А.В.Фарков

# ТАКАЯ НУЖНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Пособие для учащихся
7-9 классов

ИЛЕКСА

А.В. Фарков

# ТАКАЯ НУЖНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

**Пособие для учащихся 7–9 классов**

Москва
ИЛЕКСА
2021

УДК 373.167.1:514
ББК 22.151я72
Ф24

**Фарков А.В.**

Ф24 Такая нужная геометрия: пособие для учащихся 7–9 классов. — М.: Илекса, 2021. 81 с.

ISBN 978-5-89237-684-6

В предлагаемом пособии рассмотрены основные практические применения геометрии в повседневной жизни: дома и вне дома, а также приведены занимательные факты, способствующие становлению познавательной мотивации учебной деятельности. Приведена большая подборка задач для развития мышления учащихся.

Пособие предназначено для учащихся 7–9 классов, оно также будет интересно учителям математики и полезно родителям учащихся.

УДК 373.167.1:514
ББК 22.151я72

Подписано в печать 29.07.2020. Формат 60×88/16.
Усл.-печ. л. 4,89. Тираж 1500 экз. Заказ №11811.
ООО «Илекса», 107553, г. Москва, ул. Амурская, д. 2, стр. 2,
сайт: www.ilexa.ru, E-mail: real@ilexa.ru,
телефон: +7 (964) 534-80-01

Отпечатано в ООО "Типография "Миттель Пресс".
г. Москва, ул. Руставели, д. 14, стр. 6.
Тел./факс +7 (495) 619-08-30, 647-01-89.
E-mail: mittelpress@mail.ru

**ISBN 978-5-89237-684-6**

# От автора

Уважаемые читатели!

Если вы недавно начали изучать новый предмет — геометрию, то, возможно, некоторым из вас она показалась неинтересной, скучной. Вы, наверное, не раз задумывались: зачем она нужна, где может пригодиться?

Геометрия — одна из самых древних наук. В переводе с греческого слово «геометрия» означает «землемерие» («гео» — земля, «метрео» — мерить). Такое название объясняется тем, что зарождение геометрии было связано с различными измерительными работами, которые приходилось выполнять при разметке земельных участков, проведении дорог, строительстве зданий и других сооружений. В результате постепенно накапливались знания и вырабатывались различные правила проведения геометрических измерений и построений. Чтобы измерить свои участки, людям нужно было проводить математические вычисления — это и были первые геометрические расчеты. При строительстве египетских пирамид также проводились различные расчеты, которые со временем стали основой геометрии. Таким образом, геометрия возникла на основе хозяйственной деятельности людей и в начале своего развития служила преимущественно практическим целям.

В Египте, в городе Александрия, жил ученый Евклид, который в 280 году до н. э. написал книгу «Начала» о геометрии. На протяжении более двух тысячелетий все, кто изучал геометрию, пользовались этим учебником. И сегодня в школе вы знакомитесь с основами евклидовой геометрии, а также с другими фактами из этой области математики.

Геометрия тесно связана с такими науками, как физика, астрономия, технические науки. Это дает возможность совершать новые открытия в различных областях знаний и разрабатывать перспективные проекты. Все инженерные расчеты, необходимые, казалось бы, даже для такого простого дела, как, например, установка уличных фонарей, производятся на основе геометрических знаний. Ведь для этого нужно рассчитать угол падения луча света на землю, чтобы он мог максимально осветить территорию. Геометрия также нужна в строительстве. Архитекторы должны точно рассчитать все детали строительной конструкции. Законам геометрии подчиняются траектория транспортного средства и его габариты, потому водители должны учитывать их для обеспечения безопасности движения.

Можно привести еще много примеров из жизни, где геометрия играет не последнюю роль. Посмотрите вокруг — всюду геометрические фигуры! Здания и разнообразные технические сооружения, космические станции и подводные лодки, интерьеры квартир и бытовая техника — всё имеет геометрическую форму. Поэтому знание геометрии сегодня необходимо для овладения многими современными профессиями: в них нуждаются и дизайнеры, и ученые, и конструкторы, и рабочие разных специальностей.

А кто и когда решил сделать геометрию частью моды? Это неизвестно. Геометрические узоры давно стали элементом национального костюма многих народов, и не удивительно, что они плавно перешли в мир современной моды. Стремясь придать особую выразительность новым образцам одежды, модельеры часто используют изображения геометрических фигур — прямоугольников, треугольников, трапеций и пр. Наверняка они вспоминают при этом школьные уроки геометрии.

Полагаю, что приведенных примеров вполне достаточно, чтобы на вопрос: «Нужна ли нам геометрия?» ответить утвердительно.

Отметим, что в учебном курсе геометрии все же бóльшую часть занимают задачи. Возможно, у многих из вас возникал вопрос: а зачем нужны задачи вообще, в том числе и геометрические? Решая задачи, человек проявляет или не проявляет некоторые важнейшие свои качества, особенности мышления. Умение решать задачи — это результат наличия у учащегося хорошего уровня обученности.

Задач в математике, и в геометрии в частности, существует много. Систематическое изложение различных подходов к решению задач, различные типологии и классификации задач изложены в ряде книг, с которыми можно ознакомиться самостоятельно.

В данной книге автор попытался показать важность геометрии для человека, в первую очередь познакомить читателя с некоторыми применениями геометрии в реальной жизни. Материал пособия распределен по классам, в каждом выделено несколько тем, соответствующих учебной программе по математике. Некоторые темы, не обладающие практической значимостью, не вошли в эту книгу. В каждой же включенной в пособие теме выделено четыре группы задач. В первой показано, какие практические задачи в быту помогает решить школьная геометрия. В некоторых темах таких задач автор не приводит. Во второй группе, которая называется «Геометрия вне дома», помещены задачи, в которых знание геометрии придется использовать при поездке на дачу, в походе, на прогулках в лесу, городе, деревне и т. п. В третьей группе, названной «Это интересно», помещены задачи, способствующие повышению интереса к геометрии. Четвертая группа задач под названием «Подумай!» предназначена для развития мышления. Разумеется, подобных задач существует очень много, есть множество книг по данной тематике. Здесь помещены лишь некоторые из таких задач, бóльшая часть которых взята из книги автора «Учимся решать олимпиадные задачи по геометрии. 5–11 классы».

Часть предлагаемых в книге задач составлена автором, часть переработана, а часть взята из литературы, неполный список которой дан в конце пособия.

Автор приводит решения всех предложенных задач. Возможно, вы найдете другие решения, тоже правильные. Не торопитесь сразу смотреть готовые решения, а попытайтесь сначала сами решить предложенные задачи.

Успехов вам в изучении геометрии!

# Часть 1. УСЛОВИЯ ЗАДАЧ

## 7 КЛАСС

### ТЕМА 1. Начальные геометрические сведения

***Геометрия дома***

**7-1-1.** Василий живет на третьем этаже многоквартирного дома. Поднимаясь с улицы в свою квартиру, он насчитал 56 ступенек, каждая высотой 14 см. На какой высоте (в метрах) находится третий этаж?

**7-1-2.** Какой угол (в градусах) образуют минутная и часовая стрелки часов в 1 ч?

**7-1-3.** Какой угол (в градусах) образуют минутная и часовая стрелки в 8 ч?

***Геометрия вне дома***

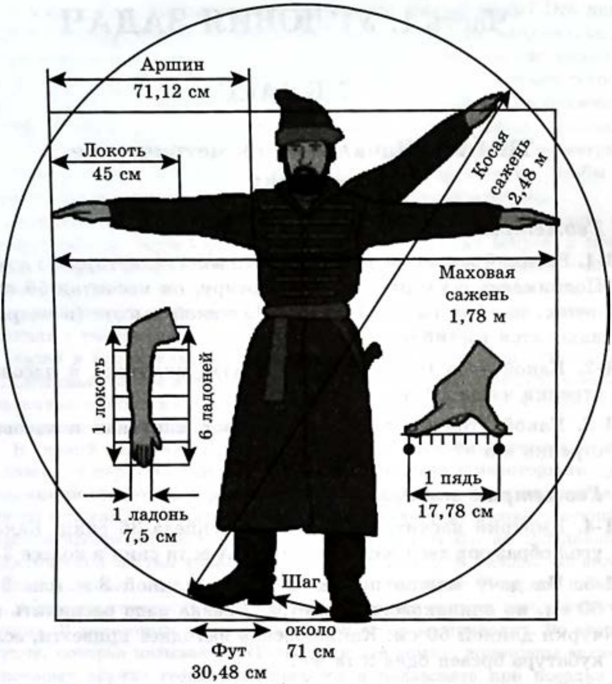
**7-1-4.** Дмитрий насчитал в колесе велосипеда 36 спиц. Какой угол образуют две соседние спицы? А если спиц в колесе 32?

**7-1-5.** На дачу можно привезти бревна длиной 3 м или 3 м 60 см, но одинакового диаметра. Бревна надо распилить на чурки длиной 60 см. Какие бревна выгоднее привезти, если кубатура бревен одна и та же?

**7-1-6.** На даче имеется очень тонкая проволока. Как узнать ее диаметр с помощью линейки?

***Это интересно***

**7-1-7.** *Различные меры длины.* Измерения любых величин производят в каких-то единицах. Вы знаете, что длина измеряется в метрах, сантиметрах, миллиметрах, километрах. Но это не единственные единицы измерения длины. За свою историю человечество придумало множество единиц длины, причем каждый народ имел свои. На Руси в старину мерами длины были *пядь* (расстояние между концами большого и указательного пальцев, растянутых в плоскости), *шаг*, *локоть*. Несколько позже появились такие единицы длины, как *аршин* (расстояние от плеча до конца вытянутой руки взрослого человека, примерно 0,711 м), *сажень* (три аршина), *верста* (500 саженей) и др.




В Англии в качестве единицы длины использовали *ярд* (расстояние от кончика носа короля Генриха I до кончика среднего пальца вытянутой в сторону руки) и *фут* (длина ступни среднего англичанина).

Понятно, что эти и другие единицы длины не обладали постоянством. С развитием ремесел и торговли появилась потребность в постоянной единице длины. Такой величиной стал *метр* (первоначально его определили как одну сорокамиллионную часть парижского меридиана). Был изготовлен и эталон метра — металлический брус из сплава платины и иридия, на нем были нанесены два штриха, расстояние между которыми и составило 1 метр.

Однако в некоторых странах (США, Великобритания и др.) до сих пор применяют свои меры длины, такие как *дюйм*, *фут*, *ярд*, *миля*.

Если перевести эти меры длины в метры, то получим:

1 дюйм = 2,54 см;

1 фут = 0,3048 м;

1 ярд = 3 футам = 36 дюймам = 0,9144 м;

1 миля морская = 1,8532 км (в Великобритании) =

= 1,852 км (международная);

1 сухопутная миля = 1,609 км.

Известно старинное пожелание морякам: «Семь футов под килем». А сколько это в аршинах, в метрах?

**7-1-8.** *Приближенное нахождение длины шага.* Часто для измерения расстояний на местности используют длину шага, которую приближенно можно определить следующим образом: разделить рост человека на 4 и прибавить 37 см.

Например, рост человека 172 см. Тогда длина его шага будет равна:

$$172 : 4 + 37 = 43 + 37 = 80 \text{ (см)}.$$

Допустимая погрешность измерения — в пределах 5 %. Можете проверить!

Учтите, что при спуске длина шага меньше, чем на горизонтальном участке, а при подъеме — меньше, чем при спуске.

**7-1-9.** *Высота некоторых предметов.* Ее можно оценить, зная высоту (в метрах) наиболее часто встречающихся предметов:

— телеграфный столб — 6,4 м;

— пассажирские железнодорожные вагоны — 4,3 м;

— легковые автомобили — 1,5 м;

— грузовые автомобили — 3 м;

— одноэтажные жилые дома в сельской местности — 4–5 м.

**7-1-10.** *Расстояния, с которых различаются предметы и их детали.* При приближенном определении расстояний до предметов необходимо учитывать, что ошибка может достигать 50 %. Ярко освещенные предметы кажутся нам расположенными ближе, чем слабо освещенные, а расстояния в туманную погоду — больше истинных. Предметы, окрашенные в яркие цвета (белый, желтый, красный), кажутся ближе, чем предметы, окрашенные в темные цвета (черный, синий, коричневый). Крупные предметы кажутся ближе расположенными, чем мелкие предметы.

Для повышения точности глазомера может оказаться полезной таблица (см. табл. на с. 8), составленная по многочисленным наблюдениям В. Н. Ганьшиным [1].

| Наблюдаемые предметы | Расстояние, км |
|---|---|
| Колокольни и башни | 16–21 |
| Деревни и большие дома | 9 |
| Отдельные домики | 5 |
| Окна в домах | 4 |
| Трубы на крышах | 3 |
| Отдельные деревья и одиночные люди | 2 |
| Верстовые и другие столбы | 1 |
| Движение ног идущего человека | 0,7 |
| Переплеты в окнах | 0,5 |
| Цвета и части одежды | 0,25 |
| Черепица и шифер на крышах | 0,2 |

**7-1-11.** *Расстояние до молнии.* Многие люди боятся молнии. А как узнать расстояние до нее? Для этой цели можно воспользоваться таким приближенным методом:

1) посчитать, сколько секунд прошло между вспышкой молнии и соответствующим ударом грома;
2) разделить полученное число на 3 — это и будет расстояние до молнии (в километрах).

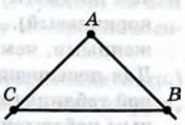
Поясним суть этого метода. Скорость $v$ звука в воздухе равна 330 м/с, а скорость света — 300 000 000 м/с, что во много раз превышает скорость звука. Расстояние $s$, пройденное звуком за время $t$, равно:

$$s = vt, \quad s = 330\,\text{м/с} \cdot t\,\text{с} = 0{,}33\,\text{км/с} \cdot t\,\text{с} \approx \frac{t}{3}\ \text{км}.$$

**7-1-12.** *Поверхность стола.* Как с помощью нитки проверить, является ли поверхность стола плоской?

**7-1-13.** *Углы в строительстве.* Раньше в средней полосе России были приняты следующие размеры угла между стропильными ногами $AC$ и $AB$ (см. рисунок) при строительстве домов [4, с. 14]:

— для железных крыш — 120°;
— для толевых крыш — 145°;
— для черепичных крыш — 100°;
— для тесовых крыш — 90°.



*Подумай!*

**7-1-14.** *Геометрический ребус.* Здесь зашифровано одно из основных понятий геометрии. Отгадайте его.

**7-1-15.** Можно ли расположить на плоскости 8 отрезков так, чтобы каждый из них пересекался ровно с тремя другими?

**7-1-16.** Могут ли три стрелки часов (минутная, часовая и для будильника) образовывать равные смежные углы?

**7-1-17.** Будильник отстает на 3 мин в час. Сейчас он показывает 11 ч 41 мин. Через сколько минут будильник покажет 12 ч?

**7-1-18.** Какой угол образуют часовая и минутная стрелки часов в 15 ч 30 мин?

**7-1-19.** Найдите угол между часовой и минутной стрелками часов в 12 ч 20 мин.

**7-1-20.** Найдите угол между часовой и минутной стрелками, если часы показывают 12 ч 35 мин.

**7-1-21.** Найдите угол между часовой и минутной стрелками часов в 7 ч 38 мин.

**7-1-22.** Узнайте, через сколько минут, после того как часы показали ровно 4 ч, минутная стрелка догонит часовую.

**7-1-23.** Стрелки часов только что совпали. Через сколько минут они будут направлены в противоположные стороны?

**7-1-24.** В данный момент угол между часовой и минутной стрелками настенных часов прямой. Чему может быть равен угол между этими стрелками через полчаса?

## ТЕМА 2. Треугольники

*Геометрия вне дома*

**7-2-1.** Отец отправился на лодке в море рыбачить и отплыл недалеко от берега. Как его сыну Дмитрию узнать расстояние до отцовской лодки?

**7-2-2.** Отец с детьми, Димой и Ирой, летом поехали на рыбалку. На реке, где они собирались рыбачить, располагалось два острова $A$ и $B$. На одном из них рыбаки планировали отдохнуть, а другой — посетить. Как, отправившись от острова $A$, попасть на остров $B$, побывав поочередно на обоих берегах реки?

*Примечание.* Проложенный маршрут плавания на лодке должен иметь наименьшую длину, берега реки считать прямыми линиями, а острова $A$ и $B$ — точками.

**7-2-3.** Отец с сыном подошли к небольшой речке. Как узнать ее ширину, если через речку не перейти?

### *Это интересно*

**7-2-4.** *Нахождение середины отрезка.* На листе бумаги отмечены две точки $A$ и $B$. Сможете ли вы, используя только перегибания листа, найти середину отрезка $AB$?

### *Подумай!*

**7-2-5.** Можно ли двумя прямыми разбить треугольник на:
а) 5 треугольников; б) 8 треугольников?

**7-2-6.** Одним и тем же способом можно разделить четырехугольник на 4 треугольника, пятиугольник — на 5 треугольников, а любой $n$-угольник — на $n$ треугольников. Что это за способ?

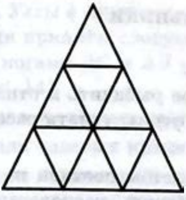
**7-2-7.** Можно ли 7 точек на плоскости расположить на 5 прямых так, чтобы на каждой прямой было по 3 точки?

**7-2-8.** Можно ли какой-нибудь треугольник разрезать на два треугольника:
а) прямоугольных; б) остроугольных;
в) тупоугольных?

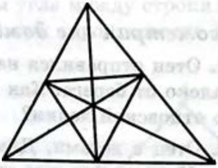
**7-2-9.** Существует ли треугольник, сумма любых двух углов которого меньше 120°?

**7-2-10.** Сколько треугольников изображено на рисунке?

**7-2-11.** Найдите в изображенной фигуре 47 треугольников.



К задаче 7-2-10



К задаче 7-2-11

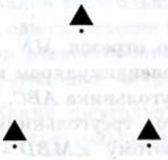
**7-2-12.** На сторонах $AB$, $BC$ и $AC$ равностороннего треугольника $ABC$ взяты соответственно точки $D$, $E$, $F$ так, что $AD = BE = CF$. Каков вид треугольника $DEF$? Докажите.

**7-2-13.** Через точку $B$ проведены четыре прямые так, что $AB \perp BD$, $BE \perp BC$. Прямая $AC$ пересекает данные прямые так, что $AB = BC$, при этом прямую $BD$ она пересекает в точке $D$, а прямую $BE$ — в точке $E$. Докажите, что $\Delta ABE = \Delta BCD$.

## ТЕМА 3. Соотношения между сторонами и углами треугольника

### *Геометрия вне дома*

**7-3-1.** Жители трех дач, расположенных в вершинах равнобедренного прямоугольного треугольника (см. рисунок), решили построить общую беседку, чтобы встречаться на досуге. Беседка должна быть равноудалена от всех трех домов. Они попросили Сергея, ученика 7 класса, помочь им выбрать место для строительства. Сергей быстро решил эту задачу. А вы?

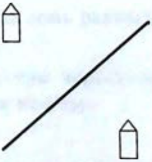


К задаче 7-3-1

К задаче 7-3-2

**7-3-2.** Через две пересекающиеся дороги проходит железная дорога. В каком месте надо построить железнодорожную станцию, чтобы расстояния от нее до этих дорог были одинаковыми?

**7-3-3.** Население поселка живет в основном в двух многоквартирных домах, расположенных по разные стороны от шоссе. Где следует построить автобусную остановку, чтобы она располагалась на одинаковых расстояниях от обоих домов?

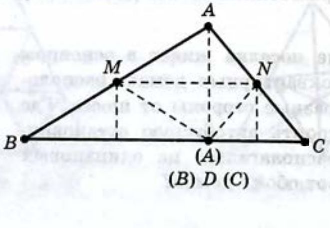


**7-3-4.** Отец, решив развлечь детей на даче, спрятал клад и сказал детям, что он находится в точке, которая равноудалена от двух тропинок, ведущих к различным постройкам на дачном участке, и от двух деревьев, растущих на нем. Детям долго не удавалось найти клад, пока Сергей, хорошо успевающий по геометрии в школе, не помог им. А можете ли вы по этим ориентирам найти клад?


***Это интересно***

**7-3-5.** *Сумма углов треугольника.* Теорему о сумме углов треугольника можно доказать, используя перегибание листа бумаги. Для этого проведем из вершины большего угла треугольника $ABC$ (пусть это будет угол $A$) высоту $AD$. Теперь загнем все три угла треугольника таким образом, чтобы их вершины совместились с точкой $D$. Тогда все углы треугольника составят вместе развернутый угол с вершиной в точке $D$, то есть 180°.

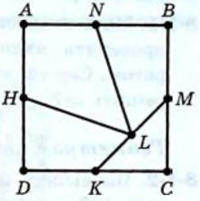
Доказательство следует из того, что отрезок $MN$, являясь линией сгиба, будет серединным перпендикуляром к высоте $AD$, а значит, и средней линией треугольника $ABC$. Так как $BM = DM = MA$, $DN = CN = AN$, то треугольники $BMD$ и $DNC$ будут равнобедренными, поэтому $\angle MBD = \angle MDB$, $\angle NCD = \angle NDC$, $\angle MAN = \angle MDN$ (это следует из того, что треугольники $DMA$ и $AND$ также равнобедренные). Следовательно, все перегибания листа бумаги приведут к искомому результату.



***Подумай!***

**7-3-6.** Вася и Коля поспорили. Вася сказал Коле, что он нарисует треугольник, у которого биссектрисы будут перпендикулярны, Коля же уверен, что такого треугольника не существует. Кто из них прав?

**7-3-7.** Квадрат $ABCD$ разрезали на четыре части (точки $N$, $M$, $K$, $H$ — середины сторон квадрата, точка $L$ — середина отрезка $KM$). Сложите из них равнобедренный остроугольный треугольник.




**7-3-8.** Дан угол 13°. Как получить угол 11°?

**7-3-9.** Дан угол 37°. Постройте циркулем угол 3°.

**7-3-10.** Как с помощью циркуля и линейки разделить угол величиной 19° на 19 равных частей?

**7-3-11.** Из точки $O$ на плоскости выходят два луча. Как, используя только циркуль, проверить, равен ли угол между ними 108°?

**7-3-12.** Разделите треугольник с углами 15°, 105° и 60° на три равнобедренных треугольника.

**7-3-13.** Какой треугольник надо взять, чтобы после проведения в нем одного отрезка получить треугольники всех известных видов: равносторонний, равнобедренный, разносторонний, прямоугольный, остроугольный, тупоугольный?

**7-3-14.** Какие треугольники можно разрезать на два равнобедренных треугольника?

**7-3-15.** Угол между двумя высотами остроугольного треугольника $ABC$ равен 60°, а точка пересечения высот делит одну из них в отношении 2 : 1, считая от вершины треугольника. Докажите, что треугольник $ABC$ равносторонний.

**7-3-16.** Разделите угол 90° на три равные части с помощью циркуля и линейки.

**7-3-17.** Разделите угол 63° на три равные части; на семь равных частей.

**7-3-18.** Постройте равносторонний треугольник, три вершины которого лежат на трех данных параллельных прямых.

# 8 КЛАСС

## ТЕМА 1. Четырехугольники

### *Геометрия дома*

**8-1-1.** Мать попросила сына Сергея, который учится в 8 классе, проверить, является ли кусок отрезанной ею материи квадратом. Сергей легко справился с этой задачей. А вы можете решить ее?

### *Геометрия вне дома*

**8-1-2.** Вы вышли из своего дома по направлению на юг и прошли 400 м, затем повернули на восток и прошли 300 м. После этого повернули на север и прошли еще 400 м. На каком расстоянии от дома (в метрах) вы оказались?

**8-1-3.** Отец вместе с сыном решили заменить забор длиной 126 м на своем дачном участке. Для этого отец поручил сыну посчитать, сколько штакетника необходимо закупить для нового забора, если штакетины следует прибивать на расстоянии 5 см друг от друга, ширина штакетины также равна 5 см. Сын справился быстро с этой задачей. А можете ли вы определить, сколько штакетин потребуется закупить?

**8-1-4.** Отцу на даче попалась пластина четырехугольной формы. Он обратился к сыну Денису с просьбой определить, является ли она прямоугольником. Тот с помощью одного только циркуля выяснил, какую форму имел четырехугольник. А можете ли вы сделать это?

### *Это интересно*

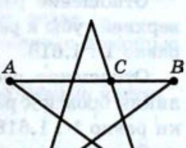
**8-1-5.** *Золотое сечение.* Вырежьте из листа бумаги прямоугольник со сторонами 10 см и 16 см. Отрежьте от него квадрат со стороной 10 см. Тогда останется прямоугольник со сторонами 6 см и 10 см. Затем отрежьте от этого прямоугольника квадрат со стороной 6 см. Обратите внимание, что у всех трех прямоугольников отношение большей стороны к меньшей примерно равно 1,6. Данный процесс можно продолжить и далее.

На прямоугольники, у которых стороны относятся приблизительно как 1,6 : 1, обратили внимание очень давно. Если посмотреть на изображение храма Парфенон в Афинах (см. рисунок ниже) и описать вокруг его фасада прямоугольник, то длина прямоугольника окажется больше его ширины примерно в 1,6 раза. Этот храм был построен в эпоху расцвета древнегреческой математики, и его красота основана на строгих математических законах.

Прямоугольники, у которых одна сторона больше другой примерно в 1,6 раза, получили название «золотые прямоугольники». Их стороны образуют «золотое сечение».

*Золотое сечение* — это такое деление целого на две неравные части, при котором бо́льшая часть относится к целому как меньшая к большей. Если обозначить меньшую часть отрезка $a$, а бо́льшую — $b$, то в случае золотого сечения получим отношение $\frac{b}{a+b} = \frac{a}{b}$.

Заметим, что в правильной пятиконечной звезде каждый из пяти отрезков, составляющих эту фигуру, делит другой отрезок в отношении золотого сечения (см. рисунок).



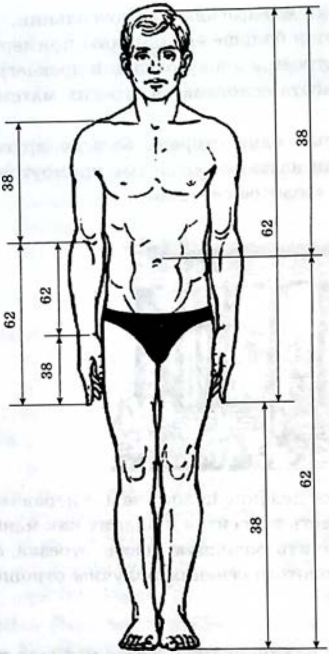

$$\frac{AC}{AC+CB} = \frac{CB}{AC}$$

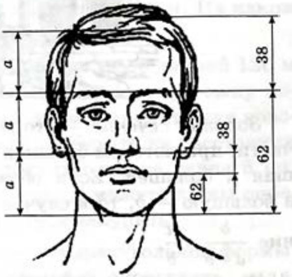
Размеры костей человека также выдержаны в пропорции, близкой к золотому сечению. И чем ближе пропорции к формуле золотого сечения, тем более идеальной выглядит фигура человека.

Если расстояние между ступней человека и точкой пупа принять за 1, то рост человека составит 1,618.

Отношение расстояния от точки пупа до макушки головы к расстоянию от уровня плеча до макушки головы равно 1 : 1,618.

Отношение расстояния от точки пупа до коленей к расстоянию от коленей до ступней равно 1 : 1,618.




Отношение расстояния от кончика подбородка до кончика верхней губы к расстоянию от кончика верхней губы до ноздрей равно 1 : 1,618.

Отношение расстояния от кончика подбородка до верхней линии бровей к расстоянию от верхней линии бровей до макушки равно 1 : 1,618.

Отношение расстояния от кончика подбородка до верхней линии бровей к расстоянию от верхней линии бровей до макушки равно 1 : 1,618.

Принципы золотого сечения широко используются в искусстве (архитектуре, музыке, живописи, поэзии и прозе). Они лежат в основе архитектурных пропорций многих замечательных произведений мирового зодчества, главным образом античности и Возрождения.

*В живописи*: картины многих знаменитых художников — титанов эпохи Возрождения: Леонардо да Винчи, Микеланджело, Рафаэля, Боттичелли и др., написаны согласно принципам золотого сечения. Его использовали в своих работах и замечательные русские живописцы Шишкин, Суриков и др.

*В поэзии*: в стихотворениях, как в музыкальных произведениях, существуют кульминационные пункты, которые делят общее количество строк в пропорции золотого сечения. Например, стихотворение А. С. Пушкина «Сапожник», состоящее из 13 строк, делится на две смысловые части — 8 и 5 строк (8 : 5 = 1,6). В VIII главе «Евгения Онегина» кульминационная строка объяснения Евгения в любви к Татьяне — «Бледнеть и гаснуть... вот блаженство!» — делит главу на две части: в первой — 477 строк, а во второй — 295 строк. Их отношение равно 1,617!

Поэзия замечательных Шота Руставели и Михаила Лермонтова и многих других великих мастеров слова подчиняется законам золотого сечения.

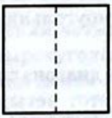
*В скульптуре*: статуи Аполлона Бельведерского, Зевса Олимпийского, прекрасной Афины, грациозной Нефертити и другие выполнены с учетом оптимальных соотношений золотого сечения.

*В фотографии* используется «правило третей»: композиция делится на три равные части по вертикали и по горизонтали, важные части композиции должны располагаться либо вдоль линий разделения (линии горизонта), либо в точках пересечений (основной объект съемки).

Любопытно, а на прогулке в парке куда вы сядете на скамье: на край, посередине или на любое место? Большинство ответит, что чуть дальше от середины. Отношение длины скамьи к расстоянию от вашего тела до края скамьи будет приближенно равно 1,62. Так и в кинотеатре, и в библиотеке, везде.

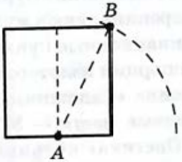
Попытайтесь построить золотой прямоугольник с помощью циркуля и линейки по следующим указаниям:

— нарисуйте квадрат и разделите его на две равные части;

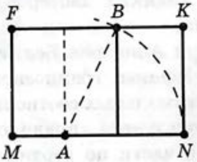


— проведите диагональ в одном из квадратов;

— циркулем проведите дугу окружности радиуса $AB$ с центром в точке $A$;

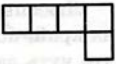



— продолжите основание квадрата до пересечения с дугой. Достройте полученную фигуру до прямоугольника. Итак, $MNKF$ — золотой прямоугольник. Получилось?




***Подумай!***

**8-1-6.** Можно ли из фигурок, изображенных на рисунке, сложить квадрат? Фигурки можно брать в неограниченном количестве.



**8-1-7.** На клетчатой бумаге нарисован квадрат размером $5 \times 5$. Как разрезать его по сторонам клеток на 7 различных прямоугольников?

**8-1-8.** Как квадрат размером $13 \times 13$ разрезать по сторонам клеток на 5 прямоугольников, чтобы все 10 чисел, выражающих длины сторон этих прямоугольников, были различными целыми числами?

**8-1-9.** В четырехугольнике диагонали равны и взаимно перпендикулярны. Всегда ли этот четырехугольник является квадратом?

**8-1-10.** В четырехугольнике диагонали взаимно перпендикулярны и имеют общую середину. Обязательно ли этот четырехугольник будет квадратом?

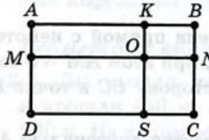
**8-1-11.** В четырехугольнике $ABCD$ диагонали $AC$ и $BD$ равны. Является ли этот четырехугольник прямоугольником?

**8-1-12.** Квадрат можно легко разрезать на 2 равных треугольника или 2 равных четырехугольника. А можно ли разрезать квадрат на 2 равных пятиугольника или 2 равных шестиугольника?

**8-1-13.** На доске был нарисован параллелограмм $ABCD$ и отмечены середина $E$ стороны $AB$ и середина $F$ стороны $CD$. Дежурный стер параллелограмм, но оставил точки $A$, $E$, $F$. Как по этим точкам восстановить параллелограмм?

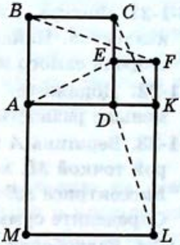
**8-1-14.** Прямоугольник $ABCD$ разделили прямыми $MN$ и $KS$ на части. Сколько всего прямоугольников получилось?

**8-1-15.** Сколько четырехугольников на этом рисунке?




К задаче 8-1-14

К задаче 8-1-15



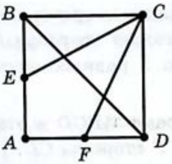

К задаче 8-1-19

**8-1-16.** В треугольнике $ABC$ точка $D$ делит сторону $BC$ в отношении $BD : DC = 1 : 3$, а точка $O$ делит отрезок $AD$ в отношении $AO : OD = 5 : 2$. В каком отношении прямая $BO$ делит сторону $AC$?

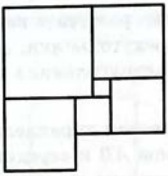
**8-1-17.** Докажите, что медиана треугольника меньше полусуммы сторон, выходящих из той же вершины.

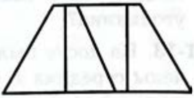
**8-1-18.** В результате измерения четырех сторон и одной из диагоналей некоторого четырехугольника получились числа 2; 4; 5,5; 10; 15. Чему равна длина измеренной диагонали?

**8-1-19.** Квадрат $ABCD$ со стороной 2 см и квадрат $DEFK$ со стороной 1 см стоят рядом на верхней стороне $AK$ квадрата $AKLM$ со стороной 3 см. Между парами точек $A$ и $E$, $B$ и $F$, $C$ и $K$, $D$ и $L$ натянуты паутинки. Паук поднимается по маршруту $AEFB$ и спускается по маршруту $CKDL$ (см. рисунок). Какой маршрут короче?



К задаче 8-1-20


К задаче 8-1-21


К задаче 8-1-25

**8-1-20.** В квадрате $ABCD$ проведены отрезки $CE$ и $CF$, где точка $E$ — середина стороны $AB$, точка $F$ — середина стороны $AD$. Докажите, что отрезки $CE$ и $CF$ делят диагональ $BD$ на три равные части.

**8-1-21.** Фигура, изображенная на рисунке, состоит только из квадратов. Найдите сторону левого нижнего квадрата, если сторона самого маленького квадрата равна 1.

**8-1-22.** Докажите, что в трапеции разность боковых сторон меньше разности оснований.

**8-1-23.** Вершина $A$ квадрата $ABCD$ соединена прямой с некоторой точкой $M$, лежащей на стороне $CD$, при этом $AM = 5$ см. Биссектриса $AE$ угла $BAM$ пересекает сторону $BC$ в точке $E$. Определите сумму отрезков $DM$ и $BE$.

**8-1-24.** Равнобокая трапеция $ABCD$ разбивается диагональю $AC$ на два равнобедренных треугольника. Определите углы трапеции.

**8-1-25.** Равнобокая трапеция с основаниями длиной 1 см и 2 см и боковой стороной длиной 1 см разбита на четыре одинаковые фигуры (см. рисунок). В результате этого верхнее основание разделилось на четыре отрезка. Найдите отношение длины большего отрезка к меньшему.

**8-1-26.** Разделите треугольник на два треугольника, четырехугольник и пятиугольник, разрезав его по двум прямым линиям.

**8-1-27.** На медиане $BM$ треугольника $ABC$ взята произвольная точка $D$. Через точку $D$ проведена прямая, параллельная стороне $AB$, а через вершину $C$ — прямая, параллельная медиане $BM$. Две полученные прямые пересекаются в точке $E$. Докажите, что $AB = DE$.

**8-1-28.** Выпуклый бумажный четырехугольник разрезали на четыре части по отрезкам, соединяющим середины противоположных сторон. Докажите, что из этих частей можно сложить параллелограмм.

## ТЕМА 2. Площади. Теорема Пифагора

### *Геометрия дома*

**8-2-1.** Мать решила сделать дома ремонт и покрыть пол в одной из комнат паркетом. Она попросила дочь посчитать, сколько потребуется дощечек прямоугольной формы со сторонами 10 см и 20 см для комнаты, имеющей форму прямоугольника со сторонами 3 м и 5 м. Дочь быстро определила количество нужных дощечек. А сможете ли вы найти, сколько потребуется таких дощечек для покрытия пола?

**8-2-2.** Мама решила покрыть в ванной комнате одну из стен размером $2{,}5\times2$ м кафельной плиткой. Она попросила сына подсчитать, сколько кафельных плиток квадратной формы со стороной 25 см потребуется закупить. Сын быстро справился с этой задачей. А сможете ли вы узнать, сколько таких кафельных плиток потребуется для ремонта?

### *Геометрия вне дома*

**8-2-3.** Вы вышли из своего дома по направлению на север и прошли 450 м, затем повернули на восток и прошли еще 600 м. На каком расстоянии от дома (в метрах) вы оказались?

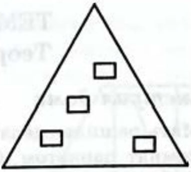
**8-2-4.** Две ели растут на расстоянии 48 м друг от друга. Высота большей из них равна 41 м, а меньшей — всего 5 м. Каково расстояние между верхушками елей?

**8-2-5.** Сергей измерил размеры дачного участка — тот имел прямоугольную форму со сторонами 35 м и 22 м. Какова площадь участка в сотках? (1 сотка = 100 м$^2$.)

**8-2-6.** Отец попросил сына Сергея измерить размеры дачного участка, имеющего форму четырехугольника, и найти площадь участка в сотках. Две стороны участка длиной 28 м и 22 м оказались параллельными, а другие две имели длину 32 м и 32 м. Сергей смог найти площадь участка, и отец похвалил его за хорошее знание геометрии. А можете ли вы найти площадь данного дачного участка? (1 сотка = 100 м$^2$.)

**8-2-7.** Отец поставил перед сыном задачу: определить размеры их дачного участка прямоугольной формы, если его площадь составляет 12 соток, при этом длина забора вокруг участка равна 140 м. Сын легко решил эту задачу. А вы справитесь с ней?

К задаче 8-2-8



К задаче 8-2-9

**8-2-8.** Отец имел квадратное поле, четверть которого он решил оставить себе (см. рисунок), а оставшуюся часть отдать своим четверым детям при условии, что те сумеют разделить поле на равные по площади и одинаковые по форме участки. Смогли ли дети выполнить условие отца?

**8-2-9.** Новым дачникам предоставили участок треугольной формы, на котором располагались 4 родника с прекрасной водой. Как им разделить этот участок на 4 таких участка, чтобы они были одинаковы по форме, равны по площади и на каждом участке был бы родник?

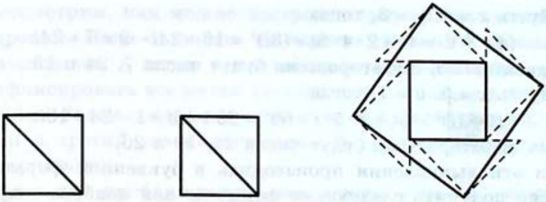
**8-2-10.** Отцу на даче потребовалось заменить старую лестницу, ведущую на крышу веранды. Высота веранды 3 м. Отец попросил сына Сергея сделать новую лестницу. Какой длины должна быть лестница, если для обеспечения безопасного передвижения ее нижний край должен отстоять от стены веранды на расстоянии не менее 1 м?

**8-2-11.** Отец с сыном отправились рыбачить на озеро, заросшее у берега тростником, а рыба как раз клевала около него. Как определить глубину озера, если под руками нет никаких измерительных инструментов?

***Это интересно***

**8-2-12.** *Построение квадрата, втрое превосходящего по площади данный.* Рассмотрим, как в древности арабы решали такую задачу: построить квадрат, втрое превосходящий данный.

Возьмем три равных данному квадрата и два из них разделим диагоналями пополам (см. рисунок). Полученные равнобедренные прямоугольные треугольники приложим гипотенузами к сторонам третьего квадрата так, чтобы каждая вершина последнего совпадала с вершиной не более чем одного треугольника. Если соединить вершины треугольников, то получим искомый квадрат, площадь которого будет в три раза больше площади исходного.



К задаче 8-2-12

**8-2-13.** *Пифагоровы числа.* Иногда в жизни возникает необходимость построить такой прямоугольный треугольник, у которого оба катета и гипотенуза являются целыми числами. Целые числа, пригодные для этой цели, называют *пифагоровыми*, так как они должны удовлетворять теореме Пифагора: $a^2 + b^2 = c^2$, где $a$ и $b$ — катеты, а $c$ — гипотенуза прямоугольного треугольника. Выбрав длины катетов $a$ и $b$ наугад, гипотенузу $c$ легко найти по формуле $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, но трудно подобрать такие целые значения $a$ и $b$, чтобы число $c$ также было целым. Например, при $a = 3$ и $b = 4$ получим, что число $c = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ — целое, а при $a = 2$, $b = 5$ число $c = \sqrt{2^2 + 5^2} = \sqrt{29}$ — нецелое. Тем не менее пифагоровых чисел существует бесчисленное множество. Рассмотрим способы их получения.

*I способ.* Для этого введем новое понятие.

Числа вида $z = x + iy$, где $x$ и $y$ — действительные числа, а $i^2 = -1$, называют *комплексными.*

Заметим, что $z^2 = (x + iy)^2 = x^2 + 2xyi + (iy)^2 = (x^2 - y^2) + 2xyi = a + bi$ является также комплексным числом.

Любое комплексное число $x + yi$ с целыми $x$ и $y$ называют числом, *производящим пифагоровы числа.*

Рассмотрим пример:

$$(3 + 2i)^2 = 3^2 + 2 \cdot 3 \cdot 2i + (2i)^2 = 9 + 12i - 4 = 5 + 12i.$$

Так как $\sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13$, то получим пифагоровы числа 5, 12 и 13.

В общем случае при любом производящем комплексном числе $x + yi$ с целыми $x$ и $y$ пифагоровыми будут числа $a$, $b$ и $x^2 + y^2$.

Найдем несколько пифагоровых чисел указанным способом.

1. Пусть $x = 2$, $y = 1$, тогда $(2 + 1i)^2 = 2^2 + 2 \cdot 2 \cdot 1i + (i)^2 = 3 + 4i$. Отсюда пифагоровыми будут числа 3, 4 и 5.

2. Пусть $x = 4$, $y = 3$, тогда

$$(4+3i)^2 = 4^2 + 2\cdot 4\cdot 3i + (3i)^2 = 16 + 24i - 9 = 7 + 24i.$$

Следовательно, пифагоровыми будут числа 7, 24 и 25.

3. Пусть $x = 5$, $y = 1$, тогда

$$(5+1i)^2 = 5^2 + 2\cdot 5\cdot i + (i)^2 = 25 + 10i - 1 = 24 + 10i.$$

Здесь пифагоровыми будут числа 24, 10 и 26.

Если эти вычисления производить в буквенной форме, то можно получить следующие формулы для подбора пифагоровых чисел $a$, $b$, $c$:

$$(x+iy)^2 = x^2 + 2xyi + (iy)^2 = (x^2 - y^2) + 2xyi,$$

отсюда

$$a = x^2 - y^2,\ b = 2xy,\ c = x^2 + y^2.$$

Например, при $x = 4$, $y = 1$ пифагоровыми числами будут:

$$a = x^2 - y^2 = 16 - 1 = 15,\ \ b = 2\cdot 4\cdot 1 = 8,$$

$$c = x^2 + y^2 = 4^2 + 1^2 = 17.$$

Проверим: $15^2 + 8^2 = 17^2$.

*II способ.* Пусть $m$ и $n$ — любые натуральные числа, причем $m > n$. Тогда

$$(m^2 + n^2)^2 = m^4 + 2m^2n^2 + n^4 =$$
$$= (m^4 - 2m^2n^2 + n^4) + 4m^2n^2 = (m^2 - n^2)^2 + (2mn)^2.$$

Таким образом, числа $2mn$, $m^2 - n^2$, $m^2 + n^2$, где $m$ и $n$ — любые натуральные числа, причем $m > n$, являются пифагоровыми. Если же все эти три числа умножить на произвольное натуральное число $k$, то мы вновь получим пифагоровы числа.

*III способ*, приписываемый Пифагору, основан на тождестве

$$(2n+1)^2 + (2n^2 + 2n)^2 = (2n^2 + 2n + 1)^2.$$

Действительно, например, при $n = 2$ получаем: $5^2 + 12^2 = 13^2$. Проверьте справедливость данного правила при других значениях $n$.

*IV способ, так называемое «правило Платона».* Если принять один из катетов за четное число $2p$, то другой катет будет $p^2 - 1$, а гипотенуза — $p^2 + 1$. При $p = 2$ получаем катеты 4 и 3, а гипотенузу 5.

Вычислите стороны прямоугольного треугольника при других значениях $p$.

**8-2-14.** *Построение углов на местности.* Часто на местности приходится строить прямой угол. Он может быть легко построен с помощью египетского треугольника со сторонами 3 м, 4 м, 5 м или соответственно с размерами, в два раза меньшими, а уж рулетка дома или на даче найдется.

Рассмотрим, как можно построить прямой угол с помощью веревки. Надо отложить на веревке сначала 3 одинаковых расстояния, а затем 4 и 5 одинаковых расстояний. Потом зафиксировать все метки узелками, в том числе и начало веревки. Затем соединить первый и четвертый узелки, а второй и третий узелки оттянуть. Получится прямоугольный треугольник.

А вот для приближенного построения угла 45° можно использовать треугольники со сторонами 4 м, 5 м и 7 м или 5 м, 6 м и 7 м (угол 45° будет лежать напротив стороны длиной 5 м).

**8-2-15.** *Определение площади произвольного четырехугольника.* Интересно, что в древнем Вавилоне для приближенного определения площади $S$ произвольного четырехугольника брали произведение полусумм противоположных сторон, то есть применяли формулу $S = \frac{a+c}{2} \cdot \frac{b+d}{2}$, где $a$, $b$, $c$, $d$ — стороны четырехугольника.

***Подумай!***

**8-2-16.** Можно ли разбить произвольный треугольник на 2, 3, ..., $n$ равновеликих треугольников? Как это сделать?

**8-2-17.** Можно ли все стороны прямоугольного треугольника выразить четными числами? А нечетными числами?

**8-2-18.** Могут ли два неравных треугольника, имеющих по две соответственно равные стороны, иметь равные площади?

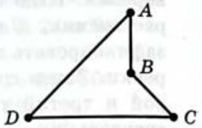
**8-2-19.** Докажите, что для прямоугольного треугольника справедлива формула $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$, где $h$ — высота прямоугольного треугольника, проведенная из вершины прямого угла, $a$ и $b$ — катеты прямоугольного треугольника.

**8-2-20.** На диагонали прямоугольника выбрали точку и провели через нее прямые, параллельные сторонам. По разные стороны от диагонали образовались два прямоугольника. Докажите, что их площади равны.

**8-2-21.** Когда у прямоугольника площадью 144 см² одну из сторон удлинили на 1 см, а другую — укоротили на 1 см, его площадь уменьшилась на 1 см². Какими могли быть стороны исходного прямоугольника? Укажите все возможные значения.

**8-2-22.** Точка $M$ внутри выпуклого четырехугольника $ABCD$ такова, что площади треугольников $ABM$, $BCM$, $CDM$ и $DMA$

равны. Верно ли, что $ABCD$ — параллелограмм, а $M$ — точка пересечения его диагоналей?




**8-2-23.** Парус имеет вид четырехугольника $ABCD$, углы $A$, $C$ и $D$ которого равны 45°. Найдите площадь паруса, если $BD = 4$ м.

**8-2-24.** Каждая сторона одного треугольника больше каждой стороны другого треугольника. Верно ли, что площадь первого обязательно больше площади второго?

**8-2-25.** Прямоугольный лист бумаги разрезали на три треугольных куска. Площадь одного из них равна половине суммы площадей других кусков. Как относятся площади полученных кусков?

**8-2-26.** Пусть $a$ и $b$ — катеты прямоугольного треугольника, а $c$ — гипотенуза. Что больше: $a^3 + b^3$ или $c^3$?

**8-2-27.** Вершину $A$ прямоугольника $ABCD$ соединили с серединами сторон $BC$ и $CD$. Может ли один из этих отрезков оказаться вдвое длиннее другого?

**8-2-28.** Можно ли равносторонний треугольник со стороной 9 см разрезать на два треугольника, периметры которых равны 20 см и 23 см?

## ТЕМА 3. Подобные треугольники

### *Геометрия вне дома*

**8-3-1.** Сергей с отцом решили поехать на рыбалку на море. Подойдя к морю, они заметили вдалеке ряд лодок с рыбаками. Отец спросил Сергея, сможет ли он определить примерно, на каком расстоянии от берега находятся эти лодки. Сергей выполнил на берегу некоторые измерения и назвал отцу примерное расстояние до рыбаков. А сможете ли вы рассчитать расстояние до рыбаков от конкретной точки на берегу моря, имея под рукой в качестве измерительного инструмента только спичечный коробок?

**8-3-2.** На выходные дни вы поехали на дачу помочь родителям. Вечером вышли погулять и заметили, что ваша тень от фонаря, который висит на столбе, равна 3 вашим шагам. Вы измерили расстояние до столба. Оно оказалось равным 9 шагам. На какой высоте установлен фонарь, если ваш рост составляет 1,6 м?

**8-3-3.** Для ремонта на даче отцу потребовалось дерево определенной длины. Он попросил сына помочь ему найти в лесу подходящее дерево. Как определить в лесу высоту дерева, не забираясь на него?

**8-3-4.** Семья решила поехать летом к морю. По пути отец заметил вдалеке гору и попросил Сергея, окончившего 8 классов, приближенно узнать ее высоту. Сергей, проделав необходимые расчеты, сказал отцу высоту горы. А вы сможете это сделать?

## *Это интересно*

**8-3-5.** *Обозначение синуса и косинуса в древности.* В старой тригонометрии, где синусы и косинусы были реальными линиями, их обозначали следующим образом:

синус угла 

косинус угла 

**8-3-6.** *Определение высоты предметов методом Фалеса.* Существует множество различных способов измерения высоты предметов. В частности, можно определить высоту дерева, не срубая его и не взбираясь на верхушку, при помощи весьма незамысловатых приборов и даже без всяких приспособлений. Самый легкий и самый древний способ изобрел Фалес, который за 6 веков до н. э. определил в Египте высоту пирамиды. Для этого он воспользовался тенью пирамиды и знанием некоторых фактов из геометрии. Фалес, как гласит предание, выбрал день и час, когда длина собственной тени равнялась его росту. В этот момент высота пирамиды должна была также равняться длине отбрасываемой ею тени.

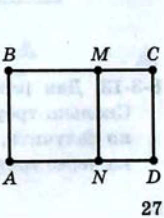
*Примечание.* Способ Фалеса в указанном виде применим не всегда, так как Солнце в России стоит низко над горизонтом и тени бывают равны высоте отбрасывающих их предметов лишь в околополуденные часы летних месяцев.

## *Подумай!*

**8-3-7.** Являются ли подобными два равнобедренных треугольника, которые имеют по одному равному острому углу? А по одному тупому углу?

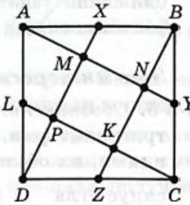
**8-3-8.** Являются ли подобными два прямоугольных треугольника, если острый угол одного из них равен острому углу другого?

**8-3-9.** На рисунке $ABCD$ — прямоугольник, $ABMN$ — квадрат, $MCDN$ — прямоугольник, подобный прямоугольнику $ABCD$. Найдите отношение сторон $AD : AB$.

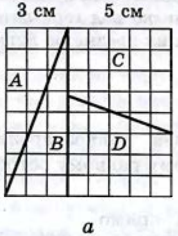


**8-3-10.** Прямая, параллельная основанию треугольника, делит его площадь пополам. В каком отношении она делит боковые стороны треугольника?

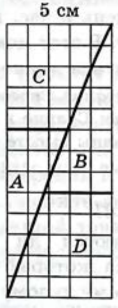
**8-3-11.** В квадрате $ABCD$ каждую вершину соединили отрезком с серединой стороны, лежащей между двумя следующими вершинами (считая вершины в определенном порядке, например двигаясь по часовой стрелке). Проведенные прямые образовали при своем пересечении квадрат $MNKP$ (см. рисунок). Докажите, что площадь данного квадрата в пять раз меньше площади исходного квадрата.




**8-3-12.** *Геометрический парадокс.* Петя нарисовал на бумаге квадрат со стороной 8 см и разрезал его на четыре части, как показано на рисунке *а*. Затем он сложил из этих частей прямоугольник (см. рисунок *б*). Найдя площадь полученного прямоугольника, Петя обнаружил, что она равна 65 см², в то время как площадь квадрата была 64 см². Почему? Помогите Петру разобраться в обнаруженном различии.




*а*



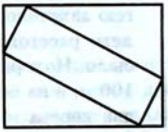

*б*

**8-3-13.** Дан разносторонний прямоугольный треугольник $ABC$. Сколько треугольников, подобных треугольнику $ABC$, можно получить, проводя различные прямые внутри треугольника через точку $E$, лежащую на меньшем катете?

**8-3-14.** В равнобедренном прямоугольном треугольнике $ABC$ проведена биссектриса острого угла $B$, которая пересекла катет $AC$ в точке $L$. На отрезках $CL$ и $LA$ как на сторонах построили два квадрата. Найдите отношение площадей этих квадратов.

**8-3-15.** Площадь равностороннего треугольника, построенного на гипотенузе прямоугольного треугольника, в два раза больше площади прямоугольного треугольника. Найдите острые углы прямоугольного треугольника.

**8-3-16.** В прямоугольник со сторонами 3 м и 4 м вписан прямоугольник, стороны которого относятся как 1 : 3 (см. рисунок). Найдите стороны вписанного прямоугольника.



**8-3-17.** Две противоположные вершины прямоугольника с длинами сторон $a$ и $b$ совмещены. Найдите длину сгиба.

**8-3-18.** В четырехугольнике $ABCD$ диагонали пересекаются в точке $M$. Известно, что $AM = 1$, $BM = 2$, $CM = 4$. При каких значениях $DM$ четырехугольник $ABCD$ является трапецией?

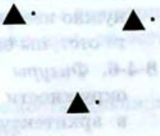
**8-3-19.** Из трех разных вершин треугольника проведены биссектриса, медиана и высота соответственно. Могут ли медиана и биссектриса разделить высоту на три равные части?

## ТЕМА 4. Окружность

### *Геометрия вне дома*

**8-4-1.** Если вы проживаете в городе, то наверняка заметили, что все канализационные люки сделаны круглыми, а не квадратными. А почему?

**8-4-2.** Жители трех дачных домов решили вырыть общий колодец так, чтобы от каждого дома до колодца было одинаковое расстояние. Они обратились к соседу Виктору, который перешел в 9 класс, с просьбой помочь им определить место. Виктор легко справился с задачей, которую задали ему соседи. А можете ли вы решить эту задачу? Покажите на рисунке, где нужно расположить колодец.

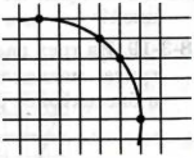


**8-4-3.** Петя вместе с родителями поехал отдыхать на дачу, вокруг которой располагались три озера: большое, средних размеров и маленькое. В озерах было много рыбы. Отец очень любил рыбалку и каждое утро вместе с сыном ходил на одно из озер. Но вот что удивительно: если они двигались по прямой, то всегда попадали на одно из озер. Почему? Как располагались озера относительно местоположения дачи?

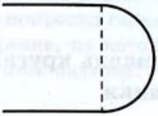
**8-4-4.** Летом отец с сыном Сергеем оказались на берегу круглого озера диаметром около 100 м. В середине озера был небольшой остров, на котором они заметили одинокое дерево. Сергею захотелось перебраться на остров, однако вплавь преодолеть расстояние 50 м было рискованно — лодки с собой не было. Но в рюкзаке оказалась веревка длиной немногим более 100 м, а на берегу озера росло одинокое дерево. Используя эти два дерева и веревку, Сергей перебрался на остров, а затем благополучно вернулся обратно к отцу. Как он это сделал?

### *Это интересно*

**8-4-5.** *Изображение окружности на клетчатой бумаге без циркуля.* Как изобразить окружность с помощью циркуля, вы знаете. А как быть, если нет циркуля и надо изобразить окружность от руки? Для этого можно применить следующее правило. Возьмем лист клетчатой бумаги. Первую точку окружности поставим в узле (пересечении линий) клетчатой бумаги. Затем, отступив на три клетки вправо и на одну клетку вниз, поставим вторую точку. Отступим от второй точки на одну клетку вправо и вниз, получим третью точку. Четвертая точка получится, если отступить от третьей точки на одну клетку вправо и на три клетки вниз. Соединив эти четыре точки плавной линией, получим четверть окружности. Это правило для запоминания можно записать: 3–1, 1–1, 1–3. Оставшуюся часть окружности легко дорисовать. Радиус получившейся окружности будет равен 5 клеткам. Если необходимо изобразить окружность с радиусом 2,5 клетки, то делаем все аналогично, но отступы уменьшаем в 2 раза. А если нужно изобразить окружность с радиусом, равным 10 клеткам, то отступы соответственно увеличиваем в 2 раза.



**8-4-6.** *Фигуры в архитектуре.* Фигуру, состоящую из полуокружности и двух параллельных прямых (см. рисунок), в архитектуре называют «валиком», если диаметр полуокружности вертикален, и «аркой», если горизонтален.



Валик

Арка

**8-4-7.** *Появление термина «радиус».* В древности не было такого термина, как радиус. Его впервые ввел в XVII веке французский математик Франсуа Виет. В переводе с латинского этот термин означал «спица колеса».

***Подумай!***

**8-4-8.** Брат и сестра разделили круглый торт двумя перпендикулярными разрезами на четыре части. Сестра взяла себе две части — наименьшую и наибольшую, а две остальные отдала брату. Кому из них досталось не меньше половины торта?

**8-4-9.** Хорда удалена от центра окружности на расстояние $h$. В каждый из двух сегментов круга, стягиваемый этой хордой, вписан квадрат так, что пара его соседних вершин лежит на хорде, а другая пара соседних вершин — на соответствующей дуге окружности. Найдите разность длин сторон квадратов.

**8-4-10.** На окружности выбраны диаметрально противоположные точки $A$ и $B$ и отличная от них точка $C$. Касательная к окружности в точке $A$ и прямая $BC$ пересекаются в точке $D$. Докажите, что прямая, касающаяся окружности в точке $C$, делит отрезок $AD$ пополам.

**8-4-11.** Могут ли биссектрисы двух внешних углов треугольника пересечься в точке, лежащей на описанной около треугольника окружности?

**8-4-12.** Докажите, что в неравнобедренном прямоугольном треугольнике высота, опущенная на гипотенузу, меньше половины гипотенузы.

**8-4-13.** В прямоугольной трапеции на боковой стороне, не перпендикулярной основанию, как на диаметре описана окружность. Оказалось, что она касается противоположной стороны трапеции. Докажите, что квадрат стороны трапеции в 4 раза больше произведения оснований трапеции, то есть $AB^2 = 4BC \cdot AD$.

**8-4-14.** Шестиугольник $ABCDEF$ вписан в окружность. Докажите, что если $AB \parallel DE$ и $AF \parallel DC$, то и $BC \parallel EF$.

# 9 КЛАСС

## ТЕМА 1. Длина окружности и площадь круга. Правильные многоугольники

### *Геометрия дома*

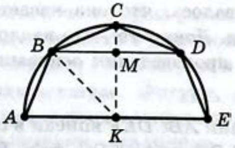
**9-1-1.** Мама нашла дома 21 упаковку паркетных плиток в форме правильного шестиугольника со стороной 24 см. Она попросила сына Диму, ученика 9 класса, рассчитать, хватит ли этих упаковок для покрытия пола комнаты размером $7{,}48\times3{,}25$ м, если в каждой упаковке 8 плиток.

### *Геометрия вне дома*

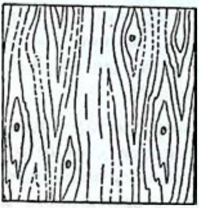
**9-1-2.** Отец решил просверлить отверстие в центре пластины, имеющей форму круга. Для этого необходимо было найти центр окружности. Рядом находился сын Дима. Отец попросил Диму помочь ему найти центр круга. Дима легко справился с поставленной задачей, имея в своем распоряжении всего лишь прямоугольный треугольник и карандаш. А вы сможете решить эту задачу?

**9-1-3.** Летом Сергей приехал в деревню к бабушке, у которой сохранился старый колодец. Бабушка решила проверить, как внук знает геометрию, и поручила ему решить такую задачу: определить глубину колодца, если ничего, кроме обычной школьной линейки, у Сергея нет. Сергей легко справился с этой задачей. А вы можете решить?

**9-1-4.** Отец решил соорудить на даче мансарду. Простейшее в изготовлении перекрытие мансарды представляет собой в вертикальном сечении половину правильного восьмиугольника (см. рисунок). Отец попросил сына, окончившего 9 классов, найти ширину перекрытия $BD$, сторону восьмиугольника $AB$, высоту мансардной комнаты $MK$, если длина $AE$ равна 6 м. Сын справился с этой задачей. А вы сможете?



**9-1-5.** Отец нашел на даче лист фанеры размером $150 \times 150$ см и попросил сына Дмитрия определить приближенно диаметр бревна, из которого он был изготовлен. Дмитрий справился с этой задачей. А вы?



**9-1-6.** Отец попросил сына Сергея вычислить площадь головки шестигранного болта со стороной 1 см. Сергей справился с этой задачей. А вы сможете ее решить?

**9-1-7.** Отец попросил сына Сергея выпилить из квадратного куска доски круг наибольшего диаметра для бочки, в которой предполагалось засолить грибы. Какой процент отходов материала получился?

## *Это интересно*

**9-1-8.** *Интересные числа.* Многие из необычных чисел носят имена великих математиков. Например, число $\pi$ называют *числом Архимеда*, а число $e \approx 2{,}718281$ — *неперовым числом.* Оно было названо в честь Джона Непера — шотландского математика, изобретателя логарифмов. А какое число иногда называют числом Шехерезады?

**9-1-9.** *Приближенное вычисление площади круга.* В Древнем Египте для нахождения площади круга пользовались формулой $S_{\text{кр}} = \left(\frac{8}{9}d\right)^2$, где $d$ — диаметр круга. При этом получалось приближенное значение $\pi \approx \left(\frac{8}{9}\right)^2 \cdot 4 = \frac{64 \cdot 4}{81} = \frac{256}{81} \approx 3{,}16$, что было близко к более точному значению числа $\pi$.

**9-1-10.** *Приближенное вычисление длины окружности.* В древнем Вавилоне приближенно находили длину окружности, принимая за нее периметр правильного вписанного в окружность шестиугольника. Пользуясь данным приемом, можно приближенно найти значение $\pi$. Так как длина окружности $C$ равна $2\pi R$, периметр шестиугольника равен $6R$, то $\pi = 3$.

**9-1-11.** *Изготовление дна бочки.* Раньше для изготовления цельного дна бочки из одного куска доски бондари часто поступали следующим образом: измеряли охват бочки у дна, брали доску шириной, равной трети найденной длины, из которой и делали цельное дно бочки. Дайте геометрическое обоснование этого способа.

**9-1-12.** *Выпрямление окружности.* Раньше для приближенного выпрямления окружности столяр откладывал три раза ее диаметр и один раз высоту меньшего сегмента, отсеченного стороной вписанного в окружность квадрата. Какова была при этом погрешность вычисления длины окружности по сравнению с формулой $C = \pi d$?

***Подумай!***

**9-1-13.** Перерисуйте на плотную бумагу изображенный на рисунке правильный восьмиугольник и в центре вырежьте отверстие, также в форме правильного восьмиугольника. Образовавшуюся фигуру разрежьте на 8 равных частей и, перекладывая их, составьте восьмиконечную звезду, которая также имела бы восьмиугольное отверстие.

**9-1-14.** Дети на даче решили сыграть в такую игру: по очереди проводить в правильном двадцатиугольнике диагонали, которые при этом не должны пересекаться. Победителем будет признан тот, кто последним проведет диагональ. Первой начинала игру сестра и всегда побеждала. Какой стратегии она придерживалась?

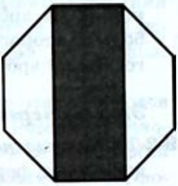
**9-1-15.** На стороне $AB$ правильного треугольника $ABC$ взяли точку $M$ и на отрезке $MC$ по ту сторону от него, что и точка $B$, построили правильный треугольник $MKC$. Докажите, что прямые $AC$ и $BK$ параллельны.

**9-1-16.** Треугольник обладает следующим свойством: сумма расстояний от любой точки внутри него (включая точки на границе) до прямых, содержащих его стороны, постоянна и не зависит от выбора точки. Докажите, что данный треугольник правильный.

**9-1-17.** Хулиган Вася вырезал из школьной стенгазеты, имеющей форму квадрата, все то, что ему не понравилось. В итоге остался кусок в форме правильного восьмиугольника. Можно ли по этому восьмиугольнику узнать размеры школьной стенгазеты, если количество отрезанных кусков было пять и каждый из них имел форму многоугольника?

**9-1-18.** Разбейте правильный шестиугольник на 12 равных четырехугольников.

**9-1-19.** В правильном выпуклом восьмиугольнике провели две параллельные диагонали. Докажите, что площадь закрашенной части равна площади незакрашенной части.



**9-1-20.** На катетах прямоугольного треугольника площадью 10 см$^2$ как на диаметрах построены полуокружности, расположенные вне треугольника. Найдите суммарную площадь частей полукругов, расположенных вне круга, описанного вокруг этого треугольника.

## ТЕМА 2. Элементы стереометрии

### *Геометрия дома*

**9-2-1.** Мама предложила Сергею почистить картофель для пюре. Какой картофель выгоднее Сергею почистить: мелкий или крупный и почему?

**9-2-2.** В бутылку с круглым (или прямоугольным) дном налита жидкость. Мама попросила Сергея узнать объем всей бутылки в миллилитрах. Сергей сделал это, имея в руках только масштабную линейку. А сможете ли вы сделать это? Выливать или доливать жидкость не разрешается. Дно бутылки считать плоским.

**9-2-3.** Мама покрасила пол в квартире и попросила дочь приблизительно узнать толщину получившегося слоя краски. Дочь легко справилась с задачей. А вы сможете?

### *Геометрия вне дома*

**9-2-4.** Отец пришел с сыном в магазин выбрать гвозди для ремонта на даче. В магазине им предложили на выбор три вида гвоздей. При этом гвозди всех трех видов были одинаковой длины и массы, но разного сечения: круглого, квадратного и треугольного. Отец хотел выбрать такие гвозди, чтобы они держались в бревнах и досках как можно крепче. Он попросил сына определиться с выбором гвоздей. Сын помог отцу. А вы смогли бы сделать правильный выбор?

**9-2-5.** Мама послала дочь на рынок купить мандарины. Дочь на рынке нашла два сорта мандаринов: крупные и мелкие. При этом толщина корки у мандаринов обоих сортов была одинаковой. Какие мандарины выгоднее купить дочери?

**9-2-6.** Мама послала сына купить на рынке арбузы. Сын выбрал на вид два арбуза. Первый из них был в обхвате на четверть больше второго арбуза и стоил в полтора раза дороже второго. Какой арбуз выгоднее было купить?

### *Это интересно*

**9-2-7.** *Жилища некоторых народов.* Жилища некоторых народов имеют форму полусферы, цилиндра, конуса, пирамиды или комбинации их.

***Вигвам*** — жилище индейцев Северной Америки, представляет собой шалаш на каркасе из тонких гибких стволов и покрытый циновкой, корой или ветками. Имеет *полусферическую* форму.

***Типи*** — традиционное переносное жилище кочевых индейцев Великих равнин с очагом, расположенным внутри (в центре). Данный тип жилища использовался также горскими племенами Дальнего Запада. Иногда его применяли и в соседних регионах. Часто типи путают с вигвамом. Но отличие типи от вигвама в том, что типи имеет форму *прямого* или *слегка наклоненного назад конуса* или *пирамиды* на каркасе из шестов, с покрышкой, сшитой из обработанных шкур бизонов или оленей. Позднее, с развитием торговли с европейцами, чаще использовалась более легкая парусина. Сверху находится дымовое отверстие с двумя лопастями — дымовыми клапанами, которыми регулировали тягу дыма очага с помощью особых шестов. В нижней части помещения обычно имелась дополнительная подкладка, создающая больший комфорт, изолируя находящихся внутри от потока наружного воздуха. В разных племенах имеются свои особенности конструкции этого жилища.

***Чум*** — *конический шалаш* из жердей, покрываемый берёстой, войлоком или оленьими шкурами; форма жилища, распространенная по всей Сибири. Диаметр чума в нижней части обычно составляет от 3 до 8 метров.

***Юрта*** — переносное каркасное жилище кочевников (*цилиндрической формы с куполообразной крышей* или *крышей в форме усеченного конуса*), покрытое войлоком. Юрта полностью удовлетворяет потребностям кочевника в силу своего удобства и практичности. Она быстро собирается и легко разбирается членами одной семьи в течение часа, легко перевозится на верблюдах, лошадях или автомашине. Войлочное покрытие юрты защищает от дождя, ветра и холода. Отверстие на вершине купола служит для дневного освещения и позволяет легко пользоваться очагом. Юрта и поныне используется во многих случаях животноводами Казахстана, Кыргызстана и Монголии.

***Яранга*** — переносное жилище некоторых кочевых народов (чукчей, коряков, эвенов, юкагиров) Севера России. В основании обычно представляет собой круг. Каркас и *конический купол* яранги собираются из легких деревянных шестов, после чего покрываются оленьими шкурами. В среднем на покрытие яранги обычного размера требуется около 50 шкур. Внутри яранга делится на жилое отапливаемое помещение и кладовую, разделенные вертикальным пологом, образующим в плане квадрат.

## *Подумай!*

**9-2-8.** Одна цилиндрическая кружка втрое выше другой, но вторая в два раза шире первой. В какую из кружек поместится жидкости больше и во сколько раз?

**9-2-9.** Три боковых ребра четырехугольной пирамиды равны 1 см, 6 см и 11 см. Может ли основанием пирамиды быть квадрат? Ответ обоснуйте.

**9-2-10.** Существует ли многогранник с нечетным числом граней, каждая из которых является многоугольником с нечетным числом сторон?

**9-2-11.** Найдите сечение наименьшей площади, проходящее через диагональ куба.

**9-2-12.** Можно ли завернуть кубик с ребром 1 в квадратный листок бумаги со стороной 3?

# Часть 2. ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

# 7 КЛАСС

## ТЕМА 1. Начальные геометрические сведения

**7-1-1.** 7,84 м. *Решение.* Так как высота каждой ступени равна 14 см, а всего было 56 ступенек, то высота, на которую поднялся Василий, равна:

$$14 \cdot 56 = 784\,(\text{см}) = 7{,}84\,(\text{м}).$$

**7-1-2.** 30°. *Решение.* Так как полный угол составляет два развернутых угла, то есть 360°, а угол, который образуют минутная и часовая стрелки в 1 ч, меньше полного угла в 12 раз, то он равен 30°.

**7-1-3.** 120°. *Решение.* Полный угол составляет два развернутых угла, то есть 360°, а угол между минутной и часовой стрелками в 8 ч будет больше угла между минутной и часовой стрелками в 1 ч в 4 раза. Поэтому искомый угол равен 120°.

**7-1-4.** 11°15′. *Решение.* Так как углы между спицами равны, углов всего 36, а полный угол составляет 360°, то угол между двумя соседними спицами равен: $360° : 36 = 10°$. Если спиц в колесе 32, то угол между соседними спицами будет равен: $360° : 32 = 11{,}25° = 11°15'$.

*Примечание.* Данное решение является приближенным, поскольку в современных велосипедах продолжения спиц часто идут не через центр колеса, а пересекаются.

**7-1-5.** Короткие бревна. *Решение.* Выгоднее привезти более короткие бревна, так как при распиловке их на чурки число распилов будет меньше. Например, если привезти 12 трехметровых бревен, то количество распилов будет 48, а если привезти 10 бревен длиной 3 м 60 см (кубатура совпадает), то распилов будет 50.

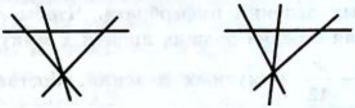
**7-1-6.** *Решение.* Намотаем тонкую проволоку в один слой на линейку так, чтобы соседние витки проволоки были плотно прижаты друг к другу. Разделив ширину полученного слоя на число витков, найдем толщину одного витка проволоки, которая совпадает с диаметром проволоки.

**7-1-7.** ≈ 3 аршина, ≈ 2,13 м. *Решение.* 7 футов = $7 \cdot 0{,}3048$ м = = 2,1336 м ≈ 2,13 м. Так как 1 аршин равен 0,711 м, то 7 футов будут равны 2,13336 : 0,711 ≈ 3 (аршинам).

**7-1-12.** *Решение.* Для этого надо натянуть нитку и, прикладывая ее к разным точкам стола, убедиться в том, что между ниткой и поверхностью нет просветов. Тогда можно сделать вывод, что на поверхности нет впадин. Также надо иногда приподнимать один из концов нити, чтобы проверить, не является ли поверхность выпуклой. Если нить касается поверхности только в одной точке, то поверхность стола не выпуклая, а если касается поверхности еще в какой-то промежуточной точке, то поверхность выпуклая.

**7-1-14.** Плоскость.

**7-1-15.** Можно, см. рисунок.



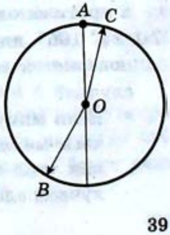
**7-1-16.** Могут, если в 18 ч установить бой часов на 3 ч утра.

**7-1-17.** Через 19 мин. *Решение.* Так как будильник отстает на 3 мин в час, то каждые 20 мин он будет отставать на 1 мин. Поэтому 12 ч он покажет через $20 - 1 = 19$ (мин).

**7-1-18.** $75°$. *Решение.* В 15 ч стрелки часов образовали прямой угол. За 30 мин минутная стрелка повернулась на $180°$, а часовая — на $15°$. Тогда угол между ними стал равен: $180° - 90° - 15° = 75°$.

**7-1-19.** $110°$. *Решение.* В 12 ч стрелки часов сходятся вместе. После этого за 20 мин минутная стрелка проходит $\frac{1}{3}$ окружности, то есть описывает угол $120°$. Часовая стрелка движется в 12 раз медленнее минутной (так как описывает круг за 12 ч). Поэтому за 20 мин она опишет угол $120° : 12 = 10°$ и образует с минутной стрелкой угол $120° - 10° = 110°$.

**7-1-20.** $167{,}5°$. *Решение.* Изобразим модель циферблата часов:




Имеем:

$$\angle COB = \angle AOB + \angle AOC;$$

$$\angle AOB = 180° - \frac{180°}{6} = 150°;$$

$$\angle AOC = \frac{30° \cdot 35}{60} = 17{,}5°; \text{ поэтому}$$

$$\angle COB = 167{,}5°.$$

**7-1-21.** 1°. *Решение.* За 1 час минутная стрелка проходит полный круг (угол 360°), а часовая стрелка — угол, в 12 раз меньший, то есть 30°. Значит, в 7 ч минутная стрелка будет отставать от часовой на 210°. Через 38 мин минутная стрелка повернется на угол $360° \cdot \frac{38}{60} = 228°$, а часовая — на угол, в 12 раз меньший, то есть на 19°. Тогда в 7 ч 38 мин угол между стрелками составит: $210° + 19° - 228° = 1°$.

**7-1-22.** Через $21\frac{9}{11}$ мин. *Решение.* В момент, когда часы показывали 4 ч, между часовой и минутной стрелками было 20 минутных делений циферблата. Чтобы стрелки совпали, минутная стрелка должна пройти $x$ минутных делений, а часовая — $\frac{x}{12}$ минутных делений. Составим уравнение $20 + \frac{x}{12} = x$, откуда получим $x = 21\frac{9}{11}$. Таким образом, минутная стрелка догонит часовую через $21\frac{9}{11}$ мин.

**7-1-23.** Через $32\frac{8}{11}$ мин. *Решение.* Обозначим через $x$ мин промежуток времени, который пройдет до того момента, когда часовая и минутная стрелки будут направлены в разные стороны. Минутная стрелка за это время пройдет $x$ минутных делений циферблата, а часовая — $\frac{x}{12}$ минутных делений. В момент, когда стрелки часов будут направлены в противоположные стороны, их разделят 30 минутных делений циферблата. Поэтому имеем уравнение $x - \frac{x}{12} = 30$, откуда $x = 32\frac{8}{11}$. Следовательно, через $32\frac{8}{11}$ мин после того, как минутная и часовая стрелки совпадут, они будут «смотреть» в противоположные стороны.

**7-1-24.** 105° или 75°. *Решение.* За полчаса минутная стрелка повернется на 180°, а часовая — на 15°. Рассмотрим два случая.

- Если минутная стрелка опережает часовую, то через полчаса между ними будет угол $180° - 15° + 90° = 255°$. Так как угол между прямыми (лучами) берем меньший, получаем следующий ответ: $360° - 255° = 105°$.

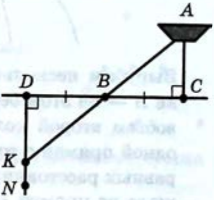
- Если же часовая стрелка опережает минутную, то угол между ними через полчаса составит: $180° - 15° - 90° = 75°$.

Таким образом, в зависимости от того, какая из стрелок была впереди, угол между ними через полчаса будет $105°$ или $75°$.

## ТЕМА 2. Треугольники

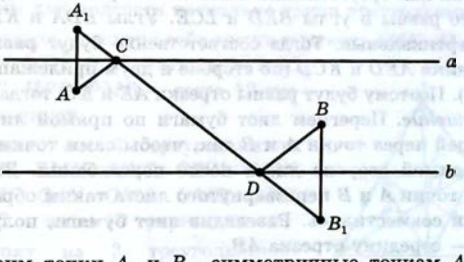
**7-2-1.** Сделаем чертеж.

Пусть точка $A$ — местоположение папы на лодке, отрезок $AC$ — расстояние, которое требуется найти. Выберем на берегу моря точку $B$ и отмерим расстояние $DB = BC$. Затем из точки $D$ проведем перпендикуляр $DN$ к прямой $DC$. На прямой $DN$ найдем такую точку $K$, чтобы точки $A$, $B$ и $K$ располагались на одной прямой. Так как треугольники $ABC$ и $KBD$ равны по стороне и двум прилежащим к ней углам, то $AC = KD$.




*Примечание.* Расстояния можно измерить шагами, а прямой угол построить способом, указанным в задаче 8-2-14.

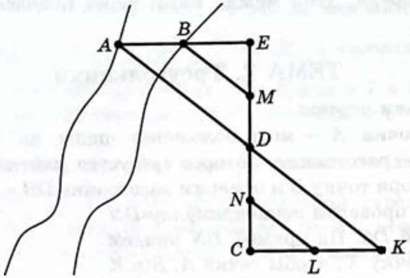
**7-2-2.** По ломаной $ACDB$. *Решение.* Обозначим точками $A$ и $B$ острова, а прямыми $a$ и $b$ — берега реки (см. рисунок).




Построим точки $A_1$ и $B_1$, симметричные точкам $A$ и $B$ относительно прямых $a$ и $b$. Проведем прямую $A_1B_1$. Точки $C$ и $D$ — точки пересечения этой прямой соответственно с прямыми $a$ и $b$ — соединим отрезками с точками $A$ и $B$.

Кратчайший путь — ломаная $ACDB$, то есть сначала с острова $A$ рыбаки доплывут до ближайшего берега реки (до точки $C$), затем переплывут на противоположный берег реки (в точку $D$) и наконец прибудут на остров $B$.

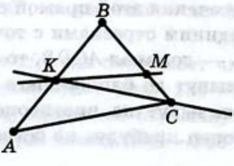
**7-2-3.** *Решение.* Рассмотрим возможный вариант. Обозначим буквами $A$ и $B$ точки соответственно на этом и противоположном берегу речки (см. рисунок).



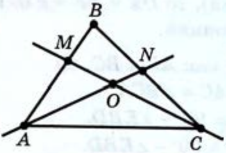

Вырубим несколько колышков и вобьем один из них в точке $B$ — на этом берегу реки. На некотором расстоянии от него вобьем второй колышек в точке $E$, которая будет лежать на одной прямой с точками $A$ и $B$. Затем от точки $E$ отложим два равных расстояния — отрезки $ED$ и $DC$ так, чтобы точка $D$ лежала на прямой $EC$. От точек $E$ и $C$ отложим равные расстояния $EM$ и $CN$. Отложим также расстояния $NL = BM$, $CL = EB$ и таким образом определим положение точки $L$. Найдем на прямой $CL$ точку $K$, лежащую на одной прямой с точками $A$ и $D$. Так как треугольники $BEM$ и $LCN$ равны по трем сторонам, то равны и углы $BED$ и $LCE$. Углы $EDA$ и $KDC$ равны как вертикальные. Тогда соответственно будут равны и треугольники $AED$ и $KCD$ (по стороне и двум прилежащим к ней углам). Поэтому будут равны отрезки $AE$ и $KC$, тогда $AB = LK$.

**7-2-4.** *Решение.* Перегнем лист бумаги по прямой линии, проходящей через точки $A$ и $B$ так, чтобы сами точки остались на видимой стороне листа после перегибания. Затем прижмем точки $A$ и $B$ неразвернутого листа таким образом, чтобы они совместились. Разгладив лист бумаги, получим точку $C$ — середину отрезка $AB$.

**7-2-5.** Можно. а) См. рисунок: это треугольники $ABC$, $KBM$, $KBC$, $KMC$, $AKC$.

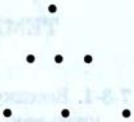


б) См. рисунок: это треугольники $ABN$, $MBC$, $ANC$, $AMC$, $AOC$, $AOM$, $NOC$, $ABC$.




**7-2-6.** *Решение.* Надо взять точку внутри четырехугольника (пятиугольника, ..., $n$-угольника) и соединить ее с вершинами четырехугольника (пятиугольника, ..., $n$-угольника).

**7-2-7.** Можно. См. рисунок.



**7-2-8.** а) Можно разрезать любой треугольник;

б) нельзя разрезать ни один треугольник;

в) можно разрезать любой тупоугольный треугольник.

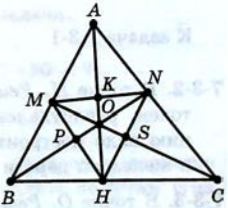
**7-2-9.** Не существует, так как в этом случае удвоенная сумма углов треугольника будет меньше 360°.

**7-2-10.** Всего 13 треугольников: маленьких — 9; состоящих из четырех маленьких треугольников — 3; один большой, состоящий из девяти маленьких.

**7-2-11.** *Решение.*

Выделим для подсчета несколько групп треугольников:

- не содержат внутри себя треугольников: $AMK$, $AKN$, $OMK$, $OKN$, $MOP$, $ONS$, $OSH$, $OPH$, $NSC$, $HSC$, $HPB$, $PMB$ — всего 12 треугольников;
- состоят из 2 треугольников: $AMN$, $BMH$, $HNC$, $OHN$, $OMN$, $OMH$, $OAN$, $OMA$, $OMB$, $OBH$, $OHC$ — всего 12 треугольников;
- состоят из 3 треугольников: $HKN$, $HKM$, $HPN$, $MNP$, $MNS$, $MHS$ — всего 6 треугольников;



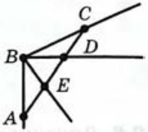

- состоят из 4 треугольников: $BOC$, $BOA$, $AOC$, $BMN$, $MNC$, $AMH$, $AHN$, $CMH$, $BHN$ — всего 9 треугольников;
- состоят из 6 треугольников: $ABN$, $CBN$, $CAM$, $CBM$, $ABH$, $ACH$, $MNH$ — всего 7 треугольников;
- состоят из 12 треугольников: $ABC$ — всего 1 треугольник.

**7-2-12.** Равносторонний.

*Решение.* Так как $\Delta DBE = \Delta ECF = \Delta FAD$ (по двум сторонам и углу между ними), то $DE = EF = FD$. Поэтому треугольник $DEF$ — равносторонний.

**7-2-13.** *Решение.* Так как $AB = BC$, то

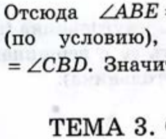
$$\angle BAC = \angle BCA,$$
$$\angle ABE = 90° - \angle EBD,$$
$$\angle CBD = 90° - \angle EBD.$$



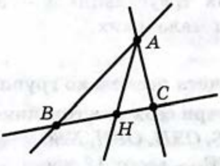

Отсюда $\angle ABE = \angle CBD$. Имеем: $AB = BC$ (по условию), $\angle BAC = \angle BCA$, $\angle ABE = \angle CBD$. Значит, $\Delta ABE = \Delta BCD$.

## ТЕМА 3. Соотношения между сторонами и углами треугольника

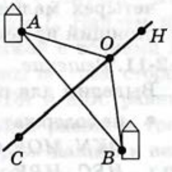
**7-3-1.** Беседку надо построить в точке $H$. *Решение.* Так как треугольник $ABC$ — равнобедренный, то $CH$ будет его высотой, медианой и биссектрисой. Тогда треугольники $AHC$ и $BHC$ — прямоугольные равнобедренные, поэтому $AH = CH = BH$.




К задаче 7-3-1




К задаче 7-3-2

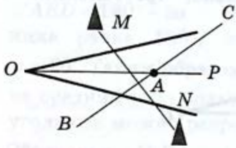



К задаче 7-3-3

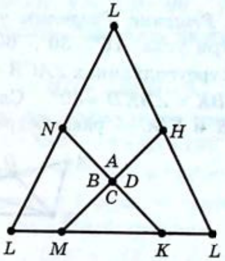
**7-3-2.** В точке $H$. *Решение.* Биссектриса угла является местом точек, равноудаленных от сторон угла $BAC$, поэтому станцию надо построить в месте пересечения биссектрисы угла и железной дороги — в точке $H$.

**7-3-3.** В точке $O$. *Решение.* Местом, равноудаленным от концов отрезка $AB$, является серединный перпендикуляр $CH$ к данному отрезку, поэтому остановку надо построить в месте пересечения серединного перпендикуляра с шоссе — в точке $O$.

**7-3-4.** В точке $A$. *Решение.* Местом, равноудаленным от двух сторон угла, является биссектриса угла $OP$, а местом, равноудаленным от концов отрезка $MN$, — серединный перпендикуляр к отрезку $MN$, поэтому клад надо искать в точке пересечения биссектрисы угла $OP$ и серединного перпендикуляра $BC$ — в точке $A$.




К задаче 7-3-4




К задаче 7-3-7

**7-3-6.** Прав Коля. *Решение.* Если в треугольнике биссектрисы будут перпендикулярны, то сумма двух углов, из которых проведены биссектрисы, будет равна 180°, и тогда сумма трех углов будет больше 180°. Поэтому такого треугольника не существует.

**7-3-7.** См. рисунок (точки $A$, $B$, $C$, $D$ совпадают).

**7-3-8.** *Решение.* Один из возможных вариантов: отложим 13 раз угол 13°, тогда разность углов — развернутого и угла 169° — даст искомый угол: $180° - 13 \cdot 13° = 11°$. Найдите самостоятельно другие способы решения задачи.

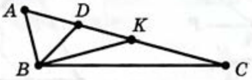
**7-3-9.** *Решение.* Возможные варианты:

1) $10 \cdot 37° - 360° = 10°$, $10° \cdot 3 = 30°$, $37° - 30° = 7°$, $10° - 7° = 3°$.
2) $2 \cdot 37° = 74°$, $75° - 74° = 1°$, $3° \cdot 1 = 3°$.

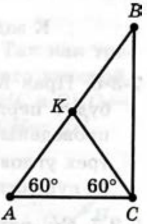
**7-3-10.** *Решение.* Построим окружность с центром в вершине угла, отложим 19 раз угол 19°. В результате получим угол $1° = 19° \cdot 19 - 360°$. С помощью этого угла делим данный угол на 19 частей. Найдите и другие способы решения задачи.

**7-3-11.** *Решение.* Так как $108° \cdot 10 = 360° \cdot 3$, то десять углов по 108° должны составить три полных угла. Циркулем чертим окружность с центром в вершине угла 108°. Окружность пересечет угол в двух точках $A$ и $B$, углу 108° будет соответствовать дуга окружности $AB$. Отложим на окружности эту дугу от точки $B$ девять раз. Если после этого конец последней дуги попадет в точку $A$, то данный угол будет равен $108°$, в противном случае он не равен $108°$.

**7-3-12.** *Решение.* Разделим угол треугольника величиной $105°$ на три угла: $15°$, $30°$, $60°$ (см. рисунок). Тогда в полученных треугольниках $\angle ACB = \angle KBC = 15°$, $\angle BAD = \angle DBA = 60°$, $\angle DBK = \angle BKD = 30°$. Следовательно, треугольники $DBA$, $DBK$ и $KBC$ — равнобедренные.

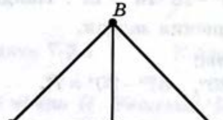



**7-3-13.** Треугольник с углами $60°$, $30°$, $90°$:

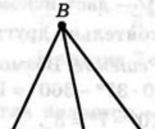



- $\Delta ABC$ — прямоугольный;
- $\Delta AKC$ — остроугольный;
- $\Delta KBC$ — тупоугольный;
- $\Delta AKC$ — равносторонний;
- $\Delta CKB$ — равнобедренный;
- $\Delta ACB$ — разносторонний.

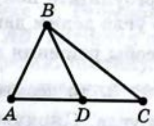
**7-3-14.** Возможные случаи равнобедренных треугольников, полученные путем разрезания большего угла треугольника:



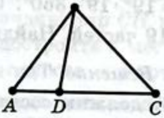

*а)*




*б)*




*в)*




*г)*

*Решение*

*а*) Пусть $\angle ABD = \angle BAD = \alpha$, $\angle CBD = \angle BCD = \beta$. Тогда, учитывая, что $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$, $\angle ABD + \angle CBD = \angle B$, имеем: $\alpha + \beta = 90°$. А это означает, что $\angle B = 90°$, то есть прямоугольный треугольник можно разрезать на два равнобедренных треугольника.

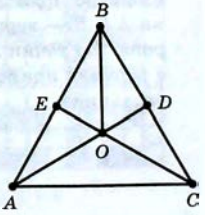
*б*) Пусть $\angle BAD = \angle BDA = \alpha$, $\angle CBD = \angle BCD = \beta$. Тогда $\angle ABD = 180° - 2\alpha$. Учитывая, что сумма углов треугольника равна $180°$, имеем: $\alpha + 180° - 2\alpha + 2\beta = 180°$ или $\alpha = 2\beta$. Таким образом, получаем, что если в треугольнике средний угол больше меньшего в 2 раза, то такой треугольник можно разрезать на два равнобедренных.

*в*) Обозначив $\angle BDA = \angle ABD = \alpha$, $\angle DBC = \angle DCB = \beta$, аналогично получим, что $\alpha = 2\beta$. Тогда $\angle B = 3\beta = 3\angle C$, то есть если в треугольнике больший угол в три раза больше какого-либо из углов треугольника, то такой треугольник можно разрезать на два равнобедренных.

*г*) Обозначив $\angle BAD = \angle ABD = \alpha$, $\angle BDC = \angle CBD = \beta$, аналогично получим: $\beta = 2\alpha$, то есть приходим к такому же выводу, что и в случае *в*).

Таким образом, если треугольник прямоугольный или в нем средний угол больше меньшего в два раза либо больший угол больше какого-либо угла треугольника в три раза, то такой треугольник можно разрезать на два равнобедренных треугольника.

**7-3-15.** *Решение.* Пусть $AD$ и $CE$ — высоты треугольника, $O$ — точка их пересечения. Так как в прямоугольном треугольнике $AOE$ $\angle AOE = 60°$, то $OE = \frac{1}{2}AO$. По условию задачи $OD = \frac{1}{2}AO$, отсюда $OD = OE$. Значит, прямоугольные треугольники $OEB$ и $ODB$ равны по гипотенузе и катету.



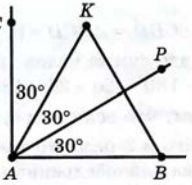

Тогда $BE = BD$, откуда следует, что $\Delta ABD = \Delta CBE$, поэтому $AB = BC$.

В то же время

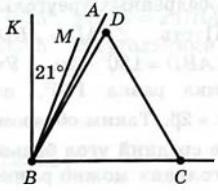
$\angle ABC = 90° - \angle BAD = \angle AOE = 60°$,

а значит, треугольник $ABC$ равносторонний.

**7-3-16.** *Решение.* Построим равносторонний треугольник $AKB$ так, чтобы одна из его сторон $AB$ лежала на стороне прямого угла, а одна из вершин $A$ была в вершине прямого угла (см. рисунок). Разделив пополам угол $KAB$, в результате разделим угол $90°$ на три равные части.




К задаче 7-3-16




К задаче 7-3-17

**7-3-17.** *Решение.* Пусть $\angle ABC = 63°$. Для того чтобы разделить его на требуемое число частей, построим равносторонний треугольник произвольных размеров, но такой, чтобы одна из его вершин совпала с точкой $B$, а одна из сторон лежала на стороне угла $BC$ (см. рисунок). В результате получим $\angle ABD = 3°$. Построив в точке $B$ перпендикуляр к лучу $BC$ и отложив от луча $BA$ два раза угол $3°$, получим $\angle KBM = 21°$. Так как угол $21°$ составляет треть угла $63°$, то, отложив от каждой из сторон угла $ABC$ внутрь по углу $21°$, в результате разделим угол $63°$ на три части.

Поскольку $\angle MBD = 9°$, то, откладывая его шесть раз от стороны $BC$ угла $ABC$, разделим таким образом угол $63°$ на семь равных частей.

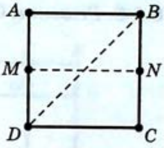
**7-3-18.** *Решение.* На средней из трех данных параллельных прямых возьмем произвольную точку $A$, повернем верхнюю прямую на $60°$ вокруг точки $A$. Повернутая прямая пересечет нижнюю прямую в точке, которую обозначим $B$, тогда точки $A$ и $B$ — вершины искомого треугольника, $AB$ — его сторона. Из точки $A$ проведем дугу радиуса $AB$ до пересечения с верхней прямой, получим точку $C$ — третью вершину треугольника.

# 8 КЛАСС

## ТЕМА 1. Четырехугольники

**8-1-1.** *Решение.* Для проверки, является ли кусок материи квадратом, можно воспользоваться следующим способом:

1) надо перегнуть пополам кусок материи таким образом, чтобы противоположные стороны совместились (по прямой *MN*); тем самым мы докажем, что *ABCD* — прямоугольник;



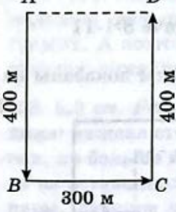

2) перегнуть кусок материи по диагонали *DB* так, чтобы совместились соседние стороны куска; этим мы докажем, что *ABCD* — ромб.

**8-1-2.** 300 м. *Решение.* Изобразим маршрут вашего движения (см. рисунок). Тогда четырехугольник *ABCD* будет прямоугольником (отрезки *AB* и *CD* равны и параллельны), значит, $AD = BC = 300$ м, поэтому вы окажетесь на расстоянии 300 м от дома.

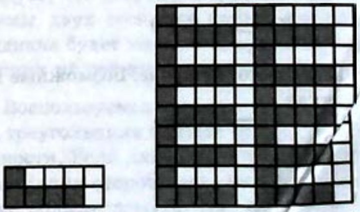
**8-1-3.** 1260 штакетин. *Решение.* Так как пространство между двумя штакетинами равно ширине штакетины, то на 1 м забора потребуется 10 штакетин, а на 126 м забора — 1260 штакетин.

**8-1-4.** Необходимо измерить циркулем: 1) длины противоположных сторон четырехугольника; 2) диагонали четырехугольника. В случае равенства противоположных сторон четырехугольника он является параллелограммом, а в случае равенства диагоналей параллелограмм является прямоугольником.

**8-1-6.** Можно. *Решение.* Из данных фигурок можно сложить прямоугольник размером $2\times5$, а из 10 прямоугольников размером $2\times5$ можно получить квадрат размером $10\times10$.

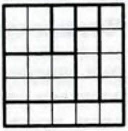



К задаче 8-1-2

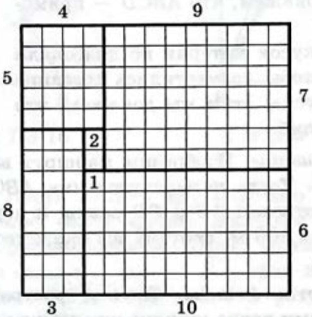


К задаче 8-1-6

**8-1-7.** *Решение.* Способ разрезания квадрата показан на рисунке.



**8-1-8.** *Решение.* Способ разрезания квадрата показан на рисунке.

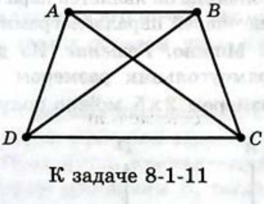



**8-1-9.** Нет. *Решение.* См., например, рисунок.

**8-1-10.** Нет, может быть ромбом.

**8-1-11.** Не всегда. *Решение.* См., например, рисунок.

К задаче 8-1-9




К задаче 8-1-11

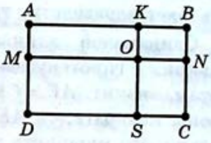
**8-1-12.** Можно. *Решение.* Возможные варианты показаны на рисунках.

**8-1-13.** *Решение.* План построения:

1) соединяем отрезком точки $A$ и $E$;
2) отложим на прямой $AE$ отрезок $EB = EA$;
3) через точку $F$ проведем прямую, параллельную прямой $AB$;
4) отложим на этой прямой отрезки $FC = AE$ и $FD = AE$;
5) точки $A$, $B$, $C$, $D$ соединяем отрезками.

Полученный четырехугольник $ABCD$ — искомый параллелограмм.

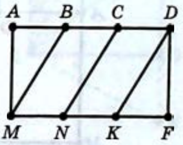

К задаче 8-1-13




К задаче 8-1-14

**8-1-14.** Девять прямоугольников: $ABCD$, $AKSD$, $KBCS$, $ABNM$, $MNCD$, $AKOM$, $KONB$, $ONCS$, $MOSD$.

**8-1-15.** Всего на рисунке восемь четырехугольников: $BCNM$, $CDKN$, $MBDK$, $MACN$, $CDFN$, $BDFM$, $ADKM$, $ADFM$.




**8-1-16.** $5 : 8$. *Решение.* Пусть прямая $BO$ пересекает сторону $AC$ в точке $E$. Проведем $DM \parallel BE$ до пересечения с $AC$ в точке $M$. По теореме Фалеса $AE : EM = 5 : 2$, $EM : MC = 1 : 3$. Пусть $AE = 5k$, $EM = 2k$, тогда $MC = 3EM = 6k$, следовательно, $AE : EC = 5 : 8$.

**8-1-17.** *Решение.* Достроим треугольник до параллелограмма так, чтобы медиана стала половиной диагонали. Из неравенства треугольника следует, что диагональ (равная удвоенной медиане) меньше суммы двух соседних сторон параллелограмма. А поэтому медиана будет меньше полусуммы сторон треугольника, выходящих из той же вершины.

**8-1-18.** 5,5 см. *Решение.* Воспользуемся неравенством треугольника: каждая сторона треугольника меньше суммы двух других, но больше их разности. Если длина диагонали равна 15, то из оставшихся чисел (длин сторон) надо бы составить две пары, дающие в сумме больше чем 15. Однако это не так, поэтому длина диагонали не может быть равна 15.

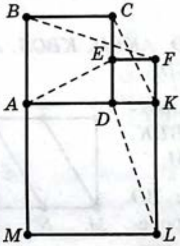
Аналогично не подходит и число 10.

Если длина диагонали равна 2, то из оставшихся чисел можно было бы составить две пары, разность которых должна быть меньше 2. Однако это не так. Таким образом, не подходит и число 2.

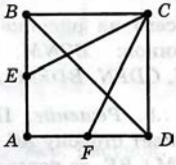
Если длину диагонали принять равной 4, то из оставшихся чисел можно составить только одну пару, разность которых $5{,}5 - 2 < 4$, следовательно, число 4 также не подходит.

Тогда диагональю будет отрезок длиной 5,5, который удовлетворяет неравенству треугольника.

**8-1-19.** Одинаковой длины. *Решение.* Прямоугольные треугольники с гипотенузами $AE$ и $CK$, $FB$ и $DL$ равны по двум катетам, значит, $AE = CK$ и $FB = DL$. Так как $EF = KD$ как стороны квадрата, то $AE + EF + FB = CK + KD + DL$. Следовательно, оба маршрута одинаковы.



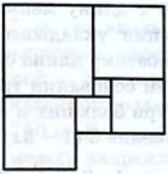

К задаче 8-1-19



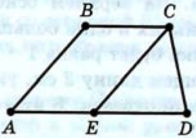

К задаче 8-1-20

**8-1-20.** *Решение.* Точки пересечения отрезков $CE$ и $CF$ с диагональю $BD$ являются точками пересечения медиан треугольников $ABC$ и $ADC$. Поскольку медианы треугольника делятся в точке пересечения в отношении $2:1$, считая от вершины, а треугольники $ABC$ и $ADC$ равны, то расстояние между точками пересечения медиан равно расстояниям от них до вершин $B$ и $D$.

**8-1-21.** 4. *Решение.* Обозначим сторону самого большого квадрата через $x$. Тогда, двигаясь от большого квадрата по часовой стрелке, последовательно выразим через $x$ стороны других квадратов: $x - 1$, $x - 2$, $x - 3$. Обозначив сторону искомого квадрата через $y$, получим два выражения для длины верхней стороны фигуры: $x + x - 1 = y + x - 2 + x - 3$. Из этого равенства находим $y = 4$.



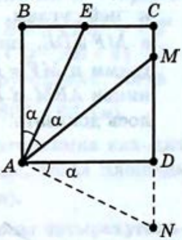
К задаче 8-1-21




К задаче 8-1-22

**8-1-22.** *Решение.* Выполним дополнительное построение: проведем прямую $CE$, параллельную большей боковой стороне $AB$ трапеции. Тогда $DE = AD - AE = AD - BC$. В треугольнике $CDE$ выполняется неравенство $CE - CD < DE$. Так как $DE = AD - BC$, $CE = AB$, то $AB - CD < AD - BC$.

**8-1-23.** 5 см. *Решение.*

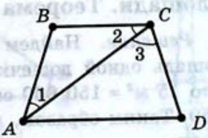



Выполним дополнительное построение: продолжим отрезок $MD$ на отрезок $DN$, равный $BE$, и соединим точки $N$ и $A$. Обозначим угол $BAE$ через $\alpha$. Треугольники $ABE$ и $ADN$ равны по двум катетам, поэтому $\angle DAN = \alpha$,

$$\angle MAN = 90° - 2\alpha + \alpha = 90° - \alpha = \angle MNA.$$

Значит, треугольник $AMN$ будет равнобедренным. Тогда $MN = AM = 5$ см, то есть $MD + BE = 5$ см.

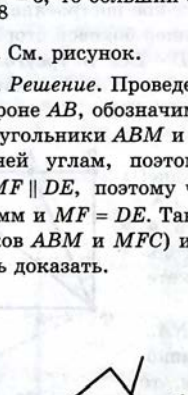
**8-1-24.** $72°, 108°, 108°, 72°$. *Решение.* Выполним чертеж. Так как треугольник $ABC$ равнобедренный и $\angle B > 90°$, то $\angle 1 = \angle 2$. Но $BC \parallel AD$, диагональ $AC$ — секущая, значит, $\angle CAD = \angle 2$. Поскольку $\angle 3 \neq \angle 2$ (иначе $\angle A = \angle C$, чего не может быть), то $\angle 3 = \angle D$. Однако $\angle D = \angle A$, поэтому $\angle 3 = \angle 1 + \angle 2$, тогда $\angle 3 = 2\angle 1 = 2\angle 2$. В результате имеем: $\angle 2 + \angle 3 + \angle 3 = 180°$; $\angle 2 + 2\angle 2 + 2\angle 2 = 180°$; $5\angle 2 = 180°$; отсюда $\angle 2 = 36°$. Тогда углы трапеции равны $72°, 108°, 108°, 72°$.



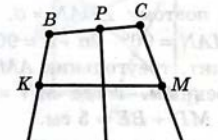
**8-1-25.** 5 : 1. *Решение.* Обозначим через $x$ длину меньшего отрезка. На верхнем основании трапеции укладывается три маленьких и один большой отрезок, поэтому длина большого отрезка будет равна $1 - 3x$. На нижнем основании трапеции, имеющем длину 2 см, укладывается три больших и один маленький отрезок. В итоге имеем уравнение $3(1 - 3x) + x = 2$, решив которое получим $x = \frac{1}{8}$. Тогда $1 - 3x = \frac{5}{8}$. Так как $\frac{5}{8} : \frac{1}{8} = 5$, то больший отрезок в пять раз длиннее меньшего.

**8-1-26.** См. рисунок.

**8-1-27.** *Решение.* Проведем через точку $M$ прямую параллельно стороне $AB$, обозначим точку $F$ ее пересечения с прямой $CE$. Треугольники $ABM$ и $MFC$ равны по стороне и прилежащим к ней углам, поэтому $AB = MF$. Кроме того, $MD \parallel FE$, а $MF \parallel DE$, поэтому четырехугольник $MDEF$ — параллелограмм и $MF = DE$. Так как $AB = MF$ (из равенства треугольников $ABM$ и $MFC$) и $MF = DE$, то $AB = DE$, что и требовалось доказать.



К задаче 8-1-26




К задаче 8-1-28

**8-1-28.** *Решение.* Переложим части данного четырехугольника так, чтобы их вершины $A$, $B$, $C$, $D$ оказались в одной точке и совпали отрезки $AK$ и $BK$, $BP$ и $CP$ и т. д. При этом получится четырехугольник, у которого противоположные стороны попарно равны.

## ТЕМА 2. Площади. Теорема Пифагора

**8-2-1.** 750 дощечек. *Решение.* Найдем площадь комнаты: 15 м². Найдем площадь одной дощечки: 200 см². Так как 1 м² = 10 000 см², то 15 м² = 150 000 см². Разделив 150 000 на 200, получим 750. Таким образом, для ремонта пола потребуется 750 дощечек.

**8-2-2.** 80 плиток. *Решение.* Так как размеры прямоугольника $2{,}5 \times 2$ м, то вдоль его большей стороны можно уложить 10 квадратных кафельных плиток со стороной 25 см, а вдоль меньшей — 8 таких плиток. Тогда потребуется всего 80 плиток указанного размера.

**8-2-3.** В 750 м. *Решение.* Применим теорему Пифагора. Так как угол между направлениями на север и восток равен 90°, то расстояния 450 м и 600 м будут катетами. Тогда гипотенуза равна: $\sqrt{450^2 + 600^2} = 750$ (м).

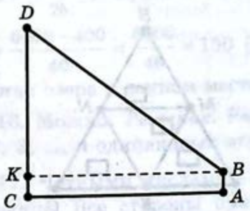
**8-2-4.** 60 м. *Решение.* Сделаем чертеж: здесь $CD = 41$ м (высота большей ели), $AB = 5$ м (высота меньшей ели), $AC = 48$ м (расстояние между елями), а $BD$ (расстояние между верхушками елей) надо найти.

Выполним дополнительное построение: проведем $BK$ перпендикулярно прямой $CD$, тогда треугольник $BKD$ — прямоугольный и из него (по теореме Пифагора) $BD = \sqrt{DK^2 + KB^2}$. Так как $BK = AC = 48$ м, то $KD = CD - KC = CD - AB = 41 - 5 = 36$ (м). Четырехугольник $ACKB$ — прямоугольник, тогда

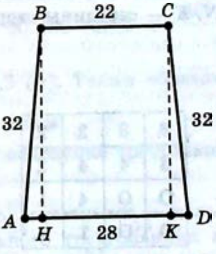
$$DB = \sqrt{36^2 + 48^2} = \sqrt{1296 + 2304} = \sqrt{3600} = 60 \text{ (м)}.$$

**8-2-5.** 7,7 сотки. *Решение.* Площадь $S$ прямоугольника находят по формуле $S = ab$, где $a$ и $b$ — его стороны, тогда площадь участка равна: $35 \cdot 22 = 770\,(\text{м}^2) = 7{,}7$ (сотки).

**8-2-6.** 7,96 сотки. *Решение.* Так как две стороны четырехугольника параллельны, а другие две — не параллельны, то данный четырехугольник является трапецией. Площадь трапеции находят по формуле $S = \dfrac{a+b}{2} \cdot h$. Высоты трапеции мы не знаем. Поскольку две другие стороны равны, то трапеция будет равнобедренной. Сделаем чертеж.



К задаче 8-2-4



К задаче 8-2-6

Выполним дополнительное построение: проведем в трапеции высоты $BH$ и $CK$. Тогда $BC = HK = 22$ м и $AH = KD = 3$ м. Треугольники $ABH$ и $CKD$ — прямоугольные, по теореме Пифагора найдем в треугольнике $ABH$ катет:

$$BH = \sqrt{AB^2 - AH^2} = \sqrt{1024 - 9} = \sqrt{1015} \approx 31{,}86.$$

Тогда

$$S = \frac{a+b}{2} \cdot h \approx \frac{22+28}{2} \cdot 31{,}86 \approx 796{,}5 \text{ (кв. м)} = 7{,}965 \text{ (сотки)}.$$

**8-2-7.** $30 \times 40$ м. *Решение*. Задачу можно легко решить подбором. Так как площадь $S$ прямоугольника со сторонами $a$ и $b$ находят по формуле $S = ab$, а периметр $P$ прямоугольника — по формуле $P = 2a + 2b$, то полупериметр будет равен 70 м. Двумя числами, которые в сумме дают 70, а в произведении — 1200, будут 30 и 40. Таким образом, размер дачного участка — $30 \times 40$ м.

Задачу можно решить и с помощью уравнения. Обозначим одну из сторон участка через $x$ м, тогда другая будет равна $(70 - x)$ м. Так как их произведение равно 1200, то получаем квадратное уравнение

$$x\,(70 - x) = 1200,$$

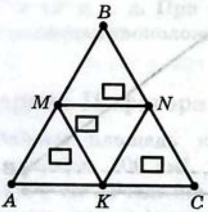
корни которого равны 30 и 40.

**8-2-8.** Да. *Решение*. Так как оставшаяся часть поля составляет $\frac{3}{4}$ всего поля, то каждому из детей должно достаться $\frac{3}{4} : 4 = \frac{3}{16}$ площади поля. Возможный вариант деления оставшейся части поля показан на рисунке (цифрами показаны участки поля, которые достанутся каждому из детей, а буквой О — часть поля отца).

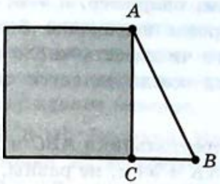
**8-2-9.** *Решение*. Возможный вариант показан на рисунке (точки $M$, $N$, $K$ — середины сторон треугольника $ABC$).

| | | | |
|---|---|---|---|
| 3 | 3 | 2 | 2 |
| 3 | 4 | 4 | 2 |
| О | О | 4 | 1 |
| О | О | 1 | 1 |

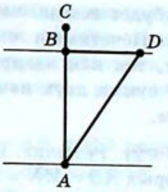
К задаче 8-2-8




К задаче 8-2-9



К задаче 8-2-10



К задаче 8-2-11

**8-2-10.** 3,5–4 м. *Решение.* Для наглядности выполним чертеж. Далее воспользуемся теоремой Пифагора: $AB^2 = AC^2 + CB^2$. Тогда $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10} \approx 3{,}16$ (м). Учитывая, что лестница должна выступать над крышей веранды и отступ от стены веранды может быть более 1 м, желательно лестницу сделать длиной 3,5–4 м.

**8-2-11.** 1,5 м. *Решение.* В соответствии с условием задачи сделаем чертеж. Оттянем стебель тростника в сторону так, чтобы его верхушка касалась воды (точка $D$). Точка $C$ — верхушка тростника при его вертикальном положении, а точка $B$ — место, где его стебель выходит из воды.

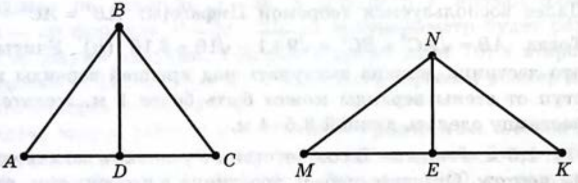
Измерим расстояния $CB$ и $BD$. Это можно сделать с помощью спичечного коробка или кисти руки (расстояние между указательным и большим пальцами приближенно равно 20 см). Точка $A$ — основание стебля тростника. Треугольник $ACD$ — равнобедренный, так как $AC = AD$. Тогда по теореме Пифагора $AD^2 = AB^2 + BD^2$, откуда легко найдем примерную глубину озера в данном месте.

Обозначив глубину озера через $x$, $BD = a$, $CB = b$, из треугольника $ABD$ получим уравнение $(x+b)^2 = x^2 + a^2$, откуда $x = \frac{a^2 - b^2}{2b}$. Пусть $a = 80$ см, $b = 20$ см, тогда $x = \frac{80^2 - 20^2}{40} = \frac{6400 - 400}{40} = \frac{6000}{40} = 150$ (см) $= 1{,}5$ (м). Таким образом, глубина озера в данном месте равна 1,5 м.

**8-2-16.** Можно. *Решение.* Разделим основание треугольника на 2, 3, ..., $n$ одинаковых отрезков.

**8-2-17.** Четными числами — можно, нечетными — нельзя. *Решение.* Все стороны прямоугольного треугольника можно выразить четными числами, так как сумма двух четных чисел будет всегда числом четным, например, $a = 6$, $b = 8$, $c = 10$. Нечетными числами стороны выражены быть не могут, так как квадрат нечетного числа есть число нечетное, а сумма двух нечетных чисел всегда является четным числом.

**8-2-18.** Могут. *Решение.* Например, треугольники $ABC$ и $MNK$, у которых $AB = MN = 5$ см, $BC = NK = 5$ см, не равны, однако имеют равные площади по 12 см². В треугольнике $ABC$ основание $AC = 6$ см, высота $BD = 4$ см, а в треугольнике $MNK$ основание $MK = 8$ см, а высота $NE = 3$ см.




**8-2-19.** *Решение.* Так как $a^2 + b^2 = c^2$ и $S = \dfrac{ab}{2}$, то

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{b^2 + a^2}{a^2 b^2} = \frac{c^2}{4S^2} = \frac{c^2}{c^2 h^2} = \frac{1}{h^2}.$$

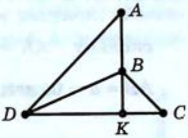
**8-2-20.** *Решение.* Диагональ делит исходный прямоугольник и два внутренних прямоугольника на равные треугольники. Отняв от равных треугольников равные, получим фигуры равной площади.

**8-2-21.** Квадрат со стороной 12 см. *Решение.* Обозначим стороны исходного прямоугольника через $a$ и $b$. Тогда его площадь будет равна $ab$, а площадь нового прямоугольника — $(a - 1) \times (b + 1) = ab + a - b - 1$. Вычитая из площади первоначального (исходного) прямоугольника площадь нового, получаем, что $b - a + 1 = 1$, откуда $a = b$. Таким образом, исходный прямоугольник — квадрат, а так как его площадь равна $144 \text{ см}^2 = 12^2 \text{ см}^2$, то обе стороны равны 12 см.

**8-2-22.** Утверждение неверно. *Решение.* Для выяснения истинности утверждения рассмотрим произвольный треугольник $ABC$, у которого $AB \neq BC$, а углы $A$ и $C$ — острые. Построим треугольник $ADC$, симметричный данному относительно прямой $AC$. Середину общей стороны $AC$ отметим точкой $M$.

Из того, что медиана делит треугольник на две равновеликие части, следует, что четырехугольник $ABCD$ и точка $M$ удовлетворяют условию задачи. Но четырехугольник $ABCD$ не является параллелограммом, поэтому рассматриваемое утверждение неверно.

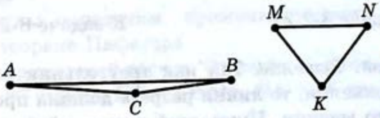
**8-2-23.** 8 м$^2$. *Решение.* Пусть прямые $AB$ и $CD$ пересекаются в точке $K$. В треугольнике $ADK$ $\angle A = \angle D = 45°$, поэтому $CD \perp AB$, а треугольники $ADK$ и $CBK$ — прямоугольные равнобедренные. Обозначим $AK = DK = a$, $BK = CK = b$. Площадь четырехугольника $ABCD$ равна сумме площадей треугольников $ADK$ и $CBK$, то есть $\frac{a^2}{2}+\frac{b^2}{2}$. Из прямоугольного треугольника $DKB$ имеем:




$$DB^2 = DK^2 + KB^2 = a^2 + b^2,$$

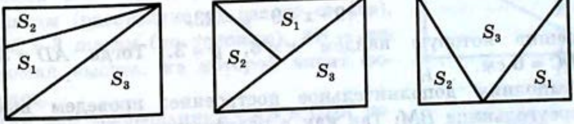
поэтому площадь четырехугольника равна $\frac{DB^2}{2}$, то есть 8 м$^2$.

**8-2-24.** Нет, не верно. Соответствующий пример приведен на рисунке.




$S_{\Delta ABC} < S_{\Delta MNK}$

**8-2-25.** 1 : 2 : 3. *Решение.* Рассмотрим три возможных случая получения указанных треугольников, а также докажем, какой из треугольников имеет наибольшую площадь, а какой — наименьшую.




По условию во всех трех случаях:

$$\begin{cases} S_1 + S_2 = S_3, \\ S_1 = \dfrac{S_2 + S_3}{2}. \end{cases}$$

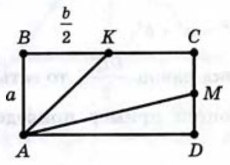
Обозначив $S_2 = x$ и выразив из системы $S_1$ и $S_3$, получим: $S_1 = 2x$, $S_3 = 3x$. Тогда $S_2 : S_1 : S_3 = 1 : 2 : 3$.

**8-2-26.** $c^3 > a^3 + b^3$. *Решение.* Обе части равенства $a^2 + b^2 = c^2$ умножим на $c$:

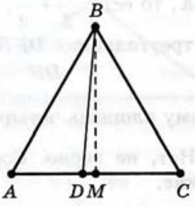
$$a^2c + b^2c = c^3.$$

Так как $c > a$ и $c > b$, то $a^2c > a^3$, $b^2c > b^3$. Тогда $a^2c + b^2c > a^3 + b^3$. Но $a^2c + b^2c = c^3$, значит, $c^3 > a^3 + b^3$.

**8-2-27.** Не может. *Решение.* Допустим, что $AM = 2AK$. Тогда, поскольку $AK = \sqrt{a^2 + \frac{b^2}{4}}$ и $AM = \sqrt{b^2 + \frac{a^2}{4}}$, получим, что $AB = a = 0$, чего быть не может.



К задаче 8-2-27



К задаче 8-2-28

**8-2-28.** Нельзя. *Решение.* Так как треугольник разрезается на два треугольника, то линия разреза должна проходить через одну из его вершин. Пусть этой вершиной будет вершина $B$ треугольника $ABC$, а прямой, которая делит треугольник на два треугольника, — прямая $BD$. Обозначим $BD = x$, $AD = y$, тогда $DC = 9 - y$. Пусть периметр треугольника $ABD$ равен 20 см, а периметр треугольника $BDC$ — 23 см. Тогда получим систему уравнений

$$\begin{cases} 9 + x + y = 20, \\ 9 + x + 9 - y = 23, \end{cases}$$

решив которую найдем $x = 8$, $y = 3$. Тогда $AD = 3$ см, $DC = 6$ см.

Выполним дополнительное построение: проведем высоту треугольника $BM$. Так как в равностороннем треугольнике высота $BM$ будет и медианой треугольника, то $BM = 4{,}5$ см. Из прямоугольных треугольников по теореме Пифагора найдем $BM^2$. Из треугольника $ABM$ получим:

$$BM^2 = 9^2 - 4{,}5^2 = 60{,}75.$$

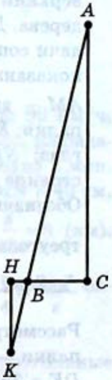
Из треугольника $DBM$ имеем: $BM^2 = 8^2 - 1{,}5^2 = 61{,}75$. Так как $60{,}75 \neq 61{,}75$, то получаем противоречие. Это означает, что равносторонний треугольник разрезать таким образом нельзя.

## ТЕМА 3. Подобные треугольники

**8-3-1.** 350 м. *Решение.* Можно воспользоваться признаками подобия треугольников. Для этого выполним рисунок, обозначив местоположение рыбачьих лодок точкой $A$, местоположение Сергея на берегу — точкой $C$.

Прямоугольные треугольники $ACB$ и $KHB$ подобны (по двум углам), поэтому:

$$\frac{AC}{BC} = \frac{HK}{HB} \Rightarrow AC = \frac{BC \cdot HK}{HB}.$$

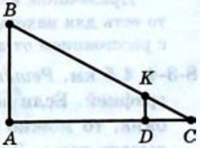



Расстояния можно определить по числу шагов, длину шага — по наибольшей длине спичечного коробка (равна 5 см). Построить точки, лежащие на одной прямой, легко, используя провешивание.

Прямые углы определим, применив теорему, обратную теореме Пифагора.

Приведем примерный расчет. Отмерим расстояния: $BC = 20$ шагам, $HB = 1$ шагу, $HK = 25$ шагам. Тогда $AC = \frac{20 \cdot 25}{1} = 500$ (шагам). Если шаг составляет 70 см, то искомое расстояние равно: $0{,}7 \cdot 500 = 350$ (м).

**8-3-2.** 6,4 м. *Решение.* Сделаем чертеж: здесь $DK = 1{,}6$ м (ваш рост), $AD = 9$ шагам (расстояние от вас до столба), $DC = 3$ шагам (по условию), $AB$ — искомая высота, на которой висит фонарь.




Так как треугольники $CAB$ и $CDK$ подобны (по двум углам: $\angle BAC = \angle KDC = 90°$, $\angle BCA$ — общий), то

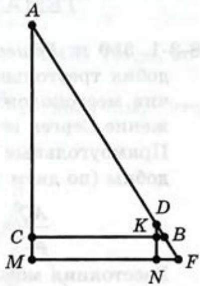
$$\frac{AB}{KD} = \frac{AC}{DC} \Rightarrow AB = KD \cdot \frac{AC}{DC}.$$

Тогда

$$AB = 1{,}6 \cdot \frac{AD + DC}{DC} = 1{,}6 \cdot \frac{9+3}{3} = 1{,}6 \cdot 4 = 6{,}4 \text{ (м)}.$$

Таким образом, фонарь висит на высоте 6,4 м от поверхности земли.

**8-3-3.** 17,7 м. *Решение.* Поступить можно следующим образом. Вырубить в лесу палку длиной, превышающей рост человека (2–3 м). Воткнуть палку в землю на некотором расстоянии от дерева так, чтобы она закрывала ствол, а ее верхний конец совпадал с верхушкой дерева. Дальнейшее решение данной задачи сопроводим чертежом, на котором показаны отрезки:




$AM$ — высота дерева; $ND$ — высота палки; $KD$ — высота палки над уровнем глаз; $NK$ — рост человека; $BC$ — расстояние от человека до дерева.

Обозначим $AM = x$, $KN = y$, $KB = b$, $DK = a$, $CB = s$. Так как треугольники $ACB$ и $DKB$ подобны, то $\frac{AC}{CB} = \frac{DK}{KB}$ или $\frac{x-y}{s} = \frac{a}{b}$. Отсюда $x = y + s\frac{a}{b}$.

Рассмотрим пример. Пусть рост ученика — 170 см, длина палки — 250 см, расстояние до дерева — 10 м, а $KB = 50$ см, $DK = 250 - 170 = 80$ (см) $= 0{,}8$ (м).

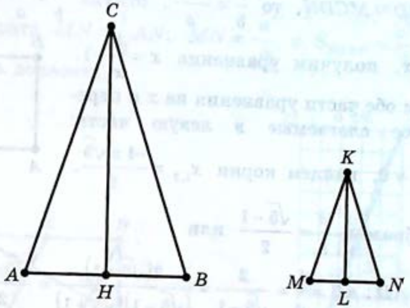
Тогда $x = 1{,}7 + 10 \cdot \frac{0{,}8}{0{,}5} = 17{,}7$ (м).

*Примечание.* Если подобрать $a = b$, то формула упростится: $x = y + s$, то есть для нахождения длины дерева надо сложить рост человека с расстоянием от дерева до человека.

**8-3-4.** 4,5 км. *Решение.* Вид горы вдали можно сравнить с фотографией. Если зафиксировать положение глаз относительно окна, то можно проделать необходимые измерения и найти высоту горы. Для этого придется узнать скорость поезда (ее можно определить по часам и мелькающим километровым столбам), расстояние, которое за некоторое время пройдет поезд, и провести измерения на стекле.

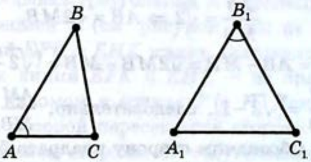
Выполним чертеж, на котором показаны отрезки:

$CH$ — высота горы; $AB$ — расстояние, которое пройдет поезд за определенное время; $MN$ и $KL$ — соответствующие им размеры на стекле (фотографии). Так как построенные треугольники подобны, то $\frac{CH}{AB} = \frac{KL}{MN}$, отсюда $CH = AB \cdot \frac{KL}{MN}$.




Рассмотрим пример. Пусть скорость поезда равна 90 км/ч, а время, за которое фиксированная точка на стекле, совпадающая с точкой $A$, переместится в точку $B$, будет равно 2 мин. Соответствующие длины отрезков на стекле: $MN = 40$ см, $KL = 60$ см. Теперь найдем расстояние $AB = 90 \cdot \frac{2}{60} = 3$ (км), тогда $CH = 3 \cdot \frac{60}{40} = 4{,}5$ (км). Таким образом, примерная высота горы — 4,5 км.

**8-3-7.** *Решение.* Не всегда. Если $\angle A = \angle B_1$, то остроугольные треугольники $ABC$ и $A_1B_1C_1$ не являются подобными.

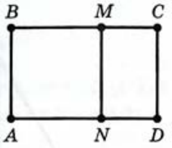



А вот если в треугольниках равны тупые углы, которые могут быть только при вершине равнобедренного треугольника, то и остальные углы обоих треугольников будут равны между собой. А значит, треугольники будут подобны.

**8-3-8.** Такие треугольники будут подобны по двум углам.

**8-3-9.** $(\sqrt{5}+1):2$. *Решение.*

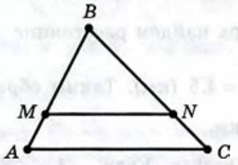
Обозначим $AB = a$, $BC = b$. Пусть $b > a$. Тогда $MC = b - a$. Так как $ABCD \sim MCDN$, то $\frac{a}{b} = \frac{b-a}{a}$, откуда $\frac{a}{b} = \frac{b}{a} - 1$. Обозначив $\frac{a}{b} = x$, получим уравнение $x = \frac{1}{x} - 1$. Умножим обе части уравнения на $x$ и перенесем все слагаемые в левую часть: $x^2 + x - 1 = 0$, найдем корни $x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$.




Таким образом, $\frac{a}{b} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ или

$$AD : AB = \frac{b}{a} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{2(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

**8-3-10.** $(\sqrt{2}-1):1$. *Решение.* Так как прямая $MN$ параллельна основанию $AC$, то треугольники $ABC$ и $MBN$ будут подобны (см. рисунок).




Учитывая, что $S_{\Delta ABC} = 2S_{\Delta MBN}$, получим:

$$\frac{AB}{MB} = \sqrt{2} \Rightarrow AB = \sqrt{2}MB,$$

$$AM = AB - MB = \sqrt{2}MB - MB = (\sqrt{2}-1)MB.$$

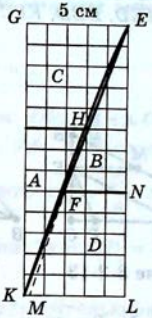
Поэтому $\frac{AM}{MB} = (\sqrt{2}-1)$, следовательно, $\frac{AM}{MB} = \frac{CN}{NB} = (\sqrt{2}-1)$.

**8-3-11.** *Решение.* Обозначим сторону квадрата буквой $a$. Рассмотрим следующие пары треугольников: $AMX$ и $ANB$; $ANB$ и $ABY$. Все эти треугольники подобны (по двум углам). Из подобия первой пары треугольников имеем $AM = MN$. Из подобия второй пары треугольников следует: $\frac{AB}{AN} = \frac{AY}{AB}$.

По теореме Пифагора $AY = \sqrt{AB^2 + BY^2} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.

Тогда $AN = \dfrac{a^2}{\dfrac{a\sqrt{5}}{2}} = \dfrac{2a}{\sqrt{5}}$. Соответственно сторона получившегося квадрата $MN = \dfrac{1}{2}AN$; $MN = \dfrac{a}{\sqrt{5}}$ и $S_{MNKP} = \dfrac{a^2}{5}$, что и требовалось доказать.


К задаче 8-3-11




К задаче 8-3-12

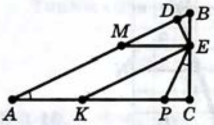
**8-3-12.** Петя слишком доверился собственным глазам и не подкрепил своих действий никакими доказательствами, что и привело его к кажущемуся противоречию. На самом деле из частей квадрата сплошной прямоугольник не получается: обязательно получаются щели, которые и дадут дополнительный 1 см² к площади.

*Решение.* Складывая треугольник $A$ с трапецией $C$ и треугольник $B$ с трапецией $D$ (см. рисунок), мы не можем получить слияния линий $EFK$ и $EHK$ в одну диагональ $EK$ прямоугольника, так как линии $EFK$ и $EHK$ — не прямые, а ломаные с небольшим изломом в точках $F$ и $H$. Докажем это. Пусть $M$ — точка, в которой пересекается сторона прямоугольника $KL$ с продолжением стороны $EF$ треугольника $EFN$.

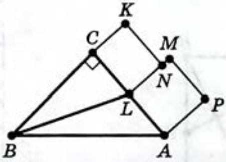
Если линия $EFK$ — прямая, а не ломаная, то точка $M$ совпадет с точкой $K$. Проверим расчетом, совпадают ли эти точки. Из подобия треугольников $EFN$ и $EML$ имеем: $ML : FN = EL : EN$ или $ML : 3 = 13 : 8$. Отсюда $ML = \dfrac{13 \cdot 3}{8} = 4{,}875$ (см), в то время как $KL = 5$ см. Тогда точка $M$, как видите, не совпадает с вершиной $K$, значит, линии $EFK$ и $EHK$ — ломаные.

Площадь прямоугольника $KLEG$ действительно равна 65 см$^2$, но в этой фигуре есть ромбовидная щель $EFKH$, площадь которой и составляет 1 см$^2$.

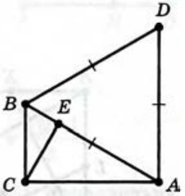
**8-3-13.** 5. *Решение.* Проведем прямую $EM$, параллельную прямой $AC$; прямую $EK$, параллельную прямой $AB$, и прямую $ED$, перпендикулярную прямой $AB$. Построим угол $CEP$, равный углу $CAB$. Тогда получим пять треугольников: $MBE$, $KEC$, $MED$, $EBD$, $EPC$, подобных треугольнику $ABC$.




К задаче 8-3-13




К задаче 8-3-14




К задаче 8-3-15

**8-3-14.** 2 : 1. *Решение.* Применяя свойство биссектрисы треугольника и учитывая, что треугольник является равнобедренным прямоугольным, имеем:

$$\frac{S_{LMPA}}{S_{CKNL}} = \frac{LA^2}{LC^2} = \left(\frac{LA}{LC}\right)^2 = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2 = \frac{AB^2}{AC^2} = \frac{2AC^2}{AC^2} = 2.$$

**8-3-15.** $60°, 30°$. *Решение.*

Выполним дополнительное построение: проведем в прямоугольном треугольнике высоту $CE$. Обозначим для удобства: $AC = b$, $BC = a$, $AB = c$, $CE = h$, $BE = x$. Учитывая, что $S_{\Delta ABD} = 2S_{\Delta ABC}$, а $S_{\Delta ABD} = \frac{c^2\sqrt{3}}{4}$, получим: $S_{\Delta ABC} = \frac{c^2\sqrt{3}}{8}$. Так как $S_{\Delta ABC} = \frac{ch}{2}$, то $\frac{c^2\sqrt{3}}{8} = \frac{ch}{2}$ и $h = \frac{c\sqrt{3}}{4}$. Треугольники $CEB$ и $AEC$ подобны, тогда $\frac{BE}{CE} = \frac{CE}{AE}$ или $\frac{x}{h} = \frac{h}{c-x}$. Подставляя в эту пропорцию значение $h = \frac{c\sqrt{3}}{4}$, получим квадратное уравнение $16x^2 - 16cx + 3c^2 = 0$, корни которого — $x_1 = \frac{c}{4}$, $x_2 = \frac{3c}{4}$.

Рассмотрим треугольник $BCE$.

Если $x=\frac{c}{4}$, то $\operatorname{tg}\angle B=\frac{CE}{BE}=\frac{c\sqrt{3}\cdot 4}{4\cdot c}=\sqrt{3}$, и в этом случае $\angle B=60°, \angle A=30°$. Если $x=\frac{3c}{4}$, то $\angle A=60°, \angle B=30°$.

**8-3-16.** $\frac{\sqrt{106}}{8}$, $\frac{3\sqrt{106}}{8}$. *Решение.* Треугольники $AA_1D_1$ и $DD_1C_1$ подобны, поэтому соответствующие стороны этих треугольников пропорциональны, то есть

$$\frac{AA_1}{DD_1}=\frac{A_1D_1}{D_1C_1}=\frac{AD_1}{DC_1}=3. \qquad (*)$$

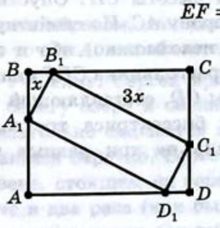
Обозначая $AD_1=y, C_1D=z$, найдем $DD_1=4-y, CC_1=3-z=$ $=AA_1$. Подставляя вместо $AA_1$, $DD_1$, $AD_1$, $C_1D$ соответственно $3-z$, $4-y$, $y$, $z$ из равенств (*), находим: $y=\frac{27}{8}$, $z=\frac{9}{8}$.

Тогда $D_1C_1=x=\frac{\sqrt{106}}{8}$, соответственно $3x=A_1D_1=\frac{3\sqrt{106}}{8}$.

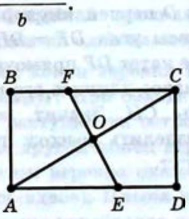
**8-3-17.** $\frac{a\sqrt{a^2+b^2}}{b}$. *Решение.* Пусть в прямоугольнике $ABCD$ совмещены вершины $A$ и $C$. Тогда точки $A$ и $C$ будут симметричны относительно прямой $FE$, которая перпендикулярна диагонали $AC$. Так как точки $A$ и $C$ совмещены, то $AO=CO$. Треугольники $AOE$ и $ADC$ подобны (по двум углам), поэтому $\frac{OE}{CD}=\frac{AO}{AD}$. Обозначим $AB=a$, $BC=b$, тогда $AO=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}$.

Учитывая, что $\frac{OE}{CD}=\frac{AO}{AD}$, находим: $OE=\frac{a\sqrt{a^2+b^2}}{2b}$. Так как треугольники $AOE$ и $COF$ равны (по катету и острому углу), то $OE=OF$, поэтому

$$EF=2OE=\frac{a\sqrt{a^2+b^2}}{b}.$$




К задаче 8-3-16




К задаче 8-3-17

**8-3-18.** 8 или 0,5. *Решение.* Возможны следующие варианты трапеции.

*Вариант I.* Основаниями являются стороны $AB$ и $CD$.

Тогда $\Delta AMB \sim \Delta CMD$, откуда $\dfrac{AM}{MC}=\dfrac{BM}{DM}$ и $DM=\dfrac{MC\cdot BM}{AM}$, $DM=\dfrac{4\cdot 2}{1}=8.$

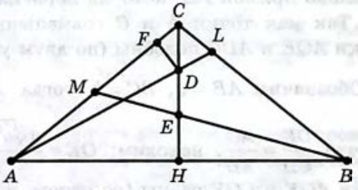
*Вариант II.* Основаниями являются стороны $AD$ и $BC$.

Тогда треугольники $AMD$ и $BMC$ будут подобны, и $\dfrac{AM}{DM}=\dfrac{MC}{MB}$, $DM=\dfrac{AM\cdot MB}{MC}$, откуда $DM=\dfrac{1\cdot 2}{4}=0{,}5.$

Таким образом, четырехугольник $ABCD$ является трапецией, если отрезок $DM$ равен 8 или 0,5.

**8-3-19.** Не могут. *Решение.*

Допустим, что в треугольнике $ABC$ проведены биссектриса $AL$, медиана $BM$ и высота $CH$, причем $AL$ и $CH$ пересекаются в точке $D$, а $BM$ и $CH$ — в точке $E$, и точки $D$ и $E$ делят высоту $CH$ на три равные части.

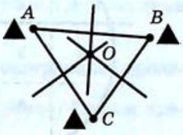



Отрезок $EH$ будет равен трети высоты $CH$. Тогда отрезок $DH$ должен составлять две трети высоты $CH$. Опустим из точки $D$ перпендикуляр $DF$ на сторону $AC$. По свойству биссектрисы угла $DF = DH$. Но это невозможно, ибо в таком случае катет $DF$ прямоугольного треугольника $CDF$ оказывается вдвое длиннее его гипотенузы $CD$, составляющей треть высоты $CH$. Значит, медиана и биссектриса треугольника разделить высоту треугольника на три равные части не могут.

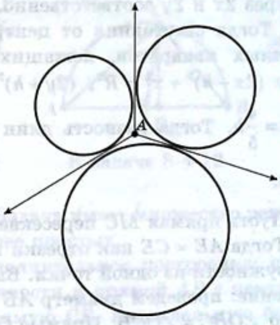
# ТЕМА 4. Окружность

**8-4-1.** *Решение.* При устранении аварий рабочие часто спускаются в канализацию, отодвигая люки. Если бы люки были квадратные, то они могли бы свалиться внутрь, ведь сторона квадрата меньше его диагонали. Когда отодвигают круглые люки, они свалиться внутрь не могут.

**8-4-2.** Колодец надо вырыть в центре окружности, проходящей через три указанные точки $A$, $B$, $C$. *Решение.* С этой целью проводим серединные перпендикуляры к сторонам треугольника $ABC$. Тогда точка $O$ пересечения перпендикуляров — это точка, в которой и надо копать колодец.



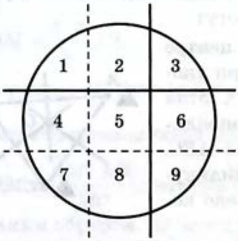

**8-4-3.** *Решение.* Обозначим местоположение дачи буквой $A$. Проведем из точки $A$ три луча, между которыми будут углы по 120°. Построим три окружности разных радиусов, вписанные в каждый из трех получившихся углов.



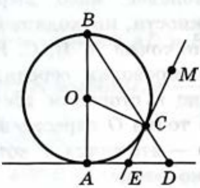

Таким образом, двигаясь по любой прямой, проходящей через точку $A$, мы обязательно попадем на одно из озер.

**8-4-4.** *Решение.* Сергей привязал один конец веревки к дереву на берегу озера и обошел озеро вокруг. При обходе веревка обязательно зацепится за дерево, растущее на острове. Вернувшись обратно, Сергей закрепил другой конец веревки на дереве, стоящем на берегу. При этом веревка оказалась короче в два раза (как бы сложилась вдвое). Плывя вдоль натянутых веревок, Сергей благополучно перебрался на остров, а затем и обратно.

**8-4-8.** Сестре. *Решение.* Проведем два разреза (штриховые линии на рисунке), центрально-симметричные уже сделанным. Куски 1, 2, 6, 9-й достались брату, а симметричные им 7, 8, 4, 3-й — сестре, которой отошел еще и средний, 5-й кусок. Поэтому сестре досталось не менее половины торта.



К задаче 8-4-8



К задаче 8-4-10

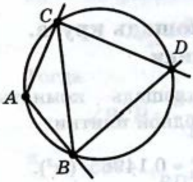
**8-4-9.** $\frac{8}{5}h$. *Решение.* Обозначим длины сторон большого и малого квадратов через $2x$ и $2y$ соответственно, радиус окружности — через $R$. Тогда расстояния от центра окружности до вершин вписанных квадратов, лежащих на окружности, дают уравнения $(2x-h)^2+x^2=R^2$, $(2y+h)^2+y^2=R^2$. Отсюда получим: $x-y=\frac{4}{5}h$. Тогда разность длин сторон квадратов будет равна $\frac{8}{5}h$.

**8-4-10.** *Решение.* Пусть прямая $MC$ пересекается с касательной $AD$ в точке $E$. Тогда $AE=CE$ как отрезки касательных, проведенных к окружности из одной точки. Выполним дополнительное построение: проведем диаметр $AB$ и радиус $OC$. Так как $OB=OC$, то $\angle OBC=\angle OCB$. Прямые $OC$ и $CE$ перпендикулярны, поэтому $\angle ECD=\angle BCM=90°-\angle OCB=90°-\angle OBC$. В треугольнике $ABD$ имеем: $\angle BDA=90°-\angle OBC$, значит, $\angle BDA=\angle ECD$, а следовательно, треугольник $ECD$ равнобедренный, поэтому $CE=DE$. Но так как $AE=CE$, то $AE=DE$.

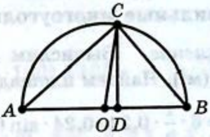
**8-4-11.** Не могут. *Решение.* Допустим, что биссектрисы внешних углов при вершинах $B$ и $C$ треугольника $ABC$ пересекутся в точке $D$, лежащей на описанной окружности. Тогда, с одной стороны, сумма вписанных углов $BAC$ и $BDC$ равна 180°. С другой стороны, $\angle CBD=\dfrac{180°-\angle CBA}{2}$ и $\angle BCD=\dfrac{180°-\angle BCA}{2}$, откуда $\angle BDC = 180° - \angle CBD - \angle BCD = \dfrac{\angle CBA + \angle BCA}{2}$.

Получим: $\angle BAC + \angle BDC = \angle BAC + \dfrac{\angle CBA + \angle BCA}{2} = 180°$. Но из треугольника $ABC$ получаем также, что $\angle BAC + \angle CBA + \angle BCA = 180°$. Значит, $\angle CBA + \angle BCA = 0°$, что невозможно, то есть биссектрисы внешних углов при вершинах $B$ и $C$ пересечься в точке, лежащей на описанной около треугольника окружности, не могут.

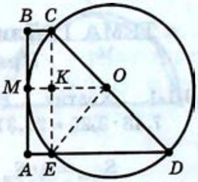
**8-4-12.** *Решение.* Выполним дополнительное построение: проведем медиану $CO$, $CO = \frac{1}{2}AB$. Так как в прямоугольном треугольнике $CDO$ катет $CD$ короче гипотенузы $CO$, то $h < CO$, а значит, $h < \frac{1}{2}AB$.




К задаче 8-4-11




К задаче 8-4-12




К задаче 8-4-13

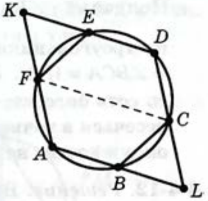
**8-4-13.** *Решение.* Задача имеет множество решений. Рассмотрим одно из наиболее простых.

Выполним дополнительное построение: соединим точку $M$ касания окружности и прямой $AB$ с центром $O$ окружности и проведем прямую $CE$, параллельную боковой стороне $AB$ трапеции $ABCD$. Точку $E$ соединим с центром $O$ окружности. Так как треугольники $OCK$ и $OEK$ будут равны по гипотенузе и катету, то $CK = EK$, а значит, $BM = AM$, то есть

$$AM = \frac{1}{2}AB.$$

В прямоугольнике $ABCE$ имеем: $BC = AE$. Так как прямая $AM$ — касательная к окружности, а прямая $AD$ — секущая, то $AM^2 = AD \cdot AE$. Учитывая, что $AM = \frac{1}{2}AB$, получаем: $AB^2 = 4BC \cdot AD$.

**8-4-14.** *Решение.* Выполним дополнительное построение: продолжим стороны $AB$ и $CD$, $AF$ и $DE$. Тогда фигура $KDLA$ является параллелограммом.




Противоположные углы параллелограмма $BAF$ и $CDE$ равны. Оба угла вписаны в окружность, поэтому дуги $BDF$ и $CAF$, на которые они опираются, тоже равны. Значит, равны и дополнительные к ним дуги $BAF$ и $CDE$, а вместе с ними и опирающиеся на них вписанные углы $BEF$ и $CBE$. Но последние два угла являются внутренними накрест лежащими углами при прямых $BC$ и $EF$ и секущей $BE$, поэтому $BC \parallel EF$.

# 9 КЛАСС

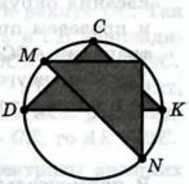
## ТЕМА 1. Длина окружности и площадь круга. Правильные многоугольники

**9-1-1.** Хватит. *Решение.* Вычислим площадь комнаты: $7{,}48 \cdot 3{,}25 = 24{,}31$ (м²). Найдем площадь одной плитки:

$$S_{\text{шест}} = 6 \cdot S_{\text{тр}} = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0{,}24 \cdot 0{,}24 \cdot \sin 60° \approx 0{,}14965 \ (\text{м}^2).$$

Тогда требуемое количество плиток составит: $24{,}31 : 0{,}14965 = 163$ (плитки). В одной упаковке 8 плиток, значит, 21 упаковки хватит.

**9-1-2.** *Решение.* Накладываем прямоугольный треугольник на пластину таким образом, чтобы вершина прямого угла $C$ была на окружности, и отмечаем карандашом точки пересечения катетов с окружностью — точки $D$ и $K$. Отрезок $DK$ будет диаметром окружности. Затем изменяем положение угольника и, выполнив эту процедуру еще раз, получаем, что $MN$ — диаметр окружности. Точка пересечения диаметров $DK$ и $MN$ будет центром круга.




**9-1-3.** Около 8 м. *Решение.* Так как воду из колодца поднимают с помощью веревки (цепи), которая накручивается на вал, то надо измерить диаметр вала и посчитать количество оборотов, которое сделает вал при подъеме ведра (бадьи) из колодца. Например, вал диаметра 28 см сделал 9 оборотов. Тогда глубина колодца равна: $3{,}14 \cdot 0{,}28 \cdot 9 = 7{,}9128$ (м), то есть около 8 м.

**9-1-4.** Ширина перекрытия 2,3 м; сторона восьмиугольника 4,25 м; высота 2,1 м. *Решение.* Найдем сторону правильного восьмиугольника $AB$ из треугольника $ABK$ по теореме косинусов:

$$AB^2 = AK^2 + BK^2 - 2AK \cdot BK \cdot \cos\angle AKB.$$

Так как $AK = BK = R$, а $\angle AKB = \dfrac{360°}{8} = 45°$, то

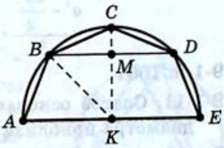
$$AB^2 = 3^2 + 3^2 - 2 \cdot 3 \cdot 3\cos\angle 45° = 18 - 9\sqrt{2},$$

а значит, $AB = \sqrt{18 - 9\sqrt{2}} \approx 2{,}3$ (м).

Ширину перекрытия $BD$ также найдем по теореме косинусов:

$$BD^2 = BC^2 + CD^2 - 2BC \cdot CD \cdot \cos\angle BCD,$$

а угол правильного восьмиугольника — по формуле




$$\alpha_n = \frac{n-2}{n} \cdot 180°.$$

Тогда

$$\angle BCD = \frac{8-2}{8} \cdot 180° = 135°$$

и

$$BD^2 = 2{,}3^2 + 2{,}3^2 - 2 \cdot 2{,}3 \cdot 2{,}3 \cdot \cos 135° =$$
$$= 10{,}58 - 10{,}58 \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \approx 18{,}06,$$

откуда $BD \approx 4{,}25$ м.

Высоту мансарды $MK$ находим из прямоугольного треугольника $BMK$:

$$MK = \sqrt{BK^2 - BM^2} = \sqrt{3^2 - 2{,}125^2} \approx 2{,}1 \text{ (м)}.$$

**9-1-5.** 32 см. *Решение.* Если внимательно посмотреть на рисунок, то можно заметить, что на нем есть два одинаковых сучка, расстояние между которыми приблизительно равно $\frac{2}{3}$ ширины листа фанеры, то есть 100 см. А это и есть длина окружности бревна. Так как длину окружности находят по формуле $C = \pi d$, то диаметр бревна будет приближенно равен $\dfrac{100}{3{,}14} \approx 32$ (см).

**9-1-6.** 2,6 см². *Решение.* Головка шестигранного болта является правильным шестиугольником. Поэтому применим формулу $S = \frac{1}{2}Pr$, где $P$ — периметр шестиугольника, $r$ — радиус вписанной окружности. По формуле $r = R\cos\frac{180°}{n}$ найдем искомый радиус: $r = 1 \cdot \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Тогда $S = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \approx 2{,}6$ (см²).

**9-1-7.** 21,5 %. *Решение.* Пусть сторона квадрата равна $a$. Тогда площадь квадрата $S_{\text{кв}} = a^2$, $S_{\text{окр}} = \frac{\pi a^2}{4}$, а площадь отходов будет равна: $S_{\text{отх}} = a^2 - \frac{\pi a^2}{4}$. Следовательно, часть отходов (в процентах) составит:

$$\frac{a^2 - \frac{\pi a^2}{4}}{a^2} \cdot 100\,\% = \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) \cdot 100\,\% \approx 21{,}5\,\%.$$

**9-1-8.** 1001.

**9-1-11.** Способ основан на том, что длина окружности больше диаметра приблизительно в 3 раза.

**9-1-12.** 0,3 %. *Решение.* Сделаем чертеж, где $C_1$ — искомая длина окружности; $d$ — диаметр данной окружности; $h$ — высота меньшего сегмента; $a$ — сторона квадрата. Тогда $C_1 = 3d + h$, $h = \frac{d - a_4}{2}$. Так как $a_4 = R\sqrt{2} = \frac{d\sqrt{2}}{2}$, то

$$C_1 = 3d + \frac{d - \frac{d\sqrt{2}}{2}}{2} = d\left(3{,}5 - \frac{\sqrt{2}}{4}\right).$$

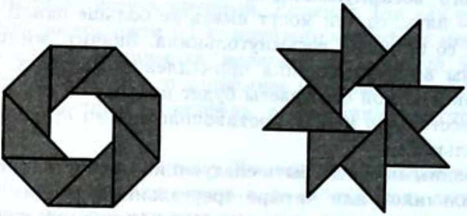
Теперь вычислим относительную погрешность измерения:

$$\frac{|C_1 - C|}{C} \cdot 100\,\% = \frac{\left|d\left(3{,}5 - \frac{\sqrt{2}}{4} - \pi\right)\right|}{\pi d} \cdot 100\,\% =$$

$$= \frac{\left|3{,}5 - \frac{\sqrt{2}}{4} - \pi\right|}{\pi} \cdot 100\,\% \approx \frac{|3{,}5 - 0{,}35 - 3{,}14|}{3{,}14} \cdot 100\,\% \approx$$

$$\approx \frac{0{,}01}{3{,}14} \cdot 100\,\% \approx 0{,}3\,\%.$$

**9-1-13.** *Решение.* См. рисунок.

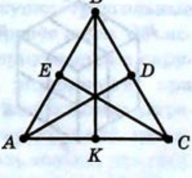


**9-1-14.** *Решение.* Правильный двадцатиугольник имеет центр симметрии. Можно заметить, что центрально-симметричные диагонали не пересекаются. Поэтому правильная стратегия сестры такова: она первым ходом проводит диагональ, проходящую через центр, а затем на каждый ход брата отвечает проведением диагонали, симметричной относительно центра той диагонали, которую провел брат.

**9-1-15.** *Решение.* Так как $\angle MBC = \angle MKC = 60°$, то через точки $M$, $K$, $B$, $C$ можно провести окружность. Тогда $\angle KBC = \angle KMC = 60°$ (как вписанные, опирающиеся на одну и ту же дугу $KC$). Поэтому $\angle BAC + \angle ABK = 60° + (60° + 60°) = 180°$, а значит, прямые $BK$ и $AC$ будут параллельны.


**9-1-16.** *Решение.* По условию точку можно выбрать в любом месте треугольника $ABC$, в частности в его вершинах, откуда следует, что высоты треугольника равны между собой. Пусть $AD$ и $CE$ — высоты, опущенные из вершин $A$ и $C$ соответственно, тогда прямоугольные треугольники $ADC$ и $ACE$ равны по гипотенузе и катету, поэтому величины углов $BAC$ и $BCA$ равны.

Аналогично докажем равенство прямоугольных треугольников $ABK$ и $ABD$, откуда следует, что равны и величины углов $ABC$ и $BAC$. Таким образом, в треугольнике все углы равны, а значит, треугольник $ABC$ будет равносторонним, то есть правильным.



**9-1-17.** *Решение.* Так как оставшийся кусок имеет форму правильного восьмиугольника, а количество отрезанных кусков — пять, то они могут иметь не больше одной стороны, общей со стороной восьмиугольника. Значит, минимум три стороны восьмиугольника принадлежат квадрату. Поэтому формой искомой стенгазеты будет квадрат со стороной, равной расстоянию между противоположными сторонами восьмиугольника.

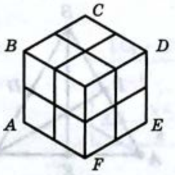
Вырезанными могли быть следующие многоугольники: пять треугольников или четыре треугольника и один четырехугольник, причем два треугольника (или один треугольник и четырехугольник) будут в сумме составлять один из оставшихся трех треугольников.

**9-1-18.** *Решение.* Проводим параллельно двум сторонам шестиугольника прямые, точку их пересечения соединяем с одной из вершин шестиугольника (см. рисунок). Получили три параллелограмма, каждый из которых делим на четыре равные части. В результате получаем требуемое разбиение.

**9-1-19.** *Решение.* На рисунке показано, как можно разбить правильный восьмиугольник на 12 многоугольников (шесть из закрашенной области и шесть из незакрашенной части). Многоугольники с одинаковой площадью обозначены одними и теми же числами. Поэтому площади закрашенной и незакрашенной частей многоугольника равны.

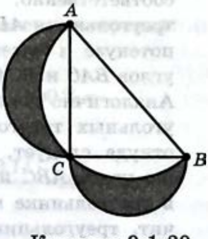
**9-1-20.** 10 см². *Решение.* Обозначим радиусы полуокружностей, построенных на катетах $AC$ и $CB$, соответственно через $b$ и $a$, а радиус круга, построенного на гипотенузе, — через $c$. Искомую площадь (на рисунке она закрашена) находим следующим образом:

$$S=\frac{\pi a^2}{2}+\frac{\pi b^2}{2}+S_{\Delta ABC}-\frac{\pi c^2}{2}=\frac{\pi}{2}(a^2+b^2-c^2)+S_{\Delta ABC}=S_{\Delta ABC}=10\ (\text{см}^2).$$




К задаче 9-1-18


К задаче 9-1-19




К задаче 9-1-20

## ТЕМА 2. Элементы стереометрии

**9-2-1.** Выгоднее чистить крупный. *Решение.* Так как суммарная площадь поверхности у 1 кг крупного картофеля меньше, чем у такого же количества мелкого, то крупный картофель чистить и выгоднее, и экономнее (меньше отходов). Может, поэтому крупный картофель в магазинах и стоит часто дороже.

**9-2-2.** $V = S\,(h_1 + h_2)$. *Решение.* Так как дно бутылки имеет форму круга или прямоугольника, то его площадь легко найти, измерив диаметр или стороны прямоугольника и воспользовавшись формулой $S = \pi R^2$ (зная диаметр, легко найти радиус круга) или $S = ab$. Пусть площадь дна бутылки равна $S$. Измерим высоту $h_1$ жидкости в бутылке. Тогда ее объем будет равен $V_1 = Sh_1$. Опрокинем бутылку вверх дном и измерим высоту $h_2$ от уровня жидкости до дна бутылки. Объем этой части бутылки будет равен $V_2 = Sh_2$. Остальную часть бутылки занимает жидкость, объем которой уже был определен: $V_1 = Sh_1$. Таким образом, объем бутылки будет равен:


$$V = V_1 + V_2 = Sh_1 + Sh_2 = S(h_1 + h_2).$$

*Например,* диаметр дна бутылки $d = 6{,}6$ см, $h_1 = 14$ см; $h_2 = 8$ см.

Тогда $V = S(h_1 + h_2) = \pi R^2 (h_1 + h_2) \approx 3{,}14 \cdot 3{,}3^2 \cdot 22 \approx 753$ (см$^3$) $= 753$ (мл) $= 0{,}753$ (л).

**9-2-3.** *Решение.* Чтобы узнать толщину слоя краски, необходимо объем использованной краски разделить на площадь окрашенной поверхности.

**9-2-4.** Треугольные гвозди. *Решение.* Папа купил треугольные гвозди, так как они держатся в древесине крепче всего. Объясняется это тем, что треугольный гвоздь соприкасается с окружающей его древесиной по наибольшей поверхности: при равных площадях сечения периметр будет наибольшим у треугольника и наименьшим у круга. Поэтому круглый гвоздь держится слабее любых других гвоздей. Жаль только, что гвозди с треугольным сечением в магазинах встречаются редко.

**9-2-5.** *Решение.* Выгоднее покупать крупные мандарины, так как при увеличении радиуса мандарина площадь его поверхности (пропорциональная квадрату радиуса) увеличивается не так значительно, как объем мандарина (пропорциональный кубу радиуса).

**9-2-6.** Большой арбуз. *Решение.* Выгоднее купить первый арбуз, так как его объем в $\left(\frac{5}{4}\right)^3 = \frac{125}{64} \approx 2$ раза больше объема второго арбуза.

**9-2-8.** Во вторую кружку жидкости поместится больше в $1\frac{1}{3}$ раза. *Решение.* Так как объем пропорционален квадрату радиуса основания и высоте кружки, то объем более широкой кружки больше объема более высокой.

**9-2-9.** Не может. *Решение.* Предположим, что такое возможно.

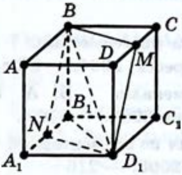
А) Пусть ребра длиной 1 см и 11 см опираются на концы одной стороны квадрата. Тогда сторона квадрата будет больше 10 см. В этом же случае ребра длиной 1 см и 6 см будут опираться на концы другой стороны квадрата или на концы его диагонали. Но сторона квадрата и диагональ будут меньше 7 см, а это невозможно.

Б) Пусть ребра длиной 1 см и 11 см опираются на концы диагонали квадрата, тогда его диагональ должна быть больше 10 см, а сторона — меньше 7 см, что опять же невозможно $\left(7\sqrt{2} = \sqrt{98} < 10\right)$.

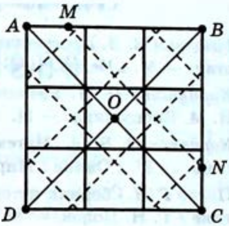
Таким образом, основанием пирамиды не является квадрат.

**9-2-10.** Не существует. *Решение.* Пусть такой многогранник существует. Обозначим через $k_1, k_2, k_3, \ldots, k_n$ число ребер на гранях, тогда $k_1 + k_2 + k_3 + \ldots + k_n = 2l$ — это удвоенная сумма всех ребер многогранника, то есть она четная. А в левой части равенства стоит нечетная сумма слагаемых, каждое из которых — нечетное число. Получили противоречие, а значит, такого многогранника не существует.

**9-2-11.** $S_{сеч} = a^2\sqrt{\frac{3}{3}}$. *Решение.* Площадь сечения получается минимальной, если точка $M$ является серединой ребра $DC$. Длины диагоналей ромба $BMD_1N$ равны: $BD_1 = a\sqrt{3}$, $MN = a\sqrt{2}$. Тогда находим площадь сечения как площадь ромба: $S_{сеч} = a^2\sqrt{\frac{3}{3}}$.




К задаче 9-2-11




К задаче 9-2-12

**9-2-12.** Можно. *Решение*. Расположим центр основания кубика в центре $O$ квадрата так, чтобы ребро основания куба было параллельно диагонали квадрата (см. рисунок). Пусть отрезок $MN$ содержит ребро куба.

С одной стороны, так как треугольники $ABC$ и $MNB$ подобны, то $\frac{MN}{AC} = \frac{BO - 0{,}5}{BO}$, а с другой стороны, $BO = \frac{AC}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Тогда $MN = 2(BO - 0{,}5) = 3\sqrt{2} - 1 > 3$. Заворачивая куб по диагонали квадрата, закроем нижнее основание и боковые грани куба. При этом в каждом углу квадрата останется по треугольнику, которым можно закрыть больше четверти верхнего основания куба.

## Список использованной литературы

1. *Ганьшин В. Н.* Простейшие измерения на местности / В. Н. Ганьшин. — М. : Недра, 1983. — 108 с.
2. *Карпушина Н. М.* Развивающие задачи по геометрии. 7 класс / Н. М. Карпушина. — М. : Школьная пресса, 2004. — 80 с.
3. *Кордемский Б. А.* Математическая смекалка / Б. А. Кордемский. — М. : Оникс : Мир и образование, 2005. — 576 с.
4. *Попов Г. Н.* Сборник исторических задач по элементарной математике / Г. Н. Попов. — М. : КомКнига, 2006. — 216 с.
5. *Рыбкин Н. А.* Сборник задач по геометрии. Часть I. Планиметрия для 6–9 классов семилетней и средней школы / Н. А. Рыбкин. — Москва — Ленинград : Госучпедгиз, 1954. — 120 с.
6. *Сергеев И. Н., Олехник С. Н., Гашков С. Б.* Примени математику / И. Н. Сергеев, С. Н. Олехник, С. Б. Гашков. — М. : Наука, 1989. — 240 с.
7. *Фарков А. В.* Внеклассная работа по математике. 5–11 классы / А. В. Фарков. — 4-е изд. — М. : Айрис-пресс, 2009. — 288 с.
8. *Фарков А. В.* Учимся решать олимпиадные задачи. Геометрия. 5–11 классы / А. В. Фарков.— 4-е изд. — М. : Айрис-пресс, 2009. — 128 с.
9. *Фарков А. В.* Математические олимпиады : муниципальный этап. 5–11 классы / А. В. Фарков.— М. : ИЛЕКСА, 2012. — 192 с.
10. *Шапиро А. Д.* Зачем надо решать задачи? : Кн. для учащихся / А. Д. Шапиро. — М. : Просвещение, 1996. — 96 с.
11. *Шарыгин И. Ф., Ерганжиева Л. Н.* Наглядная геометрия : Учеб. пособие для V–VI классов / И. Ф. Шарыгин, Л. Н. Ерганжиева. — М. : МИРОС, КПЦ «МАРТА», 1992. — 208 с.
12. *Ященко И. В.* ОГЭ (ГИА) : 3000 задач с ответами по математике. Все задания части 1 / И. В. Ященко, Л. О. Рослова, Л. В. Кузнецова и др. ; под ред. И. В. Ященко. — М. : Экзамен, МЦНМО, 2015. — 463 с.

## СОДЕРЖАНИЕ

ИЛЕКСА

А.В.Фарков

# ТАКАЯ НУЖНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Пособие для учащихся 7-9 классов

В предлагаемом пособии рассмотрены основные практические применения геометрии в повседневной жизни: дома и вне дома, а также приведены занимательные факты, способствующие становлению познавательной мотивации учебной деятельности. Приведена большая подборка задач для развития мышления учащихся.

Пособие предназначено для учащихся 7–9 классов, оно также будет интересно учителям математики и полезно родителям учащихся.



ISBN 978-5-89237-684-6
9 785892 376846