

МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
ДЕПАРТАМЕНТ НАУЧНО-ТЕХНОЛОГИЧЕСКОЙ ПОЛИТИКИ  
И ОБРАЗОВАНИЯ

---



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ  
**«ЧЕЛЯБИНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
АГРОИНЖЕНЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

---

Кафедра сопротивления материалов

Утверждаю.  
Проректор по УР  
А.Патрушев

## **РАСЧЕТ НА ПРОЧНОСТЬ И ЖЕСТКОСТЬ ПРОСТРАНСТВЕННОГО БРУСА ПРИ СЛОЖНОМ СОПРОТИВЛЕНИИ**

**в программных продуктах  
MathCAD, SCAD и MSC.Patran-Nastran-2005**

Методические указания

Челябинск  
2008

Методические указания предназначены для студентов 2-го курса специальности **190206 «Сельскохозяйственные машины и оборудование»** направления **190200** – «Транспортные машины и транспортно-технологические комплексы», изучающих курс «Сопротивление материалов».

На примере программ **MathCAD, SCAD и MSC.Patran-Nastran-2005** реализуется идея использования уже на младших курсах на факультетах сельскохозяйственного машиностроения современных проектно-вычислительных комплексов, применяемых в инженерной практике для расчетов и проектирования строительных и машиностроительных конструкций. Приведена инструкция по использованию программ **MathCAD, SCAD и MSC.Patran-Nastran-2005** при решении задач прочности пространственного бруса при сложном сопротивлении.

Методические указания могут быть полезны студентам всех курсов специальности 190206 «Сельскохозяйственные машины и оборудование», аспирантам и инженерно-техническим работникам АПК.

Составитель

**Жилкин В.А.** - докт. техн. наук, профессор (ЧГАУ)

Рецензенты

*Сапожников С.Б.* - докт. техн. наук, проф. (ЮУрГУ)

*Рахимов Р.С.* - докт. техн. наук, проф. (ЧГАУ)

Печатается по решению редакционно-издательского совета ЧГАУ

© ФГОУ ВПО "Челябинский государственный агроинженерный университет", 2008.

# РАСЧЕТ НА ПРОЧНОСТЬ И ЖЕСТКОСТЬ ПРОСТРАНСТВЕННОГО БРУСА ПРИ СЛОЖНОМ СОПРОТИВЛЕНИИ<sup>1</sup>

## 1. СОДЕРЖАНИЕ ЗАДАНИЯ<sup>2</sup>

Дано:

- 1) схема пространственного бруса;
- 2) длины его участков;
- 3) форма поперечного сечения на каждом участке; основными формами поперечных сечений являются: круглая, квадратная и прямоугольная;
- 4) расположение и значение внешних сил;
- 5) значение допускаемого напряжения  $[\sigma]$  для материала системы на растяжение и сжатие.

Требуется:

- 1) построить эпюры нормальной силы  $N$ , крутящего момента  $M_k$  и изгибающих моментов  $M_y$  и  $M_z$  относительно главных центральных осей поперечных сечений;
- 2) определить положение нейтральной оси в наиболее нагруженном сечении;
- 3) подобрать размеры указанных форм поперечных сечений на каждом участке бруса и проверить их прочность;
- 4) определить перемещения границ участков пространственного бруса.

Примечание

*Вычисления выполнить в системах **MathCAD**, **SCAD** и **MSC.Patran**.  
Результаты решения, полученные в системах **SCAD** и **MSC.Patran**,  
использовать как контрольные для проверки правильности решения за-  
дачи в системе **MathCAD**.*

## Варианты заданий

Необходимые для расчета данные приведены в табл.1. Варианты заданий обозначены двумя цифрами, разделенными точкой. Первая цифра варианта указывает номер расчетной схемы стержневой системы на *рис.1*.

---

<sup>1</sup> Дарков А.В., Шпиро Г.С. Сопротивление материалов. – М.: Высш. шк., 1989. – 624 с.; Справочник по сопротивлению материалов / Писаренко Г.С., Яковлев А.П., Матвеев В.В. – Киев: Наук. думка, 1988. – 736 с.; Тимошенко С.П. Механика материалов. – М.: Мир, 1976. – 670 с.; Биргер И.А., Мавлютов Р.Р. Сопротивление материалов. – М.: Наука, 1986. – 560 с.; Окопный Ю.А., Радин В.П., Чирков В.П. Механика материалов и конструкций. М.: Машиностроение, 2002. – 436 с.; Жилкин В.А. Расчеты на прочность и жесткость элементов сельскохозяйственных машин. Челябинск, ЧГАУ, 2005. – 435 с.; Жилкин В.А. Элементы прикладной и строительной механики сельхозмашин. Челябинск, ЧГАУ, 2007. – 350 с.; Сборник задач по сопротивлению материалов с теорией и примерами / Под ред. А.Г. Горшкова, Д.В. Тарлаковского. – М.: Физматлит. 2003. – 632 с.

<sup>2</sup> Расчетные и курсовые работы по сопротивлению материалов / Ф.З. Алмаметов, С.И. Арсеньев, С.А. Ергалычев и др. – М.: Высш. шк., 1992. – 320 с.

Таблица 1

№ варианта	$P_1$ , кН	$P_2$ , кН	$P_3$ , кН	$q$ , кН/м	$L_1$ , м	$L_2$ , м	$L_3$ , м	$L_4$ , м	$[\sigma]$ , МПа	$b/h$
1.1	4	2	6		1	1	1	1	100	0.5
1.2	5	3	8		1.2	0.8	1	0.8	120	1/3
1.3	3	1.5	3		1	1.2	0.8	1.2	100	0.25
1.4	6	4	8		1.4	1.4	1.4	1.4	160	0.5
2.1	2	3		1	1	1.5	2	3	100	2
2.2	3	4		2	1.2	2	2.5	3	120	1.5
2.3	4	5		3	1.5	1.8	3	3	140	3
2.4	6	10		4	2	2	3	4	160	4
3.1	4	6	4		0.5	0.5	1	0.5	100	2
3.2	2	8	6		1	1	2	1	120	3
3.3	3	4	8		0.8	1	2	1.5	140	4
3.4	6	8	10		1	2	2.2	3	160	1.5
4.1	3	2		4	2	2	1	1	100	2
4.2	4	3		5	3	2	2	2	120	1.5
4.3	5	2		6	4	3	2	3	140	3
4.4	6	3		8	3	2	1	3	160	4
5.1	2	6	2		1	2	3	4	100	3
5.2	3	8	3		2	3	2	5	120	2
5.3	4	5	2		2	4	4	6	140	4
5.4	6	10	4		4	3	2	3	160	1.5
6.1	8	4		2	0.6	1	2	4	100	2
6.2	6	4		1	1	2	1	3	120	3
6.3	8	6		2	0.8	1	2	5	140	4
6.4	10	6		4	1	3	4	6	160	1.5
7.1	2	4		8	1	1.5	1	2	100	3
7.2	4	6		6	1.5	1	2	3	120	2
7.3	6	8		4	2	1.5	1.5	3	140	4
7.4	8	10		8	3	2	2	4	160	1.5
8.1	4	4		6	1	0.5	1	2	100	4
8.2	8	6		4	2	1	2	3	120	3
8.3	6	8		8	3	2	1	2	140	1.5
8.4	8	10		6	2	1	3	2	160	2
9.1	2	4		8	1	1	2	3	100	3
9.2	4	6		6	1.5	2	3	4	120	2
9.3	6	8		8	1	2	3	2	140	4
9.4	8	6		4	2	3	2	4	160	1.5
10.1	4	3	5		0.6	0.4	0.8	1	100	3
10.2	6	2	4		0.4	0.5	0.6	1.2	120	2
10.3	8	6	2		0.5	0.3	0.4	1	140	4
10.4	10	8	3		0.3	0.4	0.5	0.8	160	1.5
11.1	2	4		8	0.4	1	1.2	0.8	100	2
11.2	6	5		6	0.5	1.2	0.8	1	120	1.5
11.3	3	6		8	0.6	1	0.6	1.2	140	4
11.4	4	8		10	0.8	0.6	1	1.5	160	3
12.1	5	3		8	0.4	0.6	1.2	0.5	100	3
12.2	4	6		6	0.6	0.4	0.6	0.6	120	4
12.3	6	4		8	0.8	0.5	1	0.8	140	1.5

№ варианта	$P_1$ , кН	$P_2$ , кН	$P_3$ , кН	$q$ , кН/м	$L_1$ , м	$L_2$ , м	$L_3$ , м	$L_4$ , м	$[\sigma]$ , МПа	$b/h$
12.4	5	3		6	0.5	0.6	0.8	1	160	2
13.1	3	4	5		0.8	0.4	0.6	0.8	100	3
13.2	5	6	4		0.5	0.6	0.8	1	120	2
13.3	4	5	6		0.6	0.5	1	1.2	140	1.5
13.4	6	8	5		0.4	0.6	1.2	1.5	160	2
14.1	4	3	6		1	0.5	1	0.5	100	3
14.2	6	4	5		0.8	0.6	1.2	1	120	1.5
14.3	5	5	4		0.6	0.4	1	0.8	140	4
14.4	8	5	6		1	0.8	1.4	0.5	160	1.5
15.1	3	6	8		1	1.2	0.5	1.5	100	1.5
15.2	4	8	10		0.8	1	0.8	1.6	120	4
15.3	6	10	8		0.6	0.5	1	0.8	140	3
15.4	8	6	5		0.5	1	0.8	1	160	2
16.1	3	6	4		0.6	1.2	0.5	0.8	100	1.5
16.2	4	8	5		0.4	1.5	0.3	1	120	2
16.3	6	10	3		0.5	1.4	0.4	1.2	140	3
16.4	3	8	2		0.8	1.6	0.5	0.6	160	4

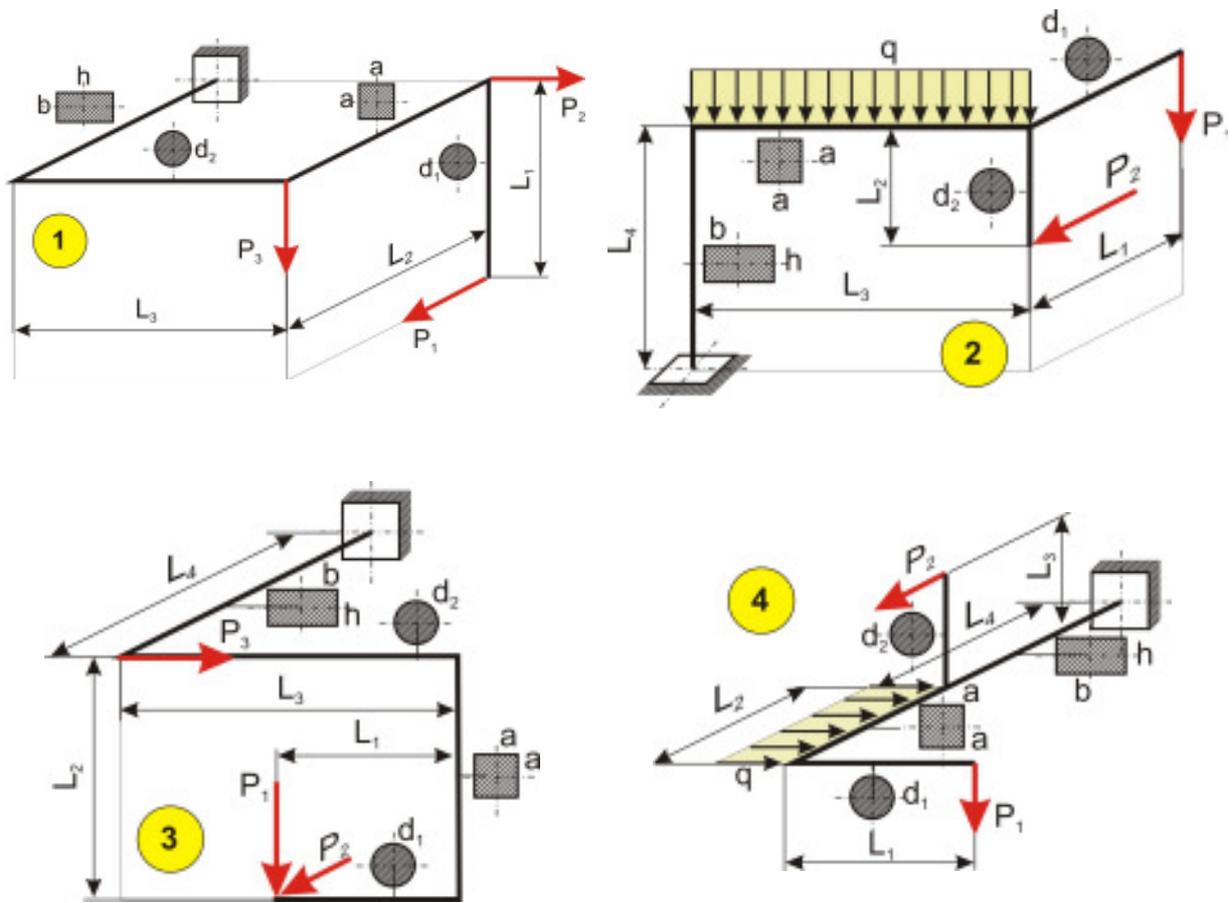


Рис. 1

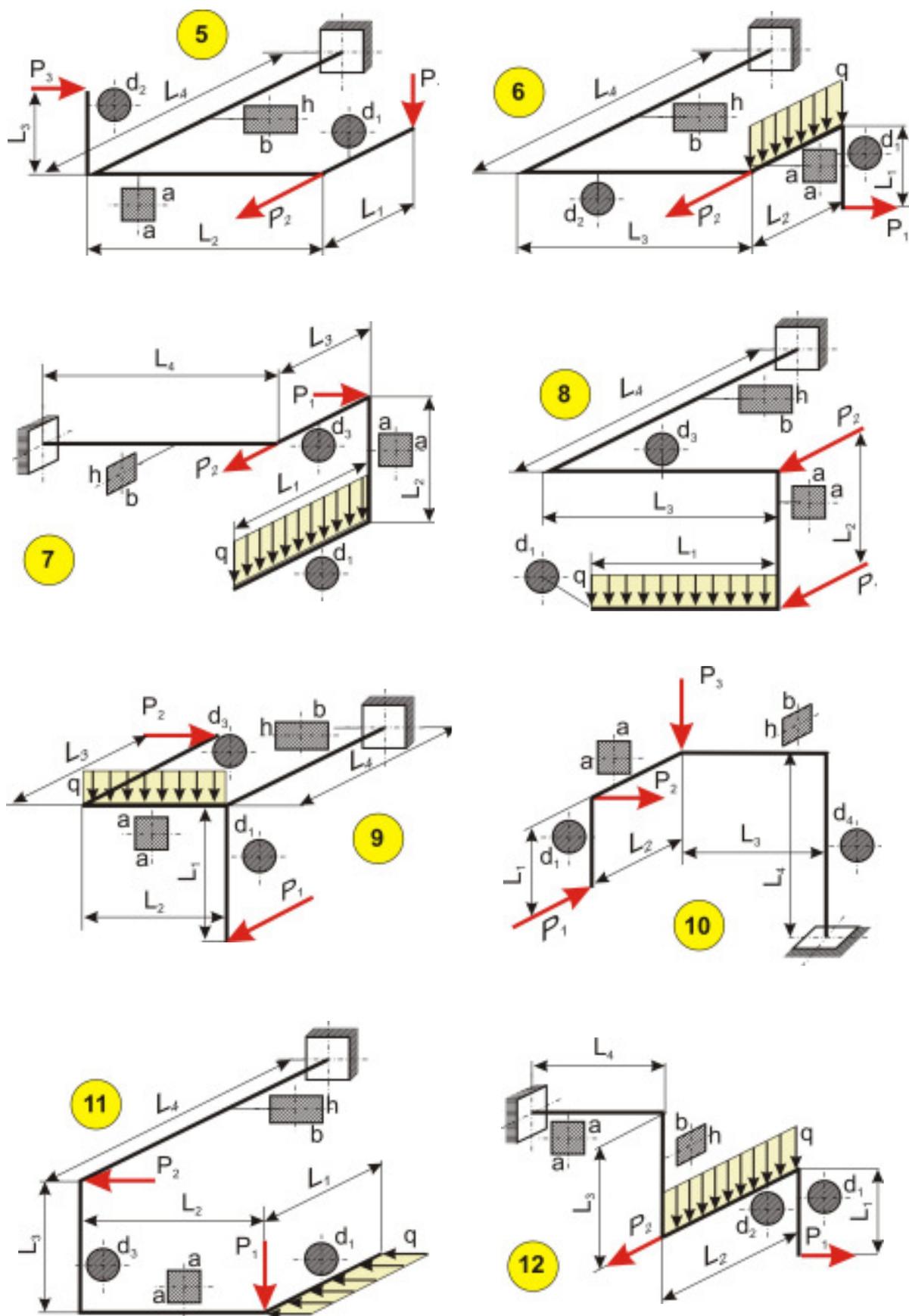


Рис. 1 (продолжение)

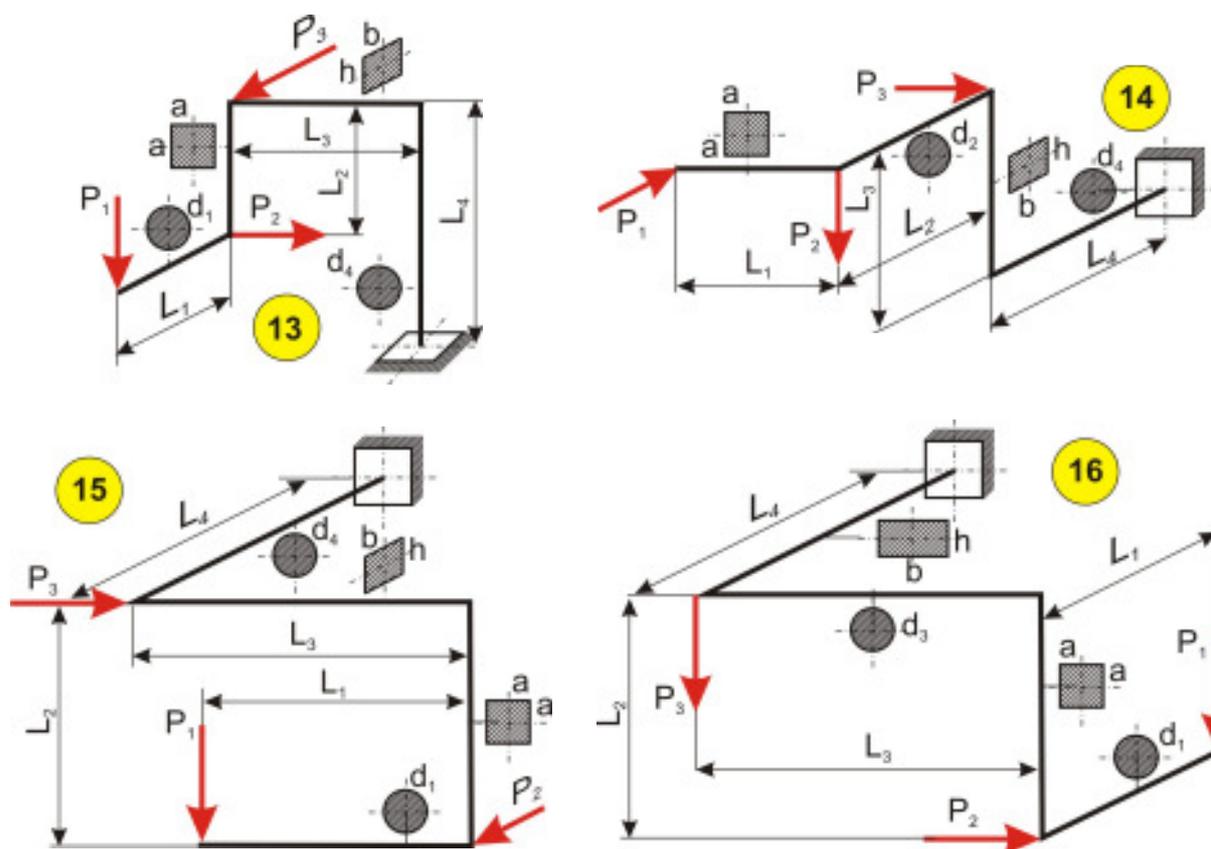


Рис. 1 (продолжение)

## 2. КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

### 2.1. Напряженное состояние в точке

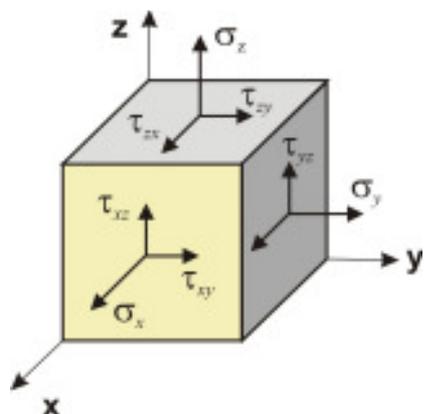


Рис.2

Напряжения в трех взаимно перпендикулярных площадках, перпендикулярных осям  $Ox$ ,  $Oy$  и  $Oz$ , вполне характеризуются тремя нормальными напряжениями  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\sigma_z$  и тремя касательными напряжениями  $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{yz}$ ,  $\tau_{zx}$ , изображенными на рис.2. Эта совокупность напряжений называется *тензором напряжений*.

Площадки, на которых касательных напряжений нет, называются *главными площадками*, а нормальные напряжения на этих площадках - *главными напряжениями*. В каждой точке тела имеются три взаимно перпендикулярные главные площадки. Главные напряжения из всевозможных значений принимают экстремальные значения; их обозначают  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ , причем  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ . Различные виды напряженного состояния классифицируются обычно в зависимости от числа не равных нулю напряжений.

Если равны нулю два главных напряжения, то напряженное состояние называется *одноосным*, или линейным (рис.3, а). Если равно нулю одно из главных напряжений, то напряженное состояние называется *двухосным*, или плоским (рис.3, б). Если отличны от нуля все три главных напряжения, то напряженное состояние называется *трехосным*, или объемным (рис.3, в).

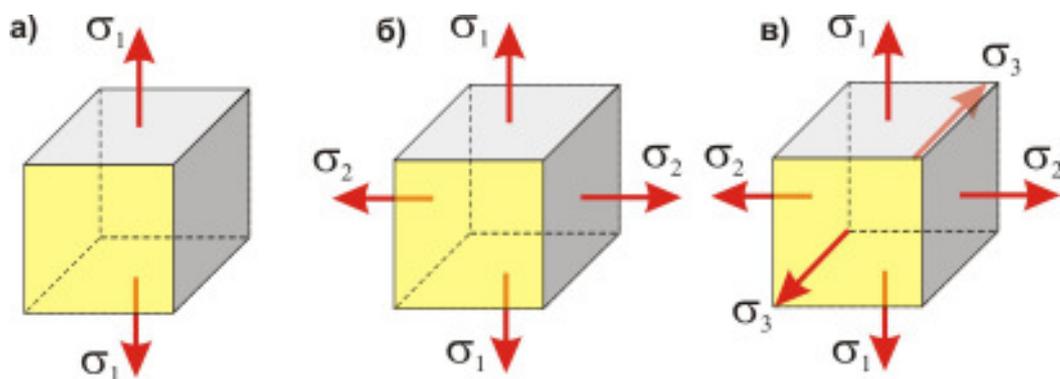


Рис.3

### 2.1.1. Линейное напряженное состояние

Элементы, находящиеся в линейном напряженном состоянии, встречаются и в некоторых точках стержня, работающего на изгиб или сложное сопротивление, но главным образом в стержнях, испытывающих растяжение или сжатие.

При простом растяжении в нормальных сечениях, достаточно удаленных от точек приложения сосредоточенных сил, нормальные напряжения распределяются равномерно, а касательные напряжения равны нулю. Следовательно, эти сечения являются главными площадками, а главные напряжения определяются по формуле

$$\sigma_x = \frac{N}{F}, \quad (1)$$

где  $F$  - площадь поперечного сечения бруса.

### 2.1.2. Плоское напряженное состояние

При исследовании напряженного состояния элементов конструкций наиболее часто приходится иметь дело с плоским (двухосным) напряженным состоянием. Оно встречается при кручении, изгибе и сложном сопротивлении.

Если малый элемент вырезан двумя парами ортогональных плоскостей, перпендикулярных плоскости  $xOy$ , и по его граням действуют напряжения  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$ , то главные напряжения определяются по формуле

$$\sigma_{\frac{max}{min}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}, \quad (2)$$

а ориентация площадок, по которым они действуют, по одной из зависимостей

$$tg \alpha_{max} = \frac{\sigma_{max} - \sigma_x}{\tau_{xy}}; \quad (3)$$

$$tg 2\alpha_{2л} = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}. \quad (4)$$

Если одно из главных напряжений, вычисленных по формуле (2), окажется отрицательным, а другое положительным, то их следует обозначать  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$ . Если же оба главных напряжения окажутся отрицательными, их обозначают  $\sigma_2$  и  $\sigma_3$ .

Отрицательному значению  $\alpha$  соответствуют углы, отложенные по часовой стрелке.

### 2.1.3. Объёмное напряженное состояние

В задачах сопротивления материалов трехосное, или объемное, напряженное состояние встречается редко.

## 2.2. Критерии прочности

Наиболее просто оценка прочности детали по известному напряженному состоянию решается для простых видов деформации, в частности для одноосных напряженных состояний, так как в этом случае значения предельных (опасных) напряжений легко установить экспериментально. Под опасными напряжениями понимают напряжения, соответствующие началу разрушения (при хрупком состоянии материала) или появлению остаточных деформаций (в случае пластического состояния материала).

Таким образом, условие прочности для одноосного напряженного состояния принимает вид

$$\sigma_1 \leq [\sigma_+]; \quad \sigma_3 \leq [\sigma_-], \quad (5)$$

где  $[\sigma_+]$ ,  $[\sigma_-]$  - допускаемые напряжения соответственно при растяжении и сжатии.

При сложном напряженном состоянии, когда в точках детали два или все три главных напряжения не равны нулю, для одного и того же материала опасное состояние может иметь место при различных предельных значениях главных напряжений  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  в зависимости от соотношений между ними. Поэтому экспериментально установить предельные величины главных напряжений очень сложно не только из-за трудности постановки опытов, но и из-за большого объема испытаний.

В связи с этим для оценки предельных величин главных напряжений вводят критерии прочности – гипотезу о преимущественном влиянии на прочность материала того или иного фактора: полагают, что нарушение прочности материала при любом напряженном состоянии наступит только тогда, когда величина данного фактора достигнет некоторого предельного значения. Предельное значение фактора, определяющего прочность, находят на основании простых, легко осуществимых опытов на растяжение. Иногда пользуются также результатами опытов на кручение. Таким образом, введение критерия прочности позволяет сопоставить данное сложное напряженное состояние с простым, например, с одноосным растяжением, и установить при этом такое эквивалентное  $\sigma_{эке}$  (расчетное) напряжение, которое в обоих случаях дает одинаковый коэффициент запаса.

В настоящее время наибольшее распространение получили пять теорий прочности.

- **Теория наибольших нормальных напряжений (первая теория прочности).** Согласно этой теории, преимущественное влияние на прочность оказывает величина наибольшего нормального напряжения. Предполагается, что нарушение прочности в общем случае напряженного состояния наступает тогда, когда наибольшее нормальное напряжение достигает опасного значения  $\sigma_{пред}$ . Последнее устанавливается при простом растяжении или сжатии на образцах из данного материала. Опытная проверка показывает, что эта теория прочности не отражает условий перехода материала в пластическое состояние и дает при некоторых напряженных состояниях удовлетворительные результаты лишь для весьма хрупких материалов (например, для камня, кирпича, керамики, инструментальной стали и т. п.).

- **Теория наибольших линейных деформаций (вторая теория прочности).** Согласно этой теории, в качестве критерия прочности принимают наибольшую по абсолютной величине линейную деформацию. Предполагается, что нарушение прочности в общем случае напряженного состояния наступает тогда, когда наибольшая линейная деформация  $\epsilon_{max}$  достигает своего опасного значения. Последнее определяется при простом растяжении или сжатии образцов из данного материала. Опытная проверка этой теории указывает на согласующиеся в ряде случаев результаты лишь для хрупкого состояния материала (например, для легированного чугуна и высокопрочных сталей после низкого отпуска).
- **Критерий наибольших касательных напряжений (третья теория прочности).** Здесь в качестве критерия прочности принята величина наибольшего касательного напряжения. Согласно этой теории предполагается, что предельное состояние в общем случае наступает тогда, когда наибольшее касательное напряжение  $\tau_{max}$  достигает опасного значения  $\tau_{пред}$ . Последнее определяется при достижении предельного состояния в случае простого растяжения.

Условие прочности через главные напряжения записывают так:

$$\sigma_{эkv,III} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma]. \quad (6)$$

Третья теория прочности в общем хорошо подтверждается опытами для материалов, одинаково работающих на растяжение и сжатие. Недостаток ее заключается в том, что она не учитывает среднего по величине главного напряжения  $\sigma_2$ , которое, как показывают опыты, оказывает также некоторое, хотя во многих случаях и незначительное, влияние на прочность материала.

- **Критерий удельной потенциальной энергии формоизменения (четвертая теория прочности).** В качестве критерия прочности в этом случае принимают количество удельной потенциальной энергии формоизменения, накопленной деформированным элементом. Согласно этой теории, опасное состояние (текучесть) в общем случае напряженного состояния наступает тогда, когда удельная потенциальная энергия формоизменения достигает своего предельного значения. Последнее можно легко определить при простом растяжении в момент текучести.

Условие прочности

$$u_{\phi max} \leq [u_{\phi}] \quad (7)$$

или

$$\sigma_{эkv,IV} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} \leq [\sigma]. \quad (8)$$

Опыты подтверждают четвертую теорию для пластичных материалов, одинаково работающих на растяжение и на сжатие. Появление в материале малых пластических деформаций четвертой теорией определяется более точно, чем третьей.

- **Критерий Кулона - Мора** основан на предположении, что прочность материалов в общем случае напряженного состояния зависит главным образом от величины и знака наибольшего  $\sigma_1$  и наименьшего  $\sigma_3$  главных напряжений.

Условие прочности записывают в виде

$$\sigma_{\text{экр,М}} = \sigma_1 - \frac{[\sigma_+]}{[\sigma_-]} \sigma_3 \leq [\sigma]. \quad (9)$$

Основанная целиком на опытных данных, теория Кулона - Мора в общем не нуждается в дополнительной экспериментальной проверке. Однако построение предельных огибающих для каждого материала может быть произведено в результате ряда сложных опытов с плоскими и объемными напряженными состояниями, что, собственно, и ограничивает ее применение.

### 2.3. Сложное сопротивление

Под сложным сопротивлением подразумевают различные комбинации простых напряженных состояний (растяжения, сжатия, сдвига, кручения, изгиба). В общем случае нагружения бруса в его поперечных сечениях действуют шесть компонентов внутренних усилий: нормальная сила  $N$ , поперечные силы  $Q_y$  и  $Q_z$ , крутящий момент  $M_x$ , изгибающие моменты  $M_y$  и  $M_z$ , связанные с четырьмя простыми деформациями стержня: растяжением или сжатием, сдвигом, кручением и изгибом.

*Принцип суммирования действия сил*, или *принцип суперпозиции*, применим во всех случаях, когда деформации малы, а материал подчиняется закону Гука. В этом случае напряженное состояние жесткого стержня определяют путем суммирования напряженных состояний, вызванных каждым видом простого нагружения в отдельности. Аналогично деформации (перемещения) могут быть определены путем сложения деформаций (перемещений), вызванных каждым компонентом нагрузки в отдельности.

Проверка прочности при сложном напряженном состоянии осуществляется на основании данных о наибольшем суммарном напряжении.

#### 2.3.1. Косой изгиб

Если все нагрузки, вызывающие изгиб, действуют в одной плоскости, не совпадающей ни с одной из главных плоскостей, то изгиб называется *косым*. Изогнутая ось балки в этом случае не является плоской кривой.

Обычно косой изгиб приводят к двум плоским изгибам, для чего нагрузки, действующие в произвольных продольных плоскостях, раскладывают на составляющие, лежащие в главных плоскостях  $xoy$  и  $xoz$ . При этом в сечении возникает четыре компоненты внутренних усилий:  $Q_y$ ,  $Q_z$ ,  $M_y$  и  $M_z$ .

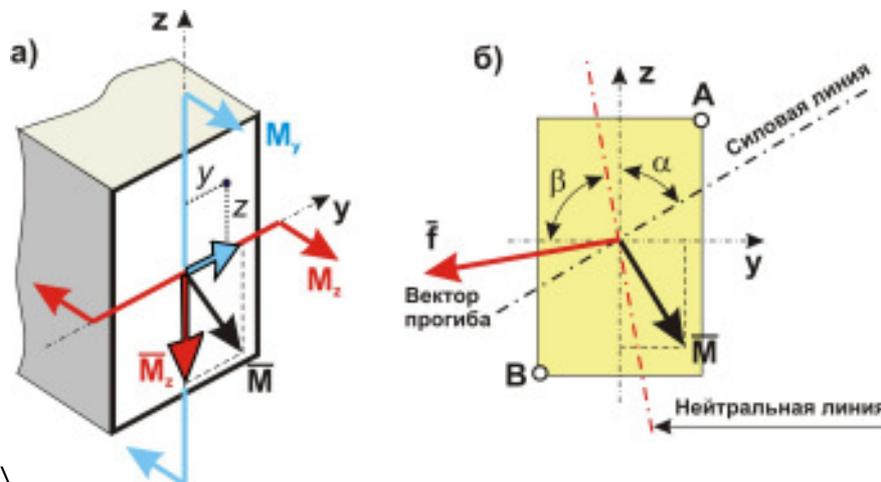


Рис.4

Напряжения в точках любого сечения, расположенных в первом квадранте системы координат  $yoz$  (рис.4, а), при одновременном действии  $M_y$  и  $M_z$  определяются формулой

$$\sigma_x = \frac{M_y}{J_y} z + \frac{M_z}{J_z} y, \quad (10)$$

где  $J_y$  и  $J_z$  - осевые моменты инерции; в формуле (10) необходимо учитывать знаки координат  $y$  и  $z$ .

Уравнение нейтральной линии

$$\frac{M_y}{J_y} z_0 + \frac{M_z}{J_z} y_0 = 0, \quad (11)$$

где  $z_0$  и  $y_0$  - координаты точек нейтральной линии.

Уравнение (11) - прямая линия, проходящая через начало координат. Положение нейтральной линии определяется тангенсом угла ее наклона  $\beta$  к главной оси  $y$ :

$$\operatorname{tg}\beta = -\frac{J_y}{J_z} \operatorname{tg}\alpha. \quad (12)$$

Угол  $\alpha$  определяет положение силовой плоскости (линии, см. рис.4). Из зависимости (12) следует, что в общем случае косоугольного изгиба, когда  $J_y \neq J_z$ , нейтральная линия не перпендикулярна к силовой линии.

Проверку прочности следует проводить в тех сечениях, где изгибающие моменты  $M_y$  и  $M_z$  одновременно велики. Таких сечений в общем случае сложного изгиба может быть несколько.

Если опасное сечение известно, то в нем нужно отыскать опасные точки. Очевидно, при сложном изгибе  $\sigma_{max}$  будут в точках, наиболее удаленных от нейтральной линии (точки  $A$  и  $B$  на рис.4). Так как эти точки лежат на поверхности бруса, то касательные напряжения в них равны нулю, т.е. в этих точках реализуется линейное напряженное состояние. Условие прочности будет иметь вид

$$\sigma_{x,max} = \frac{M_y}{J_y} z + \frac{M_z}{J_z} y \leq [\sigma]. \quad (13)$$

Определение размеров сечения в случае неплоского изгиба производят методом подбора, задаваясь различными отношениями моментов сопротивлений. Касательные напряжения могут быть определены по формуле Журавского.

Перемещения определяются по принципу независимости действия сил. Если  $v$  - прогиб в направлении главной оси  $y$ ;  $w$  - прогиб в направлении главной оси  $z$ , то величина полного прогиба в любом сечении балки может быть получена геометрическим суммированием прогибов в разных плоскостях:

$$f = \sqrt{v^2 + w^2}. \quad (14)$$

Направление полного прогиба перпендикулярно к нейтральной линии (см. рис.4).

### 2.3.2. Изгиб с растяжением (сжатием)

Совместное действие изгиба и растяжения (сжатия) имеет место при продольно-поперечном действии нагрузок; при внецентренном растяжении (сжатии).

Если на балку действуют и продольные и поперечные нагрузки, пересекающие ось бруса, то в общем случае в поперечных сечениях возникают изгибающие моменты

$M_y$  и  $M_z$  в двух плоскостях, поперечные силы  $Q_y$  и  $Q_z$ , а также продольная сила  $N$ . Таким образом, в этом случае будет сложный изгиб с растяжением или сжатием. Нормальное напряжение в произвольной точке сечения определяется формулой

$$\sigma_x = \frac{N}{F} + \frac{M_y}{J_y} z + \frac{M_z}{J_z} y. \quad (15)$$

Изгибающие моменты, продольную силу и координаты точки, в которой вычисляют напряжения, подставляют сюда с их знаками.

Уравнение нейтральной линии

$$\frac{N}{F} + \frac{M_y}{J_y} z_n + \frac{M_z}{J_z} y_n = 0, \quad (16)$$

где  $z_n$  и  $y_n$  - координаты точек нейтральной линии.

Уравнение (16) - прямая линия, не проходящая через начало координат. Положение нейтральной линии определяется отрезками, отсекаемыми на главных центральных осях поперечного сечения (рис.5):

$$\left. \begin{aligned} z_n &= -\frac{NJ_y}{FM_y} = -\frac{Nh^2}{12M_y}; \\ y_n &= -\frac{NJ_z}{FM_z} = -\frac{Nb^2}{12M_z}. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

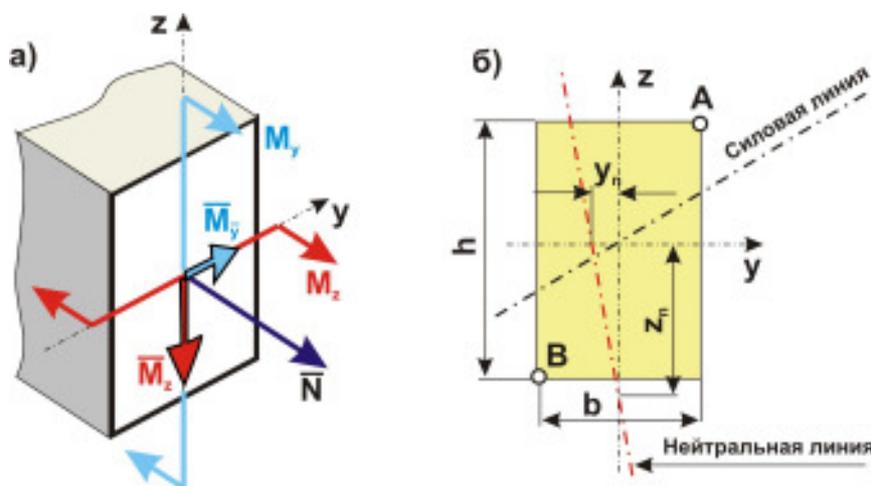


Рис.5

Пренебрегая касательными напряжениями от поперечных сил, можно считать, что напряженное состояние в опасной точке линейно. Следовательно, условие прочности имеет простейший вид:

$$\sigma_{x,max} = \frac{N}{F} + \frac{M_y}{W_y} + \frac{M_z}{W_z} \leq [\sigma]. \quad (18)$$

### 2.3.3. Изгиб с кручением

Силы, действующие на валы (давление на зубья шестерен, натяжение ремней, собственный вес вала и шкивов и т. п.), вызывают в поперечных сечениях валов следующие внутренние силовые факторы: изгибающие моменты  $M_y$  и  $M_z$  в двух плоскостях, крутящий момент  $M_{кр}$ , поперечные силы  $Q_y$  и  $Q_z$ . Таким образом, в любом поперечном сечении одновременно возникают нормальные напряжения от изгиба в двух плоскостях, а также касательные напряжения от кручения и изгиба.

Для расчета вала в первую очередь необходимо установить опасные сечения. С этой целью все силы, действующие на вал, приводят к оси вала. Затем их разлагают на составляющие вдоль координатных осей, после чего строят эпюры изгибающих  $M_y$ ,  $M_z$ , результирующего  $M_{изг} = \sqrt{M_y^2 + M_z^2}$  и крутящего  $M_{кр}$  моментов (рис.6).

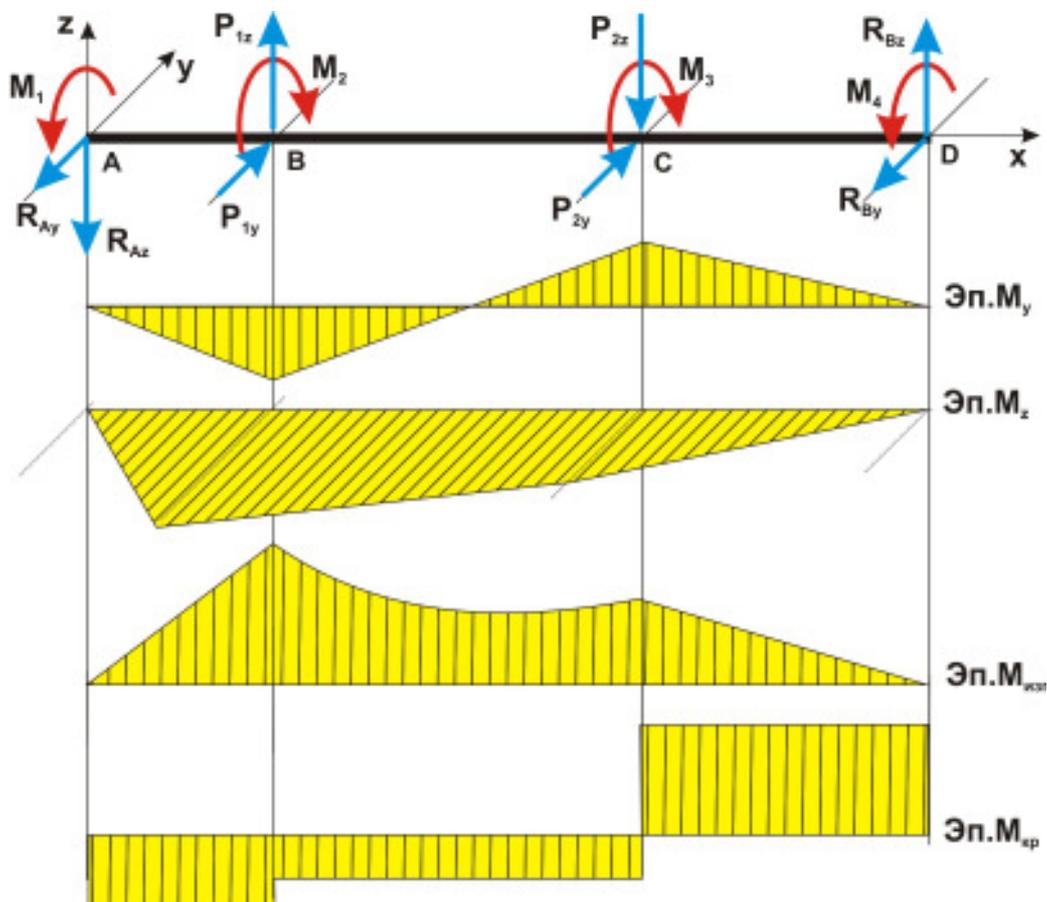


Рис.6

**Вал круглого поперечного сечения.** При изгибе вала круглого или кольцевого сечения в каждом из его сечений под действием результирующего изгибающего момента  $M_{изг}$  имеет место прямой изгиб ( $\alpha = \beta$ ). Опасными сечениями будут те, в которых одновременно велики  $M_{изг}$  и  $M_{кр}$ .

В опасном сечении нужно найти опасные точки. Для этого определяем положение нейтральной линии в сечении и строим эпюру нормальных напряжений  $\sigma_x$  от результирующего изгибающего момента  $M_{изг}$ , которые изменяются пропорционально расстоянию точек от нейтральной линии. Опасными будут точки, наиболее удаленные от нейтральной линии (на рис.7, а точки **A** и **B**) - в них одновременно и нормальные напряжения от изгиба и касательные напряжения от кручения имеют наибольшие значения:

$$\sigma_{x,max} = \frac{M_{изг}}{W}; \quad (19)$$

$$\tau_{кр,max} = \frac{M_{кр}}{W_\rho}. \quad (20)$$

При этом  $W_p = 2W$ . В случае сложного напряженного состояния влиянием касательных напряжений от поперечных сил пренебрегают ввиду их малости по сравнению с касательными напряжениями, вызванными кручением.

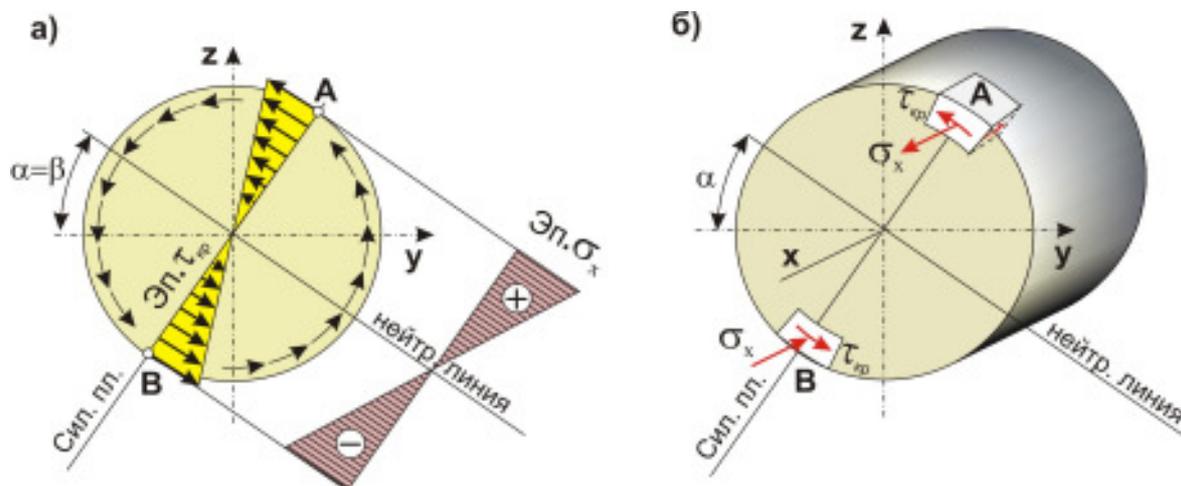


Рис.7

У наиболее опасных точек **A** и **B** выделяем малые элементы (рис.7, б). По четырем их граням действуют касательные напряжения, на основании закона об их парности, а к двум из этих граней приложены еще и нормальные напряжения. Остальные две грани свободны от напряжений. Таким образом, при изгибе с кручением элементы в опасных точках находятся в плоском напряженном состоянии.

Главными напряжениями в наиболее опасной точке (точке **A**) в соответствии с формулой (2) являются следующие:

$$\sigma_1 = \frac{1}{2} \left( \sigma_x + \sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau_{кр}^2} \right); \quad \sigma_2 = 0; \quad \sigma_3 = \frac{1}{2} \left( \sigma_x - \sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau_{кр}^2} \right). \quad (21)$$

Для проверки прочности элементов, выделенных у опасных точек, нужно выбрать соответствующую теорию прочности, воспользовавшись одной из формул: (6), (8) или (9). Подставив в них выражения (21), получим

$$\sigma_{эkv,III} = \sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau_{кр}^2} \leq [\sigma]; \quad (22)$$

$$\sigma_{эkv,IV} = \sqrt{\sigma_x^2 + 3\tau_{кр}^2} \leq [\sigma]; \quad (23)$$

$$\sigma_{эkv,M} = \frac{1-m}{2} \sigma_x + \frac{1+m}{2} \sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau_{кр}^2} \leq [\sigma], \quad (24)$$

где

$$m = \frac{[\sigma_+]}{[\sigma_-]}.$$

Формула (24) пригодна при  $m < 1$  для хрупких материалов и при  $m = 1$  для пластичных материалов.

С учетом зависимостей (19) и (20) условия прочности (22-24) приводятся к виду

$$\sigma_{эkv,III} = \frac{1}{W} \sqrt{M_{изг}^2 + M_{кр}^2} \leq [\sigma]; \quad (25)$$

$$\sigma_{эkv,IV} = \frac{1}{W} \sqrt{M_{изг}^2 + 0.75M_{кр}^2} \leq [\sigma]; \quad (26)$$

$$\sigma_{эkv,M} = \frac{1}{W} \left[ \frac{1-m}{2} M_{изг} + \frac{1+m}{2} \sqrt{M_{изг}^2 + M_{кр}^2} \right] \leq [\sigma]. \quad (27)$$

Числители этих формул представляют собой приведенные моменты, действие которых эквивалентно совместному действию трех моментов (согласно принятой теории прочности):

$$M_{пр,III} = \sqrt{M_{изг}^2 + M_{кр}^2}; \quad (28)$$

$$M_{пр,IV} = \sqrt{M_{изг}^2 + 0.75M_{кр}^2}; \quad (29)$$

$$M_{пр,M} = \frac{1-m}{2} M_{изг} + \frac{1+m}{2} \sqrt{M_{изг}^2 + M_{кр}^2}. \quad (30)$$

Теперь условия прочности (25-27) можно заменить одной формулой

$$\sigma_{эkv} = \frac{M_{пр}}{W} \leq [\sigma]. \quad (31)$$

Отсюда

$$W \geq \frac{M_{пр}}{[\sigma]} \quad (32)$$

и диаметр вала может быть найден из условия

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{32M_{пр}}{\pi[\sigma]}}. \quad (33)$$

Приведенные формулы полностью применимы и к стержням кольцевого сечения.

**Вал прямоугольного поперечного сечения.** Как и для вала с круглым поперечным сечением, сначала строят эпюры изгибающих  $M_y$ ,  $M_z$ , а также эпюру крутящих  $M_{кр}$  моментов и определяют опасное сечение. Чтобы проверить прочность бруса, нужно в опасном сечении найти опасную точку, вычислить для нее эквивалентное напряжение (по одной из теорий прочности) и сопоставить его с допускаемым напряжением.

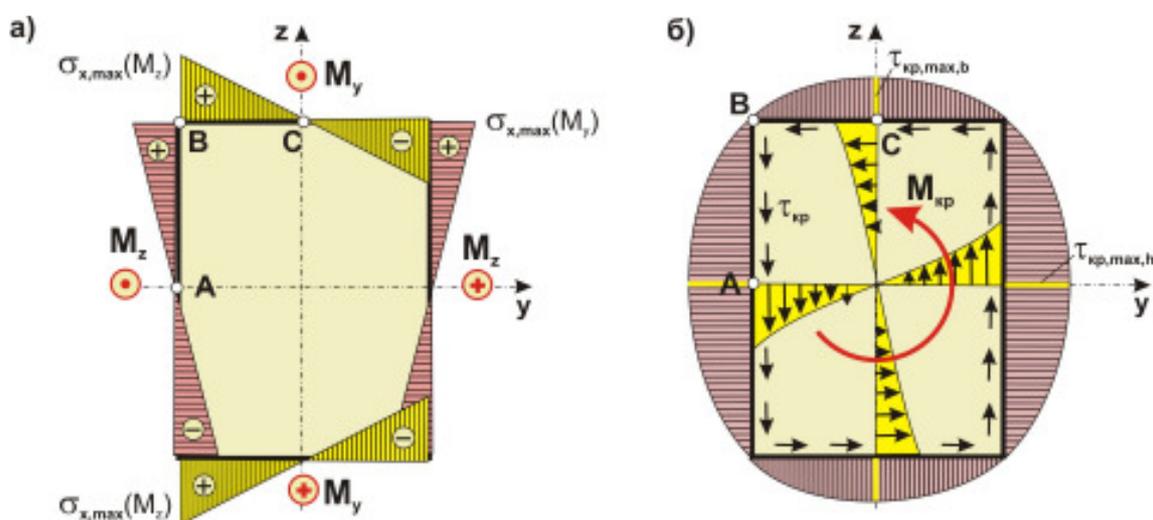


Рис.8

Для нахождения опасной точки сечения необходимо построить эпюры напряжений от всех силовых факторов:  $M_y$ ,  $M_z$ ,  $M_{кр}$ ,  $Q_y$ ,  $Q_z$ . Так как касательные напряжения от поперечных сил  $Q_y$ ,  $Q_z$  обычно малы, в большинстве случаев их влиянием можно пренебречь. Эпюры нормальных напряжений  $\sigma_x$  от каждого из изгибающих

моментов  $M_y$  и  $M_z$  изменяются пропорционально расстоянию точек от соответствующих главных осей поперечного сечения (рис.8, а), эпюра касательных напряжений  $\tau_{кр}$  нелинейна (рис.8, б) и определяется зависимостями, полученными в теории упругости Сен-Венаном, которые показывают, что касательные напряжения в контурных точках сечения возрастают от нулевых значений в углах к серединам сторон по некоторым кривым; в центре сечения напряжение равно нулю, а максимального значения напряжения достигают в серединах длинных сторон, причем

$$\tau_{кр,max,h} = \frac{M_{кр}}{\alpha b^2 h}. \quad (34)$$

Наибольшие напряжения на короткой стороне прямоугольника

$$\tau_{кр,max,b} = \gamma \tau_{кр,max,h}. \quad (35)$$

В этих формулах  $b$ ,  $h$  - длина короткой и длинной стороны прямоугольника соответственно;  $\alpha$  и  $\gamma$  числовые коэффициенты, зависящие от соотношения сторон  $h$  и  $b$ .

Значения этих коэффициентов приведены в табл.2.

Таблица 2

$h/b$	1,0	1,5	1,75	2,0	3,0	4,0	6,0	8,0	10,0	$\infty$
$\alpha$	0,208	0,231	0,239	0,246	0,267	0,282	0,299	0,307	0,313	0,333
$\gamma$	1,000	0,859	0,820	0,795	0,753	0,745	0,743	0,742	0,742	0,742

В этих случаях гипотеза плоских сечений неприменима, так как сечения искривляются (депланируют). В стержнях произвольного сечения, как и в стержнях круглого сечения, касательные напряжения при кручении направлены по касательной к контуру.

Эпюры нормальных и касательных напряжений наглядно показывают, что в отличие от круглого сечения в рассматриваемом случае наибольшие нормальные напряжения  $\sigma_x$  и наибольшие касательные напряжения  $\tau_{кр,max,b}$  и  $\tau_{кр,max,h}$  имеют место не в одной и той же точке. Следовательно, для выявления самой опасной точки в сечении нужно сопоставить эквивалентные напряжения в нескольких опасных точках. Обычно считают достаточным рассмотреть три точки сечения: одну угловую точку (например, **B**), одну точку посередине длинной стороны прямоугольника (например, **A**) и одну точку посередине короткой стороны прямоугольника (например, **C**).

Элемент, выделенный в окрестности точки **B** (при принятых на рис.8, а направлениях  $M_y$  и  $M_z$ ), находится в условиях простого растяжения напряжениями, равными сумме нормальных напряжений от  $M_y$  и  $M_z$ . Поэтому условие прочности для этой точки должно быть записано как для случая линейного напряженного состояния:

$$\sigma_B = \frac{M_y}{W_y} + \frac{M_z}{W_z} \leq [\sigma]. \quad (36)$$

Если материал вала имеет разные допускаемые напряжения для растяжения и для сжатия, то проверять прочность по формуле (36) необходимо и в крайней правой нижней точке поперечного сечения вала, в которой моменты  $M_y$  и  $M_z$  вызывают простое сжатие.

Элементы в окрестности точек **A** и **C** находятся в плоском напряженном состоянии, следовательно, главные напряжения в них, как и для вала круглого поперечного сечения, можно вычислить по формуле (21).

Условия прочности для точек **A** и **C** по теории наибольших касательных напряжений и энергетической теории имеют вид:

для точки **A**

$$\sigma_{\text{Экв.III}} = \sqrt{\frac{M_z^2}{W_z^2} + 4 \frac{M_{\text{кр}}^2}{(\alpha b^2 h)^2}} \leq [\sigma]; \quad (37)$$

$$\sigma_{\text{Экв.IV}} = \sqrt{\frac{M_z^2}{W_z^2} + 3 \frac{M_{\text{кр}}^2}{(\alpha b^2 h)^2}} \leq [\sigma]; \quad (38)$$

для точки **C**

$$\sigma_{\text{Экв.III}} = \sqrt{\frac{M_y^2}{W_y^2} + 4\gamma^2 \frac{M_{\text{кр}}^2}{(\alpha b^2 h)^2}} \leq [\sigma]; \quad (39)$$

$$\sigma_{\text{Экв.IV}} = \sqrt{\frac{M_y^2}{W_y^2} + 3\gamma^2 \frac{M_{\text{кр}}^2}{(\alpha b^2 h)^2}} \leq [\sigma]. \quad (40)$$

Знаки моментов при подстановке их в уравнения (37) - (40) не имеют значения, так как в эти формулы входят квадраты моментов.

Таким образом, наиболее опасная точка определяется только в результате вычисления эквивалентных напряжений во всех трех точках (**A**, **B** и **C**) по формулам (37) - (40), причем в каждом отдельном случае положение наиболее опасной точки зависит от конкретного соотношения величин моментов  $M_y$ ,  $M_z$  и  $M_{\text{кр}}$ .

**Общий случай действия сил на вал.** Если в сечении вала действуют осевая сила **N**, изгибающие моменты в главных плоскостях  $M_y$  и  $M_z$ , а также крутящий момент  $M_{\text{кр}}$ , то условия прочности для точек **A** и **C** по теории наибольших касательных напряжений и энергетической теории примут вид:

для точки **A**

$$\sigma_{\text{Экв.III}} = \sqrt{\left(\frac{M_z}{W_z} + \frac{N}{F}\right)^2 + 4 \frac{M_{\text{кр}}^2}{(\alpha b^2 h)^2}} \leq [\sigma]; \quad (41)$$

$$\sigma_{\text{Экв.IV}} = \sqrt{\left(\frac{M_z}{W_z} + \frac{N}{F}\right)^2 + 3 \frac{M_{\text{кр}}^2}{(\alpha b^2 h)^2}} \leq [\sigma]; \quad (42)$$

для точки **C**

$$\sigma_{\text{Экв.III}} = \sqrt{\left(\frac{M_y}{W_y} + \frac{N}{F}\right)^2 + 4\gamma^2 \frac{M_{\text{кр}}^2}{(\alpha b^2 h)^2}} \leq [\sigma]; \quad (43)$$

$$\sigma_{\text{Экв.IV}} = \sqrt{\left(\frac{M_y}{W_y} + \frac{N}{F}\right)^2 + 3\gamma^2 \frac{M_{\text{кр}}^2}{(\alpha b^2 h)^2}} \leq [\sigma]. \quad (44)$$

### 3. ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЯ

#### 3.1. Требуется:

- 1) для расчетной схемы, представленной на *рис.9*, построить эпюры нормальной силы  $N$ , крутящего момента  $M_k$  и изгибающих моментов  $M_y$  и  $M_z$  относительно главных центральных осей поперечных сечений;
- 2) определить положение нейтральной оси в наиболее нагруженном сечении;
- 3) подобрать размеры указанных форм поперечных сечений на каждом участке бруса и проверить их прочность;
- 4) определить перемещения границ участков пространственного бруса.

Вычисления выполнить в системах **MathCAD**, **SCAD** и **MSC.Patran**. Результаты решения, полученные в системах **SCAD** и **MSC.Patran**, использовать как контрольные для проверки правильности решения задачи в системе **MathCAD**.

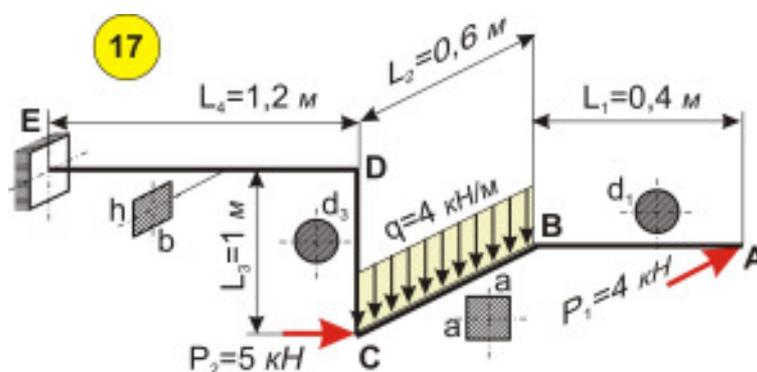


Рис.9

#### 3.2. Расчет пространственного бруса в программном комплексе MathCAD

##### 3.2.1. Построение эпюр

Для стержневой системы, жестко заделанной одним из концевых сечений (*рис.9*), определение реакций и реактивных моментов в заделке не является обязательным, так как в этом случае внутренние силовые факторы на каждом участке можно определять, рассматривая каждый раз ту отсеченную часть бруса, в которую не входит заделка.

Используя метод сечений, на каждом участке системы составляют аналитические выражения для нормальной силы  $N$ , поперечных сил  $Q_y$  и  $Q_z$  крутящего момента  $M_{кр}$  и изгибающих моментов  $M_y$  и  $M_z$  относительно главных центральных осей, произвольно выбранного поперечного сечения как функции абсциссы этого сечения и сил, расположенных по одну сторону от сечения.

Нормальная сила в произвольно выбранном поперечном сечении равна алгебраической сумме проекций на геометрическую ось бруса всех сил, действующих по одну сторону от этого сечения. Поперечные силы  $Q_y$  и  $Q_z$  в произвольно выбранном поперечном сечении равны алгебраической сумме проекций всех сил, действующих по одну сторону от этого сечения, на оси  $y$  и  $z$ , совпадающие с главными центральными осями этого сечения. Крутящий момент  $M_{кр} = M_x$  равен алгебраической сумме мо-

ментов сил, действующих по одну сторону от сечения, относительно геометрической оси участка стержневой системы. Изгибающие моменты моментов  $M_y$  и  $M_z$  в произвольном поперечном сечении равны алгебраической сумме моментов сил, расположенных по одну сторону от сечения, относительно каждой из главных центральных осей этого сечения.

**Внутренние силовые факторы считаются положительными, если направления их векторов совпадают с положительными направлениями выбранной системы координат.**

По записанным аналитическим выражениям для  $N$ ,  $Q_y$ ,  $Q_z$ ,  $M_{кр}$ ,  $M_y$  и  $M_z$  вычисляют их значения в поперечных сечениях, расположенных в начале и конце каждого участка, а при необходимости их экстремальные величины в пределах участка бруса.

Ординаты эпюр  $N$ ,  $Q_y$ ,  $Q_z$ ,  $M_{кр}$ ,  $M_y$  и  $M_z$  откладываются перпендикулярно геометрической оси бруса на каждом участке системы. Эпюру изгибающего момента рекомендуется строить в плоскости его действия со стороны сжатых волокон бруса.

При построении эпюр каждый стержень системы исследуется отдельно; удобнее начинать со стержня, содержащего свободный торец бруса, затем переходить ко второму стержню, непосредственно примыкающему к первому, и т. д., вплоть до последнего стержня, имеющего заделку. В пределах каждого стержня ось  $x$  правой системы координат совмещается с осью стержня. Направление оси  $x$  соответствует последовательному переходу от заземленного торца к свободному. При этом во всяком стержне, рассматриваемом отдельно, конец, обращенный в сторону локальной оси  $x_i$ , следует условно считать свободным, начальным концом; другой конец стержня, обращенный в сторону заделки, можно условно считать заземленным.

Так как при расчетах на прочность влиянием касательных напряжений  $\tau_{xy}$  и  $\tau_{xz}$  пренебрегают, то в общем случае можно не определять поперечные силы  $Q_y$ ,  $Q_z$ . Но **MathCAD** не позволяет, без написания специальной программы, строить эпюры для пространственного бруса в глобальной системе координат  $xyz$ , поэтому нам придется эти эпюры строить по участкам в правых локальных системах координат  $x_i y_i z_i$  ( $i = 1...4$ ), начало которых будем помещать на левых концах участков (рис.10), в которых поперечные силы  $Q_y$  и  $Q_z$  в рассматриваемых сечениях бруса будут играть роль внешних сил.

Расчленим пространственный брус на четыре части по границам участков. В местах разреза приложим внутренние силовые факторы  $N_{ij}$ ,  $Q_{ijy}$ ,  $Q_{ijz}$ ,  $M_{ijx}$ ,  $M_{ijy}$  и  $M_{ijz}$ , где индекс  $ij$  соответствует точке встречи  $i$ -го и  $j$ -го участков (рис.10). Все компоненты главного вектора и главного момента будем изображать положительными. В местах разреза силы взаимодействия между участками равны по величине и обратны по направлению (третий закон Ньютона). Сначала компонентам главного вектора и главного момента не будем придавать никакого физического смысла. Если величина компонента вектора, найденная из уравнений равновесия, получится со знаком плюс, то это означает, что направление этого компонента вектора мы выбрали правильно, в противном случае (получился знак минус) – неправильно.

Для каждого из участков построим эпюры  $N_i$ ,  $M_{кр,i}$ ,  $M_{y,i}$  и  $M_{z,1}$  с теми знаками, которые получились в результате решения уравнений равновесия, а затем по этим данным построим эпюры  $N$ ,  $M_{кр}$ ,  $M_y$  и  $M_z$  для всего пространственного бруса.

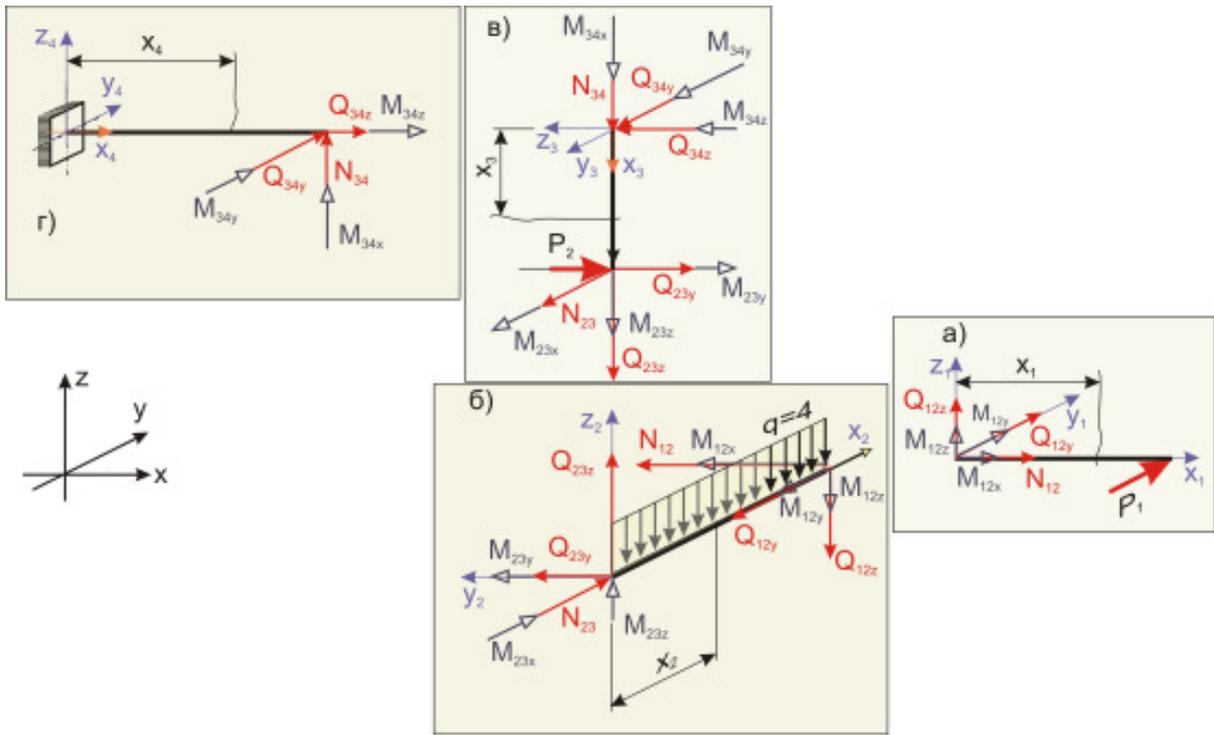


Рис.10

**Участок 1.  $0 \leq x_1 \leq L_1$  (рис.11).**

Отсечем правую часть первого участка бруса, к его левому торцу приложим пока неизвестные внутренние силовые факторы, вектора которых направим в положительном направлении координатных осей и составим условия равновесия сил, действующих на выделенный участок бруса.

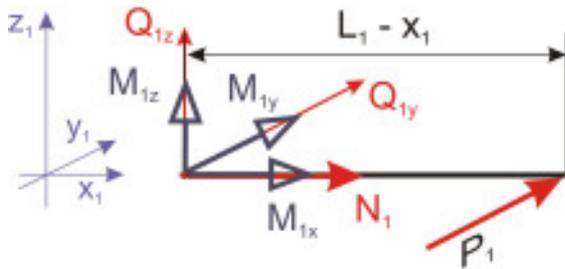


Рис.11

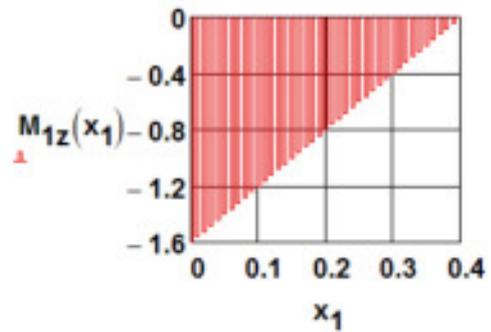


Рис.12

**Уравнения равновесия**

$$\begin{aligned} \sum X = 0: & \quad N_1 = 0; \\ \sum Y = 0: & \quad Q_{1y} + P_1 = 0; \\ \sum Z = 0: & \quad Q_{1z} = 0; \\ \sum M_x = 0: & \quad M_{1x} = 0; \\ \sum M_y = 0: & \quad M_{1y} = 0; \\ \sum M_z = 0: & \quad M_{1z} + P_1 \cdot (L_1 - x_1) = 0. \end{aligned}$$

**Решения**

$$\begin{aligned} N_{12} &= 0 \\ Q_{12y} &= -P_1 \\ Q_{12z} &= 0 \\ M_{12x} &= 0 \\ M_{12y} &= 0 \\ M_{12z}(x_1) &= -P_1 \cdot (L_1 - x_1); \\ M_{12z} &= -1.6 \end{aligned}$$

Все внутренние силовые факторы на первом участке, за исключением момента  $M_{12z}$  и поперечной силы  $Q_{12y}$ , равны нулю. В конце участка  $N_{12} = 0$ ,  $Q_{12y} = -P_1$ ,  $M_{12x} = 0$ ,  $M_{12y} = 0$ ,  $M_{12z} = -1.6$  кНм. Знак минус у величин  $Q_{12y}$  и  $M_{12z}$  означает, что действительные направления векторов, изображенные на рис.11, обратны.

Эпюра момента  $M_{1z}(x_1)$  приведена на рис.12.

**Участок 2.  $0 \leq x_2 \leq L_2$  (рис.13).**

К правому торцу бруса будут приложены только два отличных от нуля силовых фактора:  $M_{12z} = -1.6$  кНм и  $Q_{12y} = -4$  кН, в пределах участка - равномерно распределенная нагрузка  $q$ .

Отсечем правую часть участка и составим условия равновесия внешних и внутренних сил, приложенных к этому участку:  $q$ ,  $M_{12z}$ ,  $Q_{12y}$ ,  $N_2$ ,  $Q_{2y}$ ,  $Q_{2z}$ ,  $M_{2x}$ ,  $M_{2y}$  и  $M_{2z}$ .

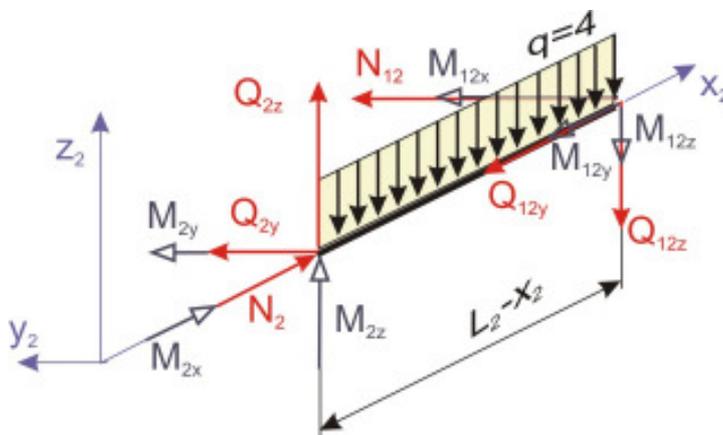


Рис.13

**Уравнения равновесия**

$$\begin{aligned} \sum X = 0: & \quad N_2 - Q_{12y} = 0; \\ \sum Y = 0: & \quad Q_{2y} + N_{12} = 0; \\ \sum Z = 0: & \quad Q_{2z} - Q_{12z} - q(L_2 - x_2) = 0; \\ \sum M_x = 0: & \quad M_{2x} - M_{12y} = 0; \\ \sum M_y = 0: & \quad M_{2y} + M_{12x} + \frac{q(L_2 - x_2)^2}{2} = 0; \\ \sum M_z = 0: & \quad M_{2z} - M_{12z} + N_{12} \cdot (L_2 - x_3) = 0. \end{aligned}$$

**Решения**

$$\begin{aligned} N_2 = Q_{12y} = -P_1 = -4 \\ N_{23} = -4 \\ Q_{2y} = -N_{12} = 0 \\ Q_{23y} = 0 \\ Q_{2z} = Q_{12z} + q(L_2 - x_2) \\ Q_{23z} = q \cdot L_2 = 1,6 \\ M_{2x} = M_{12y} = 0 \\ M_{23x} = 0 \\ M_{2y} = \frac{q(L_2 - x_2)^2}{2} \\ M_{23y} = -\frac{qL_2^2}{2} = -0.72 \\ M_{2z} = M_{12z} = -1,6; \\ M_{23z} = -1.6 \end{aligned}$$

В конце участка

$$\begin{aligned} N_{23} &:= N_2(0) & Q_{23y} &:= Q_{2y}(0) & Q_{23z} &:= Q_{2z}(0) \\ M_{23x} &:= M_{2x}(0) & M_{23y} &:= M_{2y}(0) & M_{23z} &:= M_{2z}(0) \end{aligned}$$

Эпюры нормальной силы  $N_2$  и момента  $M_{2y}$  представлены на рис.14.

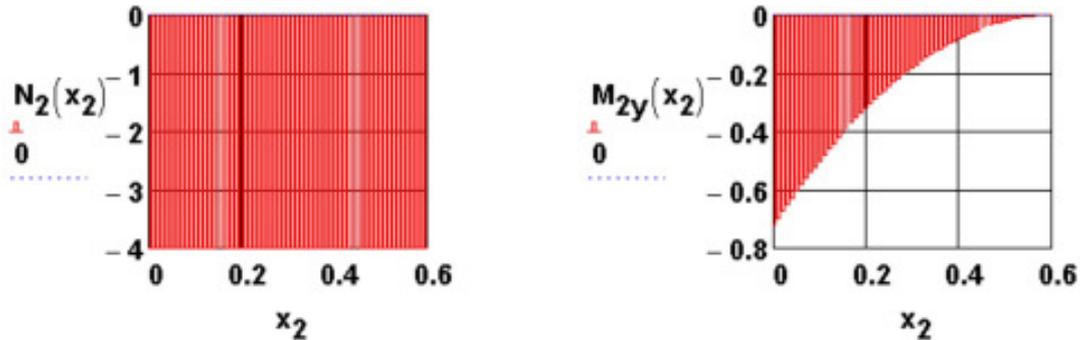


Рис.14

Знак минус у значений функции  $N_2(x_2)$  означает, что направление этого вектора на расчетной схеме выбрано неверно, т.е. второй участок пространственного бруса не сжимается, а растягивается, что необходимо будет учесть при построении эпюр.

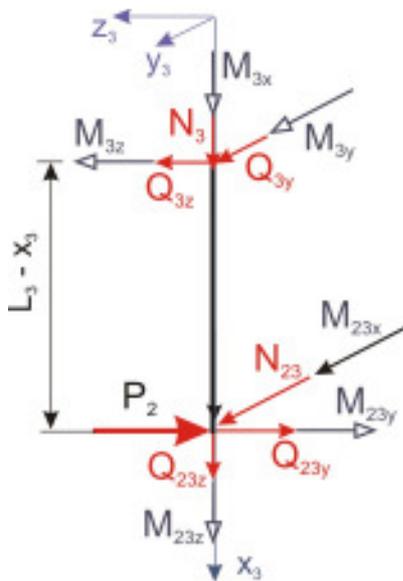


Рис.15

**Участок 3.**  $0 \leq x_3 \leq L_3$  (рис.15).

Отсечем правую часть участка и составим условия равновесия внешних и внутренних сил, приложенных к этому участку:  $P_2$ ,  $N_{23}$ ,  $Q_{23z}$ ,  $M_{23y}$ ,  $M_{23z}$ ,  $N_3$ ,  $Q_{3y}$ ,  $Q_{3z}$ ,  $M_{3x}$ ,  $M_{3y}$  и  $M_{3z}$ .

Уравнения равновесия	Решения
$\sum X = 0: N_3 + Q_{23z} = 0;$	$N_3 = -Q_{23z}$
$\sum Y = 0: Q_{3y} + N_{23} = 0;$	$Q_{3y} = -N_{23}$
$\sum Z = 0: Q_{3z} - Q_{23y} - P_2 = 0;$	$Q_{3z} = Q_{23y} + P_2$
$\sum M_x = 0: M_{3x} + M_{23z} = 0;$	$M_{3x} = -M_{23z}$
$\sum M_y = 0: M_{3y} + M_{23x} + (P_2 + Q_{23y}) \cdot (L_3 - x_3) = 0;$	$M_{3y} = -M_{23x} - (P_2 + Q_{23y}) \cdot (L_3 - x_3)$
$\sum M_z = 0: M_{3z} - M_{23y} + N_{23} \cdot (L_3 - x_3) = 0$	$M_{3z} = M_{23y} - N_{23} \cdot (L_3 - x_3)$

Вычисления выполним в **MathCAD**.

$$\begin{aligned}
N_3(x_3) &:= -Q_{23z} & N_3(0) &= -2.4 & Q_{3z}(x_3) &:= P_2 + Q_{23y} & Q_{3z}(0) &= 5 \\
Q_{3y}(x_3) &:= -N_{23} & Q_{3y}(0) &= 4 & M_{3x}(x_3) &:= -M_{23z} & M_{3x}(0) &= 1.6 \\
M_{3z}(x_3) &:= M_{23y} - N_{23} \cdot (L_3 - x_3) & M_{3y}(x_3) &:= -M_{23x} - (P_2 + Q_{23y}) \cdot (L_3 - x_3) \\
M_{3z}(0) &= 3.28 & M_{3z}(L_3) &= -0.72 & M_{3y}(0) &= -5
\end{aligned}$$

Нормальная сила  $N_3$ , поперечные силы  $Q_{3y}$  и  $Q_{3z}$ , крутящий момент  $M_{3x}$  не изменяются вдоль оси участка. Эпюры изгибающих моментов  $M_{3y}(x_3)$  и  $M_{3z}(x_3)$  представлены на рис.16.

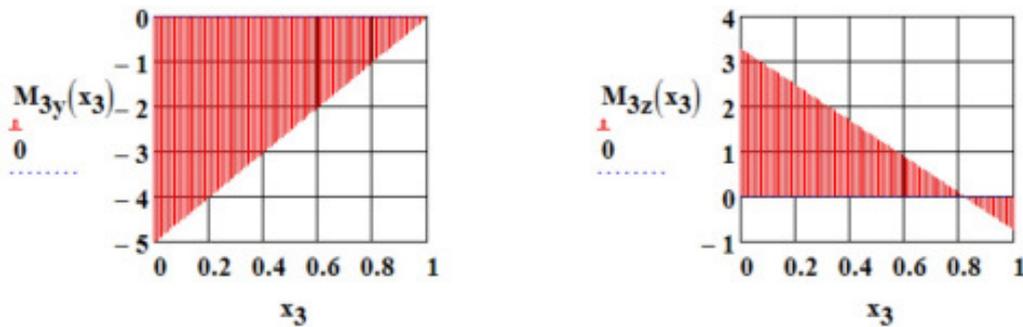


Рис.16

На левой границе участка действуют силы

$$\begin{aligned}
N_{34} &:= N_3(0) & Q_{34y} &:= Q_{3y}(0) & Q_{34z} &:= Q_{3z}(0) \\
M_{34x} &:= M_{3x}(0) & M_{34y} &:= M_{3y}(0) & M_{34z} &:= M_{3z}(0)
\end{aligned}$$

**Участок 4.**  $0 \leq x_4 \leq L_4$  (рис.17).

Отсечем правую часть участка и составим условия равновесия внешних и внутренних сил, приложенных к этому участку:  $N_{34}$ ,  $Q_{34y}$ ,  $Q_{34z}$ ,  $M_{34x}$ ,  $M_{34y}$ ,  $M_{34z}$ ,  $N_4$ ,  $Q_{4y}$ ,  $Q_{4z}$ ,  $M_{4x}$ ,  $M_{4y}$  и  $M_{4z}$ .

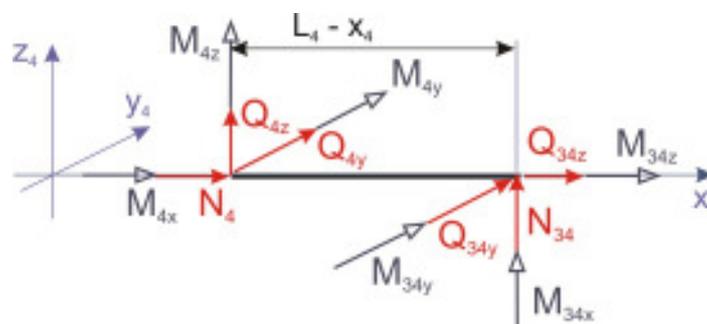


Рис.17

	Уравнения равновесия	Решения
$\sum X = 0:$	$N_4 + Q_{34z} = 0;$	$N_4 = -Q_{34z}$
$\sum Y = 0:$	$Q_{4y} + Q_{34y} = 0;$	$Q_{4y} = -Q_{34y}$
$\sum Z = 0:$	$Q_{4z} + N_{34} = 0;$	$Q_{4z} = -N_{34}$

### Уравнения равновесия

$$\begin{aligned} \sum M_x = 0: \quad & M_{4x} + M_{34z} = 0; \\ \sum M_y = 0: \quad & M_{4y} + M_{34y} - N_{34} \cdot (L_4 - x_4) = 0; \\ \sum M_z = 0: \quad & M_{4z} + M_{34x} + Q_{34y} \cdot (L_4 - x_4) = 0 \end{aligned}$$

### Решения

$$\begin{aligned} M_{4x} &= -M_{34z} \\ M_{4y} &= -M_{34y} + N_{34} \cdot (L_4 - x_4) \\ M_{4z} &= -M_{34x} - Q_{34y} \cdot (L_4 - x_4) \end{aligned}$$

Вычисления выполним в **MathCAD**.

$$\begin{aligned} N_4(x_4) &:= -Q_{34z} & N_4(0) &= -5 & Q_{4y}(x_4) &:= -Q_{34y} & Q_{4y}(0) &= -4 \\ Q_{4z}(x_4) &:= -N_{34} & Q_{4z}(0) &= 2.4 & M_{4x}(x_4) &:= -M_{34z} & M_{4x}(0) &= -3.28 \\ M_{4y}(x_4) &:= -M_{34y} + N_{34} \cdot (L_4 - x_4) & M_{4y}(0) &= 2.12 & M_{4y}(L_4) &= 5 \\ M_{4z}(x_4) &:= -M_{34x} - Q_{34y} \cdot (L_4 - x_4) & M_{4z}(0) &= -6.4 & M_{4z}(L_4) &= -1.6 \end{aligned}$$

Эпюры изгибающих моментов  $M_{4y}(x_4)$  и  $M_{4z}(x_4)$  представлены на *рис.18*.

По полученным данным строим эпюры  $N$ ,  $M_{кр}$ ,  $M_y$  и  $M_z$  для всего ломаного бруса (*рис.19*).

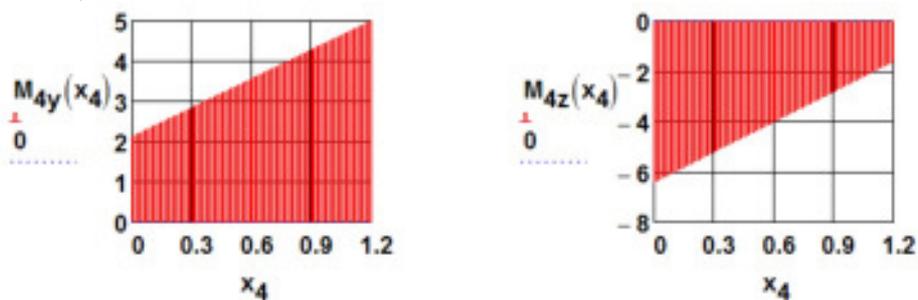


Рис. 18

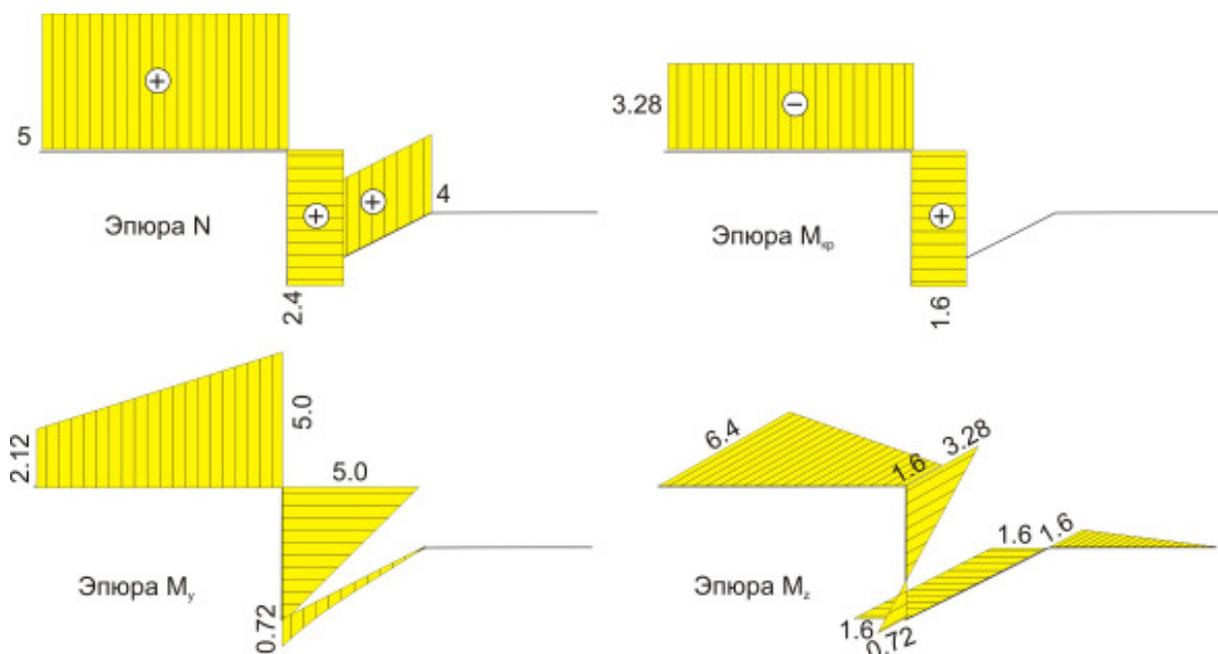


Рис.19

Разрывы (скачки) ординат на эпюрах изгибающих моментов около узловых точек на эпюрах моментов  $M_y$  и  $M_z$  (при отсутствии на системе моментов внешних пар) не должны вызывать смущения, так как эти ординаты относятся к разным поперечным сечениям.

### 3.2.2. Расчет на прочность

По эпюрам внутренних силовых факторов на каждом из участков пространственного бруса устанавливаем наиболее нагруженное (опасное) поперечное сечение, в котором все внутренние силовые факторы одновременно оказываются наибольшими по величине. Если такого сечения нет, то расчет на прочность производится в нескольких поперечных сечениях.

В опасном сечении находим наиболее напряженную точку и вид напряженного состояния в этой точке для правильного составления условия прочности по методу допускаемых напряжений. При определении размеров поперечного сечения обычно влиянием нормальной силы  $N$  пренебрегают, затем расчетные размеры округляют с учетом существующих стандартов на сортовой прокат и производят проверку прочности с учетом влияния нормальной силы.

**Участок 1.**  $0 \leq x_1 \leq L_1$  (рис.11, 19).

На первом участке возникает плоский изгиб в плоскости  $xoy$  в глобальной системе координат  $xoyz$  относительно оси  $z$ . Наиболее нагруженным является поперечное сечение  $x_1 = 0$  в начале участка, опасными точками являются точки  $A$  и  $B$ , наиболее удаленные от нейтральной оси, в которых реализуется одноосное напряженное состояние (рис.20). Следовательно, условие прочности будет иметь простой вид:

$$\sigma_{x,max} = \frac{M_z}{W_z} \leq [\sigma].$$

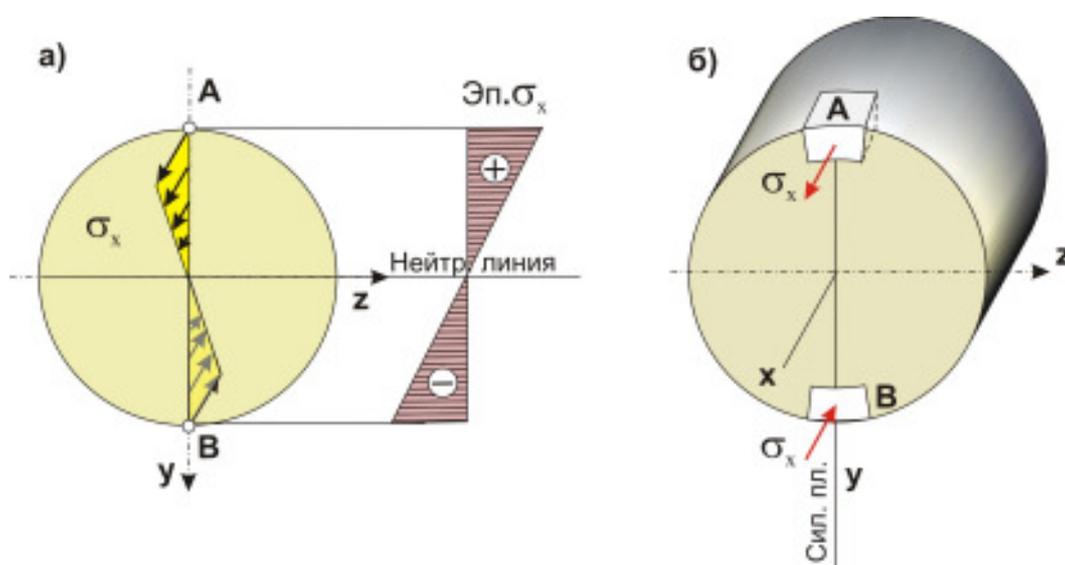


Рис.20

В этом сечении  $M_z = 1,6 \cdot 10^3$  Нм (рис.19). Диаметр поперечного сечения  $d_1$  определяем из расчета на изгиб по методу допускаемых напряжений по формуле (33):

$$d_1 = \sqrt[3]{\frac{32M_z}{\pi[\sigma]}}$$

Отсюда  $d_1 = 5,46$  см.

Принимаем  $d_1 = 5,6$  см. Тогда

$$W_1 = \frac{\pi d_1^3}{32}; \quad W_1 = 1.7241 \times 10^{-5}; \quad \sigma_{x,max} = \frac{M_z}{W_1}; \quad \sigma_{x,max} = 9.2802 \times 10^7 \text{ Па.}$$

Недонапряжение

$$\eta = \frac{\sigma_{x,max} - [\sigma]}{[\sigma]} 100\%; \quad \eta = -7.1983\%.$$

**Участок 2.**  $0 \leq x_2 \leq L_2$  (рис.13, 19).

Брус на втором участке испытывает растяжение и изгиб в плоскостях  $xoy$  и  $xoz$  относительно осей  $z$  и  $y$ . Наиболее нагруженным является поперечное сечение  $x_2 = 0$  в начале участка. В этом сечении  $N = 4 \cdot 10^3$  Н,  $M_y = 0.72 \cdot 10^3$  Нм и  $M_z = 1.6 \cdot 10^3$  Нм (рис.21).

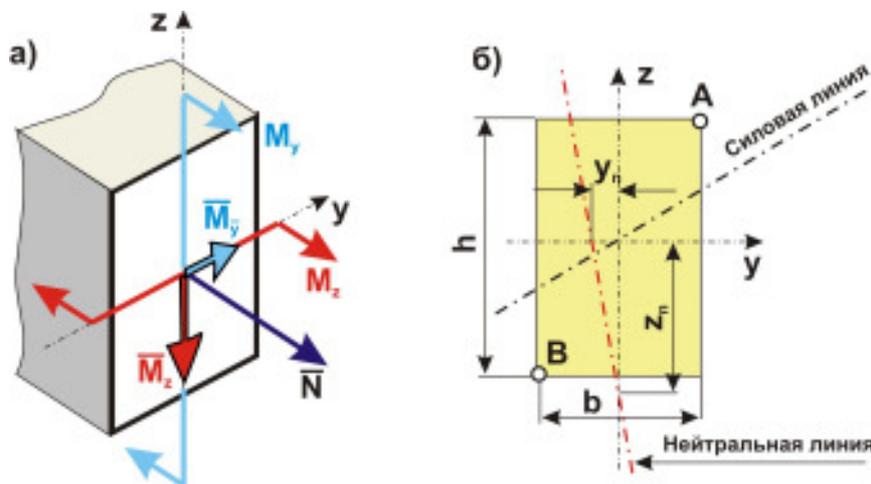


Рис.21

Наиболее напряженной точкой в сечении является угловая точка  $A$ , в которой все три внутренних силовых фактора вызывают растяжение. Напряженное состояние в точке  $A$  линейное, а потому условие прочности определяется формулой (5):

$$\sigma_{x,max} = \frac{N}{F} + \frac{M_y}{W_y} + \frac{M_z}{W_z} \leq [\sigma].$$

Размеры сечения подбираем, используя блок **Given – Find**, а отрезки, отсекаемые на главных центральных осях поперечного сечения нейтральной линии определяем по формулам (17):

$$\begin{aligned} N &:= 4 \cdot 10^3 & M_y &:= 0.72 \cdot 10^3 & M_z &:= 1.6 \cdot 10^3 \\ a &:= 1 & \text{Given} & \frac{M_z + M_y}{\frac{\pi \cdot a^3}{32}} + \frac{N}{a^2} = \sigma_d & a &:= \text{find}(a) & a &= 0.062 \\ z_n &:= \frac{-N \cdot a^2}{12 \cdot M_y} & z_n &= -1.782 \times 10^{-3} & y_n &:= \frac{-N \cdot a^2}{12 \cdot M_z} & y_n &= -8.0188 \times 10^{-4} \end{aligned}$$

Принимаем  $a = 6,2$  см. В этом случае нормальные напряжения в поперечном сечении равны допускаемым напряжениям.

**Участок 3.**  $0 \leq x_3 \leq L_3$  (рис.15, 19).

Брус на этом участке испытывает растяжение, кручение и изгиб в плоскостях  $x_3O_3y_3$  и  $x_3O_3z_3$ . Наиболее нагруженным является поперечное сечение  $x_3 = 0$  в начале участка. В этом сечении  $N = 2.4 \cdot 10^3$  Н,  $M_y = 5 \cdot 10^3$  Нм,  $M_z = 3.28 \cdot 10^3$  Нм,  $M_{кр} = 1.6 \cdot 10^3$  Нм.

Так как в контурных точках этого сечения возникает сложное, а именно плоское, напряженное состояние, то для определения диаметра  $d_2$  воспользуемся одной из известных гипотез прочности.

Для стержня круглой формы сечения по теории наибольших касательных напряжений условие прочности определяется формулой, аналогичной формуле (41):

$$\sigma_{экр,III} = \sqrt{\left(\frac{M_{изг}}{W_z} + \frac{N}{F}\right)^2 + \frac{M_{кр}^2}{(W_z)^2}} \leq [\sigma]. \quad (45)$$

К сожалению, в MathCAD блок **Given – Find** это неравенство решает некорректно, поэтому сначала примем  $N = 0$ . Тогда

$$\begin{aligned} N &:= 2.4 \cdot 10^3 & M_y &:= 5 \cdot 10^3 & M_z &:= 3.28 \cdot 10^3 & M_{кр} &:= 1.6 \cdot 10^3 \\ M_{изг} &:= \sqrt{M_y^2 + M_z^2} & M_{изг} &= 5.9798 \times 10^3 \\ d_2 &:= 1 & \text{Given } \frac{\sqrt{(M_{изг})^2 + M_{кр}^2}}{\frac{\pi \cdot d_2^3}{32}} = \sigma_d & & d_2 &:= \text{Find}(d_2) & d_2 &= 0.0858 \\ \text{Принимаем} & & d_2 &:= 0.086 \end{aligned}$$

Теперь вычислим эквивалентные напряжения с учетом нормальной силы:

$$\begin{aligned} \sigma_{экр\_III} &:= \sqrt{\left[\frac{M_{изг}}{\left(\frac{\pi \cdot d_2^3}{32}\right)} + \frac{N}{\left(\frac{\pi \cdot d_2^2}{4}\right)}\right]^2 + \frac{M_{кр}^2}{\left(\frac{\pi \cdot d_2^3}{32}\right)^2}} & \sigma_{экр\_III} &= 9.953 \times 10^7 \\ \text{Недонапряжение} & \eta := \frac{\sigma_{экр\_III} - \sigma_d}{\sigma_d} \cdot 100 & \eta &= -0.4701 \end{aligned}$$

Как следует из расчета, при диаметре  $d_2 = 86$  мм недонапряжение сечения составит **0.47** %, что соответствует точности инженерных расчетов.

**Участок 4.**  $0 \leq x_4 \leq L_4$  (рис.17, 19).

Брус на этом участке испытывает растяжение, кручение и изгиб в двух плоскостях:  $x_4O_4y_4$  и  $x_4O_4z_4$ . Наиболее нагруженным является поперечное сечение  $x_4 = 0$  в начале участка. В этом сечении  $N = 5 \cdot 10^3$  Н,  $M_y = 2.12 \cdot 10^3$  Нм,  $M_z = 6.4 \cdot 10^3$  Нм,  $M_{кр} = 3.28 \cdot 10^3$  Нм (рис.22).

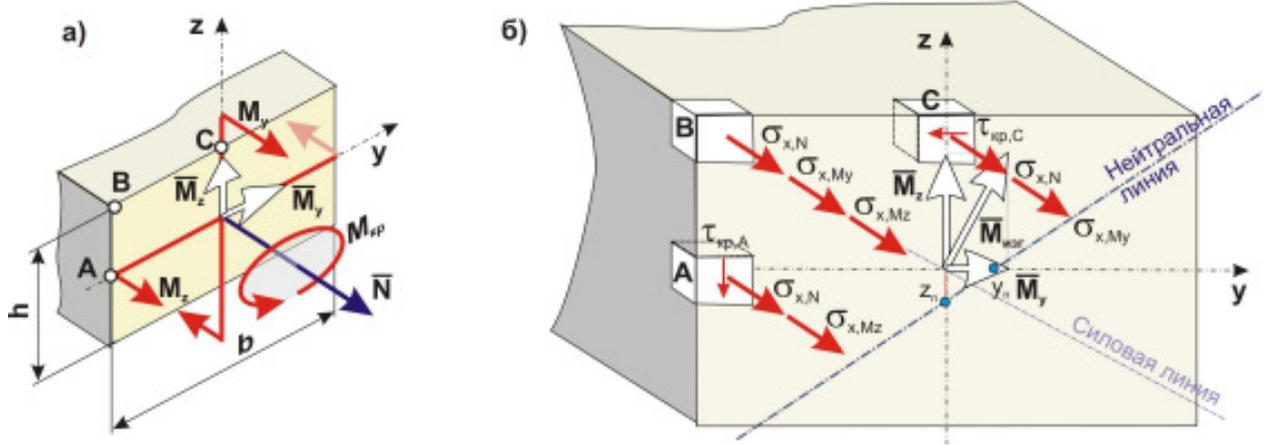


Рис.22

В контурных точках **A** и **C** этого сечения возникает плоское напряженное состояние, а в точке **B** - линейное напряженное состояние. В соответствии с видом напряженного состояния записываем условия прочности для трех точек:

для точки **A**

$$\sigma_{\text{экв,III}} = \sqrt{\left(\frac{M_z}{W_z} + \frac{N}{F}\right)^2 + 4\gamma^2 \frac{M_{\text{кр}}^2}{(\alpha b^2 h)^2}} \leq [\sigma]; \quad (46)$$

для точки **B**

$$\sigma_{x,\text{max}} = \frac{N}{F} + \frac{M_y}{W_y} + \frac{M_z}{W_z} \leq [\sigma]; \quad (47)$$

для точки **C**

$$\sigma_{\text{экв,III}} = \sqrt{\left(\frac{M_y}{W_y} + \frac{N}{F}\right)^2 + 4 \frac{M_{\text{кр}}^2}{(\alpha b^2 h)^2}} \leq [\sigma]. \quad (48)$$

Для рассматриваемого случая из таблицы 2 для  $h/b = 2$  (в таблице и в формулах (34), (37-40) под величиной  $h/b$  понимается отношение длинной стороны сечения к короткой):  $\alpha = 0,246$ ,  $\gamma = 0,795$ . С учетом этих величин зависимости (46)-(48) примут вид

$$\sigma_{\text{экв,III}_A} = \sqrt{\left(\frac{3M_z}{2h^3} + \frac{N}{2h^2}\right)^2 + 2.5281 \frac{M_{\text{кр}}^2}{(0.492h^3)^2}} \leq [\sigma]; \quad (49)$$

$$\sigma_{x,\text{max}_B} = \frac{N}{2h^2} + \frac{3M_y}{h^3} + \frac{3M_z}{2h^3} \leq [\sigma]; \quad (50)$$

$$\sigma_{\text{экв,III}_C} = \sqrt{\left(\frac{3M_y}{h^3} + \frac{N}{2h^2}\right)^2 + 4 \frac{M_{\text{кр}}^2}{(0.492h^3)^2}} \leq [\sigma]. \quad (51)$$

Определим параметр  $h$  из трех формул (49-51) и из найденных величин выберем наибольший.

По уже указанной причине сначала предположим, что  $N = 0$ , а затем после вычисления  $h$  найдём эквивалентное напряжение в этой точке уже с учетом нормальной силы  $N$  и сопоставим его с допускаемым напряжением:

Точка A

$$h_A := 1 \quad \text{Given} \quad \sqrt{\left(3 \frac{M_z}{2}\right)^2 + \frac{2.5281 \cdot M_{кр}^2}{(0.492)^2}} = \sigma_d \cdot h_A^3$$

$$h_A := \text{Find}(h_A) \quad h_A = 0.0523$$

$$\sigma_{\text{экв\_III\_A}} := \sqrt{\left(3 \frac{M_z}{2 \cdot h_A^3} + \frac{N}{2 \cdot h_A^2}\right)^2 + \frac{2.5281 \cdot M_{кр}^2}{(0.492 \cdot h_A^3)^2}} \quad \sigma_{\text{экв\_III\_A}} = 1.0062 \times 10^8$$

Эквивалентное напряжение  $\sigma_{\text{экв\_III\_A}}$  только на **0,62%** превышает допускаемое напряжение **100** МПа. Так что можно считать высоту сечения  $h_A$  выбранной.

Точка B

$$h_B := 1 \quad \text{Given} \quad \frac{N}{2 \cdot h_B^2} + \frac{3 \cdot M_y}{h_B^3} + \frac{3 \cdot M_z}{2 \cdot h_B^3} = \sigma_d$$

$$h_B := \text{Find}(h_B) \quad h_B = 0.0544$$

В этом случае мы сразу учли силу  $N$  и поэтому эквивалентные напряжения в точке **B** по величине в точности совпадают с допускаемыми напряжениями.

Точка C

$$h_C := 1 \quad \text{Given} \quad \sqrt{(3M_y)^2 + \frac{4 \cdot M_{кр}^2}{(0.492)^2}} = \sigma_d \cdot h_C^3$$

$$h_C := \text{Find}(h_C) \quad h_C = 0.0529$$

$$\sigma_{\text{экв\_III\_C}} := \sqrt{\left(3 \frac{M_y}{h_C^3} + \frac{N}{2 \cdot h_C^2}\right)^2 + \frac{4 \cdot M_{кр}^2}{(0.492 \cdot h_C^3)^2}} \quad \sigma_{\text{экв\_III\_C}} = 1.0039 \times 10^8$$

Эквивалентное напряжение  $\sigma_{\text{экв\_III\_C}}$  только на **0,39%** превышает допускаемое напряжение **100** МПа. Так что можно считать высоту сечения  $h_C$  выбранной.

Из трех вычисленных величин  $h_A$ ,  $h_B$ ,  $h_C$  выбираем наибольшую и округляем ее до значения  $h = 0.055$  м.

Принимаем

$$h := 0.055$$

$$b := 2 \cdot h$$

$$b = 0.11$$

$$\sigma_{\text{экв\_III\_В}} := \frac{N}{2 \cdot h^2} + \frac{3 \cdot M_y}{h^3} + \frac{3 \cdot M_z}{2 \cdot h^3} \quad \sigma_{\text{экв\_III\_В}} = 9.6754 \times 10^7$$

Недонапряжение

$$\eta := \frac{\sigma_{\text{экв\_III\_В}} - \sigma_d}{\sigma_d} \cdot 100$$

$$\eta = -3.2457$$

Найдем отрезки, отсекаемые нейтральной осью на главных центральных осях поперечного сечения. При вычислении длины отрезков по формулам (17) необходимо учитывать знаки внутренних силовых факторов. При выводе формул (17) предполагалось, что моменты  $M_y$  и  $M_z$  вызывают растяжение волокон бруса в первой четверти (рис.5). В рассматриваемом случае (рис.22) момент  $M_z$  вызывает сжатие волокон бруса в первой четверти. Поэтому его следует подставить в формулы (17) со знаком минус:

$$z_n := \frac{-N \cdot h^2}{12 \cdot M_y} \quad z_n = -5.9454 \times 10^{-4} \quad y_n := \frac{N \cdot b^2}{12 \cdot M_z} \quad y_n = 7.8776 \times 10^{-4}$$

Итак, высота поперечного сечения бруса на четвертом участке составляет 55 мм, отрезки, отсекаемые нейтральной осью:  $z_n = -0,59$  мм,  $y_n = 0,79$  мм.

### 3.3. Расчет пространственного бруса в программном комплексе SCAD<sup>3</sup>

#### 3.3.1. Построение эпюр

1. Загружаем программный комплекс. В полях ввода панели **Новый проект** введем наименование проекта **Расч\_простр\_бруса** и название объекта **Простр\_брус**. Из списка **Тип схемы** выберем **Система общего вида** и щелкнем по кнопке **Единицы измерения**. Появится одноименная панель. Зададим единицы измерения геометрических и силовых параметров расчета: сосредоточенные силы будем измерять в  $\kappa H$ , равномерно распределённую нагрузку в  $\kappa H/м$ , размеры сечений в  $см$ . Щелкнем по кнопке **ОК**. Сохраним новый проект в файле **Расч\_простр\_бруса**. После выполнения этих операций открывается главное окно конечно-элементного пакета **SCAD**.
2. Работу по созданию нового проекта начнем с формирования расчетной схемы. Для этого установим курсор на раздел **Расчетная схема** дерева и нажмем левую кнопку мыши.
3. Активизируем на инструментальной панели раздел **Узлы и элементы** и на появившейся панели, состоящей всего из двух иконок, нажимаем кнопку **Узлы**  и задаем узлы – границы участков пространственного бруса.
4. Нажимаем кнопку **Элементы** . Вводим стержни, соединяющие границы участков пространственного бруса. В результате в окне отображения графической информации появится изображение пространственного бруса (рис.23).

<sup>3</sup> В.С. Карпиловский, Э.З. Криксунов, А.Ф. Маляренко, А.В. Перельмутер, М.А. Перельмутер. Вычислительный комплекс SCAD. - М.: Издательство АСВ, 2007. – 596 с.; А.В. Перельмутер, В.И. Сливкер. Расчетные модели сооружений и возможность их анализа (издание 2-е переработанное и дополненное).- Киев: Изд-во Сталь, 2002. - 600 с.

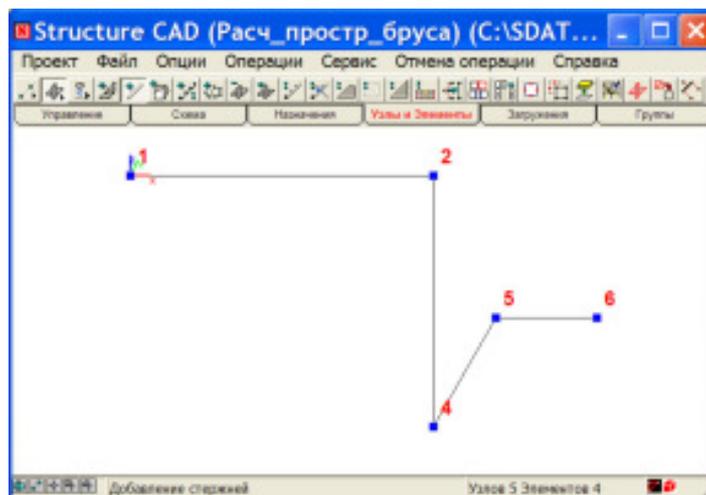


Рис.23

5. Разобьем все элементы бруса на восемь частей.
6. Задаём физико-механические характеристики элементов расчетной схемы в разделе **Назначения**. Активизируем кнопку  **Назначение жесткости стержням**. Для конечно-элементного расчета пространственного бруса мы должны назначить жесткость его элементам. Какую – пока неважно; при построении эпюр внутренних силовых факторов можно задать произвольную жесткость. Зададим размеры поперечных сечений участков бруса, полученные в **MathCAD**.
7. Прикладываем к брусу заданную нагрузку и задаём граничные условия – жёстко защемляем левый его торец. Созданная конечно-элементная модель бруса приведена на *рис.24*.

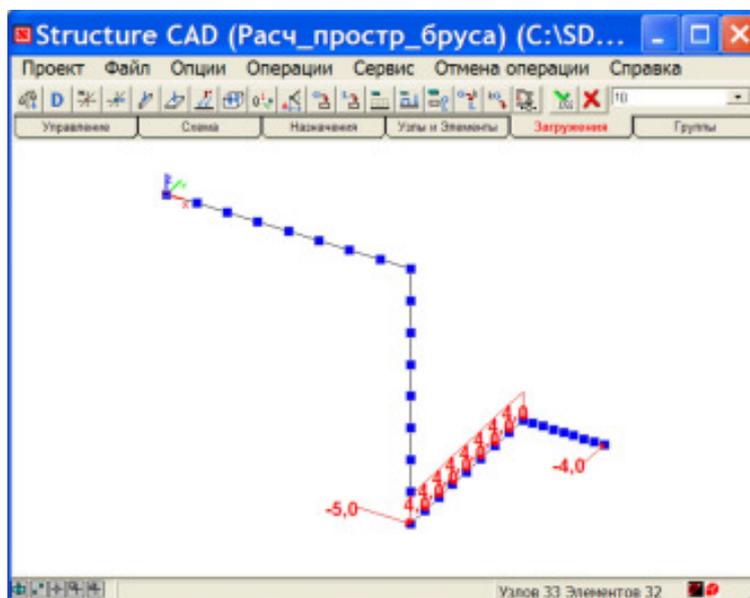


Рис.24

8. Выполняем конечно-элементный расчет пространственного бруса.
9. Полученные в результате расчета эпюры внутренних силовых факторов приведены на *рис.25 - 27*. Они с точностью до знака совпадают с ранее построенными эпюрами (*рис.19*).

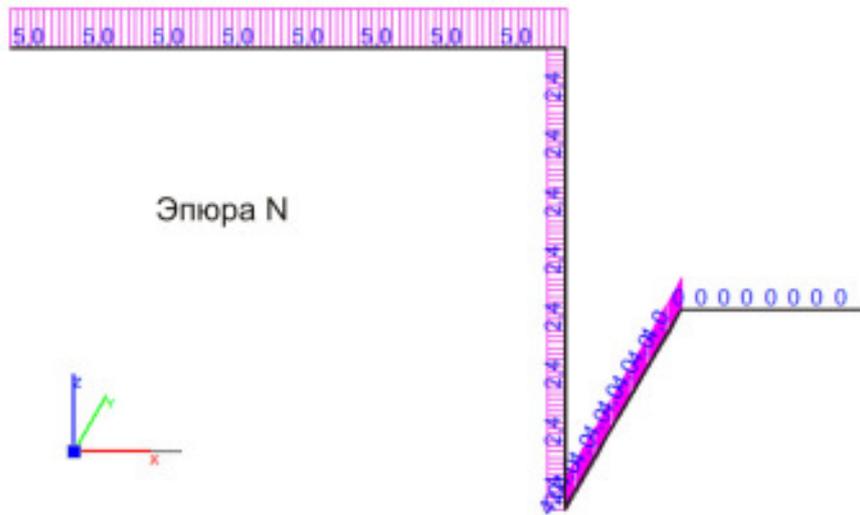


Рис.25

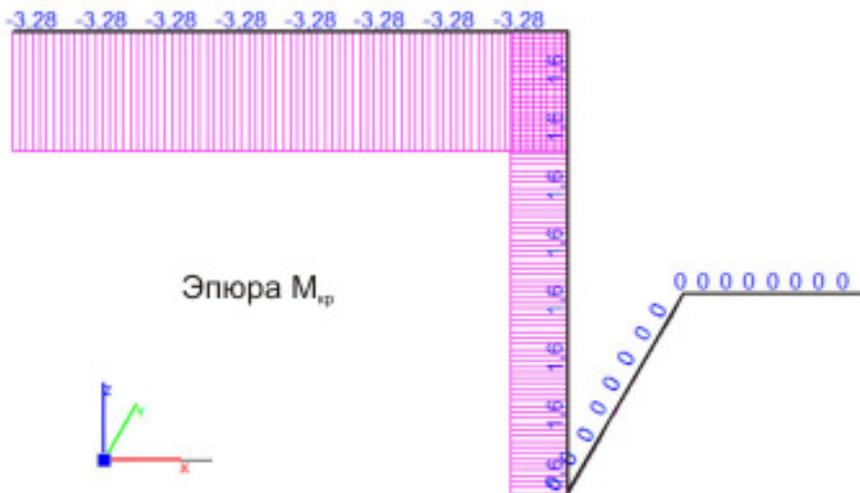


Рис.26

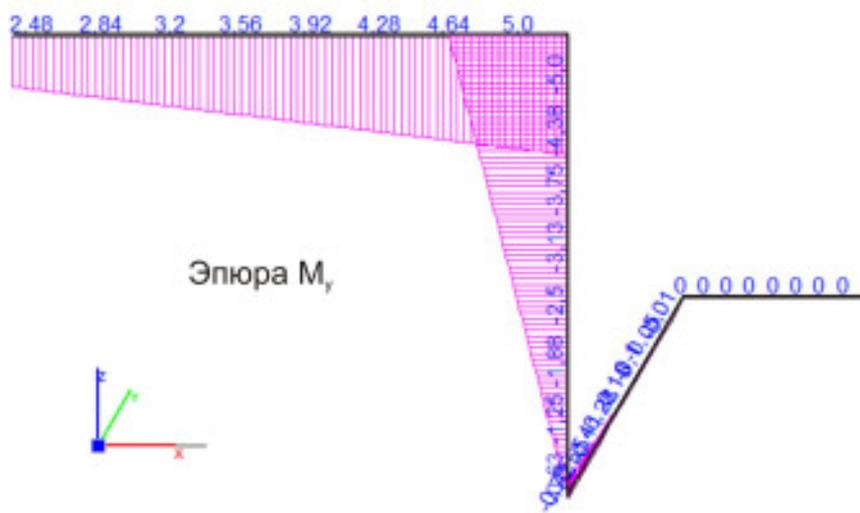


Рис.27

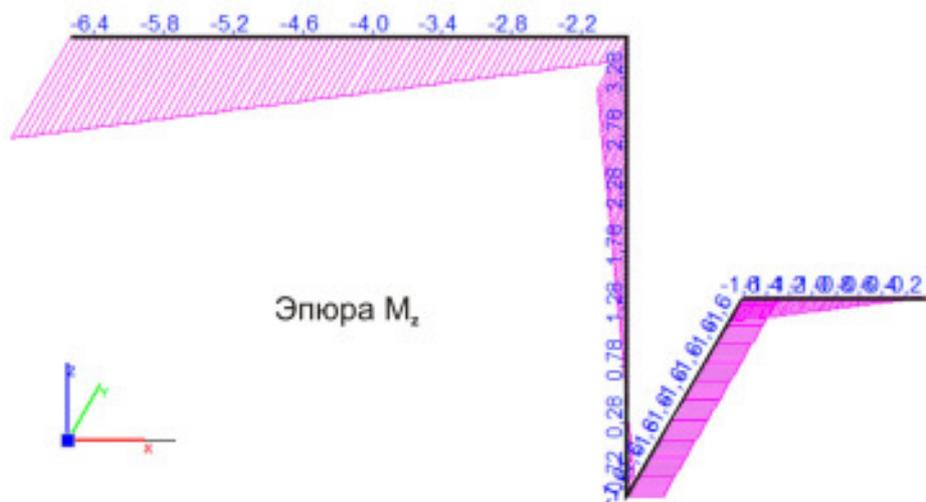
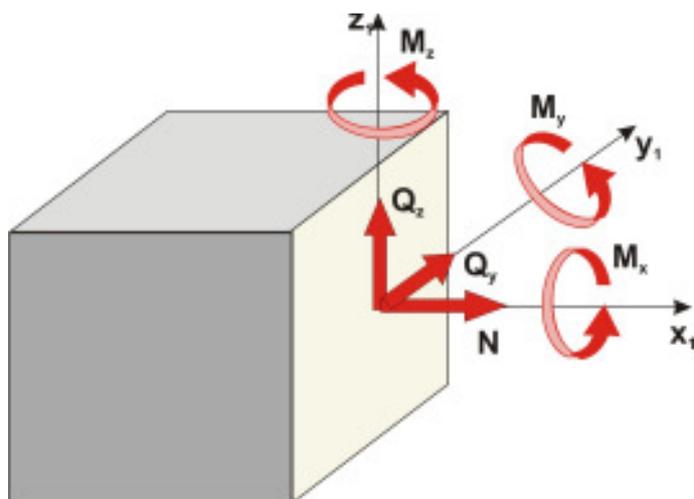


Рис.28

Усилия в стержнях выдаются в локальной (местной) прямоугольной системе координат  $x_1 y_1 z_1$ .



Усилия определяются на гибкой части элемента относительно главных осей инерции сечения, проведённого перпендикулярно продольной оси стержня. Положительные направления усилий в стержнях приняты следующими: для моментов  $M_x, M_y, M_z$  - против часовой стрелки, если смотреть с конца соответствующей оси  $x_1, y_1, z_1$ ; положительная продольная сила  $N$  всегда растягивает стержень (рис.29).

Рис.29

### 3.3.2. Расчет на прочность

**SCAD** имеет постпроцессор , предназначенный для проверки несущей способности стержневых элементов стальных конструкций в соответствии с требованиями СНиП II-23-81 «Стальные конструкции» (СНиП - Строительные нормы и правила), инструментальная панель которого представлена на рис.30.

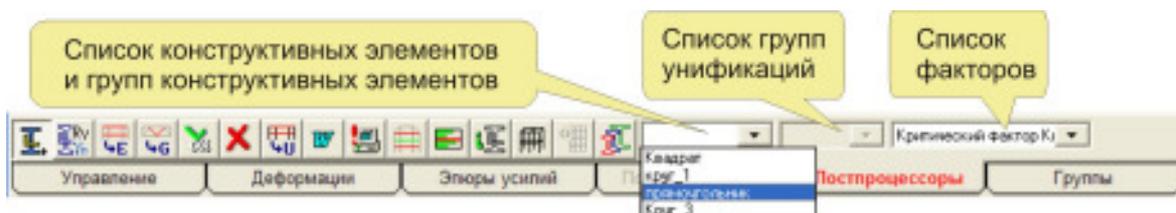


Рис.30

Инструментальная панель постпроцессора включает в себя следующие функции:



– установка параметров;



– назначение конструктивных элементов;



– назначение групп конструктивных элементов;



– подтверждение выбора конструктивных элементов;



– сброс установленного режима;



– назначение групп унификации;



– формирование отчета;



– активизация расчета (режим экспертизы сечений);



– визуализация результатов на схеме;



– визуализация результатов по выбранному конструктивному элементу или унифицированной группе;



– отображение расчетной схемы;



– состав группы конструктивных элементов;



– информация о подобранных сечениях элементов;



– подбор сечений.

Проверка несущей способности сечений выполняется для **конструктивных элементов**. Конструктивный элемент моделирует физически однородный элемент конструкции – стойку рамы, подкрановую (надкрановую) часть колонны, ригель, пояс фермы и т. д. Геометрическая длина конструктивного элемента равна сумме длин конечных элементов, его образующих.

В качестве конструктивного элемента рассматривается непрерывная цепочка стержневых конечных элементов, обладающая следующими свойствами:

- элементы, входящие в цепочку, лежат на одной прямой без разрывов (точность определяется параметром совпадения узлов);
- у всех элементов цепочки одинаковый тип жесткости;
- все конечные элементы цепочки имеют одинаковый тип;
- у всех элементов цепочки одинаково ориентированы главные оси поперечного сечения;
- элементы цепочки не имеют жестких вставок и шарниров (допускается только в начальном и конечном узлах цепочки);
- элементы цепочки могут входить только в один конструктивный элемент.

**Примечание.** Для всех элементов, входящих в состав конструктивных элементов, должны быть вычислены расчетные сочетания усилий (PCY).

По условию задания требовалось подобрать сплошные поперечные сечения участков бруса, которые, как мы знаем, не рациональны по расходу материала. Поэтому в данном разделе задания мы подберем трубчатые тонкостенные сечения той же формы, что и заданные сплошные сечения.

### Расчетные сочетания усилий

Загрузки									
Номер	Наименование	Тип	Объем кратковремен	Знакопеременные	Взаимоисключающие		Сопутствующие		
1		Постоянное	0	0	0	0	0	0	

Номер	Кэф. надежности	Доля длительности	Коэффициенты РСУ			Крановых	Тормозных	Удаление РСУ
			1 главн. 1	2 главн. 2	особое 3			
1	1.1	1	1	1	0.9	2	2	OK
								Отмена
								Справка

- ☰ Специальные исходные данные
  - Динамика
  - Моделирование нелинейных нагрузок
  - Комбинации загружений
  - Расчетные сочетания усилий
  - Главные и эквивалентные напряжения
  - Устойчивость
  - Нагрузки от фрагмента схемы
  - Использование результатов подбора сечений
  - Расчетные сочетания усилий (новые)
  - Прогрессирующее разрушение

### Расчет главных и эквивален...

Вид расчета

Главные напряжения по загружениям
  Главные напряжения по комбинациям загружений

Эквивалентные напряжения по загружениям
  Эквивалентные напряжения по комбинациям загружений

Теория прочности

Теория наибольших нормальных напряжений  
 Теория наибольших линейных деформаций  
 Теория наибольших касательных напряжений  
 Энергетическая теория Губера-Хенки-Мизеса

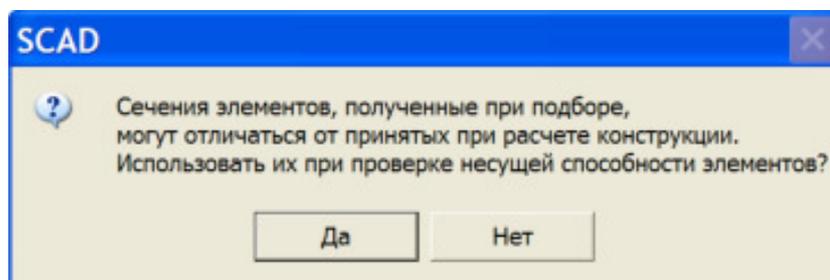
Рис.31

1. Нажимаем иконку  **Выйти в экран управления проектом.**
2. В главном окне конечно-элементного пакета **SCAD** открываем раздел **Специальные исходные данные** и активизируем в нем опции **Расчетные сочетания усилий** и **Главные и эквивалентные напряжения**. В результате появятся одноименные панели (рис.31). На панели **PCU** ничего не вводим, а только нажимаем клавишу **OK**, а на второй панели включаем радиокнопку **Теория наибольших касательных напряжений** и подтверждаем введенную информацию, нажимая на клавишу **OK**.
3. Последовательно из раздела **Расчет** выполняем **Линейный расчет**, **Расчетные сочетания усилий** и **Главные и эквивалентные напряжения**.
4. Переходим в раздел **Результаты** и активизируем опцию **Графический анализ**.
5. Нажатие клавиши **Постпроцессоры** приводит к появлению инструментальной панели,



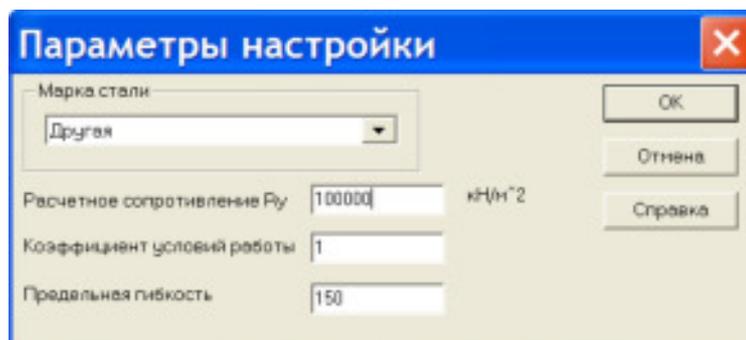
которая содержит функции анализа результатов работы постпроцессоров подбора арматуры в элементах железобетонных конструкций , расчета нагрузок от фрагмента схемы , результатов расчета главных и эквивалентных напряжений для пластинчатых элементов , проверки несущей способности стальных сечений , анализа и отображения результатов оценки энергетического вклада элементов конструкции в процесс потери устойчивости системы , передачи данных в систему проектирования фундаментов , прогрессирующее разрушение .

6. Нажимаем на иконку  **Проверка несущей способности стальных конструкций**. Появится форма



на которой следует нажать клавишу **Да**, после чего инструментальная панель проверки несущей способности стержневых элементов стальных конструкций (рис.30) станет активной.

7. Активизируем иконку  **Параметры настройки**, на которой выбираем марку стали, ориентируясь на её расчетное сопротивление.



По условию задания допускаемое напряжение для материала пространственного бруса  $[\sigma] = 100 \text{ МПа}$ .

В строительстве при расчетах на прочность используется методика расчета по предельным состояниям, разработанная под руководством проф. Н.С. Стрелецкого (1885-1967) и применяемая с 1955 года<sup>4</sup>. СНиП предусматривают две группы предельных состояний: по потере несущей способности или полной непригодности к эксплуатации и по непригодности к нормальной эксплуатации. При расчете на прочность по первой группе предельных состояний в случае растяжения стержня используется зависимость<sup>5</sup>

$$\sigma_{max} = \frac{\sum N_i^H \gamma_{fi}}{F} \leq \frac{R^H \gamma_c}{\gamma_M};$$

если  $\gamma_f = const$ , то

$$\frac{\sum N_i^H}{F} \leq \frac{R^H \gamma_c}{\gamma_M \gamma_f}. \quad (52)$$

Здесь  $N_i^H$  - продольная сила от  $i$ -й нормальной нагрузки;  $\gamma_{fi}$  - коэффициент надёжности по нагрузке для  $i$ -й нагрузки;  $R^H$  - нормативное сопротивление, основная характеристика сопротивления материалов силовым воздействиям (для пластичных материалов  $R^H = \sigma_T$ , для хрупких  $R^H = \sigma_B$ );  $\gamma_M$  - коэффициент надёжности по материалу, отражает статистическую изменчивость свойств материала;  $R^H / \gamma_M = R$  - расчетное сопротивление;  $\gamma_c$  - коэффициент условий работы, отражающий влияние температуры, агрессивности среды, степени отличия расчетной схемы от реальной конструкции и др.

Если в условии прочности (52)  $\frac{\gamma_M \gamma_f}{\gamma_c}$  заменить одним коэффициентом  $n$ , то получим условие прочности (5). В большинстве случаев при нормальных условиях работы  $\gamma_c = 1$  и  $\gamma_f = 1$ . Для того чтобы условия прочности по допускаемым напряжениям и предельным состояниям совпали, из ниспадающего списка сталей выберем «Другая», задав  $R = 100000 \text{ кН/м}^2$ .

8. Нажимаем иконку  Назначение конструктивных элементов и выбираем на схеме стержни, входящие в конструктивный элемент. В нашем случае конструктивными элементами являются участки пространственного бруса. Подтверждаем наш выбор нажатием кнопки **ОК** в инструментальной панели.

<sup>4</sup> Александров А.В., Потапов В.Д., Державин Б.П. Сопротивление материалов. – М.: Высш. шк., 1995. – 560 с.

<sup>5</sup> Ахметзянов М.Х., Лазарев И.Б. Сопротивление материалов. – Новосибирск, НИИЖТ, 1997. – 300 с.

Появляется диалоговое окно **Конструктивный элемент**. В этом окне задаются характеристики элемента: имя элемента, коэффициенты расчетной длины, а также данные, задаваемые в окне **Параметры настройки**. Коэффициенты расчетной длины являются множителями к геометрической длине конструктивного элемента и служат для определения расчетных длин конструктивного элемента (физически однородного стержня) в плоскостях главных осей поперечного сечения. С выбором некоторых из этих коэффициентов мы познакомимся несколько позднее при изучении раздела «Устойчивость сжатых стержней». При их назначении следует исходить из расстояния между точками закрепления элемента в реальной конструкции и характера этого закрепления (жесткая или упругая опора, препятствие угловым или линейным перемещениям). Методика определения этих коэффициентов указана в СНиП II-23-81. Так как с расчетами такого типа мы пока что не знакомы, коэффициенты расчетной длины принимаем равными: **2** - для участка, жестко заделанного на одном из торцов; **1,5** - для участка с одним свободным торцом; **0.75** - для остальных участков.

После ввода всех данных о конструктивном элементе, включая имя элемента, следует нажать кнопку **Добавить новый**. Перед включением нового конструктивного элемента в список конструктивных элементов, подлежащих проверке, выполняется контроль корректности назначения. Если в результате контроля обнаружено, что выбранные элементы не соответствуют перечисленным выше требованиям к конечным элементам, составляющим конструктивный элемент, то появляется диалоговое окно **Ошибки**.

9. После нажатия иконки  **Расчет** выполняется проверка несущей способности конструктивных элементов. Проверка выполняется для всех сечений элементов, входящих в конструктивный элемент, по каждому фактору РСУ. Результатом является наибольшее значение каждого фактора, определяющего несущую способность элемента. Реализован весь комплекс проверок по прочности и устойчивости в соответствии с разделом 5 СНиП II-23-81. Набор проверок определяется типом поперечного сечения элемента и комплектом действующих на него нагрузок.

Стержни проверяются по:

- прочности при действии продольной силы  $N$  ;
- устойчивости при сжатии в плоскостях  $xoz$  и  $xoy$  ;

- прочности при действии изгибающего момента  $M_y$  или  $M_z$ ;
- прочности при действии поперечной силы  $Q_z$  или  $Q_y$ ;
- прочности при совместном действии  $N$ ,  $M_y$  и  $M_z$ ;
- устойчивости в плоскости  $xoz$  или  $xoy$  при внецентренном сжатии;
- устойчивости из плоскости  $xoz$  или  $xoy$  при внецентренном сжатии;
- устойчивости плоской формы изгиба при действии момента  $M_y$ ;
- устойчивости при сжатии с двухосным эксцентриситетом.

### Обратите внимание:

в отличие от нашего предыдущего расчета, в котором мы учитывали только крутящий и изгибающие моменты, в SCAD реализован весь комплекс проверок по прочности и устойчивости в соответствии с разделом 5 СНиП II-23-81, а потому он более точен по сравнению с предыдущим расчетом.

Нажатие на иконку  **Расчет** приводит к активизации иконок  – формирование отчета;  – визуализация результатов на схеме;  – визуализация результатов по выбранному конструктивному элементу или унифицированной группе;  – информация о подобранных сечениях элементов;  – подбор сечений.

10. Проверим несущую способность созданного нами пространственного бруса. Если конструктивные элементы, отображаются зеленым цветом, то несущая способность конструктивных элементов достаточна, если красным цветом – то недостаточна.

Нажмем на иконку . Конструктивные элементы окрасятся, как показано на рис.32.

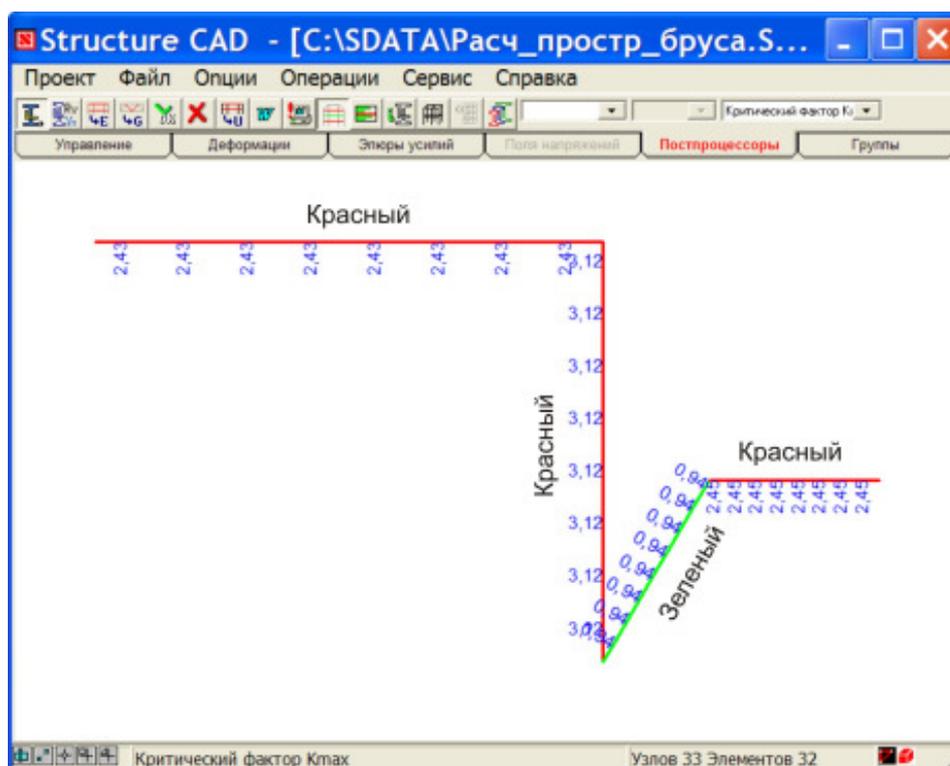
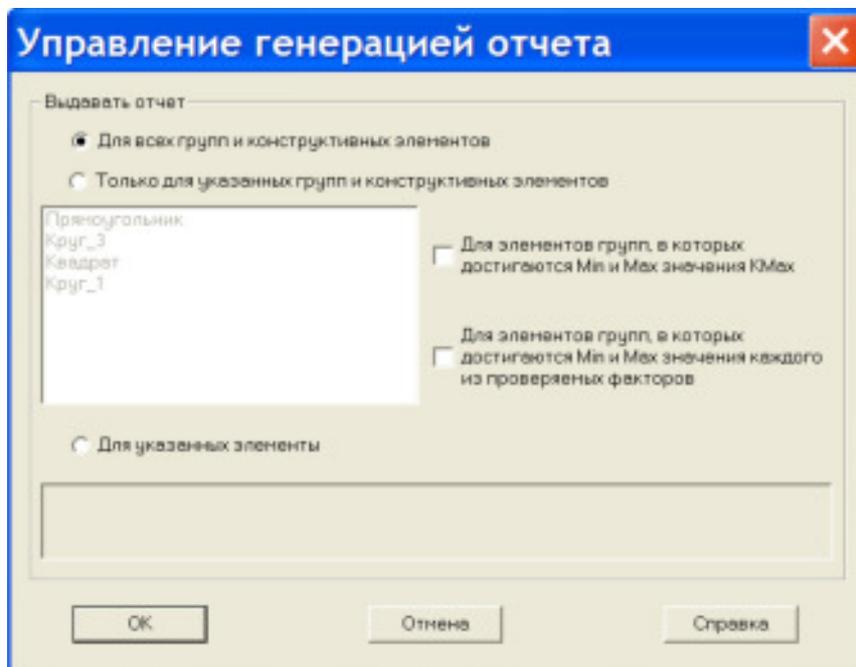


Рис.32

Таким образом, на первом, третьем и четвертом участках бруса его несущая способность не обеспечена.

По результатам подбора может быть сформирован отчет (иконка  **Отчет**). Отчет формируется в виде файла в формате **RTF**, который автоматически загружается в ассоциированное с этим форматом приложение. Если нажать иконку , то появится панель

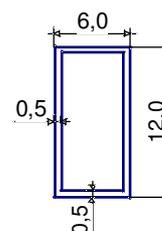


Нажимаем клавишу **OK**. В результате будет представлен следующий отчет.

## Проверка элементов стальных конструкций

### Конструктивный элемент Прямоугольник

Расчетное сопротивление стали  $R_y = 100000,0 \text{ кН/м}^2$   
 Коэффициент условий работы -- 1,0  
 Предельная гибкость -- 150,0  
 Коэффициент расчетной длины в плоскости X1,Y1 -- 2,0  
 Коэффициент расчетной длины в плоскости X1,Z1 -- 2,0  
 Длина элемента -- 1,2 м



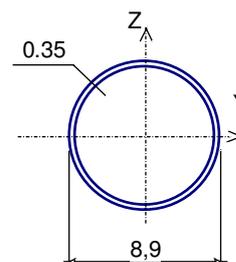
### Результаты расчета

Проверено по СНиП	Фактор	Коэффициенты использования :
п.5.12	прочность при действии изгибающего момента $M_y$	1,02
п.5.12	прочность при действии изгибающего момента $M_z$	1,96
пп.5.12,5.18	прочность при действии поперечной силы $Q_y$	0,14
пп.5.12,5.18	прочность при действии поперечной силы $Q_z$	0,05
пп.5.24,5.25	прочность при совместном действии продольной силы и изгибающих моментов без учета пластики	2,43
пп.6.15,6.16	предельная гибкость в плоскости X1,O,Y1	0,66
пп.6.15,6.16	предельная гибкость в плоскости X1,O,Z1	0,38

Коэффициент использования 2,43 - прочность при совместном действии продольной силы и изгибающих моментов без учета пластики

### Конструктивный элемент Круг\_3

Расчетное сопротивление стали  $R_y = 100000,0 \text{ кН/м}^2$   
 Коэффициент условий работы -- 1,0  
 Предельная гибкость -- 150,0  
 Коэффициент расчетной длины в плоскости  $X1, Y1$  -- 0,75  
 Коэффициент расчетной длины в плоскости  $X1, Z1$  -- 0,75  
 Длина элемента -- 1,0 м



**Сечение**  
 Трубы стальные бесшовные  
 горячедеформированные,  
 ГОСТ 8732-78 89х3.5

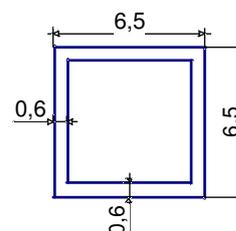
### Результаты расчета

Проверено по СНиП	Фактор	Коэффициенты использования :
п.5.12	прочность при действии изгибающего момента $M_y$	2, 59
п.5.12	прочность при действии изгибающего момента $M_z$	1, 7
пп.5.12,5.18	прочность при действии поперечной силы $Q_y$	0, 15
пп.5.12,5.18	прочность при действии поперечной силы $Q_z$	0, 18
пп.5.24,5.25	прочность при совместном действии продольной силы и изгибающих моментов без учета пластичности	3, 12
пп.6.15,6.16	предельная гибкость в плоскости $X1, O, Y1$	0, 17
пп.6.15,6.16	предельная гибкость в плоскости $X1, O, Z1$	0, 17

Коэффициент использования 3, 12 - прочность при совместном действии продольной силы и изгибающих моментов без учета пластичности

### Конструктивный элемент Квадрат

Расчетное сопротивление стали  $R_y = 100000,0 \text{ кН/м}^2$   
 Коэффициент условий работы -- 1,0  
 Предельная гибкость -- 150,0  
 Коэффициент расчетной длины в плоскости  $X1, Y1$  -- 0,75  
 Коэффициент расчетной длины в плоскости  $X1, Z1$  -- 0,75  
 Длина элемента -- 0,6 м



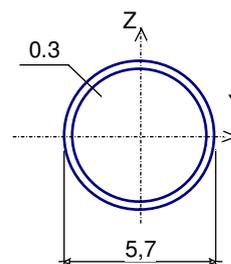
### Результаты расчета

Проверено по СНиП	Фактор	Коэффициенты использования :
п.5.12	прочность при действии изгибающего момента $M_y$	0, 28
п.5.12	прочность при действии изгибающего момента $M_z$	0, 63
пп.5.12,5.18	прочность при действии поперечной силы $Q_y$	0
пп.5.12,5.18	прочность при действии поперечной силы $Q_z$	0, 07
пп.5.24,5.25	прочность при совместном действии продольной силы и изгибающих моментов без учета пластичности	0, 94
пп.6.15,6.16	предельная гибкость в плоскости $X1, O, Y1$	0, 12
пп.6.15,6.16	предельная гибкость в плоскости $X1, O, Z1$	0, 12

Коэффициент использования 0, 94 - прочность при совместном действии продольной силы и изгибающих моментов без учета пластичности

## Конструктивный элемент Круг\_1

Расчетное сопротивление стали  $R_y = 100000,0 \text{ кН/м}^2$   
 Коэффициент условий работы -- 1,0  
 Предельная гибкость -- 150,0  
 Коэффициент расчетной длины в плоскости X1,Y1 -- 1,5  
 Коэффициент расчетной длины в плоскости X1,Z1 -- 1,5  
 Длина элемента -- 0,4 м



### Сечение

Трубы стальные бесшовные горячедеформированные, ГОСТ 8732-78 57х3

## Результаты расчета

Проверено по СНиП	Фактор	Коэффициенты использования :
п.5.12	прочность при действии изгибающего момента $M_y$	0
п.5.12	прочность при действии изгибающего момента $M_z$	<b>2,45</b>
пп.5.12,5.18	прочность при действии поперечной силы $Q_y$	0,27
пп.5.12,5.18	прочность при действии поперечной силы $Q_z$	0
пп.5.24,5.25	прочность при совместном действии продольной силы и изгибающих моментов без учета пластичности	<b>2,45</b>
пп.6.15,6.16	предельная гибкость в плоскости X1,O,Y1	0,21
пп.6.15,6.16	предельная гибкость в плоскости X1,O,Z1	0,21

Коэффициент использования 2,45 - прочность при совместном действии продольной силы и изгибающих моментов без учета пластичности

### 11. Подберем поперечные сечения, обеспечивающие несущую способность пространственного бруса.

Подбор сечений элементов выполняется в тех случаях, когда их поперечные сечения заданы из одиночных прокатных профилей. Подбор выполняется в рамках сортамента, принятого при начальном назначении сечений элементов, и только для указанного вида профиля. Это означает, что если в качестве профиля был выбран двутавр вида К, то и в результате подбора будет выбран аналогичный профиль (или будет сообщено, что из таких профилей сечение не удастся подобрать).

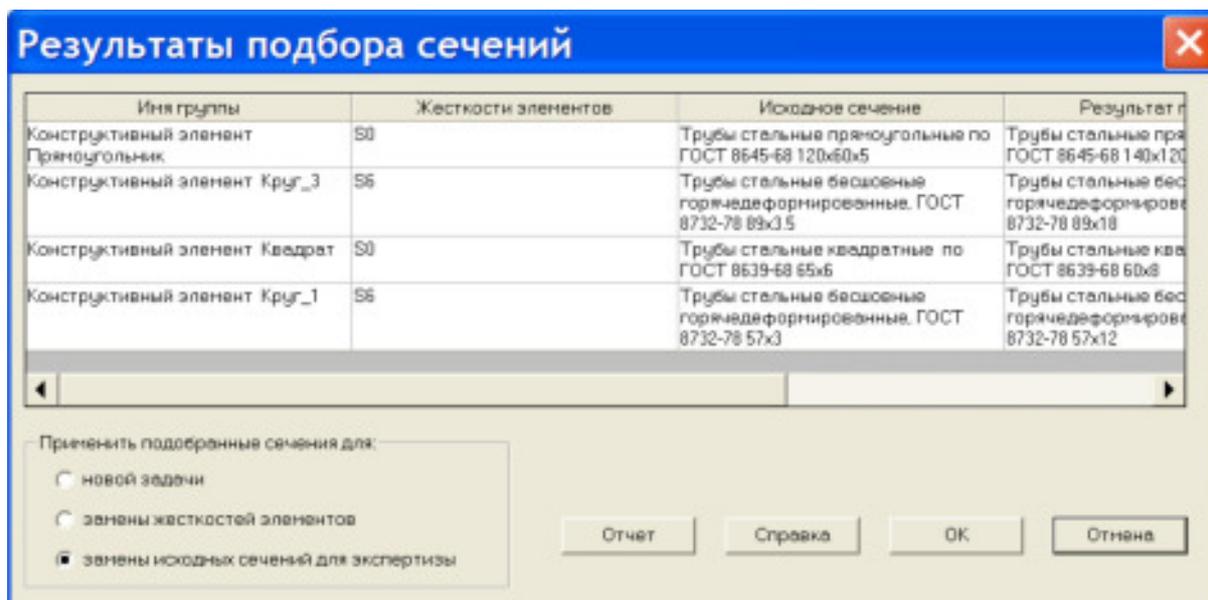
Результаты подбора отображаются в таблице диалогового окна **Результаты подбора сечений**. Если по результатам подбора сортament оказался исчерпан, а необходимая несущая способность не достигнута, то имя объекта выводится красным цветом и другая информация в таблице отсутствует.

По результатам подбора может быть принят один из трех вариантов продолжения работы:

- применить подобранные сечения для новой задачи;
- заменить жесткости элементов;
- заменить исходные сечения для экспертизы.

Выбор варианта осуществляется с помощью опций в диалоговом окне **Результаты подбора сечений**.

Щелчком по иконке  **Подбор сечений**. Появится панель



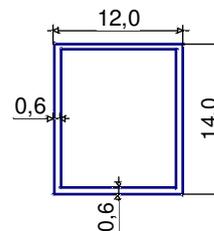
на которой будут представлены как исходные, так и заново подобранные сечения участков бруса. Анализ содержания колонок «Исходное сечение» и «Результат подбора» позволяет сделать заключение о их непротиворечивости: они не противоречат здравому смыслу и нашим предыдущим расчетам.

Выполним замену жесткостей элементов. Нажмем клавишу **OK**, иконку  и иконку  **Отчет**. Новый отчет о подобранных сечениях будет выглядеть так.

## Проверка элементов стальных конструкций

### Конструктивный элемент Прямоугольник

Расчетное сопротивление стали  $R_y = 100000,0 \text{ кН/м}^2$   
 Коэффициент условий работы -- 1,0  
 Предельная гибкость -- 150,0  
 Коэффициент расчетной длины в плоскости X1,Y1 -- 2,0  
 Коэффициент расчетной длины в плоскости X1,Z1 -- 2,0  
 Длина элемента -- 1,2 м



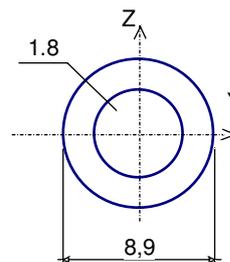
### Результаты расчета

Проверено по СНИП	Фактор	Коэффициенты использования :
п.5.12	прочность при действии изгибающего момента $M_y$	0,42
п.5.12	прочность при действии изгибающего момента $M_z$	0,59
пп.5.12,5.18	прочность при действии поперечной силы $Q_y$	0,06
пп.5.12,5.18	прочность при действии поперечной силы $Q_z$	0,03
пп.5.24,5.25	прочность при совместном действии продольной силы и изгибающих моментов без учета пластики	0,79
пп.6.15,6.16	предельная гибкость в плоскости X1,O,Y1	0,34
пп.6.15,6.16	предельная гибкость в плоскости X1,O,Z1	0,3

Коэффициент использования 0,79 - прочность при совместном действии продольной силы и изгибающих моментов без учета пластики.

### Конструктивный элемент Круг\_3

Расчетное сопротивление стали  $R_y = 100000,0 \text{ кН/м}^2$   
 Коэффициент условий работы -- 1,0  
 Предельная гибкость -- 150,0  
 Коэффициент расчетной длины в плоскости X1,Y1 -- 0,75  
 Коэффициент расчетной длины в плоскости X1,Z1 -- 0,75  
 Длина элемента -- 1,0 м



#### Сечение

Трубы стальные бесшовные  
 горячедеформированные,  
 ГОСТ 8732-78 89x18

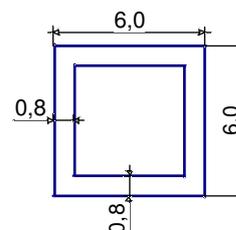
### Результаты расчета

Проверено по СНиП	Фактор	Коэффициенты использования :
п.5.12	прочность при действии изгибающего момента $M_y$	0,83
п.5.12	прочность при действии изгибающего момента $M_z$	0,54
пп.5.12,5.18	прочность при действии поперечной силы $Q_y$	0,03
пп.5.12,5.18	прочность при действии поперечной силы $Q_z$	0,04
пп.5.24,5.25	прочность при совместном действии продольной силы и изгибающих моментов без учета пластичности	0,99
пп.6.15,6.16	предельная гибкость в плоскости X1,O,Y1	0,19
пп.6.15,6.16	предельная гибкость в плоскости X1,O,Z1	0,19

Коэффициент использования 0,99 - прочность при совместном действии продольной силы и изгибающих моментов без учета пластичности.

### Конструктивный элемент Квадрат

Расчетное сопротивление стали  $R_y = 100000,0 \text{ кН/м}^2$   
 Коэффициент условий работы -- 1,0  
 Предельная гибкость -- 150,0  
 Коэффициент расчетной длины в плоскости X1,Y1 -- 0,75  
 Коэффициент расчетной длины в плоскости X1,Z1 -- 0,75  
 Длина элемента -- 0,6 м



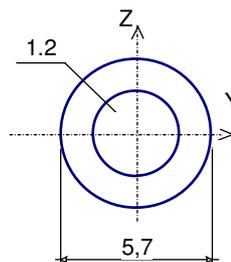
### Результаты расчета

Проверено по СНиП	Фактор	Коэффициенты использования :
п.5.12	прочность при действии изгибающего момента $M_y$	0,28
п.5.12	прочность при действии изгибающего момента $M_z$	0,63
пп.5.12,5.18	прочность при действии поперечной силы $Q_y$	0
пп.5.12,5.18	прочность при действии поперечной силы $Q_z$	0,06
пп.5.24,5.25	прочность при совместном действии продольной силы и изгибающих моментов без учета пластичности	0,93
пп.6.15,6.16	предельная гибкость в плоскости X1,O,Y1	0,14
пп.6.15,6.16	предельная гибкость в плоскости X1,O,Z1	0,14

Коэффициент использования 0,93 - прочность при совместном действии продольной силы и изгибающих моментов без учета пластичности.

## Конструктивный элемент Круг\_1

Расчетное сопротивление стали  $R_y = 100000,0 \text{ кН/м}^2$   
 Коэффициент условий работы -- 1,0  
 Предельная гибкость -- 150,0  
 Коэффициент расчетной длины в плоскости  $X1, Y1$  -- 1,5  
 Коэффициент расчетной длины в плоскости  $X1, Z1$  -- 1,5  
 Длина элемента -- 0,4 м



### Сечение

Трубы стальные бесшовные горячедеформированные, ГОСТ 8732-78 57x12

Проверено по СНИП	Результаты расчета Фактор	Коэффициенты использования :
п.5.12	прочность при действии изгибающего момента $M_y$	0
п.5.12	прочность при действии изгибающего момента $M_z$	0,99
пп.5.12,5.18	прочность при действии поперечной силы $Q_y$	0,08
пп.5.12,5.18	прочность при действии поперечной силы $Q_z$	0
пп.5.24,5.25	прочность при совместном действии продольной силы и изгибающих моментов без учета пластики	0,99
пп.6.15,6.16	предельная гибкость в плоскости $X1, O, Y1$	0,24
пп.6.15,6.16	предельная гибкость в плоскости $X1, O, Z1$	0,24

Коэффициент использования 0,99 - прочность при совместном действии продольной силы и изгибающих моментов без учета пластики.

Информация о результатах подбора доступна лишь во время работы режима

**Подбор** . Если после выхода из этого режима для каких-либо целей потребуется вновь рассмотреть результаты подбора, то следует воспользоваться кнопкой . Эта операция позволяет получить сопоставительную информацию о сечении конструктивных элементов или групп до и после подбора. Данные выводятся в таблице в диалоговом окне **Сопоставление жесткостей**.

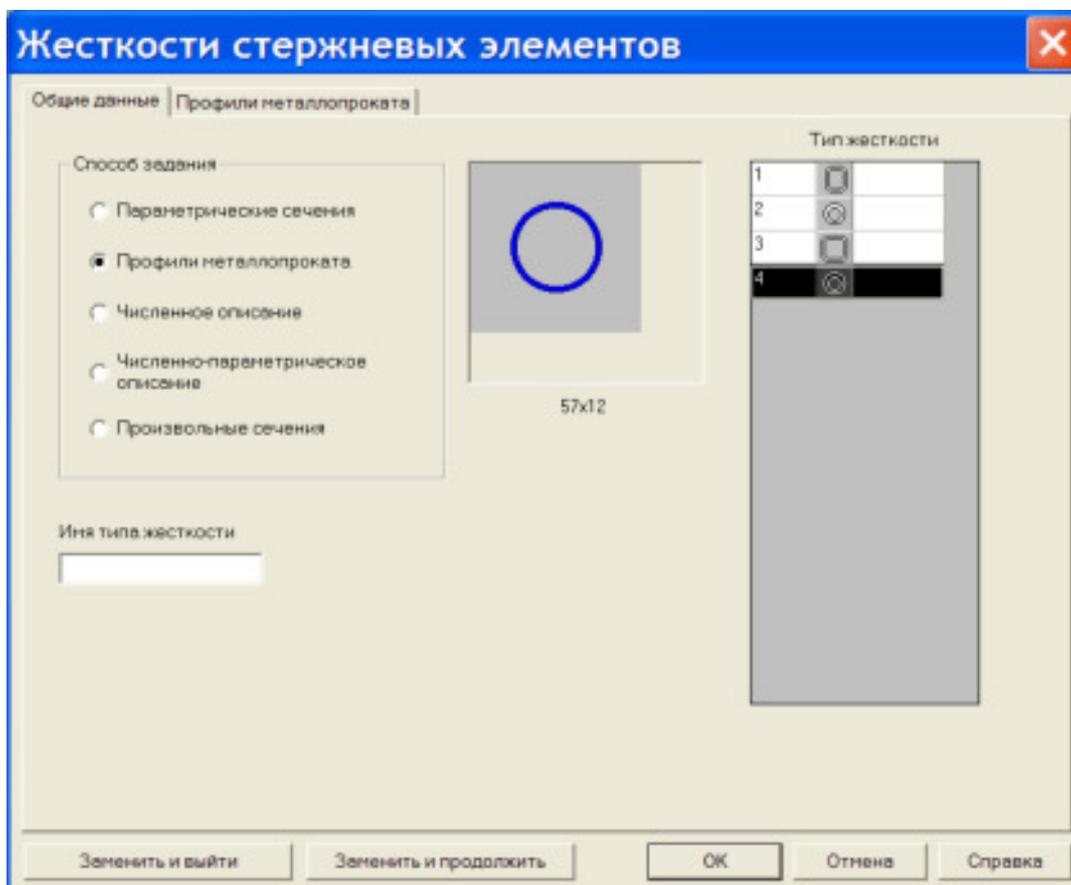
A	Имя группы	Жесткости элементов	Исходное сечение	Результат подбора
1	Конструктивный элемент Прямоугольник	Трубы стальные прямоугольные по ГОСТ 8645-68 140x120x6	Трубы стальные прямоугольные по ГОСТ 8645-68 140x120x6	
2	Конструктивный элемент Круг_3	Трубы стальные бесшовные горячедеформированные, ГОСТ 8732-78 89x18	Трубы стальные бесшовные горячедеформированные, ГОСТ 8732-78 89x18	
3	Конструктивный элемент Квадрат	Трубы стальные квадратные по ГОСТ 8639-68 60x8	Трубы стальные квадратные по ГОСТ 8639-68 60x8	
4	Конструктивный элемент Круг_1	Трубы стальные бесшовные горячедеформированные, ГОСТ 8732-78 57x12	Трубы стальные бесшовные горячедеформированные, ГОСТ 8732-78 57x12	

Восстановить исходные жесткости    Восстановить исходные сечения    Применить подобранные сечения

Выход    Справка

### 3.3.3. Геометрические характеристики подобранных сечений

В разделе **Назначение** активизируем иконку  **Назначение жесткостей стержням**, что приведёт к появлению формы **Жесткости стержневых элементов**, в окне **Тип жесткости** которой выбираем соответствующее сечение и нажимаем клавишу **Профили металлопроката**.



На изменившей вид форме **Жесткости стержневых элементов** нажимаем клавишу **Характеристики сечений**. Появится панель с изображением сечения и таблицей его геометрических характеристик (рис. 33, 34).

### 3.3.4. Оценка прочности подобранных сечений по стандартной методике сопротивления материалов

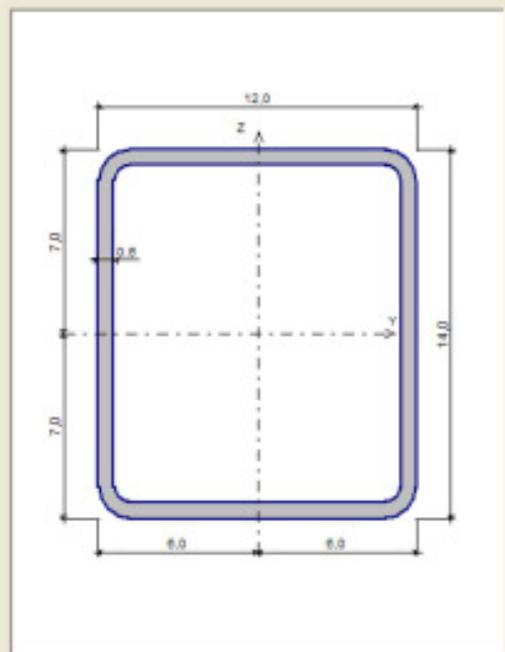
Используя данные таблиц геометрических характеристик подобранных сечений, повторим в MathCAD расчеты, выполненные в разделе 3.2.2.

$$\begin{aligned}
 \text{Участок 1} \quad M_{z1\max} &:= 1.6 \cdot 10^3 \quad D_1 := 0.057 \quad d_1 := 0.033 \quad \alpha_1 := \frac{d_1}{D_1} \\
 F_1 &:= 16.96 \cdot 10^{-4} \quad W_1 := \frac{\pi \cdot D_1^3}{32} \cdot (1 - \alpha_1^4) \quad W_1 = 1.6139 \times 10^{-5} \\
 \sigma_{x1\max} &:= \frac{M_{z1\max}}{W_1} \quad \sigma_{x1\max} = 9.9141 \times 10^7
 \end{aligned}$$

## Инерционные и геометрические характеристики сечения



Имя базы профилей	Полный каталог профилей ГОСТ..
Имя профиля	Трубы стальные прямоугольные по ГОСТ 8645-68 140x
Модуль упругости E	206010000.0 кН/м <sup>2</sup>
Объемный вес	77.01 кН/м <sup>3</sup>
Коэффициент Пуассона	0.3
EF	609313.11 кН
Ely	1704.32 кН <sup>2</sup> /м <sup>2</sup>
Elz	1340.92 кН <sup>2</sup> /м <sup>2</sup>
Gkpr	840.99 кН <sup>2</sup> /м <sup>2</sup>
GFy	149190.24 кН
GFz	139502.56 кН
Y1	3.7228 см
Y2	3.7228 см
Z1	4.0558 см
Z2	4.0558 см
b	12.0 см
h	14.0 см
s	0.6 см
Площадь сечения	29.14 см <sup>2</sup>
Iy	827.3 см <sup>4</sup>
Iz	650.9 см <sup>4</sup>
Ikp	1061.3943 см <sup>4</sup>



OK

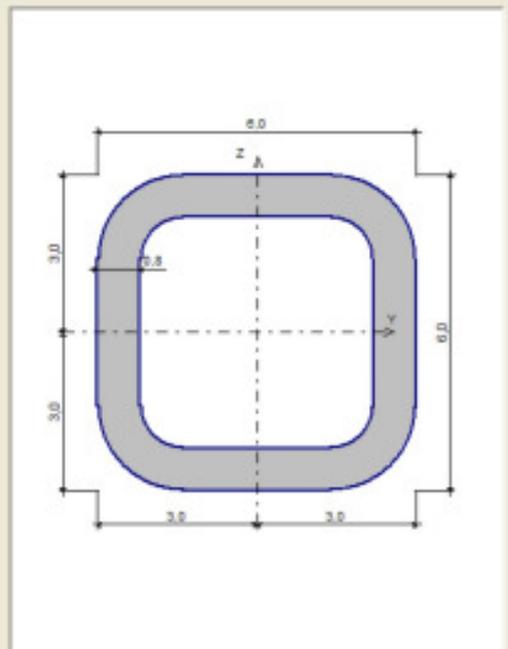
Отмена

Справка

## Инерционные и геометрические характеристики сечения



Имя базы профилей	Полный каталог профилей ГОСТ..
Имя профиля	Трубы стальные квадратные по ГОСТ 8639-68 60x8
Модуль упругости E	206010000.0 кН/м <sup>2</sup>
Объемный вес	77.01 кН/м <sup>3</sup>
Коэффициент Пуассона	0.3
EF	342594.62 кН
Ely	158.13 кН <sup>2</sup> /м <sup>2</sup>
Elz	158.13 кН <sup>2</sup> /м <sup>2</sup>
Gkpr	85.51 кН <sup>2</sup> /м <sup>2</sup>
GFy	82497.7 кН
GFz	82497.7 кН
Y1	1.5386 см
Y2	1.5386 см
Z1	1.5386 см
Z2	1.5386 см
b	6.0 см
h	6.0 см
s	0.8 см
Площадь сечения	16.63 см <sup>2</sup>
Iy	76.76 см <sup>4</sup>
Iz	76.76 см <sup>4</sup>
Ikp	107.9221 см <sup>4</sup>



OK

Отмена

Справка

Рис.33

### Инерционные и геометрические характеристики сечения

Имя базы профилей	Полный каталог профилей ГОСТ..
Имя профиля	Трубы стальные бесшовные горячедеформированные
Модуль упругости E	206010000.0 кН/м <sup>2</sup>
Объёмный вес	77.01 кН/м <sup>3</sup>
Коэффициент Пуассона	0.3
EF	826701.64 кН
E <sub>yx</sub>	565.0 кН/м <sup>2</sup>
E <sub>yz</sub>	565.0 кН/м <sup>2</sup>
G <sub>кр</sub>	417.23 кН/м <sup>2</sup>
GF <sub>y</sub>	186584.38 кН
GF <sub>z</sub>	186584.38 кН
Y1	1.5358 см
Y2	1.5358 см
Z1	1.5358 см
Z2	1.5358 см
b	8.9 см
h	8.9 см
s	1.8 см
Площадь сечения	40.1292 см <sup>2</sup>
I <sub>y</sub>	274.2588 см <sup>4</sup>
I <sub>z</sub>	274.2588 см <sup>4</sup>
I <sub>кр</sub>	526.5768 см <sup>4</sup>

OK      Отмена      Справка

### Инерционные и геометрические характеристики сечения

Имя базы профилей	Полный каталог профилей ГОСТ..
Имя профиля	Трубы стальные бесшовные горячедеформированные
Модуль упругости E	206010000.0 кН/м <sup>2</sup>
Объёмный вес	77.01 кН/м <sup>3</sup>
Коэффициент Пуассона	0.3
EF	349310.55 кН
E <sub>yx</sub>	96.52 кН/м <sup>2</sup>
E <sub>yz</sub>	96.52 кН/м <sup>2</sup>
G <sub>кр</sub>	71.27 кН/м <sup>2</sup>
GF <sub>y</sub>	79563.25 кН
GF <sub>z</sub>	79563.25 кН
Y1	0.9695 см
Y2	0.9695 см
Z1	0.9695 см
Z2	0.9695 см
b	5.7 см
h	5.7 см
s	1.2 см
Площадь сечения	16.956 см <sup>2</sup>
I <sub>y</sub>	46.8504 см <sup>4</sup>
I <sub>z</sub>	46.8504 см <sup>4</sup>
I <sub>кр</sub>	89.9528 см <sup>4</sup>

OK      Отмена      Справка

Рис.34

Участок 2       $N_2 := 4 \cdot 10^3$        $M_{2y} := 0.72 \cdot 10^3$        $M_{2z} := 1.6 \cdot 10^3$   
 $z_{2\max} := 0.03$        $y_{2\max} := 0.03$        $F_2 := 16.63 \cdot 10^{-4}$   
 $J_{2y} := 76.76 \cdot 10^{-8}$        $W_2 := \frac{J_{2y}}{z_{2\max}}$        $W_2 = 2.5587 \times 10^{-5}$   
 $\sigma_{x2\max} := \frac{N_2}{F_2} + \frac{M_{2y}}{W_2} + \frac{M_{2z}}{W_2}$        $\sigma_{x2\max} = 9.3078 \times 10^7$

Участок 3       $D_3 := 0.089$        $d_3 := 0.053$        $\alpha_3 := \frac{d_3}{D_3}$   
 $N_3 := 2.4 \cdot 10^3$        $M_{3y} := 5 \cdot 10^3$        $M_{3z} := 3.28 \cdot 10^3$        $M_{3кр} := 1.6 \cdot 10^3$   
 $F_3 := 40.13 \cdot 10^{-4}$        $W_3 := \frac{\pi \cdot D_3^3}{32} \cdot (1 - \alpha_3^4)$        $W_3 = 6.0506 \times 10^{-5}$   
+  
 $\sigma_{x3\max} := \sqrt{\left( \frac{\sqrt{M_{3y}^2 + M_{3z}^2} + N_3}{W_3} + \frac{M_{3кр}}{W_3} \right)^2} + \frac{M_{3кр}^2}{W_3^2}$        $\sigma_{x3\max} = 1.0288 \times 10^8$

Участок 4       $h := 0.14$        $b := 0.12$        $\delta := 0.006$   
 $N_4 := 5 \cdot 10^3$        $M_{4y} := 2.12 \cdot 10^3$        $M_{4z} := 6.4 \cdot 10^3$        $M_{4кр} := 3.28 \cdot 10^3$   
 $F_4 := 29.14 \cdot 10^{-4}$        $F_{4кр} := (h - 2 \cdot \delta) \cdot (b - 2 \cdot \delta)$        $F_{4кр} = 0.0138$   
 $J_{4y} := 827.3 \cdot 10^{-8}$        $J_{4z} := 650.9 \cdot 10^{-8}$        $W_{4y} := \frac{2 \cdot J_{4y}}{h}$        $W_{4z} := \frac{2 \cdot J_{4z}}{b}$   
 $\sigma_{x4\max\_A} := \sqrt{\left( \frac{M_{4z}}{W_{4z}} + \frac{N_4}{F_4} \right)^2 + \frac{M_{4кр}^2}{(F_{4кр} \cdot \delta)^2}}$        $\sigma_{x4\max\_A} = 7.2454 \times 10^7$   
 $\sigma_{x4\max\_B} := \frac{N_4}{F_4} + \frac{M_{4y}}{W_{4y}} + \frac{M_{4z}}{W_{4z}}$        $\sigma_{x4\max\_B} = 7.8649 \times 10^7$   
 $\sigma_{x4\max\_C} := \sqrt{\left( \frac{M_{4y}}{W_{4y}} + \frac{N_4}{F_4} \right)^2 + \frac{M_{4кр}^2}{(F_{4кр} \cdot \delta)^2}}$        $\sigma_{x4\max\_C} = 4.4159 \times 10^7$

Методика определения напряжений на четвертом участке требует пояснений.

На четвертом участке **SCAD** подобрал стальную тонкостенную трубу прямоугольного поперечного сечения. Брус считается тонкостенным, если толщина стенки  $\delta$  существенно меньше его прочих линейных размеров. Определяющим для учета влияния тонкостенности профиля является параметр

$$v = J_{min} / J_k,$$

где  $J_{min}$  - минимальный момент инерции сечения на изгиб;  $J_k$  - геометрическая жесткость сечения стержня на кручение.

При малых  $\nu$  ( $\nu \leq 3$ ) следует использовать обычную теорию изгиба и кручения, при больших  $\nu$  - учитывать дополнительные эффекты, связанные с тонкостенностью стержня.

Линия, делящая толщину сечения пополам, называется средней линией, или контуром сечения, размеры сечения задаются по этой линии.

При кручении тонкостенного бруса его поперечные сечения деформируются, т.е. не остаются плоскими. Если ничто не препятствует свободной деформации сечений, кручение называется чистым, или свободным. В противном случае кручение называется стесненным. При стесненном кручении в отличие от свободного в поперечных сечениях, кроме касательных напряжений, возникают также нормальные напряжения.

При свободном кручении тонкостенного бруса замкнутого контура касательные напряжения определяются по формуле

$$\tau = \frac{M_k}{2F_k \delta}, \quad (53)$$

где  $F_k$  - площадь фигуры, ограниченной средней линией сечения.

При постоянной толщине  $\delta$  сечения  $\tau$  во всех его точках одинаковы по величине. В сечении переменной толщины наибольшее  $\tau$  действует там, где сечение тоньше:

$$\tau_{max} = \frac{M_k}{2F_k \delta_{min}}.$$

На четвертом участке касательные напряжения рассчитывались по формуле (53), в которой  $F_k = (h - 2\delta) \cdot (b - 2\delta)$ .

Как показал расчет, на всех участках пространственного бруса максимальные напряжения не превышают допустимых (это первый, второй и четвертый участки) или незначительно превышают допустимые напряжения (третий участок)

$$\frac{103 - 100}{100} \cdot 100\% = 3\% < 5\%,$$

но это перенапряжение не превышает 5%.

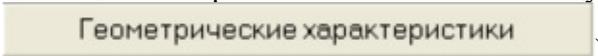
Исследуем распределение нормальных напряжений в поперечных сечениях, вычисляемых в SCAD. Для этого откроем программный продукт **Конструктор сечений**, в котором последовательно будем задавать сечения и нагрузки, действующие в этом сечении (рис.35).

**Шаг 1.** Нажимаем клавишу **Выбор элемента** на форме **Элемент сечения**. Откроется панель **Выбор элемента**.

**Шаг 2.** В окне просмотра графической информации выбираем профиль металлопроката из полного каталога профилей ГОСТ. Выбранный профиль появится в окне просмотра формы **Элемент сечения**.

**Шаг 3.** Нажимаем клавишу **Поставить**. Выбранный профиль появляется в окне просмотра формы **Конструктор сечения**. Если возникнет необходимость проверить геометрические характеристики профиля сечения, то следует активизировать кнопку



. Появится панель **Элемент сечения**, с помощью которой можно вывести таблицу геометрических характеристик (клавиша ) или посмотреть внешний вид и геометрические размеры сечения.

**Шаг 4.** Активизируем иконку  **Поля напряжений**. Появится панель **Усилия в сечении**, в полях ввода которой задаём величины внутренних силовых факторов и затем нажимаем кнопку ОК. Для того чтобы величины напряжений были удобными

таемы, в главном меню необходимо выбрать раздел **Настройки** и на появившейся панели задать соответствующие установки.

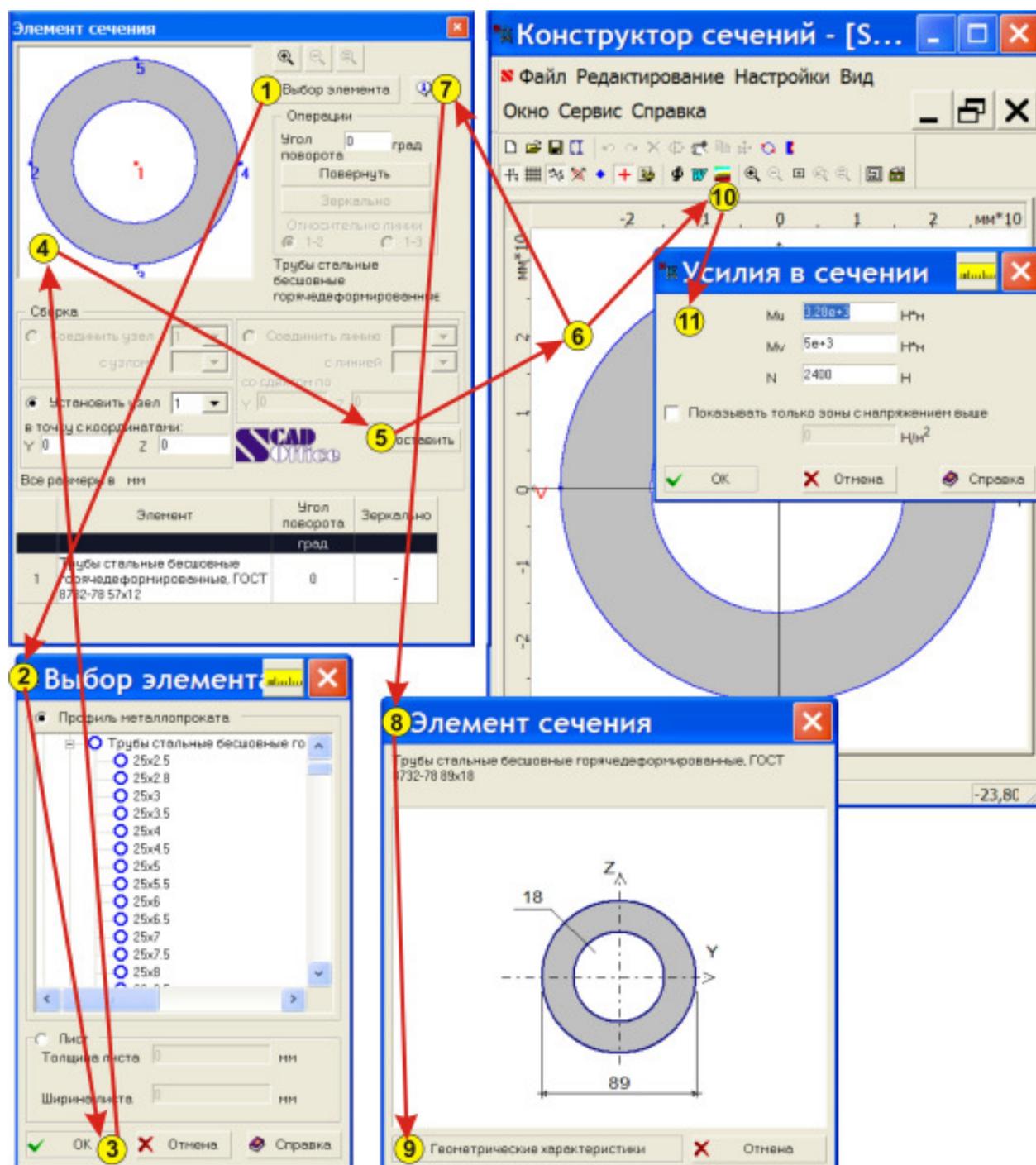


Рис.35

На рис. 36 - 39 приведены распределения напряжений в опасных сечениях первого, второго, третьего и четвертого участков.

Максимальные напряжения на первом участке согласуются с ранее вычисленными значениями.

На втором участке мы получили величину максимальных нормальных напряжений  $\sigma_{x2max} = 9.3078 \cdot 10^7$ . На рис.37 максимальные напряжения  $\sigma_{x2max} = 7.807 \cdot 10^7$ .

Несовпадение значений максимальных нормальных напряжений вызвано следующим обстоятельством. В расчете мы рассматривали нескругленное поперечное сечение. Прокатный профиль трубы квадратного поперечного сечения имеет скругление радиусом **16** мм, это легко установить на изображении поперечного сечения, если совместить указатель курсора с точкой, в которой напряжения максимальны. В информационной панели в правом нижнем углу появятся координаты точки в системе координат, изображенной на рисунке.

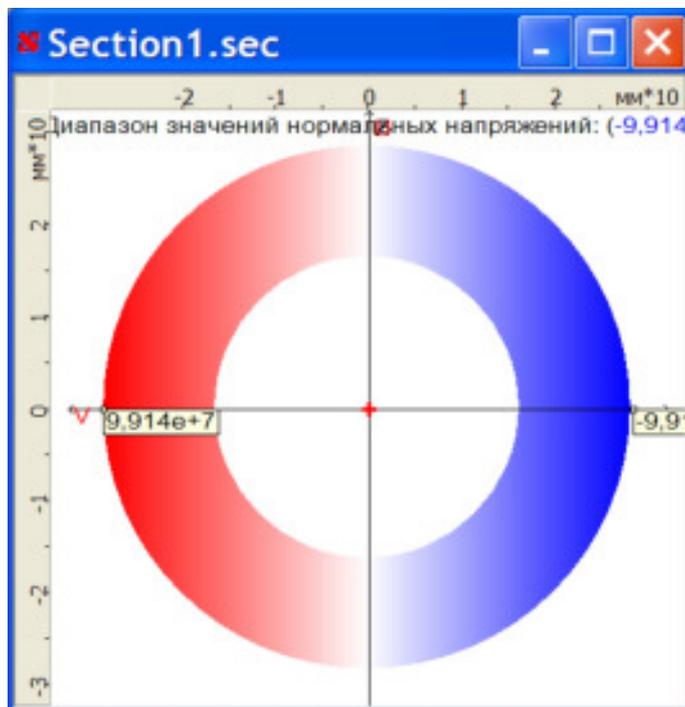


Рис.36

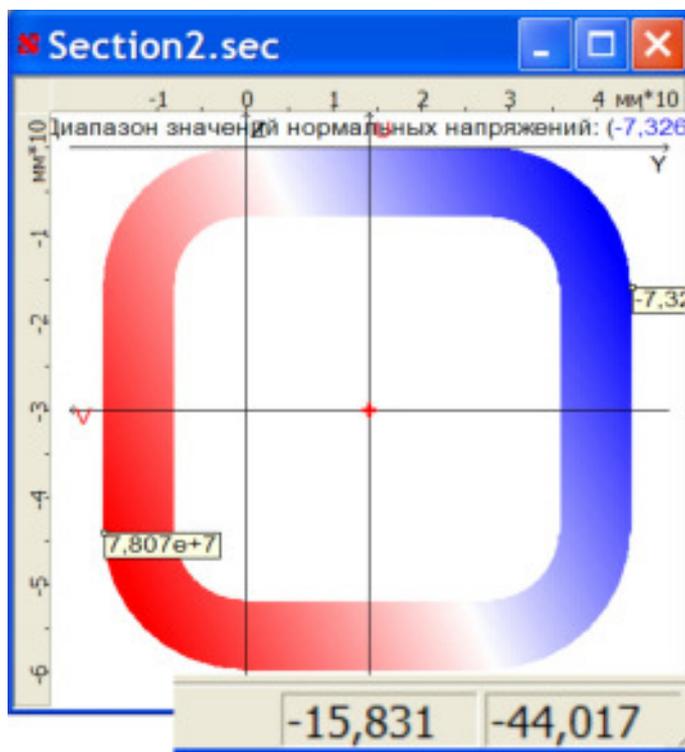


Рис.37

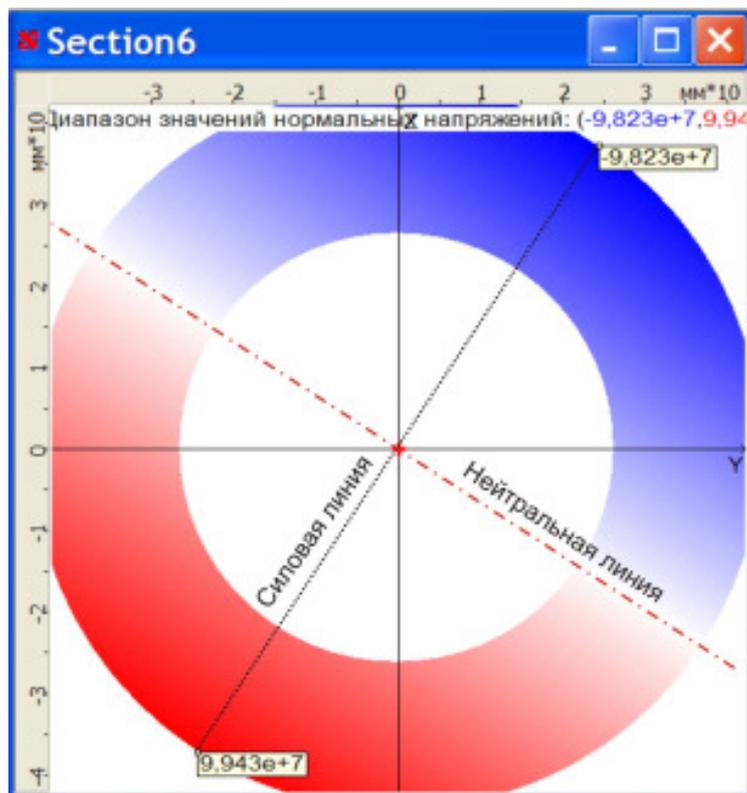


Рис. 38

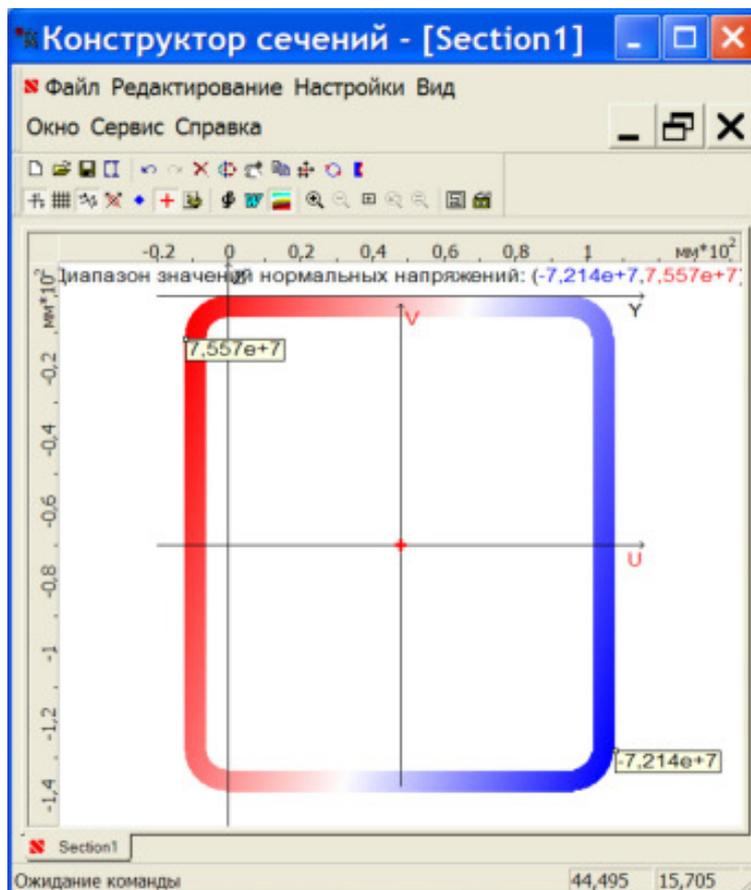


Рис.39

Следовательно, при вычислении нормальных напряжений от момента  $M_y$  необходимо в формулу подставить  $z = 0.03 - 0.016$ . В этом случае

$$W_{2y} := \frac{J_{2y}}{z_{2\max} - 0.016}$$

$$\sigma_{x2\max} := \frac{N_2}{F_2} + \frac{M_{2y}}{W_{2y}} + \frac{M_{2z}}{W_2} \quad \sigma_{x2\max} = 7.807 \times 10^7$$

**Конструктор сечений** выдаёт только максимальные нормальные напряжения. Поэтому на третьем участке можно проверить величину первого слагаемого под радикалом в формуле для  $\sigma_{x3\max}$ :

$$\frac{\sqrt{M_{3y}^2 + M_{3z}^2}}{W_3} + \frac{N_3}{F_3} = 9.9428 \times 10^7$$

Как следует из *рис.38*, они совпадают, следовательно, можно считать, что численные значения напряжения, вычисленные в **MathCAD** и **SCAD**, так же совпадают.

Для того чтобы совместить точки **5** и **3**, образующие контур поперечного сечения бруса на этом участке, определяем направление силовой плоскости  $\beta = \arctg(M_{3z} / M_{3y}) = 33,2649$  и поворачиваем сечение в направлении хода часовой стрелки на этот угол.

На четвертом участке в точке **B** для нескруглённого сечения реализуется линейное напряженное состояние; по расчету в **MathCAD**  $\sigma_{x4\max\_B} = 7.8649 \cdot 10^7$ . На *рис.38* в начале скругления  $\sigma_{x4\max\_B} = 7.557 \cdot 10^7$ . Учтем скругление углов поперечного сечения бруса:

$$W_{4y} := \frac{2 \cdot J_{4y}}{h - 2 \cdot 0.012}$$

$$\sigma_{x4\max\_B} := \frac{N_4}{F_4} + \frac{M_{4y}}{W_{4y}} + \frac{M_{4z}}{W_{4z}} \quad \sigma_{x4\max\_B} = 7.5574 \times 10^7$$

$$\sigma_{x4\min\_B} := \frac{N_4}{F_4} - \frac{M_{4y}}{W_{4y}} - \frac{M_{4z}}{W_{4z}} \quad \sigma_{x4\min\_B} = -7.2142 \times 10^7$$

Таким образом, и на этом участке величины вычисленных нормальных напряжений совпадают.

### 3.3.5. Определение перемещений поперечных сечений бруса

Определим вертикальные перемещения границ участков пространственного бруса.

Как и в **SCAD** за положительные направления линейных перемещений  $u$ ,  $v$  и  $w$  примем положительные направления соответствующих осей  $x$ ,  $y$  и  $z$ . Для угловых перемещений  $\varphi_x$ ,  $\varphi_y$  и  $\varphi_z$  в качестве положительного принят поворот против

хода часовой стрелки вокруг соответствующей оси, если смотреть с ее конца (рис.40, в скобках указаны обозначения линейных и угловых перемещений, принятые в **SCAD**).

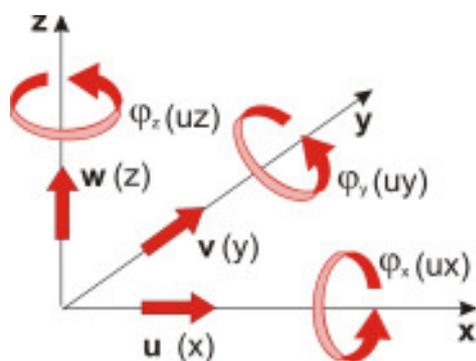


Рис.40

В соответствии с методом Мора на границах участков приложим единичные силовые факторы  $P_i = 1$  ( $i = A, B, C, D$ ), направленные в отрицательном направлении оси  $z$ , и для каждого из них в **SCAD** построим эпюры  $N_1$ ,  $M_{1y}$ ,  $M_{1z}$  и  $M_{1кр}$  (на рис.41 приведены эпюры для единичной силы, приложенной в точке **A**).

Грузовые эпюры приведены на рис.25-28.

При вычислении интегралов Мора знаки моментов  $M_{1y}$ ,  $M_{1z}$ ,  $M_{1кр}$ ,  $M_{Py}$ ,  $M_{Pz}$  и  $M_{Pкр}$  будем брать с эпюр, построенных в **SCAD** (эти знаки совпадают со знаками аналогичных величин, вычисленных нами в **MathCAD**).

Все вычисления выполним в системе **MathCAD**. Так как большинство эпюр очерчены прямыми линиями, то при вычислении интегралов Мора будем использовать метод Верещагина.

Зададим жесткостные характеристики поперечных сечений участков бруса, вычисленные **SCAD** (рис.33, 34) и характерные ординаты грузовых и единичных эпюр. Трапеции представим в виде двух треугольников. Значение внутреннего силового фактора, соответствующего правой стороне трапеции, обозначим буквой  $p$ , левой – буквой  $L$ .

Исходные данные	$L_1 := 0.4$	$L_2 := 0.6$	$L_3 := 1$	$L_4 := 1.2$
$EF_1 := 349.31 \cdot 10^6$	$EF_2 := 342.59 \cdot 10^6$	$EF_3 := 826.70 \cdot 10^6$		
$EF_4 := 600.31 \cdot 10^6$	$EJ_{y1} := 96.52 \cdot 10^3$	$EJ_{y2} := 158.13 \cdot 10^3$		
$EJ_{y3} := 565.00 \cdot 10^3$	$EJ_{y4} := 1704.32 \cdot 10^3$	$EJ_{z1} := 96.52 \cdot 10^3$		
$EJ_{z2} := 158.13 \cdot 10^3$	$EJ_{z3} := 565.00 \cdot 10^3$	$EJ_{z4} := 1340.92 \cdot 10^3$		
$GJ_{кр1} := 71.27 \cdot 10^3$	$GJ_{кр2} := 85.51 \cdot 10^3$	$GJ_{кр4} := 417.23 \cdot 10^3$		
$GJ_{кр4} := 840.99 \cdot 10^3$				

$N_{P2} := 2.4 \cdot 10^3$	$N_{12} := 1$	$M_{крP4} := -3.28 \cdot 10^3$	$M_{кр14} := 0.6$
$M_{yP2} := -0.72 \cdot 10^3$	$M_{y12} := -0.6$	$M_{yP3} := -5 \cdot 10^3$	$M_{y13} := 0.4$
$M_{yP4p} := 5 \cdot 10^3$	$M_{yP4L} := 2.12 \cdot 10^3$	$M_{y14p} := -0.4$	$M_{y14L} := -1.6$
$M_{zP3p} := -0.72 \cdot 10^3$	$M_{zP3L} := 3.28 \cdot 10^3$		$M_{z13} := -0.6$

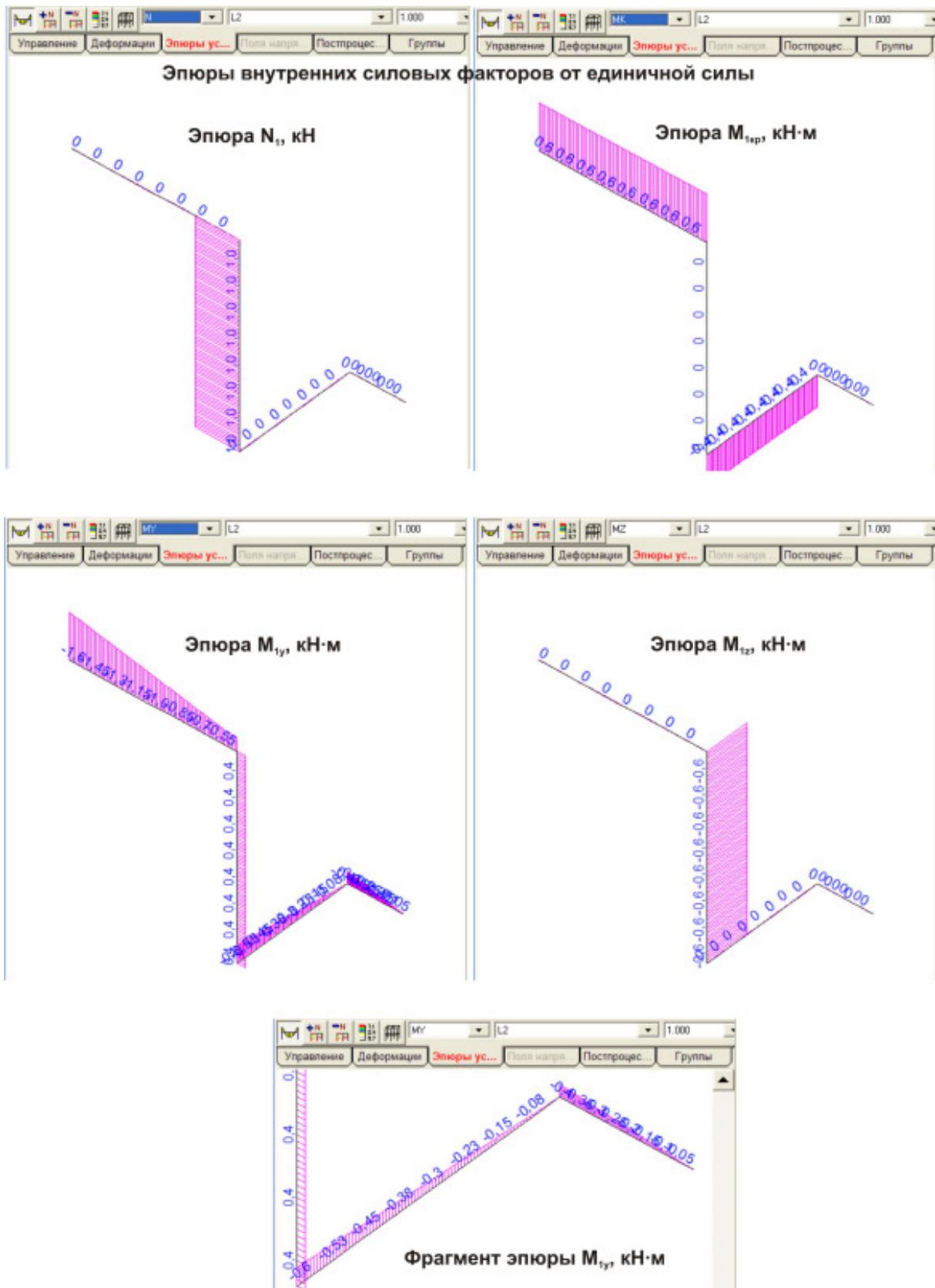


Рис. 41

Вертикальное перемещение точки D

$$M_{D1} := -1.2$$

$$\Delta_D := \frac{1}{EJ_{y4}} \cdot \frac{L_4}{2} \cdot \left( M_{yP4p} \cdot \frac{1}{3} \cdot M_{D1} + M_{yP4L} \cdot \frac{2}{3} \cdot M_{D1} \right) \quad \Delta_D = -1.3012 \times 10^{-3}$$

Знак минус у величины  $\Delta_D$  означает, что перемещение направлено вверх, в сторону, обратную направлению единичной силы.

Вертикальное перемещение точки B

$$M_{B1y4} := -L_4 \quad N_{B13} := 1 \quad M_{B1kp} := L_2 \quad M_{B1y2} := -L_2$$

$$\Delta_N := \frac{1}{EF_3} \cdot N_{P2} \cdot N_{B13} \cdot L_3 \quad \Delta_N = 2.9031 \times 10^{-6}$$

$$\Delta_{By} := \frac{1}{EJ_{y4}} \cdot \frac{L_4}{2} \cdot \left( M_{yP4p} \cdot \frac{1}{3} \cdot M_{B1y4} + M_{yP4L} \cdot \frac{2}{3} \cdot M_{B1y4} \right) \dots$$

$$+ \frac{1}{EJ_{y2}} \cdot \frac{1}{3} \cdot L_2 \cdot M_{yP2} \cdot \frac{3}{4} \cdot M_{B1y2}$$

$$\Delta_{By} = -8.9137 \times 10^{-4}$$

$$\Delta_{Bkp} := \frac{1}{GJ_{kp4}} \cdot L_4 \cdot M_{kpP4} \cdot M_{B1kp} \quad \Delta_{Bkp} = -2.8081 \times 10^{-3}$$

$$\Delta_{Mz} := \frac{1}{EJ_{z3}} \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot L_3 \cdot M_{zP3L} \cdot M_{z13} + \frac{1}{2} \cdot L_3 \cdot M_{zP3p} \cdot M_{z13} \right)$$

$$\Delta_{Mz} = -1.3593 \times 10^{-3}$$

$$\Delta_B := \Delta_N + \Delta_{By} + \Delta_{Bkp} + \Delta_{Mz} \quad \Delta_B = -5.0559 \times 10^{-3}$$

Вертикальное перемещение точки A

$$\Delta_N := \frac{1}{EF_3} \cdot N_{P2} \cdot N_{12} \cdot L_3 \quad \Delta_N = 2.9031 \times 10^{-6} \quad +$$

$$\Delta_{Mkp} := \frac{1}{GJ_{kp4}} \cdot M_{kpP4} \cdot M_{kp14} \cdot L_4 \quad \Delta_{Mkp} = -2.8081 \times 10^{-3}$$

$$\Delta_{My} := \frac{1}{EJ_{y2}} \cdot \frac{1}{3} \cdot L_2 \cdot M_{yP2} \cdot \frac{3}{4} \cdot M_{y12} + \frac{1}{EJ_{y3}} \cdot \frac{1}{2} \cdot L_3 \cdot M_{yP3} \cdot M_{y13} \dots$$

$$+ \frac{1}{EJ_{y4}} \cdot \frac{L_4}{6} \cdot \left( 2 \cdot M_{yP4p} \cdot M_{y14p} + 2 \cdot M_{yP4L} \cdot M_{y14L} \dots \right)$$

$$\left( + M_{yP4p} \cdot M_{y14L} + M_{yP4L} \cdot M_{y14p} \right)$$

$$\Delta_{My} = -3.6639 \times 10^{-3}$$

$$\Delta_{Mz} := \frac{1}{EJ_{z3}} \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot L_3 \cdot M_{zP3L} \cdot M_{z13} + \frac{1}{2} \cdot L_3 \cdot M_{zP3p} \cdot M_{z13} \right)$$

$$\Delta_{Mz} = -1.3593 \times 10^{-3}$$

$$\Delta := \Delta_N + \Delta_{Mкр} + \Delta_{My} + \Delta_{Mz} \qquad \Delta = -7.8284 \times 10^{-3}$$

На *рис.42* приведены недеформированная и деформированная оси бруса, глобальная и локальные системы координат (включены соответствующие фильтры) и компоненты векторов перемещений границ участков пространственного бруса после замены жесткостей участков и повторного расчета.

Вертикальные перемещения границ участков бруса, точек **A, B, C, D** соответствуют компоненте **w** вектора перемещения. Сопоставление значений этой компоненты со значениями, вычисленными нами в системе MathCAD, позволяет сделать заключение о правильности наших вычислений.

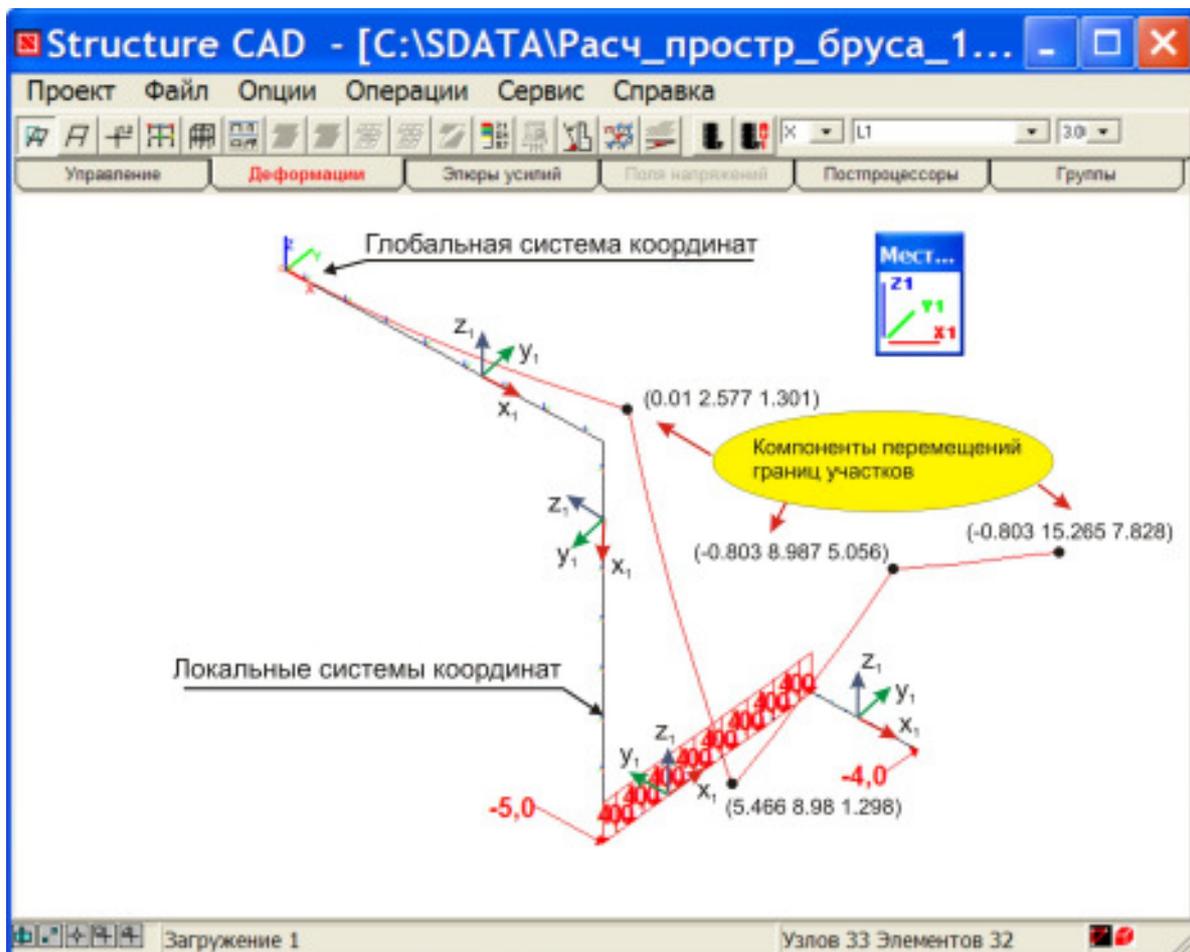


Рис.42

### 3.4. Расчет пространственного бруса в программном комплексе Patran-2005

#### 3.4.1. Создание конечно-элементной модели бруса

1. Запускаем систему **MSC.Patran**.
2. В главном меню нажимаем кнопку **File New**, в открывшейся форме **New Database** задаём имя новой базы данных и нажимаем клавишу **OK**.
3. Одновременно с текущим окном просмотра графических символов **MSC.Patran** появится форма **New Model Preference**, на которой устанавливаются все коды специфических форм и опций внутри MSC.Patran (рис.43).

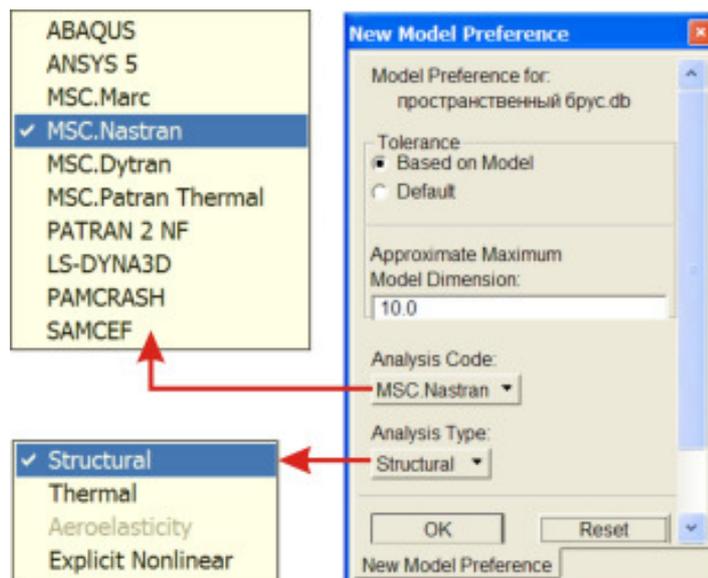


Рис.43

На этой форме установите:

*Tolerance:* **Based on Model**  
*Analysis Code:* **MSC.Nastran**  
*Analysis Type:* **Structural**  
**OK**

4. Определяем настройки пользователя. Из главного меню выбираем комплект зависимых форм (рис.44).

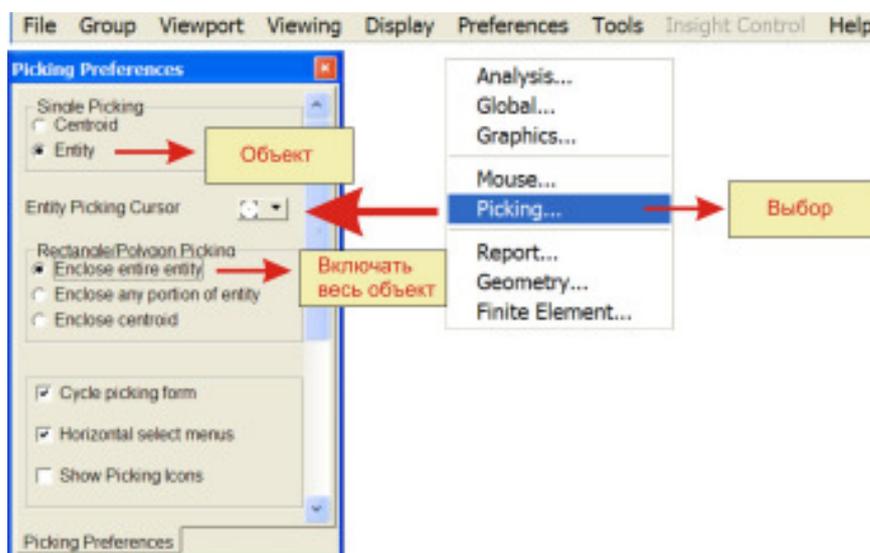


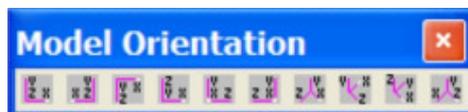
Рис.44

## Preferences / Picking...

Single Picking:  
Rectangle / Polygon Picking:  
Close

Entity  
Enclose entire entity

5. При построении пространственного бруса сначала целесообразно перейти к изометрическому представлению бруса. Для этого на форме **Ориентация моделей**



активизируем иконку  **Iso 2 View**.

6. Создаём геометрию пространственного бруса. Щелкаем левой клавишей мыши по приложению **Geometry** (рис.45).

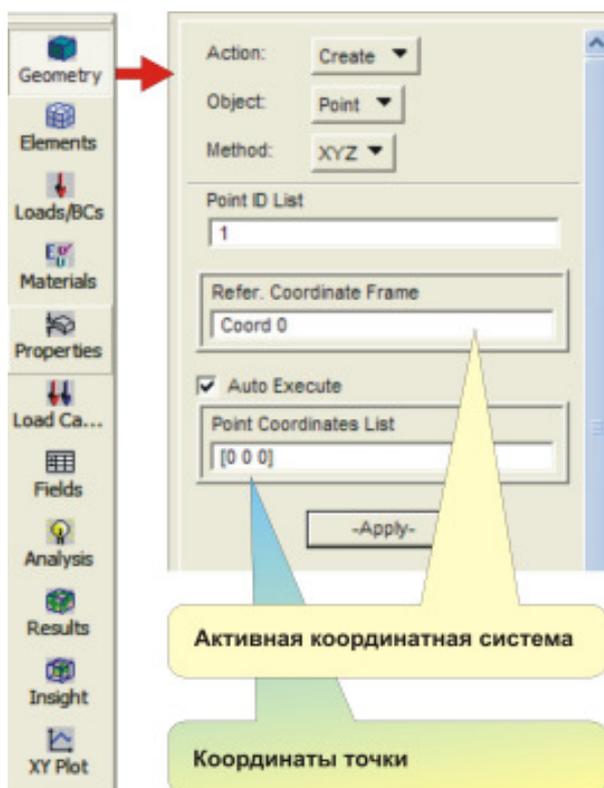


Рис.45

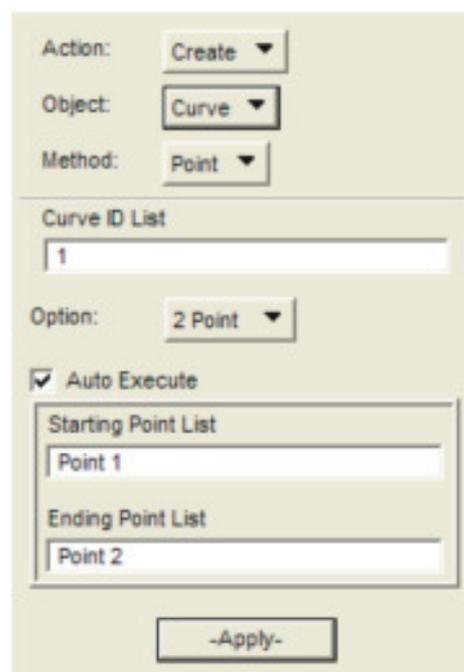


Рис.46

7. В открывшейся одноименной панели активизируем команды (рис.46):

Action: **Create**  
Object: **Point**  
Method: **XYZ**

8. В поле **Point Coordinates List** вводим координаты первого узла и нажимаем клавишу **Apply**. Для того чтобы контролировать положение введенных точек, активизируем кнопку  «**Положение точек**». Операцию повторяем до тех пор, пока не будут введены координаты всех узлов.

9. На панели **Geometry** щелкаем по клавише **Point** и активизируем опцию **Curve**. Панель **Geometry** примет вид, изображенный на рис.46.

10. Последовательно щелкая по стартовой и конечной точкам, соединяем их линиями. В результате получим изображение пространственного бруса (рис.47).

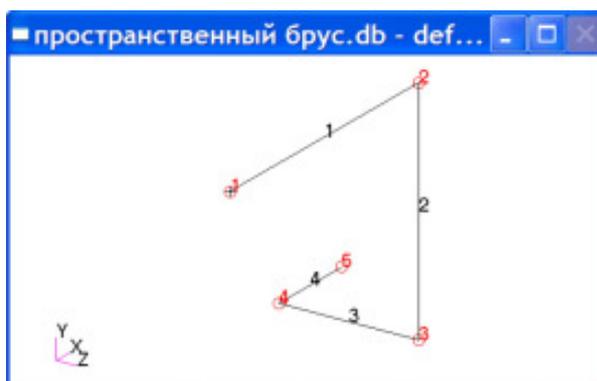


Рис.47

11. Для создания конечно-элементной сетки открываем приложение **Elements** и на появившейся форме **Finite Elements** для каждого из участков бруса задаём число элементов (число элементов на участках принимаем равным одной десятой их длины).

Для первого участка вводим:

<i>Action:</i>	<b>Create</b>
<i>Object:</i>	<b>Mesh Seed</b>
<i>Type:</i>	<b>Uniform</b>
<i>Number:</i>	<b>12</b>
<i>Curve List:</i>	<b>List 1</b>

**Apply**

Если переключатель Auto Execute включен, то нажимать на клавишу Apply не надо

Для всех остальных участков повторяем перечисленные выше действия. В результате в окне отображения графической информации пространственный брус будет выглядеть так, как показано на рис.48.

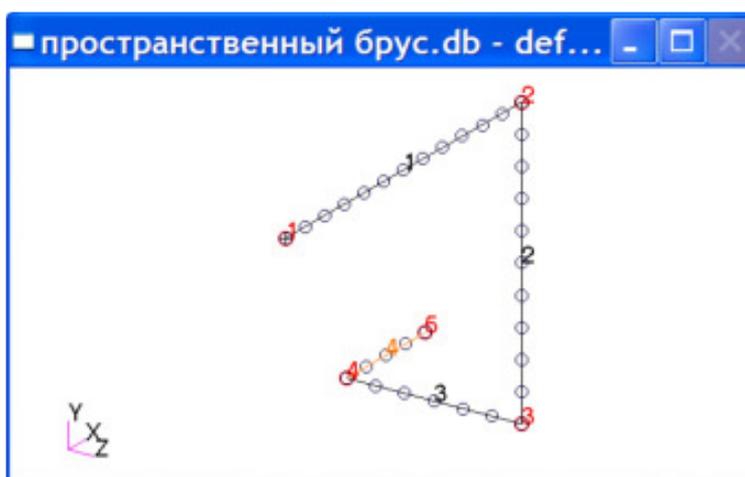


Рис.48

Создаём конечно-элементную сетку:

<i>Action:</i>	<b>Create</b>
<i>Object:</i>	<b>Mesh</b>
<i>Type:</i>	<b>Curve</b>
<i>Topology:</i>	<b>Bar 2</b>
<i>Curve List:</i>	<b>List 1</b>

**Apply**

Для всех остальных участков повторяем перечисленные действия.

Для удаления совпадающих узлов выполнить операцию **Equivalence**.

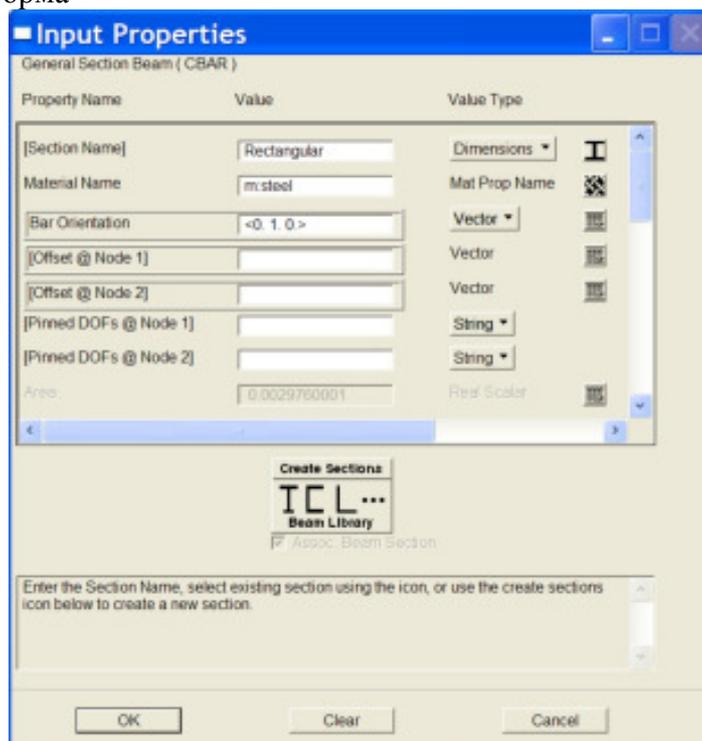
12. Задаём свойства материала бруса такие же, как в **SCAD**: модуль продольной упругости  $2.0601 \cdot 10^{11}$  Па, коэффициент Пуассона **0.3**. Открываем форму приложения **Materials**, нажимая клавишу . На форме **Materials** задаём:

<i>Action:</i>	<b>Create</b>
<i>Object:</i>	<b>Isotropic</b>
<i>Method:</i>	<b>Manual Input</b>
<i>Material Name:</i>	<b>Steel</b>
<b>Input Properties...</b>	
<i>Constitutive Model:</i>	<b>Linear Elastic</b>
<i>Elastic Modulus:</i>	<b>2.0601e11</b>
<i>Poisson's Ratio:</i>	<b>0.3</b>
<i>Density:</i>	
<b>OK</b>	
<b>Apply</b>	

13. Определяем свойства элементов. Сечения участков бруса назначаем такие, какие получились в программном продукте **SCAD**. Открываем форму приложения **Properties**, т.е. щелкаем по кнопке . На появившейся панели **Element Properties** задаём:

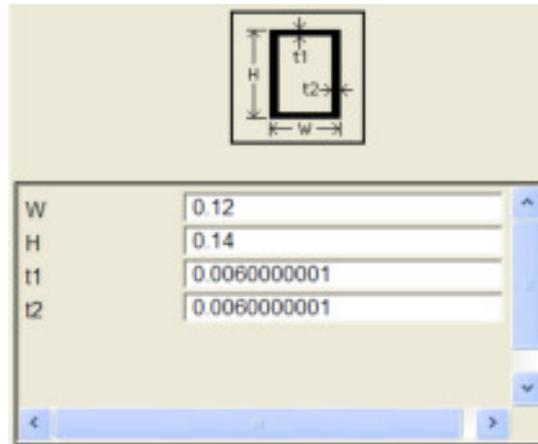
<i>Action:</i>	<b>Create</b>
<i>Object:</i>	<b>1D</b>
<i>Type:</i>	<b>Beam</b>
<i>Property Set Name:</i>	<b>Rectangular</b>
<i>Options:</i>	<b>General Section</b>
	<b>Standard Formulation</b>
<b>Input Properties...</b>	

Появится форма





Щёлкаем по кнопке **ICL... Beam Library** и задаём сечение **Rectangular**  
*Section Name:*

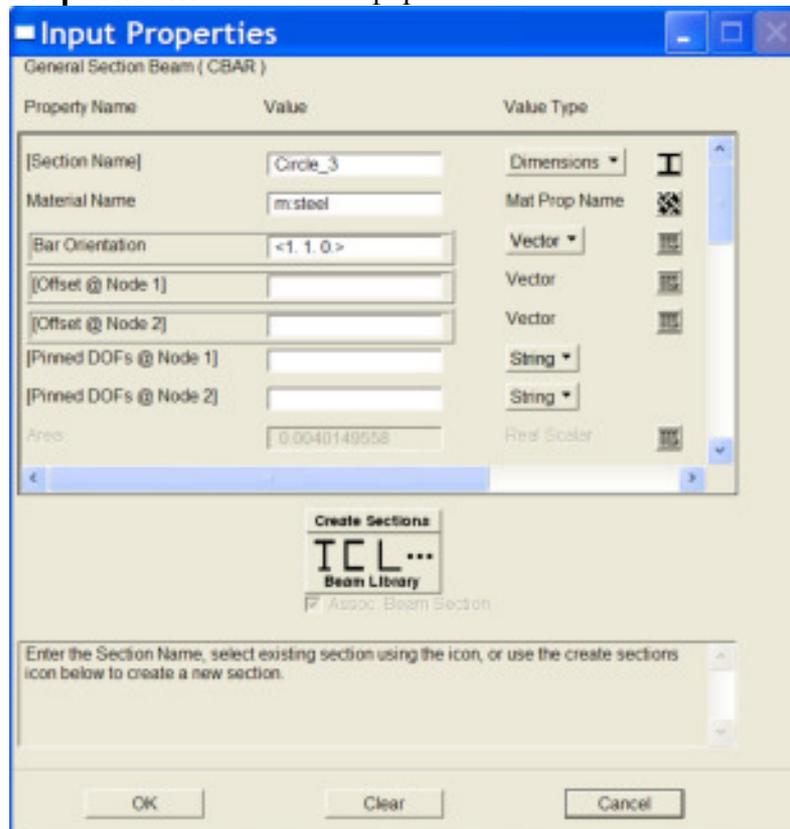


Щёлкаем по кнопке 

*Material Name:* **m:steel**  
*Bar Orientation:* **<0 1 0>**  
**OK**  
*Select Members:* **Curve 1**  
**Add**  
**Apply**

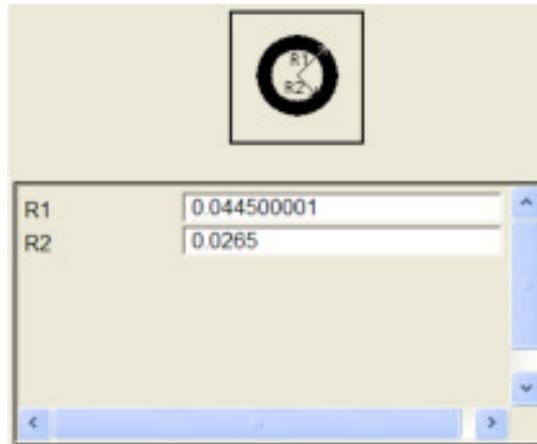
*Property Set Name:* **Circle\_3**  
*Options:* **General Section**  
**Standard Formulation**

**Input Properties...** Появится форма





Щёлкаем по кнопке **Circle\_3** и задаём сечение  
*Section Name:*

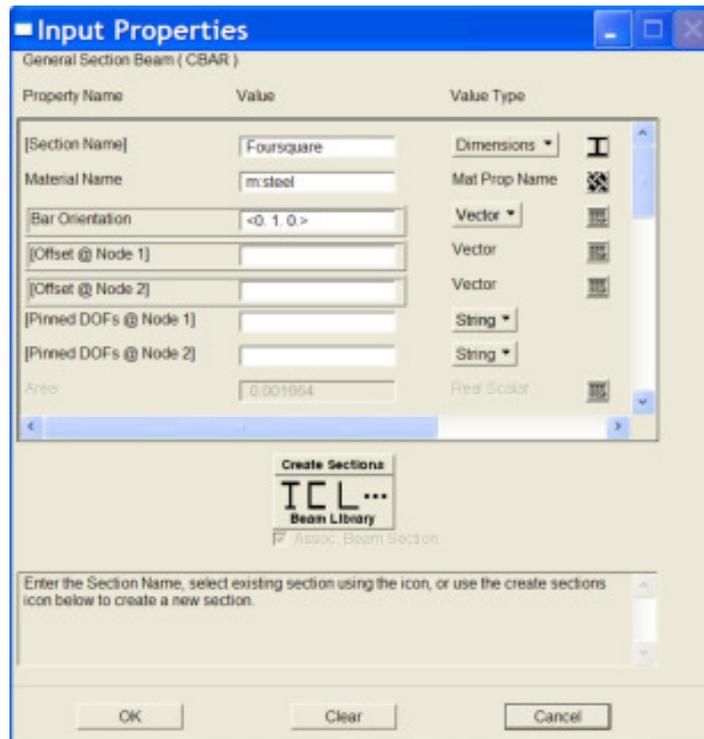


Щёлкаем по кнопке

*Material Name:* **m:steel**  
*Bar Orientation:* **<1 0 0>**  
**OK**  
*Select Members:* **Curve 2**  
**Add**  
**Apply**

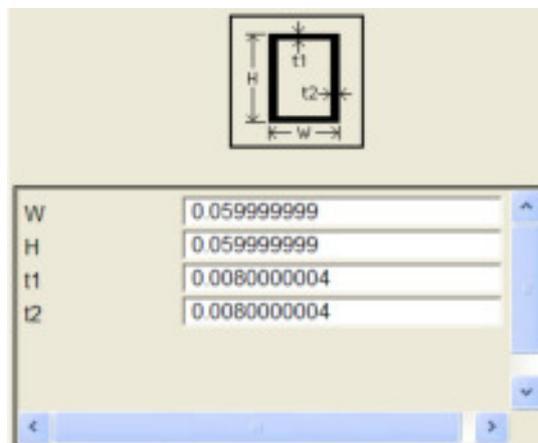
*Property Set Name:* **Foursquare**  
*Options:* **General Section**  
**Standard Formulation**

**Input Properties...** Появится форма





Щёлкаем по кнопке **ICL...** и задаём сечение **Foursquare**  
*Section Name:*



Щёлкаем по кнопке 

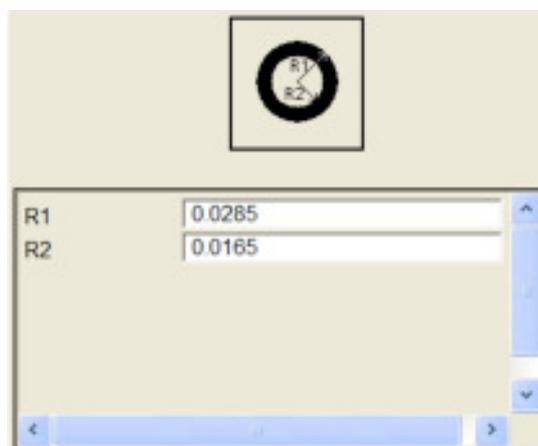
*Material Name:* **m:steel**  
*Bar Orientation:* **<0 1 0>**  
**OK**  
*Select Members:* **Curve 3**  
**Add**  
**Apply**

*Property Set Name:* **Circle\_1**  
*Options:* **General Section**  
**Standard Formulation**

### Input Properties...

Появится одноименная форма **Input Properties**, на которой щёлкаем по

кнопке  и задаём сечение



*Section Name:* **Circle\_1**  
*Material Name:* Щёлкаем по кнопке  **m:steel**

<i>Bar Orientation</i>	<b>&lt;0 1 0&gt;</b>
<b>OK</b>	
<i>Select Members:</i>	<b>Curve 4</b>
<b>Add</b>	
<b>Apply</b>	

В результате в окне отображения графической информации пространственный брус будет выглядеть так, как показано на *рис.49*.

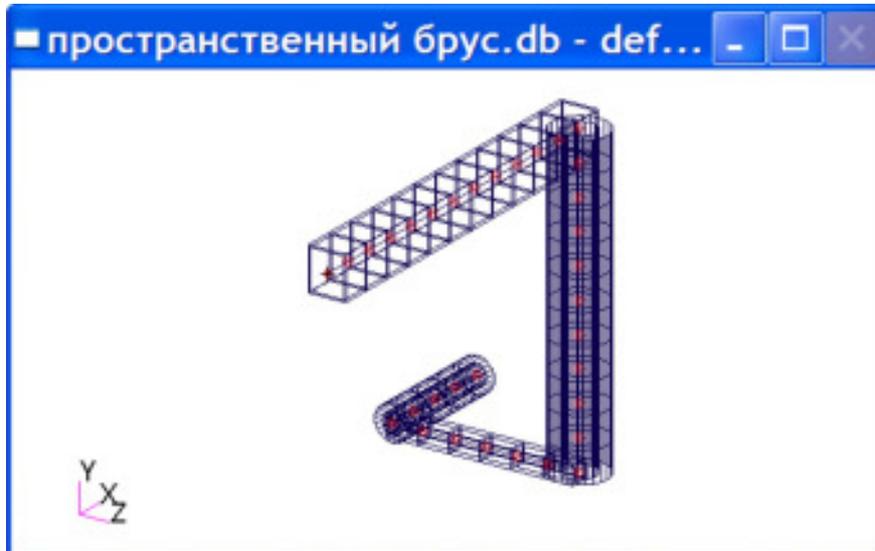


Рис.49

14. Задаём граничные условия: силовые и кинематические. Открываем форму приложения **Loads/BCs**, щелкая по кнопке . Появится всплывающая форма **Loads/Boundary Conditions**.

Вначале зададим кинематические граничные условия. Для этого в окне **New Set Name** задаем имя кинематического условия **d1** и щелкаем по кнопке **Input Data...** Откроется новая всплывающая панель **Input Data**, в окнах которой задаём граничные условия. Для абсолютно неподвижной опоры запрещаем все линейные и угловые перемещения.

<b>Loads/BCs</b>	
<i>Action:</i>	<b>Create</b>
<i>Object:</i>	<b>Displacement</b>
<i>Type:</i>	<b>Nodal</b>
<i>New Set Name:</i>	<b>d</b>
<b>Input Data...</b>	
<i>Translations &lt;T1 T2 T3&gt;:</i>	<b>&lt;0 0 0&gt;</b>
<i>Rotations &lt;R1 R2 R3&gt;:</i>	<b>&lt;0 0 0&gt;</b>
<b>OK</b>	
<b>Select Application Region...</b>	
<i>Geometry Filter</i>	<b>FEM</b>
<i>Select Geometry Entities:</i>	<b>Node 1</b>
<b>Add</b>	
<b>OK</b>	
<b>Apply</b>	

Создадим нагрузку на пространственный брус.

### Loads/BCs

<i>Action:</i>	<b>Create</b>
<i>Object:</i>	<b>Force</b>
<i>Type:</i>	<b>Nodal</b>
<i>New Set Name:</i>	<b>P1</b>
<b>Input Data...</b>	
<i>Force &lt;F1 F2 F3&gt;:</i>	<b>&lt;0 0 -4000&gt;</b>
<b>OK</b>	
<b>Select Application Region...</b>	
<i>Geometry Filter</i>	<b>FEM</b>
<i>Select Geometry Entities:</i>	<b>Node 36</b>
<b>Add</b>	
<b>OK</b>	
<b>Apply</b>	
<hr/>	
<i>New Set Name:</i>	<b>P2</b>
<b>Input Data...</b>	
<i>Force &lt;F1 F2 F3&gt;:</i>	<b>&lt;5000 0 0&gt;</b>
<b>OK</b>	
<b>Select Application Region...</b>	
<i>Geometry Filter</i>	<b>FEM</b>
<i>Select Geometry Entities:</i>	<b>Node 24</b>
<b>Add</b>	
<b>OK</b>	
<b>Apply</b>	

Равномерно распределённую нагрузку на втором участке заменим сосредоточенными силами, приложенными в узлах участка. Суммарное усилие, приложенное ко второму участку, равно **2400 Н**, к каждому элементу должно быть приложено **400 Н**. Поэтому к внутренним узлам участка прикладываем силы **400 Н**, а к узлам, совпадающим с границами участка, **200 Н**:

<b>Loads/BCs</b>	
<i>Action:</i>	<b>Create</b>
<i>Object:</i>	<b>Force</b>
<i>Type:</i>	<b>Nodal</b>
<i>New Set Name:</i>	<b>q1</b>
<b>Input Data...</b>	
<i>Force &lt;F1 F2 F3&gt;:</i>	<b>&lt;0 -400 0&gt;</b>
<b>OK</b>	
<b>Select Application Region...</b>	
<i>Geometry Filter</i>	<b>FEM</b>
<i>Select Geometry Entities:</i>	<b>Node 26:30</b>
<b>Add</b>	
<b>OK</b>	
<b>Apply</b>	
<hr/>	
<i>New Set Name:</i>	<b>q2</b>



Action:  
Object:  
Method:  
Apply

Access Results  
Attach XDB  
Result Entities

Если расчет выполнен правильно, в информационной строке появится сообщение **End: Attach Result File**, и можно перейти к анализу результатов расчета.

17. Приложение **Results** открывается нажатием на клавишу . **MSC.Patran**.

	Action:	<b>Create</b>
	Object:	<b>Quick Plot</b>
При нажатой кнопке 	Окно: <b>Select Results Cases</b>	<b>Default, A1: Static Sub-case</b>
<b>Select Results</b> в окнах выбирают интересующую информацию, например:	Окно: <b>Select Fringe Results</b>	<b>Bar Stresses, Maximum Combined</b>
	Окно: <b>Select Deformation Result</b>	<b>Displacements, Translation</b>
При нажатой кнопке 	Определяют атрибуты полос	
При нажатой кнопке 	Определяют атрибуты деформированной модели	

На рис. 51 приведена информация о максимальных напряжениях, на рис.52 - информация о перемещениях сечений пространственного бруса.



Рис.51

Как следует из рис.39, величины компонент векторов перемещений в точках **A, B, C, D**, вычисленные в программных комплексах **SCAD** и **Patran**, близки. Небольшое различие в величинах объясняется неточностью задания формы прямоугольного и квадратного сечений в **Patran** – мы не учли закругление углов фигур.

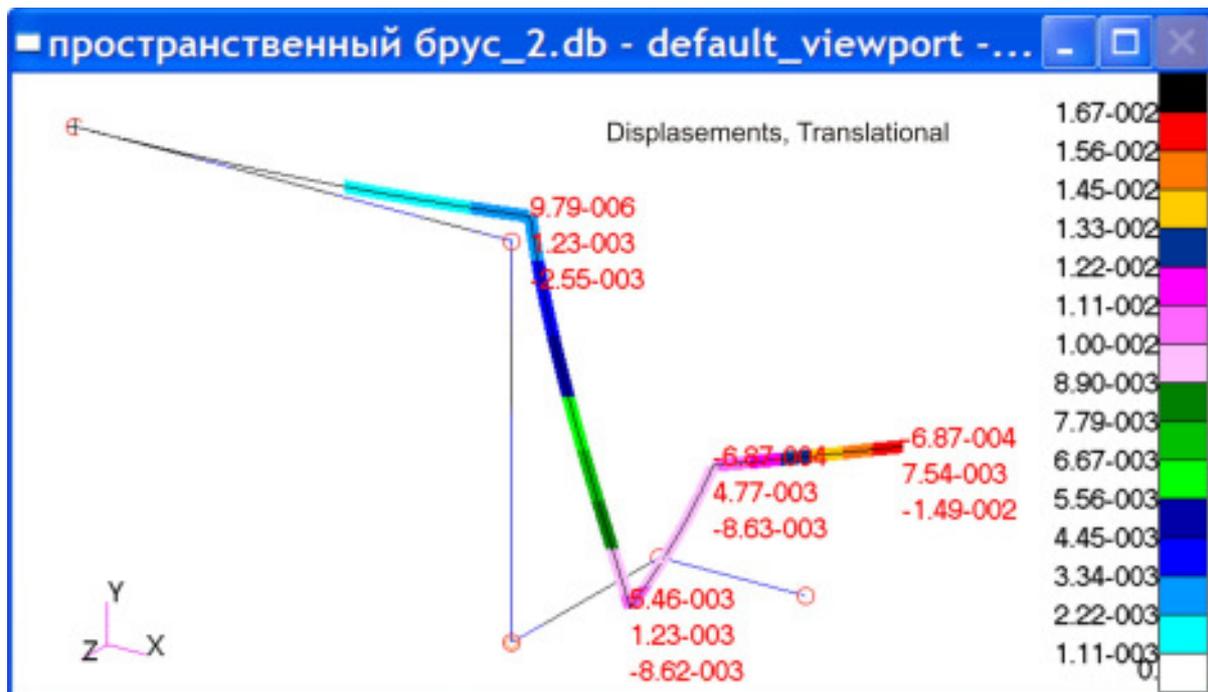


Рис.52

#### 4. ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Какое напряженное состояние называется пространственным (трехосным), плоским (двухосным) и линейным (одноосным)?
2. Каково правило знаков для нормальных и касательных напряжений?
3. Чему равна сумма нормальных напряжений на любых двух взаимно перпендикулярных площадках ?
4. Что такое главные напряжения и главные площадки?
5. Как расположены главные площадки относительно друг друга?
6. Чему равны касательные напряжения на главных площадках?
7. Как определить главную площадку?
8. Что называется опасным состоянием материала? Чем характеризуется наступление опасного состояния для пластичных и хрупких материалов?
9. Какая точка тела называется опасной?
10. Что называется допустимым напряженным состоянием?
11. Почему вопрос о том, что является причиной опасного состояния, не имеет значения для расчетов на прочность при одноосном напряженном состоянии?
12. Почему вопрос о прочности в случаях сложного (плоского или пространственного) напряженного состояния приходится решать на основе результатов опытов, проведенных при одноосном напряженном состоянии?
13. Что такое теории прочности?
14. В чем сущность первой теории прочности? Какие опытные данные находятся в противоречии с этой теорией? В каких случаях допустимо применение этой теории?
15. В чем сущность второй теории прочности?
16. В чем сущность третьей теории прочности? Напишите условие прочности по этой теории. Укажите ее недостатки и область применимости.
17. В чем сущность теории прочности удельной потенциальной энергии изменения формы? Укажите область применения этой теории.

18. В чем сущность теории прочности Мора?
19. Каковы недостатки теории прочности Мора? Что можно сказать об области ее применимости?
20. Какой случай изгиба называется косым изгибом?
21. Может ли балка круглого поперечного сечения испытывать косой изгиб?
22. Что такое чистый косой изгиб и поперечный косой изгиб?
23. Сочетанием каких видов изгиба является косой изгиб?
24. Как находится положение нейтральной оси при косом изгибе?
25. Что такое опасные точки в сечении и как определяется их положение при косом изгибе?
26. Как определяются перемещения точек оси балки при косом изгибе?
27. Какой случай сложного сопротивления называется внецентренным растяжением (или сжатием)?
28. Какие внецентренно растянутые (или сжатые) брусья называются жесткими и какие гибкими?
29. По каким формулам определяются нормальные напряжения в поперечных сечениях бруса при внецентренном растяжении и сжатии? Какой вид имеет эпюра этих напряжений?
30. Как определяется положение нейтральной оси при внецентренном растяжении и сжатии?
31. Чему равно нормальное напряжение в центре тяжести поперечного сечения при внецентренном растяжении или сжатии?
32. Какие напряжения возникают в поперечном сечении бруса при изгибе с кручением?
33. Как находятся опасные сечения бруса круглого сечения при изгибе с кручением?
34. Какие точки круглого поперечного сечения являются опасными при изгибе с кручением? Какое напряженное состояние имеет место в этих точках?
35. Как находится величина приведенного момента (по различным теориям прочности) при изгибе с кручением бруса круглого сечения?
36. Какие точки бруса круглого поперечного сечения являются опасными при растяжении (или сжатии) с кручением?
37. Как ведется расчет на прочность бруса круглого сечения при кручении с растяжением (или сжатием)?
38. Как рассчитывается на прочность брус круглого сечения при изгибе с кручением и растяжением (или сжатием)?
39. Какие точки бруса с прямоугольным поперечным сечением являются опасными при растяжении (или сжатии) с кручением?
40. Как ведется расчет на прочность бруса с прямоугольным поперечным сечением при кручении с растяжением (или сжатием)?
41. Как рассчитывается на прочность брус с прямоугольным поперечным сечением при изгибе с кручением и растяжением (или сжатием)?