

## ИССЛЕДОВАНИЕ ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ОБРАЗЦОВ ИЗ ДРЕВЕСИНЫ В MSC PATRAN-NASTRAN

В. А. Жилкин

В работе излагаются результаты численных исследований в программном продукте MSC Patran-Nastran-Marc распределения напряжений в относительно тонких деревянных пластинках с круговыми отверстиями, нагруженных в направлении волокон древесины растягивающими равномерно распределенными усилиями, приложенными к свободному торцу пластины, и усилиями, передаваемыми через жесткие цилиндрические пальцы. Пальцы (штампы) имели диаметр, равный диаметру отверстий, и вставлялись в них без натяга. С исследованным случаем работы деревянных элементов приходится сталкиваться при проектировании соединений на цилиндрических нагелях. Разрушение относительно тонких элементов в нагельных соединениях происходит не только от смятия древесины в отверстии, но часто от раскалывания или выкалывания древесины между нагельными. Из условия работы древесины на скалывание и раскалывание определяются расстояния между нагельными вдоль и поперек волокон, а также до торцов соединяемых элементов. Учет работы древесины на скалывание при конструировании стыков на нагельных основывается на весьма условных предположениях. Расчетные формулы, базирующиеся на законах изменения нормальных и касательных напряжений по площади контакта между штампом и краем отверстия, зачастую являются приближенными. Целью данной работы была оценка возможностей программного комплекса MSC Patran-Nastran-Marc при решении задач анизотропной теории упругости, а также получение приближенных аналитических соотношений для контактных напряжений в зонах контакта нагеля и древесины.

*Ключевые слова:* МКЭ, MSC.Patran-Nastran-Marc, древесина, нагельные соединения, ортотропные материалы.

### 1. Растяжение пластин с отверстием

Начала декартовой и цилиндрической систем координат совмещены с центром отверстия на внешней поверхности пластины, лежащей в плоскости  $xoy$ . Точкам левого торца пластины запрещены перемещения в направлении осей  $x$  и  $z$ , а точкам, лежащим в плоскости  $xoz$ , запрещены перемещения в направлении оси  $y$ .

Размеры соснового образца-пластинки назначены с таким расчетом, чтобы расстояния от отверстия диаметром  $d = 25$  мм до правого торца вдоль волокон были равны  $7d$ , до «задел-

ки» –  $11d$ , ширина образцов принималась равной  $b = 6d$ , толщина –  $t = 2d$  (рис. 1).

К правому торцу пластины приложено усилие  $P = 1500$  Н, равномерно распределенное по площади сечения:

$$p = \frac{P}{b \cdot t} = \frac{1500}{150 \cdot 50} = 0,2 \text{ Н/мм}^2. \quad (1)$$

Упругие постоянные древесины образцов были взяты из справочника [4] (оси 1, 2, 3 соответствуют осям  $x$ ,  $y$  и  $z$  соответственно):

$$\begin{aligned} E_1 &= 16\,600 \text{ Н/мм}^2; E_2 = 1124 \text{ Н/мм}^2; \\ E_3 &= 582 \text{ Н/мм}^2; G_{12} = 1180 \text{ Н/мм}^2; \end{aligned}$$

$$G_{13} = 690 \text{ Н/мм}^2; G_{23} = 670 \text{ Н/мм}^2; \mu_{12} = 0,4285; \\ \mu_{21} = 0,029; \mu_{13} = 0,51; \mu_{31} = 0,015; \mu_{23} = 0,68; \\ \mu_{32} = 0,31.$$

где  $E_i$  – модули упругости ( $i = 1, 2, 3$ );

$G_{ij}$  – модули сдвига ( $i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3$ );

$\mu_{ij}$  – коэффициенты поперечной деформации ( $i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3$ ).

В соответствии с теорией упругости анизотропного тела для ортотропного тела должны выполняться соотношения [6]:

$$E_1\mu_{21} = E_2\mu_{12}; E_2\mu_{32} = E_3\mu_{23}; E_3\mu_{13} = E_1\mu_{31}, \quad (2)$$

которым табличные данные не удовлетворяли:

$$E_1\mu_{21} - E_2\mu_{12} = -0,234; E_2\mu_{32} - E_3\mu_{23} = -47,32; \\ E_3\mu_{13} - E_1\mu_{31} = 47,82.$$

Поэтому три упругие характеристики сосны были найдены из решения уравнений (2) и приняты равными:

$$\mu_{12} = 0,428292; \mu_{31} = 0,017881; \mu_{23} = 0,598694.$$

Вещественные параметры обобщенного плоского напряженного состояния ортотропной пластинки для заданных упругих характеристик сосны будут равны [6]:

$$m := \frac{E_1}{G_{12}} - 2\mu_{12} = 13,211; \quad k := \sqrt{\frac{E_1}{E_2}} = 3,843; \quad (3) \\ n := \sqrt{2k + m} = 4,571.$$

Распределение напряжений в деревянной пластинке с круговым отверстием сравнивалось с распределением напряжений в геометрически одинаковой изотропной пластинке, для которой были приняты следующие упругие характеристики: модуль упругости –  $E = 70\,000 \text{ Н/мм}^2$ , коэффициент Пуассона –  $\mu = 0,32$ .

Вид конечно-элементных сеток на внешней поверхности пластин приведен на рисунке 2. По толщине пластины были разбиты на десять слоев. Число элементов Hex8 13500. Размеры наиболь-

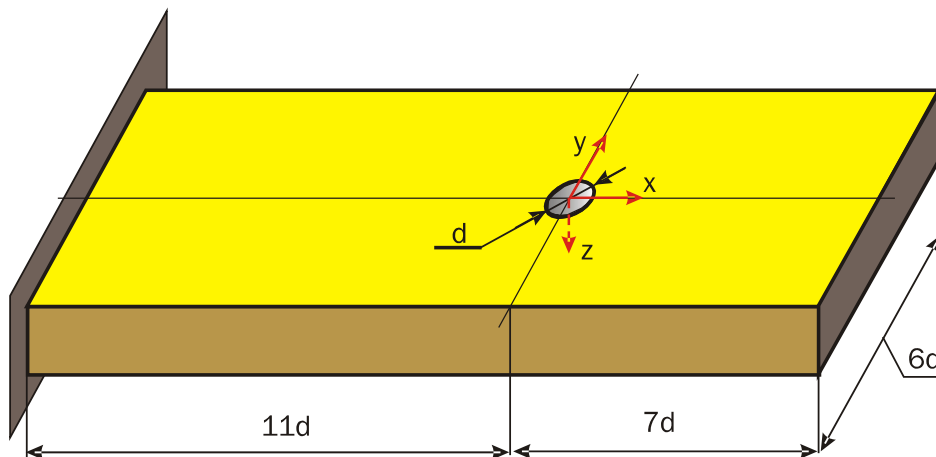


Рис. 1

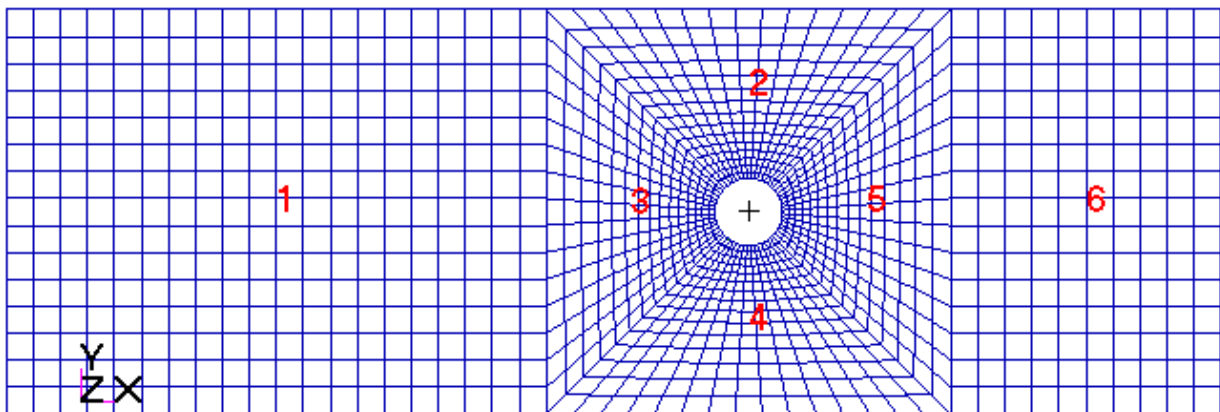


Рис. 2

шего элемента, находящегося в области «одно-родного» напряженного состояния,  $10 \times 10 \times 5 \text{ мм}^3$ , размеры наименьшего элемента, находящегося в области отверстия,  $1,3 \times 2,27 \times 5 \text{ мм}^3$ .

На рисунках 3, 4, приведены изополя напряжений  $\sigma_x$ ,  $\tau_{xy}$ , наблюдаемые на внешних поверхностях пластин (вверху – древесина, внизу – дюралюмин). Из картин полос следует, что MSC Patran качественно правильно отображает влияние анизотропии на распределение напряжений.

Распределение напряжений  $\sigma_\theta$  по контуру отверстия в бесконечной пластине из изотропного материала описывается выражением [5]:

$$\sigma_\theta = p(1 - 2 \cos 2\theta),$$

где  $\theta$  – угол, отсчитываемый от оси  $x$ . В опасном сечении при  $\theta = \pi/2$   $\max \sigma_\theta = 3p$  (параметр  $p$  определяется соотношением (1)).

В пластине из ортотропного материала напряжения  $\sigma_\theta$  по контуру отверстия в бесконечной пластине изменяются по закону [6]:

$$\sigma_\theta = p \frac{E_0}{E_1} [-k \cos^2 \theta + (1+n) \sin^2 \theta],$$

где  $E_0$  определяется по формуле:

$$\frac{1}{E_0} = \frac{\sin^4 \theta}{E_1} + \left( \frac{1}{G_{12}} - \frac{2\mu_{12}}{E_1} \right) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \frac{\cos^4 \theta}{E_2}.$$

В опасном сечении при  $\theta = \pi/2$   $\max \sigma_\theta = p(1+n)$  (см. (3)).

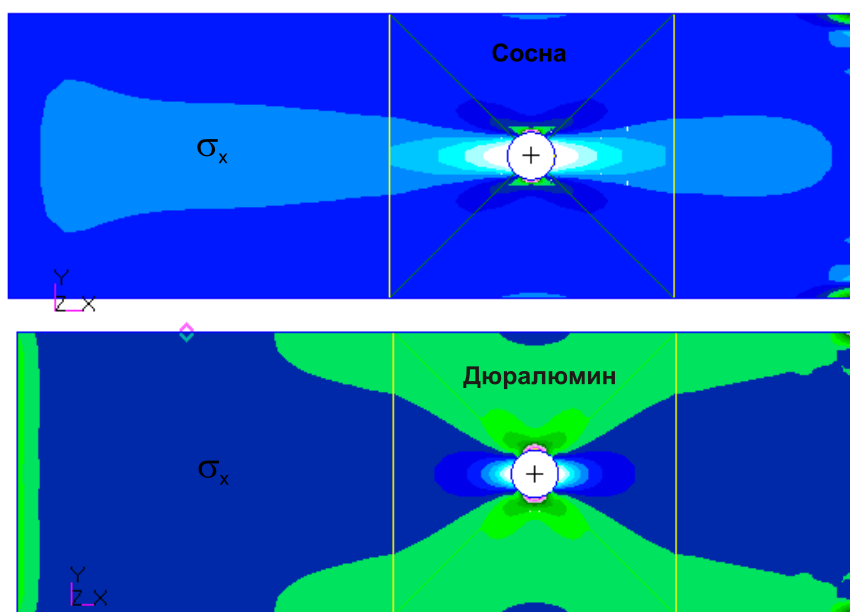


Рис. 3

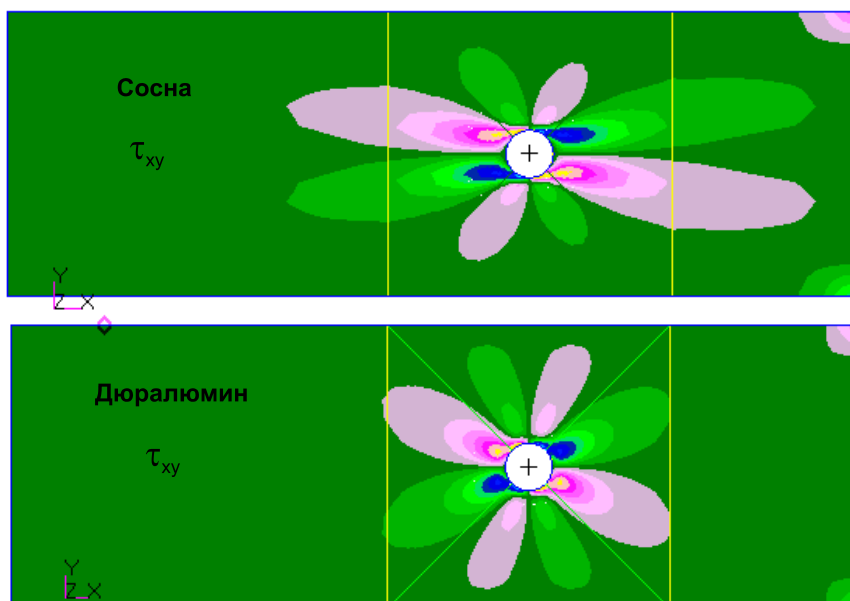


Рис. 4

MSC Patran в приложении Results позволяет вывести информацию о напряжениях  $\sigma_\theta$  вдоль контура отверстия: **Action>Create; Object>Cursor; Method>Scalar**, в текстовый файл и затем ее обработать, например, в MathCAD.

На рисунке 5 приведены полученные таким путем полярные графики напряжений  $\sigma_\theta$  для изотропного (рис. 5 а) и анизотропного материалов (рис. 5 б). Сплошные кривые – численные решения, пунктирные кривые – точные решения для бесконечных пластин.

Из анализа графиков рисунка 5 следует, что численные результаты для изотропного и анизотропного материалов:

- качественно соответствуют теоретическим решениям;
- численные решения дают заниженные значения коэффициентов концентрации напряжений  $\sigma_\theta$ :

– изотропный материал –

$$k = \frac{0,550053}{0,2} = 2,75 \text{ вместо } 3;$$

– анизотропный материал –

$$k = \frac{0,943007}{0,2} = 4,71 \text{ вместо } k = n + 1 = 5,571,$$

что в принципе согласуется с теоретическими положениями метода конечных элементов (МКЭ) [7]. Кроме того, в численных решениях практически были «потеряны» сжимающие напряжения в окрестности полярных углов  $\varphi = 0^\circ$  и  $\varphi = 180^\circ$ : для изотропного материала  $\min \sigma_\theta = -0,001335 \text{ Н/мм}^2$ , а должно быть  $\min \sigma_\theta = -p = -0,2 \text{ Н/мм}^2$ , для анизотропного материала –  $\min \sigma_\theta = -0,003377 \text{ Н/мм}^2$ , а должно быть  $\min \sigma_\theta = -p/k = -0,260213 \text{ Н/мм}^2$ . Ввиду малости величин численных результатов они и не отображены на графиках (рис. 5). Для повышения точности численных решений необходимо увеличивать число КЭ в области отверстий.

Графики изменения величин напряжений  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\theta$ ,  $\tau_{r\theta}$  вдоль контура отверстия в анизотропной пластине приведены на рисунке 6.

Графики распределения напряжений  $\sigma_x = \sigma_\theta$  в опасном сечении пластин приведены

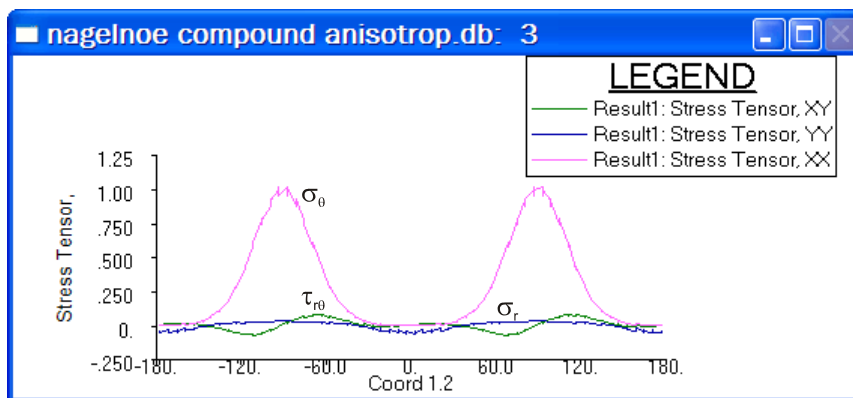


Рис. 6

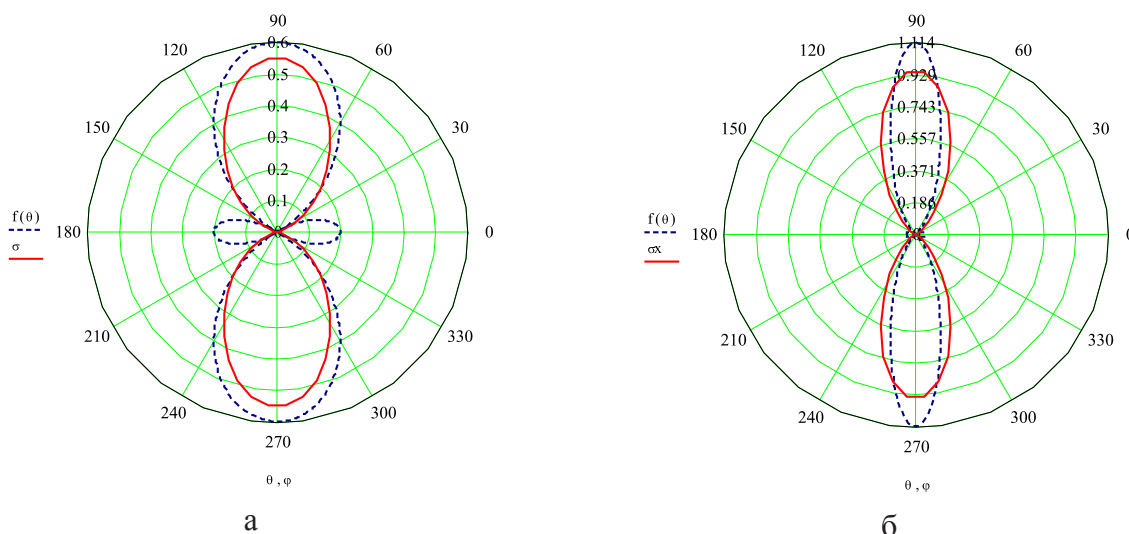


Рис. 5

на рисунке 7. Напряжения определялись в центрах тяжести КЭ. Градиент изменения напряжений  $\sigma_0$  вблизи отверстия для пластины из анизотропного материала значительно выше, чем в пластине из изотропного материала.

Графики перемещения точек контура в полярной системе координат приведены на рисунке 8, из которого следует, что поперечный диаметр отверстия уменьшился на 0,00102 мм, а продольный диаметр увеличился на 0,00171 мм.

Формоизменение контура отверстия в основной пластине иллюстрируется рисунком 9, где величины перемещений точек отверстия увеличены на коэффициент  $K = 4 \cdot 10^3$ .

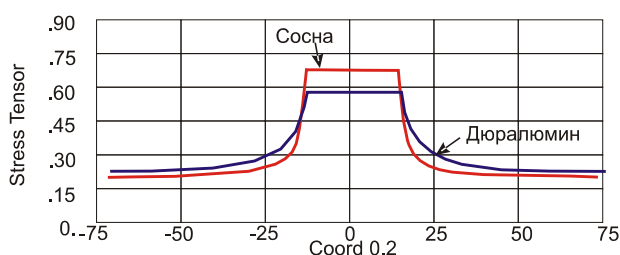


Рис. 7

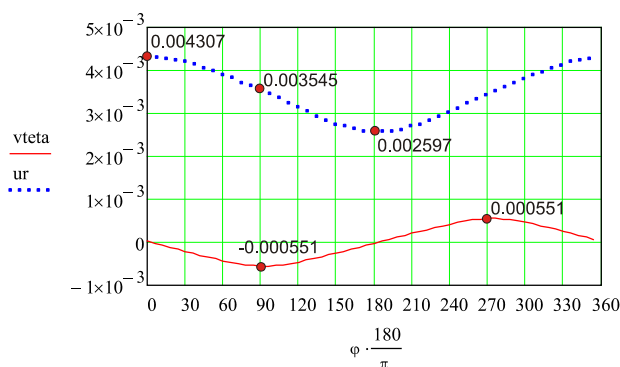


Рис. 8

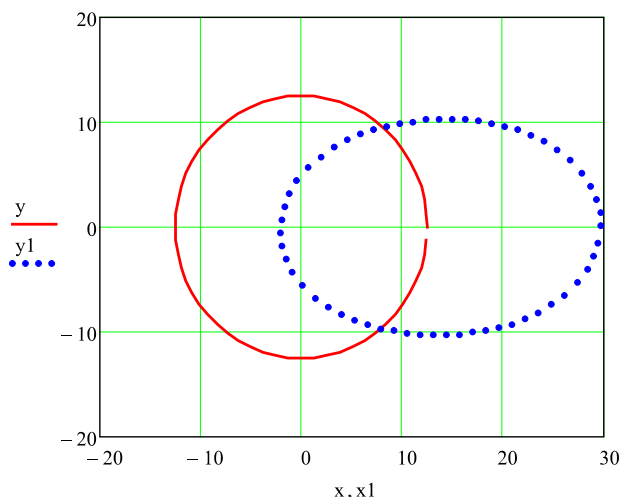


Рис. 9

Напряжения на большей части толщины пластины распределяются равномерно (рис. 10). Небольшие отклонения от равномерности наблюдаются вблизи внешних поверхностей пластины.

## 2. Растяжение пластин с упругим ядром в виде стальной трубки

Рассмотрим исследованную ранее прямоугольную пластинку из сосны с круговым отверстием, в которое либо вклеено без натяжения круговое ядро того же диаметра в виде стальной трубки, либо трубка просто вставлена в отверстие. Внутренний диаметр трубки  $d = 9$  мм.

К правому торцу пластины приложено усилие  $P = 15$  кН, равномерно распределенное по площади сечения

$$p = \frac{P}{b \cdot t} = \frac{15000}{150 \cdot 50} = 2 \text{ Н/мм}^2. \quad (4)$$

### 2.1. Трубка вклеена в пластину без натяжения

Вставка в отверстие упругого ядра в общем случае уменьшает концентрацию напряжений в древесине в опасном сечении пластины. Теоретические исследования подобной задачи для бесконечной пластины из березовой фанеры с упругим и жестким ядрами в отверстии показали, что если ядро жесткое, то наибольшим из трех является напряжение  $\sigma_r$  на концах диаметра, параллельного растягивающим усилиям; при отсутствии ядра наибольшим является

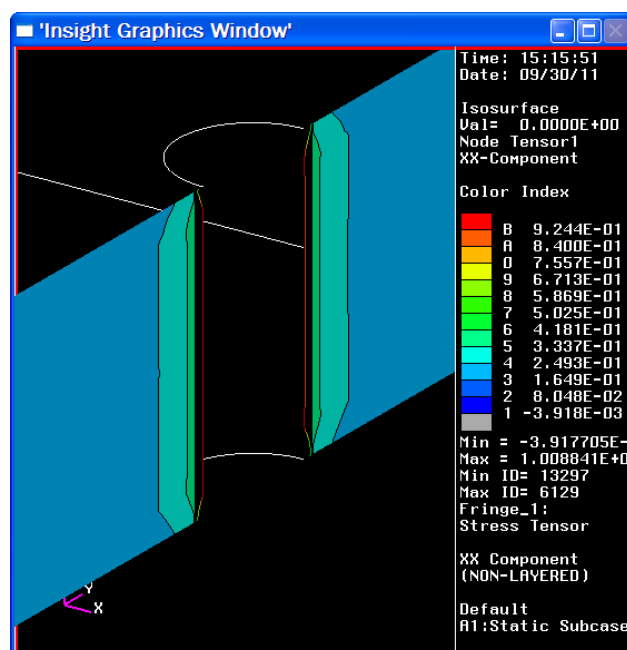


Рис. 10

напряжение  $\sigma_\theta$  на концах диаметра, перпендикулярного к направлению растягивающих усилий [6]. В рассматриваемом нами случае напряжения  $\sigma_r$  на концах диаметра, параллельного растягивающим усилиям составили 2,5914 Н/мм<sup>2</sup>, т.е.  $\sigma_r/p = 1,2957$  (рис. 11). В [6] для жесткого ядра эта величина равна 1,237, для упругого ядра – 0,841. Напряжение  $\sigma_\theta$  на концах диаметра, перпендикулярного к направлению растягивающих усилий, в нашем случае составило 0,971 Н/мм<sup>2</sup>:  $\sigma_\theta/p = 0,4855$ . В [6] для жесткого ядра эта величина равна 0,003, для упругого ядра – 1,684. Таким образом, полученные нами результаты вполне могут быть правдоподобными для рассматриваемого ядра.

Напряженное состояние трубки подобно напряженному состоянию в изотропной бесконечной пластине с отверстием в зоне отверстия [5]: максимальные нормальные напряжения на контуре отверстия в опасном сечении  $\sigma_{\theta\_max} = 10,134$  Н/мм<sup>2</sup>, а в сечении, совпадающем с горизонтальной осью симметрии,  $\sigma_{\theta\_min} = -3,74$  Н/мм<sup>2</sup>. В бесконечной изотропной пластине отношение  $|\sigma_{\theta\_max}/\sigma_{\theta\_min}| = 3$ , в рассматриваемом нами случае оно равно 2,71. На рисунке 12 приведены эпюры напряжений  $\sigma_r$  в опасных сечениях кольца и в бес-

конечной пластине с отверстием. Кружочки соответствуют численным результатам, полученным в узлах КЭ сетки; сплошная кривая, проходящая через них, – сплайн аппроксимация результатов расчета. Крайнее левое значение напряжений, как это обычно и бывает в МКЭ, не удовлетворяет граничным условиям задачи: на контуре отверстия напряжения должны быть  $\sigma_r = 0$ .

Графики нормальных напряжений в опасном сечении пластины из сосны приведены на рисунке 13, из которых следует, что в опасном сечении нормальные напряжения  $\sigma_\theta = \sigma_x \leq p$ , а напряжения  $\sigma_r = \sigma_y$  во всех элементах сечения за исключением двух примыкающих к трубке отрицательны и малы по сравнению с  $p$ :  $\sigma_y \approx -0,01p$  (сжатие сечения обусловлено различием коэффициентов поперечной деформации: сталь –  $\mu = 0,3$ , сосна –  $\mu_{12} = 0,428$ ). Всплески в середине графиков соответствуют напряжениям в трубке.

Из приведенных результатов численного исследования напряженного состояния пластины из сосны следует, что в случае плоского напряженного состояния упругое ядро снижает величину максимальных напряжений у отверстий в древесине.

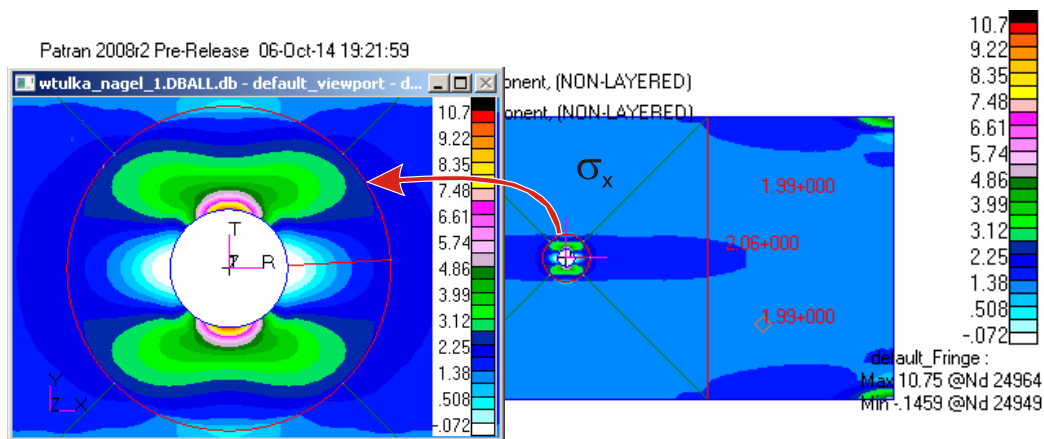


Рис. 11

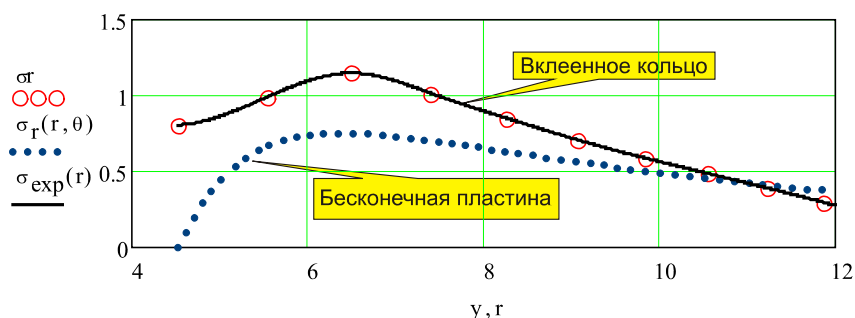


Рис. 12

## 2.2. Стальная трубка свободно вставлена в отверстие пластины

В этом случае приходится решать контактную задачу о взаимодействии кольца с поверхностью отверстия в древесине.

Изополя напряжений  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  и  $\tau_{xy}$  приведены на рисунках 14, 15, 16.

На рисунке 17 приведены полярные графики контактных напряжений вдоль контура отверстия внешней поверхности сосновой пластины. В отличие от случая вклеенной трубки здесь упругое ядро не привело к уменьшению нормальных напряжений в опасном сечении пластины: напряжения возросли и составили

17,342 Н/мм<sup>2</sup>. Коэффициент концентрации напряжений  $\sim 8.6$ , в то время как в бесконечной пластине без упругого ядра он равен 5,571. В опасном сечении в опасной точке сосновой пластины напряжения  $\sigma_r = \sigma_y = -1.423$  Н/мм<sup>2</sup>, что значительно выше аналогичных напряжений в сосновой пластине с вклеенной трубкой.

## 3. Растяжение пластин смещением упругого ядра

Если принять, что жесткость нагеля намного больше жесткости пластин на смятие, то при-

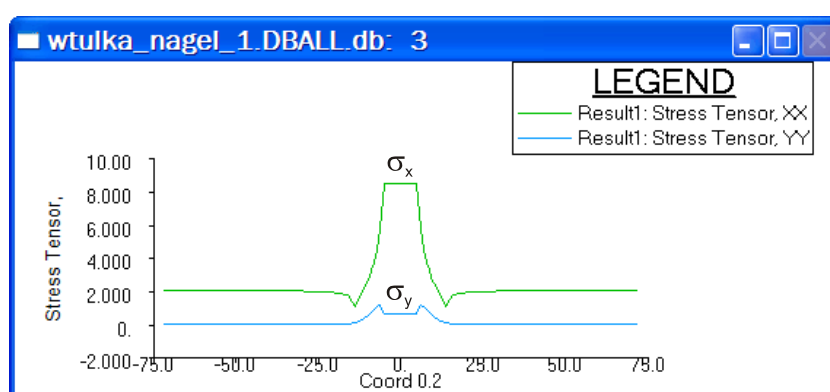


Рис. 13

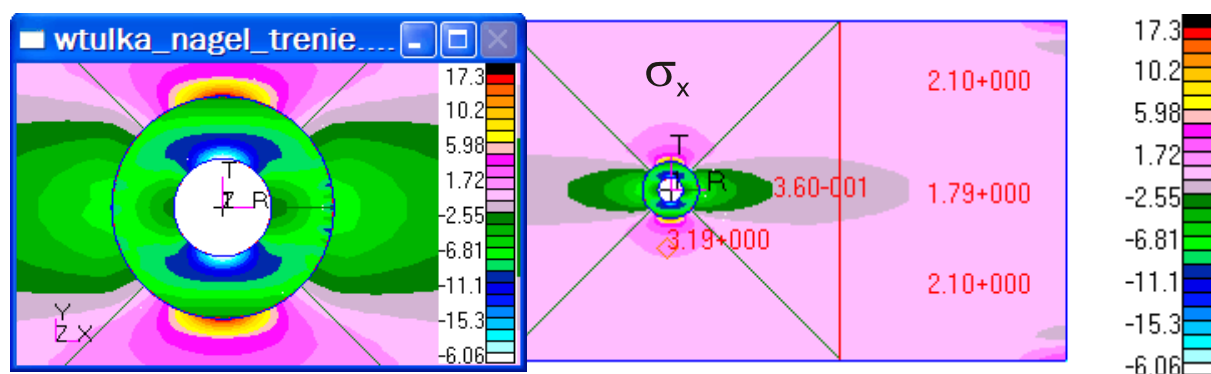


Рис. 14

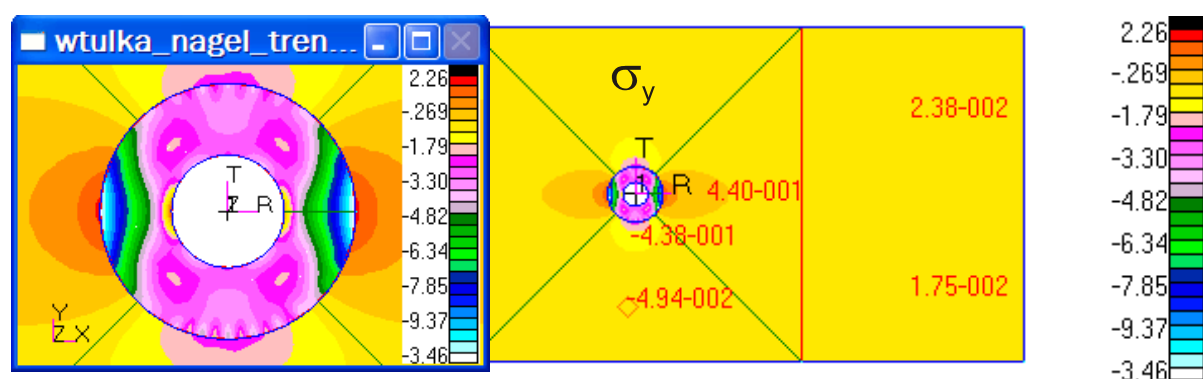


Рис. 15



ближенно можно считать, что сосновая пластина нагружается поступательным перемещением нагеля. Зададим внутренним точкам поверхности нагеля перемещения  $u_{\max} = 0,07$  мм.

На рисунке 18 приведены изополя перемещений  $u$  материала сосны. Из рисунка можно сделать следующие выводы:

- все точки трубки перемещаются приблизительно на одну и ту же заданную величину  $u_{\max}$ ;
- перемещения точек пластины вблизи оси симметрии в зоне контакта нагеля и пластины составляют 0,069 мм;

- перемещения в сечениях параллельных оси  $x$  и касательных к нагелю составляют  $0,7u_{\max}$ ;
- перемещения в сечениях отстоящих от оси  $x$  на расстоянии диаметра нагеля составляют  $0,5u_{\max}$ .

Таким образом, перемещения точек сосны в зоне выкалывания составляют

$$0,5u_{\max} \leq u \leq 0,7u_{\max}.$$

На рисунке 19 представлены изополя напряжения  $\sigma_x$  и  $\tau_{xy}$ .

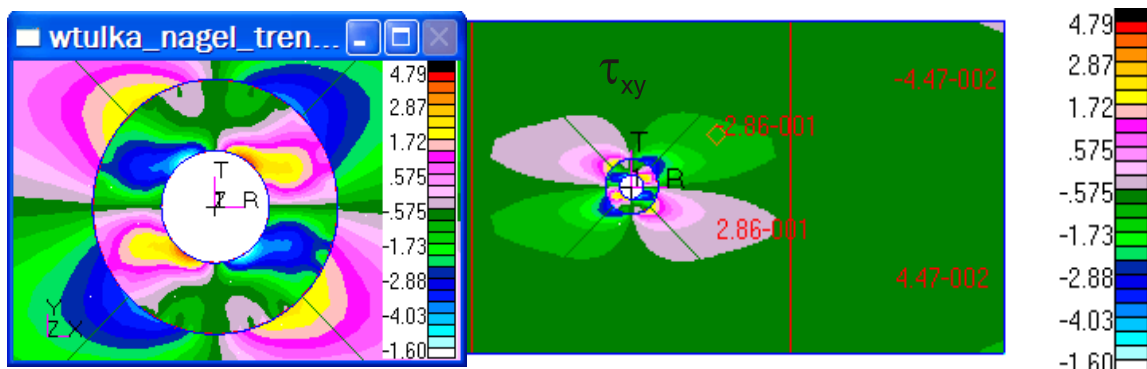


Рис. 16

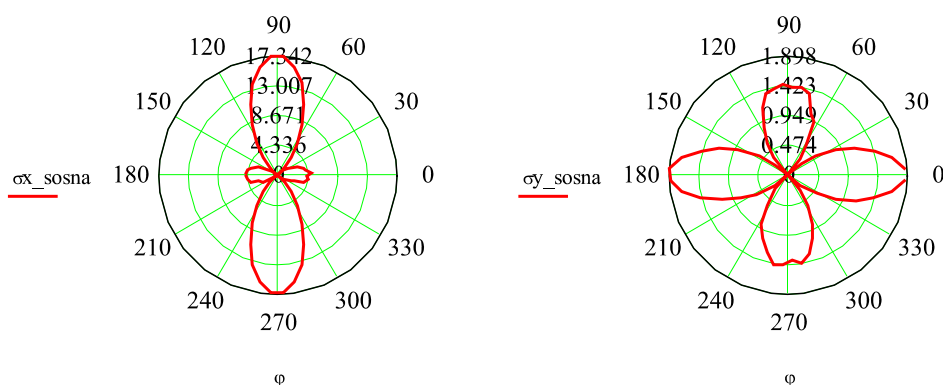


Рис. 17

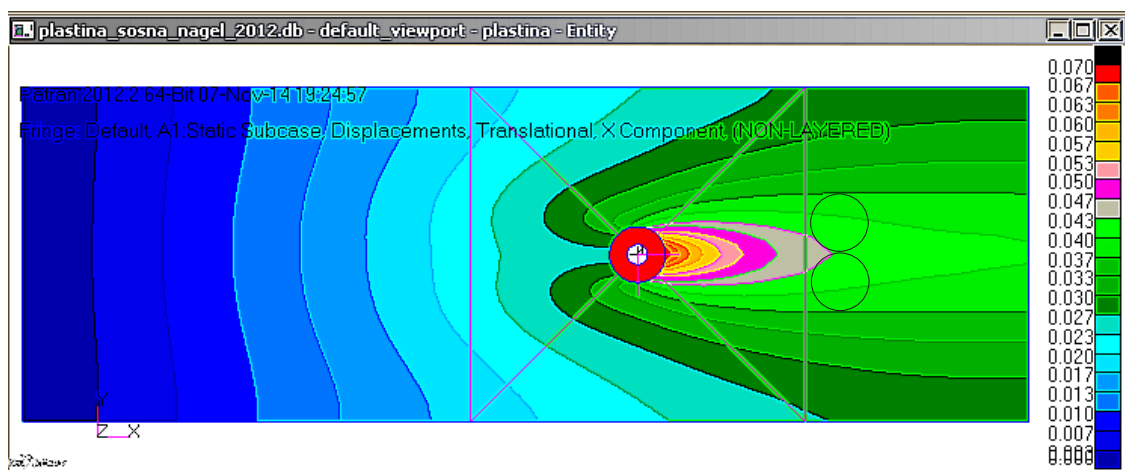


Рис. 18



Изополя напряжений  $\tau_{xy}$  подобны картине полос в фотоупругом покрытии из материала ЭД-6М толщиной 1,5 мм (рис. 20), наклеенном на пластинку из сосны [8], размеры которой подобны принятым в данной работе. Как было отмечено в [8], результаты фотоупругого исследования хорошо согласовывались с данными тензометрирования.

Так как в сечениях  $y = \pm d/2$  нет узлов, то было выбрано криволинейное сечение, наиболее близкое к плоскостям скалывания. На рисунке 21 квадратиками помечены узлы, принятые для дальнейшего расчета. Распределения напряжений  $\sigma_y$  и  $\tau_{xy}$  в этом криволинейном сечении представлены на рисунке 22.

Массив данных графика  $\tau_{xy}$  был переброшен в MathCAD и там обработан. Функцию  $\eta(\xi)$  распределения напряжений  $\tau_{xy}$  вдоль се-

чения скалывания удалось подобрать методом наименьших квадратов (рис. 23), где  $a$  коэффициенты полинома девятого порядка. Результаты численного расчета в MSC Patran обозначены на графике символом  $\tau_{xy}$ .

Функция  $\eta(\xi)$  на рисунке 23 подобна экспериментальной кривой, полученной ме-

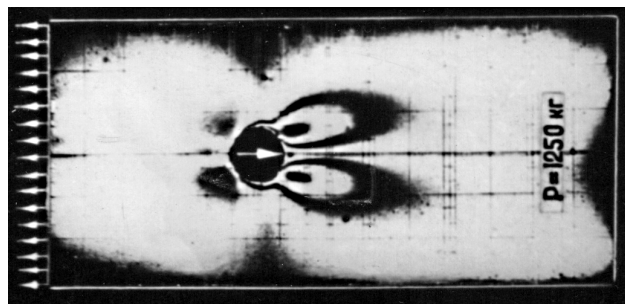


Рис. 20

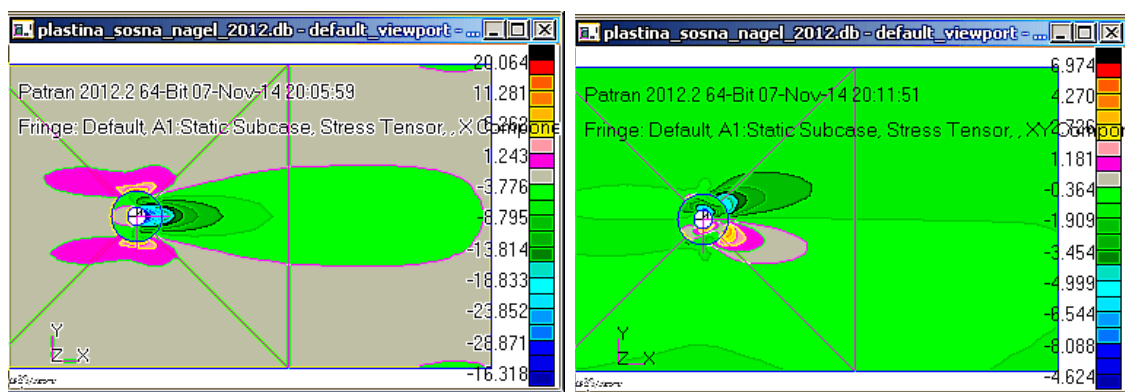


Рис. 19

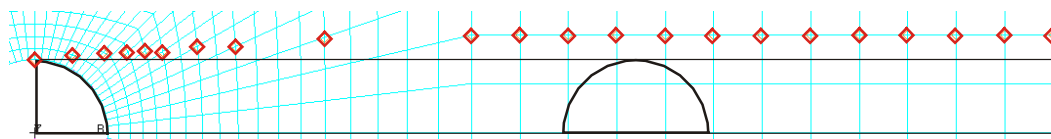


Рис. 21

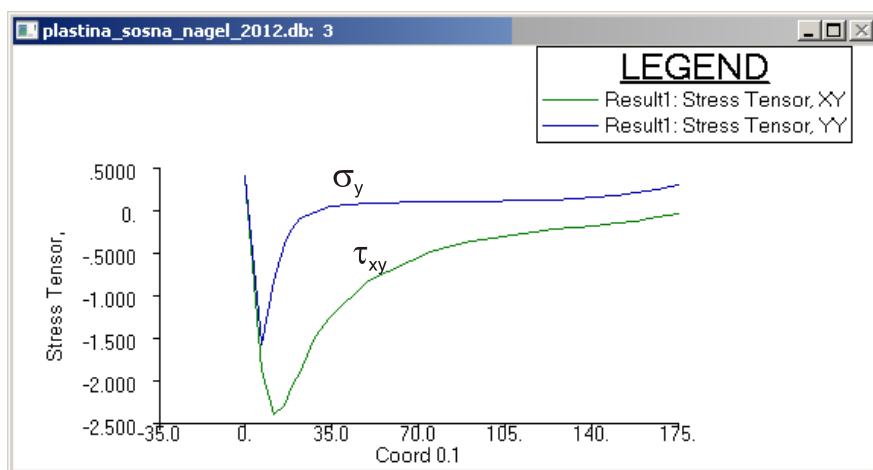


Рис. 22

тодом фотоупругих покрытий [8]. Ординаты  $\tau_{\text{au}} = \tau_{\text{ck}} / |\tau_{\text{max}}|$  есть отношение численно найденных величин касательных напряжений к максимальной по модулю величине касательных напряжений, а абсциссы  $x = x/d$  – относительные величины.

Многочисленные эксперименты по разрушению деревянных элементов на скалывание показали, что древесина разрушается не по ка-

сательным к отверстиям плоскостям, а по более коротким, хотя и близко к ним расположенным.

На рисунке 24 представлены изополя напряжений  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\theta$  и  $\tau_{r\theta}$  в нагеле, а на рисунках 25–26 эпюры контактных напряжений в пластинке из сосны в левой цилиндрической системе координат.

Очень важным с точки зрения построения теоретического решения задачи является во-

$$n := 21 \quad k := 0..n \quad m := 9 \quad j := 0..m \quad \Phi_{k,j} := (x_k)^j \quad A := \Phi^T \cdot \Phi$$

$$b := \Phi^T \cdot \tau_{\text{au}} \quad a := A^{-1} \cdot b \quad \eta(\xi) := \sum_{i=0}^m (a_i \cdot \xi^i) \quad \xi := 0, 0.1..x_{21}$$

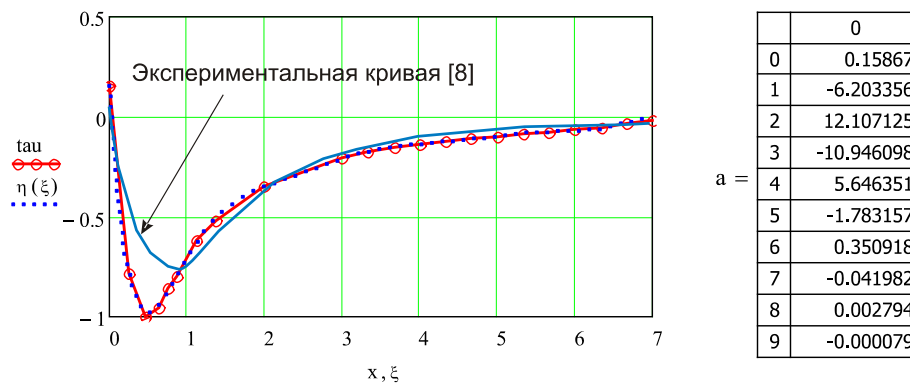


Рис. 23

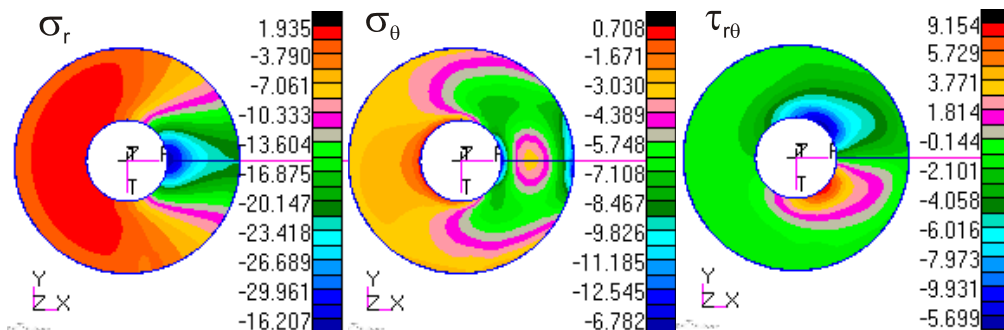


Рис. 24

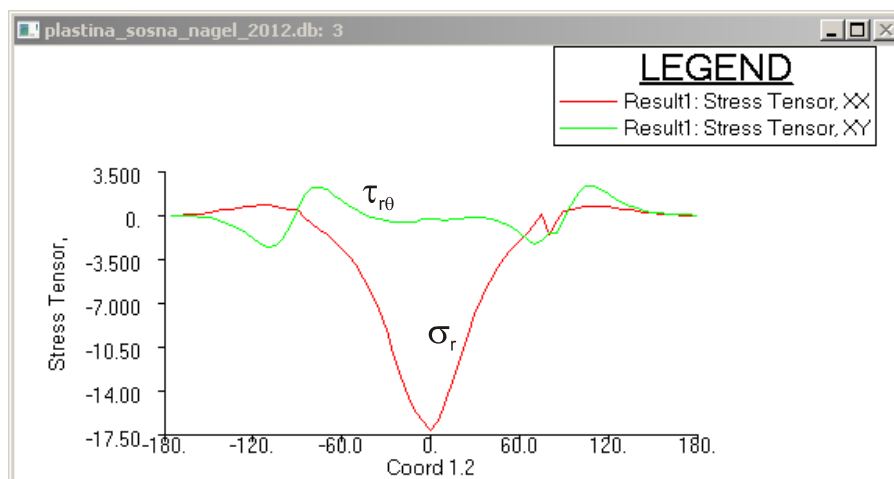


Рис. 25

прос о распределении сминающих и касательных напряжений, возникающих по поверхности контакта между штампом и древесиной. Поэтому одной из частных задач исследования было установление эюр распределения этих напряжений. На рисунке 25 приведены эюры распределения напряжений  $\sigma_r$ ,  $\tau_{r\theta}$  вдоль контура отверстия. Эюра  $\sigma_r$  представляет собой распределение давления от сминающего штампа в радиальном направлении по контактной

поверхности. Размеры контактной поверхности определяются углом обхвата  $\phi_0$ , величина которого зависит от диаметра отверстия и штампа. В нашем случае  $\phi_0 = 90^\circ$ , в работе [8]  $\phi_0 = 144^\circ$ .

Численные величины контактных напряжений  $\sigma_r$  по контуру отверстия описываются полиномом десятого порядка (рис. 27).

Предложенное в работе [8] выражение для определения контактных напряжений при смятии древесины в отверстии цилиндрическим

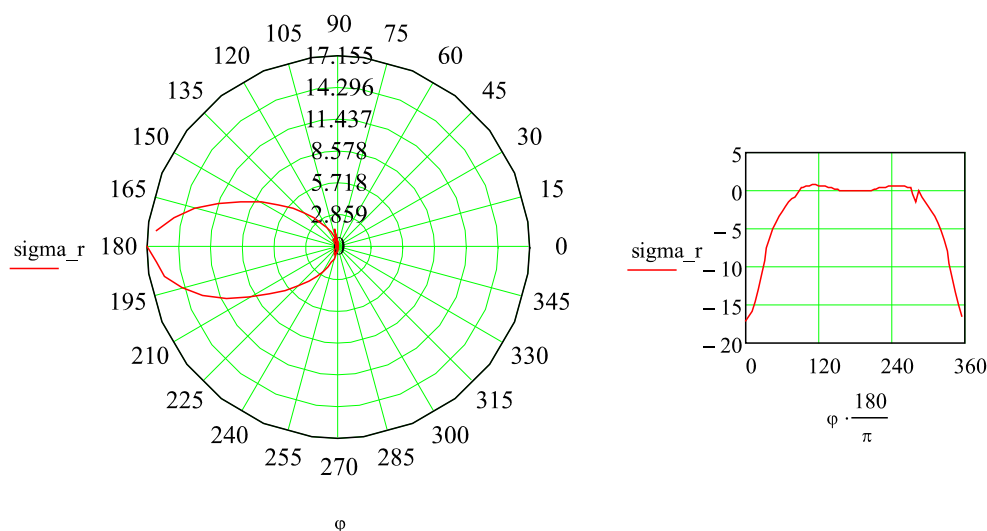


Рис. 26

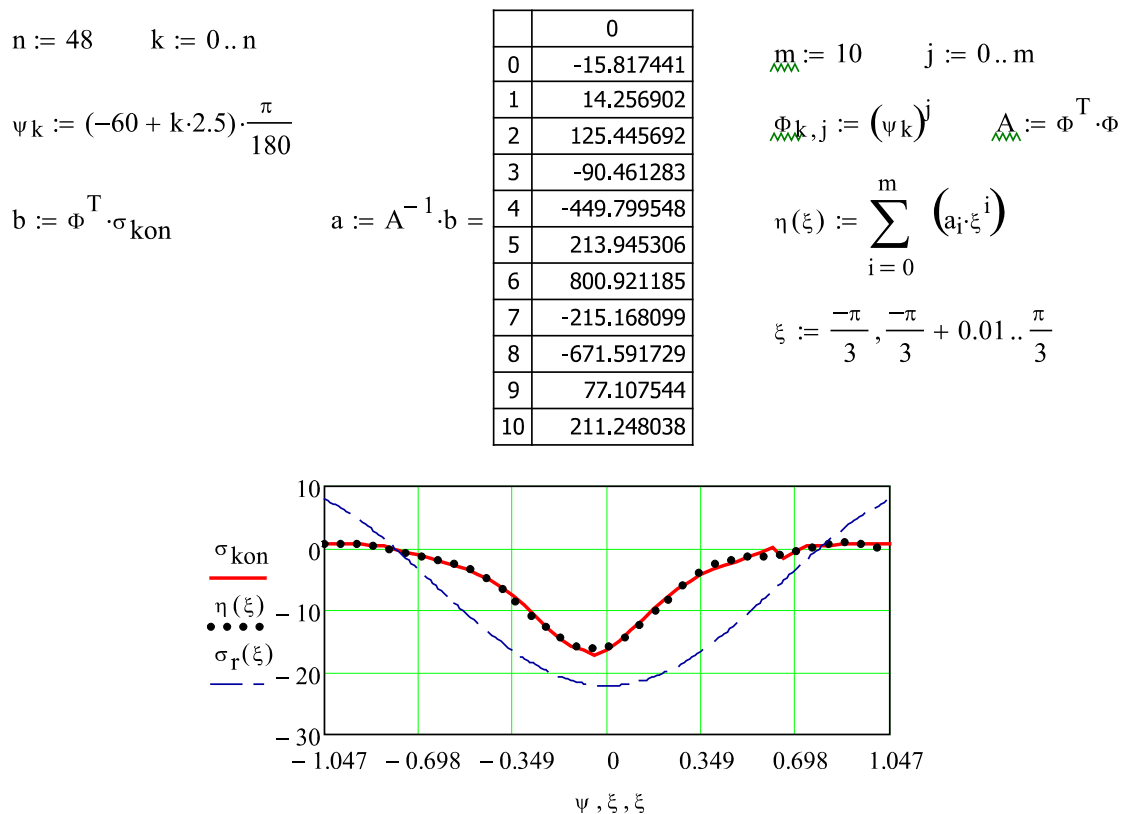


Рис. 27

штампом:

$$\sigma_r = k \sigma_{\text{см-ср}} \left( \cos \varphi - \cos \frac{\varphi_0}{2} \right) \cos \varphi,$$

где  $\sigma_{\text{см-ср}} = \frac{P}{d\delta};$

$P$  – сила, приложенная к нагелю;

$d$  – диаметр отверстия;

$\delta$  – толщина пластинки (в нашем случае

$$\sigma_{\text{см-ср}} = \frac{2}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \eta(\xi) d\xi = -6,487 \text{ Н/мм}^2;$$

$$k = \frac{1}{\left(1 - \cos \frac{\varphi_0}{2}\right)^2} \quad (\text{в нашем случае}$$

$$k = \frac{1}{\left(1 - \cos \frac{\pi}{4}\right)^2} = 11,657) \text{ приводит к завышен-}$$

ным контактными напряжениями. На рисунке 27 это кривая  $\sigma_r(\xi)$ . Предложенное выражение может быть использовано при выполнении предварительного проектировочного расчета соединения.

### Выводы

1. Программный комплекс MSC Patran-Nastran-Marc может с успехом использоваться при решении задач анизотропной теории упругости.

2. В случае плоского напряженного состо-

яния вклеенное упругое ядро снижает величину максимальных напряжений у отверстия в древесине. В связи с этим при создании нагельных соединений из древесины нагели целесообразно вклеивать в отверстия.

3. Получены приближенные полиномиальные выражения для оценки контактных напряжений при смятии древесины в отверстии цилиндрическим штампом.

### Список литературы

1. Коченов В. М. Несущая способность элементов и соединений деревянных конструкций. М., 1953. 319 с.
2. Донченко В. Г. Нагельные соединения в автодорожных мостах. М.: Дориздат, 1952. 56 с.
3. СНиП II-25-80. Деревянные конструкции. Расчетные характеристики материалов.
4. Ашкенази Е. К., Ганов Э. В. Анизотропия конструкционных материалов. Л.: Машиностроение, 1980. 247 с.
5. Тимошенко С. П., Гудьер Дж. Теория упругости. М.: Наука, 1975. 576 с.
6. Лехницкий С. Г. Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977. 416 с.
7. Жилкин В. А. Введение в метод конечного элемента. Челябинск; СПб.: Проспект науки; ЧГАА, 2014. 288 с.
8. Дмитриев П. А., Жилкин В. А., Стрижков Ю. Д. Исследование смятия древесины в отверстии с помощью оптически чувствительных покрытий // Известия вузов. Сер.: Строительство и архитектура. 1971. № 2. С. 18–24.

**Жилкин Виталий Афанасьевич**, докт. техн. наук, профессор кафедры информационных технологий и прикладной математики, ФГБОУ ВПО «Челябинская государственная агроинженерная академия» (ЧГАА).

E-mail: Zhilkin\_Vitalii@mail.ru.

\* \* \*