

III 1975

6

2

3

TY 19-32-73

7

1

ДИА  ИЛЬМ

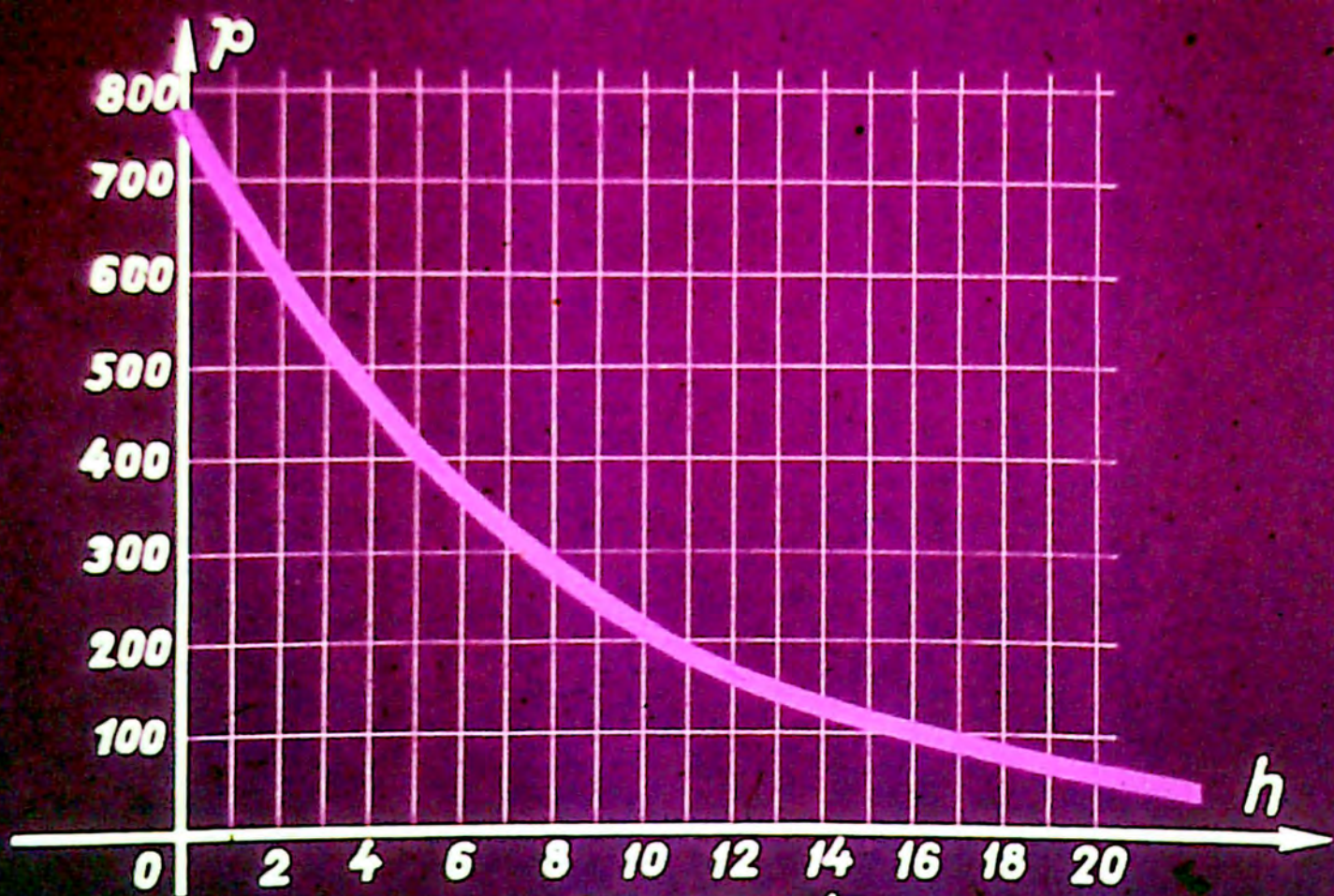
07-3-171

По заказу Министерства просвещения РСФСР

ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ И ЕЁ СВОЙСТВА

Диафильм по математике для средней школы

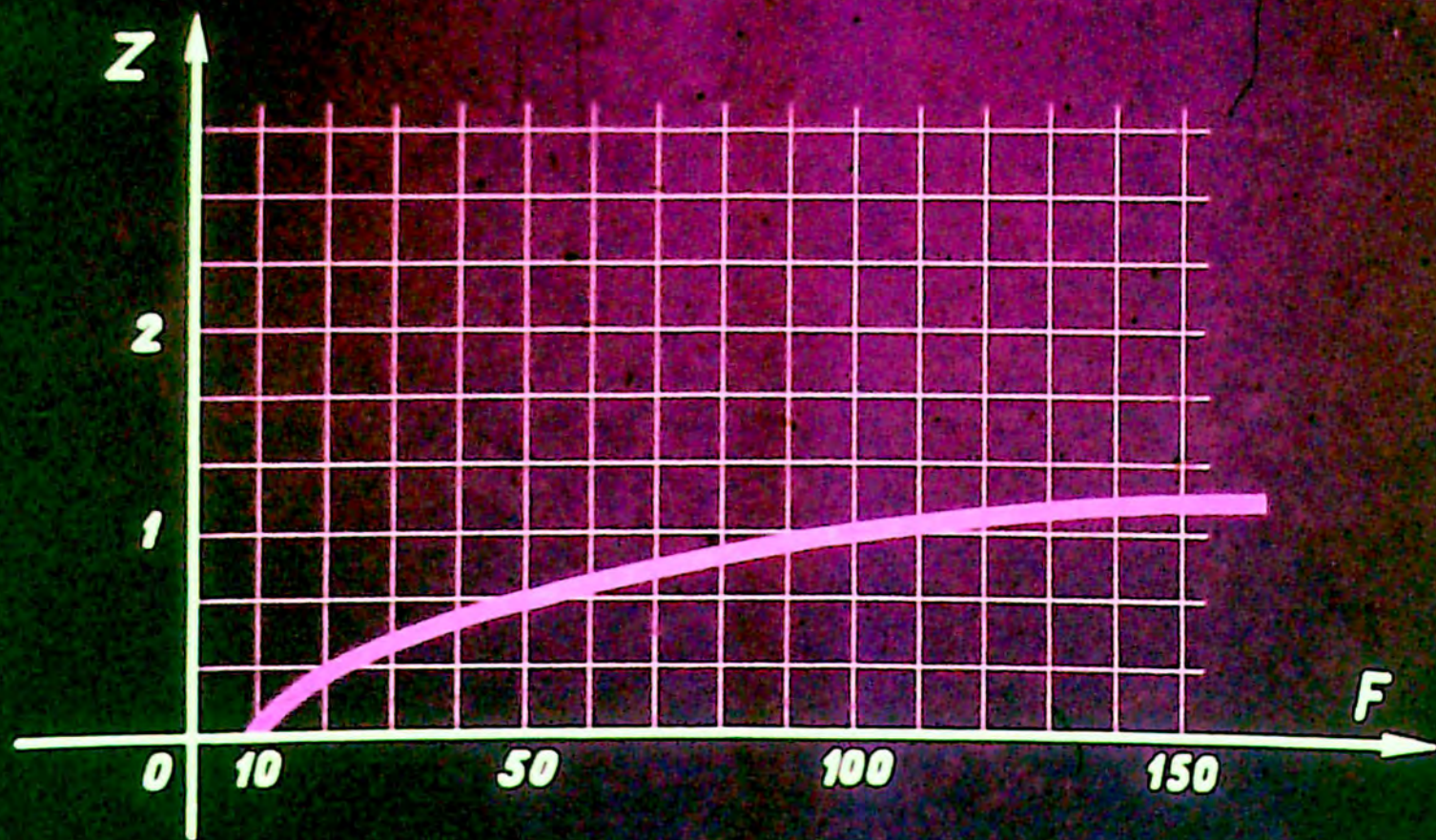
Давление p (в мм рт. ст.) воздуха на высоте h (в км) над уровнем моря находится по формуле $p = p_0 a^h$, где p_0 — давление на уровне моря, a — постоянная, значение которой определяется температурой воздуха. При 15°C формула принимает вид: $p = 760 \cdot 0.8818^h$.



Это—график зависимости $p=760 \cdot 0,8818^h$. Узнайте, какое давление будет на уровне моря; на высоте 2 км; 5 км; 10 км. На какой высоте давление равно 600 мм рт. ст.; 300 мм рт. ст.; 200 мм рт. ст.?



Чтобы удержать животное, мальчик обмотал верёвку вокруг кола. Чем больше витков Z верёвки, тем меньшую силу F_0 нужно приложить, чтобы уравновесить силу F .

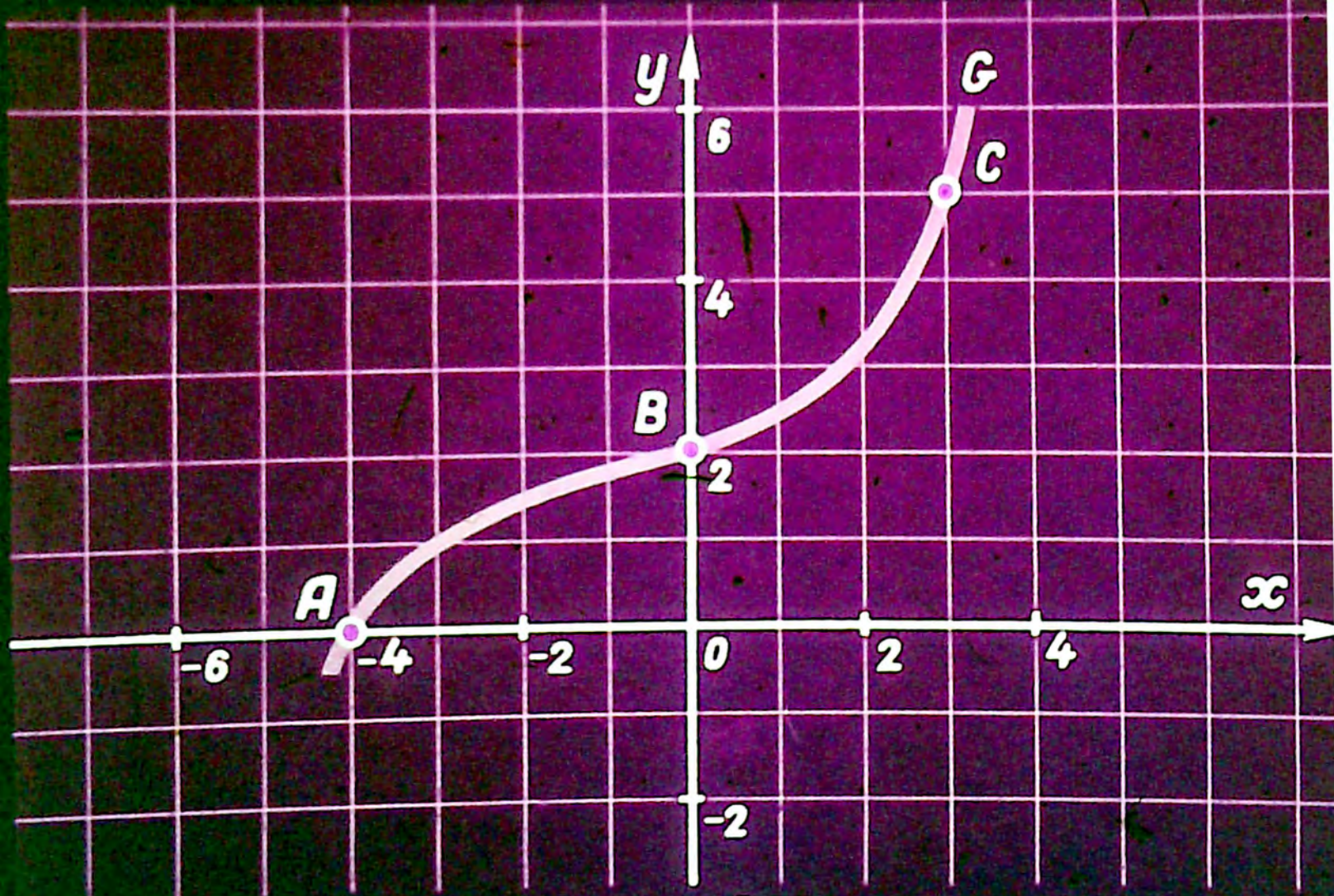


При постоянной силе $F_0=10$ кГ зависимость между величинами F и Z выражается формулой: $Z = \lg \frac{F}{10}$. Вот график этой зависимости. Сколько нужно сделать витков верёвки, чтобы (с помощью силы $F_0=10$ кГ) уравновесить силу $F=10$ кГ; 50 кГ; 100 кГ?



С помощью формулы $t = \log_{\alpha} \frac{M}{M_0}$, где t — время радиоактивного распада вещества, M_0 и M — начальная и конечная массы вещества, α — постоянная, археологи устанавливают возраст минерала и археологической находки.

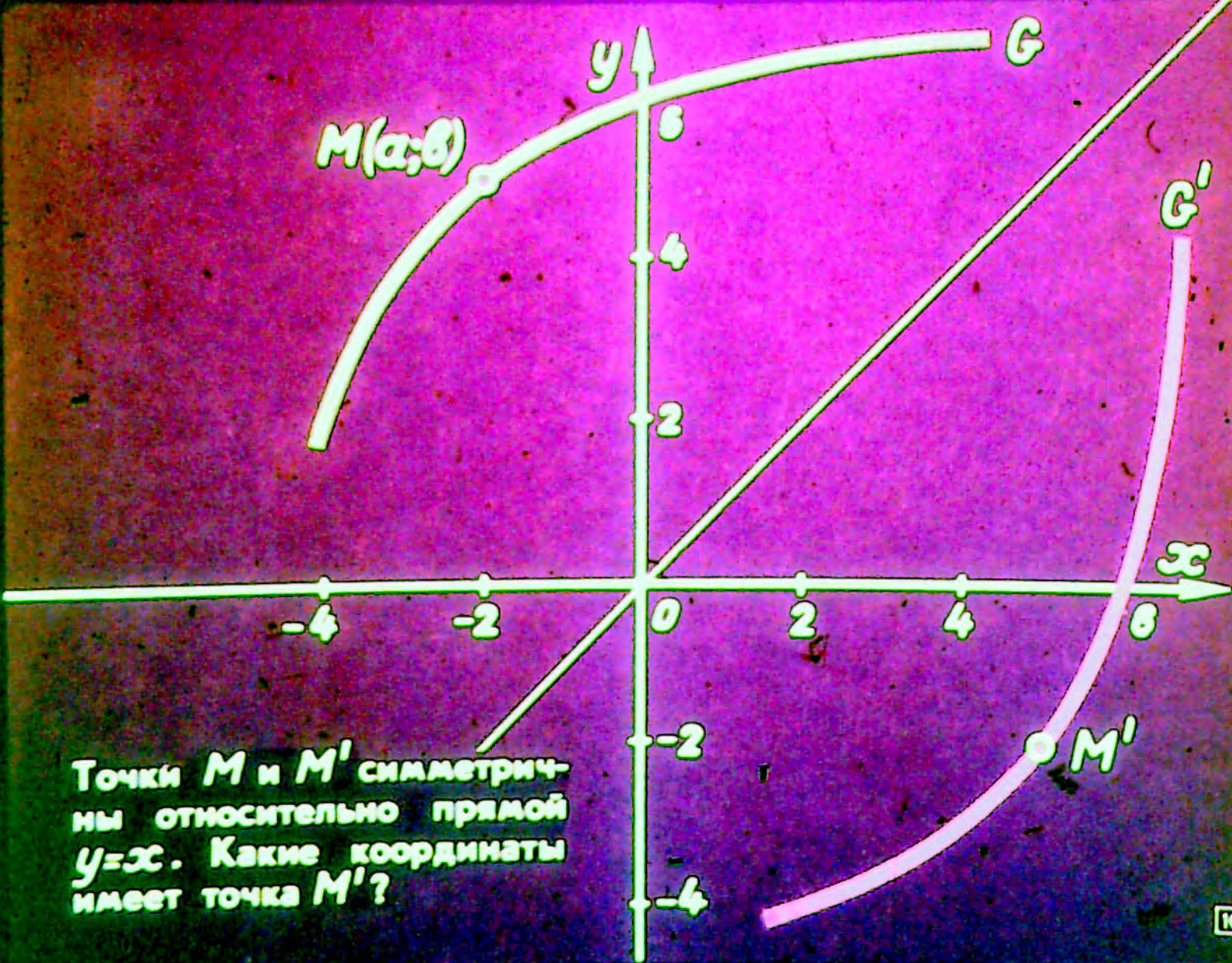
В основе многих явлений природы лежит закон, по которому зависимость между величинами выражается в виде показательной или логарифмической функций. Выясним связь между ними.



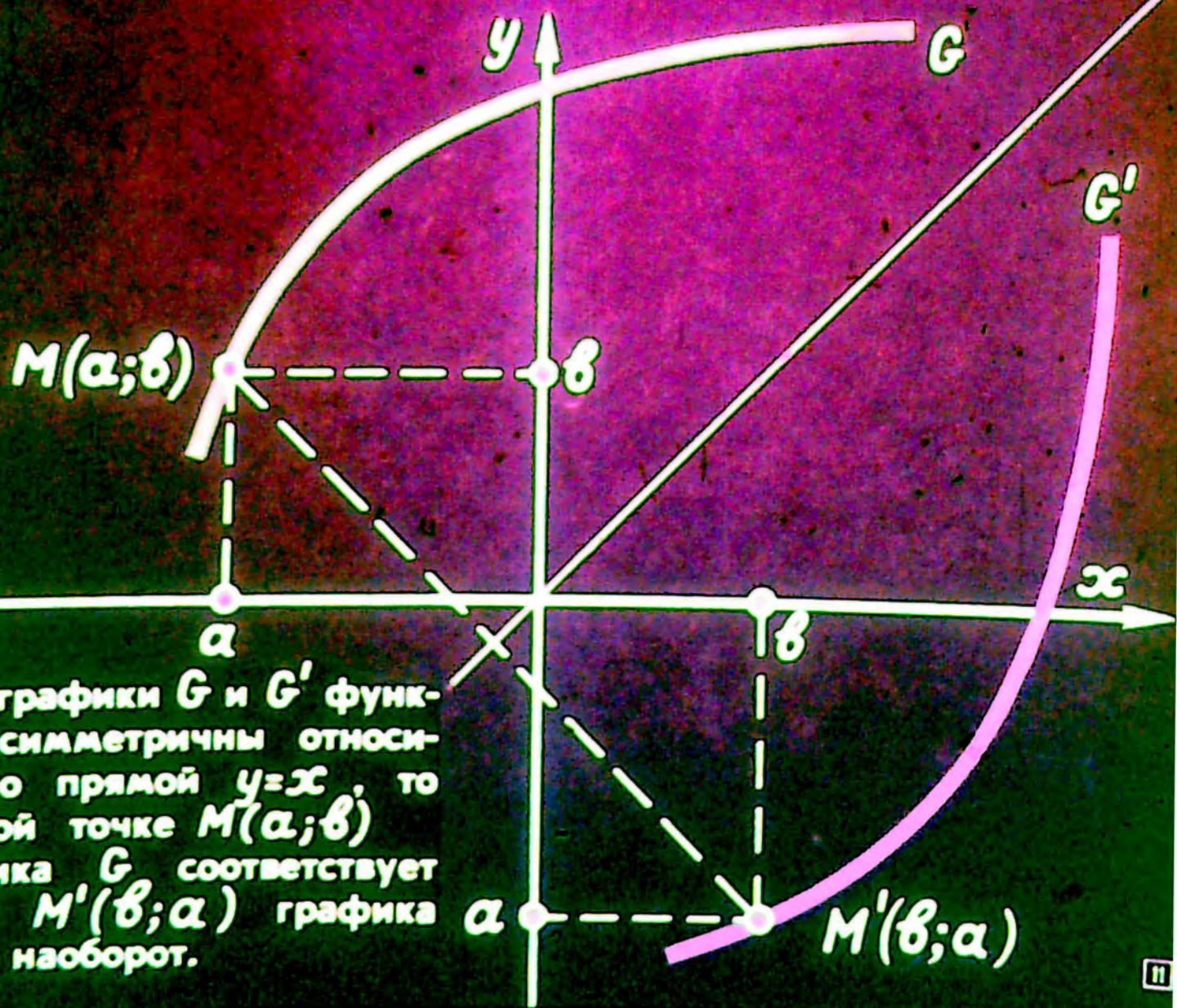
Пусть G — график функции $y = f(x)$. Найдите значение y при $x = -4; 0; 3$.

График G' уравнения $y = \psi(x)$ симметричен графику G относительно прямой $y = x$. Найдите координаты точек A' , B' и C' , зная, что они симметричны точкам A , B и C относительно прямой $y = x$.

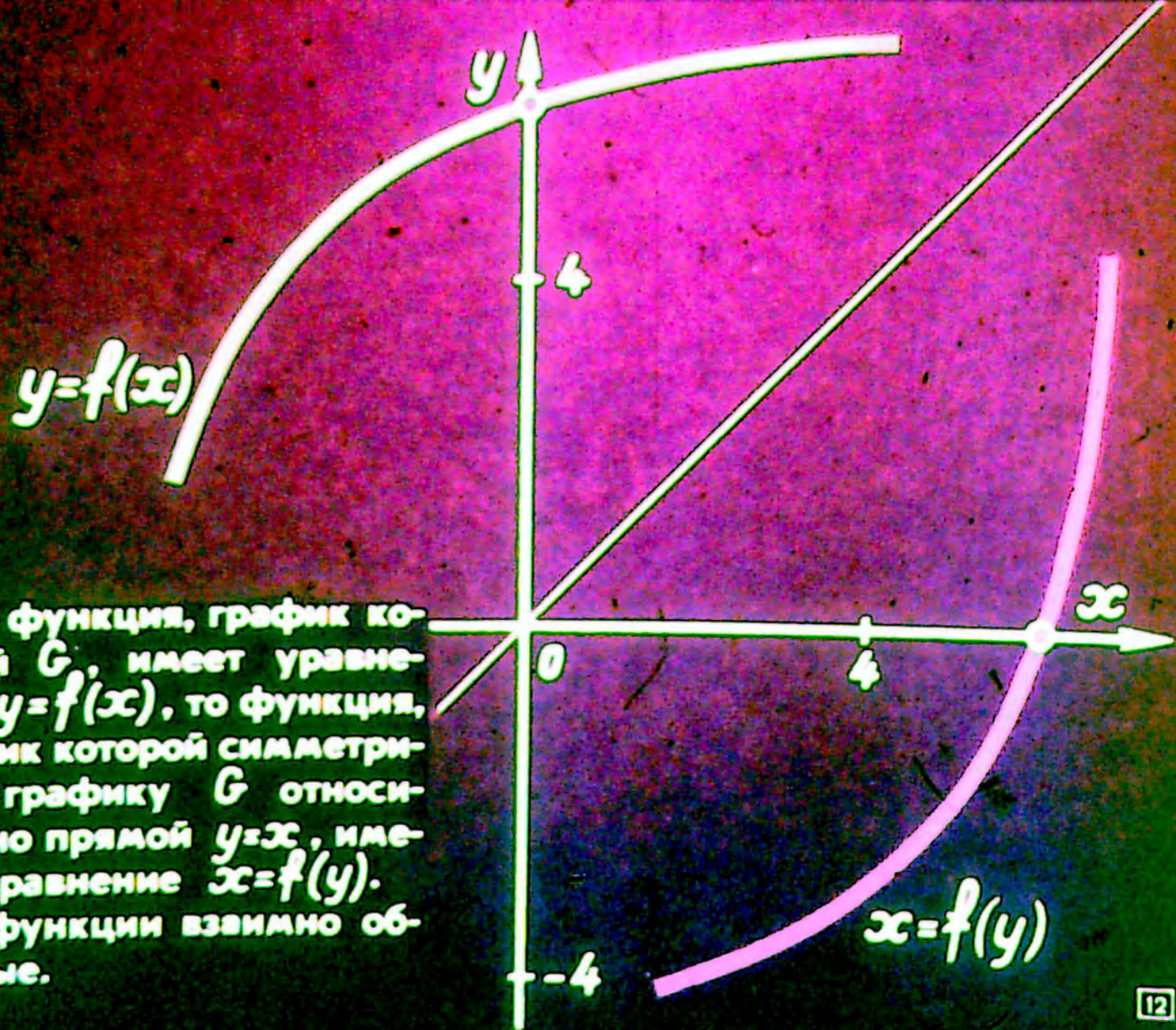




Точки M и M' симметричны относительно прямой $y=x$. Какие координаты имеет точка M' ?

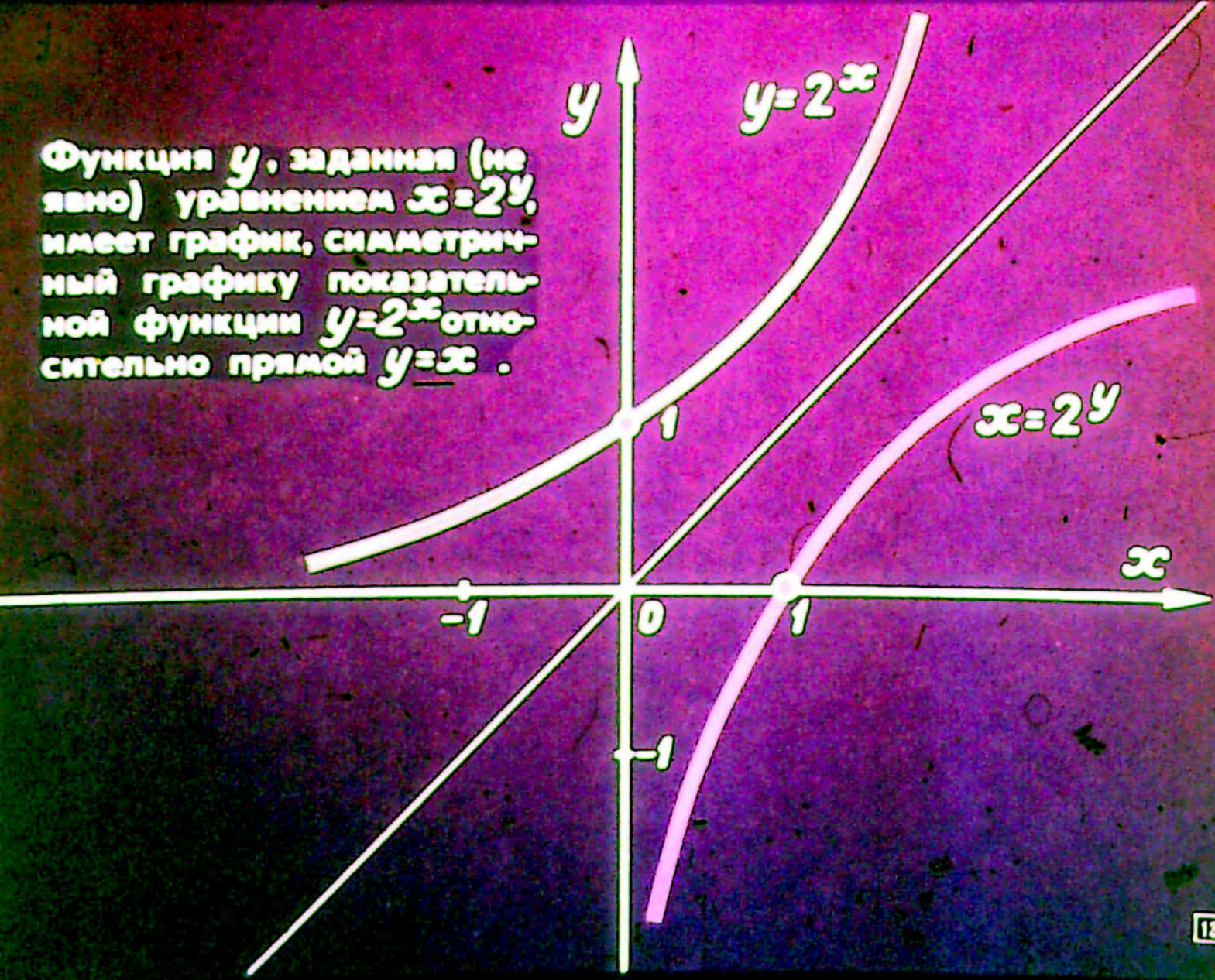


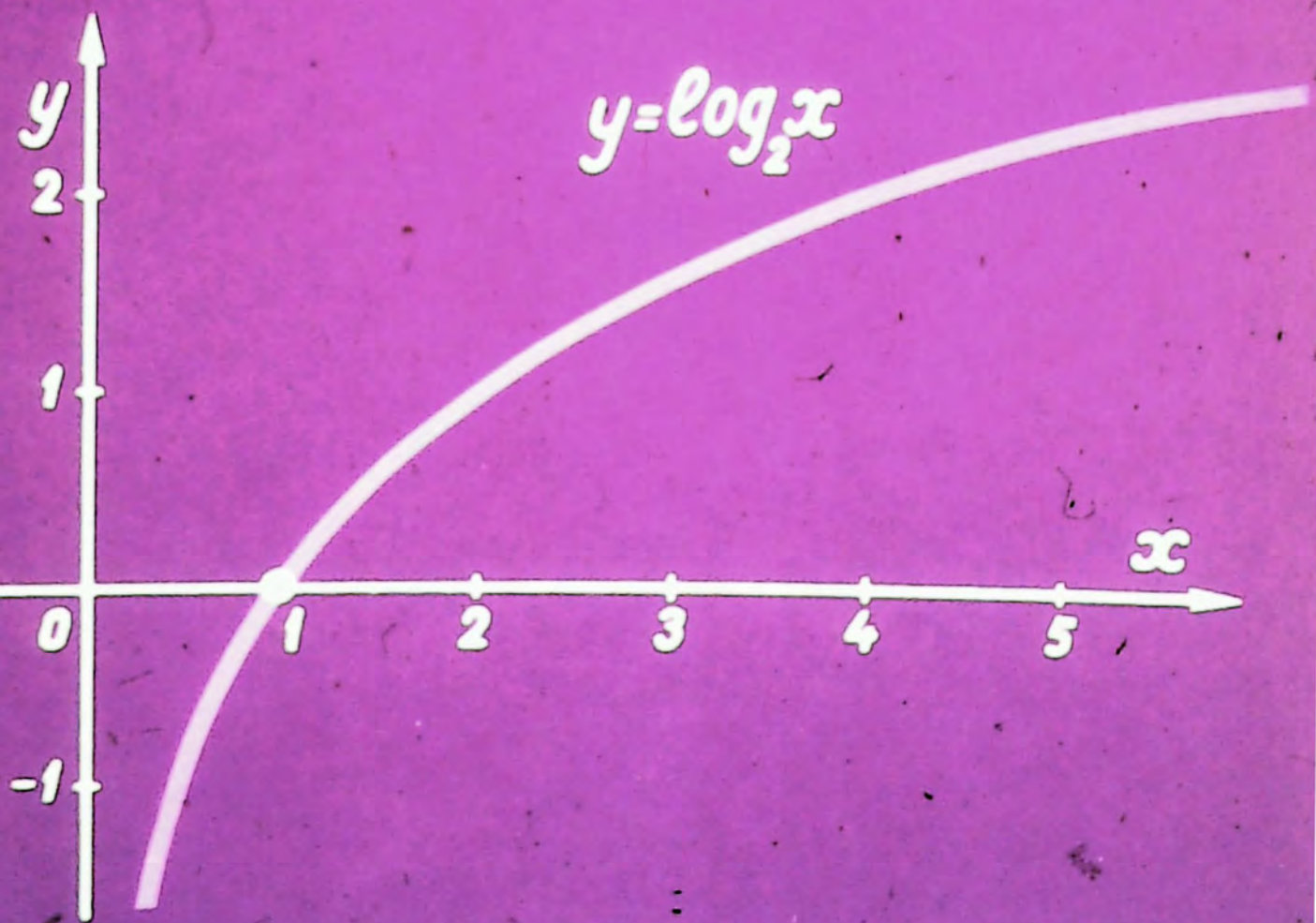
Если графики G и G' функций симметричны относительно прямой $y=x$, то каждой точке $M(\alpha; \beta)$ графика G соответствует точка $M'(\beta; \alpha)$ графика G' и наоборот.



— Если функция, график которой G , имеет уравнение $y=f(x)$, то функция, график которой симметричен графику G относительно прямой $y=x$, имеет уравнение $x=f(y)$. Эти функции взаимно обратные.

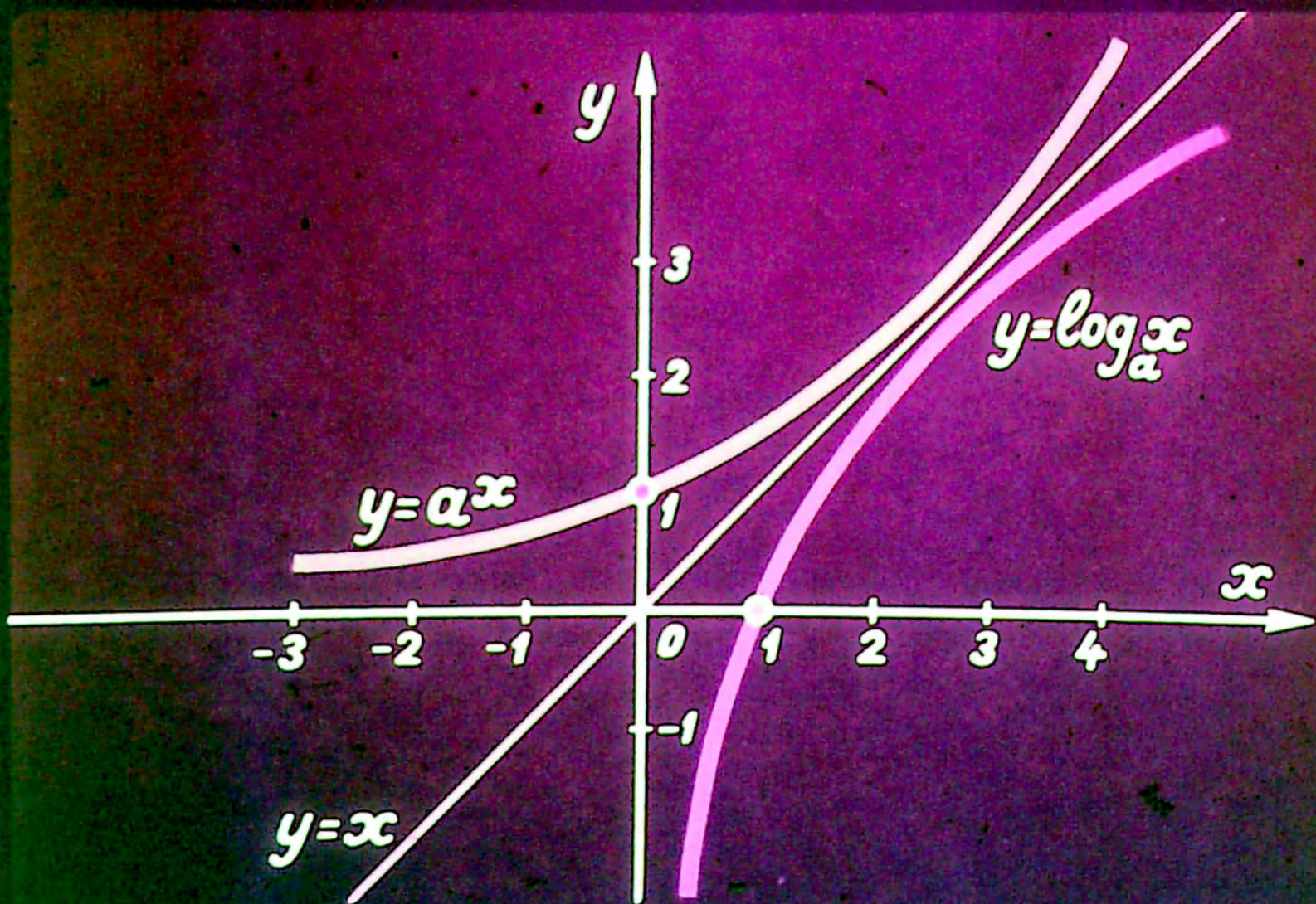
Функция y , заданная (не явно) уравнением $x=2^y$, имеет график, симметричный графику показательной функции $y=2^x$ относительно прямой $y=x$.



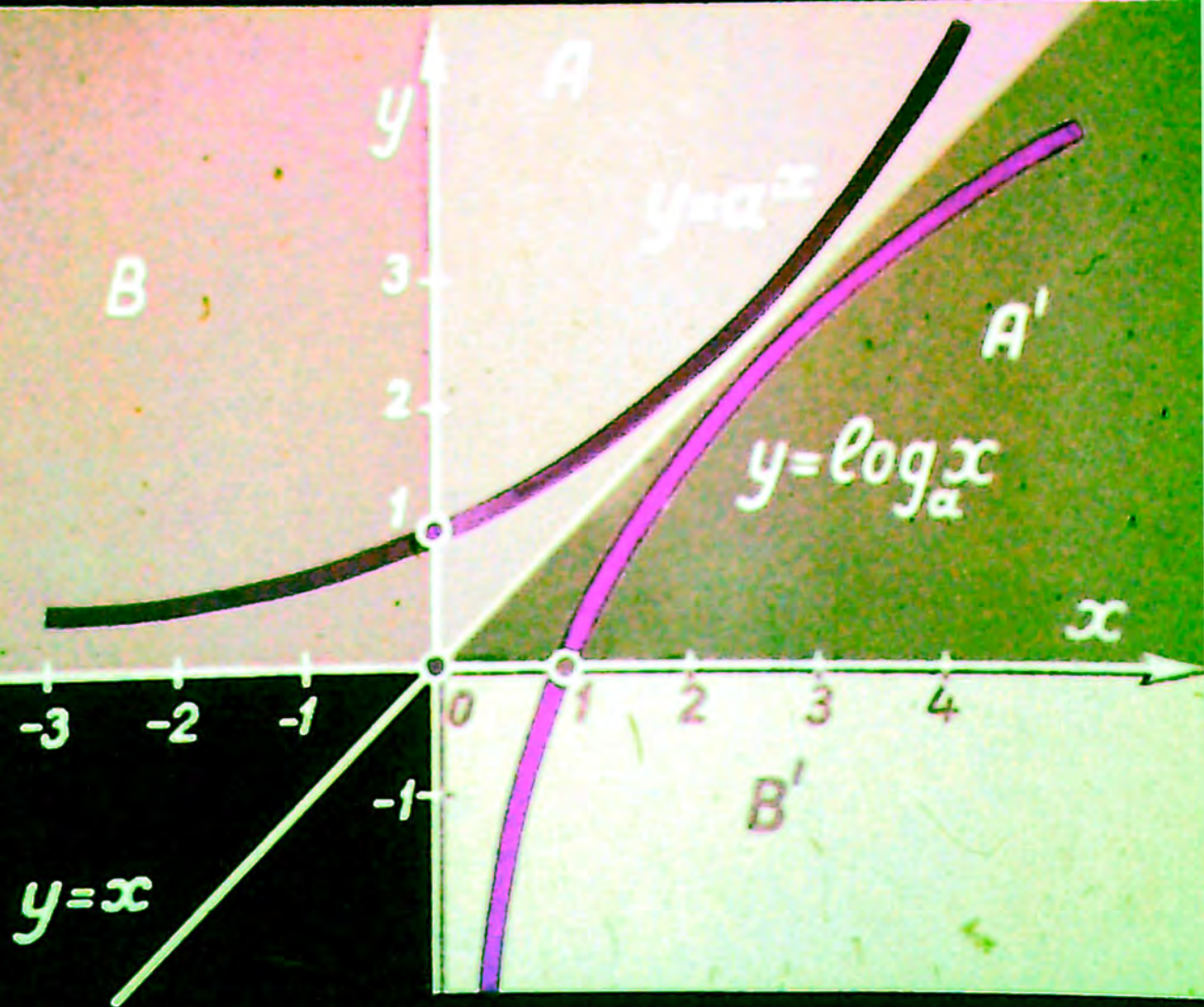


В уравнении $x=2^y$ выразим переменную y (явно) через x .
Получим уравнение логарифмической функции $y=\log_2 x$.

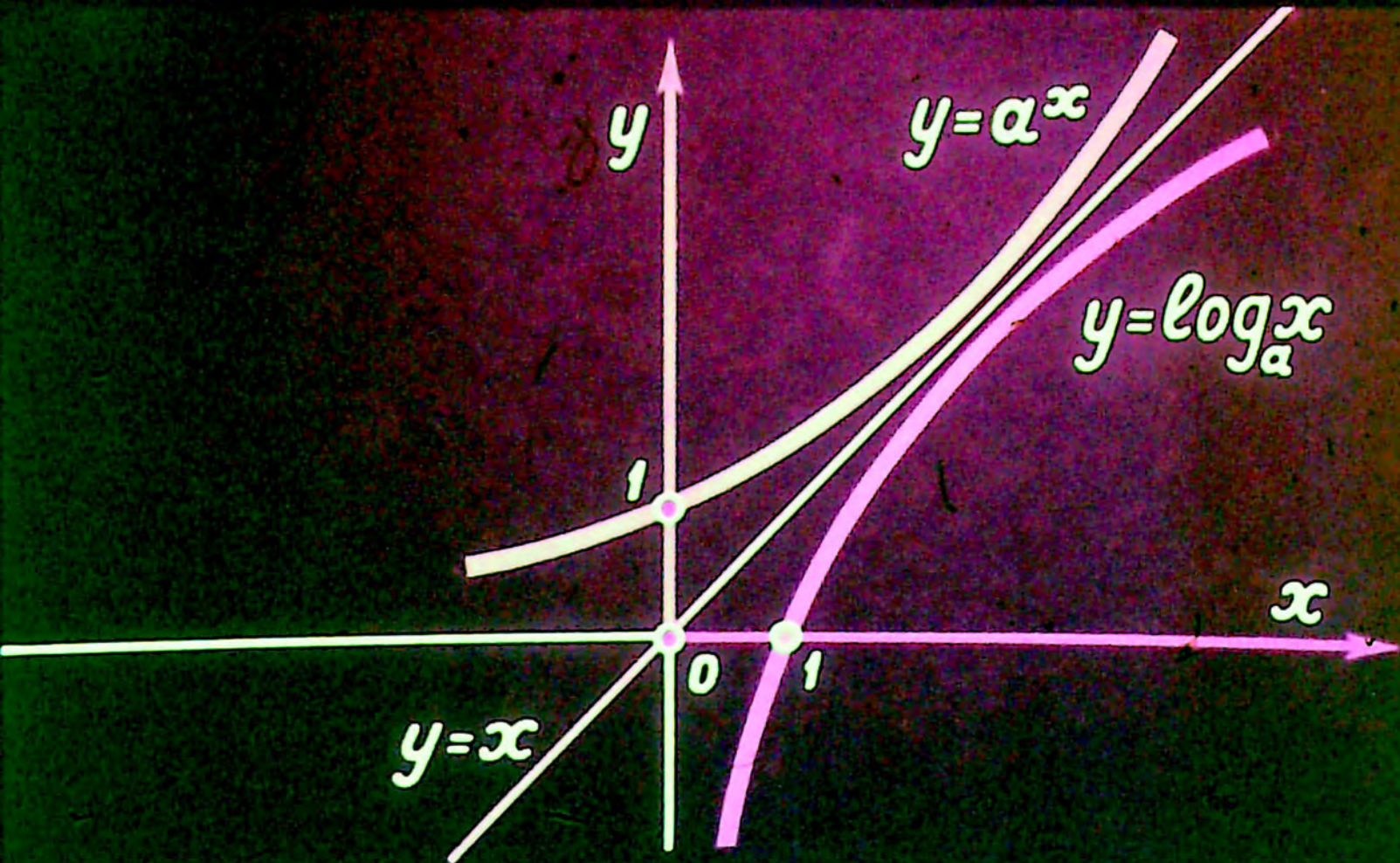
*Свойства
логарифмической
функции*



Свойства функции $y = \log_a x$ при $a > 1$ можно легко обнаружить, зная свойства показательной функции $y = a^x$.



При симметрии относительно прямой $y=x$ область A переходит в A' ; B — в B' . Точки луча Oy — в точки луча Ox .



Показательная функция определена в интервале $(-\infty; +\infty)$, и множество её значений образует промежуток $(0; +\infty)$. Логарифмическая функция определена в интервале $(0; +\infty)$, и множество её значений составляет промежуток $(-\infty; +\infty)$. 18

$$a=3$$

 y

$$y=a^x$$

$$y=\log_a x$$

 x

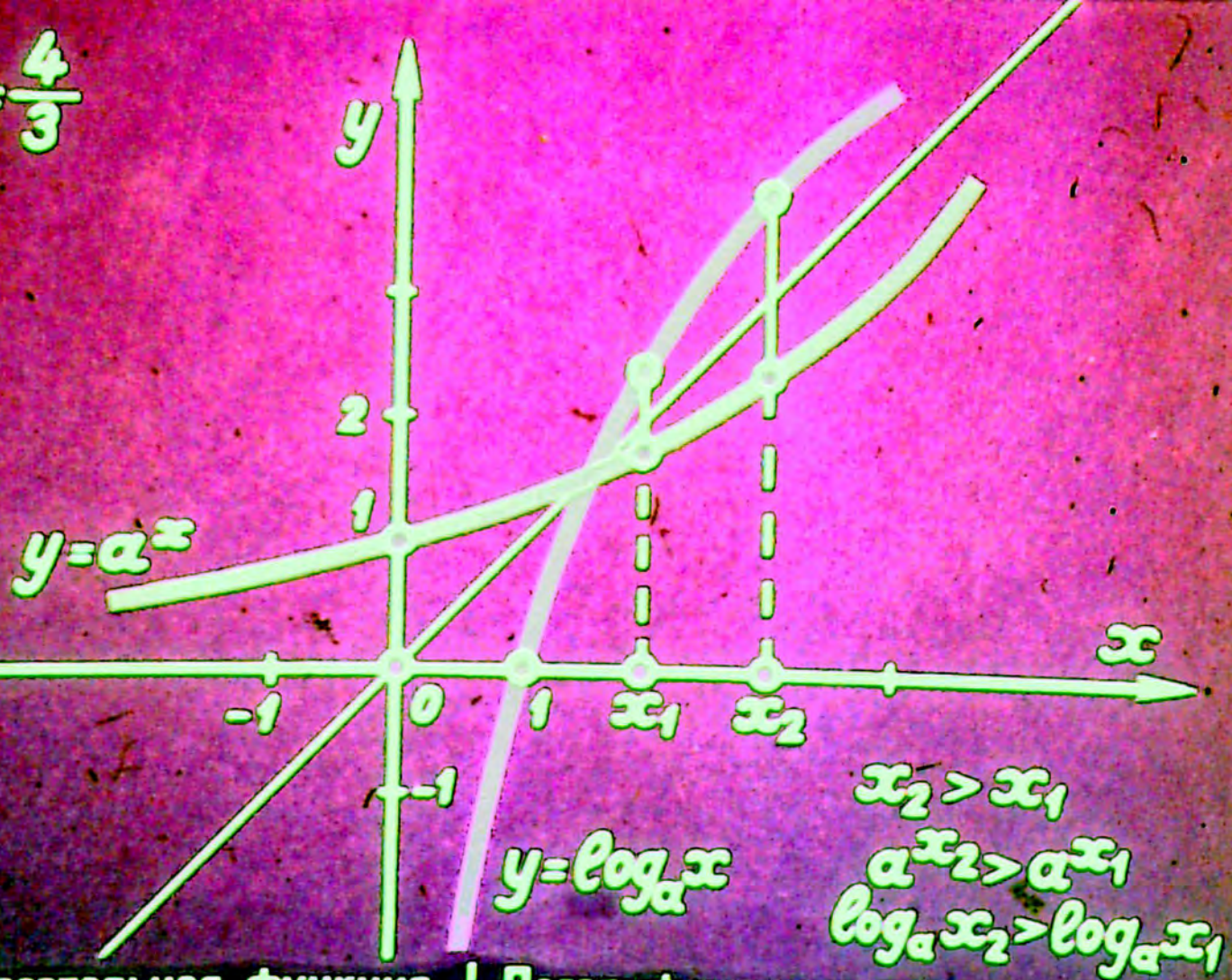
Показательная функция:

$$\begin{aligned} 0 < y < 1 & \text{ при } x < 0 \\ y = 1 & \text{ при } x = 0 \\ y > 1 & \text{ при } x > 0. \end{aligned}$$

Логарифмическая функция:

$$\begin{aligned} y < 0 & \text{ при } 0 < x < 1 \\ y = 0 & \text{ при } x = 1 \\ y > 0 & \text{ при } x > 1. \end{aligned}$$

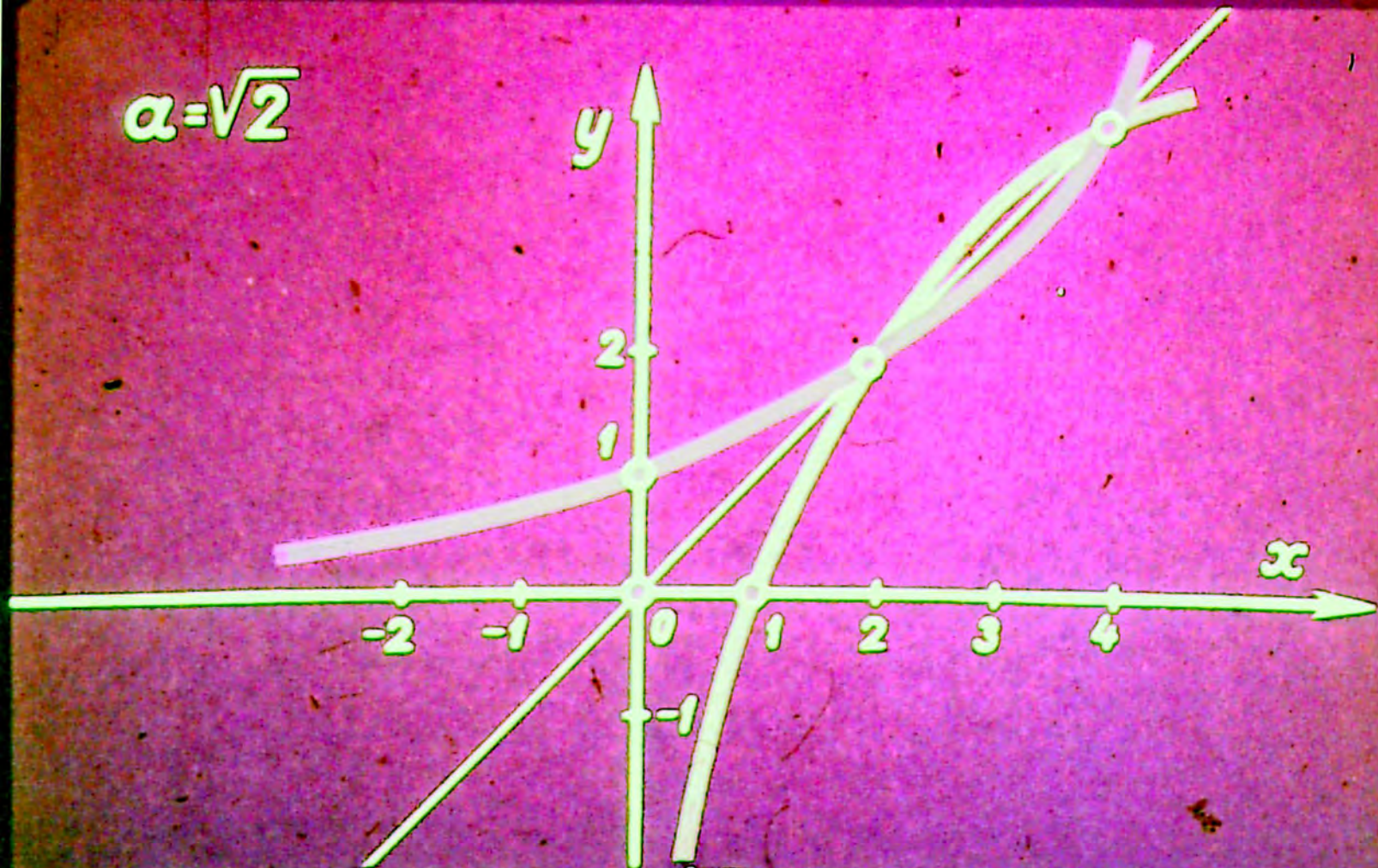
$$a = \frac{4}{3}$$



Показательная функция
возрастает (при $a > 1$).

Логарифмическая функция
возрастает (при $a > 1$).

$$\alpha = \sqrt{2}$$



Показательная функция:
при $x \rightarrow +\infty$ $y \rightarrow +\infty$,
 $x \rightarrow -\infty$ $y \rightarrow 0$.

Логарифмическая функция:
при $x \rightarrow +\infty$ $y \rightarrow +\infty$,
 $x \rightarrow 0$ $y \rightarrow -\infty$.

$$y=a^x$$

 y

3

2

1

$$a=\frac{1}{2}$$

 x

-2

-1

0

1

2

3

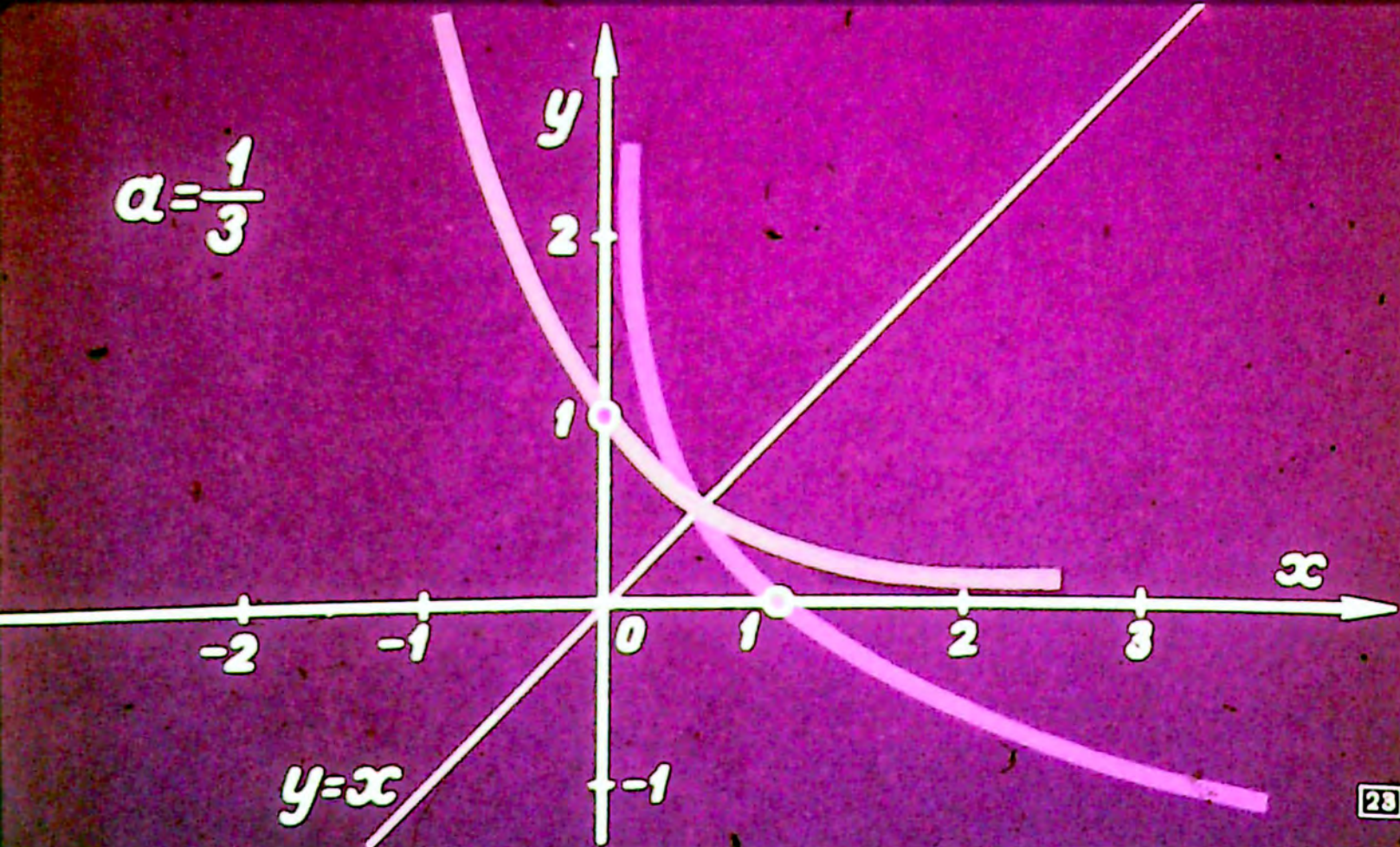
$$y=x$$

-1

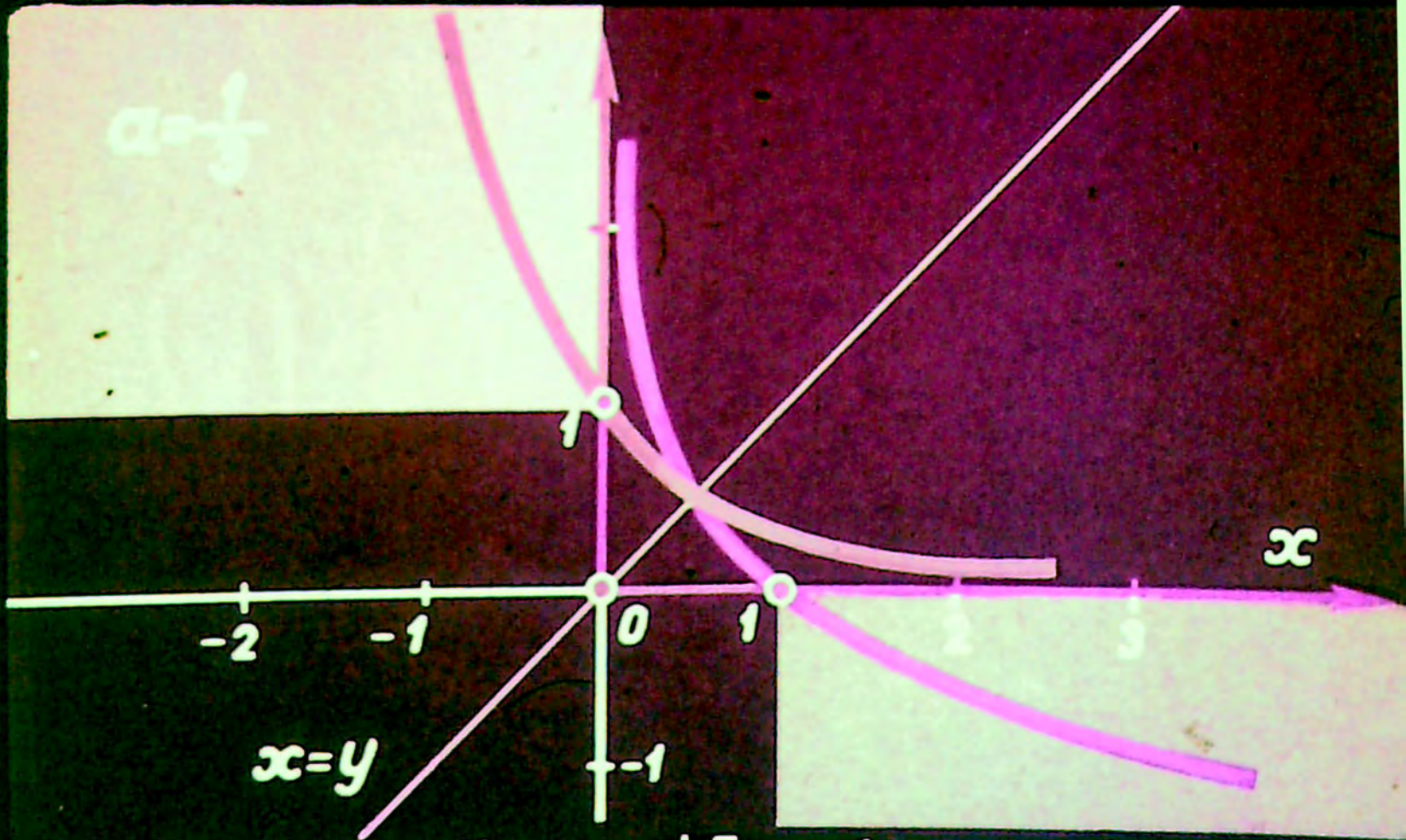
$$y=\log_a x$$

Рассмотрим графики двух взаимно обратных функций $y=a^x$ и $y=\log_a x$ при $0 < a < 1$.

$$a = \frac{1}{3}$$



Показательная функция определена на множестве $(-\infty; +\infty)$,
и множество её значений образует промежуток $(0; +\infty)$.
Логарифмическая функция определена в интервале $(0; +\infty)$,
и множество её значений составляет промежуток $(-\infty; +\infty)$.

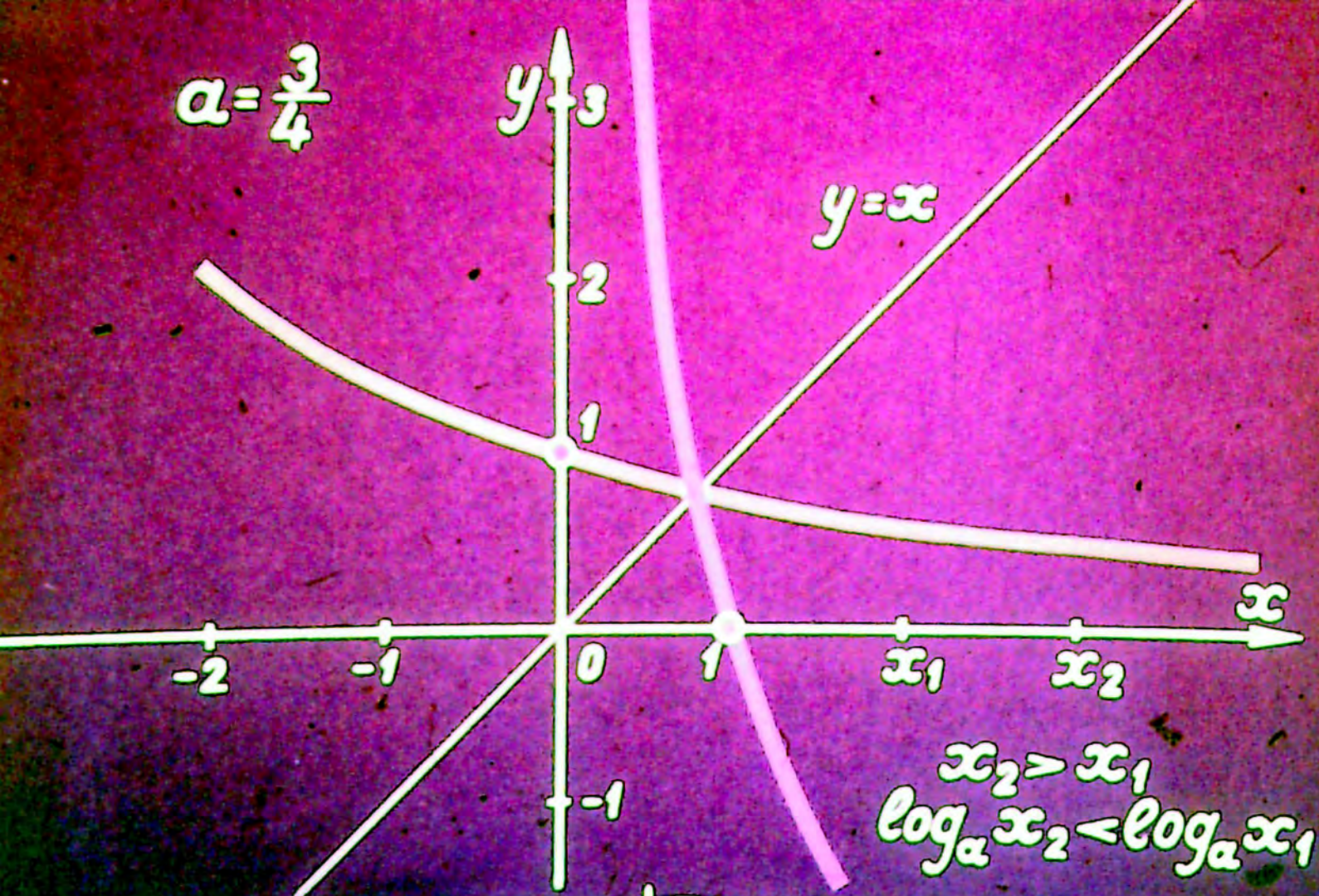


Показательная функция:

$$\begin{aligned} y &> 1 && \text{при } x < 0 \\ y &= 1 && \text{при } x = 0 \\ 0 < y &< 1 && \text{при } x > 0. \end{aligned}$$

Логарифмическая функция:

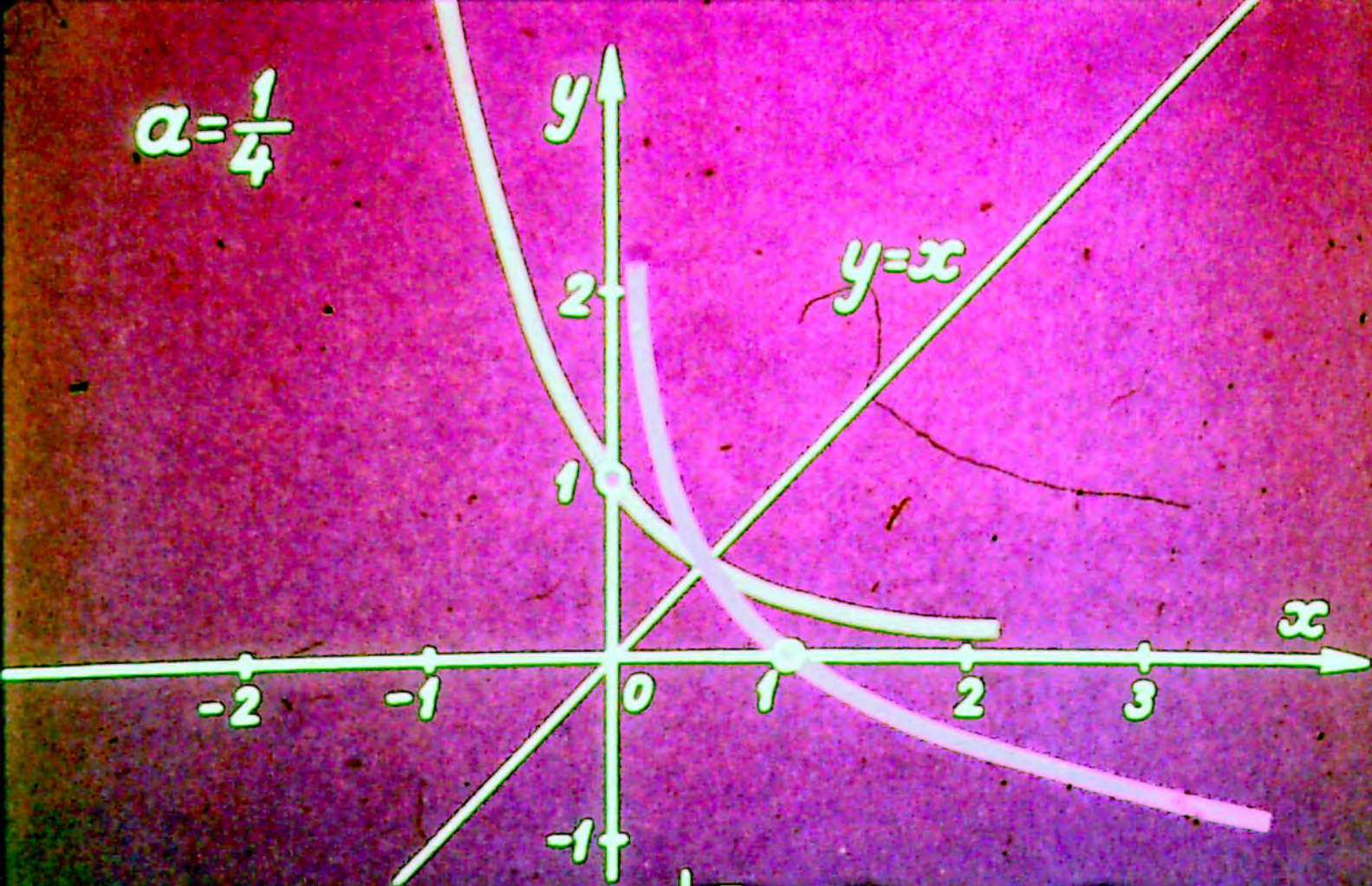
$$\begin{aligned} y &< 0 && \text{при } x > 1 \\ y &= 0 && \text{при } x = 1 \\ y &> 0 && \text{при } 0 < x < 1. \end{aligned}$$



Показательная функция
убывает (при $0 < a < 1$).

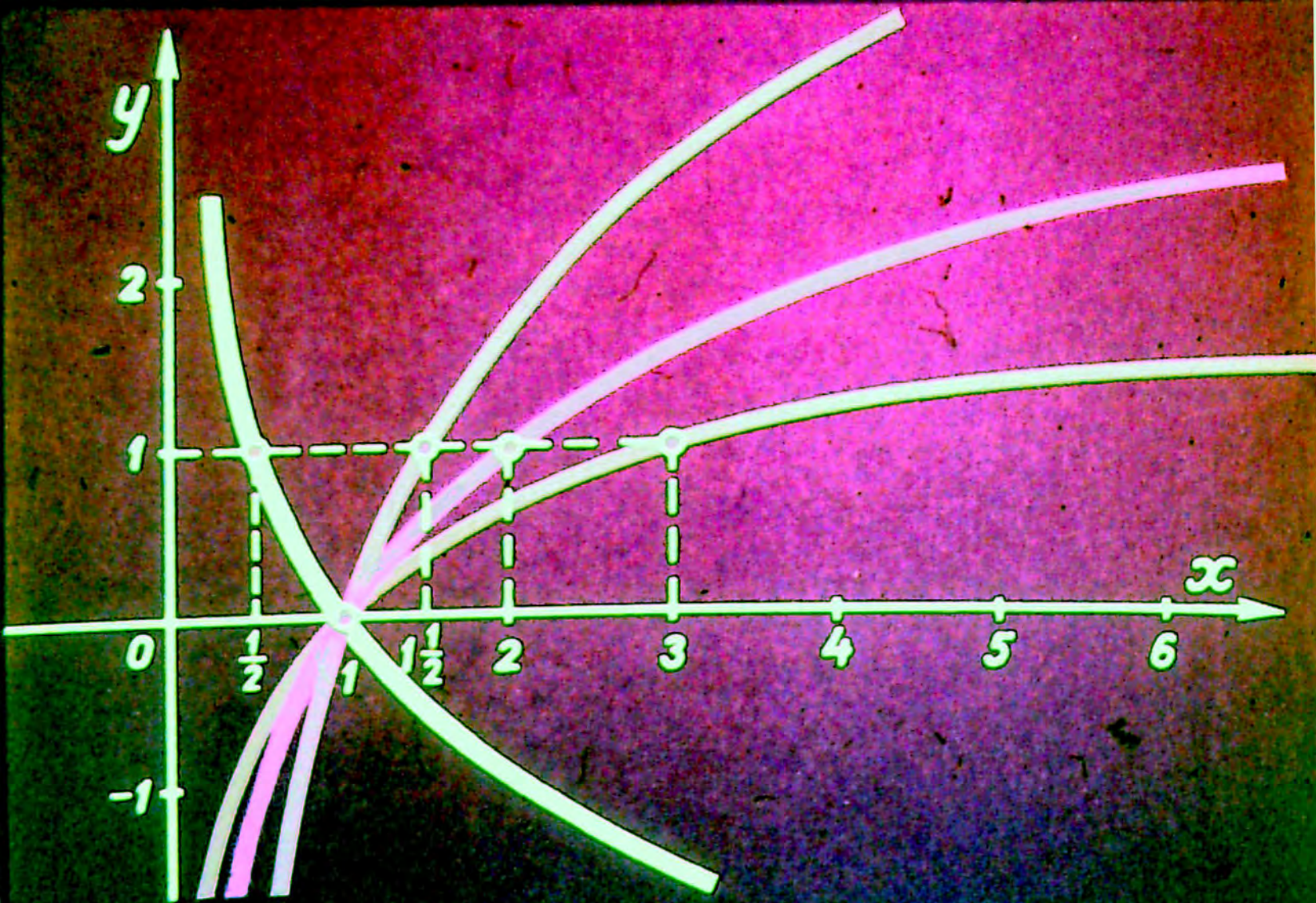
Логарифмическая функция
убывает (при $0 < a < 1$).

$$a = \frac{1}{4}$$

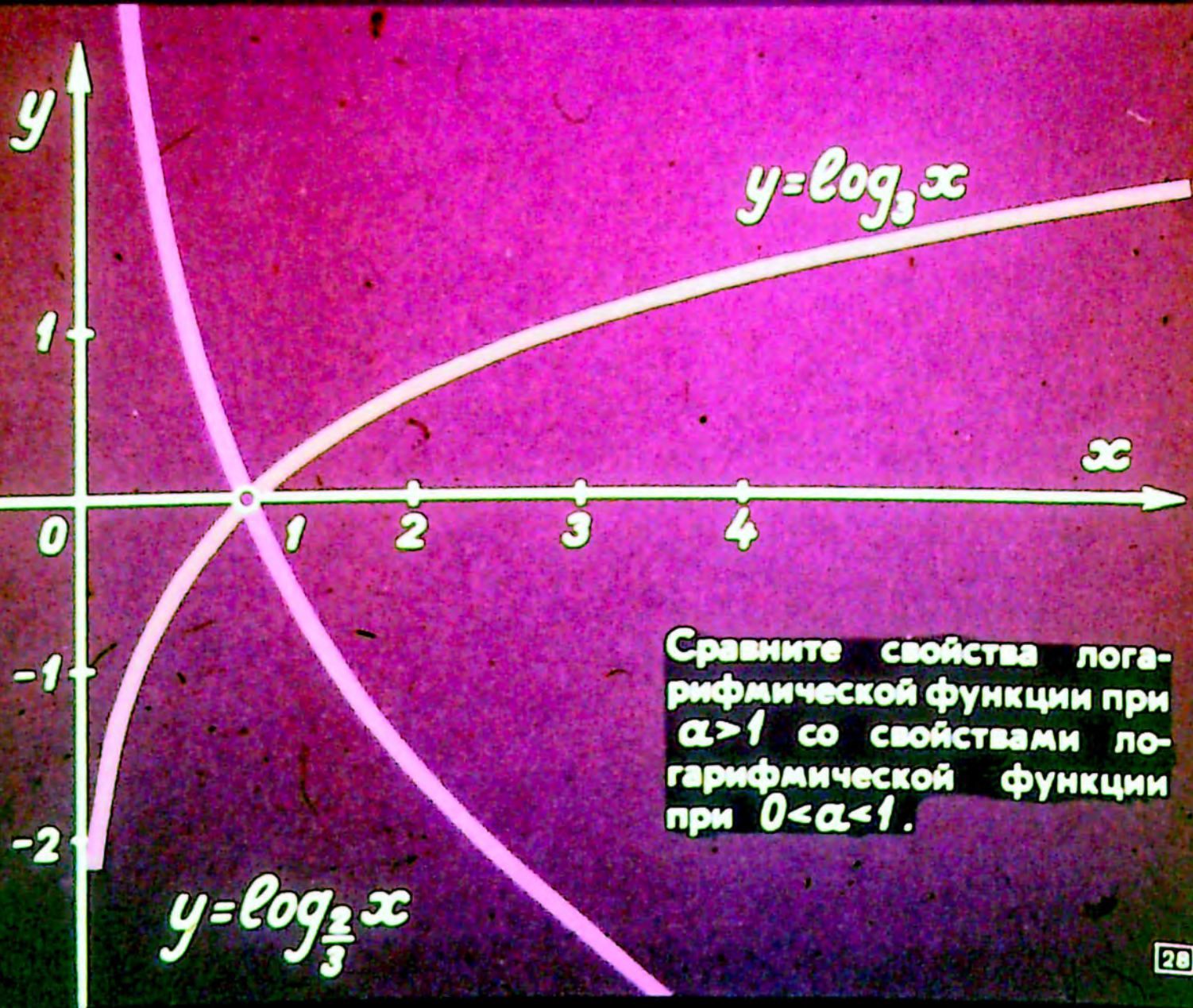


Показательная функция:
при $x \rightarrow +\infty$ $y \rightarrow 0$,
 $x \rightarrow -\infty$ $y \rightarrow +\infty$.

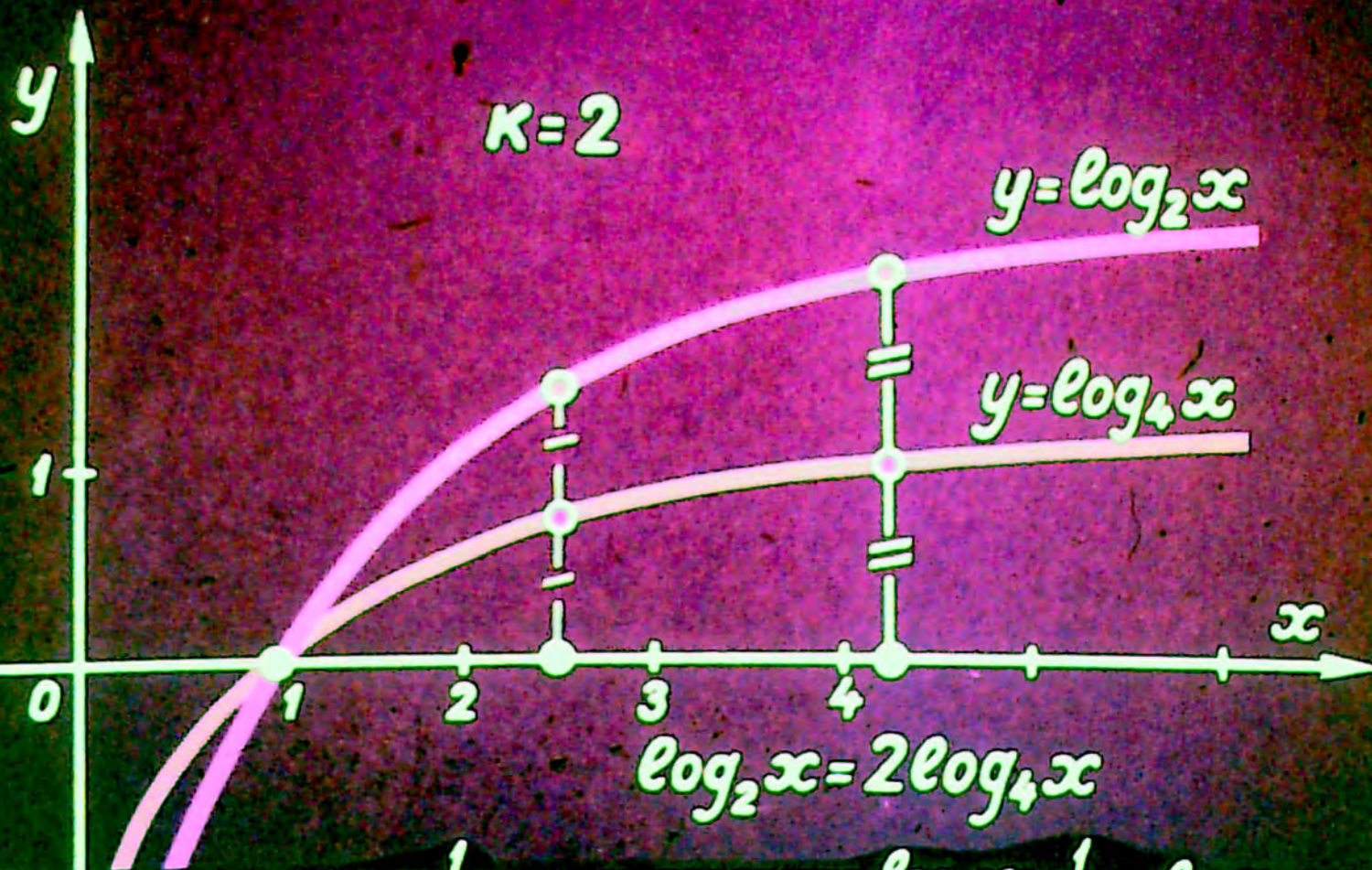
Логарифмическая функция:
при $x \rightarrow 0$ $y \rightarrow +\infty$,
 $x \rightarrow +\infty$ $y \rightarrow -\infty$.



Найдите основание каждой логарифмической функции.

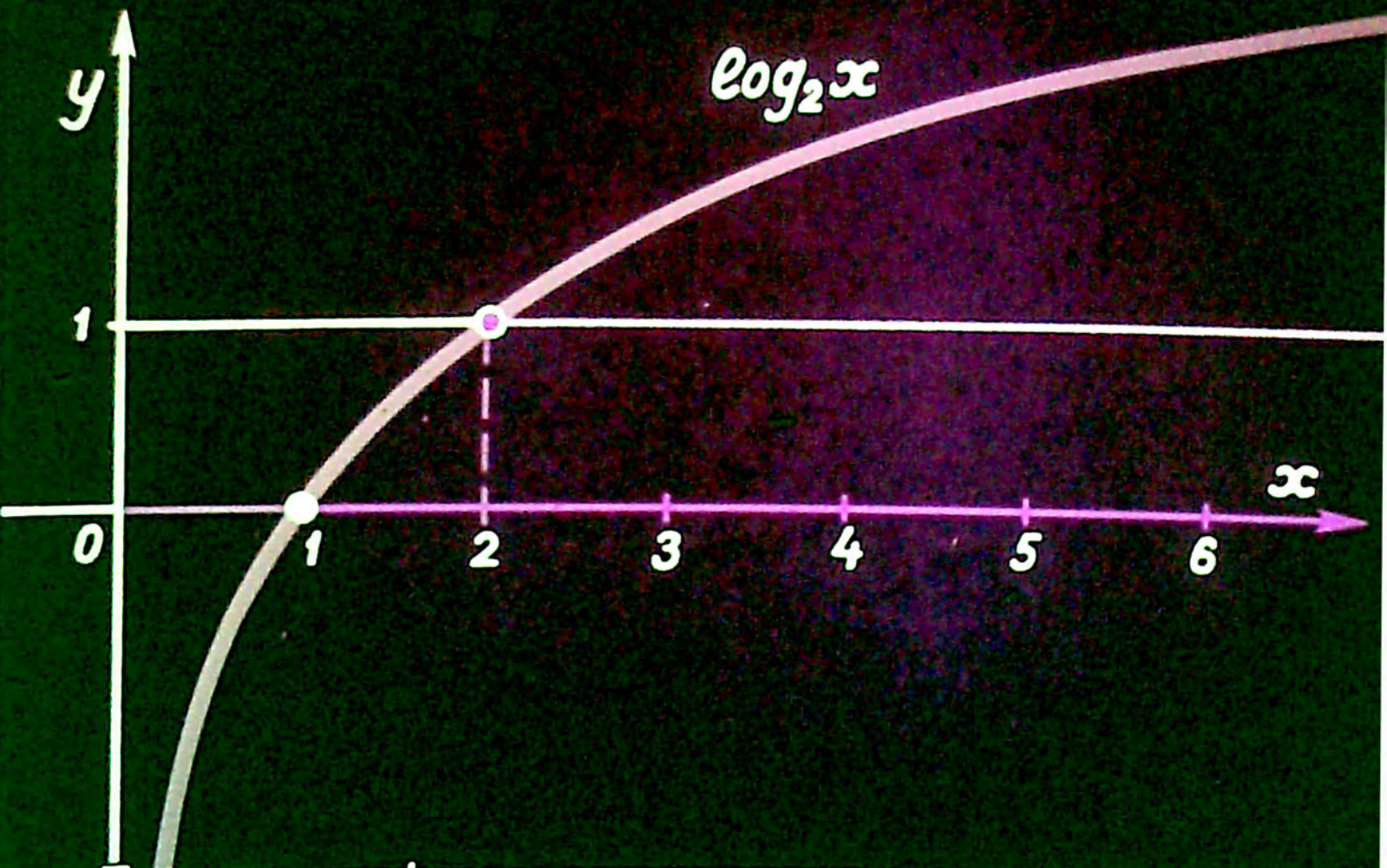


Сравните свойства логарифмической функции при $\alpha > 1$ со свойствами логарифмической функции при $0 < \alpha < 1$.



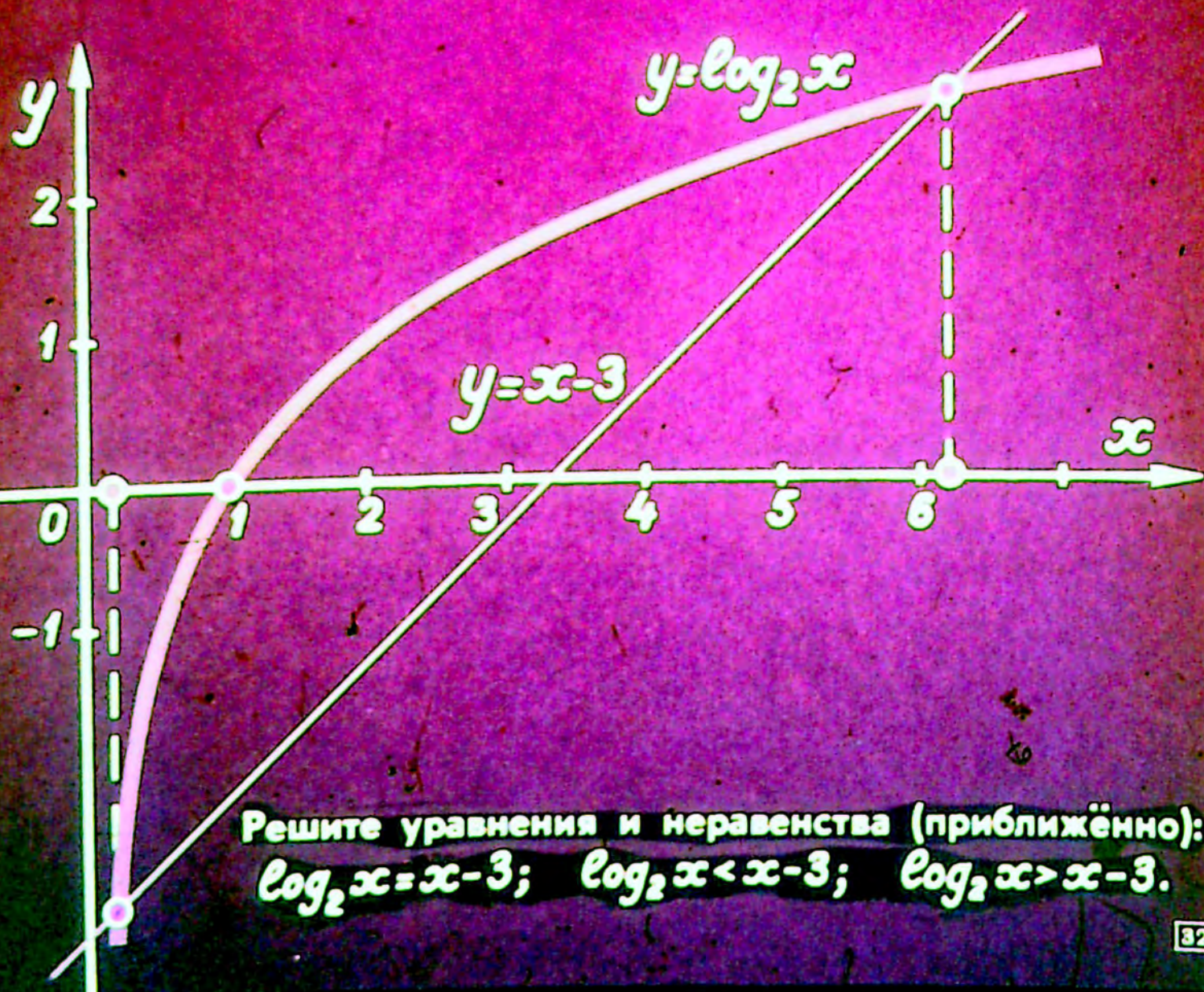
Коэффициент $K = \frac{1}{\log_a b}$ в равенстве $\log_b x = \frac{1}{\log_a b} \cdot \log_a x$ называют модулем перехода от логарифма с основанием a к логарифму с основанием b . Объясните геометрический смысл K .

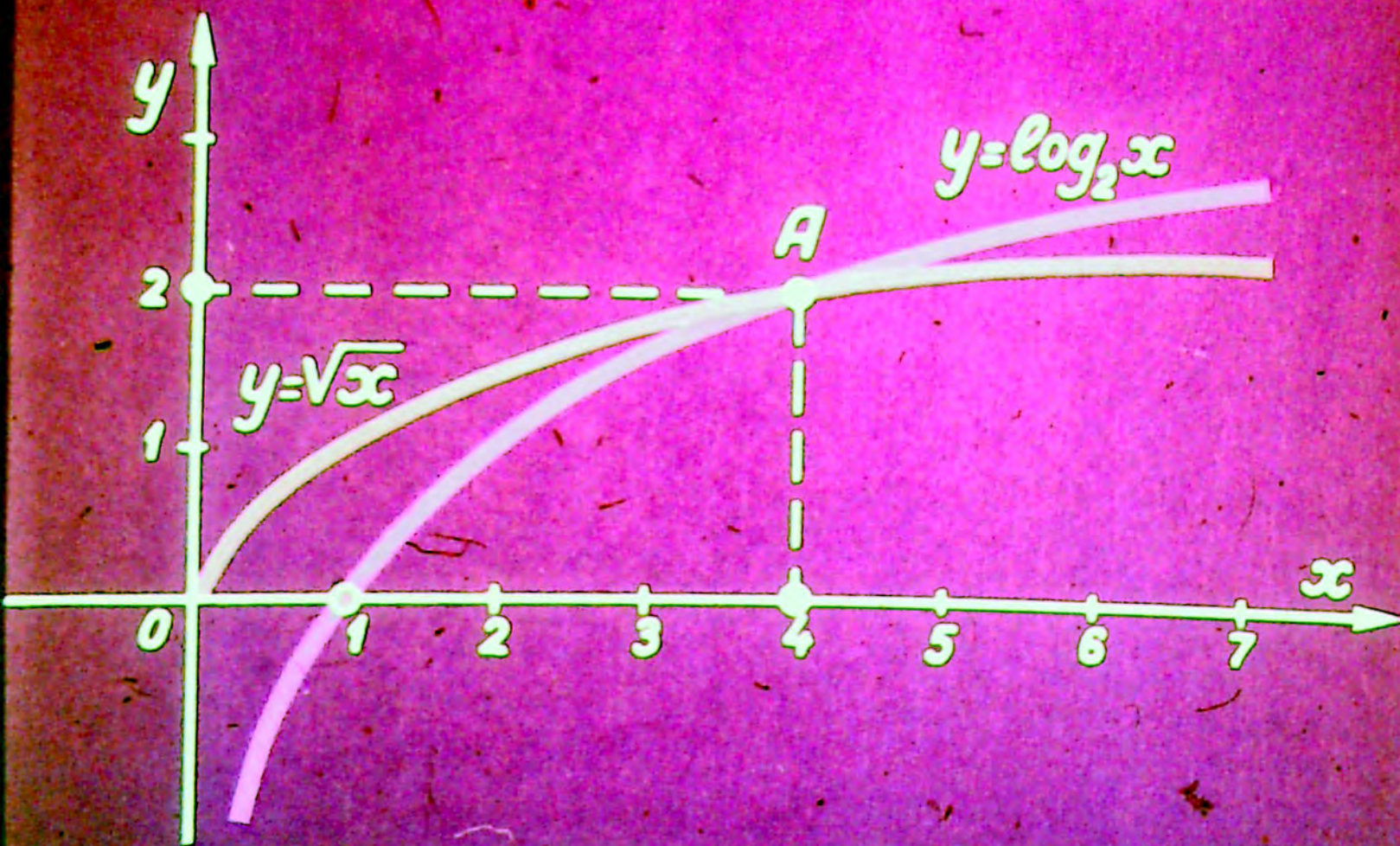
Задачи



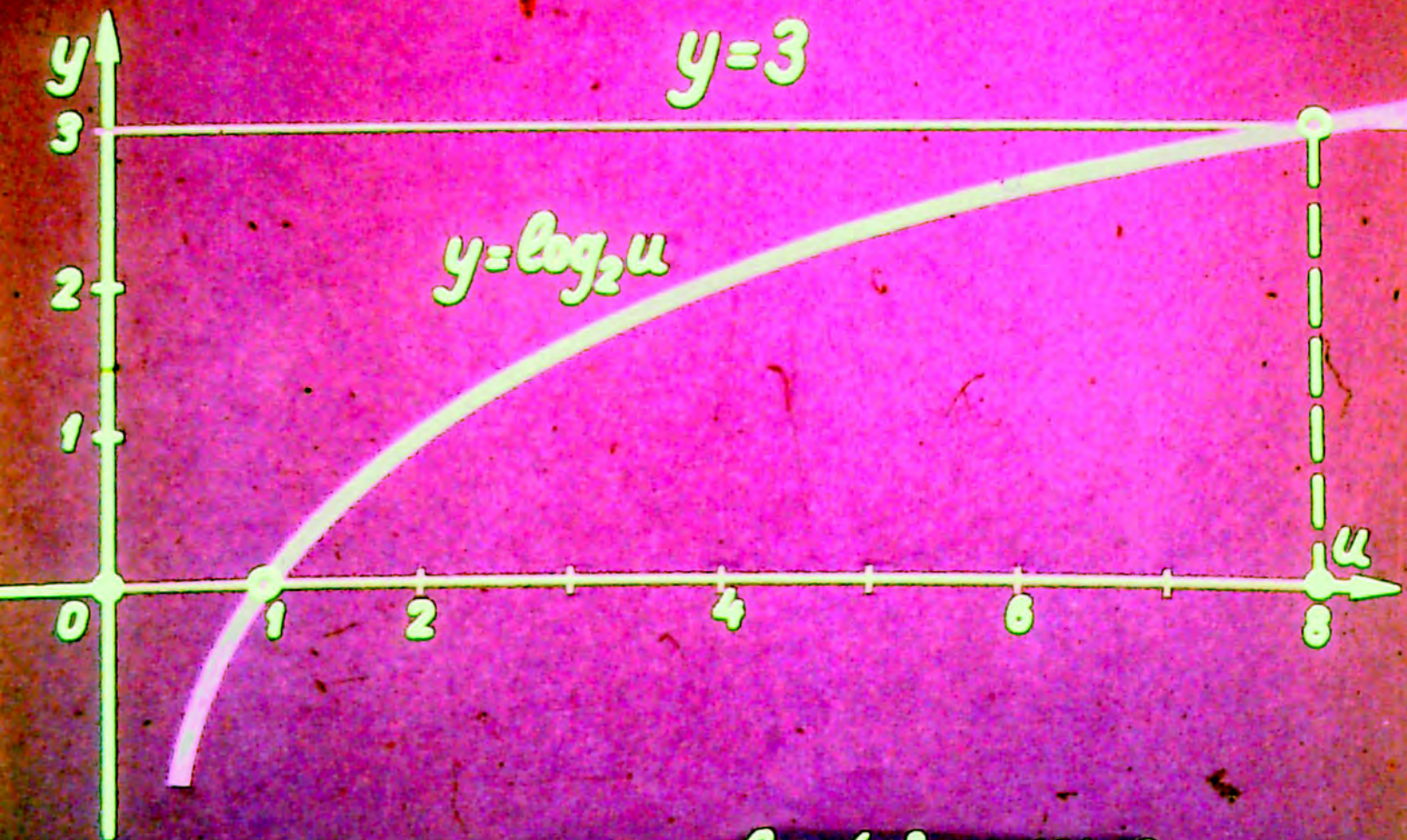
Пользуясь графиком, решите уравнения или неравенства:

- а) $\log_2 x = 0$, $\log_2 x > 0$, $\log_2 x < 0$;
б) $\log_2 x = 1$, $\log_2 x > 1$, $\log_2 x < 1$.



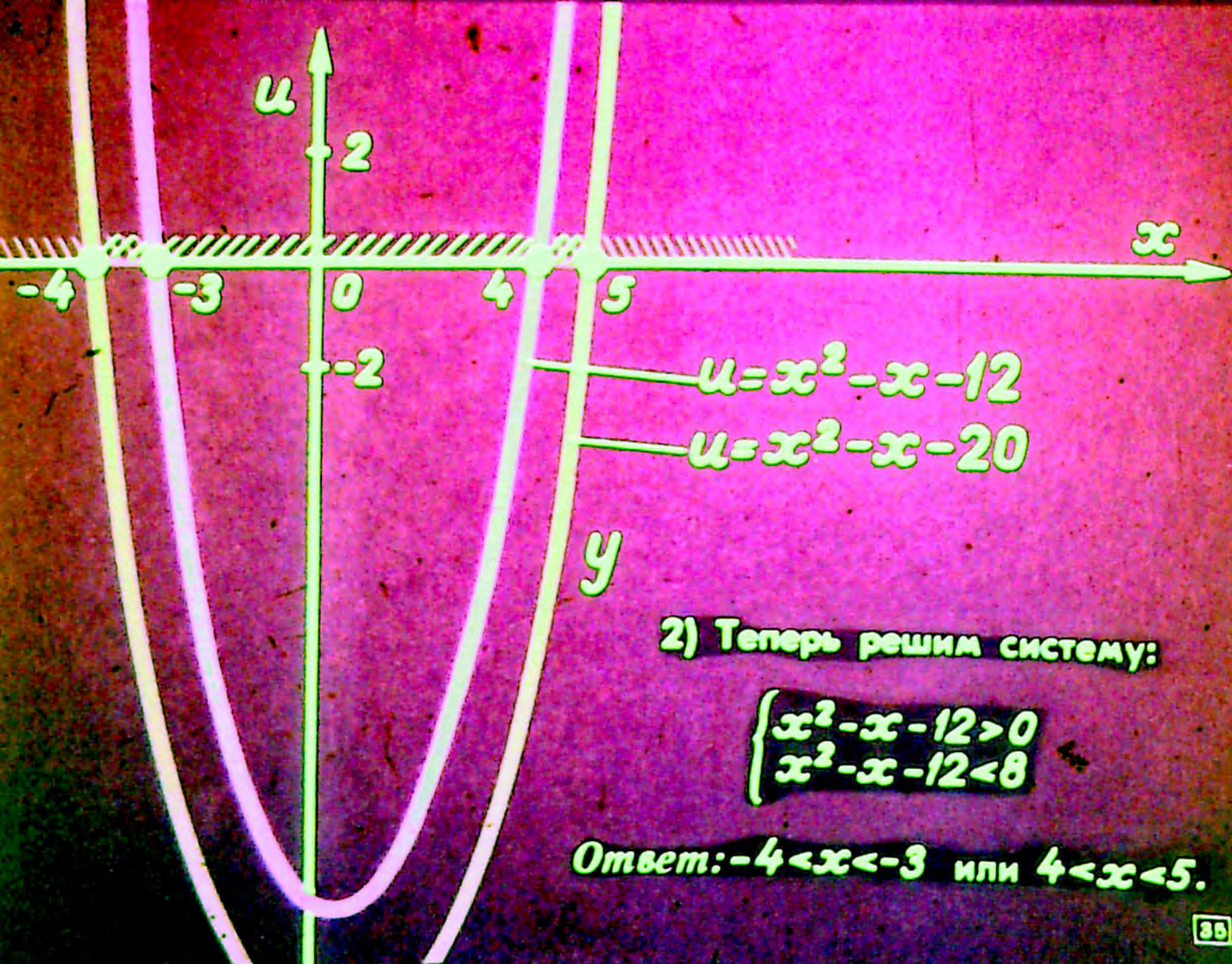


Графики функций $y = \log_2 x$ и $y = \sqrt{x}$ пересеклись в точке $A(4; 2)$. Как вы думаете, пересекаются ли эти графики ещё в одной точке? Выясните это, составляя таблицу.



Решим неравенство: $\log_2(x^2 - x - 12) < 3$.

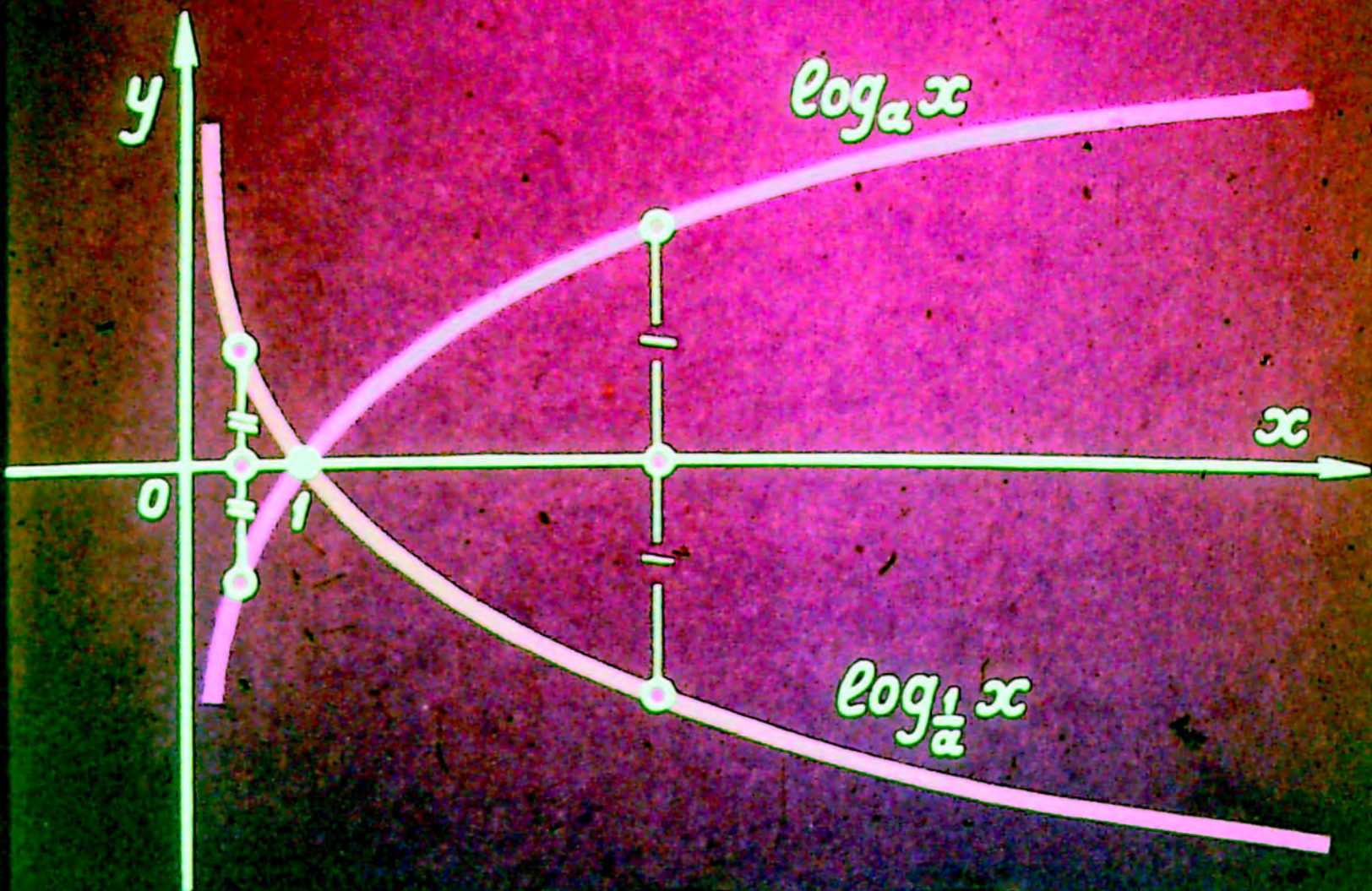
Решение. 1) Обозначим выражение $x^2 - x - 12$ буквой u . Неравенство примет вид: $\log_2 u < 3$. Откуда $0 < u < 8$.



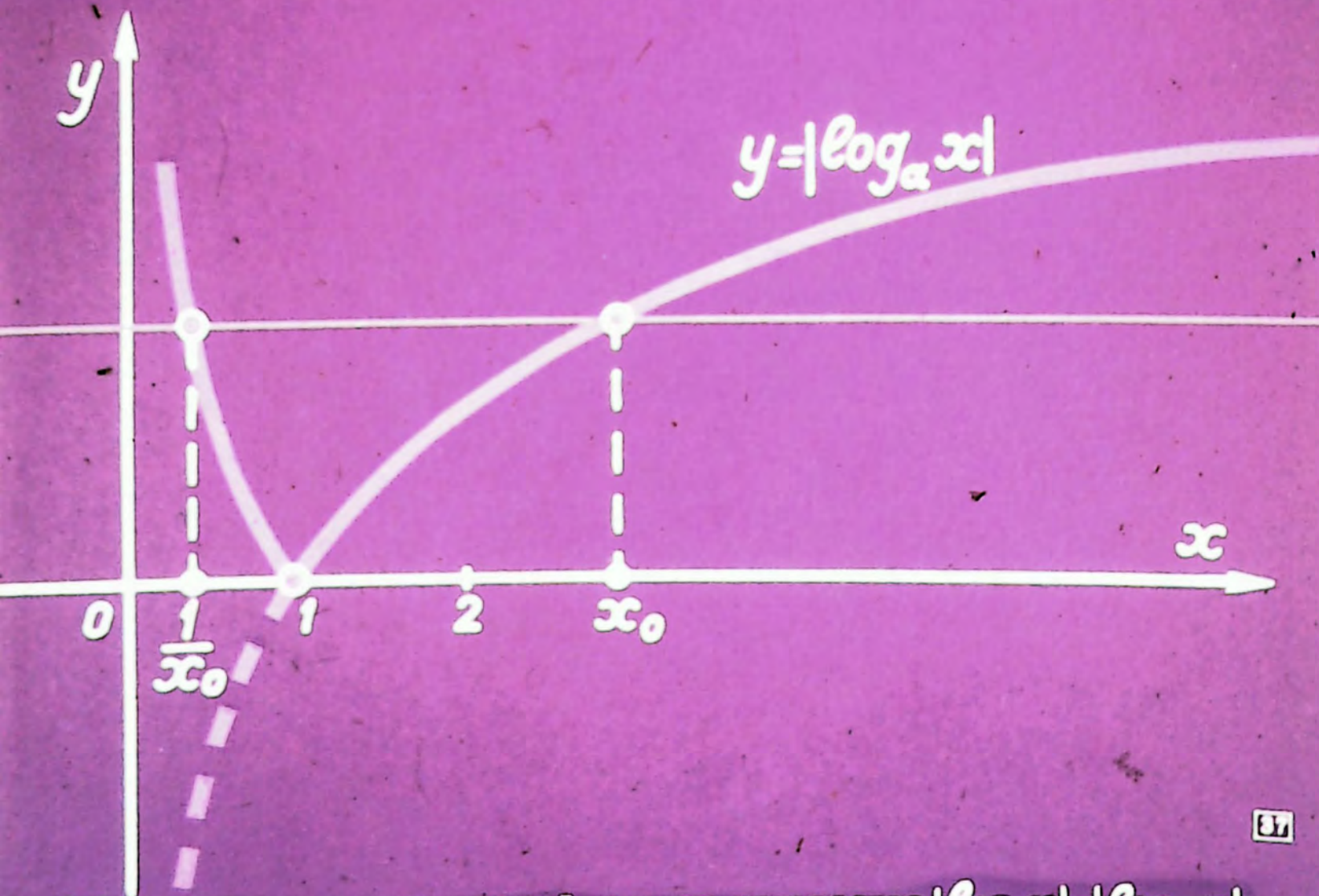
2) Теперь решим систему:

$$\begin{cases} x^2 - x - 12 > 0 \\ x^2 - x - 12 < 8 \end{cases}$$

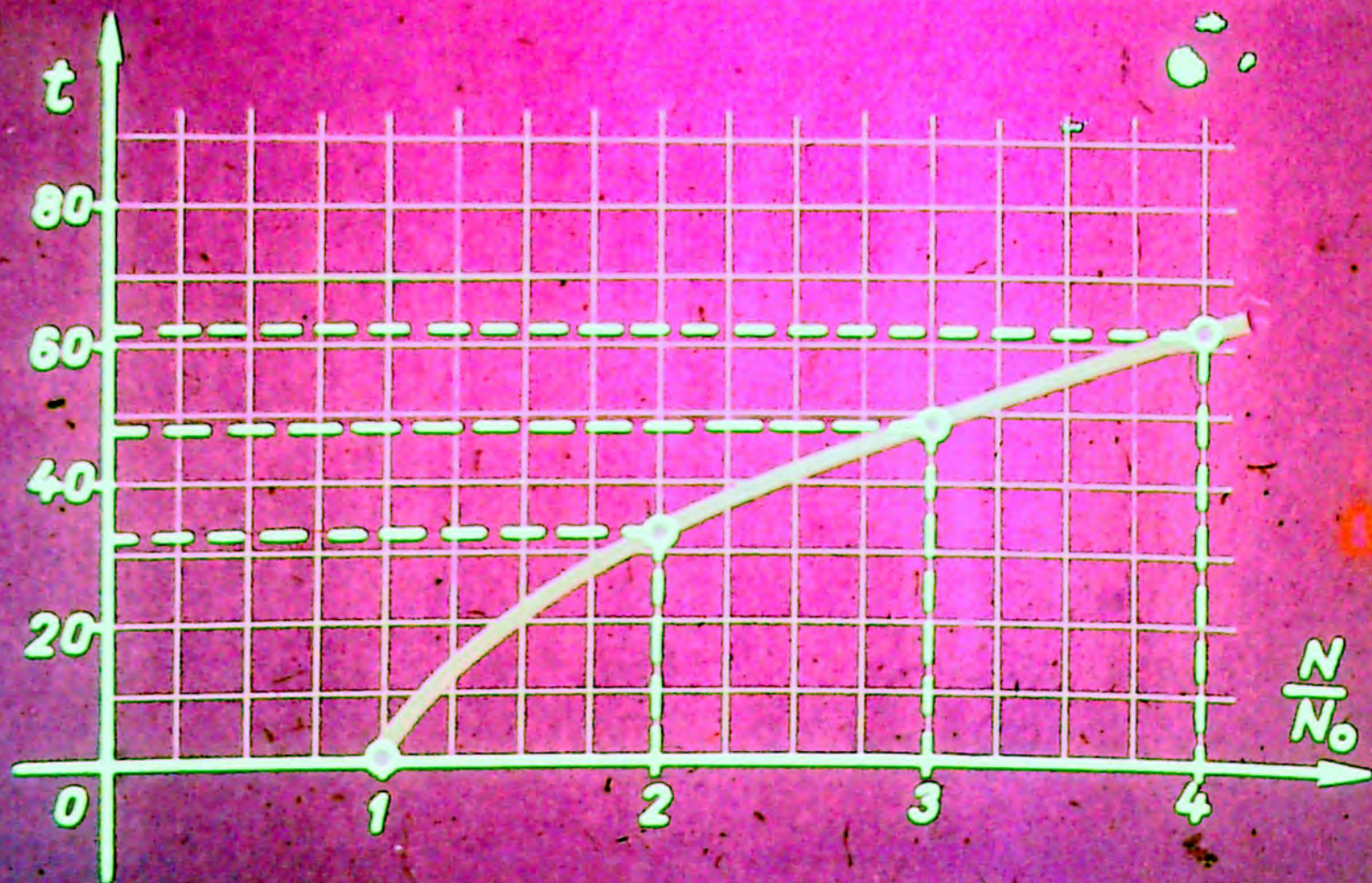
Ответ: $-4 < x < -3$ или $4 < x < 5$.



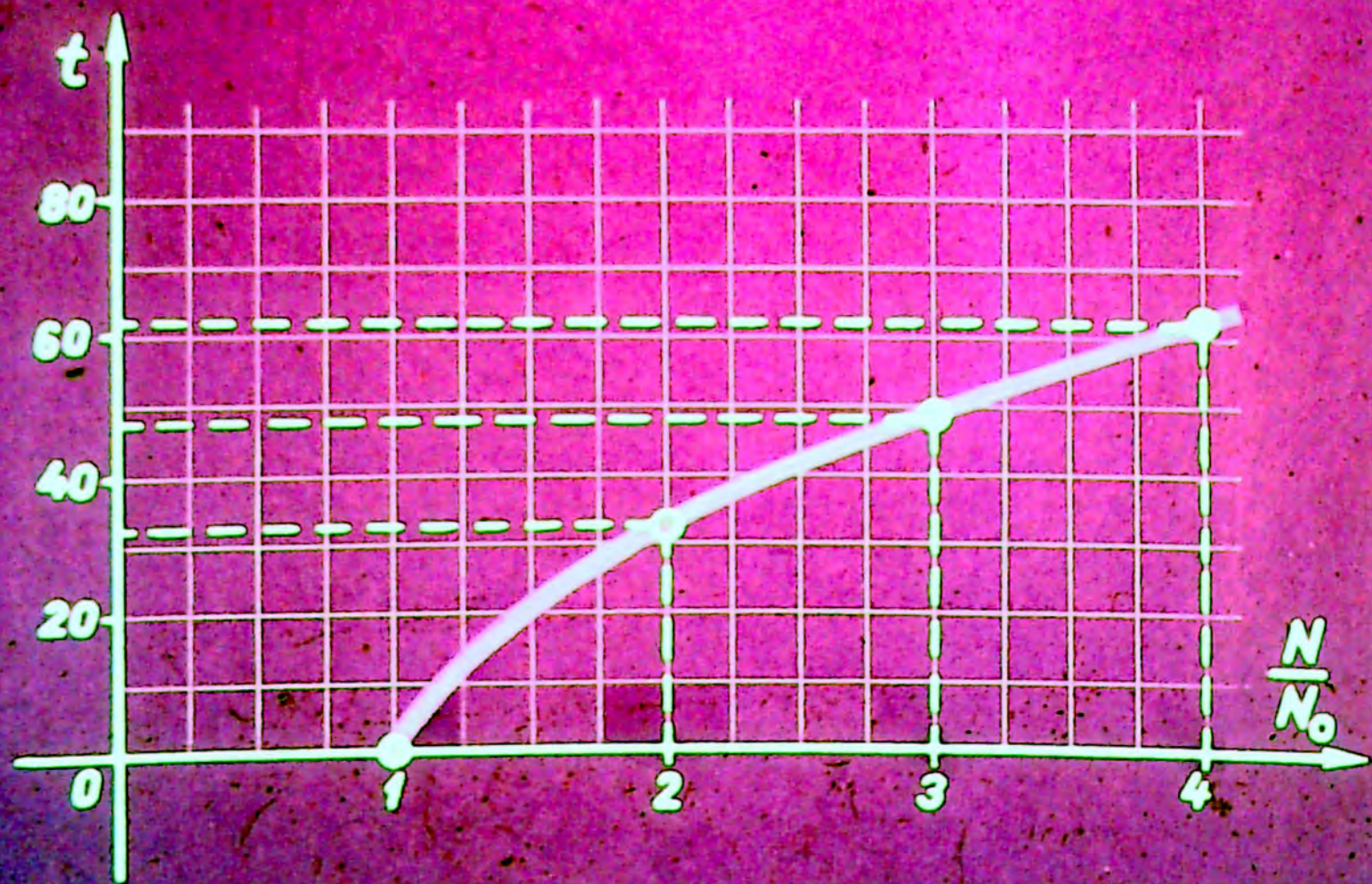
Почему графики функций $y = \log_a x$ и $y = \log_{\frac{1}{a}} x$ (например при $a=2$) симметричны относительно оси x ?



Объясните геометрический смысл тождества $|\log_a x| = |\log_{\frac{1}{a}} x|$.



Население страны увеличивается по закону $t = 100 \log \frac{N}{N_0}$, где N_0 — население в начальный момент времени, N — население через t лет, а t — время в годах.



Рассматривая график, выясните: а) через сколько лет население удвоится; утроится? б) на сколько процентов увеличится население за 20 лет; за 5 лет?

Конец

Автор Ю. Н. Макарычев
Чертежи Т. П. Мамоновой
Оформитель Г. Г. Рожковский
Редактор Л. Б. Книжникова

Д-406-68

Студия «Диафильм», 1968 г.
Москва, Центр, Старосадский пер., д. № 7

Цветной 0-30