{a}.$$

508. 
$$\frac{x-e}{e} = \frac{y-e^{-1}}{-e^{-1}} = \frac{z-1}{2}.$$

509.  $x=y+1=z.$

510.  $x=y = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} z; \quad \varphi = \frac{\pi}{4}.$

511.  $M_1(-2, 12, 14), \quad M_2(-4, 3, -4).$

512. 
$$\left. \begin{array}{l} x=2, \\ 2y-z=0, \end{array} \right\} y+2z=0.$$

513. 
$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3}; \quad x+2y+3z-5=0. \quad \text{В пересечении касательных с плоскостью } xOy \text{ получается парабола } y = \frac{3}{4}x^2.$$

514.  $x^2+y^2=2a^2.$

515. 
$$\frac{X-a \operatorname{ch} t}{a \operatorname{sh} t} = \frac{Y-a \operatorname{sh} t}{a \operatorname{ch} t} = \frac{Z-ct}{c}.$$

517. 
$$\frac{X-x}{2yz} = \frac{Y-y}{z(a-2x)} = \frac{Z-z}{-ay}; \quad 2yzX+z(a-2x)Y-ayZ=0.$$

518. Запишем уравнения линии Вивiani (см. задачу 486) в виде  $x=a \cos^2 u, \quad y=a \cos u \sin u, \quad z=a \sin u.$ 

Очевидно,

$$dx:dy:dz = -\sin 2u:\cos 2u:\cos u.$$

Искомый угол определится формулой

$$\cos^2 \gamma = \frac{\cos^2 u}{1+\cos^2 u}.$$

Наименьшее абсолютное значение угла  $\gamma$  соответствует наименьшему значению дроби  $\frac{\cos^2 u}{1 + \cos^2 u}$ , т. е. наименьшему значению величины

$$\frac{1 + \cos^2 u}{\cos^2 u} = \frac{1}{\cos^2 u} + 1.$$

Оно достигается при  $\cos^2 u = 1$ , т. е. при  $u = 0$  и  $u = 180^\circ$ . В обоих случаях получается одна и та же точка  $A(0, 0, 0)$ , через которую линия Виннани проходит дважды (см. рис. 151).

При  $u = 0$  имеем  $\cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{2}}$ , откуда  $\gamma = 45^\circ$ ; при  $u = 180^\circ$

$$\cos \gamma = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \text{ откуда } \gamma = -45^\circ.$$

519. Окружность

$$x^2 + y^2 = \frac{a^2}{a^2 + b^2}, \quad z = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

(уравнения винтовой линии взяты в виде

$$x = a \cos t, \quad y = a \sin t, \quad z = bt).$$

521. Пусть

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t) —$$

параметрические уравнения линии. Справедливы тождества:

$$F\{x(t), y(t), z(t)\} \equiv 0,$$

$$\Phi\{x(t), y(t), z(t)\} \equiv 0,$$

откуда получаем

$$\frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial z} dz = 0,$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \Phi}{\partial z} dz = 0,$$

Эти соотношения определяют отношения дифференциалов в виде

$$\begin{array}{c|c} dx & dy \\ \hline \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \hline \frac{\partial \Phi}{\partial y} & \frac{\partial \Phi}{\partial z} \end{array} = \begin{array}{c|c} dy & dz \\ \hline \frac{\partial F}{\partial z} & \frac{\partial F}{\partial x} \\ \hline \frac{\partial \Phi}{\partial z} & \frac{\partial \Phi}{\partial x} \end{array} = \begin{array}{c|c} dz & dx \\ \hline \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \hline \frac{\partial \Phi}{\partial x} & \frac{\partial \Phi}{\partial y} \end{array}.$$

Таким образом, уравнения касательной принимают вид

$$\frac{X-x}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} & \frac{\partial \Phi}{\partial z} \end{vmatrix}} = \frac{Y-y}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial z} & \frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial z} & \frac{\partial \Phi}{\partial x} \end{vmatrix}} = \frac{Z-z}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x} & \frac{\partial \Phi}{\partial y} \end{vmatrix}},$$

а уравнение нормальной плоскости —

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} & \frac{\partial \Phi}{\partial z} \end{vmatrix} (X-x) + \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial z} & \frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial z} & \frac{\partial \Phi}{\partial x} \end{vmatrix} (Y-y) + \\ + \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x} & \frac{\partial \Phi}{\partial y} \end{vmatrix} (Z-z) = 0$$

или

$$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x} & \frac{\partial \Phi}{\partial y} & \frac{\partial \Phi}{\partial z} \end{vmatrix} = 0.$$

$$522. \quad \frac{X-x}{ay} = \frac{Y-y}{bx} = \frac{Z-z}{xy};$$

$$(X-x)ay + (Y-y)bx + (Z-z)xy = 0.$$

$$523. \quad z(X-x) + x(Z-z) = 0.$$

$$524. \quad \frac{X}{x} - \frac{Y}{y} + \frac{Z}{z} = 1.$$

$$528. \quad 3x+3y+z+1=0, \quad 3x-3y+z-1=0, \quad 108x-18y+z-216=0.$$

$$530. \quad 4(X \cos t - Y \sin t) - 3Z = \cos 2t.$$

$$531. \quad -aX + Z = 0.$$

$$532. \quad bX + aY + abZ = 2ab.$$

$$533. \quad [X \sin(t-\alpha) - Y \cos(t-\alpha)] \sin \alpha + Z = t \sin \alpha + \cos \alpha.$$

$$534. \quad 4x - y + z - 9 = 0.$$

$$536. \quad \frac{x}{1} = \frac{y}{-4} = \frac{z-1}{-1} -$$

уравнения главной нормали,

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-2} -$$

уравнения бинормали.

$$537. \quad \frac{x-1}{11} = \frac{y-1}{8} = \frac{z-1}{-9} -$$

главная нормаль,

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z-1}{1} -$$

бинормаль.

$$538. \quad \frac{x-1}{31} = \frac{y-1}{26} = \frac{z-1}{-22} -$$

главная нормаль,

$$\frac{x-1}{6} = \frac{y-1}{-8} = \frac{z-1}{-1} -$$

бинормаль.

$$539. \quad \frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{4} -$$

главная нормаль,

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{-3} -$$

бинормаль.

$$541. \quad A(1, \ln 2, -4).$$

$$543. \quad \bar{t} = \frac{\bar{j} + \bar{k}}{\sqrt{2}}, \quad \bar{n} = \frac{2\bar{i} - \bar{j} + \bar{k}}{\sqrt{6}}, \quad \bar{b} = \frac{\bar{i} + \bar{j} - \bar{k}}{\sqrt{3}}.$$

$$544. \quad \bar{t} = -\bar{i} \frac{3}{5} \cos t + \bar{j} \frac{3}{5} \sin t - \frac{4}{5} \bar{k}, \quad \bar{n} = \bar{i} \sin t + \bar{j} \cos t, \\ \bar{b} = \bar{i} \frac{4}{5} \cos t - \bar{j} \frac{4}{5} \sin t - \frac{13}{5} \bar{k}.$$

$$545. \quad \bar{t} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \bar{i} \sin \frac{t}{2} + \bar{j} \cos \frac{t}{2} - \bar{k} \right) \quad \bar{n} = \bar{i} \cos \frac{t}{2} - \bar{j} \sin \frac{t}{2}, \\ \bar{b} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \left( \bar{i} \sin \frac{t}{2} + \bar{j} \cos \frac{t}{2} + \bar{k} \right).$$

$$546. \quad \bar{t} = \frac{1}{\sqrt{3}} [\bar{i}(\cos t - \sin t) + \bar{j}(\sin t + \cos t) + \bar{k}],$$

$$\bar{n} = \frac{1}{\sqrt{2}} [-\bar{i}(\sin t + \cos t) + \bar{j}(\cos t - \sin t)],$$

$$\bar{b} = \frac{1}{\sqrt{6}} [\bar{i}(\sin t - \cos t) - \bar{j}(\sin t + \cos t) + 2\bar{k}].$$

$$547. \quad \bar{t} = \frac{\bar{i} 2a^2 x^2 + \bar{j} 2x^4 - \bar{k} a^4}{2x^4 + a^4}$$

$$\bar{n} = \frac{\bar{i}(a^4 - 2x^4) + (\bar{j} + \bar{k}) 2a^2 x^2}{2x^4 + a^4}, \quad \bar{b} = \frac{\bar{i} 2a^2 x^2 - \bar{j} a^4 + \bar{k} 2x^4}{2x^4 + a^4}.$$

549. Касательная

$$\frac{X - a \cos t}{-a \sin t} = \frac{Y - a \sin t}{a \cos t} = \frac{Z - bt}{b}.$$

нормальная плоскость

$$a \sin t X - a \cos t Y - b Z + b^2 t = 0;$$

бинормаль

$$\frac{X - a \cos t}{b \sin t} = \frac{Y - a \sin t}{-b \cos t} = \frac{Z - bt}{a}.$$

соприкасающаяся плоскость

$$b \sin t X - b \cos t Y + aZ - abt = 0;$$

главная нормаль

$$\frac{X - a \cos t}{\cos t} = \frac{Y - a \sin t}{\sin t}, \quad Z = bt;$$

спрямляющая плоскость

$$X \cos t + Y \sin t - a = 0.$$

$$\bar{t} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} (-a \sin t \bar{i} + a \cos t \bar{j} + b \bar{k}), \quad \bar{n} = -\cos t \bar{i} - \sin t \bar{j},$$

$$\bar{b} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} (b \sin t \bar{i} - b \cos t \bar{j}).$$

550. Записывая параметрические уравнения линии в виде

$$x = \frac{a}{2} (1 + \cos t), \quad y = \frac{a}{2} \sin t, \quad z = a \sin \frac{t}{2}$$

(см. задачу 486), находим: касательная

$$\frac{X - \frac{a}{2}(1 + \cos t)}{-\sin t} = \frac{Y - \frac{a}{2} \sin t}{\cos t} = \frac{Z - a \sin \frac{t}{2}}{\cos \frac{t}{2}};$$

нормальная плоскость

$$X \sin t - Y \sin t - Z \cos \frac{t}{2} = 0;$$

бинормаль

$$\frac{X - \frac{a}{2}(1 + \cos t)}{\sin \frac{t}{2}(2 + \cos t)} = \frac{Y - \frac{a}{2} \sin t}{\cos \frac{t}{2}(1 + \cos t)} = \frac{Z - a \sin \frac{t}{2}}{2};$$

соприкасающаяся плоскость

$$\sin \frac{t}{2}(2 + \cos t)X - \cos \frac{t}{2}(1 + \cos t)Y + \\ + 2Z - \frac{a}{2} \sin \frac{t}{2}(5 + \cos t) = 0;$$

главная нормаль

$$\frac{X - \frac{a}{2}(1 + \cos t)}{\cos^2 \frac{t}{2}(1 + \cos t) - 2 \cos t} = \frac{Y - \frac{a}{2} \sin t}{-\frac{1}{2} \sin t(6 + \cos t)} = \\ = \frac{Z - a \sin \frac{t}{2}}{-\sin \frac{t}{2}};$$

спрямляющая плоскость

$$\left[ -\cos^2 \frac{t}{2}(1 + \cos t) - 2 \cos t \right] X - \frac{1}{2} \sin t(6 + \cos t) Y - \\ - \sin \frac{t}{2} Z + \frac{a}{4}(3 + \cos t)^2 = 0,$$

$$\bar{t} = \frac{-\sin t \bar{i} + \cos t \bar{j} + \cos \frac{t}{2} \bar{k}}{\sqrt{1 + \cos^2 \frac{t}{2}}},$$

$$\bar{b} = \sqrt{\frac{2}{13 + 3\cos t}} \left[ \sin \frac{t}{2} (2 + \cos t) \bar{i} - \cos \frac{t}{2} (1 + \cos t) \bar{j} + 2\bar{k} \right],$$

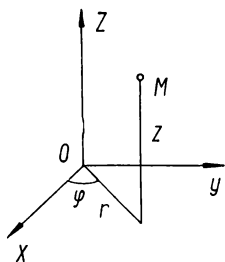


Рис. 154

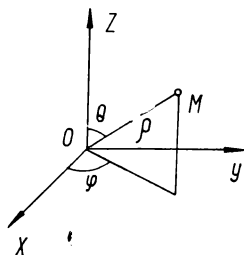


Рис. 155

$$\bar{n} = \frac{1}{\sqrt{Q}} \left\{ \left[ -\cos^2 \frac{t}{2} (1 + \cos t) - 2 \cos t \right] \bar{i} - \left[ \frac{1}{2} \sin t (6 + \cos t) \right] \bar{j} - \sin \frac{t}{2} \bar{k} \right\},$$

$$\text{где } Q = \left[ -\cos^2 \frac{t}{2} (1 + \cos t) - 2 \cos t \right]^2 + \frac{1}{4} \sin^2 t (6 + \cos t)^2 + \sin^2 \frac{t}{2}.$$

$$551. \quad \bar{\rho}_1 = \bar{r} - \frac{\bar{r} \cdot \bar{k}}{\bar{r} \cdot \bar{k}} \bar{r}, \quad \bar{\rho}_2 = \bar{r} - \frac{\bar{r} \cdot \bar{k}}{\bar{r} \cdot \bar{k}} \ddot{\bar{r}}, \quad \bar{\rho}_3 = \bar{r} - \frac{\bar{r} \cdot \bar{k}}{(\bar{k} \cdot \ddot{\bar{r}} \cdot \ddot{\bar{r}})} [\ddot{\bar{r}} \cdot \ddot{\bar{r}}].$$

$$552. \quad s = \sqrt{a^2 + b^2} t.$$

$$554. \quad X = a \cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad Y = a \sin \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad Z = \frac{bs}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

$$555. \quad s = 8a \sqrt{2}.$$

$$556. \quad s = 9a.$$

$$558. \quad s = a \sqrt{2} \operatorname{sh} t.$$

559.  $s=9, 9c.$

560.  $ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2 + dz^2.$

У к а з а н и е. Цилиндрические координаты  $r, \varphi, z$  связаны с декартовыми прямоугольными координатами  $x, y, z$  формулами

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = z \quad (\text{рис. 154}).$$

561.  $ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\Theta^2 + \rho^2 \sin^2 \Theta d\varphi^2.$

У к а з а н и е. Сферические координаты  $\rho, \Theta, \varphi$  связаны с декартовыми прямоугольными координатами  $x, y, z$  формулами  $x = \rho \sin \Theta \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \Theta \sin \varphi, \quad z = \rho \cos \Theta$

(рис. 155).

562. У к а з а н и е. Применяя формулы Френе

$$\dot{\bar{t}} = k\bar{n}, \quad \dot{\bar{n}} = -k\bar{t} + \chi\bar{b}, \quad \dot{\bar{b}} = -\chi\bar{n}$$

и принимая во внимание, что  $\dot{\bar{r}} = \bar{t}$ , находим

$$\ddot{\bar{r}} = k\bar{n}, \quad \ddot{\bar{r}} = \dot{\bar{t}} = (k\bar{n})' = -k^2\bar{t} + k\chi\bar{b} + \dot{k}\bar{n}.$$

563. 
$$\begin{aligned} \Delta \bar{t} &= \left( -\frac{k^2}{2} \Delta s^2 - \frac{k\dot{k}}{2} \Delta s^3 + \dots \right) \bar{t} + \\ &+ \left( k\Delta s + \frac{\dot{k}}{2} \Delta s^2 + \frac{\ddot{k} - k^3 - k\chi^2}{6} \Delta s^3 + \dots \right) \bar{n} + \\ &+ \left( \frac{k\chi}{2} \Delta s^2 + \frac{2\dot{k}\chi + k\dot{\chi}}{6} \Delta s^3 + \dots \right) \bar{b}, \\ \Delta \bar{n} &= \left( -k\Delta s - \frac{\dot{k}}{2} \Delta s^2 + \frac{k^3 - \ddot{k} + k^2\chi}{6} \Delta s^3 + \dots \right) \bar{t} + \\ &+ \left( -\frac{k^2 + \chi^2}{2} \Delta s^2 - \frac{k\dot{k} + \chi\dot{\chi}}{2} \Delta s^3 + \dots \right) \bar{n} + \\ &+ \left( \chi\Delta s + \frac{\dot{\chi}}{2} \Delta s^2 + \frac{\ddot{\chi} - k^2\chi - \chi^3}{6} \Delta s^3 + \dots \right) \bar{b}, \\ \Delta \bar{b} &= \left( \frac{k\chi}{2} \Delta s^2 + \frac{\dot{k}\chi + 2\dot{\chi}k}{6} \Delta s^3 + \dots \right) \bar{t} + \\ &+ \left( -\chi\Delta s - \frac{\dot{\chi}}{2} \Delta s^2 + \frac{k^2\chi - \ddot{\chi} + \chi^3}{6} \Delta s^3 + \dots \right) \bar{n} + \\ &+ \left( -\frac{\chi^2}{2} \Delta s^2 + \frac{\chi\dot{\chi}}{2} \Delta s^3 + \dots \right) \bar{b}. \end{aligned}$$



У к а з а н и е. В выражения

$$\Delta \bar{t} = \frac{\Delta s}{1} \frac{d\bar{t}}{ds} + \frac{\Delta s^2}{2} \frac{d^2 \bar{t}}{ds^2} + \frac{\Delta s^3}{6} \frac{d^3 \bar{t}}{ds^3} + \dots,$$

$$\Delta \bar{n} = \frac{\Delta s}{1} \frac{d\bar{n}}{ds} + \frac{\Delta s^2}{2} \frac{d^2 \bar{n}}{ds^2} + \frac{\Delta s^3}{6} \frac{d^3 \bar{n}}{ds^3} + \dots,$$

$$\Delta \bar{b} = \frac{\Delta s}{1} \frac{d\bar{b}}{ds} + \frac{\Delta s^2}{2} \frac{d^2 \bar{b}}{ds^2} + \frac{\Delta s^3}{6} \frac{d^3 \bar{b}}{ds^3} + \dots$$

подставить производные векторов  $\bar{t}$ ,  $\bar{n}$ ,  $\bar{b}$ , вычислив их с помощью формул Френе.

564. Записывая искомый вектор в виде

$$\bar{\omega} = a\bar{t} + b\bar{n} + c\bar{b}$$

и используя условие задачи, найдем

$$\bar{\omega} = \chi \bar{t} + k \bar{b}.$$

Вектор  $\bar{\omega}$  есть вектор мгновенной угловой скорости репера Френе при движении точки по линии со скоростью, равной единице.

$$571. \quad k = \frac{a}{a^2 + b^2}, \quad \chi = \frac{b}{a^2 + b^2}.$$

$$572. \quad k = \frac{2}{1 + a^2}.$$

$$573. \quad k = \chi = \frac{1}{2a \operatorname{ch}^2 t}.$$

$$574. \quad k = -\chi = \frac{\sqrt{2}}{(e^t + e^{-t})^2}.$$

$$575. \quad k = -\chi = \frac{2t}{(1 + 2t^2)^2}.$$

$$576. \quad k = \frac{3}{25 \sin t \cos t}, \quad \chi = \frac{4}{25 \sin t \cos t}.$$

577. У к а з а н и е. Написать параметрические уравнения, приняв  $y$  за параметр,

$$k = \frac{2\sqrt{1+36y^4+64y^8}}{\sqrt{(1+4y^2+16y^4)^3}}, \quad \chi = \frac{-12y}{1+36y^4+64y^8}.$$

$$578. \quad \frac{1}{k} = \frac{1}{\chi} = \frac{x}{2} \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{a^2}{2x^2} \right)^2.$$

$$579. \quad a=b.$$

580. Точки, соответствующие значениям параметра

$$t = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

581. Точки, соответствующие значениям параметра

$$t = 2k\pi \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

$$583. \quad x - 4y - 2z + 3 = 0.$$

$$\begin{array}{l} 584, \\ 585. \end{array} \quad \begin{vmatrix} x-c_1 & y-c_2 & z-c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0.$$

$$586. \quad \frac{x}{\sqrt{a}} + \frac{y}{\sqrt{b}} = 0, \quad \frac{x}{\sqrt{a}} - \frac{y}{\sqrt{b}} = 0.$$

$$587. \quad f(t) = c_1 + c_2 \sin t + c_3 \cos t.$$

588. а) Пусть  $\bar{a}$  — единичный вектор фиксированного направления. Тогда

$$\bar{a} \bar{t} = \cos v \quad (v = \text{const}). \quad (*)$$

Дифференцируем равенство (\*) по  $s$

$$\bar{a} \dot{\bar{t}} = 0.$$

Следовательно,  $k \bar{a} \bar{n} = 0$ . Исключая случай, когда  $k \equiv 0$  (прямые), получим

$$\bar{a} \bar{n} = 0. \quad (**)$$

Следовательно, главные нормали перпендикулярны фиксированному направлению.

Обратно, если вектор  $\bar{n}$  в текущей точке перпендикулярен фиксированному направлению, то верно равенство (\*).

б) Предполагая  $\chi \neq 0$  и учитывая третью формулу Френе, получим из (\*\*)

$$\bar{a} \dot{\bar{b}} = 0,$$

откуда

$$\bar{a} \bar{b} = \text{const}. \quad (***)$$

Обратно, дифференцируя (\*\*\*), получим (\*\*).

в) Дифференцируя (\*\*), получим

$$k \bar{a} \bar{t} = \chi \bar{a} \bar{b},$$

откуда

$$\frac{k}{\chi} = \frac{\bar{a} \bar{b}}{\bar{a} \bar{t}} = \text{const.}$$

Обратно, из первой и третьей формулы Френе следует

$$\frac{\bar{t}}{k} + \frac{\bar{b}}{\chi} = 0,$$

откуда

$$\frac{\chi}{k} \bar{t} + \bar{b} = 0, \quad \frac{\chi}{k} \bar{t} + \bar{b} = \text{const} = \bar{p}.$$

Умножая скалярно на  $\bar{n}$ , получим  $(\bar{p} \bar{n}) = 0$ . Следовательно, выполняется условие (\*\*).

589. У к а з а н и е.

$$\left( \ddot{\bar{r}} \ddot{\bar{r}} \ddot{\bar{r}}^{(4)} \right) = k^5 \left( \frac{\chi}{k} \right).$$

и далее воспользоваться задачей 588.

592. Пусть  $\{1, u, v\}$  — фиксированное направление. Угол его с касательной к линии будет

$$\cos \varphi = \frac{a + 2btu + 3ct^2v}{\sqrt{1+u^2+v^2} \cdot \sqrt{a^2+4b^2t^2+9c^2t^4}}.$$

Условие независимости  $\varphi$  от  $t$  состоит в том, что дробь

$$\begin{aligned} & \frac{(3cvt^2 + 2but + a)^2}{9c^2t^4 + 4b^2t^2 + a^2} = \\ & = \frac{9c^2v^2t^4 + 12bcuvt^3 + 2(2b^2u^2 + 3acv)t^2 + 4abut + a^2}{9c^2t^4 + 4b^2t^2 + a^2} \end{aligned}$$

не зависит от  $t$ . Для этого достаточно, чтобы

$$4abu = 0, \quad 12bcuv = 0, \quad \frac{9c^2v^2}{9c^2} = \frac{2(2b^2u^2 + 3acv)}{4b^2} = \frac{a^2}{a^2}$$

откуда

$$u = 0, \quad v^2 = 1, \quad 2b^2 = \pm 3ac.$$

593. У к а з а н и е. В этом случае  $\bar{e} \bar{t} = 0$ . Продифференцировать это соотношение и воспользоваться формулами Френе.

595. Пусть  $\bar{r} = \bar{r}(s)$  — уравнение одной из линий. Тогда уравнение другой  $\bar{\rho} = \bar{r} + \lambda \bar{b}$ . Находим

$$\bar{\rho}' = \bar{t} + \lambda \bar{b}' - \lambda \chi \bar{n}.$$

Так как бинормаль линии  $\bar{\rho} = \bar{\rho}(s)$  имеет также направление вектора  $\bar{b}$ , то  $\bar{b} \perp \bar{\rho}'$  и, значит,  $\bar{b} \bar{\rho}' = 0$ , откуда

$$\lambda = \text{const}, \quad \bar{\rho}' = \bar{t} - \lambda \chi \bar{n}.$$

Находим

$$\bar{\rho}'' = k \bar{n} - \lambda \dot{\chi} \bar{n} - \lambda \chi (-k \bar{t} + \chi \bar{b}).$$

Так как  $\bar{\rho}'' \perp \bar{b}$ , то  $\bar{\rho}'' \bar{b} = 0$ , откуда  $\lambda \chi^2 = 0$ , т. е.  $\chi = 0$  ( $\lambda \neq 0$ , ибо в противном случае линии  $\bar{r} = \bar{r}(s)$  и  $\bar{\rho} = \bar{\rho}(s)$  совпадали бы).

597. Уравнения линий можно записать в виде

$$\bar{r} = \bar{r}(s), \quad \bar{\rho} = \bar{r} + \lambda \bar{n}. \quad (*)$$

Из условия  $\bar{\rho}' \perp \bar{n}$  находим, что  $\lambda = \text{const}$ , из условия компланарности векторов  $\bar{\rho}'$ ,  $\bar{\rho}''$ ,  $\bar{n}$  получаем

$$\dot{\chi} + \lambda (\dot{k} \chi - k \dot{\chi}) = 0.$$

Разделим последнее равенство на  $\chi^2$ :

$$\left( -\frac{1}{\chi} \right)' + \lambda \left( \frac{k}{\chi} \right)' = 0, \quad (**)$$

$$-\frac{1}{\chi} + \lambda \frac{k}{\chi} = -\mu,$$

откуда

$$\lambda k + \mu \chi = 1. \quad (***)$$

Обратно. Из (\*\*\*) следует (\*\*). Подставляя значение  $\lambda$  из (\*\*) в (\*), получим уравнение искомой линии.

601. По условию

$$\bar{t}^* = \bar{t}.$$

Дифференцируя это равенство по  $s$ , получим

$$k^* \bar{n}^* \frac{ds^*}{ds} = k \bar{n}.$$

Но так как  $\bar{n}^* = \bar{n}$ , то

$$k^* \frac{ds^*}{ds} = k. \quad (*)$$

Далее, дифференцируя по  $s$  равенство  $\bar{b}^* = \bar{b}$ , получим

$$-\chi^* n^* \frac{ds^*}{ds} = -\chi n,$$

откуда

$$\chi^* \frac{ds^*}{ds} = \chi. \quad (**)$$

Наконец, сравнивая (\*) и (\*\*), находим искомые соотношения

$$\frac{k^*}{k} = \frac{ds}{ds^*} = \frac{\chi^*}{\chi}.$$

602.  $k^* = \frac{\sqrt{k^2 + \chi^2}}{|sk|}, \quad \chi^* = \frac{\chi^2}{sk(k^2 + \chi^2)} \left( \frac{k}{\chi} \right).$  Если  $\frac{k}{\chi} = \text{const}$ , то  $\chi^* = 0$ .

603.  $k = \frac{\sqrt{y''^2 + z''^2 + (y'z'' - y''z')^2}}{(1 + y'^2 + z'^2)^{3/2}}, \quad \chi = \frac{y''z''' - y'''z''}{y''^2 + z''^2 + (y'z'' - y''z')^2},$

$$\bar{t} = \frac{\bar{i} + y'\bar{j} + z'\bar{k}}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}}, \quad \bar{n} = \frac{(y'z'' - y''z')\bar{i} - z''\bar{j} + y''\bar{k}}{\sqrt{y''^2 + z''^2 + (y'z'' - y''z')^2}},$$

$$b = \frac{(-z'z'' - y'y'')\bar{i} + [y'' - z'(y'z'' - y''z')]\bar{j} + [y'(y'z'' - y''z') + z'']\bar{k}}{\sqrt{(z'z'' + y'y'')^2 + [y'' - z'(y'z'' - y''z')]^2 + [z'' + y'(y'z'' - y''z')]^2}}.$$

605.  $x = \frac{k}{k^2 + \chi^2} \cos \varphi, \quad y = \frac{k}{k^2 + \chi^2} \sin \varphi, \quad z = \frac{\chi}{k^2 + \chi^2} \varphi.$

606. Кривизна и кручение винтовой линии постоянны, следовательно, существует бесконечное число пар значений  $\lambda$  и  $\mu$ , при которых  $\lambda k + \mu \chi = 1$ . Им соответствуют винтовые линии, лежащие на цилиндрах, коаксиальных данному.

Обратно. Пусть линии Бертрана  $C$  соответствуют две линии, имеющие с данной общие главные нормали. Тогда

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 k + \mu_1 \chi &= 1, \\ \lambda_2 k + \mu_2 \chi &= 1, \end{aligned} \right\} \quad (*)$$

где  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  и, следовательно,  $\mu_1 \neq \mu_2$ . Не может быть  $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2}$ ,

ибо тогда из (\*) следовало бы  $\lambda_1 = \lambda_2, \mu_1 = \mu_2$ . Следовательно,

$\begin{vmatrix} \lambda_1 & \mu_1 \\ \lambda_2 & \mu_2 \end{vmatrix} \neq 0$  и из соотношений (\*) мы получим определенные

значения  $k$  и  $\chi$  (постоянные), т. е. линия является винтовой линией.

$$607. \quad k = \chi = \frac{a}{2a^2 + s^2}.$$

$$608. \quad k = \chi = \frac{c\sqrt{2}}{4c^2 + s^2}.$$

610. Необходимым и достаточным условием соприкосновения второго порядка является совпадение кривизн и сопровождающих трехгранников линий в их общей точке.

611. Обратное не верно, так как в выражение вектора  $\vec{r}$  входит  $\chi$ .

612. Так как расстояние между двумя точками линии эквивалентно длине дуги  $\Delta s$  между ними, то задача сводится к определению кратчайшего расстояния между прямыми

$$\bar{\rho} = \bar{r}(s) + \bar{l}(s)\lambda,$$

$$\bar{\rho} = \bar{r}(s + \Delta s) + \bar{l}(s + \Delta s)\lambda,$$

где  $\bar{l}(s)$  последовательно равен  $\bar{t}$ ,  $\bar{n}$ ,  $\bar{b}$ .

Кратчайшее расстояние определяется по формуле

$$d_{\min} = \frac{(\bar{r}(s + \Delta s) - \bar{r}(s), \bar{e}(s), \bar{e}(s + \Delta s))}{\sqrt{[\bar{e}(s), \bar{e}(s + \Delta s)]^2}}.$$

При  $\bar{e} = \bar{t}$

$$d_1 = \frac{(\Delta \bar{r}, \bar{t}(s), \bar{t}(s + \Delta s))}{\sqrt{[\bar{t}(s), \bar{t}(s + \Delta s)]^2}} = \frac{(\Delta \bar{r}, \bar{t}, \Delta \bar{t})}{\sqrt{[\bar{t}, \Delta \bar{t}]^2}},$$

$$\Delta \bar{r} = \bar{t} \Delta s + \frac{1}{2} k \bar{n} \Delta s^2 + \frac{1}{6} \chi k \bar{b} \Delta s^3 + \dots$$

$$\Delta \bar{t} = k \bar{n} \Delta s + \dots,$$

откуда

$$d_1 = \frac{(\Delta s)^3}{12} k \chi + \dots;$$

$d_1$  третьего порядка малости, если  $k\chi \neq 0$ . Аналогично найдем, что  $d_2$  и  $d_3$  первого порядка малости.

614. Если шаг винта равен длине окружности цилиндра.

$$616. \quad R_0 = \frac{1}{2}.$$

$$617. \quad R = (e^t + e^{-t})^2 \sqrt{\frac{1}{2} + (e^t + e^{-t})^2}.$$

$$618. \quad R = 3\sqrt{2}e^t.$$

621. Винтовая линия, шаг которой равен шагу исходной винтовой линии, лежащая на круговом цилиндре с осью  $Oz$  радиуса  $\frac{b^2}{a}$ .

623. Пусть

$$x = x(C), \quad y = y(C), \quad z = z(C) \quad (*)$$

параметрические уравнения огибающей. Из определения огибающей следуют равенства

$$\frac{x'}{\frac{D(F, G)}{D(y, z)}} = \frac{y'}{\frac{D(F, G)}{D(z, x)}} = \frac{z'}{\frac{D(F, G)}{D(x, y)}}.$$

Отсюда и из тождеств

$$F_x \frac{D(F, G)}{D(y, z)} + F_y \frac{D(F, G)}{D(z, x)} + F_z \frac{D(F, G)}{D(x, y)} = 0,$$

$$G_x \frac{D(F, G)}{D(y, z)} + G_y \frac{D(F, G)}{D(z, x)} + G_z \frac{D(F, G)}{D(x, y)} = 0$$

имеем

$$\left. \begin{aligned} F_x x' + F_y y' + F_z z' &= 0, \\ G_x x' + G_y y' + G_z z' &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (**)$$

С другой стороны, координаты точек  $M$ , заданных уравнениями (\*), удовлетворяют тождественно системе  $F=0$ ,  $G=0$ . Дифференцируя по  $C$ , получим

$$\left. \begin{aligned} F_x x' + F_y y' + F_z z' + F_c &= 0, \\ G_x x' + G_y y' + G_z z' + G_c &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (***)$$

Из (\*\*) и (\*\*\*) следует

$$F_c = 0, \quad G_c = 0.$$

Таким образом, текущие координаты точек огибающей линий

$$F(x, y, z, C) = 0, \quad G(x, y, z, C) = 0$$

удовлетворяют системе уравнений

$$F(x, y, z, C) = 0,$$

$$G(x, y, z, C) = 0,$$

$$F_C(x, y, z, C) = 0,$$

$$G_C(x, y, z, C) = 0.$$

$$624. \quad \vec{r} = \vec{r}(t, C), \quad [\vec{r}_t, \vec{r}_C] = 0.$$

$$625. \quad \vec{r} = \vec{r}_0(C) + t\vec{a}(C), \quad (\vec{r}'_0, \vec{a}, \vec{a}') = 0.$$

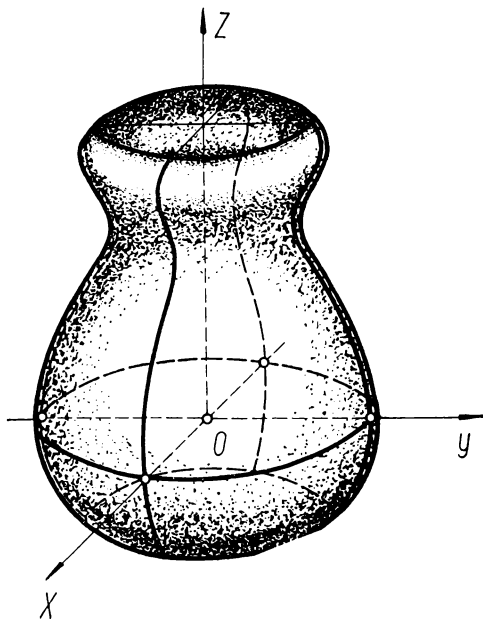


Рис. 156

$$626. \quad X = x - x' \frac{xx' + yy' + zz'}{x'^2 + y'^2 + z'^2}, \quad Y = y - y' \frac{xx' + yy' + zz'}{x'^2 + y'^2 + z'^2},$$

$$Z = z - z' \frac{xx' + yy' + zz'}{x'^2 + y'^2 + z'^2}.$$

$$627. \quad x = a \left( \cos t + \frac{b^2 t}{a^2 + b^2} \sin t \right),$$

$$y = a \left( \sin t - \frac{b^2 t}{a^2 + b^2} \cos t \right), \quad z = \frac{ba^2 t}{a^2 + b^2}.$$

$$628. \quad x = f(u) \cos v, \quad y = f(u) \sin v, \quad z = \varphi(u) \quad (\text{рис. 156}).$$



029.  $x=R \cos u \cos v$ ,  $y=R \cos u \sin v$ ,  $z=R \sin u$  (рис. 157).

630.  $x=a \cos u \cos v$ ,  $y=a \cos u \sin v$ ,  $z=c \sin u$  (рис. 158).

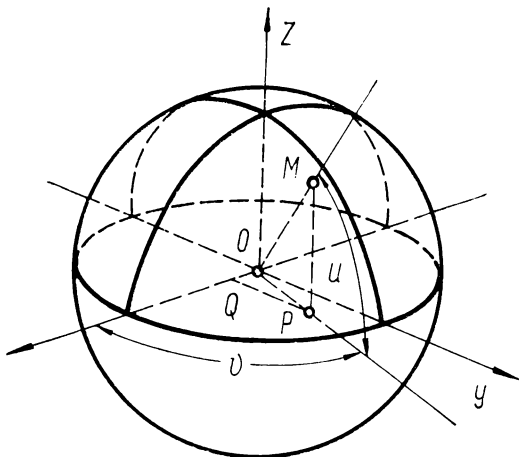


Рис. 157

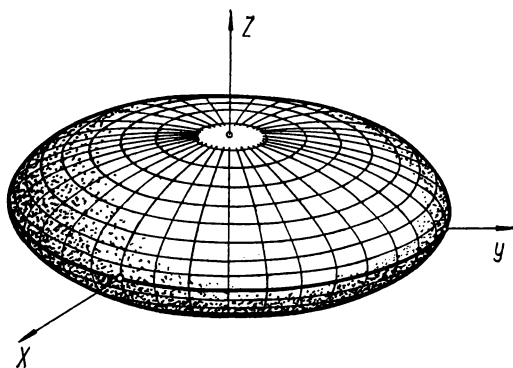


Рис. 158

631.  $x=a \operatorname{ch} u \cos v$ ,  $y=a \operatorname{ch} u \sin v$ ,  $z=c \operatorname{sh} u$  (рис. 159).

632.  $x=a \operatorname{sh} u \cos v$ ,  $y=a \operatorname{sh} u \sin v$ ,  $z=c \operatorname{ch} u$  (рис. 160).

633.  $x = u \cos v$ ,  $y = u \sin v$ ,  $z = u^2$  (рис. 161).

634.  $x = R \cos v$ ,  $y = R \sin v$ ,  $z = u$  (рис. 162).

635.  $x = u \cos v$ ,  $y = u \sin v$ ,  $z = ku$  (рис. 163).

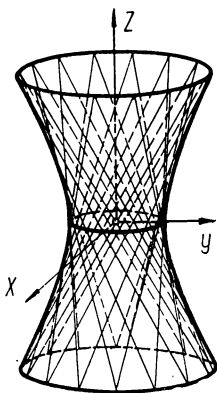


Рис. 159

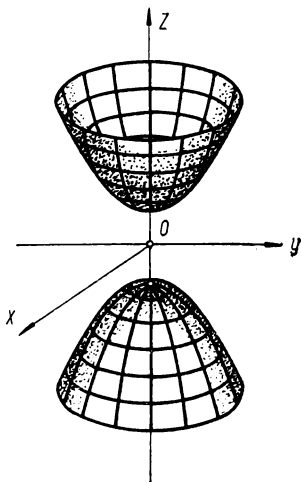


Рис. 160

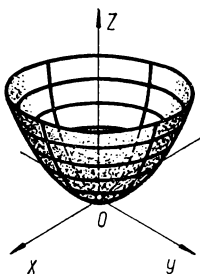


Рис. 161

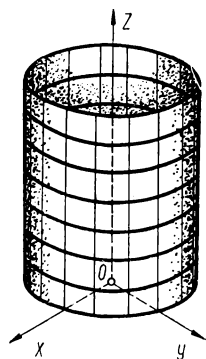


Рис. 162

636.  $x = (a + b \cos u) \cos v$ ,  $y = (a + b \cos u) \sin v$ ,  $z = b \sin u$  (рис. 164).

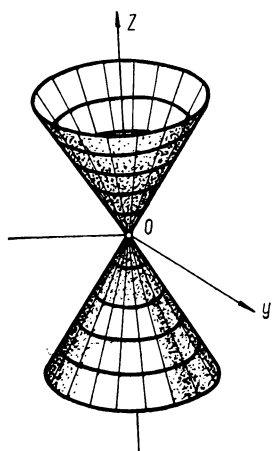


Рис. 163

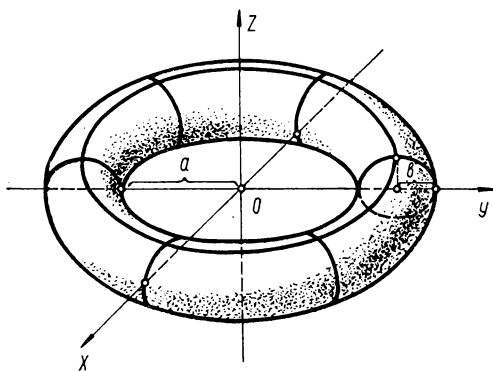


Рис. 164

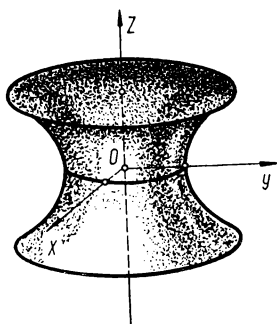


Рис. 165

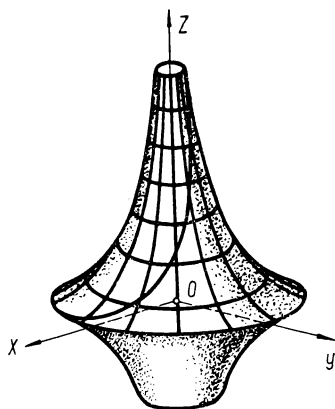


Рис. 166

637.  $x = a \operatorname{ch} \frac{u}{a} \cos v, \quad y = a \operatorname{ch} \frac{u}{a} \sin v, \quad z = u$  (рис. 165).

638.  $x = a \sin u \cos v, \quad y = a \sin u \sin v, \quad z = a \left( \ln \operatorname{tg} \frac{u}{2} + \cos u \right)$   
(рис. 166).

639. У к а з а н и е. Трехосный эллипсоид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

можно получить из сферы

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

с помощью аффинного преобразования

$$x' = \frac{a}{R} x, \quad y' = \frac{b}{R} y, \quad z' = \frac{c}{R} z.$$

Используя параметрические уравнения сферы (см. задачу 629), получим искомые уравнения эллипсоида

$$x = a \cos u \cos v, \quad y = b \cos u \sin v, \quad z = c \sin u.$$

640.  $x = a \operatorname{ch} u \cos v, \quad y = b \operatorname{ch} u \sin v, \quad z = c \operatorname{sh} u.$

641.  $x = a \operatorname{sh} u \cos v, \quad y = b \operatorname{sh} u \sin v, \quad z = c \operatorname{ch} u.$

642.  $x = au \cos v, \quad y = bu \sin v, \quad z = u^2.$

643.  $x = a \cos v, \quad y = b \sin v, \quad z = u$  (рис. 167).

644.  $x = au \cos v, \quad y = bu \sin v, \quad z = cu.$

645. Написав уравнения двух семейств прямолинейных образующих и выразив из них  $x, y, z$ , получим

$$x = a(u+v), \quad y = b(v-u), \quad z = 2uv \quad (\text{рис. 168}).$$

Параметрические уравнения поверхности  $z = xy$ :

$$x = u, \quad y = v, \quad z = uv.$$

646.  $x = f(u), \quad y = \varphi(u), \quad z = v.$

647.  $x = a \operatorname{ch} u, \quad y = b \operatorname{sh} u, \quad z = v -$

гиперболический цилиндр (рис. 169).

$$x = u, \quad y = u^2, \quad z = v -$$

параболический цилиндр (рис. 170).

648.  $\bar{r} = \bar{\rho}(u) + \bar{v}e.$

649.  $x = u + v, \quad y = u^2 + 2v, \quad z = u^3 + 3v.$

650. Параметрические уравнения есть

$$x = \cos u - v, \quad y = \sin u + 3v, \quad z = -2v,$$

откуда

$$\left(x - \frac{z}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{3}{2}z\right)^2 = 1.$$

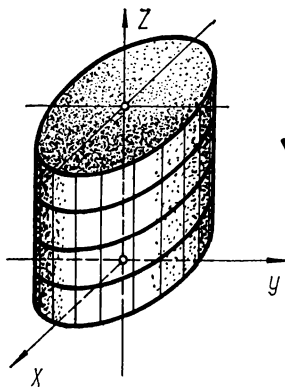


Рис. 167

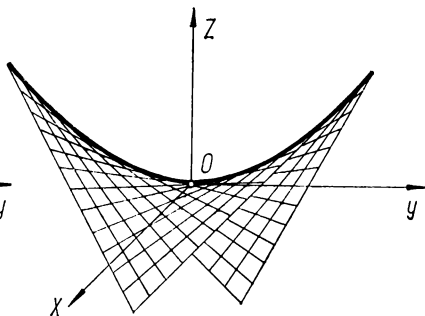


Рис. 168

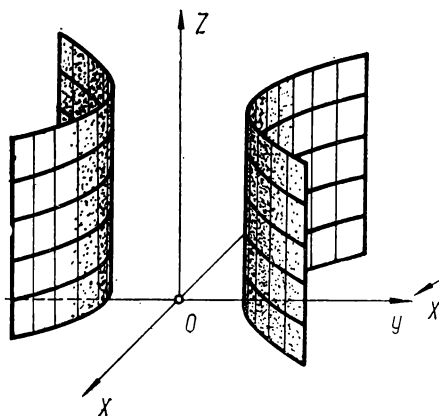


Рис. 169

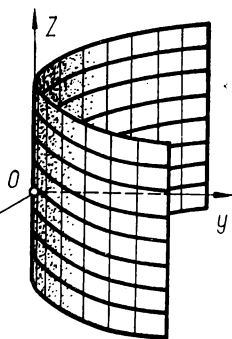


Рис. 170

651. Указание. Если направляющая линия задана уравнениями  
 $X=X(t)$ ,  $Y=Y(t)$ ,  $Z=Z(t)$ ,

то параметрические уравнения цилиндрической поверхности будут

$$x = X(t) + l\lambda, \quad y = Y(t) + m\lambda, \quad z = Z(t) + n\lambda.$$

Исключая отсюда  $\lambda$  и  $t$ , получим уравнение вида

$$f(nx - lz, ny - mz) = 0.$$

**652.**  $(nx - lz)^2 + (ny - mz)^2 = an(ny - mz).$

**653.** б) Например,

$$x = v^2 + 1, \quad y = v^2 - 1, \quad z = 2v;$$

в)  $\frac{x-16}{3} = \frac{y-12}{2} = \frac{z-4}{-1}.$

**654.**  $x - a = v[f(u) - a], \quad y - b = v[\varphi(u) - b], \quad z - c = v[\psi(u) - c].$

Исключая параметры  $u$  и  $v$  из этих уравнений, получим уравнение вида

$$F\left(\frac{x-a}{z-c}, \frac{y-b}{z-c}\right) = 0.$$

**655.**  $(bz - cy)^2 = 2p(z - c)(az - cx).$

**656.**  $(x+1)^2 = 2y^2 + z^2.$

**657.**  $A$  принадлежит,  $B$  не принадлежит.

**658.** Эллиптический цилиндр.

**659.**  $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} + \frac{(z-z_0)^2}{c^2} = 1$  — эллипсоид.

**660.** Параболоид вращения

$$z = x^2 + y^2.$$

**661.**  $u$  — расстояние точки от вершины конической поверхности,  $v$  — длина дуги линии, все точки которой удалены от вершины на расстояние 1.

**662.** Два семейства параллельных прямых (рис. 171).

**663.** Лучи, выходящие из начала координат, и семейство концентрических окружностей с центром в начале координат (рис. 172).

**664.** Линии  $v = \text{const}$  — семейство софокусных эллипсов и отрезок  $[-1, 1]$  оси  $Ox$ ; линии  $u = \text{const}$  — семейство софокусных гипербол и отрезки  $(-\infty, -1]$  и  $[1, \infty)$  оси  $Ox$  (рис. 173).

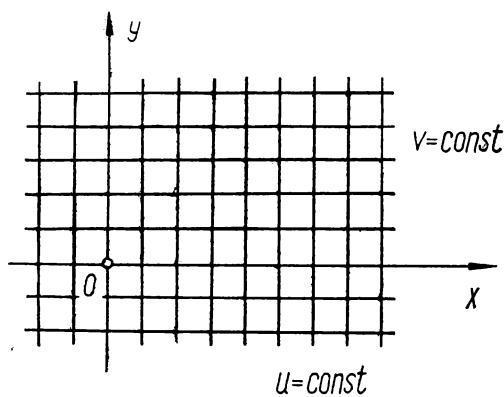


Рис. 171

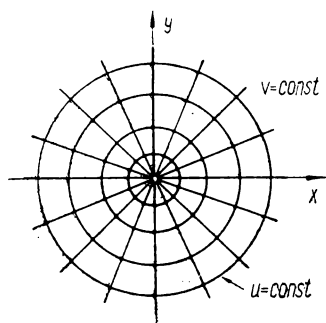


Рис. 172

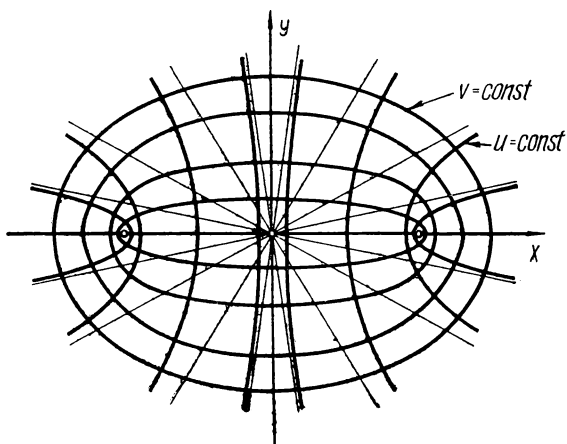


Рис. 173

665. Прямолинейные образующие.

666. а)  $x = a \cos(u+v)$ ,  $y = a \sin(u+v)$ ,  $z = bu$ ;

б)  $x = a \cos u$ ,  $y = a \sin u$ ,  $z = bu + v$ ;

в)  $x = a \cos(u+v)$ ,  $y = a \sin(u+v)$ ,  $z = b(u-v)$ .

667.  $\vec{r} = \vec{\rho}(u) + v\vec{\rho}'(u)$ . Линии  $u = u_0$  — прямолинейные образующие. В случае, когда  $u$  — длина дуги линии  $\vec{\rho}(u)$ , координатные линии  $v = v_0$  получаются, если на касательных от точек касания отложить равные отрезки.

668. Уравнения поверхности:

$$x = a(\cos u - v \sin u), \quad y = a(\sin u + v \cos u), \quad z = b(u + v).$$

Поверхность пересекает плоскость  $z = 0$  по линии

$$x = a(\cos u + u \sin u), \quad y = a(\sin u - u \cos u)$$

(эвольвента окружности).

669.  $x = u + v$ ,  $y = u^2 + 2uv$ ,  $z = u^3 + 3u^2v$ ;

$$4(y - x^2)(xz - y^2) - (xy - z^2)^2 = 0.$$

670. Если за ось вращения принять ось  $Oz$ , то уравнения поверхности будут иметь вид

$$x = u \cos v, \quad y = u \sin v, \quad z = f(u) + av,$$

где  $u$  — расстояние  $МК$  точки  $M$  геликоида до оси;  $v$  — угол поворота плоскости профиля, отсчитываемый от плоскости  $xOz$ ;  $a$  — постоянная величина — отношение скорости поступательного движения к угловой скорости (рис. 174).

671.  $x = u \cos v$ ,  $y = u \sin v$ ,  $z = av$  —

прямой геликоид (рис. 175);

$$x = u \cos v, \quad y = u \sin v, \quad z = tu + av —$$

косой геликоид (рис. 176).

672.  $x = a(1-u) \cos v$ ,  $y = a(1-u) \sin v$ ,  $z = bv$  —

прямой геликоид.

673.  $x = u \cos v$ ,  $y = u \sin v$ ,  $z = f(v)$ .



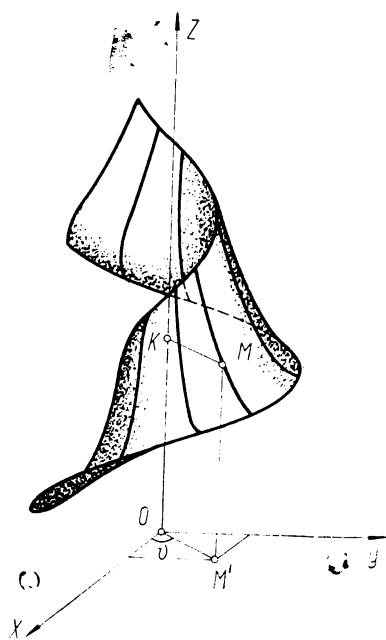


Рис. 174

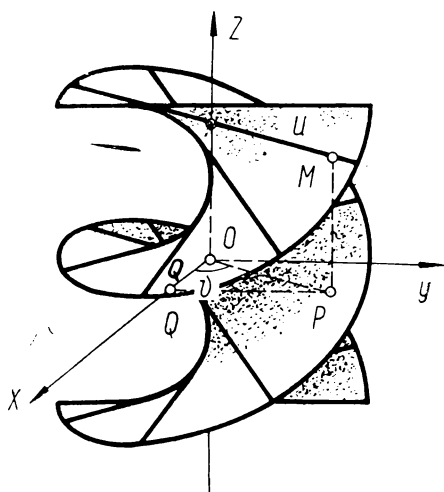


Рис. 175

В частности, если

$$f(v) = av + b,$$

получается прямой геликоид.

$$674. \quad z(x^2 + y^2) = 2axy.$$

$$675. \quad x = u \cos v, \quad y = u \sin v, \quad z = \frac{a}{\cos v}.$$

$$676. \quad \vec{r} = \vec{\rho}(s) + a \left( \frac{\vec{\ddot{\rho}}}{|\vec{\ddot{\rho}}|} \cos \alpha + \frac{[\vec{\rho} \vec{\ddot{\rho}}]}{|\vec{\rho} \vec{\ddot{\rho}}|} \sin \alpha \right),$$

где  $\alpha$  — угол между главной нормалью линии и радиусом окружности, идущим в произвольную точку поверхности.

679. Введем вместо  $u$  и  $v$  новые переменные  $\varphi$  и  $\psi$  по формулам:

$$u = \frac{\varphi + \psi}{2}, \quad v = c \cos \frac{\varphi - \psi}{2}, \quad 0 \leq \varphi - \psi < \frac{\pi}{2}$$

и подставим эти значения в векторное уравнение геликоида

$$\vec{r} = u(\vec{i} \cos v + \vec{j} \sin v) + av\vec{k}.$$

Полагая

$$\vec{\rho}(t) = c(\vec{i} \cos t + \vec{j} \sin t) + a\vec{k}t,$$

получим уравнение геликоида в виде

$$r = \frac{1}{2} \vec{\rho}(\varphi) + \frac{1}{2} \vec{\rho}(\psi).$$

680. Уравнения параболоидов

$$\frac{x^2}{p} \pm \frac{y^2}{q} = 2z$$

можно представить в виде

$$\vec{r} = \left( u\vec{i} + \frac{u^2}{2p}\vec{k} \right) + \left( v\vec{j} \pm \frac{v^2}{2q}\vec{k} \right).$$

681. Пусть  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  — некоторая точка поверхности второго

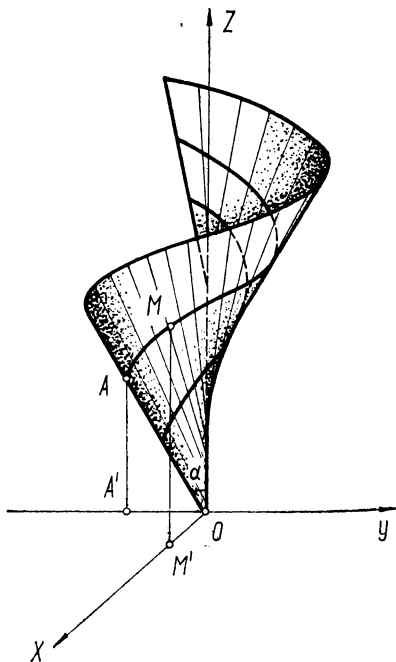


Рис. 176

порядка  $f(x, y, z) = 0$ . Произвольная прямая, проходящая через точку  $M_0$ ,

$$\frac{x-x_0}{u} = \frac{y-y_0}{v} = \frac{z-z_0}{1}$$

пересекает эту поверхность в точке  $M$ , аппликата которой  $z$  определяется из уравнения второй степени

$$f(x_0 + u(z - z_0), y_0 + v(z - z_0), z) = 0.$$

Это уравнение имеет по предположению корень  $z_0$ , откуда следует, что второй корень, который есть аппликата точки  $M$ , будет выражаться рациональной функцией  $u$  и  $v$ , что и доказывает утверждение.

683. а) Касательные прямые

$$y=0, z=\lambda \quad \text{и} \quad \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-\lambda}{\lambda};$$

нормальные плоскости

$$x-1=0, \quad (x-1)+y+\lambda(z-\lambda)=0;$$

$$\text{б) } \cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{2+\lambda^2}}.$$

$$685. \quad 18x+3y-4z-41=0.$$

$$686. \quad 3x-y-2z-4=0; \quad \frac{x-3}{3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{-2}.$$

$$687. \quad 6x+3y-2z-7=0; \quad \frac{x-1}{6} = \frac{y-3}{3} = \frac{z-4}{-2}.$$

$$688. \quad x+y-\sqrt{2}z=0;$$

нормаль

$$\frac{x-\sqrt{2}}{1} = \frac{y-\sqrt{2}}{1} = \frac{z-2}{-\sqrt{2}};$$

касательная к линии  $u=2$

$$\frac{x-\sqrt{2}}{-\sqrt{2}} = \frac{y-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}, \quad z=2.$$

$$689. \quad 3x+12y-z-18=0; \quad \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{12} = \frac{z-9}{-1}.$$

$$690. \quad 3x+4y+12z-169=0; \quad \frac{x-3}{3} = \frac{y-4}{4} = \frac{z-12}{12}.$$

$$691. \quad 3x-2y+3z-4=0; \quad \frac{x-3}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+1}{3}.$$

$$692. \quad \frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} + \frac{z_0 z}{c^2} = 1;$$

$$x = x_0 \left( 1 + \frac{t}{a^2} \right), \quad y = y_0 \left( 1 + \frac{t}{b^2} \right), \quad z = z_0 \left( 1 + \frac{t}{c^2} \right).$$

$$693. \quad a \cos u \cos v + y \cos u \sin v - z \sin u + a \ln \operatorname{tg} \frac{u}{2} \sin u = 0.$$

$$694. \quad xa \sin v - ya \cos v + zu - auv = 0,$$

$$\frac{x - u \cos v}{a \sin v} = \frac{y - u \sin v}{-a \cos v} = \frac{z - av}{u}.$$

Вдоль линии  $u = u_0$  нормали сохраняют постоянный угол с осью  $Oz$ . Вдоль линии  $v = v_0$  нормали параллельны постоянной плоскости.

$$695. \quad 12x + 9y + 20z - 140 = 0.$$

$$696. \quad x + y + z - 3 = 0.$$

700. Криволинейные координаты точек определяются уравнениями

$$\operatorname{tg} u = \pm \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \quad \operatorname{tg} v = \frac{B}{A}.$$

$$708. \quad (\bar{R} - \bar{r}(s), \quad \bar{r}(s), \quad \bar{r}'(s)) = 0.$$

Касательная плоскость неизменна вдоль образующей  $s = s_0$ ; она совпадает с соприкасающейся плоскостью линии  $\bar{r} = \bar{r}(s)$  при  $s = s_0$ .

713. Уравнение касательной плоскости можно представить в виде  $f'(c)(x \sin c - y \cos c) - u[ax \cos c + ay \sin c - z + f(c)] = 0$ ,

откуда следует, что все плоскости проходят через прямую  $y = x \operatorname{tg} c$ ,  $ax \cos c + ay \sin c - z + f(c) = 0$ .

714. Возьмем точку пересечения нормалей за начало отсчета радиус-векторов. Тогда

$$\bar{r} \bar{r}_u = 0, \quad \bar{r} \bar{r}_v = 0,$$

откуда следует  $\bar{r}^2 = \text{const.}$

716. Если  $\bar{a}$  — направляющий вектор заданной прямой и начало радиус-векторов взято на этой прямой, то векторы  $\bar{r}$ ,  $\bar{a}$  и  $[\bar{r}_u \bar{r}_v]$  лежат в одной плоскости и

$$\bar{r}[\bar{a}[\bar{r}_u \bar{r}_v]] = 0.$$

По правилу двойного векторного произведения получаем

$$(\bar{r} \bar{r}_u) (\bar{a} \bar{r}_v) - (\bar{r} \bar{r}_v) (\bar{a} \bar{r}_u) = 0.$$

Но это можно записать в виде равенства нулю функционального определителя

$$\frac{\partial(\bar{r}^2)}{\partial u} \frac{\partial(\bar{a} \bar{r})}{\partial v} - \frac{\partial(\bar{r}^2)}{\partial v} \frac{\partial(\bar{a} \bar{r})}{\partial u} = 0.$$

Отсюда следует, что между величинами  $\bar{r}^2$  и  $\bar{a} \bar{r}$  существует функциональная зависимость

$$\bar{r}^2 = f(\bar{a} \bar{r}).$$

Выбирая ось  $Oz$  вдоль вектора  $\bar{a}$ , получим

$$x^2 + y^2 = f(z) —$$

поверхность вращения.

720. Пусть

$$\bar{R} = \bar{r}(s) + ut(s) —$$

уравнение поверхности, причем  $\bar{r}(s)$  ребро возврата. Имеем:

$$\bar{R}_s = \bar{t} + uk\bar{n}, \quad \bar{R}_u = \bar{t}.$$

Вектор нормали к поверхности

$$\bar{N} = [\bar{R}_s \bar{R}_u] = uk[\bar{n} \bar{t}]$$

направлен по бинормали к линии  $\bar{r}(s)$ , что и требовалось доказать.

721. Указание. Чтобы найти линию на поверхности  $\bar{r}(u, v)$ , надо установить зависимость между параметрами  $u$  и  $v$  на данной линии. Эта зависимость определяется из условия  $x = u + v = 0$  (см. ответ задачи 669). Ответ:  $x = 0$ ,  $z^2 = -4y^3$ .

722. См. задачи 720, 721. Если начало координат поместить в точке ребра возврата, где производится сечение, то уравнение нормальной плоскости

$$\bar{R} \bar{t}_0 = 0.$$

Уравнение сечения

$$\bar{R} = \bar{r}(s) - \frac{\bar{r} \bar{t}_0}{\bar{t} \bar{t}_0} \bar{t}(s).$$

Разложим  $\bar{r}(s)$  по формуле Тейлора (с точностью до 4-й степени  $s$ ) и примем векторы  $\bar{t}_0$ ,  $\bar{n}_0$ ,  $\bar{b}_0$  за орты осей  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Тогда

уравнения сечения (с точностью до  $s^4$ ) будут иметь вид

$$x=0, \quad y=-\frac{k_0 s^2}{2}, \quad z=\frac{k_0 \chi_0 s^3}{3}.$$

723. Уравнение линии пересечения

$$\bar{R}=\bar{r}(s)-\frac{\bar{r}\bar{b}_0}{\bar{t}\bar{b}_0}\bar{t}(s).$$

Пользуясь формулой Тейлора для  $\bar{r}(s)$ , найдем

$$\bar{R}'_0=\frac{2}{3}\bar{t}_0, \quad \bar{R}''_0=\bar{A}\bar{t}_0+\frac{1}{3}k_0\bar{n}_0.$$

Поэтому

$$k_1=\frac{|\bar{R}'_0\bar{R}''_0|}{|\bar{R}'_0|^3}=\frac{3}{4}k_0.$$

724. Решается аналогично двум предыдущим задачам.

725. Необходимость. Пусть  $\bar{a}$  — вектор, перпендикулярный направляющей плоскости. Тогда  $\bar{e}\bar{a}=0$ . Отсюда  $\bar{e}'\bar{a}=0$ ,  $\bar{e}''\bar{a}=0$ . Следовательно,  $(\bar{e}\bar{e}'\bar{e}'')=0$ . Если бы  $\bar{e}''$  равнялось  $\bar{0}$ , то  $\bar{e}'$  был бы постоянным вектором. Но  $\bar{e}\bar{e}'=0$  и  $\bar{e}\bar{a}=0$ . Тогда  $\bar{e}$  постоянен и поверхность вырождается в цилиндр.

Достаточность. Пусть  $(\bar{e}\bar{e}'\bar{e}'')=0$ ,  $\bar{e}''\neq 0$ . Тогда вектор  $\bar{c}=[\bar{e}\bar{e}']:\bar{e}'$  постоянный, так как  $\bar{c}'=0$ . Вектор  $\bar{e}$  перпендикулярен постоянному вектору  $\bar{c}$ , т. е. параллелен постоянной плоскости.

726. Ось геликоида.

727. Наименьшая параллель поверхности.

728. Исходная линия.

729. 
$$\bar{R}=\bar{r}+\frac{k}{k^2+\chi^2}\bar{n}.$$

730. Примем за направляющую кривую поверхности

$$\bar{R}=\bar{r}(s)+u\bar{e}(s)$$

горловую линию. Тогда  $\bar{t}\bar{e}'=0$ . Вектор нормали вдоль фиксированной образующей есть  $[\bar{t}_0\bar{e}_0]+u[\bar{e}'_0\bar{e}_0]$ , поэтому уравнение поверхности, образованной нормальными исходной поверхности, может быть записано в виде

$$\bar{R}=\bar{r}_0+u\bar{e}_0+v([\bar{t}_0\bar{e}_0]+u[\bar{e}'_0\bar{e}_0]).$$

Векторы  $\bar{e}_0$ ,  $[\bar{t}_0 \bar{e}_0]$ ,  $[\bar{e}'_0 \bar{e}_0]$  взаимно перпендикулярны. Выберем прямоугольную систему координат так, чтобы начало ее находилось в точке  $\bar{r}_0$ , а направления осей координат совпадали с указанными векторами. Тогда уравнения полученной поверхности будут:

$$x=u, \quad y=au, \quad z=buv$$

или

$$z=abxy.$$

Это — гиперболический параболоид. Его вершина — точка  $\bar{r}_0$ , т. е. лежит на горловой линии.

731. Записывая уравнения линии в параметрическом виде

$$x = \frac{t}{t^2-1}, \quad y = \frac{1}{t^2-1}, \quad z=t,$$

получим

$$\Phi(t) = \frac{t^3(t^2-2)}{(t^2-1)^2}.$$

Величина  $\Phi(t)$  имеет третий порядок малости относительно  $t$ .

732. 6.

734. Пусть линия задана уравнениями

$$x=x(t), \quad y=y(t), \quad z=z(t).$$

$$\Phi(t) = \begin{vmatrix} x(t)-x(t_0) & y(t)-y(t_0) & z(t)-z(t_0) \\ x'(t_0) & y'(t_0) & z'(t_0) \\ x''(t_0) & y''(t_0) & z''(t_0) \end{vmatrix}.$$

Представляя разности

$$x(t)-x(t_0), \quad y(t)-y(t_0), \quad z(t)-z(t_0)$$

по формуле Тейлора и приравнявая в выражении  $\Phi(t)$  коэффициент при  $(t-t_0)^3$  к нулю, получим

$$\begin{vmatrix} x'''(t_0) & y'''(t_0) & z'''(t_0) \\ x'(t_0) & y'(t_0) & z'(t_0) \\ x''(t_0) & y''(t_0) & z''(t_0) \end{vmatrix} = 0.$$

Следовательно, кручение линии равно нулю.

736.  $x^2+y^2=1$  — круговой цилиндр.  
 737.  $xy+yz=1$  — гиперболический цилиндр.  
 738.  $x^2+y^2+z^2-2xy-2xz-2yz=0$  — конус.  
 739. Например,  
 $(x-c)^2+y^2=c^2.$



740. Например,

$$(x-c)^2 + y^2 + z^2 = c^2.$$

741. Огибающая — цилиндр

$$y^2 + z^2 = 1,$$

характеристики — окружности

$$y^2 + z^2 = 1, \quad x - c = 0,$$

ребра возврата не существует.

742. Для сфер, построенных на хордах, параллельных оси  $Oy$ ,

$$\frac{x^2}{a^2 + b^2} + \frac{y^2 + z^2}{b^2} = 1.$$

Эллипсоид огибает сферы, для которых  $|\operatorname{tg} \varphi| \geq \frac{b}{a}$ , где  $\varphi$  — параметр эллипса в уравнениях

$$x = a \cos \varphi, \quad y = b \sin \varphi.$$

Для сфер, построенных на хордах, параллельных оси  $Oy$ ,

$$\frac{y^2}{a^2 + b^2} + \frac{x^2 + z^2}{a^2} = 1 \quad |\operatorname{tg} \varphi| \leq \frac{b}{a}.$$

Для гиперболы

$$x = a \operatorname{ch} \varphi, \quad y = b \operatorname{sh} \varphi$$

получим:

а) если хорды параллельны оси  $Oy$ , то при  $b \geq a$  огибающей нет, при  $b < a$  огибающая задается уравнением

$$\frac{x^2}{a^2 - b^2} - \frac{y^2 + z^2}{b^2} = 1.$$

Она огибает сферы, для которых  $|\operatorname{tg} \varphi| \leq \frac{b}{a}$ ;

б) если хорды параллельны оси  $Ox$ , то уравнение огибающей при  $b \neq a$

$$\frac{x^2 + z^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - b^2} = 1.$$

Если  $b > a$ , она огибает все сферы, при  $b < a$  сферы, для которых  $|\operatorname{tg} \varphi| \leq \frac{b}{a}$ . Если  $b = a$ , огибающей является плоскость  $y = 0$  (сравнить с задачами 333, 334).

743. Винтовая линия

$$x = k \cos \alpha, \quad y = k \sin \alpha, \quad z = k\alpha.$$

$$744. \quad xyz = \frac{2}{9} V.$$

$$745. \quad x^2 + y^2 + (z - c)^2 = \frac{a^2 c^2}{a^2 + 1}.$$

У к а з а н и е. Сферы образованы вращением окружностей, взятых в плоскости  $xOz$ , которые касаются прямых  $x = \pm az$  и имеют центры на оси  $Oz$ .

746. Уравнение семейства

$$(\bar{R} - \bar{\rho}(s))^2 = a^2.$$

Дифференцируя по  $s$ , получим

$$(\bar{R} - \bar{\rho})\bar{t} = 0,$$

откуда

$$\bar{R} - \bar{\rho} = \lambda \bar{b} + \mu \bar{n}, \quad \lambda^2 + \mu^2 = a^2.$$

Полагая

$$\lambda = a \cos \alpha, \quad \mu = a \sin \alpha,$$

получим уравнение огибающей в виде

$$\bar{R} = \bar{\rho} + a(\bar{b} \cos \alpha + \bar{n} \sin \alpha).$$

747. Уравнение семейства

$$(x - b \cos \varphi)^2 + (y - b \sin \varphi)^2 + z^2 - a^2 = 0.$$

Уравнение огибающей

$$(x^2 + y^2 + z^2 + b^2 - a^2)^2 - 4b^2(x^2 + y^2) = 0.$$

Ребро возврата в случае  $a > b$  сводится к двум точкам  $(0, 0, \pm \sqrt{a^2 - b^2})$  или к одной точке  $(0, 0, 0)$ , если  $a = b$ .

748. Огибающая

$$[(y - R)^2 + z^2 - R^2] [(y + R)^2 + z^2 - R^2] = 0$$

представляет собой два цилиндра, «склеенных» вдоль оси  $Ox$ . Ребра возврата нет (рис. 177).

749. Огибающая задается уравнениями

$$\left. \begin{aligned} (\bar{R} - \bar{r}(s))\bar{b}(s) &= 0, \\ (\bar{R} - \bar{r}(s))\bar{n}(s) &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Характеристиками являются касательные к заданной линии, ребром возврата — сама линия.

750. Огибающая задается уравнениями

$$\left. \begin{aligned} (\bar{R} - \bar{r}(s)) \bar{t}(s) &= 0, \\ (\bar{R} - \bar{r}(s)) \bar{n}(s) k(s) - 1 &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Характеристики параллельны бинормальям и проходят через центры кривизны линии. Ребро возврата

$$\bar{R} = \bar{r} + \frac{1}{k} \bar{n} + \frac{1}{\chi} \left( \frac{1}{k} \right)' \bar{b}$$

состоит из центров соприкасающихся сфер линии.

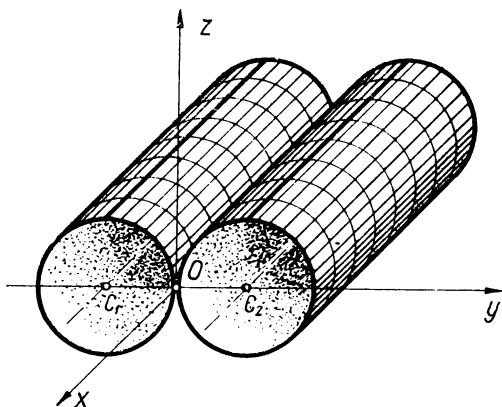


Рис. 177

751. Огибающая задается уравнениями

$$\left. \begin{aligned} (\bar{R} - \bar{r}(s)) \bar{n}(s) &= 0, \\ (\bar{R} - \bar{r}(s)) (\chi(s) \bar{b}(s) - k(s) \bar{t}(s)) &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Характеристики направлены по векторам Дарбу (см. задачу 564). Ребро возврата

$$\bar{R} = \bar{r} + \frac{k\chi}{k\chi' - \chi k'} \bar{t} + \frac{k^2}{k\chi' - \chi k'} \bar{b}.$$

752. Уравнение конуса с осью  $Ox$

$$-x^2 \operatorname{tg}^2 \alpha + y^2 + z^2 = 0.$$

Сделаем поворот вокруг оси  $Oy$

$$-(x \cos \alpha + z \sin \alpha)^2 \operatorname{tg}^2 \alpha + (-x \sin \alpha + z \cos \alpha)^2 + y^2 = 0$$

или

$$y^2 \cos^2 \alpha + z^2 \cos 2\alpha - xz \sin 2\alpha = 0.$$

Повернем этот конус вокруг оси  $Oz$  на угол  $\beta$  ( $\beta$  — параметр семейства)

$$\begin{aligned} &(-x \sin \beta + y \cos \beta)^2 \cos^2 \alpha + z^2 \cos 2\alpha - \\ &- z(x \cos \beta + y \sin \beta) \sin 2\alpha = 0. \end{aligned} \quad (*)$$

Дифференцируя равенство (\*) по  $\beta$ , получим

$$(-x \sin \beta + y \cos \beta)(x \cos \alpha \cos \beta + y \cos \alpha \sin \beta + z \sin \alpha) = 0.$$

Плоскость

$$x \cos \alpha \cos \beta + y \cos \alpha \sin \beta + z \sin \alpha = 0$$

перпендикулярна оси конуса и имеет с ним лишь одну общую точку. Исключая  $\beta$  из уравнения

$$-x \sin \beta + y \cos \beta = 0$$

и уравнения семейства (\*), получим уравнение огибающей

$$z(z \cos 2\alpha - \sqrt{x^2 + y^2} \sin 2\alpha) = 0.$$

Таким образом, плоскость  $z=0$  и конус

$$x^2 + y^2 - z^2 \operatorname{ctg}^2 2\alpha = 0$$

образуют огибающую поверхность.

754. Рассмотрим одну из прямолинейных образующих  $l$  данной поверхности  $\sigma$ . Во всех ее точках касательная плоскость  $\pi$  к  $\sigma$  будет одна и та же. Построим касательные ко всем линиям сечения  $\sigma$  параллельными плоскостями в точках, лежащих на образующей  $l$ . Очевидно, все эти касательные будут параллельны друг другу. Но тогда и нормали к этим плоским сечениям во всех точках образующей  $l$  будут друг другу параллельны, а значит будут лежать все в одной плоскости  $\pi^*$ . Следовательно, поверхность, на которой лежат эволюты плоских сечений, есть огибающая плоскостей  $\pi^*$ , т. е. она тоже развертывающаяся.

755. Пусть  $x, y, z$  зависят от двух параметров  $u, v$ , причем  $u = \text{const}$  соответствует прямолинейным образующим. Уравнение касательной плоскости будет

$$(X-x) \frac{\partial F}{\partial x} + (Y-y) \frac{\partial F}{\partial y} + (Z-z) \frac{\partial F}{\partial z} = 0. \quad (*)$$

Так как поверхность  $F(x, y, z) = 0$  развертывающаяся, то уравнение касательной плоскости зависит только от  $u$  и не зависит от  $v$ . Характеристики будут определяться уравнениями (\*) и

$$A \frac{\partial x}{\partial u} + B \frac{\partial y}{\partial u} + C \frac{\partial z}{\partial u} = 0, \quad (**)$$

где для сокращения положено

$$\left. \begin{aligned} A &= (X-x) \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + (Y-y) \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + (Z-z) \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} - \frac{\partial F}{\partial x}, \\ B &= (X-x) \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + (Y-y) \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + (Z-z) \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} - \frac{\partial F}{\partial y}, \\ C &= (X-x) \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} + (Y-y) \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} + (Z-z) \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} - \frac{\partial F}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (***)$$

Аналогично

$$A \frac{\partial x}{\partial v} + B \frac{\partial y}{\partial v} + C \frac{\partial z}{\partial v} = 0. \quad (****)$$

Сравнивая (\*\*), (\*\*\*\*) с уравнениями

$$\frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial u} = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial v} = 0,$$

получаем

$$A - \lambda \frac{\partial F}{\partial x} = 0, \quad B - \lambda \frac{\partial F}{\partial y} = 0, \quad C - \lambda \frac{\partial F}{\partial z} = 0,$$

где  $\lambda$  — коэффициент пропорциональности. Исключая  $(X-x)$ ,  $(Y-y)$ ,  $(Z-z)$  из (\*), (\*\*\*), находим искомое условие

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} & \frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} & \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} & \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

756.  $F(x, y, z, \alpha, \beta) = 0, \quad F_\alpha(x, y, z, \alpha, \beta) = 0,$   
 $F_\beta(x, y, z, \alpha, \beta) = 0.$

$$757. (\bar{r}_u \bar{r}_v \bar{r}_\alpha) = 0.$$

$$758. (\bar{r}_u \bar{r}_v \bar{r}_\alpha) = 0, \quad (\bar{r}_u \bar{r}_v \bar{r}_\beta) = 0.$$

$$759. z = a, \quad z = -a.$$

760. Возьмем на поверхности произвольную линию  $\Gamma$  и построим в каждой ее точке касательную плоскость. Тогда поверхность можно рассматривать как огибающую этих плоскостей, так как по условию каждая из них касается данной поверхности по линии. С другой стороны, эти касательные плоскости образуют семейство с одним параметром (дуга  $s$  линии  $\Gamma$ ). Следовательно, огибающей может быть только развертывающаяся поверхность, т. е. линии касания суть прямые.

761. Пусть  $M_i(x_i, y_i, z_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  — данные точки.

Возьмем уравнение плоскости в нормальном виде

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0.$$

.. Расстояния от точки  $M_i$  до плоскости

$$d_i = x_i \cos \alpha + y_i \cos \beta + z_i \cos \gamma - p.$$

Из условия задачи

$$\cos \alpha \sum_{i=1}^n x_i + \cos \beta \sum_{i=1}^n y_i + \cos \gamma \sum_{i=1}^n z_i - np = k = \text{const.}$$

Запишем это соотношение в виде

$$\cos \alpha \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} + \cos \beta \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n} + \cos \gamma \frac{\sum_{i=1}^n z_i}{n} - p = \frac{k}{n}.$$

Это условие выражает тот факт, что точка с координатами

$$\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}, \quad \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n}, \quad \frac{\sum_{i=1}^n z_i}{n}$$

находится на одном и том же расстоянии от всех плоскостей семейства; следовательно, огибающая есть сфера с центром в этой точке.

$$762. ds^2 = (f'^2 + \varphi'^2) du^2 + f^2 dv^2.$$

$$763. ds^2 = R^2 (du^2 + \cos^2 u dv^2).$$

$$764. ds^2 = (a^2 \sin^2 u + c^2 \cos^2 u) du^2 + a^2 \cos^2 u dv^2.$$

$$765. ds^2 = (a^2 \text{sh}^2 u + c^2 \text{ch}^2 u) du^2 + a^2 \text{ch}^2 u dv^2.$$

$$766. ds^2 = (a^2 \text{ch}^2 u + c^2 \text{sh}^2 u) du^2 + a^2 \text{sh}^2 u dv^2.$$

$$767. ds^2 = (1+4u^2)du^2 + u^2dv^2.$$

$$768. ds^2 = du^2 + R^2dv^2.$$

$$769. ds^2 = (1+k^2)du^2 + u^2dv^2.$$

$$770. ds^2 = b^2du^2 + (a+b \cos u)^2dv^2.$$

$$771. ds^2 = \operatorname{ch}^2 \frac{u}{a} du^2 + a^2 \operatorname{ch}^2 \frac{u}{a} dv^2.$$

$$772. ds^2 = a^2 \operatorname{ctg}^2 u du^2 + a^2 \sin^2 u dv^2.$$

$$773. ds^2 = du^2 + (u^2 + a^2)dv^2.$$

$$774. ds^2 = [1+f'(u)^2] du^2 + 2af'(u) du dv + (a^2 + u^2) dv^2.$$

775. Для поверхности  $\bar{R} = \bar{r}(u) + v\bar{t}(u)$ , образованной касательными к линии  $\bar{r} = \bar{r}(u)$ ,

$$ds^2 = (1+k^2v^2)du^2 + 2du dv + dv^2,$$

где  $k$  — кривизна исходной линии.

Для поверхности, образованной главными нормальными  $\bar{R} = \bar{r}(u) + v\bar{n}(u)$ ,

$$ds^2 = [(1-kv)^2 + \chi^2v^2] du^2 + dv^2,$$

для поверхности, образованной бинормальными  $\bar{R} = \bar{r}(u) + v\bar{b}(u)$ ,

$$ds^2 = (1+\chi^2v^2)du^2 + dv^2,$$

где  $\chi$  — кручение линии  $\bar{r} = \bar{r}(u)$ .

$$776. ds^2 = (1+p^2)dx^2 + 2pq dx dy + (1+q^2)dy^2,$$

где  $p = z_x$ ,  $q = z_y$ .

777. Только в случае «в».

$$778. E' = \frac{1}{I^2} \left[ E \left( \frac{\partial v'}{\partial v} \right)^2 - 2F \frac{\partial v'}{\partial u} \frac{\partial v'}{\partial v} + G \left( \frac{\partial v'}{\partial v} \right)^2 \right],$$

$$G' = \frac{1}{I^2} \left[ E \left( \frac{\partial u'}{\partial u} \right)^2 - 2F \frac{\partial u'}{\partial u} \frac{\partial u'}{\partial v} + G \left( \frac{\partial u'}{\partial u} \right)^2 \right],$$

$$F' = \frac{1}{I^2} \left[ -E \frac{\partial u'}{\partial v} \frac{\partial v'}{\partial v} + \right. \\ \left. + F \left( \frac{\partial u'}{\partial u} \frac{\partial v'}{\partial v} + \frac{\partial u'}{\partial v} \frac{\partial v'}{\partial u} \right) - G \frac{\partial u'}{\partial u} \frac{\partial v'}{\partial u} \right],$$

$$H' = \frac{H}{|I|}$$

где

$$I = \frac{D(u', v')}{D(u, v)} \neq 0.$$

781. Криволинейные координаты выражают длины дуг координатных линий, координатная сеть чебышевская.

782. Например, преобразованием криволинейных координат

$$\tilde{u} = -a \ln \sin u, \quad \tilde{v} = av$$

приведем  $ds^2$  к виду

$$ds^2 = d\tilde{u}^2 + e^{-\frac{2\tilde{u}}{a}} d\tilde{v}^2,$$

а преобразованием

$$\sin u = e^{-\tilde{v}} \operatorname{ch} \frac{\tilde{u}}{a}, \quad v = e^{\tilde{v}} \operatorname{th} \frac{\tilde{u}}{a} -$$

к виду

$$ds^2 = d\tilde{u}^2 + \operatorname{ch}^2 \frac{\tilde{u}}{a} d\tilde{v}^2.$$

$$783. \quad ds^2 = d\tilde{u}^2 + e^{-\frac{2\tilde{u}}{a}} d\tilde{v}^2 = e^{-\frac{2\tilde{u}}{a}} \left( e^{\frac{2\tilde{u}}{a}} d\tilde{u}^2 + d\tilde{v}^2 \right).$$

Полагая  $x = \tilde{v}$ ,  $y = ae^{\frac{\tilde{u}}{a}}$ , получим

$$ds^2 = \frac{a^2(dx^2 + dy^2)}{y^2}.$$

$$784. \quad \cos \varphi = \frac{a^2 xy}{\sqrt{1+a^2 x^2} \sqrt{1+a^2 y^2}}.$$

786. Возьмем первую квадратичную форму поверхности в виде  $ds^2 = du^2 + G(u)dv^2$ .

Тогда

$$\cos \alpha = \frac{du}{\sqrt{du^2 + G(u)dv^2}},$$

откуда

$$v \operatorname{ctg} \alpha = \pm \int_{u_0}^u \frac{du}{\sqrt{G(u)}}.$$

787. Взяв первую квадратичную форму сферы в виде

$$ds^2 = R^2(du^2 + \cos^2 u dv^2),$$



получим

$$v \operatorname{ctg} \alpha = R \ln \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{u}{2R} \right).$$

789. Записывая уравнение конической поверхности в виде  $\bar{r} = v\bar{l}(u)$ ,  $|\bar{l}(u)| = 1$ , получим

$$\operatorname{tg} \alpha \ln v = \int |\bar{e}'(u)| du + C.$$

790. Записывая первую квадратичную форму развертывающейся поверхности в виде

$$ds^2 = (1 + k^2 v^2) du^2 + 2 du dv + dv^2,$$

получим

$$(\sin^2 \alpha - k^2 v^2 \cos^2 \alpha) du^2 + 2 \sin^2 \alpha du dv + \sin^2 \alpha dv^2 = 0.$$

791. Если уравнение поверхности взять в виде, указанном в задаче 775, получим  $u + v = \text{const}$ .

$$792. \left( E \frac{\partial \varphi}{\partial v} - F \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right) du + \left( F \frac{\partial \varphi}{\partial v} - G \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right) dv = 0.$$

$$793. v - \operatorname{tg} u = \text{const}.$$

$$794. u^2 + u + 1 = c_1 e^{-v} \quad (c_1 = \text{const}).$$

$$795. v = \frac{1}{2u^2} + \lambda.$$

$$796. X = \frac{U-V}{2} \cos V, \quad Y = \frac{U-V}{2} \sin V, \quad Z = \frac{U+V}{2},$$

где  $U = 2u + v$ ,  $V = v$ .

$$797. ER - FQ + GP = 0.$$

$$799. (1 + a^2 x^2) y^2 = c_1, \quad (1 + a^2 y^2) x^2 = c_2.$$

$$801. \ln(u + \sqrt{u^2 + a^2}) \pm v = \text{const}.$$

$$802. u \pm \ln \operatorname{tg} \frac{v}{2} = \text{const}.$$

$$803. \begin{cases} ay + \sqrt{1 + a^2 y^2} = c(ax + \sqrt{1 + a^2 x^2}), \\ z = axy \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} ay + \sqrt{1 + a^2 y^2} = \frac{c_1}{\sqrt{1 + a^2 x^2} + ax} \\ z = axy. \end{cases}$$

$$804. \quad \begin{aligned} \text{а) } ds^2 &= (8u^2 + v^2) du^2 + 2uv du dv + (8v^2 + u^2) dv^2; \\ \text{б) } ds &= 2\sqrt{2v^2 + 1} dv, \quad ds = (8u^2 + 1) du, \quad ds = 2\sqrt{2a^4 + a^2 + 2} u du. \\ \text{в) } s &= 3\sqrt{2a^4 + a^2 + 2}. \end{aligned}$$

$$805. \quad \cos \alpha = \pm \frac{1 - a^2}{1 + a^2}.$$

$$806. \quad p = \frac{10}{3} a; \quad \cos \alpha = 1, \quad \cos \beta = \frac{2}{3}, \quad \cos \gamma = \frac{2}{3}.$$

$$807. \quad s = |\operatorname{sh} u_2 - \operatorname{sh} u_1|.$$

$$808. \quad \cos \alpha = -\frac{3}{5}.$$

$$809. \quad \cos \alpha = \frac{2}{3}.$$

$$810. \quad s = \sqrt{2} |u_2 - u_1|.$$

$$811. \quad ds^2 = a^2 \operatorname{ctg}^2 u du^2 + a^2 \sin^2 u \frac{du^2}{\sin^2 u} = \frac{a^2 du^2}{\sin^2 u},$$

$$s = a \left| \int_{u_1}^{u_2} \frac{du}{\sin u} \right| = a |\ln \operatorname{tg} u_2 - \ln \operatorname{tg} u_1| = |v_2 - v_1|.$$

Рассмотрим семейство

$$v = a \ln \operatorname{tg} \frac{u}{2} + C.$$

Точка  $M_1(u_1, v_1)$  лежит на линии

$$v = -a \ln \operatorname{tg} \frac{u}{2} + C_1,$$

а точка  $M_2(u_2, v_2)$  — на линии

$$v = -a \ln \operatorname{tg} \frac{u}{2} + C_2,$$

т. е.

$$v_1 = -a \ln \operatorname{tg} \frac{u_1}{2} + C_1, \quad v_1 = a \ln \operatorname{tg} \frac{u_1}{2} + C,$$

$$v_2 = -a \ln \operatorname{tg} \frac{u_2}{2} + C_2, \quad v_2 = a \ln \operatorname{tg} \frac{u_2}{2} + C,$$

значит,

$$v_1 = \frac{C_1 + C}{2}, \quad v_2 = \frac{C_2 + C}{2},$$

поэтому

$$s = |v_2 - v_1| = \frac{|C_2 - C_1|}{2},$$

т. е. не зависит от  $C$ .

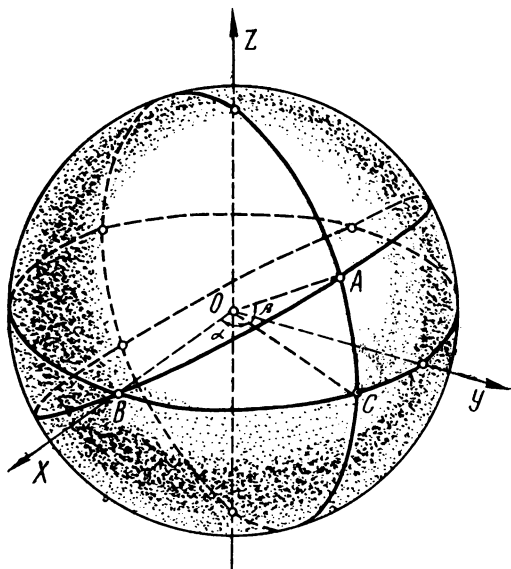


Рис. 178

812. а) Возьмем уравнения сферы в виде

$$x = R \cos u \cos v, \quad y = R \cos u \sin v, \quad z = R \sin u.$$

Расположим один из катетов на линии  $u=0$ , второй — на линии  $v=\alpha$ , одну из вершин в точке  $B$  ( $u=0, v=0$ ), вторую — в точке  $A$  ( $u=\beta, v=\alpha$ ) (рис. 178). Тогда длины катетов равны соответственно  $a=R\alpha$ ;  $b=R\beta$ . Для вычисления  $c$  надо найти длину дуги линии

$$Ay + Bz = 0$$

(на поверхности сферы) между указанными точками.

Уравнение гипотенузы в криволинейных координатах

$$A \cos u \sin v + B \sin u = 0.$$

Так как она проходит через точку  $u=\beta$ ,  $v=\alpha$ , то  $\sin v = k \operatorname{tg} u$ ,

где  $k = \frac{\sin \alpha}{\operatorname{tg} \beta}$ .

$$c = s = R \sqrt{1+k^2} \int_0^\beta \frac{\cos u \, du}{\sqrt{1-(1+k^2)\sin^2 u}} =$$

$$= R \operatorname{arc} \sin(\sqrt{1+k^2} \sin \beta) = R \operatorname{arc} \sin \sqrt{1-\cos^2 \alpha \cos^2 \beta},$$

отсюда

$$\cos \frac{c}{R} = \cos \alpha \cos \beta = \cos \frac{a}{R} \cos \frac{b}{R}.$$

$$6) \quad S = R^2 \int_D \cos u \, du dv = R^2 \int_0^\alpha dv \int_0^{f(v)} \cos u \, du,$$

где

$$f(v) = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\sin v}{k}.$$

$$S = R^2 \int_0^\alpha \sin \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\sin v}{k} \, dv = R^2 \int_0^\alpha \frac{\sin v \, dv}{\sqrt{(1+k^2) - \cos^2 v}} =$$

$$= R^2 \left( \operatorname{arc} \sin \frac{1}{\sqrt{1+k^2}} - \operatorname{arc} \sin \frac{\cos \alpha}{\sqrt{1+k^2}} \right).$$

Отсюда

$$\sin \frac{S}{R^2} = \frac{\sqrt{\sin^2 \alpha + k^2} - k \cos \alpha}{1+k^2} = \frac{\sin \alpha \sin \beta}{1+\cos \gamma} =$$

$$= \frac{\sin \frac{a}{R} \sin \frac{c}{R}}{1+\cos \frac{c}{R}}.$$

Пользуясь соотношением

$$\cos B = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \gamma},$$

получим

$$\sin B = \frac{\sin \beta}{\sin \gamma},$$

$$\cos(A+B) = -\frac{\sin \alpha \sin \beta}{1+\cos \gamma},$$

$$\sin\left(A+B-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sin \alpha \sin \beta}{1+\cos \gamma}.$$

Сравнивая с предыдущим, находим

$$S = R^2 \left( A+B-\frac{\pi}{2} \right).$$

$$813. \quad S = \frac{a}{2} [\sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2})].$$

$$814. \quad S = a^2 \left[ \frac{2}{3} - \frac{\sqrt{2}}{3} + \ln(1+\sqrt{2}) \right].$$

$$815. \quad S = 2a^2.$$

$$816. \quad S = 2\varphi_0 R^2, \text{ где } R \text{ — радиус сферы.}$$

$$817. \quad \varphi_2 = \frac{1}{\sqrt{f'^2 + \varphi'^2}} [(f'\varphi'' - \varphi'f'') du^2 + f\varphi' dv^2].$$

$$818. \quad \varphi_2 = R(du^2 + \cos^2 u dv^2).$$

$$819. \quad \varphi_2 = \frac{ac}{\sqrt{a^2 \sin^2 u + c^2 \cos^2 u}} (du^2 + \cos^2 u dv^2).$$

$$820. \quad \varphi_2 = \frac{ac}{\sqrt{a^2 \operatorname{sh}^2 u + c^2 \operatorname{ch}^2 u}} (du^2 + \operatorname{ch}^2 u dv^2).$$

$$821. \quad \varphi_2 = \frac{ac}{\sqrt{a^2 \operatorname{ch}^2 u + c^2 \operatorname{sh}^2 u}} (du^2 + \operatorname{sh}^2 u dv^2).$$

$$822. \quad \varphi_2 = \frac{2}{\sqrt{1+4u^2}} (du^2 + u^2 dv^2).$$

$$823. \quad \varphi_2 = R dv^2.$$

$$824. \quad \varphi_2 = \frac{ku}{\sqrt{1+k^2}} dv^2.$$

$$825. \quad \varphi_2 = b du^2 + \cos u (a + b \cos u) dv^2.$$

$$826. \quad \varphi_2 = adv^2 - \frac{1}{a} du^2.$$

$$827. \quad \varphi_2 = a(-\operatorname{ctg} u \, du^2 + \sin u \cos u \, dv^2).$$

$$828. \quad \varphi_2 = -\frac{2adudv}{\sqrt{u^2 + a^2}}.$$

$$830. \quad \varphi_2 = \frac{f_{xx}dx^2 + 2f_{xy}dxdy + f_{yy}dy^2}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}.$$

Из условия задачи

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

Общее решение этой системы

$$f = ax + by + c.$$

$$831. \quad \varphi_2 = \left( -\frac{a}{u^2 + a^2} \right) du^2 + adv^2.$$

$$k_{n/v} = \operatorname{const} = -\frac{a}{u^2 + a^2}, \quad k_{n/u} = \operatorname{const} = \frac{a}{u^2 + a^2}.$$

832. Если уравнение поверхности взять в виде, указанном в задаче 667, то

$$k_1 = 0, \quad k_2 = \frac{\chi}{vk},$$

где  $k$  и  $\chi$  — кривизна и кручение заданной линии.

$$833. \quad k_1 = \frac{a}{b^2}, \quad k_2 = \frac{a}{c^2}.$$

$$834. \quad \frac{du}{dv} = \pm \sqrt{u^2 + a^2}, \quad k_1 = -k_2 = \frac{a}{u^2 + a^2}.$$

$$836. \quad k_1 = -\frac{\sqrt{3}}{9}, \quad k_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$837. \quad k_1 = 2p, \quad k_2 = 2q.$$

$$839. \quad \text{а) } k = \frac{-du^2}{\sqrt{1+u^2} [(1+u^2)du^2 + dv^2]};$$

$$\text{б) } k = \frac{-1}{(1+u^2)^{3/2}}; \quad \text{в) } k = \frac{-1}{21\sqrt{5}}.$$

840. а)  $k_1 = \frac{1}{2\sqrt[3]{5}}, \quad k_2 = 0;$

б)  $x-2=0, \quad z-1=0; \quad \frac{x-2}{4} = \frac{z-1}{2}, \quad y=0;$

в)  $k = \frac{2}{49\sqrt[3]{5}}.$

841. а)  $\frac{x^2}{\frac{1}{4}} + \frac{y^2}{\frac{1}{9}} = 1; \quad б) \quad R = \frac{2}{13}.$

842. У к а з а н и е. Записать формулу Эйлера в виде

$$\frac{1}{r_i} = \frac{R_1 + R_2}{2R_1 R_2} - \frac{R_1 - R_2}{2R_1 R_2} \cos 2 \left[ \varphi + \frac{i-1}{n} \pi \right],$$

где  $\frac{1}{R_1}, \frac{1}{R_2}$  — главные кривизны,  $i=1, 2, \dots, n$ .

843. Сфера.

845. Развертывающиеся поверхности.

847. 1) Для поверхности, полученной при вращении линии

$$x=f(u), \quad y=0, \quad z=\varphi(u)$$

вокруг оси  $Oz$ ,

$$K = \frac{\varphi'(f'\varphi'' - f''\varphi')}{f(f'^2 + \varphi'^2)^2};$$

2) для сферы  $K = \frac{1}{R^2};$

3) для эллипсоида вращения

$$K = -\frac{c^2}{(a^2 \cos^2 u + c^2 \sin^2 u)^2};$$

4) для однополостного гиперboloида вращения

$$K = -\frac{c^2}{(a^2 \operatorname{sh}^2 u + c^2 \operatorname{ch}^2 u)^2};$$

5) для двуполостного гиперboloида вращения

$$K = \frac{c^2}{(a^2 \operatorname{ch}^2 u + c^2 \operatorname{sh}^2 u)^2};$$

6) для параболоида вращения

$$K = \frac{4}{(1+4u^2)^2};$$

7) для кругового цилиндра  $K=0$ ;

8) для кругового конуса  $K=0$ ;

9) для тора

$$K = \frac{\cos u}{b(a+b \cos u)};$$

10) для катеноида

$$K = -\frac{1}{a^2 \operatorname{ch}^4 \frac{u}{a}};$$

11) для псевдосферы

$$K = -\frac{1}{a^2}.$$

848. Один из главных радиусов кривизны поверхности равен радиусу кривизны параболы  $y^2=2px$ :

$$R_1^2 = p^2 \left( 1 + \frac{2x}{p} \right)^3.$$

Второй главный радиус кривизны равен отрезку нормали параболы до директрисы:

$$R_2^2 = \frac{p^2}{4} \left( 1 + \frac{2x}{p} \right)^3.$$

Таким образом,  $|R_1| = 2|R_2|$ .

$$849. \quad K = -\frac{1}{\lambda^2} \left( \frac{\partial^2 \ln \lambda}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \ln \lambda}{\partial v^2} \right).$$

$$850. \quad K = -\frac{Guu}{G}.$$

$$851. \quad K = -1.$$

$$852. \quad K = pq \left( 1 + \frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2} \right)^2.$$

$$854. \quad K = \frac{-1}{(F_x^2 + F_y^2 + F_z^2)^2} \begin{vmatrix} F_{xx} & F_{xy} & F_{xz} & F_x \\ F_{yx} & F_{yy} & F_{yz} & F_y \\ F_{zx} & F_{zy} & F_{zz} & F_z \\ F_x & F_y & F_z & 0 \end{vmatrix}.$$



855.  $K=4c$ .

856. Если поверхность задана уравнением

$$\bar{\rho} = \bar{r}(s) + v\bar{n}(s),$$

то

$$K = - \frac{\chi^2}{[(1-vk)^2 + v^2\chi^2]^2},$$

где  $k$  и  $\chi$  — кривизна и кручение линии  $\bar{r} = \bar{r}(s)$ .

857. Если поверхность задана уравнением

$$\bar{\rho} = \bar{r}(s) + v\bar{b}(s),$$

то

$$K = - \frac{\chi^2}{(1+v^2\chi^2)^2},$$

где  $\chi$  — кручение линии  $\bar{r} = \bar{r}(s)$ .

858.  $H=0$ ,  $k = - \frac{a^2}{(a^2+u^2)^2}$ , полная кривизна постоянна на винтовых линиях.

$$859. \quad K = \frac{rt-s^2}{(1+p^2+q^2)^2}, \quad H = \frac{(1+p^2)t + (1+q^2)r - 2pqs}{(1+p^2+q^2)^{3/2}},$$

где  $p=z_x$ ,  $q=z_y$ ,  $r=z_{xx}$ ,  $s=z_{xy}$ ,  $t=z_{yy}$ .

$$860. \quad K = \frac{f'f''}{\rho(1+f'^2)^2}; \quad H = \frac{f''}{4(1+f'^2)^{3/2}} + \frac{f'}{4\rho\sqrt{1+f'^2}}.$$

861. Если  $\theta$  — угол между образующей конуса и его осью, а  $v$  — расстояние точки от оси конуса, то  $H = \frac{\cos \theta}{2v}$ .

$$862. \quad H = - \frac{1}{2a}.$$

864. Если ось тора вертикальна, то самая верхняя и самая нижняя параллели тора состоят из параболических точек; эти параллели отделяют внешнюю часть тора, состоящую из эллиптических точек, от внутренней части с гиперболическими точками.

865. Все точки поверхности эллиптические, в пересечении с осью вращения — особые точки поверхности (рис. 179).

866. Вершины синусоиды описывают линии, состоящие из параболических точек; точки перегиба синусоиды описывают линии, состоящие из особых точек поверхности. Оба указанных сорта линий разбивают всю поверхность на пояса с одинаковой по

знаку полной кривизны, два соседних пояса имеют разные по знаку кривизны (рис. 180).

867. Точка  $x=1$  является особой и разбивает поверхность на две части: для  $x>1$  точки поверхности эллиптические и для  $x<1$  — гиперболические (рис. 181).

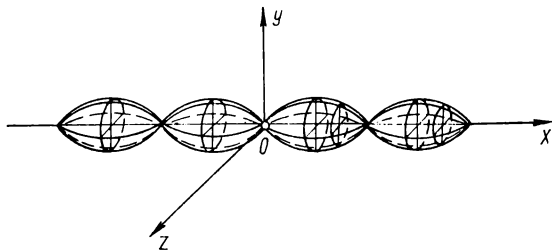


Рис. 179

868. Все точки поверхности гиперболические (рис. 182).  
 869. Если произведение  $AB \geq 0$ , то все точки поверхности гипербо-

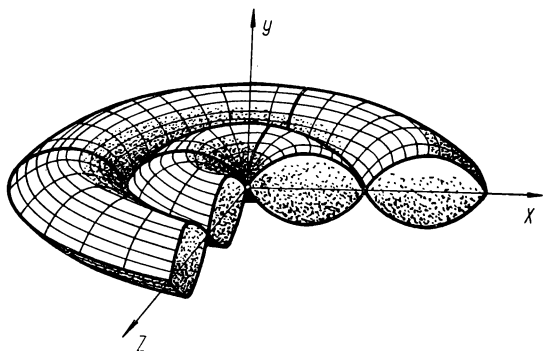


Рис. 180

лические (рис. 183a); если  $AB < 0$ , на поверхности могут быть точки всех трех типов (рис. 183б).

870. Эллиптические.  
 871. Гиперболические.  
 872. Эллиптические.  
 873.  
 874. Гиперболические.

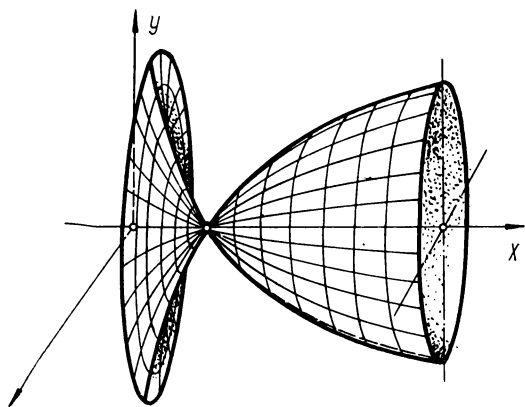


Рис. 181

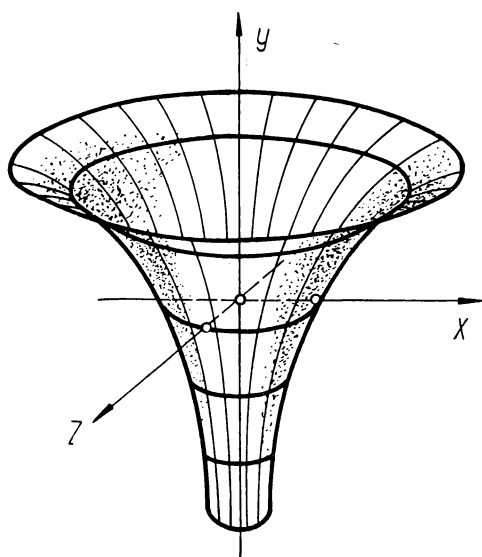


Рис. 182

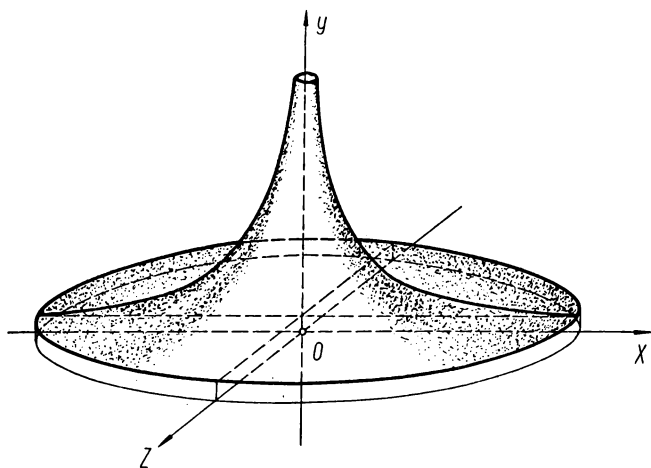


Рис. 183а

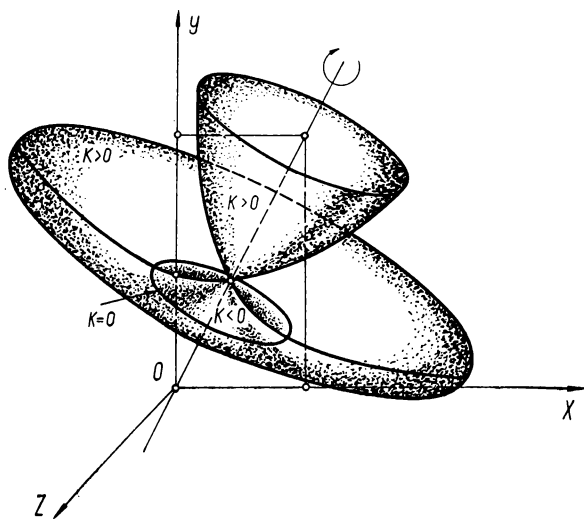


Рис. 183б

875— Параболические.

878.

879. Если  $f''f'' < 0$  — точки эллиптические, если  $f''f'' > 0$  — точки гиперболические, если  $f''f'' = 0$  — точки параболические.

880.  $x = 2u$ ,  $y = u^2$ ,  $z = 2u^3$ .

882. Необходимость очевидна. Докажем достаточность. Пусть  $L = \lambda E$ ,  $M = \lambda F$ ,  $N = \lambda G$ .

Подставляем значения коэффициентов квадратичных форм:

$$-\overline{m}_u \overline{r}_u = \lambda \overline{r}_u^2, \quad -\overline{m}_u \overline{r}_v = \lambda \overline{r}_u \overline{r}_v$$

или

$$(\overline{m}_u + \lambda \overline{r}_u) \overline{r}_u = 0, \quad (\overline{m}_u + \lambda \overline{r}_u) \overline{r}_v = 0.$$

Присоединяя сюда равенство

$$(\overline{m}_u + \lambda \overline{r}_u) \overline{m} = 0,$$

получим

$$\overline{m}_u + \lambda \overline{r}_u = 0.$$

Аналогично доказывается равенство нулю вектора  $\overline{m}_v + \lambda \overline{r}_v$ . Итак,

$$\overline{m}_u = -\lambda \overline{r}_u, \quad \overline{m}_v = -\lambda \overline{r}_v. \quad (*)$$

Дифференцируя первое уравнение по  $v$  и второе по  $u$ , получим

$$\overline{m}_{uv} = -\lambda_v \overline{r}_u - \lambda \overline{r}_{uv}, \quad \overline{m}_{vu} = -\lambda_u \overline{r}_v - \lambda \overline{r}_{vu},$$

откуда

$$\lambda_v \overline{r}_u - \lambda_u \overline{r}_v = 0.$$

Если хотя бы одна из величин  $\lambda_u$ ,  $\lambda_v$  была отлична от нуля, векторы  $\overline{r}_u$  и  $\overline{r}_v$  были бы коллинеарны, что невозможно. Исключая этот случай, получим  $\lambda = \text{const}$ . Интегрируем уравнения (\*)

$$\overline{r} = -\frac{\overline{m}}{\lambda} + \overline{r}_0 \quad \text{или} \quad (\overline{r} - \overline{r}_0)^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$

(сфера).

885. Строим эволюту какого-либо меридиана и находим точки  $P_1$ ,  $P_2$ , ... встречи ее с осью вращения. Пусть  $M_1$ ,  $M_2$ , ... — соответствующие им точки эвольвенты (меридиана). Тогда параллели, проходящие через эти точки, состоят из точек окружения.

886. Параллели, описываемые вершинами синусоиды, и только они (см. задачи 885 и 431).

887. Две точки — точки встречи эллипсоида с осью вращения.

888. Вершина параболоида.

889. У параболоида

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z, \quad p > q > 0,$$

имеются две точки округления

$$A_{1,2} \left( 0, \pm \sqrt{p^2 - q^2}, \frac{p^2 - q^2}{2q} \right).$$

890. У эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad a > b > c > 0,$$

есть четыре точки округления

$$A_{1-4} \left( \pm a \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}}, 0, \pm c \sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}} \right).$$

891. У двуполостного гиперболоида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

имеются четыре точки округления

$$A_{1-4} \left( 0, \pm b \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{b^2 + c^2}}, \pm c \sqrt{\frac{a^2 + c^2}{b^2 + c^2}} \right).$$

894. Например, поверхность, полученная от вращения параболы  $y = x^4$  вокруг оси  $Oy$ .

895. Например, на цилиндре  $y = x^4$  ось  $Oz$  состоит из точек уплощения.

896. Воспользоваться задачей 830.

897.  $Mdu + Ndv = 0; \quad Ldu + Mdv = 0.$

898.  $LR - MQ + NP = 0.$

900.  $\left( L \frac{\partial \varphi}{\partial v} - M \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right) du + M \left( \frac{\partial \varphi}{\partial v} - N \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right) dv = 0.$

902.  $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = C_1.$

903.  $\bar{b}(1, 0, -1).$

904.  $(LB - MA) du + (MB - NA) dv = 0.$

906.  $v = \arctg u + C.$

909. Взяв уравнения псевдосферы в виде

$$x = a \sin u \cos v, \quad y = a \sin u \sin v, \quad z = a \ln \operatorname{tg} \frac{u}{2} + a \cos u,$$

получим

$$\ln \operatorname{tg} \frac{u}{2} \pm v = C,$$

Если ввести новые параметры

$$u' = \ln \operatorname{tg} \frac{u}{2} + v,$$

$$v' = \ln \operatorname{tg} \frac{u}{2} - v,$$

то координатная сеть будет асимптотической и коэффициенты первой квадратичной формы будут удовлетворять требованиям задачи 780.

911. Если исходить из уравнений

$$x = f(u) \cos v, \quad y = f(u) \sin v, \quad z = \varphi(u)$$

поверхности вращения, то получим

$$(f' \varphi'' - f'' \varphi') du^2 + f \varphi' dv^2 = 0.$$

912.  $u \pm v = \text{const.}$

913. Если взять уравнение тора в виде

$$x = (a + b \cos u) \cos v, \quad y = (a + b \cos u) \sin v, \quad z = b \sin u,$$

то дифференциальное уравнение асимптотических линий будет  $b du^2 + \cos u (a + b \cos u) dv^2 = 0$ .

Оно имеет общее решение

$$v + C = \pm \int \frac{\sqrt{b} du}{\sqrt{-\cos u (a + b \cos u)}}$$

$$\text{при } \frac{\pi}{2} < u < \frac{3\pi}{2}.$$

Линии  $u = \frac{\pi}{2}$ ,  $u = \frac{3\pi}{2}$ , очевидно, также являются решениями дифференциального уравнения (его особые решения). Они огибают семейства асимптотических линий, расположенных на внутренней части поверхности тора (рис. 184).

914. Прямолинейные образующие и их ортогональные траектории, т. е. винтовые линии.

915. Прямолинейные образующие.  
 916. Уравнение поверхности имеет вид  
 $x^3z - y^3 = 0$ .

Дифференциальное уравнение асимптотических линий —  
 $2y^2dx^2 - 3xy \, dx \, dy + x^2dy^2 = 0$

или

$$(xdy - ydx)(2ydx - xdy) = 0.$$

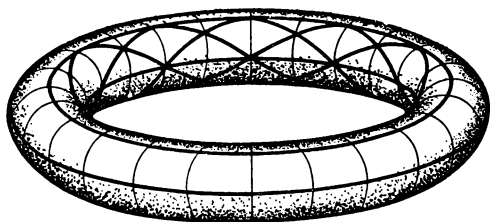


Рис. 181

Следовательно, существуют два семейства асимптотических линий:

$$1) \quad y = c_1x, \quad z = c_1^3;$$

$$2) \quad y = c_2x^2, \quad z = c_2^3x^3.$$

919. Если  $k_1 + k_2 = 0$ , то из формулы Эйлера следует, что  
 $\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi = 0$ ,  
 где  $\varphi$  — угол, образованный асимптотическим и главным направлениями. Отсюда следует, что  $\varphi = \pm \frac{\pi}{4}$ , т. е. между асимптотическими направлениями угол равен  $\frac{\pi}{2}$ .

922. Примем сеть асимптотических линий данной поверхности за координатную сеть. Тогда  $L = 0$ ,  $N = 0$ . Для того чтобы соответствующая сеть на параллельной поверхности также состояла из асимптотических линий, должно выполняться условие  $L^* = 0$ ,  $N^* = 0$ . Так как

$$L^* = aKE + (1 - 2aH)L;$$

$$N^* = aKG + (1 - 2aH)N,$$



то при  $K \neq 0$  коэффициенты  $L^*$ ,  $N^*$  не равны нулю, что и доказывает требуемое в задаче.

924. Прямолинейные образующие и их ортогональные траектории, которые являются плоскими сечениями.

925. Прямолинейные образующие и линии пересечения сфер произвольного радиуса с центром в вершине конической поверхности с конической поверхностью.

926. Параллели и меридианы.

928. Координатные линии.

931. Прямолинейные образующие и их ортогональные траектории.

933. Если поверхность задана уравнением

$$\bar{R} = \bar{r}(s) + u\bar{t}(s),$$

то линии кривизны имеют уравнения

$$u + s = C_1, \quad s = C_2,$$

где  $C_1$ ,  $C_2$  — произвольные постоянные.

934. Если уравнение геликоида взять в виде

$$x = u \cos v, \quad y = u \sin v, \quad z = av,$$

то дифференциальное уравнение линий кривизны есть

$$(a^2 + u^2)dv^2 - du^2 = 0,$$

откуда

$$v = \pm \ln(u + \sqrt{u^2 + a^2}) + c.$$

$$935. \begin{cases} \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z, \\ \frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{qC} = \frac{q-p}{1+C} \quad (C \neq 0), \end{cases}$$

а также сечения эллиптического параболоида плоскостями  $x=0$  и  $y=0$ .

936.  $\bar{R} = \bar{r}(s) + R_1 \bar{m}(s)$ , где  $k_1 = \frac{1}{R_1}$  — главная кривизна вдоль

данной линии. Таким образом, огибающая нормалей поверхности вдоль линии кривизны является геометрическим местом центров главной кривизны. Ее соприкасающаяся плоскость совпадает с плоскостью нормального сечения линии кривизны в соответствующей точке.

939. Примем ортогональную сеть на данной поверхности за координатную сеть. Тогда  $F=0$ . Для соответствующей ортогональной сети на параллельной поверхности должно быть  $F^*=0$ .

Возьмем уравнения рассматриваемых поверхностей в виде

$$\bar{r} = \bar{r}(u, v) \quad \text{и} \quad \bar{r} = \bar{r}(u, v) + a\bar{m}(u, v).$$

Тогда

$$F^* = 2a(aH - 1)M,$$

откуда следует, что  $F^* = 0$  в двух случаях: а)  $M = 0$ , и тогда ортогональная сеть на данной поверхности состоит из линий

кривизны; б)  $a = \frac{1}{H}$ . Тогда данная поверхность имеет по-

стоянную среднюю кривизну, и любой ортогональной сети на ней будет соответствовать также ортогональная сеть.

940. Это возможно только для эллипсона вращения.

948. Предположим, что прямолинейные образующие параллельны оси  $Oz$ . Тогда уравнение поверхности можно взять в виде

$$\bar{r} = f(u)\bar{i} + \varphi(u)\bar{j} + v\bar{k},$$

где  $u$  будем считать натуральным параметром направляющей линии. Будем искать уравнение геодезической в виде

$$v = v(u). \quad (*)$$

Тогда

$$\bar{N} = [\bar{r}_u \bar{r}_v] = \bar{\varphi}'\bar{i} - \bar{f}'\bar{j}, \quad d\bar{r} = (\bar{f}'\bar{i} + \bar{\varphi}'\bar{j} + v'\bar{k})du,$$

$$d^2\bar{r} = (\bar{f}''\bar{i} + \bar{\varphi}''\bar{j} + v''\bar{k})du^2$$

и уравнение для определения геодезических линий будет

$$\begin{vmatrix} \bar{\varphi}' & -\bar{f}' & 0 \\ \bar{f}' & \bar{\varphi}' & v' \\ \bar{f}'' & \bar{\varphi}'' & v'' \end{vmatrix} = 0$$

или

$$(\bar{\varphi}'^2 + \bar{f}'^2)v'' - (\bar{\varphi}'\bar{\varphi}'' + \bar{f}'\bar{f}'')v' = 0.$$

Но

$$\bar{\varphi}'^2 + \bar{f}'^2 = 1,$$

следовательно,

$$\bar{\varphi}'\bar{\varphi}'' + \bar{f}'\bar{f}'' = -\frac{1}{2}(\bar{\varphi}'^2 + \bar{f}'^2)' = 0.$$

Таким образом,  $v'' = 0$ , следовательно,  $v = c_1u + c_2$ .

Векторное уравнение семейства геодезических будет

$$\bar{r} = f(u)\bar{i} + \varphi(u)\bar{j} + (c_1u + c_2)\bar{k},$$

откуда

$$\cos \Theta = \cos(\vec{r}_u, Oz) = \frac{\frac{d\vec{r}}{du} \cdot \vec{k}}{\left| \frac{d\vec{r}}{du} \right|} = \frac{c_1}{\sqrt{f'^2 + \varphi'^2 + c_1^2}} = \frac{c_1}{\sqrt{1 + c_1^2}}.$$

Следовательно, найденные геодезические являются обобщенными винтовыми линиями.

Кроме того, геодезическими являются прямолинейные образующие. Они выпали из общего решения, так как их уравнения нельзя представить в виде (\*).

Так как через каждую точку цилиндрической поверхности в любом направлении проходит или обобщенная винтовая линия или прямолинейная образующая, то каждая из этих линий является геодезической.

951. Большие окружности сферы.

955. См. задачи 564, 751, 954.

$$959. \quad k_g = \frac{\sqrt{R^2 - r^2}}{Rr}.$$

$$960. \quad k_g = \frac{|u|}{u^2 + a^2}.$$

$$961. \quad k_g|_{u=c} = \frac{|u|}{u^2 + f'^2(v)}; \quad k_g|_{v=c} = 0.$$

966. Возьмем уравнения прямого геликоида в виде

$$x = u \cos v, \quad y = u \sin v, \quad z = av.$$

Прежде всего заметим, что геодезическими линиями являются прямолинейные образующие, т. е. линии  $v = \text{const}$ . Считая теперь, что  $dv \neq 0$ , получим дифференциальное уравнение геодезических линий

$$\frac{d^2 u}{dv^2} - \frac{2u}{a^2 + u^2} \left( \frac{du}{dv} \right)^2 - u = 0.$$

Для решения уравнения введем новые переменные, полагая

$u$  — независимой переменной, а  $p = \frac{du}{dv}$  — функцией от  $u$ . Тогда уравнение примет вид

$$p \frac{dp}{du} - \frac{2u}{a^2 + u^2} p^2 - u = 0.$$

Полагая  $z=p^2$ , получим

$$\frac{dz}{du} - \frac{4u}{a^2+u^2} z - 2u = 0.$$

Общее решение этого уравнения есть

$$z = (a^2+u^2)^2 \left( C_1 - \frac{1}{a^2+u^2} \right),$$

откуда

$$v = \int \frac{du}{(a^2+u^2) \sqrt{C_1 - \frac{1}{a^2+u^2}}} + C_2.$$

967. Возьмем первую квадратичную форму псевдосферы в виде

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$$

(см. задачу 783).

Тогда дифференциальные уравнения геодезических будут:

$$\frac{d^2y}{ds^2} - \frac{1}{y} \left( \frac{dy}{ds} \right)^2 + \frac{1}{y} \left( \frac{dx}{ds} \right)^2 = 0,$$

$$\frac{d^2x}{ds^2} - \frac{2}{y} \frac{dy}{ds} \frac{dx}{ds} = 0.$$

Этой системе удовлетворяют линии  $x = \text{const}$ .

Если же  $x \neq \text{const}$ , то систему можно заменить уравнением

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{y} \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 + \frac{1}{y} = 0,$$

общее решение которого

$$(x - C_2)^2 + y^2 = C_1^2.$$

968. У к а з а н и е. Рассматривая вдоль геодезической  $v$  как функцию  $u$ , получим дифференциальное уравнение геодезических линий поверхности Лиувилля

$$2(f+\varphi) \frac{d^2v}{du^2} = -\frac{df}{du} \left( \frac{dv}{du} \right)^3 + \frac{d\varphi}{dv} \left( \frac{dv}{du} \right)^2 - \frac{df}{du} \frac{dv}{du} + \frac{d\varphi}{dv}$$

или

$$(f+\varphi) du^2 d(dv^2) = (du^2 + dv^2) (d\varphi du^2 - df dv^2),$$

откуда

$$d\left(\frac{\varphi du^2 - f dv^2}{du^2 + dv^2}\right) = 0.$$

Интегрируя это соотношение, получим искомые уравнения.

969. У к а з а н и е. Проверить сначала, что

$$\rho \cos \mu = (\bar{e} \bar{r} \bar{t}),$$

где  $\bar{e}$  — единичный вектор, направленный по оси вращения;  $\bar{r}$  — радиус-вектор текущей точки геодезической, отсчитываемый от начала  $O$ , выбранного на оси вращения;  $\bar{t}$  — единичный касательный вектор геодезической. Проверить затем, что дифференциал полученного смешанного произведения равен нулю. Обратная теорема неверна, так как вдоль любой параллели указанное соотношение выполняется, однако не всякая параллель является геодезической.

970. Пусть  $r_0$  — радиус самой широкой параллели  $L$  эллипсоида вращения, а  $M_0$  — точка на этой параллели.

Рассмотрим геодезическую, проходящую через точку  $M_0$  под углом  $\mu_0 = 0$  к параллели  $L$ . По теореме Клеро вдоль этой геодезической

$$\rho \cos \mu = r_0,$$

отсюда следует, что

$$\rho = r_0, \text{ а } \cos \mu = 1.$$

Следовательно,  $\mu = 0$  и геодезическая совпадает с параллелью  $L$ .

Возьмем теперь геодезическую, пересекающую параллель под

прямым углом, т. е.  $\mu_0 = \frac{\pi}{2}$ . По теореме Клеро  $\rho \cos \mu = 0$ ,

следовательно,  $\mu = \frac{\pi}{2}$  и геодезическая совпадает с меридианом.

Пусть теперь  $0 < \mu_0 < \frac{\pi}{2}$ . Обозначив  $r_0 \cos \mu_0 = C_0$ , получим,

что вдоль геодезической  $\rho \cos \mu = C_0$ . Отсюда следует, что она пересекает все параллели эллипсоида с радиусами  $\rho < C_0$  под ненулевым углом и далее, касаясь параллели с радиусом  $\rho = C_0$ , снова уходит в сторону параллели  $L$  (рис. 185).

971. Пусть  $r_0$  — радиус самой узкой параллели  $L_0$  однополостного гиперболоида вращения, а  $M_1$  — точка, лежащая на параллели  $L_1$ , отличной от  $L_0$ .

Очевидно, что для геодезических, проходящих через точку  $M_1$ , постоянная  $C$  в теореме Клеро может принимать значения в пределах  $0 \leq C \leq r_1$ , где  $r_1$  — радиус параллели  $L_1$ .

Если  $C < r_0$ , то геодезическая пересекает все параллели поверхности под ненулевым углом.

При  $C \geq r_0$  вся геодезическая будет располагаться в той части поверхности, которая ограничена параллелью  $L$  радиуса  $C$  и содержит точку  $M_1$ , и пересекать все параллели этой части поверхности, кроме параллели  $L$ . Если  $C > r_0$ , геодезическая

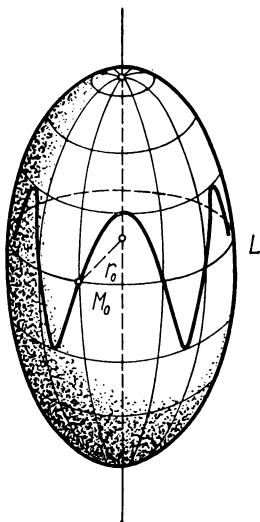


Рис. 185

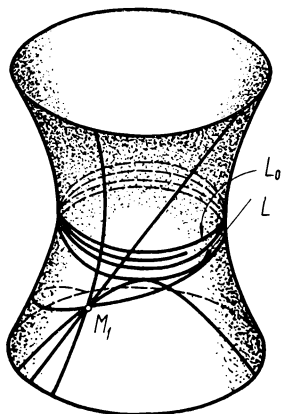


Рис. 186

касается параллели  $L$ , если же  $C = r_0$ , то геодезическая неограниченно приближается к параллели  $L$ , делая при этом неограниченное число витков на поверхности (рис. 186).

972. Пусть  $r_0$  и  $r_1$  — радиусы самой узкой и самой широкой параллелей. Постоянная  $C$  в теореме Клеро может принимать значения в пределах  $0 \leq C \leq r_1$ . Геодезическими тора являются все меридианы (при  $C = 0$ ), самая узкая параллель (при  $C = r_0$ ) и самая широкая параллель (при  $C = r_1$ ). Если  $C$  не равно указанному значению, геодезическая колеблется между двумя параллелями радиуса  $C$ , подобно синусоиде. Наконец, на торе существуют геодезические (при  $C = r_0$ ), которые навиваются на тор, неограниченно приближаясь к самой узкой параллели с обеих сторон и делая неограниченное число оборотов (рис. 187).

973. У к а з а н и е. Воспользоваться полугеодезической системой координат.

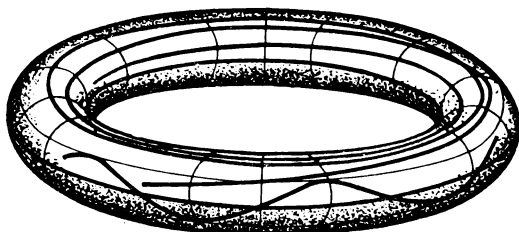


Рис. 187

974. Сфера.  
 975.  
 976. Полусфера без границы.  
 977. Шаровой пояс без границы (рис. 188).

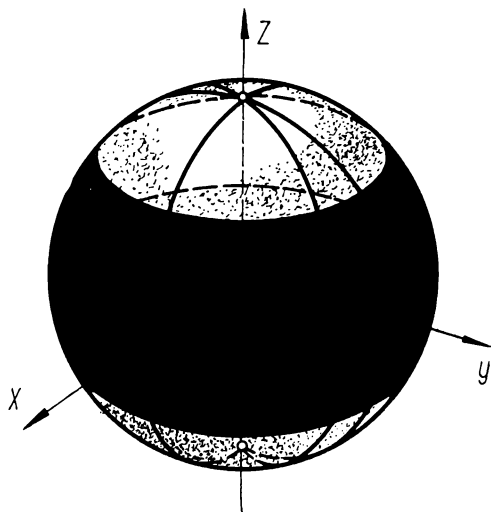


Рис. 188

978. Два шаровых сегмента без границ (рис. 189).  
 979. Большая окружность.  
 980. Половина большой окружности без концов.  
 981. Две симметричные дуги большого круга.

982. Две параллели (если нормаль направлять вне конуса).  
 983. Сфера без двух диаметрально противоположных точек.  
 984. Сфера с исключенной большой окружностью.  
 985. Дважды взятая сфера; если ось тора представлять вертикальной, то самая верхняя и самая нижняя параллели тора отображаются в полюсы сферы.

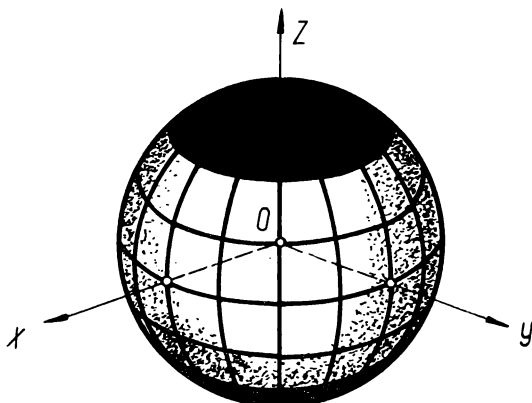


Рис. 189

986. Дважды взятая четверть большой окружности без одного конца.  
 987. Полусфера без полюса, взятая бесконечное число раз.  
 993. У к а з а н и е. Взять уравнение конической поверхности в виде  $\bar{r} = \bar{v}e(u)$ ,

где  $|\bar{e}(u)| = 1$ , и сравнить ее первую квадратичную форму с первой квадратичной формой плоскости в полярных координатах.

994. Как показано в задаче 775, первая квадратичная форма такой поверхности может быть записана в виде

$$ds^2 = [1 + v^2 k^2(u)] du^2 + 2du dv + dv^2,$$

где  $k(u)$  — кривизна линии  $l$ .

Будем деформировать линию  $l$  без растяжения так, чтобы в каждой ее точке сохранялась кривизна. Так как в выражение  $ds^2$  не входит кручение линии, то соответствующая деформация поверхности, образованной касательными к линии  $l$ , будет наложением исходной поверхности на деформированную. Превра-



тив линию  $l$  в плоскую, мы наложим тем самым поверхность касательных на плоскость.

996. Поверхность развертывающаяся.

997. Только у развертывающихся.

999. Примем одно из заданных семейств геодезических за координатные линии  $u$  полугеодезической системы координат. Тогда  $ds^2 = du^2 + G(u, v) dv^2$ .

Если  $\varphi$  — угол между координатными линиями  $u$  и геодезическими линиями второго семейства, то

$$\cos \varphi = \frac{du}{\sqrt{du^2 + G dv^2}}.$$

Из условия постоянства угла  $\varphi$  получим

$$\frac{du}{dv} = a \sqrt{G},$$

где  $a = \text{const}$ .

Подставляя это в дифференциальное уравнение геодезических линий, получим  $G_u = 0$ , следовательно,  $G = G(v)$ , и первая квадратичная форма приводится к виду

$$ds^2 = dx^2 + dy^2.$$

Обратно, пусть  $S$  — развертывающаяся поверхность. Так как она наложима на плоскость, а при наложении геодезические линии переходят в геодезические и углы между линиями сохраняются, то достаточно отметить, что на плоскости указанные семейства геодезических существуют.

1000. Образующая конической поверхности, на которой находится точка геодезической линии, лежит в спрямляющей плоскости этой линии. Поэтому перпендикуляр, опущенный из вершины конуса на соприкасающуюся плоскость, пересекает касательную. Длина его

$$d = p \sin \alpha,$$

где  $p$  — отрезок образующей,  $\alpha$  — угол между последней и касательной. При наложении конической поверхности на плоскость геодезическая линия превращается в прямую, и расстояние  $d$  вдоль нее постоянно. Но величины  $p$  и  $\alpha$  имеют то же самое значение, что и на конусе, поэтому и на конусе  $p \sin \alpha = d$  также постоянно.

Чтобы доказать обратную теорему, достаточно установить, что линии с указанным свойством при наложении конуса на плоскость превращаются в прямые.

1001. Возьмем на поверхности полугеодезическую систему координат. Тогда

$$ds^2 = du^2 + G(u, v) dv^2.$$

На линии  $u=0$   $\sqrt{G}|_{u=0}=1$ . Из уравнения геодезических линий получим, кроме того,  $\left. \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} \right|_{u=0} = 0$ . В полугеодезической системе координат

$$K = -\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial u^2}$$

(см. задачу 850).

1. Если  $K=0$ , то

$$\frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial u^2} = 0$$

и решением этого уравнения, удовлетворяющим указанным выше начальным условиям, будет  $\sqrt{G}=1$ . Поэтому для всех поверхностей нулевой полной кривизны первая квадратичная форма приводится к виду

$$ds^2 = du^2 + dv^2,$$

и, следовательно, все они наложимы друг на друга.

2. Если  $K = \frac{1}{a^2}$  ( $a = \text{const}$ ), то

$$\sqrt{G} = \cos \frac{u}{a} \quad \text{и} \quad ds^2 = du^2 + \cos^2 \frac{u}{a} dv^2.$$

3. Если  $K = -\frac{1}{a^2}$  ( $a = \text{const}$ ), то

$$ds^2 = du^2 + \text{ch}^2 \frac{u}{a} dv^2.$$

**1004.** Первая квадратичная форма прямого геликоида

$$x = u \cos v, \quad y = u \sin v, \quad z = av$$

имеет вид

$$ds^2 = du^2 + (u^2 + a^2) dv^2. \quad (*)$$

Пусть катеноид получен вращением цепной линии

$$x = a \operatorname{ch} \frac{z}{a}, \quad y = 0$$

вокруг оси  $Oz$ . Параметрические уравнения цепной линии можно представить в виде

$$x = \sqrt{u^2 + a^2}, \quad y = 0, \quad z = a \ln \frac{u + \sqrt{u^2 + a^2}}{a},$$

в чем можно убедиться непосредственной проверкой. Тогда параметрические уравнения катеноида будут

$$x = \sqrt{u^2 + a^2} \cos v,$$

$$y = \sqrt{u^2 + a^2} \sin v,$$

$$z = a \ln \frac{u + \sqrt{u^2 + a^2}}{a}.$$

Вычислив теперь первую квадратичную форму катеноида, получим (\*).

1005. Как видно из предыдущей задачи, асимптотические линии геликоида, т. е. его прямолинейные образующие и винтовые линии, переходят в линии кривизны катеноида (параллели и меридианы). Так как обе поверхности минимальны, то в каждой точке линии кривизны делят пополам углы между асимптотическими линиями. Отсюда и следует утверждение задачи.

1009. Дифференцируя условия ортонормированности репера

$$(A, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$$

$$\bar{e}_i \bar{e}_j = \delta_{ij}$$

и пользуясь формулами (3) § 22, получим:

$$d\bar{e}_i \bar{e}_j + \bar{e}_i d\bar{e}_j = 0, \quad \omega_i^k \bar{e}_k \bar{e}_j + \bar{e}_i \omega_j^k \bar{e}_k = 0,$$

$$\omega_i^k \delta_{kj} + \omega_j^k \delta_{ik} = 0, \quad \omega_i^j + \omega_j^i = 0.$$

1011. Обозначим через  $(F)$  развертывающуюся поверхность, образованную нормальными к поверхности  $(A)$  вдоль линии кривизны. Тогда радиус-вектор произвольной точки  $F$  поверхности  $(F)$  представляется в виде  $\bar{F} = \bar{A} + \lambda \bar{e}_3$ . Найдем дифференциал этого вектора при условии, что координатная плоскость  $A\bar{e}_1\bar{e}_2$  совпадает с касательной плоскостью к поверхности в этой точке

$$d\bar{F} = (\omega^1 + \lambda \omega_3^1) \bar{e}_1 + (\omega^2 + \lambda \omega_3^2) \bar{e}_2 + d\lambda \bar{e}_3. \quad (*)$$

Если ось  $A\bar{e}_1$  касается одной из линий кривизны, то при смещении точки  $A$  по этой линии

$$d_1 \bar{A} = \omega^1 \bar{e}_1, \quad \omega^2 = 0.$$

Если  $F$  — точка ребра возврата поверхности  $(F)$ , то векторы

$d\bar{F}$  и  $\bar{e}_3$  коллинеарны и из соотношения (\*) получим

$$\omega^1 + \lambda_1 \omega_3^1 = 0, \quad \lambda_1 \neq 0, \quad \omega_3^2 = 0.$$

Аналогично, если ось  $A\bar{e}_2$  касается линии кривизны второго семейства, то

$$\omega^2 + \lambda_2 \omega_3^2 = 0, \quad \lambda_2 \neq 0, \quad \omega_3^1 = 0.$$

З а м е ч а н и е. Мы исключаем из рассмотрения точки округления поверхности.

1012. Имеем

$$d\bar{A} = \omega^1 \bar{e}_1 + \omega^2 \bar{e}_2,$$

где

$$\omega^1 = a_1^1(u^1, u^2) du^1 + a_2^1(u^1, u^2) du^2,$$

$$\omega^2 = a_1^2(u^1, u^2) du^1 + a_2^2(u^1, u^2) du^2.$$

Сместимся вдоль первой координатной линии. Тогда  $du^2 = 0$ , и так как  $d\bar{A}$  коллинеарно  $\bar{e}_1$ , то  $a_1^2(u^1, u^2) = 0$ . Аналогично,  $a_2^1(u^1, u^2) = 0$ . За счет изменения направления отсчета координат  $u^1$  и  $u^2$  всегда можно добиться того, чтобы функции  $a_1^1(u^1, u^2)$  и  $a_2^2(u^1, u^2)$  были положительными. Полагая

$$a_1^1(u^1, u^2) = \sqrt{g_{11}(u^1, u^2)}, \quad a_2^2(u^1, u^2) = \sqrt{g_{22}(u^1, u^2)},$$

получим искомые выражения для  $\omega^1$  и  $\omega^2$ .

1013. Это следует из двух предыдущих задач, если ввести обозначения

$$p_1 = \frac{1}{\lambda_1}, \quad p_2 = \frac{1}{\lambda_2}, \quad q_1 = \frac{a_{11}^2}{\sqrt{g_{11}}}, \quad q_2 = \frac{a_{12}^2}{\sqrt{g_{22}}}.$$

1015. Рассмотрим некоторый ортонормированный репер

$$(\bar{A}_0, \bar{e}_1^0, \bar{e}_2^0, \bar{e}_3^0)$$

с началом в точке  $A$ . Если система (9) § 22 вполне интегрируема, то существует единственное решение

$$\bar{A} = \bar{A}(u^1, u^2), \quad \bar{e}_i = \bar{e}_i(u^1, u^2),$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$\bar{A}(u_0^1, u_0^2) = \bar{A}_0, \quad \bar{e}_i(u_0^1, u_0^2) = \bar{e}_i^0.$$

Геометрически это означает существование поверхности, с каждой точкой которой связан ортонормированный репер  $(\bar{A}, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ .

1018. Рассмотрим формулу для нормальной кривизны линии на поверхности

$$k_n = \frac{\bar{e}_3 d^2 \bar{A}}{d\bar{A}^2} = p_1 g_{11} \left( \frac{du^1}{ds} \right)^2 + p_2 g_{22} \left( \frac{du^2}{ds} \right)^2.$$

Так как первая главная кривизна равна нормальной кривизне первой координатной линии, то, полагая  $du^2=0$ , получим

$$k_1 = p_1 \frac{g_{11} du^1{}^2}{ds^2}.$$

Из первой квадратичной формы поверхности

$$ds^2 = d\bar{A}^2 = g_{11} du^1{}^2 + g_{22} du^2{}^2$$

следует, что при  $du^2=0$

$$ds^2 = g_{11} du^1{}^2.$$

Таким образом,  $k_1 = p_1$ . Аналогично,  $k_2 = p_2$ .

1019. Смещение точки с радиус-вектором  $\bar{F} = \bar{A} + \lambda \bar{e}_1$ , принадлежащей прямой  $Ae_1$ :

$$d(\bar{A} + \lambda \bar{e}_1) = (\sqrt{g_{11}} du^1 + d\lambda) \bar{e}_1 + [\sqrt{g_{22}} du^2 + \lambda(q_1 \sqrt{g_{11}} du^1 + q_2 \sqrt{g_{22}} du^2)] \bar{e}_2 + p_1 \sqrt{g_{11}} du^1 \bar{e}_3.$$

Когда точка  $A$  смещается по первой координатной линии, т. е.

$$d_1 \bar{A} = \sqrt{g_{22}} du^2 \bar{e}_2, \quad du^1 = 0,$$

точка  $F$  смещается по ребру возврата, т. е. вектор  $d_1(\bar{A} + \lambda \bar{e}_1)$  коллинеарен вектору  $\bar{e}_1$ , откуда

$$d_1(\bar{A} + \lambda \bar{e}_1) = d\lambda \bar{e}_1, \quad 1 + \lambda q_2 = 0.$$

Аналогично, получим  $1 - \lambda q_1 = 0$ .

1020. Рассмотрим в некоторой точке поверхности единичный вектор

$\frac{d\bar{A}}{ds}$  касательной к какой-либо линии, проходящей через эту точку. Если обозначить через  $\varphi$  угол этого вектора с вектором  $\bar{e}_1$ , то

$$\frac{d\bar{A}}{ds} = \cos \varphi \bar{e}_1 + \sin \varphi \bar{e}_2.$$

С другой стороны, из формул (8) § 22

$$\frac{d\bar{A}}{ds} = \sqrt{g_{11}} \frac{du^1}{ds} \bar{e}_1 + \sqrt{g_{22}} \frac{du^2}{ds} \bar{e}_2.$$

Следовательно,

$$\cos \varphi = \sqrt{g_{11}} \frac{du^1}{ds}, \quad \sin \varphi = \sqrt{g_{22}} \frac{du^2}{ds}.$$

Сопоставляя это с формулой для нормальной кривизны линии на поверхности

$$k_n = p_1 g_{11} \left( \frac{du^1}{ds} \right)^2 + p_2 g_{22} \left( \frac{du^2}{ds} \right)^2,$$

получим

$$k_n = p_1 \cos^2 \varphi + p_2 \sin^2 \varphi.$$

- 1021.** Выберем в касательной плоскости к поверхности ( $A$ ) в некоторой ее точке  $A$  декартову прямоугольную систему координат ( $A, \bar{e}_1, \bar{e}_2$ ), и координаты произвольной точки в этой системе будем обозначать  $x$  и  $y$ . Если  $\varphi$  — угол между первой координатной линией и произвольным нормальным сечением, то из определения индикатрисы Дюпена следует

$$x = \frac{\cos \varphi}{\sqrt{|k_n|}}, \quad y = \frac{\sin \varphi}{\sqrt{|k_n|}}.$$

Тогда из формулы Эйлера

$$k_n = p_1 \cos^2 \varphi + p_2 \sin^2 \varphi$$

получим

$$p_1 x^2 + p_2 y^2 = \pm 1.$$

- 1022.** У к а з а н и е. Формула следует из первых трех уравнений системы (10) § 22.

- 1023.** При смещении по асимптотической линии

$$\bar{e}_3 d^2 \bar{A} = p_1 g_{11} du^1{}^2 + p_2 g_{22} du^2{}^2 = 0.$$

Поэтому из уравнений (8) § 22 и формулы  $K = p_1 p_2$  следует

$$K d\bar{A}^2 + d\bar{e}_3^2 = 0,$$

откуда

$$K + \left( \frac{d\bar{e}_3}{ds} \right)^2 = 0.$$

Так как вдоль асимптотической линии вектор бинормали  $\bar{b}$  совпадает с вектором  $\bar{e}_3$ , то

$$\frac{d\bar{e}_3}{ds} = -\chi \bar{n}.$$

Следовательно,

$$K + \chi^2 = 0.$$

1024. Указанные выражения получаются из формул (8) § 22 и

$$k_g = \left( -e_3 \frac{d\bar{A}}{ds} \frac{d^2\bar{A}}{ds^2} \right).$$

1025. Указанное уравнение геодезических получим, заменяя в уравнении

$$(\bar{e}_3 d\bar{A} d^2\bar{A}) = 0$$

$d\bar{A}$  и  $d^2\bar{A}$ , по формулам (8) § 22.

1026. Рассмотрим на поверхности векторы  $\bar{a} = a^\alpha \bar{e}_\alpha$ ,  $\bar{b} = b^\alpha \bar{e}_\alpha$ . При их параллельном перенесении по поверхности, согласно формулам (5) и (6) § 22, имеем

$$d\bar{a} = a^\beta \omega_\beta^3 \bar{e}_3, \quad d\bar{b} = b^\beta \omega_\beta^3 \bar{e}_3,$$

$$d(\bar{a} \bar{b}) = d\bar{a} \bar{b} + \bar{a} d\bar{b} = (a^\beta \omega_\beta^3 \bar{e}_3) b^\alpha \bar{e}_\alpha + a^\alpha \bar{e}_\alpha (b^\beta \omega_\beta^3 \bar{e}_3).$$

Так как  $\bar{e}_3 \bar{e}_\alpha = 0$ , то  $d(\bar{a} \bar{b}) = 0$ , и, следовательно, скалярное произведение векторов при их параллельном перенесении сохраняется. А поэтому сохраняются также длины векторов и углы между ними.

1027. Из уравнений (4) § 22 с учетом того, что  $\omega^3 = 0$ , получим

$$\frac{d\bar{A}}{ds} = \frac{\omega^\alpha \bar{e}_\alpha}{(\omega^{12} + \omega^{22})^{1/2}}.$$

Продифференцируем это выражение

$$\begin{aligned} d \frac{d\bar{A}}{ds} &= \left\{ \frac{d\omega^\alpha + \omega^\beta \omega_\beta^\alpha}{(\omega^{12} + \omega^{22})^{1/2}} - \frac{\omega^1 d\omega^1 + \omega^2 d\omega^2}{(\omega^{12} + \omega^{22})^{3/2}} \omega^\alpha \right\} \bar{e}_\alpha + \\ &+ \frac{\omega^\beta \omega_\beta^3}{(\omega^{12} + \omega^{22})^{1/2}} \bar{e}_3 = D \frac{d\bar{A}}{ds} + \frac{\omega^\beta \omega_\beta^3}{(\omega^{12} + \omega^{22})^{1/2}} \bar{e}_3. \end{aligned}$$

Выражение для  $D \frac{d\bar{A}}{ds}$  можно представить в виде

$$D \frac{d\bar{A}}{ds} = \frac{\omega^1 d\omega^2 - \omega^2 d\omega^1 + \omega_1^2 (\omega^{12} + \omega^{22})}{(\omega^{12} + \omega^{22})^{3/2}} (\omega^1 \bar{e}_2 - \omega^2 \bar{e}_1).$$

Обращение в нуль абсолютного дифференциала  $D \frac{d\bar{A}}{ds}$  равносильно равенству

$$\omega^1 d\omega^2 - \omega^2 d\omega^1 + \omega_1^2 (\omega^{1^2} + \omega^{2^2}) = 0,$$

которое совпадает с уравнением геодезических линий (11) § 22.

1028. Дифференцируя соотношение  $\bar{a} \bar{e}_1 = \cos \varphi$ , находим

$$-\sin \varphi d\varphi = d\bar{a} \cdot \bar{e}_1 + \bar{a} d\bar{e}_1 = a \alpha \omega_\alpha^3 \bar{e}_3 + \bar{a} d\bar{e}_1 = \bar{a} d\bar{e}_1.$$

Если вместо вектора  $\bar{a}$  брать другие параллельно переносимые вдоль данной линии векторы, то углы  $\varphi$ , образуемые ими с вектором  $\bar{a}$ , будут отличаться друг от друга на постоянную величину, так как углы между векторами при их параллельном перенесении сохраняются. Следовательно,  $d\varphi$  при любом выборе параллельно переносимого вектора будет иметь одно и то же значение. Выбирая в качестве вектора  $\bar{a}$  вектор  $\bar{e}_2$ , получим

$$-d\varphi = \bar{e}_2 d\bar{e}_1 = \omega_1^2 = q_1 \sqrt{g_{11}} du^1 + q_2 \sqrt{g_{22}} du^2.$$

1029. Из формулы (12) § 22

$$\Delta\varphi = \oint_L -(q_1 \sqrt{g_{11}} du^1 + q_2 \sqrt{g_{22}} du^2).$$

По формуле

$$\oint_L P dx + Q dy = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy,$$

используя (10) § 22, найдем

$$\Delta\varphi = \iint_D K \sqrt{g_{11} g_{22}} du^1 du^2.$$

Так как

$$K = p_1 p_2, \quad d\sigma = \sqrt{g_{11} g_{22}} du^1 du^2,$$

то

$$\Delta\varphi = \iint_D K d\sigma.$$

1030. Пусть  $\frac{d\bar{A}}{ds}$  — единичный вектор касательной к контуру  $L$  в точке  $A$ ;  $s$  — длина дуги линии  $L$ ;  $\bar{a}$  — единичный вектор



на поверхности, параллельно обносимый по контуру  $L$ . В этом случае

$$\cos \psi = \bar{a} \frac{d\bar{A}}{ds}, \quad d\bar{a} = a\omega_{\alpha}^3 e_3.$$

Отсюда

$$-\sin \psi d\psi = \bar{a} \frac{d^2 \bar{A}}{ds^2} ds.$$

Пусть в некоторой точке  $A_0$  контура  $L$

$$\psi = \frac{\pi}{2}, \quad \bar{a} = \left[ \frac{d\bar{A}}{ds} e_3 \right].$$

Тогда

$$d\psi = \left( e_3 \frac{d\bar{A}}{ds} \frac{d^2 \bar{A}}{ds^2} \right) ds$$

или

$$d\psi = k_g ds.$$

После полного обхода точки  $A$  по границе  $L$  из начального

положения  $A_0$  вектор  $\frac{d\bar{A}}{ds}$  повернется на угол  $2\pi$ ; угол пово-

рота вектора  $\bar{a}$  относительно вектора  $\frac{d\bar{A}}{ds}$

$$\Delta\psi = \oint_L k_g ds.$$

Следовательно,

$$\Delta\varphi + \Delta\psi = 2\pi.$$

1033. Из формулы

$$\iint_D K d\sigma + \oint_L k_g ds = 2\pi$$

при  $k_g = 0$  следует

$$\iint_D K d\sigma = 2\pi.$$

А это равенство не может иметь места, если во всех точках поверхности  $K \leq 0$ .

1034. На плоскости  $xOy$  — внутреннюю область эллипса

$$2x^2 + 3y^2 - 2xy - 4x + 18y - 16 = 0, \quad z = 0;$$

на плоскости  $yOz$  — внутреннюю область эллипса

$$5y^2 + 8z^2 + 32y - 32z - 4 = 0, \quad x = 0;$$

на плоскости  $xOz$  — внутреннюю область эллипса

$$23x^2 + 54z^2 + 18x - 216z - 324 = 0, \quad y = 0.$$

1037. Покажем, что каждая из рассматриваемых асимптотических линий  $l$  — прямая. Положим противное. Нормали к поверхности вдоль линии  $l$  параллельны фиксированной плоскости, поэтому  $\overline{m} \overline{e} = 0$ , где  $\overline{e}$  — постоянный вектор. Так как на асимптотической вектор бинормали  $\overline{b} = \pm \overline{m}$ , то  $\overline{b} \overline{e} = 0$ . Дифференцируя это равенство, получим

$$\kappa(\overline{n} \overline{e}) = 0.$$

Но  $\kappa \neq 0$ , ибо в противном случае  $\overline{b} = \overline{m}$  — постоянный вектор, и сферическим изображением асимптотической линии будет точка.  
Итак,

$$\overline{b} \overline{e} = \overline{n} \overline{e} = 0,$$

следовательно,  $\overline{t} = \pm \overline{e}$ , откуда

$$\frac{d\overline{t}}{ds} = k\overline{n} = 0 \quad \text{и} \quad k = 0,$$

вопреки предположению. Итак, поверхность  $S$  — линейчатая. Она не может быть развертывающейся, так как в этом случае сферическим изображением асимптотической линии является точка.

1038. Если записать уравнение поверхности вращения в виде

$$x = \varphi(u) \cos v, \quad y = \varphi(u) \sin v, \quad z = u, \quad (*)$$

то обращение в нуль средней кривизны дает

$$1 + \varphi'^2 - \varphi\varphi'' = 0.$$

Произведем замену переменных, взяв за новую функцию

$$p = \frac{\partial \varphi}{\partial u} \quad \text{и за новую независимую переменную } \varphi. \quad \text{Тогда}$$

$$1 + p^2 - \varphi p \frac{dp}{d\varphi} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{d\varphi}{\varphi} = \frac{1}{2} d(\ln(1 + p^2)),$$

откуда

$$c^2 \varphi^2 = 1 + p^2.$$

Переходя к прежним переменным, получим

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{c^2 \varphi^2 - 1}} = du.$$

Интегрируя, найдем

$$\varphi = c_1 \operatorname{ch} \frac{u + c_2}{c_1}.$$

Таким образом, получается цепная линия, а поверхность (\*) есть катеноид. Кроме того, минимальной поверхностью вращения является плоскость. Из нашего исследования этот случай выпал, так как плоскость, перпендикулярная оси  $Oz$ , не может быть задана уравнениями (\*).

- 1039.** Средняя кривизна прямого геликоида равна нулю, поэтому он является минимальной поверхностью.

Обратно, предположим, что поверхность  $S$  — минимальная. На такой поверхности сеть асимптотических линий ортогональна. Так как прямолинейные образующие — асимптотические линии, то другое семейство представляет семейство их ортогональных траекторий.

Соприкасающаяся плоскость в точке асимптотической линии является касательной плоскостью к поверхности. Она содержит прямолинейную образующую, проходящую через эту точку, следовательно, эта прямолинейная образующая является главной нормалью рассматриваемой асимптотической линии.

Итак, прямолинейные образующие поверхности  $S$  есть главные нормали их ортогональных траекторий, следовательно, каждая из ортогональных траекторий есть линия Бертрона.

Так как этих линий бесконечное множество, то они являются винтовыми (см. задачу 606).

Значит, поверхность  $S$  образована главными нормальными винтовой линии. Это — прямой геликоид (см. задачу 672).

- 1040.** Полагаем

$$y = ux, \quad x = v.$$

Тогда уравнения искомой поверхности в параметрическом виде будут

$$x = v, \quad y = uv, \quad z = f(u).$$

Находим

$$E = v^2 + f'^2, \quad F = uv, \quad G = 1 + u^2,$$

$$L = -\frac{vf''}{v^2 + (1 + u^2)f'^2}, \quad M = \frac{f'}{v^2 + (1 + u^2)f'^2}, \quad N = 0.$$

Подставляя эти выражения в уравнение

$$EN - 2FM + GL = 0,$$

характеризующее минимальные поверхности, получим

$$2uf'(u) + (1 + u^2)f''(u) = 0,$$

$$\frac{f''(u)}{f'(u)} + \frac{2u}{1 + u^2} = 0, \quad \ln(1 + u^2) + \ln f'(u) = \ln a \quad (a = \text{const}),$$

$$(1+u^2)f'(u)=a, \quad f'(u)=\frac{a}{1+u^2}.$$

Интегрируя это уравнение, получим

$$f(u)+b=z+b=a \operatorname{arctg} u.$$

Следовательно,

$$u=\operatorname{tg} \frac{z+b}{a},$$

$$\frac{y}{x}=\operatorname{tg} \frac{z+b}{a}.$$

Это неявное уравнение прямого геликонда

$$x=\tilde{u} \cos \tilde{v}, \quad y=\tilde{u} \sin \tilde{v}, \quad z=a\tilde{v}-b.$$

1041. Коэффициенты первой и второй квадратичных форм поверхностей  $S$  и  $S^*$  связаны соотношениями

$$E^*=(1-a^2K)E+2a(aH-1)L,$$

$$F^*=(1-a^2K)F+2a(aH-1)M,$$

$$G^*=(1-a^2K)G+2a(aH-1)N,$$

$$L^*=aKE+(1-2aH)L,$$

$$M^*=aKF+(1-2aH)M,$$

$$N^*=aKG+(1-2aH)N.$$

Отсюда получаем искомые выражения

$$K^*=\frac{K}{1-2aH+a^2K},$$

$$H^*=\frac{H-aK}{1-2aH+a^2K}.$$

1042. Подставляя  $a=1:2H$  в формулу

$$K^*=\frac{K}{1-2aH-a^2K},$$

получим

$$K^*=4H^2=\operatorname{const}.$$

1043. Пусть на поверхности  $S$  координатные линии совпадают с линиями кривизны. Используя формулу Родрига, получим

$$\bar{r}_u^*=(1-ak_1)\bar{r}_u, \quad \bar{r}_v^*=(1-ak_2)\bar{r}_v.$$

Следовательно, коэффициенты первых квадратичных форм поверхностей  $S$  и  $S^*$  связаны соотношениями

$$E^*=(1-ak_1)^2E, \quad G^*=(1-ak_2)G, \quad F^*=F=0.$$

Отсюда

$$dS = EG, \quad dS^* = (1 - ak_1)(1 - ak_2)dS$$

и

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{dS - dS^*}{2adS} = \lim_{a \rightarrow 0} \left( \frac{k_1 + k_2}{2} + \frac{1}{2} ak_1 k_2 \right) = \frac{k_1 + k_2}{2} = H.$$

1044. Пусть  $S$  — минимальная поверхность, а  $S^*$  — параллельная ей поверхность, причем расстояние между ними по нормали равно  $a$ . Как следует из задачи 1043, соответствующие элементы площадей поверхностей  $S^*$  и  $S$  связаны соотношением

$$dS^* = (1 + a^2 K) dS,$$

где  $K$  — полная кривизна поверхности  $S$ . Следовательно,

$$\iint_D dS^* = \iint_D dS + a^2 \iint_D K dS.$$

Так как на минимальной поверхности  $K \leq 0$ , то

$$\iint_D dS^* \leq \iint_D dS.$$

1047. Для того чтобы прямые имели огибающую (т. е. образовали развертывающуюся поверхность), нужно положить

$$p = c \pm \frac{t^2}{2}, \quad c = \text{const.}$$

Геометрическое место ребер возврата определяется уравнением

$$9(xz - y)^2 - 4z^6 = 0.$$

Уравнения ребер возврата

$$x = c \pm \frac{t^2}{2}; \quad y = -\frac{t^3}{6} \mp ct; \quad z = \mp t.$$

Линия пересечения с плоскостью  $xOy$

$$8(x - c)^3 - 9y^2 = 0.$$

1048. Примем ось цилиндра за ось  $Oz$ , а ось  $Ox$  расположим в секущей плоскости. Тогда уравнение цилиндра будет иметь вид

$$x = a \cos t, \quad y = a \sin t, \quad z = u,$$

а уравнение секущей плоскости —

$$z = Ay.$$

Разрежем цилиндр по образующей, пересекающей ось  $Ox$ , и наложим его на плоскость  $xOz$ . Так как после наложения роль абсциссы будет играть длина дуги перпендикулярного сечения цилиндра  $s = at$ , то уравнение искомой линии будет

$$z = aA \sin \frac{s}{a}.$$

Синусоида.

- 1049.** Пусть плоскость  $\delta$ , проходящая через прямую  $d$ , пересекает сферу по окружности  $\gamma$ . Рассмотрим круговой конус, касающийся сферы вдоль  $\gamma$ . Его образующие касаются ортогональных траекторий окружности. Но вершины всех таких конусов лежат на прямой  $d'$ , полярной  $d$ . Следовательно, ортогональными траекториями будут окружности, образованные пересечением сферы с пучком плоскостей, проходящих через  $d'$ .
- 1050.** Общее уравнение движения точки по поверхности имеет вид

$$m \frac{d^2 \bar{r}}{dt^2} = \bar{F} + R \bar{m} - \mu |R| \bar{t},$$

где  $\bar{F}$  — внешняя сила,  $R$  — нормальная реакция поверхности,  $\mu$  — коэффициент трения,  $\bar{t}$  — единичный вектор касательной к траектории и  $\bar{m}$  — единичный вектор нормали к поверхности. Так как

$$\frac{d^2 \bar{r}}{dt^2} = \frac{d^2 s}{dt^2} \bar{t} + \left( \frac{ds}{dt} \right)^2 \frac{d\bar{t}}{ds},$$

то при  $\bar{F} = 0$  уравнение движения примет вид

$$m \left[ \frac{d^2 s}{dt^2} \bar{t} + \left( \frac{ds}{dt} \right)^2 \frac{d\bar{t}}{ds} \right] = R \bar{m} - \mu |R| \bar{t}.$$

Умножая его скалярно на  $[\bar{t} \bar{m}]$ , получим

$$\left( \bar{t} \bar{m} \frac{d\bar{t}}{ds} \right) = \left( \frac{d\bar{r}}{ds} \bar{m} \frac{d^2 \bar{r}}{ds^2} \right) = 0,$$

т. е. точка движется по геодезической линии (см. задачу 946).

- 1051.**  $X = F_x \Phi$ ,  $Y = F_y \Phi$ ,  $Z = F_z \Phi$ ,

где  $\Phi = \frac{x F_x + y F_y + z F_z}{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$ , а точка  $M(x, y, z)$  удовлетворяет

уравнению

$$F(x, y, z) = 0.$$

- 1052.**  $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2 x^2 + \epsilon b^2 y^2 + \epsilon' c^2 z^2$ .

- 1053.**  $2z(x^2 + y^2 + z^2) = ax^2 + by^2$ .

- 1054.**  $z(x^2 + y^2 + z^2) + axy = 0$ .

1055. Точка

$$\frac{\bar{M}(t+\Delta t) - \bar{M}(t)}{\Delta t},$$

лежащая на прямой, соединяющей точки  $\bar{M}(t)$  и  $\bar{M}(t+\Delta t)$ ,  
в пределе при  $\Delta t \rightarrow 0$  переходит в точку  $\frac{d\bar{M}}{dt}$ , лежащую на  
касательной к линии  $\bar{M} = \bar{M}(t)$  в точке  $\bar{M}(t)$ .

1057. Запишем уравнение касательной плоскости к поверхности

$$x^i = x^i(u, v)$$

в виде

$$\begin{vmatrix} X^0 & X^1 & X^2 & X^3 \\ x^0 & x^1 & x^2 & x^3 \\ x^0_u & x^1_u & x^2_u & x^3_u \\ x^0_v & x^1_v & x^2_v & x^3_v \end{vmatrix} = 0. \quad (*)$$

Пусть проективное преобразование задается формулами

$$x^i = \beta_j^i \tilde{x}^j, \quad \det(\beta_j^i) \neq 0, \quad (**)$$

где  $x^i$  — координаты произвольной точки пространства, а  $\tilde{x}^j$  — координаты ее образа при рассматриваемом проективном преобразовании. Вставляя выражения  $x^i$  из формул (\*\*) в уравнение (\*), получим уравнение образа плоскости (\*)

$$\begin{vmatrix} \beta_j^0 \tilde{X}^j & \beta_j^1 \tilde{X}^j & \beta_j^2 \tilde{X}^j & \beta_j^3 \tilde{X}^j \\ \beta_j^0 \tilde{x}^j & \beta_j^1 \tilde{x}^j & \beta_j^2 \tilde{x}^j & \beta_j^3 \tilde{x}^j \\ \beta_j^0 \tilde{x}^j_u & \beta_j^1 \tilde{x}^j_u & \beta_j^2 \tilde{x}^j_u & \beta_j^3 \tilde{x}^j_u \\ \beta_j^0 \tilde{x}^j_v & \beta_j^1 \tilde{x}^j_v & \beta_j^2 \tilde{x}^j_v & \beta_j^3 \tilde{x}^j_v \end{vmatrix} = 0.$$

Его можно переписать в виде

$$|\tilde{X} \tilde{M} \tilde{M}_u \tilde{M}_v| \det(\beta_j^i) = 0$$

или

$$|\tilde{X} \tilde{M} \tilde{M}_u \tilde{M}_v| = 0.$$

Но это уравнение задает касательную плоскость к преобразованной поверхности.

- 1058.** *Первый способ.* Если представить линию как пересечение двух поверхностей, то касательная к линии в некоторой ее точке будет пересечением касательных плоскостей к указанным поверхностям в рассматриваемой точке. Теперь решение следует из предыдущей задачи.

*Второй способ.* При проективном преобразовании

$$x^i = \beta_j^i \tilde{x}^j, \quad \det(\beta_j^i) \neq 0$$

линия

$$x^i = x^i(t) \quad (*)$$

переходит в линию

$$\tilde{x}^j = \tilde{x}^j(t),$$

причем

$$\tilde{x}^i(t) = \beta_j^i \tilde{x}^j(t).$$

Касательная к линии (\*)

$$X^j = \alpha x^j + \beta \frac{dx^j}{dt}$$

переходит в прямую, координаты точек которой  $\tilde{X}^j$  задаются уравнениями

$$\beta_j^i \tilde{X}^j = \alpha \beta_j^i \tilde{x}^j + \beta \beta_j^i \frac{d\tilde{x}^j}{dt}. \quad (**)$$

В силу невырожденности матрицы  $(\beta_j^i)$  уравнения (\*\*) можно представить в виде

$$\tilde{X}^j = \alpha \tilde{x}^j + \beta \frac{d\tilde{x}^j}{dt}.$$

Но это есть уравнения касательной к преобразованной линии.

- 1063.** У к а з а н и е. Неплоская линия является ребром возврата огибающей семейства ее соприкасающихся плоскостей.

- 1064.** Проективное.

- 1065.** Метрическое, так как, например, окружность с помощью аффинного преобразования можно перевести в эллипс.

- 1066—** Метрическое.

- 1071.**



1072. Проективное, так как направление, сопряженное данному, определяется характеристикой семейства касательных плоскостей вдоль линии, идущей в данном направлении.

1073. Проективное.

1074— Метрическое.

1077.

1078. Проективное.

1079. Метрическое, так как, например, при аффинном преобразовании

$$\tilde{x}=x, \quad \tilde{y}=y, \quad \tilde{z}=kz$$

катеноида

$$x=a \operatorname{ch} \frac{u}{a} \cos v, \quad y=a \operatorname{ch} \frac{u}{a} \sin v, \quad z=u$$

одно из главных нормальных сечений (окружность в плоскости  $xOy$ ) не меняет своей кривизны, а второе сечение (меридиан катеноида) — меняет. В результате средняя кривизна изменится.

1080. Проективное, так как типы точек различаются количеством асимптотических направлений в данной точке поверхности.

1081. Метрическое.

1082. Проективное.

1083. Воспользуемся аффинным характером задачи. Переведем данный эллипс в окружность

$$x'^2 + y'^2 = 1$$

аффинным преобразованием

$$x' = \frac{1}{a} x, \quad y' = \frac{1}{b} y.$$

Тогда сопряженные диаметры перейдут во взаимно перпендикулярные диаметры окружности, а окружность

$$x'^2 + y'^2 = \frac{1}{2}$$

будет огибающей образов хорд эллипса. Поэтому искомой огибающей будет эллипс

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{1}{2}$$

(рис. 190).

1084. Воспользуемся аффинным характером задачи. Переведем данный эллипс в окружность

$$x'^2 + y'^2 = 1$$

аффинным преобразованием

$$x' = \frac{x}{a}, \quad y' = \frac{y}{b}$$

и воспользуемся известной формулой  $S' = S\Delta$ , где  $\Delta$  — определитель аффинного преобразования. В нашем случае  $\Delta = \frac{1}{ab}$

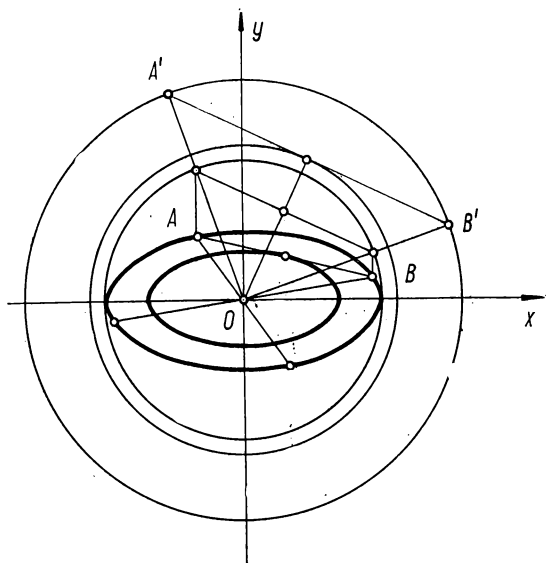


Рис. 190

и  $S' = \frac{S}{ab}$ . Огибающей образов данных прямых будет окружность радиуса  $R' = \cos S'$ , т. е.

$$x'^2 + y'^2 = R'^2.$$

Следовательно, искомое уравнение будет

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \cos^2 \frac{S}{ab}.$$

Это эллипс, подобный данному с коэффициентами подобия

$$\cos \frac{S}{ab}.$$

1085. Примем заданные прямые за оси аффинной системы координат, а за масштабные векторы на них — векторы единичной длины (рис. 191). Возьмем прямую  $AB$  семейства, перпендикулярную одной из биссектрис координатных углов. Рассмотрим гиперболу, имеющую асимптотами координатные оси и

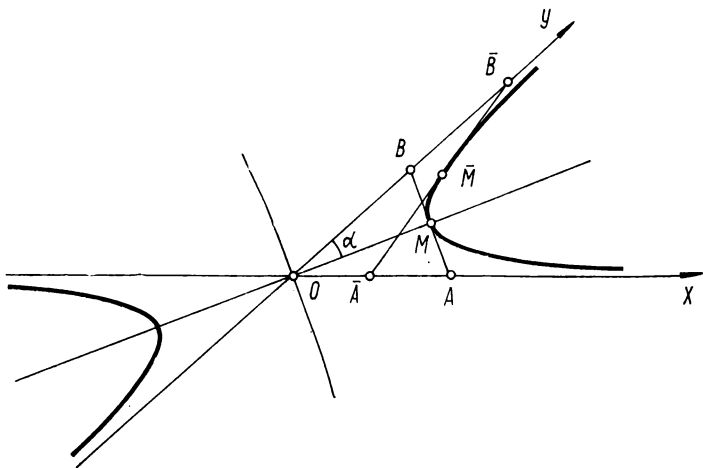


Рис. 191

касающуюся прямой  $AB$  в точке  $M(a, a)$ . Ее уравнение имеет вид  $xy=c$ . Выразим  $c$  через  $S$ .

$$OA=OB=2a, \quad S=2a^2 \sin 2\alpha.$$

Так как точка  $M$  принадлежит гиперболе, то  $a^2=c$ , и мы получим

$$c = \frac{S}{2 \sin 2\alpha}.$$

Следовательно, уравнение гиперболы будет

$$xy = \frac{S}{2 \sin 2\alpha}. \quad (*)$$

Совершим теперь гиперболический поворот, переводящий гиперболу  $(*)$  в себя, а точку  $M$  в какую-либо точку  $\bar{M}$ . Как известно, при этом хорда  $AB$  перейдет в касательную к гиперболе в точке  $\bar{M}$ , отсекающую от координатного угла треуголь-

ник той же площади  $S$ , т. е. в произвольную прямую заданного семейства.

Таким образом, гипербола (\*) является огибающей семейства прямых, отсекающих треугольники площади  $S$  от первого и третьего координатных углов. Аналогично, сопряженная гипербола

$$xy = -\frac{S}{2 \sin 2\alpha}$$

является огибающей семейства прямых, отсекающих треугольники площади  $S$  от второго и четвертого координатных углов.

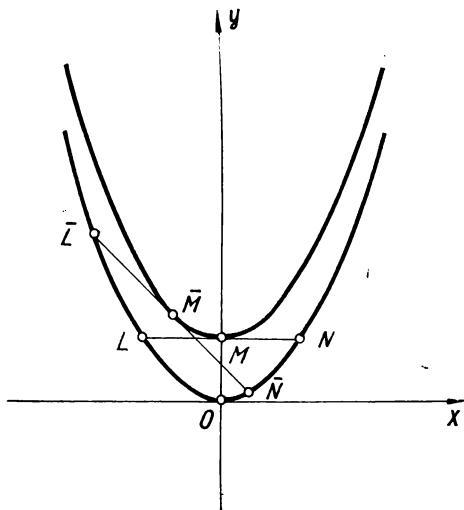


Рис. 192

1086. Рассмотрим прямую  $LN$  семейства, перпендикулярную оси  $Oy$  и пересекающую ее в точке  $M(0, b)$ . Выразим  $b$  через  $S$ :

$$S = 2 \int_0^{\sqrt{\frac{b}{a}}} ax^2 dx,$$

откуда

$$b = \left( \frac{9aS^2}{4} \right)^{\frac{1}{3}}.$$

Построим параболу, получающуюся из данной сдвигом на  $b$  вдоль оси  $Oy$  (рис. 192). Ее уравнение

$$y = ax^2 + \left( \frac{9aS^2}{4} \right)^{\frac{1}{3}}. \quad (*)$$

Совершим теперь параболический поворот, переводящий параболу (\*) в себя, а точку  $M$  в какую-либо точку  $\tilde{M}$ . При этом парабола  $y = ax^2$  также перейдет в себя, а хорда  $LN$  — в касательную к параболе (\*) в точке  $\tilde{M}$ , т. е. в произвольную прямую заданного семейства. Таким образом, парабола (\*) является искомой огибающей.

1087. Пусть

$$\bar{\rho} = r(u) + v\bar{e}(u) —$$

уравнение кривой линейчатой поверхности. Ее вторая квадратичная форма имеет вид

$$\Phi_2 = Ldu^2 + 2M du dv,$$

где

$$L = \frac{v^2(\bar{e}'\bar{e}\bar{e}'') + v[(\bar{e}'\bar{e}\bar{r}'') + (\bar{r}'\bar{e}\bar{e}'')] + (\bar{r}'\bar{e}\bar{r}'')}{\sqrt{EG - F^2}}$$

$$M = \frac{(\bar{r}'\bar{e}\bar{e}')}{\sqrt{EG - F^2}}.$$

Из условия

$$Ldu^2 + 2M du dv = 0$$

найдем, что асимптотическое направление, отличное от направления прямолинейной образующей, характеризуется вектором

$$\bar{\rho}_u + \bar{\rho}_v \frac{dv}{du} = \bar{r}' + v\bar{e}' - \frac{L}{2M} \bar{e}$$

( $M \neq 0$  по условию задачи).

Уравнение поверхности, образованной касательными к асимптотическим линиям вдоль образующей, соответствующей  $u = u_0$ , имеет вид

$$\bar{R} = \bar{r}_0 + v\bar{e}_0 + w \left( \bar{r}'_0 + v\bar{e}'_0 - \frac{L_0}{2M_0} \bar{e}_0 \right). \quad (*)$$

Выберем аффинную систему координат с началом в точке  $A_0$ ,

с радиус-вектором  $\bar{r}_0$  и с масштабными векторами координатных осей  $\bar{r}'_0, \bar{e}_0, \bar{e}'_0$ . Введем обозначения

$$\frac{(\bar{e}_0' \bar{e}_0 \bar{e}_0'')}{(\bar{r}_0' \bar{e}_0 \bar{e}_0')} = a, \quad \frac{(\bar{e}_0' \bar{e}_0 \bar{r}_0'') + (\bar{r}_0' \bar{e}_0 \bar{e}_0'')}{(\bar{r}_0' \bar{e}_0 \bar{e}_0')} = b,$$

$$\frac{(\bar{r}_0' \bar{e}_0 \bar{r}_0'')}{(\bar{r}_0' \bar{e}_0 \bar{e}_0')} = c$$

( $a, b, c$  — постоянные). Тогда уравнения поверхности (\*) можно записать в виде

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= w, \\ x_2 &= v - \frac{w}{2} (av^2 + bv + c), \\ x_3 &= vw. \end{aligned} \right\}$$

Отсюда

$$x_1 x_2 = x_3 - \frac{a}{2} x_3^2 - \frac{b}{2} x_1 x_3 - \frac{c}{2} x_1^2.$$

Преобразуя координаты по формулам

$$\widetilde{x}_1 = x_1,$$

$$\widetilde{x}_2 = \frac{c}{2} x_1 + x_2 + \frac{b}{2} x_3,$$

$$\widetilde{x}_3 = x_3,$$

получим

$$\widetilde{x}_1 \widetilde{x}_2 + \frac{a}{2} \widetilde{x}_3^2 - \widetilde{x}_3 = 0.$$

Если  $a \neq 0$ , получим однополостный гиперболоид, если  $a = 0$  — гиперболический параболоид (условие  $a = 0$  означает, что исходная поверхность состоит из прямых, параллельных некоторой плоскости).

1088.  $x^2 + y^2 = C$  — концентрические окружности и точка  $O(0, 0)$ .

1089.  $x^2 + y^2 = C$  — соасимптотические гиперболы и их асимптоты (рис. 193).

1090.  $y = Cx^2$  — параболы и прямая  $y = 0$ .

1091.  $C(x^2 + y^2) = 2x$  — окружности и прямая  $x = 0$  (рис. 194).

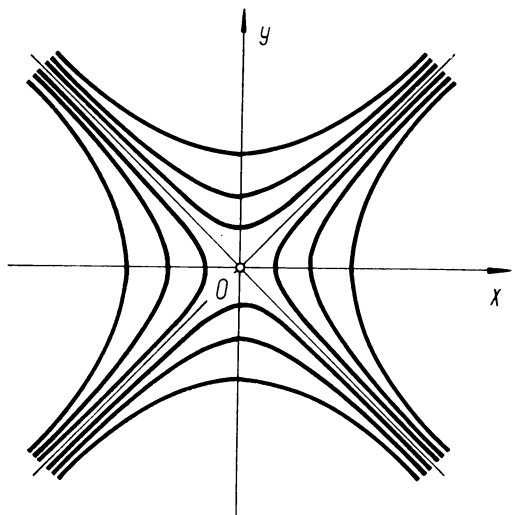


Рис. 193

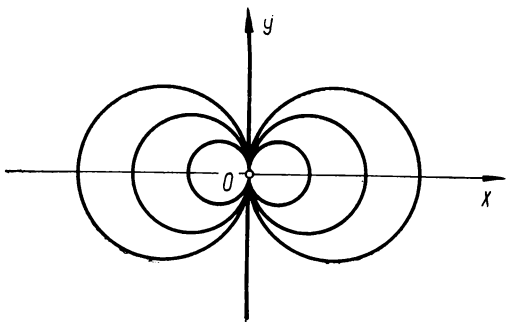


Рис. 194

1092.  $Cx^2 = 2x - y + 1$  — параболы с осями, параллельными оси  $Oy$ , проходящие через точку  $(0, 1)$  и касающиеся в этой точке прямой  $2x - y + 1 = 0$ , и сама эта прямая (рис. 195).

1093.  $x+y+z=C$  — параллельные плоскости.

1094.  $x^2+y^2+z^2=C^2$  — концентрические сферы.

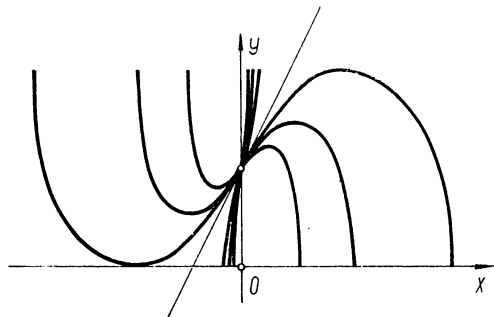


Рис. 195

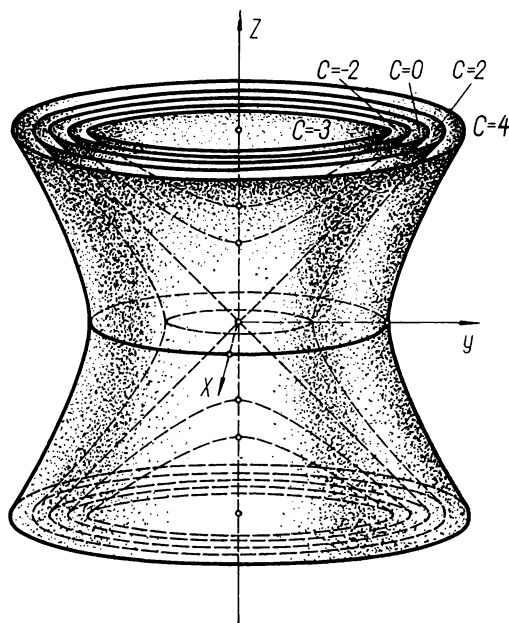


Рис. 196

1095.  $x^2+y^2-z^2=C$  — однополостные и двуполостные гиперболоиды с общим асимптотическим конусом и сам этот конус (рис. 196).



1096.  $-4C^2(x^2+y^2)+4(256-C^2)z^2=C^2(256-C^2) \quad (C \geq 0).$

При  $C=0$  получается плоскость  $xOy$ , при  $0 < C < 16$  — двуполостные гиперболоиды вращения с осью вращения  $Oz$

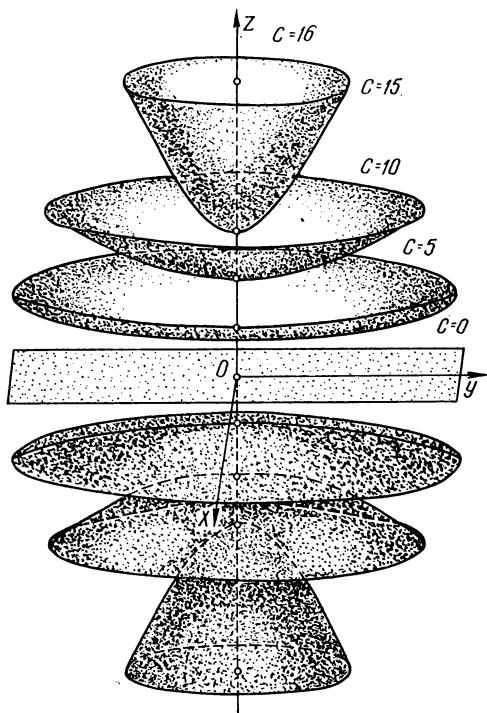


Рис. 197

(рис. 197), при  $C=16$  — ось  $Oz$ , при  $C > 16$  — эллипсоиды вращения с осью вращения  $Oz$  (рис. 198).

1097. 1.

1098. 5.

1099.  $O(0, 0), \quad M(1, 1).$

1100.  $N(7, 2, 1).$

1101.  $(2x-z-y)\bar{i} + (4y+z-x)\bar{j} + (6z-x+y)\bar{k}.$

1102.  $3(x^2-ayz)\bar{i} + 3(y^2-axz)\bar{j} + 3(z^2-axy)\bar{k}.$

1103.  $e^{x+y+z} [(1+yz)\bar{i} + (1+xz)\bar{j} + (1+xy)\bar{k}].$

1104.  $\frac{1}{1+x^2}\bar{i} + \frac{1}{1+y^2}\bar{j} + \frac{1}{1+z^2}\bar{k}.$

1105.  $9\bar{i} - 3\bar{j}.$

1106.  $|\text{grad } u| = 6, \quad \cos \alpha = \frac{2}{3}, \quad \cos \beta = -\frac{2}{3}, \quad \cos \gamma = \frac{1}{3}.$

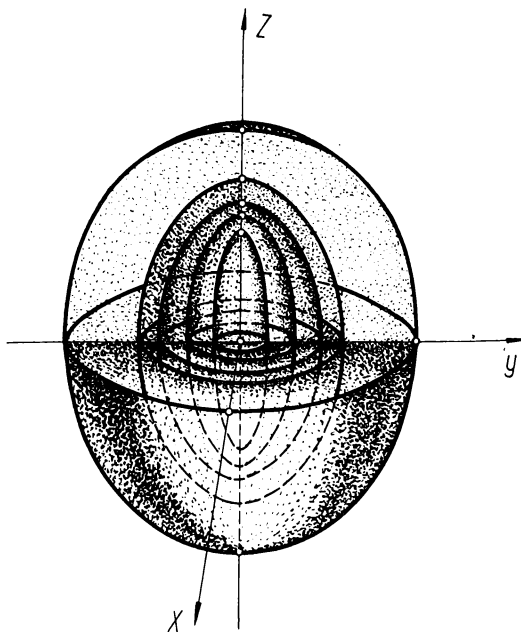


Рис. 198

1107.  $\text{grad } u(O) = 3\bar{i} - 2\bar{j} - 6\bar{k}, \quad |\text{grad } u(O)| = 7, \quad \cos \alpha = \frac{3}{7},$

$\cos \beta = -\frac{2}{7}, \quad \cos \gamma = -\frac{6}{7}; \quad \text{grad } u(A) = 7\bar{i}; \quad |\text{grad } u(A)| = 7,$

$\cos \alpha = 1, \quad \cos \beta = 0, \quad \cos \gamma = 0; \quad \text{grad } u = 0$

в точке  $N(-2, 1, 1).$

$$1108. \cos \varphi = \frac{3}{\sqrt{10}}.$$

$$1109. \cos \varphi = -\frac{4}{405}.$$

$$1110. \frac{\pi}{2}.$$

1111. Возрастает. 12.

$$1112. M_1 \left( \frac{4}{5}, -\frac{1}{5} \right), \quad M_2 \left( -\frac{4}{5}, \frac{9}{4} \right).$$

$$1113. \frac{2u}{r}, \quad \text{где } r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}; \quad \text{если } a = b = c.$$

$$1114. \frac{\operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v}{|\operatorname{grad} v|}; \quad \text{если } \operatorname{grad} u \perp \operatorname{grad} v.$$

1122. Так как

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

то

$$\operatorname{grad} r = \frac{\partial r}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial r}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial r}{\partial z} \bar{k} = \frac{x}{r} \bar{i} + \frac{y}{r} \bar{j} + \frac{z}{r} \bar{k} = \frac{\bar{r}}{r}.$$

$$1123. f'(r) \frac{\bar{r}}{r}.$$

$$1124. nr^{n-2} \bar{r}.$$

$$1125. \frac{\bar{r}}{r^3}.$$

$$1126. \frac{\bar{r}}{r^2}.$$

1127. Пусть

$$\bar{c} = c_1 \bar{i} + c_2 \bar{j} + c_3 \bar{k}.$$

Тогда

$$u = \bar{c} \bar{r} = c_1 x + c_2 y + c_3 z,$$

откуда

$$\frac{\partial u}{\partial x} = c_1, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = c_2, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = c_3.$$

Поэтому

$$\text{grad } u = \text{grad } (\bar{c} \bar{r}) = c_1 \bar{i} + c_2 \bar{j} + c_3 \bar{k} = \bar{c}.$$

$$1128. \frac{\bar{a}(\bar{b} \bar{r}) - \bar{b}(\bar{a} \bar{r})}{(\bar{b} \bar{r})^2}.$$

$$1129. 2\bar{r}(\bar{c} \bar{c}) - 2\bar{c}(\bar{c} \bar{r}) = 2[\bar{c} \bar{r} \bar{c}].$$

1133. Пусть  $\bar{e}_u, \bar{e}_v, \bar{e}_w$  — орты подвижного репера. Векторы  $\bar{e}_u, \bar{e}_v$  лежат в плоскости, касательной к координатной поверхности  $w = \text{const}$ , поэтому вектор  $\bar{e}_w$  ортогонален этой плоскости и, следовательно, он ортогонален к координатной поверхности  $w = \text{const}$ . Поэтому этот вектор коллинеарен градиенту скаляра  $w$ , т. е.

$$\bar{e}_w = k_3 \text{grad } w, \quad (*)$$

где  $k_3$  — некоторый множитель.

Рассмотрим линию

$$u = u(s), \quad v = v(s), \quad w = w(s).$$

Дифференцируя радиус-вектор

$$\bar{r} = \bar{r}[u(s), v(s), w(s)]$$

ее произвольной точки, получим

$$\frac{d\bar{r}}{ds} = \bar{r}_u \frac{du}{ds} + \bar{r}_v \frac{dv}{ds} + \bar{r}_w \frac{dw}{ds}.$$

Умножим это равенство скалярно на  $\text{grad } w$

$$\frac{dw}{ds} = \frac{dw}{ds} \bar{r}_w \text{grad } w,$$

откуда

$$\bar{r}_w \text{grad } w = 1.$$

Заметив, что

$$\bar{r}_w = |\bar{r}_w| \bar{e}_w,$$

и умножив равенство (\*) скалярно на  $\bar{r}_w$ , получим  $|\bar{r}_w| = k_3$ . Из того же равенства (\*) находим

$$1 = k_3 |\text{grad } w|.$$

Применяя аналогичные рассуждения к координатным поверхностям  $u = \text{const}$  и  $v = \text{const}$ , получим в итоге

$$\text{grad } f(u, v, w) = \frac{\bar{e}_u}{k_1} \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\bar{e}_v}{k_2} \frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\bar{e}_w}{k_3} \frac{\partial f}{\partial w},$$

где

$$k_1 = |\bar{r}_u| = \frac{1}{|\text{grad } u|}, \quad k_2 = |\bar{r}_v| = \frac{1}{|\text{grad } v|},$$

$$k_3 = |\bar{r}_w| = \frac{1}{|\text{grad } w|}.$$

$$1134. \text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial \rho} \bar{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \bar{e}_\varphi + \frac{\partial u}{\partial z} \bar{e}_z.$$

$$1135. \varphi \bar{e}_\rho + \bar{e}_\varphi + \bar{e}_z.$$

$$1136. z \varphi \bar{e}_\rho + z \bar{e}_\varphi + \rho \varphi \bar{e}_z.$$

$$1137. \bar{e}_\rho + \frac{z \cos \varphi}{\rho} \bar{e}_\varphi + \sin \varphi \bar{e}_z.$$

$$1138. 2\rho \bar{e}_\rho - \frac{z \sin \varphi}{\rho} \bar{e}_\varphi + \cos \varphi \bar{e}_z.$$

$$1139. 3\rho^2 \bar{e}_\rho + \frac{z \sin 2\varphi}{\rho} \bar{e}_\varphi + \sin^2 \varphi \bar{e}_z.$$

$$1140. \text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial \rho} \bar{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \Theta} \bar{e}_\Theta + \frac{1}{\rho \sin \Theta} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \bar{e}_\varphi.$$

$$1141. \varphi \bar{e}_\rho + \frac{1}{\sin \theta} \bar{e}_\varphi.$$

$$1142. \theta \bar{e}_r + \bar{e}_\theta.$$

$$1143. \theta \varphi \bar{e}_r + \varphi \bar{e}_\theta + \frac{\theta}{\sin \theta} \bar{e}_\varphi.$$

$$1144. \bar{e}_\rho + \frac{\varphi \cos \theta}{\rho} \bar{e}_\theta + \frac{1}{\rho} \bar{e}_\varphi.$$

$$1145. \bar{e}_r + \frac{\cos \varphi}{r} \bar{e}_\theta - \frac{1}{r} \bar{e}_\varphi.$$

$$1146. x^2 + y^2 = C_1^2, \quad z = C_2.$$

$$1147. y = C_1 x, \quad z = C_2 x^2.$$

$$1148. y - x = C_1 x y, \quad z - x = C_2 x z.$$

$$1149. x^2 - y^2 = C_1, \quad z = C_2.$$

$$1150. x = C_1 y, \quad x = C_2 z.$$

$$1151. yz + 3 + 2z.$$

1152.  $12xy^2 + 4x^3 - 6xz$ .

1158. 3.

1159.  $\operatorname{div}(f(r)\vec{r}) = f(r) \operatorname{div} \vec{r} + \vec{r} \operatorname{grad} f(r)$ .

Так как

$$\operatorname{div} \vec{r} = 3, \quad \operatorname{grad} f(r) = f'(r) \frac{\vec{r}}{r},$$

то

$$\operatorname{div}(f(r)\vec{r}) = 3f(r) + rf'(r).$$

1160.  $\frac{2}{r}$ .

1161.  $(n+3)r^n$ .

$$\begin{aligned} 1162. \operatorname{div}(\operatorname{grad} f(r)) &= \operatorname{div}\left(\frac{f'(r)\vec{r}}{r}\right) = \frac{f'(r)}{r} \operatorname{div} \vec{r} + \vec{r} \operatorname{grad} \frac{f'(r)}{r} = \\ &= \frac{3f'(r)}{r} + \vec{r} \frac{-r \operatorname{grad} f'(r) - f'(r) \operatorname{grad} r}{r^2} = \frac{3f'(r)}{r} + \\ &+ \vec{r} \frac{rf''(r) \frac{\vec{r}}{r} - f'(r) \frac{\vec{r}}{r}}{r^2} = \frac{3f'(r)}{r} + \vec{r} \frac{rf''(r) - f'(r)}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r} = \\ &= f''(r) + \frac{2}{r} f'(r). \end{aligned}$$

1163.  $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ .

1164.  $u \Delta u + (\operatorname{grad} u)^2$ .

1165.  $u \Delta u + \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v$ .

1166.  $\frac{\vec{c} \vec{r}}{r}$ .

1167.  $2 \vec{c} \vec{r}$ .

1168.  $f'(r) \frac{\vec{c} \vec{r}}{r}$ .

1169. 0.

1170.  $\vec{c} \vec{c}_1$ .

1171.  $4 \vec{c} \vec{c}_1$ .

1172. 1.

1173. 2.

1174. 
$$\frac{x+y+z}{xyz}.$$

1175. 
$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} f(r)) = f''(r) + \frac{2}{r} f'(r) = 0.$$

Общее решение этого уравнения есть

$$f(r) = c_1 + \frac{c_2}{r}.$$

1176. Так как

$$\operatorname{div} \frac{\bar{r}}{r} = \frac{1}{r} \operatorname{div} \bar{r} + \bar{r} \operatorname{grad} \frac{1}{r} = \frac{3}{r} - \bar{r} \frac{\bar{r}}{r^3} = \frac{2}{r}$$

и

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} f(r)) = f''(r) + \frac{2}{r} f'(r),$$

то по условию

$$2rf''(r) + 4f'(r) = \frac{2}{r},$$

откуда

$$f(r) = \ln r + \frac{c_1}{r} + c_2.$$

1177. 
$$\operatorname{div} \bar{a} = \frac{1}{LMN} \left[ \frac{\partial}{\partial u} (MNa_u) + \frac{\partial}{\partial v} (NL a_v) + \frac{\partial}{\partial w} (LMa_w) \right]$$

где  $a_u, a_v, a_w$  — проекции вектора  $\bar{a}$  на касательные к соответствующим координатным линиям,

$$L = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial u}\right)^2},$$

$$M = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial v}\right)^2},$$

$$N = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial w}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial w}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial w}\right)^2}.$$

Величины  $L, M, N$  называются коэффициентами Ламэ.

$$1178. \operatorname{div} \bar{a} = \frac{1}{\rho} \left[ \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho a_\rho) + \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} + \rho \frac{\partial a_z}{\partial z} \right].$$

$$1179. \operatorname{div} \bar{a} = \frac{1}{\rho^2 \sin \Theta} \left[ \frac{\partial}{\partial \rho} (a_\rho \rho^2 \sin \Theta) + \right. \\ \left. + \rho \frac{\partial}{\partial \Theta} (a_\Theta \sin \Theta) + \rho \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} \right].$$

$$1180. (x^2 - 2zx) \bar{i} + (y^2 - 2xy) \bar{j} + (z^2 - 2yz) \bar{k}.$$

$$1181. \bar{i} + (xy - 2x) \bar{j} + (2 - xz) \bar{k}.$$

$$1185. \bar{0}.$$

$$1186.$$

$$1187. 2 \bar{c}.$$

$$1188. [\bar{c} \bar{r}].$$

$$1189. [\bar{c}_1 \bar{c}].$$

$$1190.$$

$$1191. 0.$$

$$1192. \frac{f'(r)}{r} [\bar{r} \bar{c}].$$

1198. Для вычисления потока воспользуемся формулой Остроградского

$$\Pi = \iint_S a_n dS = \iiint_V \operatorname{div} \bar{a} dV.$$

Так как

$$\operatorname{div} \bar{a} = y^2 + x^2 + 1,$$

то

$$\Pi = \iiint_V (x^2 + y^2 + 1) dx dy dz = \iint_D (x^2 + y^2 + 1) dx dy \int_0^{4-x^2-y^2} dz = \\ = \iint_D (x^2 + y^2 + 1) (4 - x^2 - y^2) dx dy.$$

Перейдем к полярным координатам:

$$\Pi = \iint_D (r^2 + 1) (4 - r^2) r dr d\varphi =$$



$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^2 (-r^5 + 3r^3 + 4r) dr = \frac{14\pi}{3}.$$

1199.  $\operatorname{div} \vec{a} = 3(x^2 + y^2 + z^2)$ . По формуле Остроградского

$$\Pi = \iiint_V 3(x^2 + y^2 + z^2) dV = 3 \cdot 8 \iiint_{V_1} (x^2 + y^2 + z^2) dV,$$

где  $V_1$  — объем части шара, заключенной в первом октанте. Перейдем к сферическим координатам

$$x = \rho \cos \varphi \sin \theta, \quad y = \rho \sin \varphi \sin \theta, \quad z = \rho \cos \theta;$$

$$dV = \rho^2 \sin \theta d\rho d\varphi d\theta, \quad x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2,$$

$$\begin{aligned} \Pi &= 24 \iiint_{V_1} \rho^4 \sin \theta d\rho d\varphi d\theta = \\ &= 24 \int_0^R \rho^4 d\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi = 2, 4\pi R^5. \end{aligned}$$

1200.  $4\pi q$ .

1201. 0.

1202.  $3 \frac{1}{3}$ .

1203. а)  $\frac{1}{10} \pi R^2 H (3R^2 + 2H^2)$ ;

б)  $\frac{3}{10} \pi R^2 H (R^2 + 2H^2)$ .

1205. На окружности

$$\vec{a} = R^3 \cos^3 t \vec{i} - R^3 \sin^3 t \vec{j},$$

$$d\vec{r} = -R \sin t dt \vec{i} + R \cos t dt \vec{j}.$$

Следовательно,

$$\vec{a} d\vec{r} = -\frac{1}{2} R^4 \sin 2t dt.$$

При движении по дуге окружности  $L$  в направлении, противоположном вращению часовой стрелки, параметр  $t$  изменяется

в пределах от 0 до  $\frac{\pi}{2}$ . Поэтому линейный интеграл вдоль  $L$  будет равен

$$A = \int_L \overline{adr} = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} R^4 \sin 2t dt = - \frac{1}{2} R^4.$$

1206.  $2\pi^2 b^2$ .

1207. Линия  $L$  состоит из двух отрезков  $BO$  (на оси  $Oy$ ),  $OA$  (на оси  $Ox$ ) и дуги  $AB$  астроида. Обход по  $L$  нужно совершать против часовой стрелки. Поэтому циркуляция вектора будет равна

$$\oint_L \overline{adr} = \int_{AB} \overline{adr} + \int_{BO} \overline{adr} + \int_{OA} \overline{adr}.$$

Вычислим каждый из интегралов правой части отдельно. На астроиде

$$\overline{a} = R \sin^3 t \overline{i} - R \cos^3 t \overline{j},$$

$$d\overline{r} = -3R \cos^2 t \sin t dt \overline{i} + 3R \sin^2 t \cos t dt \overline{j}.$$

Поэтому

$$\overline{adr} = - \frac{3}{4} R^2 \sin^2 2t dt.$$

При движении по дуге  $AB$  в направлении от  $A$  к  $B$  параметр  $t$  изменяется в пределах от 0 до  $\frac{\pi}{2}$ . Будем иметь

$$\int_{AB} \overline{adr} = - \frac{3}{4} R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2t dt = - \frac{3}{16} \pi R^2.$$

На отрезке  $OA$

$$\overline{a} = -x \overline{j}, \quad d\overline{r} = dx \overline{i} \quad \text{и} \quad \overline{adr} = 0.$$

Поэтому

$$\int_{OA} \overline{adr} = 0.$$

Аналогично,

$$\int_{BO} \overline{adr} = 0.$$

Следовательно, искомая циркуляция равна  $-\frac{3}{16}\pi R^2$ .

1208. 0.

1209.  $-\pi b^2$ .

1210. а)  $2\pi$ , б)  $2\pi$ .

1211.  $-\frac{\pi R^6}{8}$ .

1212. Не имеет.

1213.  $\operatorname{rot} \bar{a} = \bar{0}$ , поэтому поле  $\bar{a}$  потенциальное, и его потенциал  $u$  определяется из уравнения

$$du = (y+z)dx + (x+z)dy + (x+y)dz.$$

Это уравнение равносильно системе уравнений в частных производных

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= y+z, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= x+z, \\ \frac{\partial u}{\partial z} &= x+y. \end{aligned} \right\}$$

Из первого уравнения системы следует, что

$$u = (y+z)x + \varphi(y, z).$$

Подставляя во второе уравнение, получим

$$\frac{\partial \varphi(y, z)}{\partial y} = z,$$

откуда

$$\varphi(y, z) = zy + \psi(z).$$

Подставляя это в третье уравнение, получим, что

$$\psi(z) = C - \text{const}.$$

Таким образом,

$$u = xy + yz + zx + C.$$

1214.  $u = xyz(x+y+z) + C$ .

1215. Да.

## **ЛИТЕРАТУРА**

Н о р д е н А. П. Краткий курс дифференциальной геометрии. М., 1958.

П о г о р е л о в А. В. Лекции по дифференциальной геометрии. Харьков, 1961.

Р а ш е в с к и й П. К. Курс дифференциальной геометрии. М., 1956.

## ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ \*

Асимптота 35, 209, 213

Астроида 64, 69<sub>о</sub>, 107, 134, 178,  
180, 228, 327<sub>о</sub>, 364, 381, 436,  
442, 457, 467

Бинормаль 68, 76, 595, 1069

Бицилиндрика 488

Вектор Дарбу 564, 955

— кривизны 112

— на поверхности 138

—, параллельно переносимый  
по поверхности 138, 1026—  
1029

Вектор-функция 10, 31—37

Вполне интегрируемая система  
дифференциальных уравнений  
1015

Геликоид косой 671, 794, 796,  
906

— общего вида 670, 774

— прямой 671, 672<sub>о</sub>, 673<sub>о</sub>, 679,  
694, 726, 773, 798, 801, 805,  
806, 810, 813, 814, 828, 835,  
858, 899, 914, 930, 960, 966,  
987, 1004, 1005, 1039

Гипербола 29, 44, 80, 81, 91,  
111, 116, 135, 325<sub>о</sub>, 378, 389,  
426

Гиперболоид вращения двупо-  
лостный 632, 766, 821, 847<sub>о</sub>,  
978

— — однополостный 631, 727,  
765, 820, 847<sub>о</sub>, 971, 977

— двуполостный 641, 833, 872,  
891

— однополостный 640, 665, 871,  
915

Гипоциклоида 69, 359, 380

Годограф вектор-функции 11,  
13, 39—49

Градиент скалярного поля 152,  
1101—1112, 1115—1145, 1156,  
1157, 1162—1165, 1175, 1176,  
1183, 1193, 1195, 1196

Декартов лист 97<sub>о</sub>, 210, 248

Дивергенция векторного поля  
158, 1151—1179, 1184, 1194—  
1196

Дифференциал вектора, абсо-  
лютный 138

— вектор-функции 11, 12, 27

Длина дуги 48, 69, 560, 561

— касательной 159, 165

— нормали 159, 164

— подкасательной 159, 163

— поднормали 159, 162

— — полярной касательной 167

— — нормали 167, 170

— — подкасательной 167, 168

— — поднормали 167, 169

Жезл 302

Индикатриса Дюпена 114, 841,  
920, 1021

— линии, сферическая 519

Кардиоида 60, 61<sub>о</sub>, 68<sub>о</sub>, 100<sub>о</sub>,  
149, 150, 157, 228, 362, 385,  
397, 434, 444, 449

---

\* В предметном указателе цифрами светлого шрифта обозначены номера страниц, цифрами полужирного шрифта — номера задач. Индекс «о» означает ссылку на ответ к соответствующей задаче.

Касание линии с поверхностью 93, 731—735

Касательная к линии 12, 24, 67, 76, 148, 521, 1055

— плоскость поверхности 92, 682, 702, 1056, 1057

Катакаустика линии 472

Катеноид 637, 771, 826, 831, 847°, 912, 983, 1004, 1005, 1038

Квадратичная форма поверхности, вторая 112, 829, 830, 1017

— — —, первая 104, 776—781, 1016

Коноид прямой 673—675

Конус 644, 878

— круговой 635, 688, 769, 795, 824, 838, 847°, 861, 982

Конхоида Никомеда 63, 207, 224

Координаты изотермические 849

— криволинейные 7

— полугеодезические 850

— сферические 561°

— цилиндрические 560°

Коэффициенты Ламэ 1177°

Кривая — см. линия

Кривизна геодезическая 129, 957—962, 1024

— главная 114, 1018

— интегральная 1029—1032

— —, геодезическая 1030, 1031

— линии 49, 76, 77, 387, 393, 394, 396, 418, 566, 568, 603, 1065

— —, нормальная 112, 842

— поверхности, гауссова — см. кривизна поверхности, полная

— —, полная 114, 844, 849—851, 853—855, 859, 860, 1001—1003, 1022, 1033, 1076, 1078

— —, средняя 114, 842, 859, 860, 919, 920, 1042, 1043, 1077, 1079

Круг кривизны 49, 418—420

Кручение геодезическое 129, 963—965

— линии 76, 77, 567, 603, 1067

Лемниската Бернулли 54°, 154, 179, 226, 386, 390, 403

Линейный интеграл векторного поля 159, 1205, 1206

Линия 6

— асимптотическая 123, 907, 908, 910, 918—920, 922, 952, 962, 965, 989, 1023, 1037, 1073, 1087

— Бертрана 597—600, 606

— Вивини 486, 517, 518, 550

— винтовая 484, 519, 533, 542, 549, 552—554, 571, 604—606, 614, 621, 627

— —, коническая 487, 505, 531, 572

— —, обобщенная 588—592, 602

— геодезическая 129, 943—946, 952, 953, 956, 969, 973, 998, 999, 1025, 1027, 1032, 1033, 1050, 1075

— горловая 93, 726—729

— дискриминантная 44

— изохронная 477

— кривизны 127, 923, 933, 935, 941, 942, 953, 964, 990, 991, 1011, 1013, 1074

— параллельная 181, 395

— плоская 6, 527, 567, 593—595, 1064

— поля, векторная 157, 1146—1150

— поля, силовая — см. линия поля, векторная

— простая 6

— стрикционная — см. линия горловая

— сферическая 520, 620

— тока — см. линия поля, векторная

— уникурсальная 95—101, 237

— уровня 151, 1088—1092

— цепная 78°, 174—177, 345, 367°, 368—370, 372, 374, 402, 433°, 440, 452°, 459, 463°, 481

— элементарная 5

Локон Аньези 56, 197

Локсодрома 786, 787

Множества гомеоморфные 5

Множество открытое 5

— связное 5

Наложимость поверхностей — см. отображение поверхностей, изометрическое

Направление асимптотическое  
123, 920, 1072

Направления главные 113  
— сопряженные 123, 903, 1072  
Непрерывность вектор-функции  
10, 6—10

Нормаль главная 68, 76  
— к линии 24, 1068  
— — поверхности 92, 714—716

Образ множества 5  
Овалы Кассини 54, 114  
Огибающая семейства линий 44,  
337, 623, 624, 1059  
— — поверхностей 101, 756—  
758, 1059

Окрестность точки 5, 6  
Окружность 71, 79, 85, 92, 137,  
153, 170, 371, 424, 439, 450,  
— соприкасающаяся 49, 76, 415,  
416, 613

Оператор Гамильтона 152  
Ортогональные траектории 788,  
789, 791—799

Отображение множества в про-  
странство 5  
— — — взаимно однознач-  
ное 5

— — — локально топологи-  
ческое 5

— — — непрерывное 5  
— — — обратное 5  
— — — топологическое 5

— поверхностей изометрическое  
133, 992—998, 1001—1006,  
1008, 1048  
— — конформное 133, 1007,  
1008

— — сферическое 133, 974—  
991, 1037, 1045

— — эквиареальное 1008

Парабола 42, 117, 171, 343, 375,  
398, 417, 427, 441, 468, 476  
— безопасности 340

Параболоид вращения 633, 660,  
767, 822, 847, 888

— гиперболический 645, 680,  
686, 784, 799, 803, 836, 874

— эллиптический 49, 642, 680,  
837, 841, 852, 873, 889, 902,  
931, 976

Параметр натуральный — см.  
длина дуги

Плоскость 662—664, 829, 830,  
896, 921, 947, 1038

— нормальная 68, 520, 521, 593,  
1070

— соприкасающаяся 68, 526,  
527, 594, 622, 734, 1063

— спрямляющая 69, 1071

Площадь поверхности 104

Поверхности уровня 151, 1093—  
1096

Поверхность 7

— вращения 628, 715, 716, 762,  
779, 786, 817, 846, 847, 863,  
885, 911, 926, 949, 950, 969,  
1006, 1007, 1038

— дискриминантная 100, 739,  
740

— касательных к линии 667,  
708, 719, 775, 791, 832, 929,  
994

— — —, винтовой 668, 684

— Каталана 725

— коническая 654, 661, 698, 719,  
789, 925, 993, 1000

— линейчатая 92, 717, 1019,  
1060

—, косая 93, 730, 935, 1037,  
1062, 1087

— Лиувилля 968, 1006

— минимальная 919, 1038—  
1040, 1044, 1079

— общая — см. поверхность

— параллельная 707, 718, 922,  
938, 939, 1041, 1042, 1044

— переноса 677—680, 706, 901  
— простая 7

— развертывающаяся 93, 717—  
720, 722—724, 753—755, 844,  
905, 922, 928, 954, 955, 988,  
989, 995, 996, 997, 999, 1061

— трубчатая 676, 704, 746

— цилиндрическая 646, 648, 651,  
719, 924, 948, 992

— элементарная 7

Подэра линии 465, 626

— поверхности 1051—1054

Поле векторное 157

— — потенциальное 160, 1212—  
1214

- — соленоидальное 160, 1215, 1216
- скалярное 151
- —, плоское 151
- Поток векторного поля 158, 1197—1203
- Правильное семейство линий на поверхности 123
- Предел вектор-функции 10, 1—5
- Преобразования аффинные 146
- проективные 148
- Производная вектор-функции 11, 11—15, 26, 31, 33
- скалярного поля по направлению 152, 1097, 1098, 1113, 1114
- Производные вектор-функции, частные 12, 32, 34, 36
- Профиль геликоида 670
- Прямая 450<sub>о</sub>, 566
- Псевдосфера 638, 693, 772, 782, 783, 811, 827, 847<sub>о</sub>, 909, 967, 984, 1003
- Работа векторного поля 159
- Радиус кривизны 49, 77, 416, 419, 420
- Развертка окружности 65, 136, 348, 382, 439, 447, 462<sub>о</sub>, 466
- эволюты линии 455
- Расходимость векторного поля — см. дивергенция векторного поля
- Ребро возврата 101, 1061
- — поверхности касательных 719, 720, 1061
- Роза трехлепестковая 306
- четырехлепестковая 59, 99
- Ротация векторного поля 158, 1180—1196
- Свойства линий и поверхностей аффинные 146
- — — метрические 146
- — — проективные 146
- Сеть линий 123
- — ортогональная 939, 941, 973
- — сопряженная 123, 897—902, 904—907, 941
- — чебышевская 780, 781, 909
- Соприкосновение линий 25, 182—194, 412—416, 610—613, 619
- Спираль Архимеда 57, 118, 151, 169<sub>о</sub>, 365, 383
- Галилея 303
- гиперболическая 168<sub>о</sub>, 304<sub>о</sub>
- коническая 487, 509, 516, 546, 582, 618
- логарифмическая 58, 152, 153, 366, 384, 399, 437, 438, 451<sub>о</sub>, 456, 461<sub>о</sub>, 475, 478
- Ферма 301
- Строфонда 62, 99<sub>о</sub>, 212, 225
- Сфера 629, 714, 763, 787, 793, 802, 812, 818, 847<sub>о</sub>, 882, 883, 932, 951, 974, 1002
- соприкасающаяся 615—622
- Сферический двуугольник 816
- Теорема Бельтрами — Эннепера 1023
- Гаусса — Бонне 1031
- Клеро 969—972
- Тор 636, 695, 700, 770, 825, 847<sub>о</sub>, 864, 913, 972, 985
- Точка гиперболическая 114, 937, 1080
- линии, возврата второго рода 36
- — — первого рода 36
- — — изолированная 37
- — — обыкновенная 36, 37
- — — особая 36, 37, 236, 237
- — —, двойная 37
- — — перегиба 36, 238, 239
- — — самопересечения 37
- округления 113, 882, 884—893, 1081
- омбилическая — см. точка округления
- параболическая 114, 1035, 1036, 1080
- стационарная скалярного поля 153, 1099, 1100
- уплощения 113, 894—896, 1082
- эллиптическая 114, 1080
- Трактриса 165<sub>о</sub>, 166, 349, 400<sub>о</sub>, 433, 448



- Формула Родрига 114  
— Менье 113, 861  
— Остроградского 159, 1197  
— Стокса 159, 1211  
— Тейлора 11, 13  
— Эйлера 114, 1020  
Формулы Френе 49, 76, 562—565  
Функция векторная круговая 38  
Характеристика семейства 101  
Улитка Паскаля 61  
Уравнение Лапласа 161  
— линии неявное 9  
— поверхности неявное 9  
Уравнения дифференциальных перемещений репера 137  
— линии неявные 9  
— — натуральные 59, 78, 609  
— — параметрические 6  
— поверхности параметрические 7  
Центр кривизны 49, 77  
Циклоида 66, 108, 173, 229, 329,  
358, 379, 401, 435, 443, 453,  
458, 464, 477  
— удлиненная 67, 409  
— укороченная 67, 409  
Цилиндр гиперболический 48,  
647, 877, 981  
— круговой 634, 666, 768, 823,  
847, 862, 1048  
— параболический 46, 647, 839,  
876, 980  
— эллиптический 47, 643, 658,  
875, 979  
Циркуляция векторного поля  
159, 1207—1211  
Циссоида Диоклеса 55, 98, 208,  
223  
Эвольвента 57, 480, 602  
— окружности — см. развертка  
окружности  
Эволюта 57, 442, 1066  
Эллипс 28, 43, 82, 110, 115, 377,  
388, 425, 469, 479  
Эллипсоид 639, 659, 692, 870,  
890, 940, 975  
— вращения 630, 764, 819, 843,  
847, 887, 970  
Эпициклоида 68, 359, 380, 454,

# О г л а в л е н и е

Предисловие	3
Введение	5
<b>Глава 1. Вектор-функция скалярных аргументов</b>	<b>10</b>
<b>Глава 2. Плоские линии</b>	<b>19</b>
§ 1. Уравнения линии	19
§ 2. Касательная и нормаль	24
§ 3. Асимптоты. Особые точки. Исследование и построение линий	35
§ 4. Семейство линий. Огибающая	44
§ 5. Длина дуги. Кривизна. Формулы Френе	48
§ 6. Эволюты и эвольвенты	57
§ 7. Натуральные уравнения	59
§ 8. Разные задачи	61
<b>Глава 3. Пространственные линии</b>	<b>64</b>
§ 9. Уравнения линии	64
§ 10. Сопровождающий трехгранник. Длина дуги	67
§ 11. Формулы Френе. Кривизна и кручение. Натуральные уравнения линии	76
§ 12. Разные задачи	83
<b>Глава 4. Поверхности</b>	<b>86</b>
§ 13. Уравнения поверхности	86
§ 14. Касательная плоскость и нормаль к поверхности. Линейчатые поверхности. Касание линии с поверхностью	92
§ 15. Семейство поверхностей. Огибающая	100
§ 16. Первая квадратичная форма	104
§ 17. Вторая квадратичная форма	112
§ 18. Сопряженные сети и асимптотические линии	123
§ 19. Линии кривизны	127
§ 20. Геодезические линии	129
§ 21. Отображения поверхностей	133
§ 22. Метод подвижного репера в теории поверхностей	136
§ 23. Разные задачи	143

Глава 5. Метрические, аффинные и проективные свойства линий и поверхностей . . . . .	146
Глава 6. Элементы теории поля	151
§ 24. Скалярное поле	151
§ 25. Векторное поле	157
Ответы . . . . .	168
Литература . . . . .	367
Предметный указатель	368

*Воднев Владимир Трофимович, Гусак Алексей Адамович,  
Нахимовская Анна Натановна, Рябушко Антон Петрович,  
Тутаев Леонид Кондратьевич, Феденко Анатолий Семенович*

СБОРНИК ЗАДАЧ И УПРАЖНЕНИЙ  
ПО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Редактор *Т. Майборода*  
Оформление художника *А. Шеверова*  
Худож. редактор *В. Валентович*  
Техн. редактор *П. Фрайман*  
Корректоры *С. Надежкина, Л. Рутковская*

АТ 00975. Сдано в набор 13/XI-1969 г. Подписано к печати 17/IV-1970 г.  
Бумага  $84 \times 108 \frac{1}{32}$  типогр. № 1. Печ. л. 11,75 (19,74). Уч.-изд. л. 19,97.  
Авт. л. 15,11. Изд. № 68-94. Тип. зак. 214. Тираж 10 000 экз. Цена 91 коп.

Издательство «Вышэйшая школа» Государственного комитета Совета Министров БССР по печати. Редакция физико-математической литературы. Минск, ул. Кирова, 24.

Отпечатано на Минском полиграфическом комбинате им. Я. Коласа Государственного комитета Совета Министров БССР по печати (Минск, ул. Красная, 23) с набора типографии издательства ЦК КПБ (Минск, Ленинский пр., 79).

**C23**      **Сборник задач и упражнений по дифференциальной геометрии.** Под общ. ред. В. Т. Воднева. Минск, «Вышэйш. школа», 1970.

376 с.

Учебное пособие для математических и физических специальностей университетов и педагогических институтов по курсу «Дифференциальная геометрия с элементами теории поля».

Сборник содержит задачи по всей программе курса.

2-2-3

29-70

517.4

