ТВОЙ КРУГОЗОР

Е. И. Игнатьев

В царстве смекалки

Книга I

ИЗДАТЕЛЬСТВО «ПРОСВЕЩЕНИЕ»

В царстве смекалки • Книга I
Е. И. Игнатьев

ПРОСВЕЩЕНИЕ
ИЗДАТЕЛЬСТВО

ТВОЙ КРУГОЗОР

Е. И. Игнатьев

В царстве смекалки, или Арифметика для всех

Книга I

Под редакцией Г. З. Генкина

Иллюстрации С. В. Савилова

МОСКВА
«ПРОСВЕЩЕНИЕ»
2008

УДК 087.5:51
ББК 22.1
И26

Серия «Твой кругозор» основана в 2007 году

Игнатьев Е. И.
И26 В царстве смекалки, или Арифметика для всех. Кн. I : [для ст. шк. возраста] / Е. И. Игнатьев; под ред. Г. З. Генкина; ил. С. В. Савилова. — М. : Просвещение, 2008. — 144 с. : ил. — (Твой кругозор). — ISBN 978-5-09-015927-2.

Это новое издание знаменитого трехтомника занимательных задач выходит в год его столетнего юбилея. Как и век назад, он доставит своим читателям много приятных минут, поможет развить логическое мышление и смекалку.

УДК 087.5:51
ББК 22.1

ISBN 978-5-09-015927-2

Содержание

ПРЕДИСЛОВИЕ НАУЧНОГО РЕДАКТОРА

Дорогие читатели! У вас в руках книга «В царстве смекалки». Ее автор — известный русский просветитель и популяризатор математической науки Емельян Игнатьевич Игнатьев.

Впервые эта книга увидела свет в начале XX века. Состояла она тогда из трех томов. Мы сохранили авторский замысел, язык и стиль оригинала, заменив лишь устаревшие орфографию и пунктуацию.

Наша книга не является традиционным сборником занимательных задач. И адресована она не только тому, кто увлекается математикой и любит решать задачи. На наш взгляд, путешествие в Царство смекалки будет интересно и тому, кого называют гуманитарием, и кто про себя говорит, что математика ему не нужна. Каждый читатель найдет в книге интересное и полезное для себя. Разделы и условия задач, отражающие реальные отношения между людьми, финансовые операции, основы первых материалистических философий Пифагора и Платона, рассуждения Архимеда о бесконечности, происхождение цифр и чисел, числовые суеверия и т.д., читаются на одном дыхании, как самый захватывающий рассказ. А любители игровых автоматов и азартных игр, например, в кости, в карты и т.п., ознакомившись с их математическим содержанием, возможно, избавятся от своих пагубных привычек.

Наша книга опровергает тезис о математике как области знаний только для избранных. Нет, математика нужна всем! Одним как поле применения профессиональных знаний, другим как инструмент познания окружающей действительности, третьим как средство формирования логического мышления и абсолютно всем как основа методов анализа и синтеза, классификации и систематизации, моделирования и аналогии. Конечно, всему сразу научиться нельзя. Но можно смекалку развить. Надо заниматься гимнастикой ума. А для этого, на наш взгляд, требуется решать занимательные задачи, разбирать математические игры, тренировать внимательность, распутывать головоломки, фокусы, ребусы, читать тайные послания дипломатов и шифровки разведчиков, т.е. любые задания, требующие умственной работы. Все это поможет в дальнейшем в любом виде деятельности, а сейчас, друзья, начинайте знакомиться с книгой. Кстати, нашу книгу можно читать по разделам в любом порядке. Все равно, мы уверены, чтение доставит любому эстетическое удовольствие.

Г. З. Генкин

Некоторые исторические задачи

Задача 1-я.
Одно из древнейших математических развлечений

В знаменитом Британском музее среди «коллекции Ринда» находится египетский папирус, который считается теперь чуть ли не самым древним из известных ныне руководств по математике. Папирус этот переведен на немецкий язык в 1877 г. Он написан египтянином Ахмесом между 1700 и 2000 гг. до Рождества Христова.

Подлинное заглавие папируса таково:

«Наставление к приобретению знания всех тайных вещей».

Ахмес, в свою очередь, упоминает о том, что его книга написана на основании еще более древних сочинений. Таким образом, мы имеем возможность судить о состоянии математических знаний у древних египтян, быть может, за время не менее 5000 лет до наших дней. Почтенная давность!

«Египетская задача» основана на египетском папирусе Ахмеса из «коллекции Ринда». В этом папирусе есть одно весьма любопытное место, над разгадкой которого останавливалось немало историков математики. Вот в чем дело.

Ахмес дает лестницу таких 5 чисел:

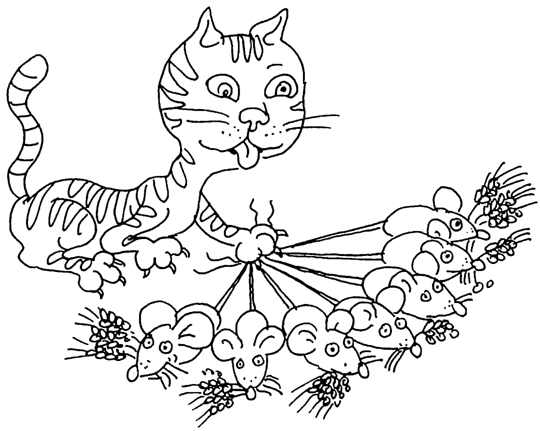
7, 49, 343, 2401, 16 807.

Рядом же с этими числами стоят соответственно слова:

картина, кошка, мышь, ячмень, мера.

И все! Никаких дальнейших пояснений, никакого ключа к раскрытию смысла этой задачи папирус не дает. Что же это за задача?

Прежде всего заметим, что написанные выше числа, составляющие *лестницу*, суть последовательные *степени* числа 7. В самом деле, помножая последовательно 7 само на себя один, два, три, четыре и пять раз и ставя рядом соответствующие слова, как в рукописи Ахмеса, находим:



7 .. **картина**
$7\times7 = 7^2 = 49$ .. **кошка**
$7\times7\times7 = 7^3 = 343$.. **мышь**
$7\times7\times7\times7 = 7^4 = 2401$ .. **ячмень**
$7\times7\times7\times7\times7 = 7^5 = 16\,807$ .. **мера**

Основываясь на таком сопоставлении чисел и слов, а также на некоторых позднейших математических сочинениях, ученые-ориенталисты и историки математики с весьма большой вероятностью решают, что данное место папируса Ахмеса представляет такую задачу.

У некоторых семи лиц имеется по семи кошек. Каждая кошка съедает по семи мышей, каждая мышь съедает по семи колосьев ячменя, из каждого колоса может вырасти по семи мер зерна. Сколько всего предметов?

Складывая числа, составляющие *лестницу*, получаем в ответ на вопрос задачи число *19 607.* Число мер зерна (16 807), спасаемых всего 49 кошками, также весьма велико. Если догадки ученых верны, то недаром, пожалуй, у египтян кошка, истребительница мышей, считалась священным животным.

Задачи подобного рода могли предлагаться для забавы и для развития сметки. Следовательно, можно думать, что история математических развлечений также имеет за собой почтенную давность по меньшей мере в 50 веков.

Приведенная выше древняя задача повторяется в различных вариантах в разные времена и у разных народов. Некоторые из этих вариантов, замечательнейшие в историческом отношении, приводятся ниже.

Задача 2-я.
Семь старух

Приблизительно через 3000 лет после появления папируса Ахмеса, в 1202 г., Леонард из Пизы (он же *Фибоначчи*, или *Фибоначи*) издал на латинском языке сочинение *Liber abaci*, содержащее в себе всю совокупность тогдашних арифметических и алгебраических знаний.

В этой книге имеется, между прочим, такая задача.

Семь старух отправляются в Рим. У каждой старухи по семи мулов, каждый мул несет по семи мешков, в каждом мешке по семи хлебов, в каждом хлебе по семи ножей, каждый нож в семи ножнах. Сколько всего предметов?

Решение

Задача отличается от Ахмесовой только тем, что к пяти числам лестницы Ахмеса надо прибавить еще шестое число, равное семи, повторенному множителем 6 раз, т.е. 7^6=117 649.

Всего получится $7 + 7^2 + 7^3 + 7^4 + 7^5 + 7^6 = 137\,256$ предметов.

Задача 3-я.
По дороге в St.-Ives

В 1801 г. в Соединенных Штатах Америки вышло 1-е издание *Школьной арифметики* (Scholar's Arithmetic) Даниила Адамса, пользовавшейся там большим распространением в начале XIX века. Вариант Ахмесовой задачи изложен в этой арифметике уже в таких английских стихах:

As a was going to St.-Ives,
I met seven wives;
Every wife had seven sacks;
Every sack had seven cats;
Every cat had seven kits;
Kits, cats, sacks and wives,
How many were going to St.-Ives?

Если попробовать это же передать «школьными стихами» по-русски, получим:

В Сент-Айвз как-то я шагал;
Я семь женщин повстречал;

И у каждой семь мешков,
А в мешках по семь котов;
При котах по семь котят.
Сколько всех прийти хотят
В Сент-Айвз: женщин, и мешков,
И котяток, и котов?

Решить задачу предоставляем читателю.

Задача 4-я. Русская народная задача

Для нашего читателя, быть может, интересно будет узнать, что из мрака отдаленнейших времен отголоски задачи Ахмеса перешли также и в русский народный эпос. Существует русская народная задача о нищих (или старцах). Задачу эту автор слышал в Казанской и Орловской губерниях.

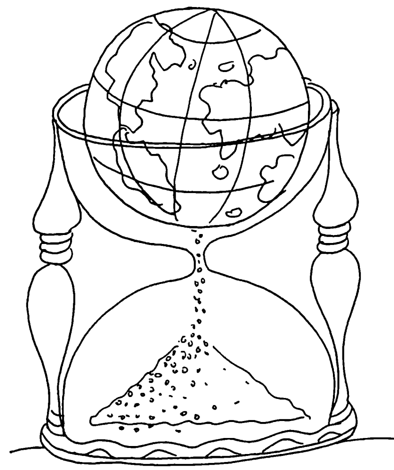
Приводим задачу так, как она распространена среди населения Орловской губернии:

Шли семь старцев.
У каждого старца по семи костылей,
На всяком костыле по семи сучков,
На каждом сучке по семи кошелей,
В каждом кошеле по семи пирогов,
А в каждом пироге по семи воробьев.
Сколько всего?

Решение
Задача требует определения числа всех предметов, т.е. старцев, костылей, сучков, кошелей, пирогов и воробьев. Решение, очевидно, дается числом $7 + 7^2 + 7^3 + 7^4 + 7^5 + 7^6$, приведенным нами уже в задаче 2-й.

Интересно отметить, что во всех четырех предыдущих задачах главную роль играет число *семь*. В главе «О числовых суевериях» мы увидим, что число это имело у различных народов особое символическое, священное значение. Быть может, раньше, чем сделаться предметом простого развлечения или развития народной смекалки, задачи подобного рода носили мифологический, астрологический или религиозный характер.

Задача 5-я.
Жизнеописание Диофанта



Прохожий! Под этим камнем покоится прах Диофанта, умершего в преклонных годах. $1/6$ часть своей продолжительной жизни он провел в детстве, $1/12$ — в юности. Следующую затем $1/7$ своей жизни он был холостым. Через пять лет после его женитьбы у него родился сын, доживший до возраста вдвое меньшего, чем лета его отца. Через четыре года после смерти сына умер и Диофант, оплакиваемый родными. Скажи, если умеешь считать, в каком возрасте он умер?

Высчитать, что Диофант дожил до 84-летнего возраста, не составляет особого труда. Но задача эта имеет специальный исторический интерес. Существуют свидетельства, что она служила действительно надгробной эпитафией над прахом одного из замечательнейших математиков древности, о жизни которого *только почти и имеется сведений, что эта задача.*

Диофант был совершенно исключительный математик последнего периода знаменитой александрийской школы. О времени и месте его рождения, а также о его происхождении мы ничего не знаем. Предполагают с некоторой долей вероятности, что он умер около 330 г. Диофант считается родоначальником современной алгебры и занимает в ряду великих греческих математиков совершенно исключительное место. Его главное, образцовое произведение, «Арифметика», написано, как говорят, в 13 книгах, из коих только шесть дошли до нас, проникнуто духом, настолько отличным от духа великих классических сочинений, написанных во времена Евклида, насколько чистая геометрия отличается от чистого анализа. Между греками у Диофанта не было ни одного выдающегося предшественника, ни одного выдающегося последователя. До открытия папируса Ахмеса *Арифметика* Диофанта была древнейшим известным нам трудом по алгебре.

Задача 6-я (Архимеда). О числе песчинок (Псаммит)

Задача эта, предложенная и разрешенная Архимедом (287—212 гг. до Р.Х.), изложена им в форме обращения к Гелону, сыну Гиерона, тирану города Сиракузы. Главнейший интерес ее состоит в том, что знаменитый философ древности показал, как расширить несовершенную греческую систему счисления, распространив ее на сколь угодно большие числа. Вот как излагает свою задачу Архимед:

Некоторые люди, о царь Гелон, воображают, что число песчинок бесконечно велико. Я говорю не о песке, находящемся в Сиракузах или во всей Сицилии, но о песке всей суши, как обитаемой, так и необитаемой. Другие признают это число, правда, не неограниченным, но все же думают, что оно больше всякого задуманного числа. Если бы эти люди представили себе кучу песка величиною с земной шар, причем этим песком были бы покрыты все моря и все углубления до вершины высочайших гор, то, конечно, эти люди тем более были бы склонны принять, что нет числа, превосходящего число песчинок в этой куче.

Я, однако, приведу доказательства, с которыми и ты согласишься, что я в состоянии назвать некоторые числа, не только превосходящие число песчинок в куче, равной земному шару, но даже число песчинок в куче, равной всей вселенной.

Решение

Ты знаешь, конечно, что под Вселенной большинство астрономов подразумевают шар, центр которого находится в центре Земли, а радиус образуется расстоянием между центрами Земли и Солнца. В своем сочинении против астрономов Аристарх Самосский пытается опровергнуть это и доказать, что Вселенная составляет кратное этой величины. Он приходит к выводу, что звезды и Солнце неподвижны, тогда как Земля вращается вокруг Солнца по кругу, в центре которого стоит Солнце[1]. Согласимся, что диаметр сферы неподвижных звезд относится к диаметру Вселенной, понимаемой в том смысле, как это понимают большинство астрономов (т.е. Солнечной системы), как этот пос-

[1]Аристарх, родившийся на Самосе около 270 г. до Р.Х., уже за $1^1/_2$ тысячи лет до Коперника, как это видно из только что приведенных слов Архимеда, совершенно ясно выразил основания гелиоцентрической системы. Из его сочинений сохранилось только одно:«О величинах и расстояниях Солнца и Луны».

> ледний к диаметру Земли. Я утверждаю, что если бы существовала песочная куча даже величиною в Аристархову звездную сферу, то и в этом случае я могу привести число, даже превышающее число песчинок в такой воображаемой сфере.

Предполагаю следующее:

1) *Окружность Земли менее 3 миллионов стадий* (стадия приблизительно равна нынешним 185 метрам).

Как тебе известно, были попытки доказать, что окружность Земли составляет около 300 000 стадий[1]; но я превзойду предшественников и приму для нее в десять раз большее число.

2) *Солнце больше Земли, а Земля больше Луны.*

В этом я согласуюсь с большинством астрономов[2].

3) *Поперечник Солнца не более чем в 30 раз превышает поперечник Луны*[3].

4) *Диаметр Солнца больше, нежели сторона тысячеугольника, вписанного в наибольший круг небесной сферы.*

Это я принимаю по Аристарху, который считает, что видимые размеры Солнца составляют $^1/_{720}$ размеров зодиакального круга. Я сам измерял угол, под которым видно Солнце, но точное измерение этого угла нелегко произвести, ибо ни глаз, ни рука, ни измерительные приборы недостаточно надежны. Но здесь не место об этом распространяться. Достаточно только знать, что этот угол меньше чем $^1/_{164}$ и больше чем $^1/_{300}$ прямого угла[4].

На основании допущений 2) и 3) диаметр Солнца меньше, чем 30 земных диаметров. Поэтому, по допущению 4) периметр тысячеугольника, вписанного в один из наибольших кругов небесной сферы,

---

[1]Эратосфен (от 275—194 гг. до Р. Х.), произведший первое градусное измерение, определил окружность Земли в 250 000 стадий, однако неизвестно, о каких стадиях он писал — о греческих или египетских.

[2]Согласно вычислению Аристарха, Солнце в 7000 раз больше Земли, а Луна в 27 раз меньше.

[3]В действительности диаметр Солнца почти в 400 раз больше диаметра Луны.

[4]Т.е. заключается между 27′ и 33′; $^1/_{164}$ R = 33°; $^1/_{200}$ R = 27°; по измерениям с помощью новейших гелиометров, средний видимый диаметр Солнца составляет около 32′, что ближе к высшему пределу, указываемому Архимедом.

меньше чем 30 000 земных диаметров. Но если это так, то диаметр вселенной (т.е. согласно Аристарху — Солнечной системы) меньше 10 000 земных диаметров, ибо только для правильного шестиугольника диаметр равен $\frac{1}{3}$ периметра, а для всякого многоугольника диаметр меньше $\frac{1}{3}$ периметра.

По первому предположению, окружность Земли меньше 3 миллионов стадий; стало быть, диаметр меньше 1 миллиона стадий, так как диаметр окружности меньше $\frac{1}{3}$ длины ее. Стало быть, также и диаметр вселенной меньше, чем 10 000 миллионов стадий.

Допустим теперь, что песчинки до того малы, что 10 000 таких песчинок составляют лишь величину одного макового зерна. Я приму диаметр макового зерна в $\frac{1}{40}$ дюйма. В одном из моих опытов уже 25 маковых зерен, положенных рядом по прямой, заняли дюйм, но я желаю обеспечить свое доказательство против всяких возражений.

У нас (греков) существуют названия чисел лишь до мириады[1] ($10\,000=10^4$). Считаем мы, однако, и до 10 000 мириад ($10^4 \cdot 10^4=10^8$). Чтобы пойти еще далее, примем 10 000 мириад (10^8) за единицу второго порядка и возьмем ее снова 10 000 мириад раз, то получим $10^4 \cdot 10^4=10^{8 \cdot 2}$, или единицу третьего порядка. Точно так же можем взять 10 000 мириад раз полученную единицу третьего порядка и получим единицу четвертого порядка ($10^{8 \cdot 3}$) и т.д. $10^{56}=10^{8 \cdot 7}$ будет представлять единицу восьмого порядка, 1 же есть единица первого порядка.

Теперь вычислим, сколько песчинок, мириада которых занимает объем макового зерна, поместится в шаре с диаметром, равным дюйму. По нашему предположению, диаметр макового зерна равняется $\frac{1}{40}$ дюйма, но по известному геометрическому положению объемы шаров относятся, как кубы их диаметров, стало быть, в данном случае, как $1^3 : 40^3 = 1 : 64\,000$. Итак, шар одного дюйма в диаметре содержит 64 000 маковых зерен, или 64 000 мириады песчинок, т.е.

[1] В дальнейшем мы будем применять систему изображения чисел при помощи 10 в известной степени, так как Архимедов способ выражения не так удобопонятен.

$64 \cdot 10^8$, что меньше, чем $10 \cdot 10^8 = 10^9$ песчинок. Шар 100 дюймов в диаметре относится к шару 1 дюйма в диаметре (по объему), как $100^3:1^3$, или $10^6:1$. Итак, песочный шар 100 дюймов в диаметре, очевидно, содержит не более $10^6 \cdot 10 \cdot 10^8$ песчинок.

Шар 10 000 дюймов в диаметре содержит не более $10^{21} = 10 \cdot 10^4 \cdot 10^{16}$, т.е. десяти мириад единиц нашего третьего порядка.

Но так как стадия меньше 10 000 дюймов, то ясно, что песочный шар с диаметром в стадию содержит менее 10 мириад единиц третьего порядка.

Точно таким же образом найдем, что шар с диаметром в 10^2 стадий содержит меньше, чем $1000 \cdot 10^{8 \cdot 3}$ песчинок.

в 10^4 . . . . . $10 \cdot 10^{8 \cdot 4}$
10^6 . . . . . $10^6 \cdot 10 \cdot 10^{8 \cdot 4}$
10^8 . . . . . $10 \cdot 10^4 \cdot 10^{8 \cdot 5}$
10^{10} . . . . . $1000 \cdot 10^{8 \cdot 5}$

Но 10^{10} есть 10 000 миллионов стадий. Так как диаметр вселенной меньше 10 000 миллионов стадий; стало быть, вселенная содержит песчинок менее, нежели $1000 \cdot 10^{8 \cdot 6}$. Далее. Диаметр Аристарховой сферы неподвижных звезд заключает в себе столько раз диаметр вселенной (10 000 миллионов стадий), сколько раз в этом последнем содержится диаметр Земли (1 миллион стадий), и выходит, что сфера Аристарха (неподвижных звезд) относится к сфере вселенной, как $10^{12}:1$, а стало быть, содержит песчинок менее, чем 1000 мириад единиц восьмого порядка

$$1000 \cdot 10^4 \cdot 10^{8 \cdot 7} = 10^{63}.$$

Это может показаться невероятным толпе и всем несведущим в математике; но те, которые обладают математическими познаниями и умеют размышлять о расстояниях и величине Земли, Солнца, Луны и всего мироздания, признают это за доказанное. Поэтому я не счел неуместным предпринять это исследование.

В ряду других работ великого геометра Сиракуз рассуждение о числе песчинок («Псаммит»—по-гречески) занимает сравнительно второстепенное место. Но и эта небольшая работа — «несколько размышлений», как говорит сам Архимед — дает достаточное понятие о мощи гения этого человека. Пред нами в простой и наглядной форме лежит, в сущности, изложение десятичной системы.

Задача 7-я.
Юридический вопрос

Древние римляне ничего или почти ничего не сделали для развития математических наук. Они известны более в области законодательства. Дошедшие до нас римские математические сочинения носят преимущественно чисто практический, утилитарный характер. Так, например, повод к составлению арифметических задач давали римские *законы о наследстве*. Вот одна из таких дошедших до нас задач.

Некто, умирая, оставил жену в ожидании ребенка и сделал такое завещание: в случае рождения сына отдать ему $^2/_3$ оставленного имущества, а $^1/_3$ матери. В случае же рождения дочери — она должна получить $^1/_3$, а мать $^2/_3$ имущества. Вдова завещателя родила близнецов, мальчика и девочку. Как разделить имущество, чтобы удовлетворить условиям завещания?

Решение
Задачу эту, представляющую так называемый «юридический казус», решил, между прочим, знаменитый римский юрист Сальвиан Юлиан. Решение его состоит в том, что имущество должно быть разделено на *семь* равных частей. Четыре из этих частей должны перейти к сыну, две — к жене и одна к дочери. Предлагаем читателю решить эту задачу на основании не юридических, а математических соображений.

Индусские задачи

Индусам, как утверждают иные, мы обязаны нашей системой письменного счисления и введением нуля, т.е. открытиями, имеющими величайшее значение в истории развития математических наук. Вообще, в свое время индусы довели искусство вычислений до такой степени совершенства, которой не достигал ни один из ранее их живших народов. Особенности национального склада этого народа отразились на дошедших до нас его математических сочинениях. Последние обыкновенно написаны стихами и часто полны темных и мистических выражений. С другой стороны, задачи, составленные в легкой и приятной стихотворной форме и предлагаемые в качестве загадок, были любимым развлечением индусов. Эти задачи предлагаются просто для забавы. Мудрый человек может придумать тысячу других или может решать задачи, предложенные ему другими по изложенным здесь правилам. Как Солнце затмевает звезды своим блеском, так и ученый человек может затмить славу других в народных собраниях, предлагая алгебраические задачи и тем более решая их.

В сочинении *Сиддхантасиромани* («Венец астрономической системы»), написанном индусским ученым Бхаскара Ачарья в 1150 г., есть две главы, посвященные специально математике. Одна глава носит заглавие *Лилавати*, т.е. «прекрасная» (в смысле «благородная наука»), а другая — *Виджа-Ганита*, т.е. «извлечение корней». Вот пример задач, взятых из этих глав.

Задача 8-я. Дева считает

Прекрасная дева с блестящими очами, ты, которая знаешь, как правильно применять метод инверсии, скажи мне величину такого числа, которое, будучи умножено на 3, затем увеличено на $^3/_4$ этого произведения, разделено на 7, уменьшено на $^1/_3$ частного, умножено само на себя, уменьшено на 52, после извлечения квадратного корня, прибавления 8 и деления на 10 дает число 2.

Решение

Указание на способ решения заключается в самом условии задачи. Предполагается, что девушка умеет правильно применять *метод инверсии*. Инверсией называется такой способ решения задачи, при котором начинают с последнего числа задачи, так сказать «с конца», и идут в *обратном* порядке, производя действия, также *обратные* названным в задаче.

Так, например, в данной задаче отправляемся от числа 2 и идем к искомому числу следующим путем:

	2	множим на	10,	получаем	20;
от	20	отнимаем	8,	»	12;
	12	множим на	12^1,	»	144;
к	144	прибавляем	52,	»	196;
из	196	извлекаем квадратный корень,		»	14;
от	14	берем	$^3/_2$,	»	21;

[1]Т.е. возвышаем в квадрат ($12\times12 = 12^2$). Действие, обратное *извлечению квадратного корня.*

	21	множим на	7,	»	147;
от	147	берем	$^4/_7$,	»	84;
	84	делим на	3,	»	28.

28 и есть искомое число. То же решение при системе наших обозначений можно написать в одной строке:

$$(2\cdot10-8)^2+52=196;\ \sqrt{196}=14;\ 14\cdot{}^3\!/_2\cdot7\cdot{}^4\!/_7\div3=28$$

и даже одним выражением:

$$\sqrt{(2\cdot10-8)^2+52}\cdot{}^3\!/_2\cdot7\cdot{}^4\!/_7\div3=28$$

Древнейший из известных нам индусских математиков (V век) Арьябхатта предлагает в ряду прочих нижеследующую «практическую» для индусов задачу.

Задача 9-я.
Цена рабыни

Шестнадцатилетняя девушка-рабыня стоит 32 нишка (индусская монета). Что стоит рабыня 20 лет?

Решение

Решение этой любопытной для нас по условию задачи не отличается само по себе ничем особенным. Но исторически оно доказывает, что индусы были хорошо знакомы с так называемым у нас «тройным правилом», равно как, кстати сказать, были знакомы и со многими другими «правилами» решений задач, до сих пор еще часто без нужды обременяющими наши учебные курсы.

В частности, при решении задачи о цене рабыни Арьябхатта руководствуется началом «обратной пропорции», потому что, говорит он, «стоимость живых существ (рабов и скота) устанавливается сообразно их возрасту» — чем старше, тем дешевле.

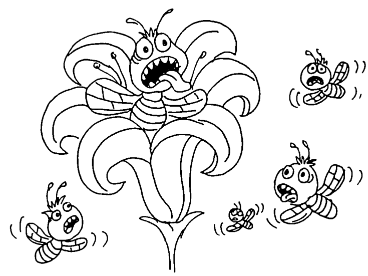
На таком основании выходит, что если 16-летняя рабыня стоит 32 нишка, то однолетняя будет стоить в 16 раз больше, т.е. 32×16 нишка, а 20-летняя в 10 раз меньше последней суммы,

т.е $\dfrac{32\times16}{20}=25\dfrac{3}{5}$ нишка.

Приведем еще две индусские задачи, в которых говорится о более веселых и безобидных вещах, чем продажа человека человеком. Обе задачи взяты из сочинений уже упомянутого нами Бхаскары. Решение их, особенно для лиц, знакомых с квадратными уравнениями, не представляет ни малейшего затруднения, поэтому приводим только ответы.

Задача 10-я.
Пчелы

Пчелы в числе, равном корню квадратному из половины роя, слетелись на куст жасмина. $\frac{8}{9}$ всего роя осталось дома. Одна пчела-самка летает вокруг цветка лотоса. Там жужжит неосторожный самец, привлеченный сладким запахом цветка и теперь заключенный внутри его. Скажи мне число пчел.



Ответ: 72.

Задача 11-я.
Обезьяны

Стая обезьян забавлялась. Одна восьмая часть в квадрате их бегала по лесу. Остальные 12 кричали на верхушке холма. Скажи мне число обезьян.

Ответ: 16 или 18.

Задачи Ньютона

Выше приведены некоторые задачи, по тем или иным причинам известные в истории развития математических знаний. Было бы несколько странным обойти при этом молчанием некоторые задачи великого Ньютона, хотя они далеко не носят характера общедоступности.

В первые девять лет своей профессуры в Кембриджском университете Ньютон читал лекции по алгебре. Лекции эти под заглавием *«Arithmetica Universalis»* («Всеобщая Арифметика») были опубликованы в 1707 году. По многочисленности входящих в них задач можно судить, что великий теоретик и пролагатель новых путей в математике прекрасно сознавал развивательное значение чисто практических задач. Об этом он и сам говорит в своей «Арифметике» : «Я показал решение нескольких задач, так как при изучении наук примеры полезнее правил».

Следующие сейчас две задачи можно считать самыми известными из ньютоновских задач. Для решения их мало одной, хотя бы и самой быстрой, сообразительности, а необходима еще некоторая математическая подготовка, охватывающая, впрочем, только знание квадратных уравнений и первые ступени неопределенного анализа. Мы даем их решение, не входя в подробности.

Задача 12-я.
Быки на лугу

На лугу, площадь которого равна $3\frac{1}{2}$ акрам, пасутся в продолжение 4 недель 12 быков и за это время съедают как ту траву, что была раньше, так и ту, что подрастала во все это время равномерно. На другом лугу, площадь которого равна 10 акрам, пасется в продолжение 9 недель 21 бык и также съедает как ту траву, что была раньше, так и ту, что подрастала во все это время равномерно. Сколько нужно пустить быков на третий луг, площадь которого равна 24 акрам, чтобы они в продолжение 18 недель съели как ту траву, что на нем есть, так и ту, которая будет подрастать во все это время равномерно?

Примечание. Предполагается, что высота травы на всех трех лугах до выгона на них быков одинакова и что рост травы на всех трех лугах за один день — одинаков.

Решение

Решение, наиболее быстро приводящее к цели, требует введения *новых вспомогательных неизвестных*. Поэтому обозначим искомое число быков через x; пусть y есть первоначальная высота травы на лугах и пусть на всех трех лугах трава подрастает ежедневно на z. Тогда количества травы (по объему), съеденные быками на трех лугах, выразятся соответственно через:

$$3\frac{1}{2}(y + 7 \cdot 4z);\ 10(y + 7 \cdot 9z);\ 24(y + 7 \cdot 18z)$$

Следовательно, один бык съедал за один день на каждом лугу соответственно травы (по объему):

$$\frac{3\frac{1}{3}(y+7\cdot 4z)}{12\cdot 7\cdot 4};\ \frac{10(y+7\cdot 9z)}{12\cdot 7\cdot 9};\ \frac{24(y+7\cdot 18z)}{x\cdot 7\cdot 18}.$$

Отсюда имеем два уравнения:

$$\frac{10(y+28z)}{3\cdot 12\cdot 7\cdot 4}=\frac{10(y+63z)}{21\cdot 7\cdot 9}=\frac{24(y+126z)}{x\cdot 7\cdot 18},$$

или

$$\frac{5(y+28z)}{16}=\frac{5(y+63z)}{21}=\frac{12(y+126z)}{2x}.$$

Из уравнения

$$\frac{5(y+28z)}{16}=\frac{5(y+63z)}{21}$$

имеем: $y = 84z$.

Подставив это значение y в уравнение

$$\frac{5(y+28z)}{16}=\frac{12(y+126z)}{2x},$$

находим, что $x = 36$.

Итак, на третий луг нужно пустить 36 быков.

Задача 13-я.
Глубина колодца

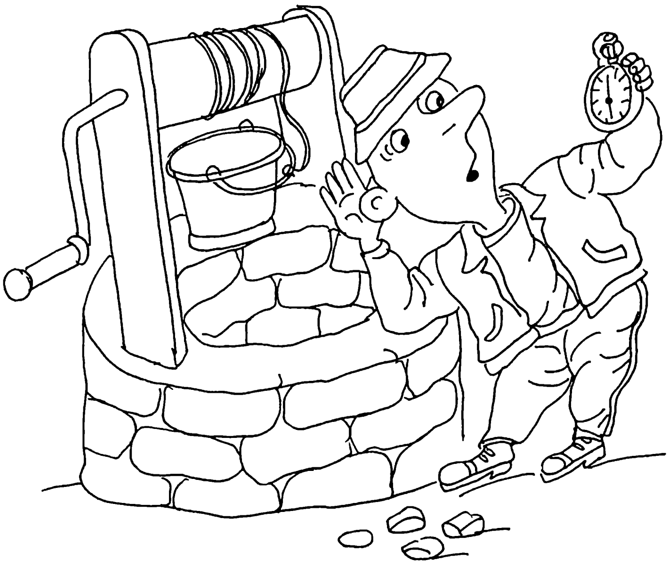
Камень падает в колодец. Определить глубину колодца по звуку, происходящему от удара камня о дно.

Решение

Если обозначить через x глубину колодца и затем условиться, что камень проходит пространство a во время b, а звук то же пространство во время d, что время от начала падения камня до получаемого ухом звука от его удара о дно есть t, то решение задачи приводит к квадратному уравнению:

$$x^2-\frac{2adt+ab^2}{d^2}\cdot x+\frac{a^2t^2}{d^2}=0$$

Для нахождения ответа для каждого частного случая необходимо знать законы свободного падения тел и скорость распространения звука.



К приведенным задачам прибавим еще следующую, взятую из английского сборника за 1742 г. (Miscellany of Mathematical Problems).

Задача остроумна по условию и решается сравнительно просто. Из вышеуказанного сборника она перешла во многие задачники и руководства.

Задача 14-я.
Кто на ком женат?

Трое крестьян, Иван, Петр и Алексей, пришли на рынок со своими женами: Марьей, Катериной и Анной. Кто на ком женат, нам неизвестно. Узнать это на основании таких соображений: каждое из этих 6 лиц заплатило за каждый купленный предмет столько копеек, сколько предметов оно купило. Каждый мужчина истратил на 63 копейки больше своей жены. Кроме того, Иван купил 23 предметами больше Катерины, а Петр 11 предметами больше Марьи.

Решение

Если один из мужчин купил, скажем, x предметов, то по условию задачи он заплатил за них x^2 коп. Если его жена купила y предметов, то она заплатила за них y^2 коп. Разница $x^2 - y^2 = 63$, но $x^2 - y^2 = (x + y)\cdot(x - y)$, т.е. $(x + y)\cdot(x - y) = 63$.

Числа $x + y$ и $x - y$ найдем, разложив 63 на два целых множителя;

но $63 = 3^2 \cdot 7$, и разложение возможно на три манеры: 63×1, 21×3, 9×7, откуда уравнения

$$\begin{cases} x_1 + y_1 = 63, \\ x_1 - y_1 = 1; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 + y_2 = 21, \\ x_2 - y_2 = 3; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_3 + y_3 = 9, \\ x_3 - y_3 = 7. \end{cases}$$

Их решения:

$x_1 = 32$, $y_1 = 31$; $x_2 = 12$, $y_2 = 9$; $x_3 = 8$, $y_3 = 1$.

Отыскиваем те значения x и y, разность которых равна 23, и находим x_1 и y_2; следовательно, 32 предмета куплено Иваном, а 9 — Катериною, и т. д. Таким образом, имеем следующие комбинации в ответе:

$$\begin{cases} \text{Иван } 32, \\ \text{Анна } 31; \end{cases} \qquad \begin{cases} \text{Петр } 12, \\ \text{Катерина } 9; \end{cases} \qquad \begin{cases} \text{Алексей } 8, \\ \text{Марья } 1. \end{cases}$$

Русские задачи

О состоянии и развитии математических знаний на Руси в ее древнейший период неизвестно почти ничего. В «Русской Правде» Ярослава есть, положим, статья с таким расчислением: «А от 20 овец и от двою приплода на 12 лет — 90 000 овец» и т.д. Вычисление стоимости приплода, или прибытка, и получаемых от скота продуктов верно и доказывает, что составители «Русской Правды» были знакомы с умножением и делением. Но, в общем, есть основания думать, что о каких бы то ни было самостоятельных шагах ни в одной области математики в России говорить не приходится чуть ли не до XVIII или даже XIX в. Немногочисленные дошедшие до настоящих дней математические рукописи служат тому убедительным доказательством.

Так, в своих известных примечаниях к«Истории государства Российского»Карамзин говорит, что в его распоряжении была рукопись геометрии XVII в. под заглавием: *«Кунига именуемая геометрия или землемерия радиксом и цыркулем»*. За геометрией следует: «*Книга о сошном и вытном* письме»; потом рукописная *арифметика,* озаглавленная:«книга рекома по-гречески *Арифметика*, а по-немецки *Алгоризма*, а по-русски *цифирная счетная мудрость*». В предисловии книги говорится:

«Сир, сын Асиноров, муж мудр бысть: сии же написа численную сию философию финическими письмены, яко же он мудрый глаголет, яко бесплотна сущи начала, телеса же преминующая. Без сея книги не един философ, ни духтур не может быти, а хто сию мудрость знает, может быть у государя в великой чести и в жаловании; по сей мудрости гости (купцы) по государствам торгуют, и во всяких товарех и в торгех силу знают, и во всяких весех и в мерах и в земном верстании и в морском течении зело искусны, и счет из всякаго числа перечню знают».

В одном из памятников русской старинной математической литературы, заглавие которого «Пятая мудрость в семи великих мудростях нарицается Арифметика», изложение арифметики разделено на статьи, а статьи распадаются на нумерованные отделения, называемые *строками*, отвечающими нашим делениям на главы и параграфы. Вот содержание: «*Первая статья от числа.* Нюмерация, или считание словесем и начертание числом цыфирным. *Другая статья* — адитсие, или считание, — наше сложение; статья именуется сютракие — по-нашему вычитание; *статья мюлтипликасие*, или умножение числу всякому; *статья дивизие, или деловая*; указ како костьми считати; *статья адитие или счетная костьми или пеиязи. Статья костьми мултипликасие* или умножальная. *Статья сюбстаксие* костьми, или вынимание. *Статья деловая* костьми, дивизие или росчитание. *Указ о дощаном счете. Указ како класти костьми* сошную кладь. Статья о весех и о мерах *московского государства русские земли.* Статья о весех и о мерах немецкие земли. Статья французские земли о денежном счете ливонском, виницейском и флоренском».

Потом идет сложение, вычитание, умножение и деление в *весах и в мерах и в деньгах*, или, по-современному: сложение, вычитание, умножение и деление именованных чисел. «*Статья численная о всяких долях; уменьшение долям:* сложение, вычитание, умножение и деление дробей; потом *статья стройная в целых и в долях всяких. Статья тройная в долях. Статья деловая; статья торговая; статья о прикупах*; о накладех счет; статья, спрашиваемая в тройной строке; статья, спрашиваемая во времени. Статья ростовая и добычная; статья о нечисти во всяких овощах и в товарах; *статья фальшивая, или сбойливая статиа меновая в торгу.* Статья торговая складная; статья торговая складная с прикащики и др., о деньгах в куче уведати; о плотникех (задача); о яйцах (задача); о хождении юношей трех зернщиков.

Способ изложения в рукописи строго догматический. Правила предлагаются в форме предписания или рецепта, не содержащего даже намека на указание мотивов и оснований. Примеры идут: одни тотчас за изложением правила, другие наоборот. Вот образчик преподания правила сокращения дробей: «Уменьшение долям». Когда оставляются в деловой великие доли в числах ибо надобе их сводить в невеликия числа. Смотри возьму остатков в долях 40, а деловой перечень (делитель) 60 и ты поставь еще $^{40}/_{60}$ и прежь оными у обоих чисел 0 ино станет $^{4}/_{6}$; да смотри льзяли оба числа верхния и нижния во един дел разделити и ты дели как на два придет $^{2}/_{3}$ т.е. две трети».

Относительно употребляемых в рукописи знаков должно заметить, что употребление арабских цифр не вытеснило церковно-славянских знаков, так статья о «нюмерасии, или счислении числом цыфирным» начинается с перевода первых девяти церковно-славянских знаков на употребляемые нами цифры. В примерах с отвлеченными числами исключительно употребляются цифры; в именованных — употребляются смешанно церковно-славянские знаки и цифры.

В другой рукописной арифметике упомянут год, когда писалась рукопись. Она озаглавлена так: «Книга, глаголемая арифметика, пятая из седьми мудростей наука. Начата бысть писати от создания мира в лето 7199 года, индикта 14, круга солнечнаго 3, луннаго 17; от рождества по плоти единосущнаго отцу Слова 1691 года; справнаго луннаго слова О, а ключевого пасхальнаго Ф, месяца Иуниа 28 дня».

«Увещевание» и предисловие в этой рукописи написаны стихами, часть которых посвящена восхвалению счета и нуля, называемого «оном».

Да увестся о сем, яко арифметика
Девяти чисел, девяти и статей наука.
Десятое же место *оном* исполняет,
Своего числа место просто сохраняет.

Кому либо в счет необретатися
Ту есть станет Он ему же не считатися,
Разумей, иде же Он место порозже есть:
Тако в статьях десятья науки несть!

Точию вместо того поставки различные.
В строках считание славяном не обычны:
Тех поставок подробно и счести,
Кто их навыкнет, может вся под солнцем счести.

Итак, в то время как в Западной Европе создавались *Principia mathematica* и *Arithmetica universalis* Ньютона, когда блестящая плеяда математиков раздвигала все шире и шире все области естествознания, российские «цыфирные грамотеи» все еще перебивались пережитками отдаленного Средневековья. Математические курсы и сочинения, стоящие на более высоком уровне знаний, начинают появляться на Руси только после Петра Великого. Одним из первых и замечательнейших учебников арифметики, по которому учились наши прапрадеды, был учебник Л. Магницкого, изданный в 1703 г. Приводим из него две нижеследующие задачи.

Задача 15-я. Ответ учителя

Вопроси некто учителя некоего глаголя: повеждь ми колико имаши учеников у себе во училищи, понеже имам сына отдати во училище: и хощу уведати о числе учеников твоих? Учитель же отвещав рече ему: аще придет ми учеников толико же, елико имам, и полтолика, и четвертая часть, еще же и твой сын, и тогда будет у мене учеников 100. Вопросивый же удивлся ответу его отиде, и начат изобретати.

Решение

Задача принадлежит к типу задач, решающихся прогрессией.

Ответ: 36.

Некоторые старорусские меры и выражения

В условиях следующих задач встречаются слова, вряд ли понятные многим из современных читателей. Приводим их здесь для удобства в особой табличке:

1 копейка = 2 деньги = 4 полушки

1 полтинник = 50 копеек

1 гривна = 10 копеек

1 алтын = 3 копейки

1 грош = 2 копейки

1 пензязь (польская монета) = 1 копейка

полтора(жды)	значит	$1\,{}^1/_2$
полтретья(жды)	»	$2\,{}^1/_2$
полчетверта(жды)	»	$3\,{}^1/_2$
полпята(жды)	»	$4\,{}^1/_2$ и т.д.

Задача 16-я.
Недогадливый купец

Некий человек продаде коня за 156 рублев, раскаявся же купец нача отдавати продавцу глаголя: яко несть мне лет взяти сицеваго коня недостойнаго таковые высокия цены; продавец же предложи ему иную куплю глаголя: аще ти мнится велика цена сему коню быти, убо купи токмо гвоздие ихже сей конь имать в подковах своих ног, коня же возми за тою куплею в дар себе. А гвоздей во всяком подкове по шести, и за един гвоздь даждь ми едину полушку, за другий же две полушки, а за третий копейку, и тако все гвозди купи. Купец же видя толь малу цену и коня хотя в дар себе взяти: обещася тако цену ему платити, чая не больше 10 рублев за гвоздие дати. И ведателно есть: коликим купец он проторговался?

Решение

Купец действительно «проторговался» очень сильно, так как за гвозди ему приходится заплатить

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{23} \text{ полушек,}$$

что составит 41 787 руб. 3 $^3/_4$ коп.!

Задача опять-таки принадлежит к типу задач, решающихся прогрессией.

Вообще же говоря, все почти задачи в руководстве Магницкого носят характер простых переводов с иностранных руководств. Большую самостоятельность в обработке материала проявил артиллерии штык-юнкер Ефим Войтяховский, издавший курс математики в 1820 году.

Вот полный заголовок этой книги: «Полный курс чистой математики, сочиненный артиллерии штык-юнкером и математики партикулярным учителем Ефимом Войтяховским, в пользу и употребление юношества и упражняющихся в математике». 4 тома, изд. 1820 г.

Задачи курса Войтяховского более переработаны и приспособлены к русскому кругозору, а некоторые из них положительно остроумны, иногда, впрочем, до игривости, сбивающейся на «раешник». Не обходится в иных из них и без сатиры, предметом которой обыкновенно избираются в силу условий времени французы. Вот несколько задач из курса Войтяховского. Решения их незамысловаты, так что даем только ответы.

Задача 17-я. Богатство мадамы

Нововыезжей в Россию французской мадаме вздумалось ценить свое богатство в чемодане: новой выдумки нарядное фуро и праздничный чепец а ла фигаро; оценщик был русак, сказал мадаме так: богатства твоего первая вещь фуро вполчетверта дороже чепца фигаро; вообщеж стоют не с половиною четыре алтына, но настоящая им цена только сего половина; спрашивается каждой вещи цена, с чем француженка к россам привезена.

Ответ. Чепец «а ла фигаро» стоит $1\,{}^1/_2$ коп., а нарядное фуро $5\,{}^1/_4$ коп.

Задача 18-я. Богатство гасконца

У приезжего гасконца оценили богатство: модный жилет с поношенным фраком в три алтына без полушки, но фрак вполтретья дороже жилета; спрашивается каждой вещи цена.

Ответ. Цена фрака $6\,{}^1/_4$ коп., жилета $2\,{}^1/_2$ коп.

Задача 19-я. Веселый француз

Веселый француз пришед в трактир с неизвестною суммою своего богатства, занял у содержателя столько денег, сколько у себя имел; из сей суммы издержал 1 рубль. С остатком пришел в другой трактир, где опять занявши столько сколько имел, издержал в оном также 1 рубль; потом пришед в третий и четвертый трактир учинил тоже, наконец по выходе из четвертого трактира не имел ничего; спрашивается количество его денег.

Ответ. 93 $^3/_4$ коп.

Задача 20-я (Император Николай I). В лавке

Куплено сукна полторажды полтретья аршина, заплачено полчетвертажды полпята рубли; спрашивается, сколько должно заплатить за полсемажды полдевята аршина того же сукна.

Ответ. 232 руб. 5 коп.

Задача 21-я. Дележ

4 путешественника: купец с дочерью, да крестьянин с женою нашли без полушки 9 алтын да лапти, из коих крестьянке дали грош без полушки да лапти, а остальные деньги разделили между собой так: купеческая дочь взяла вполтора больше крестьянина, а купец вполтретья больше крестьянина; спрашивается, сколько которому досталось?

Ответ. Крестьянин получил 5 коп., дочь купца 7 $^1/_2$ коп., купец 12 $^1/_2$ коп.

Задача 22-я. Мена

Крестьянин менял зайцев на домашних куриц, брал за всяких двух зайцев по три курицы; каждая курица снесла яиц третью часть против числа всех куриц. Крестьянин, продавая яйца, брал за каждые девять яиц по столько копеек, сколько каждая курица яиц снесла, за которые выручил он 24 алтына; спрашивается число кур и зайцев.

Ответ. 12 зайцев и 18 кур.

Задачи-шутки

Есть немало задач-шуток, основанных на так называемом «гипнозе» слов или обозначений, вернее же говоря, — на том или ином «отводе глаз». Постановка вопроса, а затем «разрешение» его бывают иногда столь искусно рассчитаны на отвлечение внимания слушателя в другую сторону, что последнему часто бывает трудно не поддаться, а хладнокровно сообразить, в чем секрет. Здесь мы даем для образца несколько«гипнотических»задач.

Задача 23-я.
Искусное размещение

Можно ли разместить 11 лошадей в 10 стойлах так, чтобы в каждом стойле было всего по одной лошади?

Всякий скажет, что невозможно: для одиннадцатой лошади недостанет стойла. Но не угодно ли убедиться, что при некотором искусстве это «вполне возможно».

В самом деле, поместим временно одиннадцатую лошадь в первое стойло и затем станем помещать остальных лошадей по одной в каждое стойло. Тогда в первом стойле окажутся две лошади, третью лошадь мы поместим во второе стойло, четвертую — в третье и т.д. Десятая лошадь займет девятое стойло, и останется лишь перевести 11-ю лошадь из первого стойла в свободное десятое.

2 л.	3-я	4-я	5-я	6-я	7-я	8-я	9-я	10-я

Решение

Весь прямо ошеломляющий иных эффект этой задачи-шутки зиждется на *гипнозе слов*, которому почти невозможно не поддаться. Мы так увлеклись поисками места для *одиннадцатой* лошади, что совершенно не замечаем отсутствия *второй* лошади. У нас есть 1-я, 11-я, 3-я, 4-я, 5-я, 6-я, 7-я, 8-я, 9-я и 10-я лошадь, но где же 2-я? Ее отсутствие замаскировано цифрой 2 в первом стойле.

Задача 24-я.
Расплатился без денег

В ресторан заходит посетитель и требует пива. Официант приносит бутылку и готов уже раскупорить, как вдруг посетитель передумывает.

— Дайте мне лучше лимонаду.

— Извольте-с. Нам все единственно. И цена та же, — отвечает официант и, унеся пиво, является с лимонадом.

Посетитель выпивает лимонад и собирается уходить. Его догоняет официант.

— Забыли заплатить-с!..

— За что? — изумляется посетитель.

— За бутылку лимонаду-с.

— Вы же взяли за нее пиво.

— Тогда извольте заплатить за пиво. Вы и за пиво не заплатили-с...

— Но ведь я не пил пива. Вы унесли бутылку нераскупоренной, — невозмутимо отвечает посетитель, оставляя официанта в полном недоумении.

Задача 25-я.
Дешевая покупка

В часовой магазин заходит покупатель и просит показать ему дорогие часы. Он долго выбирает и, наконец, останавливает выбор на солидных дорогих часах.

— Что стоят?

— Двести рублей.

— Хорошо, я беру их. Заверните.

Покупатель собирается уже платить, но вдруг взгляд его падает на изящные серебряные часы.

— А эти сколько у вас стоят?

— Эти подешевле будут: сто рублей!

— Право, они мне больше нравятся. Заверните.

Покупатель платит 100 рублей, берет часы и направляется к выходу. Но затем снова возвращается.

— Нет, я передумал: решил-таки купить те золотые.

— Как угодно. Прикажете завернуть?

— Пожалуйста. Они стоят двести?

— Да.

— Сто рублей я уже дал вам?

— Да. С вас причитается еще сто.

— Возьмите вместо них эти серебряные часы: ведь я купил их у вас за сто рублей...

Решение

Обе задачи, как уже сказано, основаны на гипнозе слов. В первом случае слова «Я не пил пива» кажутся достаточным основанием, чтобы не платить за напиток. На самом же деле продавцу совершенно безразлично, какое употребление вы делаете из вещи, — уничтожаете ее или даете ее в уплату за другую вещь: вы ее так или иначе употребили, значит, должны за нее платить.

В задаче с часами одни и те же сто рублей идут в уплату два раза: раз — за серебряные часы, и вторично — за золотые.

Задача 26-я.
Загадочное исчезновение

Начертите на прямоугольном куске картона 13 одинаковых палочек, на равном расстоянии друг от друга, так, как показано на рис. 1. Теперь разрежьте прямоугольник по косой линии MN, проходящей через верхний конец первой палочки и через нижний конец последней. Если затем вы сдвинете обе половины так, как показано на рис. 2, то заметите любопытное явление: вместо 13 палочек перед вами окажется всего 12! Одна палочка исчезла бесследно. Куда же она девалась?

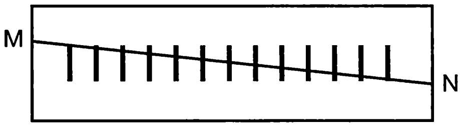


Рис. 1

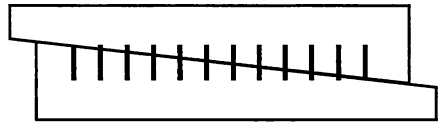


Рис. 2

Решение

Идея задач подобного рода не нова.

Если вы внимательно рассмотрите оба чертежа и дадите себе труд сопоставить длину старых и новых палочек, то заметите, что новые чуть длиннее старых. Тщательное измерение убедит вас, а то можно показать и вычислением, что разница в длине — $^1/_{12}$ доли старой палочки, и что, следовательно, исчезнувшая 13-я палочка улетучилась не бесследно: она словно растворилась в 12 остальных, удлинив каждую из них на 1/12 своей длины.

Понять геометрическую причину того, что при этом произошло, очень нетрудно. Прямая MN и та прямая, которая проходит через верхние концы всех палочек, образуют стороны угла, пересеченные рядом параллельных на равных расстояниях друг от друга. Вспомнив соответствующую геометрическую теорему, мы поймем, что линия MN отсекает от второй палочки $^1/_{12}$ ее длины, от третьей $^2/_{12}$, от четвертой $^3/_{12}$ и т.д.

Когда же мы сдвигаем обе части картона, мы приставляем отсеченный отрезок каждой палочки (начиная со второй) к нижней части предыдущей. А так как каждый отсеченный отрезок больше предыдущего на $^1/_{12}$, то каждая палочка вследствие этой операции должна удлиниться на $^1/_{12}$ своей длины и всех палочек должно получиться 12.

На глаз это удлинение незаметно, так что исчезновение 13-й палочки на первый взгляд представляется довольно загадочным.

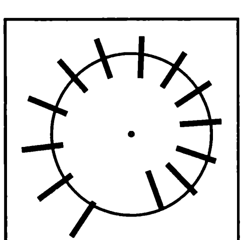


Рис. 3

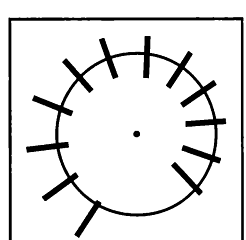


Рис. 4

Чтобы усилить эффект, можно расположить палочки по кругу, как показано на рис. 3. Если вырезать внутренний круг и укрепить его в центре так, чтобы он мог вращаться, то поворотом круга на небольшой угол мы опять достигаем исчезновения одной палочки (рис. 4).

Задача 27-я.
Разрубить подкову

Двумя ударами топора разрубить подкову на шесть частей, не перемещая частей после первого удара.

Решение

Если вы начертите подкову в виде одиночной дугообразной линии, как это обыкновенно и делают, то сколько бы вы ни ломали голову, вам не удастся разрезать ее двумя прямыми больше чем на 5 частей (рис. 5).

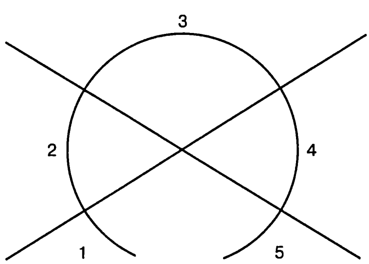


Рис. 5

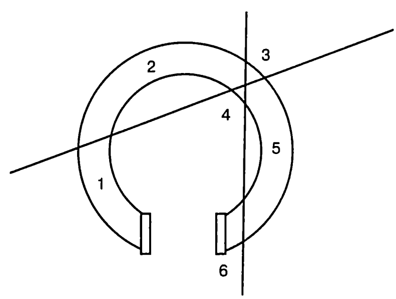


Рис. 6

Другое дело, если вы начертите подкову в виде двух параллельных кривых, т.е. дадите фигуре ширину, как оно и есть на самом деле. Тогда после нескольких проб вы нападете на верное решение задачи — разрежете подкову двумя прямыми на 6 частей (рис. 6).

Задача 28-я.
7 роз

На ковре (рис. 7) изображено 7 роз. Требуется тремя прямыми линиями разрезать ковер на семь частей, каждая из которых содержала бы по одной розе.

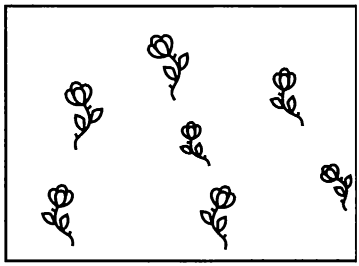


Рис. 7

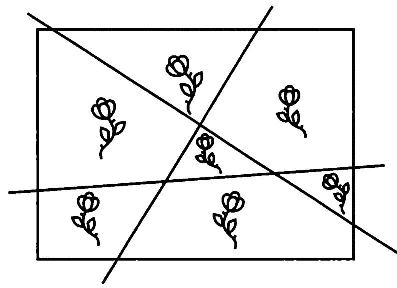


Рис. 8

Решение
См. рис. 8

Задача 29-я.
Разрезать шахматную доску

Даны две шахматные доски: обыкновенная в 64 клетки и другая — в 36 клеток (рис. 9). Требуется каждую из них разрезать на две части так, чтобы из всех полученных 4 частей составить новую шахматную доску, содержащую на каждой стороне по 10 клеток.

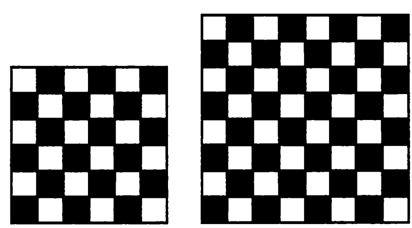


Рис. 9

Решение

См. рис. 9а.

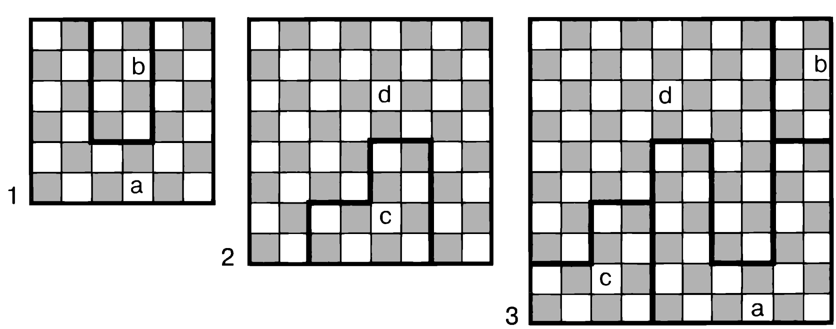
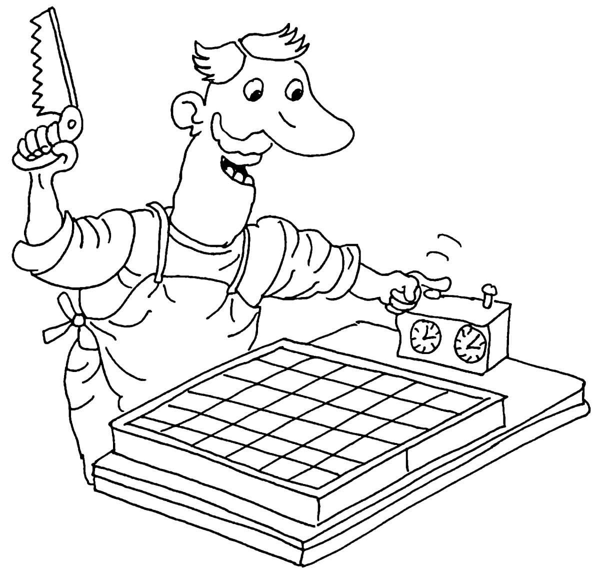


Рис. 9а



Задача 30-я.
Из креста квадрат

Разрезать бумажный греческий крест (прямой и равноконечный) одним взмахом ножниц на четыре таких одинаковых части, чтобы из них можно было сложить квадрат.

Решение

Задача решается посредством маленькой, но вполне позволительной уловки: крест необходимо *предварительно перегнуть* два раза и лишь затем произвести разрез. Линии перегиба обозначены на прилагаемых чертежах (рис. 10) пунктиром: перегибают сначала по AB, потом еще раз

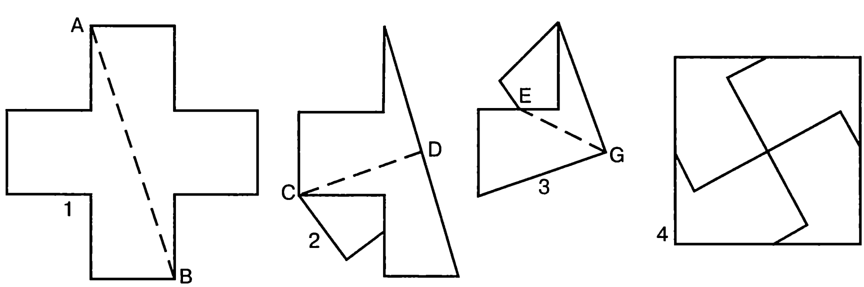


Рис. 10

по CD. Разрез производят по EG, причем получают четыре одинаковые фигуры, из которых складывается квадрат.

Подыскать доказательство правильности полученного решения — предоставляем читателю. Это нетрудно.

Задача 31-я.
Устроить хозяйственный уровень

Из трех тонких, прямых, хорошо выструганных и с параллельными краями досок можно легко построить прибор, полезный при многих домашних столярных, плотничьих и сельскохозяйственных работах. Прибор носит название уровня и служит для определения горизонтальности поверхности в случаях, когда не требуется слишком большой точности, например при нивелировке почвы на полях и огородах и т.д. Прибор устраивается так:

Полосы из тонких дощечек скрепляются вместе, как указано на фигуре, образуя треугольник с двумя равными сторонами (равнобедренный). Средняя точка основания отмечена перпендикулярной чертой, а с противоположной верхушки спускается *отвес* (нить с грузом) рис. 11.

Если прибор помещен так, что нить отвеса совпадает со средней отметкой, то, следовательно, полоса основания лежит горизонтально, будучи перпендикулярной к линии отвеса. Весь прибор, следовательно, основан на том, что линия, выходящая из вершины и делящая пополам основание равнобедренного треугольника, перпендикулярна этому основанию.

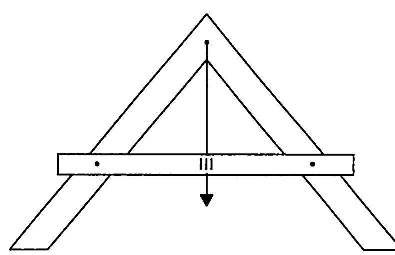


Рис. 11

В зависимости от длины сторон треугольника можно вычислить (или прямо определить опытным путем), как деления вправо и влево от среднего можно провести на основании так, чтобы линия отвеса, совпадая с ними, указывала уклоны от горизонтальности в отношениях 1 на 200, 1 на 100 и т.д.

Синус

Изучающие тригонометрию задают часто такой вопрос: «из понятия о значении линии, или, точнее, геометрического представления тригонометрических отношений легко понять, откуда произошли *названия* «тангенса» или «секанса», а также соответственным им функций дополнительного угла («котангенс» и «косеканс»). Но откуда взялось слово *синус*? На этот вопрос историки математики отвечают так.

Греки всегда брали полную хорду удвоенной дуги. Индусы хотя и употребляли в вычислениях половину хорды удвоенной дуги (то, что мы называем теперь синусом), но сохранили для этой линии название полной хорды, Ziva (*джива*), что в буквальном переводе означает *тетива*, — самое естественное название для хорды.

Произведения индусов дошли вначале до нас через арабов. Эти последние из санскритского *джива* сделали *джиба*, слово, ничего не значащее по-арабски. Но так как арабы пишут без гласных букв, а только одни согласные (гласные у них обозначаются особыми значками, которые часто опускаются), то с течением времени они слово *джиба* переделали в арабское *джаиб*, писавшееся теми же согласными и значившее по-арабски грудь. В таком виде это слово встречается в сочинении древнейшего арабского астронома Аль-Батани (IX столетие), написавшего книгу о движении небесных тел.

В двенадцатом столетии этот труд был переведен на латинский язык *Платоном Тибуртинским*, передавшим арабское слово *dschaib* дословно латинским *синус* (Sinus — грудь). Так это совершенно не соответствующее геометрическому представлению слово и удержалось в математике до наших дней.

Задача 32-я. Построить прибор, наглядно поясняющий тригонометрические линии

Желающий может заняться на досуге устройством рода прибора, наглядно иллюстрирующего тригонометрические линии, представляющие тригонометрические отношения. При устройстве такого прибора можно руководствоваться нижеследующей общей схемой (см. рис. 12).

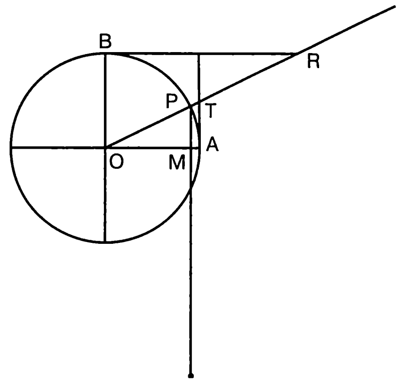


Рис. 12

В центре O круга укреплен тонкий стержень (прут) OR, который может вращаться. Прут, изображающий касательную, привинчен к диску в точке A. Вдоль этого последнего легко скользит маленький блок, помеченный буквой T. Этот блочок соединен со стержнем OR так, что T обозначает пересечение двух линий. Точно так же еще маленький блок R может скользить вдоль другого касательного тонкого стержня BR.

В месте P на единице расстояния от O (т.е. на расстоянии радиуса круга) ввинчен или укреплен как-либо иначе другой тоненький стержень PM. Тяжесть на нижнем конце этого стержня держит его постоянно в вертикальном положении. В свою очередь, он свободно проходит через блочок, свободно скользящий вдоль OA и обозначенный на рис. 12 буквой M.

Пусть теперь стержень OR вращается в положительном направлении (обратном движению часовой стрелки); тогда угол при O увеличивается, а вместе с тем:

MP	представит	соответственное	увеличение синуса,
OM	»	»	уменьшение косинуса,
AT	»	»	увеличение тангенса,
BR	»	»	уменьшение котангенса,
OT	»	»	увеличение секанса,
OR	»	»	уменьшение косеканса.

Преодолевший небольшие сравнительно технические трудности и внесший возможные усовершенствования в предлагаемую схему может, мы думаем, составить себе имя и даже заработать, введя в школу полезное учебное пособие.

Задача 33-я. Устроить прибор для обращения кругового движения в прямолинейное

Положим, что мы ведем карандашом, касаясь края какого-либо кружка, и таким образом получаем окружность. В данном случае мы пользуемся, значит, одним кругом для получения другого. Но для получения окружности и кругов у нас есть и другой инструмент, не круглый сам по себе, а именно — циркуль.

Если необходимо провести прямую линию, то известный геометрический постулат допускает употребление линейки, что требует прямого края для проведения прямой линии, т.е. прямая линия получается как копия.

Возможно ли устроить прибор, не прямой сам по себе, который мог бы вычерчивать прямую линию? Такой прибор впервые был изобретен в 1864 г.

Прежде чем рассмотреть устройство всего инструмента, рассмотрим одно его звено (рис. 13), вращающееся на штифтике с одного конца и с прикрепленным карандашом на другом. Карандаш в этом случае описывает окружность.

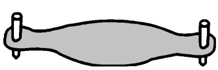


Рис. 13

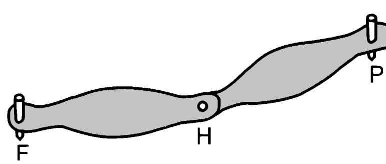


Рис. 14

Если два таких звена (рис. 14) соединены в точке H, а в точке F прикреплены к плоскости, точка P может двигаться всячески, ее путь неопределен. Число звеньев должно быть нечетное, чтобы дать определенное движение. Если систему из трех звеньев прикрепить в двух концах, конец среднего звена опишет определенную кривую — скажем, петлю. Система из пяти звеньев уже может дать искомое прямолинейное движение. Но первый аппарат имеет семь звеньев.

Такой прибор, какой угодно величины, может быть сделан каждым. Звенья можно вырезать из картона и скрепить их толстыми булавками (см. рис. 15). Концы F и O (рис. 15) можно прикрепить к классной доске, а в P укрепить кусок карандаша. Таким образом можно получить полезное и интересное приспособление к уроку геометрии. Фигура на рис. 16 дает диаграмму аппарата, изображенного

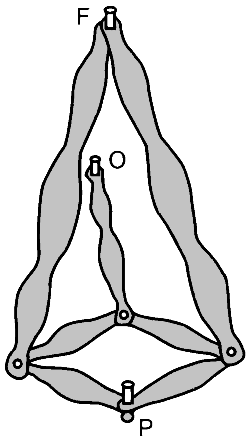


Рис. 15

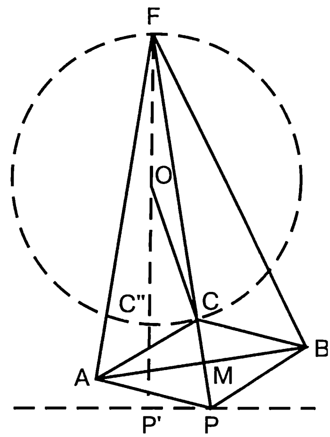


Рис. 16

на рис. 15. Здесь $FA = FB$. Во всех положениях $APBC$ есть, очевидно, ромб. F и O прикреплены в точках, расстояние между которыми равно OC. В таком случае C двигается по дуге круга, центр которого есть O. Точки A и B двигаются по дуге, имеющей центром F. Остается показать, что P двигается по прямой линии.

Проведем прямую PP' перпендикулярно к FO. Угол FCC', вписанный в полукруг, есть прямой. Значит, треугольники $FP'P$ и $FC'C$, имеющие общий угол с вершиной F, подобны.

Следовательно, $FP : FP' = FC' : FC$

и $FP \cdot FC = FP \cdot FC'$. . . (1)

Точки F, C и P, каждая в отдельности, находятся на равном расстоянии от A и B, а потому, значит, лежат на одной и той же прямой линии. Диагонали ромба $APBC$, как известно, взаимно перпендикулярны и в точке пересечения делятся пополам. Отсюда:

$$FB^2 = FM^2 + MB^2$$
$$PB^2 = MP^2 + MB^2$$
$$FB^2 - PB^2 = FM^2 - MP^2$$
$$= (FM + MP)(FM - MP)$$
$$= FP \cdot FC \; . \; . \; . \; . \; . \; (2)$$

Из (1) и (2) заключаем, что $FP' \cdot FC' = EP^2 - FB^2$.

Но при движении прибора FC', FB и PB все остаются постоянными; следовательно, FP' тоже постоянно. Это значит, что P, проекция точки P на FO, есть всегда одна и та же точка. Или, другими словами, P двигается по прямой линии (перпендикулярной к FO).

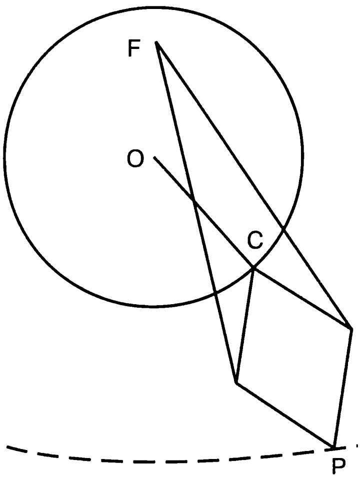


Рис. 17

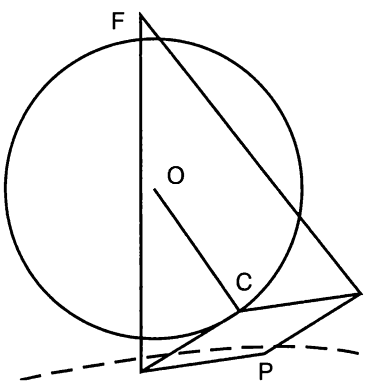


Рис. 18

Если расстояние между двумя означенными точками, *F* и *O*, сделать меньше длины звена *OC, P* будет двигаться по дуге круга, вогнутой по направлению к *O* (рис. 17). Так как *OC* — *OF* приближается к нулю как к пределу, радиус дуги, вычерчиваемой *P*, увеличивается беспредельно. Если *OF* сделать больше, чем *OC*, то Р будет описывать дугу, выгнутую относительно *O* (рис. 18). Чем меньше *OF* — *OC*, тем более радиус дуги, означенной через *P*.

Отсюда видно, что этот небольшой прибор может быть употреблен для описания дуги круга с огромным радиусом и с центром дуги на противоположной от инструмента стороне.

Прямая линия — «простейшая кривая» математиков — лежит, так сказать, между двумя такими означенными выше дугами, и есть предельная форма каждой из них.

Приборы подобного рода обладают многими интересными особенностями. Дальнейшие разработки этой идеи доказывают, что с помощью подобных сочленений звеньев можно вообще вычертить любую так называемую алгебраическую кривую.

Читатель, наверное, не посетует на нас, если сам займется устройством описанного прибора, имеющего связь с существеннейшими основами геометрии.

Задача 34-я.
О пауке и мухе

На потолке в углу C комнаты (рис. 19) сидит паук, а на полу, в противоположном углу K — муха. Какой путь должен избрать паук, чтобы добраться до мухи по кратчайшему расстоянию?

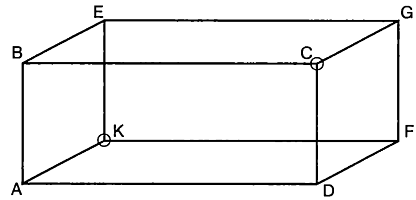
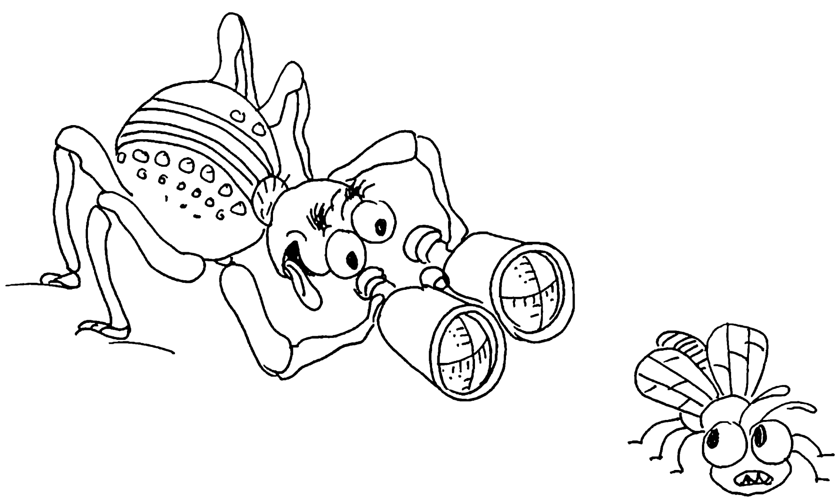


Рис. 19



Решение

С первого взгляда кажется ясным, что паук должен пробежать потолок по диагонали CE и затем спуститься к мухе по ребру EK — (1-й путь). Поразмысливши, мы найдем для паука и другой «кратчайший» путь: он может пробежать боковую стену по диагонали CF и подобраться к жертве вдоль FK — (2-й путь).

И, наконец, паук мог бы пойти по CG и по диагонали GK — (3-й путь).

Какой же из этих трех путей является действительно кратчайшим?

Оказывается, что ни тот, ни другой, ни третий. Есть еще более короткие пути, и мы займемся их разысканием.

Для этого развернем параллелепипед, изображающий нашу комнату, на плоскость. Получим чертеж, изображенный на рис. 20. Паук сидит в точке C, а муха — в точке K.

Теперь мы ясно видим, что путь CEK, который в неразвернутом черте-

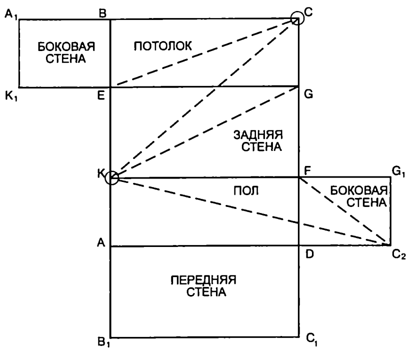


Рис. 20

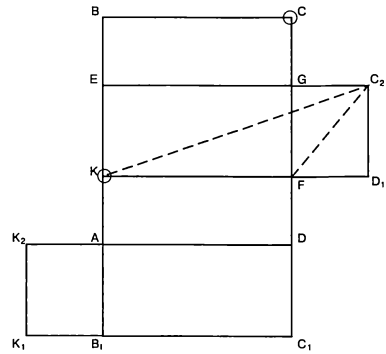


Рис. 21

же казался нам кратчайшим, на самом деле не является таковым. Стоит соединить точки C и K прямой линией, чтобы получить заметно более короткий путь. Этот новый путь будет также короче и пути CGK, как видно из чертежа.

Далее, если предположить, что паук сидит в точке C_2 (также отвечающей углу C нашего параллелепипеда), то C_2FK будет путь, обозначенный нами выше как «2-й путь». Ясно, что он больше прямого пути C_2K.

Мы узнали, следовательно, уже два «кратчайших» пути CK и C_2K.

Но это еще не все: есть и третий. Чтобы найти его, развернем комнату, как показано на рис. 21. Поместив мысленно паука в точку C_3, мы увидим, что путь C_3FK (отвечающий пути CFK на нашем параллелепипеде) длиннее прямого пути KC_3.

Остается теперь решить вопрос: какой же из этих трех новых путей будет самым коротким: KC, KC_2 или KC_3?

Оказывается, что это зависит от относительных размеров комнаты в длину, ширину и высоту, как легко видеть из следующего.

Обозначим длину комнаты AD через a, высоту AB через b и ширину AK через c. Тогда (рис. 20 и 21) имеем:

$$KC=\sqrt{\overline{RF}^2+\overline{CF}^2}=\sqrt{a^2+(b+c)^2};$$
$$KC_2=\sqrt{\overline{AK}^2+\overline{AC_2}^2}=\sqrt{c^2+(a+b)^2};$$
$$KC_3=\sqrt{\overline{KD}^2+\overline{C_3D_1}^2}=\sqrt{b^2+(a+c)^2}.$$

Сравнивая между собой подрадикальные количества, мы увидим по раскрытии скобок, что они отличаются друг от друга лишь членами:

$2bc$, $2ab$ и $2ac$;

от соотношения этих произведений и зависят сравнительные длины линий KC, KC_2 и KC_3.

Деля все три произведения на $2abc$, получим:

$$\frac{1}{a}, \frac{1}{c} \text{ и } \frac{1}{b}$$

Отсюда видно, что если $a > b$ и $a > c$, то кратчайшим путем будет КС. Если $b > a$ и $a > c$, кратчайший путь KC_2, и если $c > b$ и $c > a$, кратчайший путь KC_3.

Мы видим, что задача о пауке и мухе оказалась гораздо сложнее, чем можно было думать с первого взгляда. Читатель, может быть, полюбопытствует узнать, как сами науки решают эту задачу. К сожалению, нам никогда не приходилось наблюдать пауков при таких обстоятельствах, да и более чем сомнительно, чтобы паук мог заметить муху из одного угла комнаты в другом.

Объяснение симметрии посредством сложения бумаги

Простое приспособление дает возможность начинающим получить понятие о симметрии с верностью и правильностью, каких не даст никакое словесное объяснение.

Предложите каждому взять лист кальки, сложить ее один раз, затем снова выпрямить, быстро начертить чернилами на одной половине какую-нибудь фигуру и быстро, чтобы чернила не успели просохнуть, сложить опять вместе. Рисунок на одной стороне и отпечаток его на другой будут симметричны до мельчайших подробностей, причем сгиб бумаги и есть так называемая *ось симметрии*.

Еще: сложите бумагу в две перпендикулярные складки (вчетверо — вдоль и поперек). В одной из полученных «четвертей» куска бумаги нарисуйте фигуру так, чтобы два конца ее упирались каждый в один сгиб. Быстро вновь сложите бумагу так, чтобы получился отпечаток в каждом из остальных квадратов. Полученная замкнутая фигура будет симметрична по отношению к пересечению сгибов как ее центру.

Вместо простых чернил еще лучше чертить так называемыми «копировальными» чернилами или копировальным карандашом и, перегнув бумагу, смочить ее.

О числовых суевериях

Число зверя

«Здесь мудрость. Кто имеет ум, тот сочти число зверя, ибо это число человеческое. Число его шестьсот шестьдесят шесть» (Откровение Иоанна Богослова 13:18).

Приведенный текст из Апокалипсиса всегда производил сильное впечатление на древних и средневековых толкователей, занимавшихся апокалиптической литературой. Особенно занимало оно последователей пифагорейской школы, всегда придававшей числам особый скрытый и мистический смысл. Над выяснением этой загадки трудились многие в продолжение веков. Толкователи позднейших времен связывали число 666 со словами «император (Цезарь) Нерон», написанными по-еврейски: קסר נרון

По древнееврейской системе обозначений чисел находящиеся в этих словах буквы означают:

ק = 100, ס = 60, ר = 200, נ = 50, ר = 200, ו = 6, ן = 50

Складывая эти числа (100 + 60 + 200 + 50 + 200 + 6 + 50), получаем действительно 666.

Такое обозначение имени Нерона писатели объясняют естественной боязнью современников этого полусумасшедшего человека-зверя. Когда же с его смертью мало-помалу страх, возбуждаемый его именем, прошел, то забылось и значение числа, принятого для обозначения этого имени, и только спустя много времени опять вспомнили о нем. Во всяком случае, представляется странным, что одному из первых отцов церкви — Иринею, жившему, по предположению, всего около 100 лет после того, как

был написан Апокалипсис, была, очевидно, неизвестна связь числа 666 с именем Нерона, так как для объяснения этого числа он сам предлагал различные комбинации слов.

В Средние века и позднее католики начали считать это число еретическим и означающим еретиков, в частности протестантов. Протестанты, наоборот, находили несомненную связь между этим числом и именем, или символом, папы. Так, например, принимая во внимание, что в латинском языке буквы *M, D, C, L, X, V, I* употребляются в виде числовых знаков *(M = 1000, D = 500, C = 100, L = 50, X = 10, V = 5, I = 1)*, протестанты из титула папы «наместник сына Бога», написанного по-латыни (vicarius filii dei) выводили также звериное число, как видно из нижеследующего.

V I CARI VSFI L I I DEI
5 + 1 + 100 + 1 + 5 + 1 + 50 + 1 + 1 + 500 + 1 = 666.

Католики, в свою очередь, производили подобные же выкладки с именем Мартина Лютера и т.д. Количество подобных пояснений звериного числа очень велико, и часто эти пояснения настолько противоречивы, что взаимно исключают друг друга. Словом, из факта, что некоторый ключ подходит к замку, нельзя ничего вывести, если замок такого рода, что в нем можно повернуть почти каждый ключ.

Всякие каббалистические изыскания подобного рода, пожалуй, могут представлять известный интерес как предмет шутки или с точки зрения изобретательности и приемов счета, употребляемых толкователями. Но когда подобные числовые выдумки употребляются как средства религиозной борьбы и возбуждения одной церкви против другой, то, конечно, мы должны видеть здесь лишь «покушение с негодными средствами».

Числовая мистика

Приобретшее всеобщую известность и рассмотренное в предыдущей заметке «звериное число» принадлежит к одному из весьма многочисленных остатков той числовой мистики или просто числовых суеверий, которые ведут свое начало с древнейших времен. Изучение древнейших дошедших до нас памятников халдейской, египетской, индусской и китайской культуры доказывает, что древняя наука всегда была связана с суеверием даже в области «точных» математических знаний. Суеверие заключается обыкновенно в том, что числам или геометрическим фигурам приписывались известные таинственные свойства, устанавливались некоторые символические соотношения между числами, с одной стороны, и божествами, личностями или событиями, с другой. На основании этих соотношений делались обыкновенно различные выводы, гадания и предсказания. Числовая мистика подобного рода проходит через всю историю человеческой культуры вплоть до наших дней. В самом деле, разве и в настоящее время вы не встречаетесь с разговорами о «чертовой дюжине», о нежелании сидеть за столом в числе 13 человек, о счастливых и несчастливых числах и днях в месяце и неделе, о той или иной роли, которую какое-либо число играет в жизни какого-либо (обыкновенно знаменитого) человека и т.д.?

Человеческому духу свойственно стремление к чему-то более общему и таинственному, чем то, что дается одним опытом (эмпиризмом) и наглядным представлением. Отвлекаясь в область обобщения и «чистого разума», этот бедный человеческий разум на первых порах часто впадает в *слишком* широкие обобщения, подсказываемые только одним «маленьким допущением» в область... «сверхзнания». В наше время чисто алгебраическое и аналитическое допущение «спириты» поспешили обратить в какой-то «действительный мир, населенный какими-то «духами» и т.д. Что же удивительного в том, что из начала человеческой культуры в науку просто чисел пошел было элемент таинственности и мистицизма, кажущийся теперь, пожалуй, смешным, но в свое время способствовавший разработке познания чисел. Так, в свое время мистические бредни алхимии и астрологии способствовали появлению наук химии и астрономии. Так, в настоящее время запутанные толки разных «спиритов» и «теософов» об области духов вызывают людей трезвой науки дать свои заключения и продолжить свои исследования хотя бы в области *геометрии четырех измерений*. Математика не должна бояться вопросов, а идти впереди них.

Вот почему хотя бы беглый обзор мистики чисел в истории развития математических знаний полон глубокой поучительности. С одной стороны, мы видим, как из общей массы великих мистических бредней и суеверий, словно зерно от шелухи, отделяется, в конце концов, истинное знание. С другой — интересно проследить, как через века и тысячелетия доходят до наших времен известные суеверия и предрассудки.

История обыкновенно такова: вымирают ученые касты, разрушаются и гибнут культуры. Но тем или иным путем какое-либо мистическое учение проникает в широкие народные массы и передается от народа к народу Бог весть какими неуловимыми путями и перерабатывается каждой народностью в своеобразные и причудливые формы. Так, например, в задаче 4-й можно с большой долей вероятности видеть отголоски древнейших суеверий, связанных с числом 7.

Помимо египетского папируса Ахмеса, к самым древнейшим памятникам математики принадлежат дошедшие до нас таблички *клинообразных* письмен халдейской или вавилоно-ассирийской культуры. По взгляду большинства ученых, халдейская культура есть наслоение двух культур: древнейшей — сумерийской и другой, более поздней, — семитической.

Сумерийской культуре принадлежит единственная в своем роде система *клинообразного* письма. Каждая буква в этом письме составлена из собрания черт, имеющих вид клина или гвоздя. Материалом для писания служили квадратные плитки из обожженной глины. Древнейшие поселения сумеров были на нижнем Евфрате: там находились их города Ур и Сенкере. В Сенкере при раскопке целой громадной библиотеки найдены были две глиняные таблички, имеющие не более 15 миллиметров в длину и ширину. Одна из этих глиняных табличек есть таблица квадратов целых чисел. Впоследствии выяснилось, что вторая табличка есть табличка кубов.

Эти две таблички составлены между 2300 г. и 1600 г. до Р.Х. Но есть мнение, что их следует отнести к еще более раннему времени, а именно за 4500 лет до Р.Х. Если последние предположения верны, то найденным табличкам не менее 6000 лет. Можно думать, что таблички имеют связь с халдейской мистикой чисел. Вот что говорят по этому поводу:

В одной из табличек Ниневийской библиотеки царя Ассурбанипала сохранились имена главных богов, и против каждого имени бога стоит известное мистическое число, ему соответствующее. Напротив, злым демонам соответствует ряд дробных чисел.

Встречаются и заклинания, основанные на силе чисел. Тайна, которую божество сумеров Эа поверяет своему сыну, называется числом.

В собрании рифмованных пословиц и старых народных сумерийских песен мы встречаем два куплета, которые, по-видимому, должно было петь на сельском празднике: «Злак, поднимающийся прямо, достигнет благополучного конца роста; число для этого мы знаем».

«Злак изобилия достигнет благополучного конца роста; число для этого мы знаем».

К сожалению, хотя в сохранившихся памятниках магии часто упоминаются заговоры числами, хотя мы и знаем, что число 7 играло при этом особенно таинственную роль, но ни один из заговоров не достиг до нас.

Такова роль чисел в халдейской цивилизации.

Мы имеем поэтому право предполагать, что сенкерейские таблички только же могли служить для целей практической жизни, сколько и для составления комбинаций, основанных на свойствах чисел и имеющих мистическое значение, употреблявшихся, может быть, при гаданиях.

Нельзя не поставить, например, табличку кубов в связь с числом 36, равным сумме кубов первых трех чисел 1, 2, 3 и вместе с тем равным сумме первых четырех четных и первых четырех нечетных чисел.

Это число 36 (вероятно, также вавилонского происхождения) имело весьма важное значение на двух почти противоположных концах старого континента: в Греции, у пифагорейцев и в Китае. У пифагорейцев высшая, самая страшная клятва была клятва числом 36. Весь мир, по их мнению, был составлен из четырех первых четных и четырех первых нечетных чисел. У китайцев четыре первые четные числа представляют чистые и небесные элементы мироздания, четыре первые нечетные числа — нечистые и земные, и сумма их, т.е. число 36, символизирует мир.

Такая поразительная аналогия всего легче может быть объяснена допущением, что идея о таинственном значении числа 36 возродилась еще на халдейской почве, и влиянием халдейских идей, с одной стороны, на Крайний Восток, с другой стороны — на Грецию. Такое влияние халдейской культуры нисколько не удивительно, если мы припомним ту степень развития, которой она достигла, например, во времена Ассурбанипала (721—606 гг. до Р. Х.), когда в его дворце находилась громадная библиотека, открытая для всеобщего пользования, содержавшая трактаты по грамматике, истории, законоведению, мифологии, естествознанию, астрономии, астрологии (содержание всей этой библиотеки заняло бы более 500 томов in 4° по 500 стр. в каждом), когда существовали уже археологи, по приказанию этого царя переводившие сумерийские надписи на язык, бывший в то время в употреблении.

Есть еще другие основания думать, что именно халдейские идеи о таинственном соотношении между числами и явлениями, приводившие халдеев только к заговорам и заклинаниям, обратились у даровитого и одаренного философским духом греческого народа в важное философское учение Пифагора, положившее в основание объяснения природы *числа*. Учение было создано Пифагором, который, как говорят его жизнеописатели, жил долгое время на Востоке и, между прочим, посвятил продолжительное время изучению халдейской магии. Мы имеем, кроме того, свидетельства, которые прямо указывают на халдейское происхождение многих математических теорем. Сущность пифагорейского учения заключается в следующих словах их учения: **«Вещи суть копии чисел, числа — начала вещей».**

Они почитали числа не только как основание всякого познания, не только как причину всякого порядка и всякой определенности, не только как управляющую миром божественную силу, но и прямо объявили, что *мир состоит из чисел*.

Если один толчок к этому философскому учению был дан халдейским взглядом на числа, то другой, несомненно, был дан подмеченной великим умом Пифагора математической определенностью многих явлений. Современная наука и положительная философия ставят целью познания — раскрывать во всех явлениях эту математическую определенность: «в каждом знании есть столько науки, сколько математики». Но мы не отождествляем теперь эту математическую определенность явлений с самими явлениями, как это сделала пифагорейская школа. С ее точки зрения, объявившей все вещи числами, естественно было затем заняться решением вопросов, какие числа соответствуют каким вещам; и здесь открылся широкий простор их фантазии.

Прежде всего они объявили различие между четными и нечетными числами соответствующим различию между ограниченным и неограниченным, между мужским и женским. Затем они пошли далее. Справедливость, например, которая отдает равным равное, отождествлялась с квадратными числами, в которых оба множителя равны, например с числом 4 или с числом 9. Число 5, как сумма первого мужского числа (3) и женского (2); (единица у пифагорейцев не считалась сама числом, а только началом всех чисел), называлось браком.

Особенно важное таинственное значение придавалось двум числам: числу 7, которое играло такую важную роль в халдейской мифологии, и числу 36, которое известно было под названием Tetractys. Его особенности носят чисто математический характер, и вообще пифагорейцы, устанавливая аналогии между числами и вещами, должны были вдумываться в математические свойства целых чисел, те свойства, которыми теперь занимается теория чисел. Вот почему Пифагор и его школа могут считаться основателями этой науки. Школа Пифагора первая рассматривала ряд чисел треугольных. Так называются числа, которые получаются при сложении подряд, начиная с первого, нескольких целых чисел; таковы числа: 3, 6, 10, ... Они же рассматривали числа «совершенные», в которых сумма делителей равна самому числу, и числа «дружественные», т.е. пары чисел, из которых первое равно сумме делителей второго и второе равно сумме делителей первого. Таковы, например, 220 и 284. Жизнеописатели Пифагора рассказывают, что Пифагора спросили однажды, что такое друг. Ответ был: «Тот, кто есть другой я, вот как числа 220 и 284».

Все эти вопросы о треугольных, совершенных, дружественных числах занимали затем наиболее известных математиков.

Основная идея пифагорейской школы имела большое влияние и на философию Платона, великого почитателя математики, на стенах Академии начертавшего: «Пусть никто не входит сюда, кто не занимается геометрией». Платон и некоторые из его учеников не были свободны от числовой мистики. Но с особенной силой возродилась эта числовая мистика в учениях *неоплатоников* и *неопифагорейцев*, философских школ, образовавшихся в то время, когда влияние Востока, и в том числе халдейской религии, халдейской магии сделалось особенно сильным. У неопифагорейцев, например, *число* есть прототип мира, первоначальная мысль божества, властитель над формами и идеями, посредствующий член между богом и миром. Понятно, что при таком взгляде на первый план должно было выступить теологическое, метафизическое и натурфилософское значение чисел. Понятным делается появление сочинений, имеющих заглавием:«Арифметические исследования о Боге и божественных вещах, или Арифметические теологии». В этой «Арифметической теологии», автор которой есть неопифагореец Никомах, следующим образом рассматриваются числа от 1 до 10: «Единица есть божество, разум, добро, гармония, счастье: она называется Аполлон, Гелиос; но она может рассматриваться и как материя, тьма, хаос.

Два есть принцип неравенства, предположения; оно есть материя, природа, вещество, основание всякой множественности; оно должно носить имя матери богов Изиды; оно есть источник всякой гармонии, храбрость, потому что из него развиваются смело все остальные числа...» и т.д. в том же роде.

А Филон Александрийский вот как объясняет, почему люди после потопа жили 120 лет. Число 120 есть сумма 15 первых чисел, 15 есть число света, ибо после новолуния в 15 дней является полная луна; притом 120 есть 15-е треугольное число, имеет пятнадцать различных делителей и все частные суть весьма важные числа, при том сумма их равняется 240, т.е. вдвое больше 120, что имеет несомненное отношение к двойной жизни, духовной и телесной.

Подобные же числовые мистические соотношения находим мы у других философов того же времени.

Если такие соотношения занимали выдающихся философов, то можно себе вообразить, как вообще были развиты числовые бредни, предсказания посредством чисел среди массы общества. К этому-то времени относится известный эдикт римского императора Юстиниана, изгонявший из столиц вместе с астрологами, магами и математиков; тогда-то математики и были объявлены злодеями — *mathematici-malefici*.

Но наряду с этим шло изучение математических свойств целых чисел. Тот же Никомах написал «Введение в арифметику» — научное сочинение, в котором в первый раз дано полное учение о фигурных числах, изложено арифметически учение о пропорциях и т.п.

Каббала

Из древности перешло в Средние века и здесь пышным цветом развилось целое полурелигиозное, полуфилософское учение, носящее название каббалы. Это мистическое учение развивалось наряду с мистикой пифагорейцев, приписывавшей особенно таинственное значение самому числу, придавалось еще значение составлению чисел из букв слога. Буквам азбуки приписываются по порядку числа:

1, 2, 3... 10, 20, 30...

В таком случае каждому слову будет соответствовать известное число. Соотношения же, существующие между такими числами, указывают, мол, на соотношения между лицами или событиями. Такое суеверие носило имя *«каббалистики»*, и оно играло важную роль в учении каббалы.

В истории философии учение это сыграло довольно важную роль. Сущность его — *пантеизм*. Вот почему в учении великого философа Спинозы многие не без основания видят влияние каббалы. Под ее же влиянием сложилась та числовая тарабарщина, которая играла известную роль в заклинаниях алхимиков и магиков Средних веков.

Не раз в одной и той же личности совмещалось страстное увлечение каббалистикой с не менее страстной любовью к науке. Одним из таких людей был известный математик XVI столетия Михаил Стифель. Ему, например, обязана алгебра введением знаков «+» и «—», знака для корня и пр. И в то же время склад его ума постоянно увлекал его к числовой мистике.

Из текста *Videbunt in quem transfixerunt* (воззрят на того, кого пронзили), придавая буквам числовые значения, он вывел предсказание о погибели мира в 1533 г., и крестьяне его прихода (Стифель был протестантский пастор), расточившие в ожидании близкой кончины мира все свое имущество, когда кончины мира не последовало, под ударами прогнали его в Виттенберг, где он был спасен только благодаря личному заступничеству Лютера. Другой раз, сидя в ванне, он составил сумму чисел, приходящихся на фразу *Vae tibi, Papa, vae tibi* (Горе тебе, папа, горе тебе!), и восторг его, когда получилось число 1260, мистическое число, был так велик, что, подобно Архимеду, он выскочил из ванны, провозглашая «великое открытие».

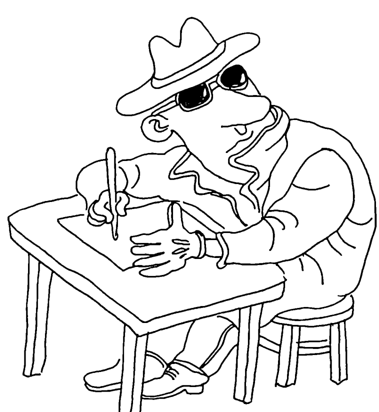
Но вскоре после Стифеля наука теории чисел делается уже независимой от числовой мистики, и последняя становится достоянием только массы или мистиков, имеющих весьма мало общего с наукой.

С Запада числовая мистика всякого рода перешла и в Россию, где держалась весьма долго. Существует «Арифмология» XVII века, переведенная с греческого языка. Вопросы в ней основаны на таинственном значении чисел.

Тайнопись

Настоящая глава может служить как дополнением предыдущего, так и полезным введением в излагаемые дальше «Комбинаторику» и «Теорию соединений». С одной стороны, мы увидим, что комбинациями чисел и букв можно пользоваться не для мистических, а чисто практических целей секретного письма. С другой — искусство тайнописи, как увидим ниже, многими сторонами примыкает и связывается с так называемыми *перестановками, размещениями и сочетаниями.*

Потребность в таком способе письма, который скрывал бы смысл написанного от постороннего глаза и делал бы его доступным лишь для немногих посвященных, существует у людей с древних пор. Отсюда и возникло искусство секретного письма, разросшееся в наши дни чуть не до размеров целой науки — криптографии. О тайнописи упоминает еще историк Геродот и даже приводит образцы таких писем, которые понятны лишь адресату. По свидетельству философа Плутарха, у спартанцев были в употреблении специальные механические приборы для записывания и прочтения тайных посланий. Для записывания религиозных тайн жрецы пользовались особыми письменами, непонятными для непосвященных.



У римского императора Юлия Цезаря была своя система тайнописи, при помощи которой он записывал свои тайны; *она была основана на замене одних букв другими,* — прием употребительный и в наше время.

В Средние века над изобретением и усовершенствованием криптографических систем работали многие выдающиеся умы, например, философ Бэкон Веруламский, математик Виета, историк Гуго Гроций и др.

Но высшего своего развития криптография достигла лишь в новое время, с развитием дипломатических сношений и сложных торговых оборотов, требующих соблюдения строжайшей тайны. В наши дни ежедневно по всему миру циркулируют сотни и тысячи так называемых шифрованных, т. е. тайнописных телеграмм. Важнейшие административные меры во всех почти странах передаются шифрованными телеграммами. Точно так же шифруется и большая часть военных депеш. В Германии каждый офицер должен знать криптографию. Мы не говорим уже о дипломатах, которым «язык дан для того, чтобы скрывать свои мысли»: они не останавливаются ни перед какими затратами денег и времени, чтобы, полно и точно передавая депешу по назначению, сохранить в то же время и строжайшую тайну. Тайнопись находит себе обширное применение и в торговом мире, при разного рода биржевых и т. п. спекуляциях. Корреспонденты больших заграничных газет, желая, чтобы ни одна газета не предупредила их орган в опубликовании какого-нибудь сенсационного известия, также шифруют свои телеграммы.

В дальнейшем читатель сам сможет рассудить, насколько много в криптографии «математики». Но если математике, собственно говоря, принадлежит здесь довольно скромная роль, то во всяком случае легко убедиться, что свободное пользование тайнописью требует все же запаса сообразительности и остроумия, — словом, в обширном царстве смекалки и этому отделу должно быть уделено известное внимание.

Простая замена

Казалось бы, самой простой системой тайнописи была бы простая замена общепринятых букв какими-нибудь условными знаками или числами. Но это, как оказывается, далеко не надежная тайнопись, и при известном навыке очень легко доискаться до истинного смысла подобной криптограммы.

Пусть, например, в наши руки попала следующая криптограмма, написанная по способу простой замены букв какими-нибудь числами (так что одинаковые буквы заменялись одинаковыми же числами). Отдельные слова разграничены тире, а буквы — запятыми[1]

1, 2, 3—2, 4—5, 6, 7, 8, 5, 9—2, 3, 8, 10—11, 12, 2, 9.
13, 5, 14, 15, 16—1, 17, 18, 19, 10—7—5, 11, 2, 10—15, 11, 19, 16, 20, 2, 21,22.
23, 11, 15, 10—20, 18, 5, 11, 13, 10—24, 7, 25, 26—11, 15, 2, 11, 27, 13, 16, 20, 2, 21, 22.
17, 18, 27, 15, 18, 4, 8, 5, 9—28, 24, 7, 27, 10—1, 4, 2, 9.

С самого начала видно, что перед нами стихи, — тождество концов строк обличает рифмы.

Вот один из многих возможных путей дешифрирования заданной криптограммы.

Обращаем внимание на второе слово первой строки — 2, 4. Цифра 4 не может быть ъ, так как она встречается в середине других слов той же криптограммы. Таким образом, 2, 4 может быть *бы, ли, не, на* ...

Сопоставляя первые два слова криптограммы:

1, 2, 3—2, 4

и принимая во внимание, что в последнем слове четвертой строки (1, 4, 2, 9) цифры 1 и 4 стоят рядом (следовательно, если 4 гласная, то 1 скорее всего согласная), — убеждаемся рядом проб, что слова

1, 2, 3—2, 4

суть: мне не.

Подставив во всех словах вместо 1, 2, 3 и 4 буквы м, н, е, е, обращаем внимание на четвертое слово первой строки — 2, 3, 8, 10 = не 8, 10. Очевидно, перед нами слово *нет*: это подтверждается и частой повторяемостью числа 10 на конце слов, заставляющей подозревать в ней букву ъ.

Точно так же выясняется, что последнее слово четвертой строки 1, 4, 2, 9 = мен 9 = меня.

[1]Здесь приведен авторский пример. Одинаковыми числами заменены буквы старого русского алфавита.

Сделав подстановку, обращаем внимание на первое слово четвертой строки:

17, 18, 27, 15, 18, е, т, 5, я

Подозреваем глагольную форму *тся*. Испытывая 5 = с, убеждаемся, что третье слово первой строки: с, 6, 7, тся и четвертое второй строки: с, 11, н, — суть *спится* и сон.

(Слово *сын* отвергаем, ибо число 11, как стоящее в начале последнего слова первой строки, не может быть ы).

Подставив найденные буквы в остальные слова криптограммы, поступают далее по тому же методу, т. е. обращают прежде всего внимание на те слова, в которых либо больше всего известных букв, либо получается характерное их размещение. При этом, уловив размер стиха, можно пользоваться правилами стихосложения, угадывая число слогов в слове (а следовательно, и гласных букв). Не следует пренебрегать и указаниями, которые дает рифма.

В результате всех поисков, проб, подстановок и т. п. получаем следующее четверостишие А. С. Пушкина:

Мне не спится, нет огня,
Всюду мрак и сон докучный;
Ход часов лишь однозвучный
Раздается близ меня.

В общем весь ход дешифрирования сходен до известной степени с методом решения неопределенного уравнения рядом испытаний.

Между прочим, как известно, древнеегипетские иероглифы были «дешифрированы» именно таким путем.

Что такое «тарабарская грамота»?

Мы часто употребляем это выражение, но мало кто знает его точный смысл. А между тем *это просто определенный вид тайнописи,* бывший в употреблении в Древней Руси. Согласные буквы располагались в два ряда, как показано ниже:

б	*в*	*г*	*д*	*ж*	*з*	*к*	*л*	*м*	*н*
щ	*ш*	*ч*	*ц*	*х*	*ф*	*т*	*с*	*р*	*п*

и при писании употребляли вместо верхних согласных нижние, и наоборот. Гласные же оставались без замены.

Так слово *человек* по «тарабарской грамоте» получало начертание: *гесошетъ.*

Само собой разумеется, что такая тайнопись легко дешифрируется и не гарантирует тайны.

Другое название для «тарабарской грамоты» — «простая литорея», в отличие от «мудрой литореи», представлявшей более сложную систему древнерусской тайнописи.

Системы перестановок

Мы видели, что простая замена обычного алфавита другими условными знаками нисколько не гарантирует тайны написанного: при известном навыке и остроумии нетрудно восстановить полностью весь шифрованный текст, не зная условного алфавита. Поэтому простой заменой для серьезных целей никогда и не пользуются. Гораздо надежнее шифровать по методу так называемой транспозиции (перестановки). Вот один из простейших способов.

Положим, требуется передать такую фразу:

Скупайте акции Нобеля.

Располагают буквы этой фразы в клетке прямоугольника в каком-нибудь определенном порядке, например снизу вверх:

п	е	и	б	z
у	т	ц	о	я
к	й	к	н	л
с	а	а	и	е

(Буква z поставлена лишь для заполнения пустого квадратика и не должна приниматься во внимание при дешифрировании).

Теперь пишут буквы нашей таблички слева направо в одну строку:

п е и б у т ц о я к й к н л с а а и е

и эту «тарабарщину» посылают адресату. Последнему остается лишь разместить буквы в решетке и читать написанное колоннами снизу вверх. Само собою разумеется, что форма решетки (5×4) и порядок чтения (снизу вверх) составляют секрет, известный лишь отправителю и адресату. А так как решетка может быть самой разнообразной формы, точно так же как и порядок чтения (сверху вниз, по диагоналям и т.п.), то непосвященному довольно трудно дешифрировать такое послание.

Одно время в военных ведомствах всех стран была весьма употребительна система тайнописи, близкая к только что описанной. Объясним эту систему на примере. Подлежит передаче фраза:

Главнокомандующий прибудет в семь вечера.

Принят определенный числовой «ключ» шифра, составляющий, конечно, тайну для непосвященных. Пусть таким «ключом» служит 23 154.

Располагаем буквы депеши следующим образом:

1.	2.	3.	4.	5.
г	л	а	в	н
о	к	о	м	а
н	д	у	ю	щ
и	й	п	р	и
б	у	д	е	т
в	с	е	м	ь
в	е	ч	е	р
а	z	z	z	z

Затем переставляем колонны букв в порядке нашего ключа:

1 .	2.	3.	4.	5.
л	а	г	н	в
к	о	о	а	м
д	у	н	щ	ю
й	п	и	и	р
у	д	б	т	е
с	е	в	ь	м
е	ч	в	р	е
z	z	а	z	z

Остается написать теперь все буквы в обыкновенном порядке слева направо:

л а г н в к о о а м д у н щ ю й п и и р у д б т е с е в ь м е ч в р е z z а z z

Знающий «ключ» легко прочтет такую телеграмму, — но попробуйте прочесть ее без «ключа»! Разумеется, если перебрать все возможные перестановки из 40 элементов, то успех обеспечен, но для такой работы, как мы убедимся далее, нужны целые года.

К тому же, мы применили эту систему пока лишь в самом простом ее виде. Нет ничего легче еще более затруднить дешифрирование, почти нисколько не затрудняя адресата. Так в предыдущем примере можно было условиться телеграфировать строки не в их естественном порядке сверху вниз, а в любом ином — сначала все нечетные строки, затем четные; или в алфавитном порядке букв крайней колонны и т.п. Наконец, для вящего сохранения тайны можно каждую букву заменить другой, отстоящей от нее в алфавите на определенное число букв.

Квадратный шифр

Самая остроумная система этой категории тайнописи — употребление так называемого *квадратного* шифра. Суть его в следующем. Буквы алфавита располагают в вертикальные и горизонтальные ряды, как показано в прилагаемой схеме:

	а	*б*	*в*	*г*	*д*	*е*	*ж*	*з*	.	.	.	.	.	*э*	*ю*	*я*	
а	*б*	*в*	*г*	*д*	*е*	*ж*	*з*	*и*	.	.	.	.	.	*ю*	*я*		*а*
б	*в*	*г*	*д*	*е*	*ж*	*з*	*и*	*к*	.	.	.	.	.	*я*		*а*	*б*
в	*г*	*д*	*е*	*ж*	*з*	*и*	*к*	*л*							*а*	*б*	*в*
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	

и т.д. до конца алфавита.

Условный ключ — слово «пушка». Чтобы зашифровать по этому способу ту же фразу «главнокомандующий прибудет в семь вечера», производим следующие манипуляции; пишем буквы нашего ключа над буквами депеши:

п у ш к а п у ш к а п у ш к а п у ш к а п у ш к а п у ш к а п у ш к а п

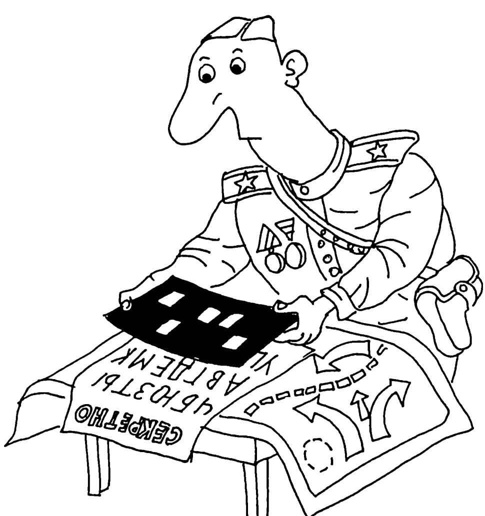
г л а в н о к о м а н д у ю щ и й п р и б у д е т в с е м ь в е ч е р а

Каждая буква нашей депеши вместе с соответствующей буквой ключа послужат нам теперь координатами для избрания букв вышеприведенной таблицы. В вертикальной колонне *г* и горизонтальном ряду *п* найдем букву *у*. Это и будет первая буква шифрованного текста. Далее на пересечении колонны *л* и ряда *у* находим *я* — это вторая буква и т.д.

Легко усмотреть на этом примере одно серьезное преимущество квадратного шифра: в нем одни и те же буквы (*ю, ю; щ, щ; э, э*) обозначают на самом деле совершенно различные звуки; и, наоборот, — одинаковые звуки (*а, о*) получают различное начертание (*а* = *щ* = *б; о* = *ю* = *ж*). Это создает неимоверные трудности для всякого, кто пожелал бы разгадать смысл депеши, не зная «ключа». А между тем адресат, имеющий ключ «пушка», без больших хлопот прочтет эту тарабарщину. Стоит ему лишь написать ключ над текстом и затем при разыскании истинных букв задаваться каждый раз вопросом: какая буква помещена в первом ряду таблицы над такой-то буквой такого-то ряда?

Словари для шифрования

Как ни остроумна система квадратного шифра, как ни затрудняет она чтение криптограммы непосвященным, — все же дипломаты не считают ее достаточно надежной. В самом деле, допустим, что любо-



пытствующий член дипломатического корпуса соседней державы раздобылся текстом шифрованного послания и каким-либо путем раскрыл смысл одного лишь слова, уже этого ему достаточно, чтобы рядом проб и испытаний добраться до «ключа» и, следовательно, дешифрировать все послание.

Вот почему в дипломатических сферах употребляются совершенно иные способы тайнописи — именно так называемая система *словарей*.

Словари для шифрования бывают двух родов: численные и буквенные. В первом случае каждая группа цифр, во втором — группа букв обозначают какое-нибудь слово. Пользуясь таким словарем, отправитель пишет послание на этом условном языке, а получатель, при помощи словаря же, переводит его снова на общеупотребительный язык.

Само собой разумеется, что в дипломатическом корпусе каждой страны есть свой словарь, который держится в строжайшей тайне и экземпляры которого выдаются немногим, вполне надежным и непосредственно заинтересованным лицам. Случайная утрата словаря в таких случаях может иногда повлечь за собой серьезные последствия, так как послание остается непрочитанным. Рассказывают о подобном случае из истории последней русско-турецкой войны: помощник главнокомандующего Мегмет-Али, отлучившись, захватил с собой по небрежности шифровальный словарь, в его отсутствие пришло на имя главнокомандующего множество шифрованных телеграмм, которые остались непрочитанными, — и в результате турки понесли из-за этого большой урон.

Комбинаторика

Ниже приведено несколько простых задач, на решение которых мы советовали бы читателю обратить особое внимание. Несмотря на свою простоту, эти задачи могут служить полезным введением в новые весьма обширные и чрезвычайно интересные области необъятного Царства смекалки. Мы говорим о так называемой *Теории Соединений*, или *Анализе Соединений* (Analyse Combinatoir). Более коротко и, пожалуй, удачно эту область математики называют одним словом: *Комбинаторика*. Над разработкой вопросов, связанных с этими областями математических знаний, трудились еще древние индусы. Но только после бессмертных исследований европейцев Галилея, Паскаля, Ферма и их продолжателей выяснилось, какое тонкое, остроумное и вместе могущественное оружие для ума дает Комбинаторика. Прежде всего очевидно, что всякого рода комбинации — соединения и сочетания — постоянно встречаются в различных играх. И действительно, о Теории Соединений как и о *Теории Вероятностей* не без основания говорят, что они родились и выросли за игорным столом. Мы убедимся потом, однако, что, удовлетворив малоценное любопытство игроков, теории эти обогатили человечество уже не «игрецкими», а совсем серьезными и полезными для всех знаниями и методами.

Задача 35-я.
Размещение пассажиров

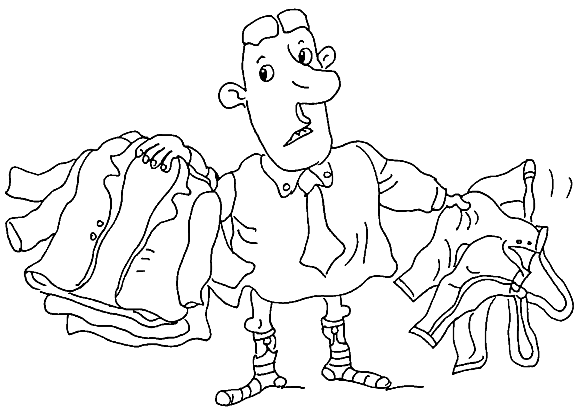
Четверо пассажиров входят в вагон, в котором 6 свободных мест. Сколькими способами они могут разместиться?

Решение

Первый пассажир может занять любое из 6 мест. Значит, второй — любое из 5 мест; третий — любое из 4 мест и четвертый — любое из 3.

Каждое из таких размещений можно сочетать с каждым из остальных, и искомое число, следовательно, будет: $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$.

Задача 36-я.
Разнообразие костюмов



Господин имеет 5 брюк, 8 жилетов и 7 сюртуков. В скольких различных костюмах может он появляться?

Решение

Каждая из частей костюма может всеми способами сочетаться с каждыми из остальных. Всего же получится $5 \cdot 8 \cdot 7 = 280$ различных комбинаций.

Задача 37-я.
Выбор предметов

Сколькими способами можно сделать выбор, если брать по несколько или все из n данных предметов?

Решение

С каждым предметом можно поступить двояко: или брать его, или не брать. Каждый подобный способ обращения с одним предметом можно сочетать с каждым способом обращения с каждым из остальных предметов. Значит, искомое число было бы $2 \cdot 2 \cdot 2 \ldots 2$ (n множителей), т.е. 2^n. Но отсюда надо исключить случай, когда *не берут ни одного предмета*. Итак, искомое число есть $2^n - 1$.

Задача 38-я.
Обед

Имея 6 приятелей, сколькими способами можно пригласить их на обед, приглашая или всех, или некоторых?

Решение

Задача, очевидно, есть частный случай предыдущей, искомое число есть $2^6 - 1 = 63$.

Задача 39-я.
Раздача предметов

Сколькими способами n предметов могут быть розданы p лицам, если относительно числа вещей, которое может получить каждый, нет никаких ограничений?

Решение

Каждая вещь имеет p назначений. Следовательно, искомое число есть p^n.

Задача 40-я.
Распределение

Сколькими способами 5 вещей могут быть распределены между 2 лицами?

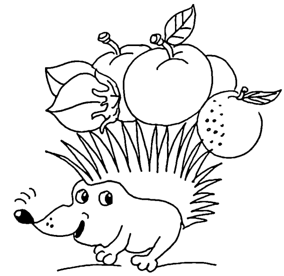
Решение

Первая вещь может быть дана либо одному, либо другому лицу, вторая также и т. д. Значит, получается 2^5 способов. Но из этого числа надо исключить 2 случая, когда только то или другое лицо получает все 5 вещей. Исключая эти 2 случая, находим, что число способов есть $2^5 - 2 = 30$.

Задача 41-я.
Плоды

Имеется 3 ореха, 4 яблока и 2 апельсина. Сколько будет комбинаций для выбора, если предполагают взять по меньшей мере по одной штуке каждого лакомства?

Решение
Предлагается взять один или более орехов, одно или более яблок, один или более апельсинов. Из предыдущих задач мы уже знаем, что выбор каждого рода соответственно будет $2^3 - 1 = 7$, $2^4 - 1 = 15$, $2^2 - 1 = 3$. Каждый выбор одного рода комбинируется с каждым выбором других родов. Искомое число, значит, равно $7 \cdot 15 \cdot 3 = 315$.



Задача 42-я. Слова из четырех букв

Сколько слов о четырех буквах можно составить из 17 согласных и 5-ти гласных, если в середине должны находиться две различные гласные, а по краям по одной согласной, которые могут быть или одинаковы, или различны?

Решение
Ясно, что первое место в требуемых словах замещается 17 различными способами. Столькими же способами замещается и последнее место, ибо согласные, по условию задачи, могут повторяться. С другой стороны, можно рассчитать, что из 5 гласных, беря их по две различных, можно получить $5 \cdot 4 = 20$ различных комбинаций. Таким образом, искомое число требуемых слов равно $17 \cdot 17 \cdot 20$, т.е. 5780.

Задача 43-я. На улицах города

Улицы города расположены наподобие линий шахматной доски, при этом m улиц идут с севера на юг, а n с востока на запад. Сколькими путями можно пройти от северо-западного угла на юго-восточный, идя возможно кратчайшим путем?

Решение
Нужно пройти $m + n - 2$ участка, а именно: $m - 1$ участок с запада на восток и $n - 1$ участок с севера на юг. Различных путей получится столько, сколькими способами можно $m - 1$ предмет выбрать из числа $m + n - 2$ предметов. Значит, искомое число равно:

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (m+n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (m-1) \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1)}$$

Теория соединений

Перестановки

Анаграммы

Напишем какое-нибудь слово и станем всячески переставлять составляющие его буквы. Если при таких перестановках получится новое слово (состоящее, конечно, из тех же букв, что и первоначальное, только в другом порядке), то, значит, мы получим *анаграмму*. Так, например, возьмем слово *жар*, состоящее из трех букв, если не считать твердого знака. Переставляя всеми возможными способами составляющие это слово буквы, мы получим 6 следующих комбинаций:

жар	*раж*
ржа	*жра*
арж	*ажр*

Рассматривая 6 полученных перестановок из трех букв, мы видим, что из слова *жар* получается анаграмма *ржа*. Можно, пожалуй, прибавить сюда и *раж*, так как это слово в выражении «вошел в раж» получило большое распространение в нашем обиходном языке. Остальные же три перестановки (ажр, жра, арж) букв надо отбросить как ничего не говорящие нашему слуху и сознанию.

Точно так же, например, из слова *лиса* путем перестановки букв можно получить слово *сила*. Из слова *кипа* составляются анаграммы *пика* и *паки*; из слова *Москва* получается *смоква*. Весьма употребительные в математике слова *логарифм* и *алгоритм* тоже анаграмматичны, т.е. состоят из тех же букв, только переставленных в ином порядке, и т.д. Примеров можно подобрать сколько угодно. Развлечения с анаграммами принадлежат к самым общеизвестным и распространенным, и вряд ли любой из наших читателей так или иначе не встречался с ними, хотя, быть может, не каждый давал себе отчет в том, что в этом случае он приходил в соприкосновение с обширной математической областью, имеющей огромное теоретическое и практическое значение.

Само собой разумеется, что вместо отдельных слов можно брать целые фразы и получать из них анаграммы, т.е. новые слова и выражения, состоящие из тех же букв, только переставленных в другом порядке. Величайшие математические умы, особенно в прежнее время, охотно составляли различного рода анаграммы.

Многие анаграммы обязаны своим происхождением последователям мистики и каббалы, которые в именах иных людей или названиях событий искали особого скрытого значения.

Есть анаграммы, которые приобрели даже историческую известность.

Некоторые известные анаграммы

Христиан Гюйгенс (1629—1695) был первым, кто открыл, что планета Сатурн окружена плоским кольцом, свободно висящим на уровне экватора планеты. Открытие это им сделано в 1655 г., а сочинение о «Системе Сатурна» он издал только в 1659 г. Но, чтобы удержать за собой первенство открытия, Гюйгенс тотчас же записал его анаграммой из следующих букв:

aaaaaaa, ccccc, d, eeeee, g, h, iiiiiii, lll, mm, nnnnnnnnn, oooo, pp, q, rr, s, tttt, uuuuu.

Если из этих букв сделать соответственные перестановки, то получится такая латинская фраза: *Annulo cingitur tenui, plano, nusquam cohaerente, ad eclipticam inclinato*, т.е. он окружен кольцом тонким, плоским, нигде не подвешенным, наклоненным к эклиптике.

В том же 1655 г. Гюйгенс открыл первый спутник Сатурна (Титан) и нашел время его обращения около планеты равным 15 дням. Открытие это он тоже облек в форму анаграммы, копию которой послал, между прочим, знаменитому своему современнику, английскому математику Валлису (Wallis). Но здесь получилась довольно забавная шутка. Валлис был мастер в деле истолкования (дешифрирования) анаграмм. Получив анаграмму Гюйгенса, он быстро истолковал ее и составил по этому поводу свою анаграмму, несколько длиннее гюйгенсовой. Но в своем ответе последнему Валлис ничего не говорит о своей дешифровке, а просто благодарит Гюйгенса за внимание и пишет, что имеет тоже нечто передать ему в своей прилагаемой анаграмме. Гюйгенс послал Валлису истолкование своей анаграммы. Каково же было его изумление, когда в ответ он получил решение анаграммы Валлиса, из которого вытекало, что последний чуть не раньше будто бы сделал то же самое открытие, что и Гюйгенс!

Скоро выяснилось, что Валлис хотел пошутить и, кстати, показать бесполезность анаграммы в деле скрытого письма. Гюйгенс, однако, не оценил этой шутки и рассердился... Великие люди также имеют свои маленькие слабости.

Из других анаграмм отметим еще следующие:

В словах *Révolution française* (французская революция) можно переставить буквы так, что получится:

Un veto corse la finira,

т.е. «ее закончит вето (запрещение) корсиканца» (указание на Наполеона Бонапарта).

Из имени монаха, убийцы короля Генриха III, *frère Jacques Cl?ment* (брат Жак Клеман), можно перестановкой букв получить:

C'est l'enfer qui m'a créé,

т.е.«меня создал ад».

Из имен короля Генриха III Валуа — Henri de Valois (Анри де Валуа) современники сделали *Vilain Herode's,* т.е. «Иродова мерзость».

Польский писатель Яблонский взял латинское название дома вельмож Лещинских — *Domus Lescinia* — и составил из этих слов такие анаграммы:

Ades incolumis,	т.е.	гряди невредимый.
Ommis es lucida,	» »	весь светозарный.
Manc sidus loci,	» »	пребывай светилом края.
Sis columna dei	» »	да будешь опорой Бога.
I, scande solium	» »	шествуй, гряди на престол.

Последняя анаграмма оказалась даже «пророческой»: Станислав Лещинский сделался действительно польским королем. Надо признать во всяком случае, что сочетание букв в словах *Domus Lescinia* дает действительно богатый материал для составления льстивых и угодливых анаграмм. О том, сколько те же слова при перестановке букв могут дать материала для шутки и сатиры, Яблонский, видимо, затративший большой запас времени для перестановки 13 букв, совершенно умалчивает.

И в самом деле, предположим, что все вышеприведенные анаграммы Яблонский нашел благодаря не счастливой случайности или особым каким-либо приемам, а путем действительных перестановок, т.е. написав 13 букв, составляющих слова

DOMUS LESCINIA,

он методически переставлял всеми возможными способами эти 13 букв и прочитывал каждую перестановку, чтобы убедиться, получилась ли фраза, имеющая смысл, или нет. Сколько всего в таком случае Яблонский получил бы перестановок и сколько приблизительно времени он затратил бы на эту работу?

Поставим вопрос несколько шире и спросим так:

Сколькими способами можно переставить 13 букв, стоящих в ряд? Причем для простоты допустим сначала, что все буквы различны.

Само собой разумеется, что вместо букв можно взять всякие иные предметы. Можно, например, задать себе вопрос, сколькими способами можно разложить в ряд известное число различных карт, разноцветных камешков, картинок или книг, и вообще каких угодно предметов, или, как говорят в данном случае, *элементов*.

Вопрос сводится, следовательно, к определению *числа линейных перестановок (или перемещений) из данного количества элементов*.

Решение этого интересного вопроса смотрите далее.

Задача 44-я.
Церемонный обед семи

Семь лиц должны были обедать, но между ними зашел церемонный спор относительно мест, где кому сесть (это было, без сомнения, в каком-либо отдаленном от столицы провинциальном городе). Наконец кто-то, чтобы прекратить пререкания, предложил всем сесть за стол как попало, но с тем, чтобы опять собраться завтра и в следующие дни обедать вместе и каждый раз садиться по-иному, до тех пор пока не будут исчерпаны все возможные перемещения. Спрашивается, сколько раз для этого придется им вместе обедать?

Решение

Решение задачи сводится, очевидно, к отысканию *числа перестановок из семи элементов*. В главе «о числе перестановок» несколько дальше мы покажем, как это делается, а пока скажем просто и попросим читателя на минуту поверить, что число таких перестановок из 7 элементов равно 5040. Таким образом выходит, что упомянутым в задаче семи лицам придется обедать 5040 раз, или 5040 дней, вместе. Переводя на годы, получим изрядный промежуток времени в 14 лет! Принять на себя обязательство 14 лет изо дня в день обедать в одной и той же компании... Вот к чему иногда могут привести церемонные препирательства.

Если вместо семи лиц церемонным спором займется большее общество, то дело грозит еще большими осложнениями.

Задача 45-я. Церемонный обед двенадцати

В один прекрасный вечер сошлись двенадцать человек, чтобы пообедать вместе. Но так как места за столом не были назначены заранее, между ними возник церемонный спор в то время, когда нужно было садиться за стол, — спор, не приведший, впрочем, ни к какому результату. Кто-то, чтобы выйти из затруднения, предложил испробовать последовательно все возможные способы размещения. Чтобы разрешить вопрос, оставалось только выбрать перемещение, кажущееся наиболее удачным. Попробовали было пересаживаться в течение нескольких минут, но смешались, и дело, казалось, никак не могло благополучно разрешиться само собой. К счастью, между приглашенными находился учитель городского колледжа, имевший кое-какие познания в математике.

— Друзья мои, — сказал он, — суп простынет. Давайте тянуть жребий, скорее дело будет.

Последовали благоразумному совету, обед закончился самым радушным образом.

Является вопрос, почему учитель не нашел возможным испробовать все возможные перемещения на самом деле?

Решение

Разъяснение и решение задачи последовало уже за десертом, когда, получив слово, учитель сказал:

— Знаете ли вы, сколько времени понадобилось бы нам, чтобы испробовать все возможные перемещения, которые мы могли сделать за этим столом, *полагая только по секунде для перехода от одного перемещения к другому?*

И так как все молчали, он добавил:

—Продолжая такую маленькую игру день и ночь, мы должны были бы

> употребить на это более 15 лет и 2 месяцев, не считая при этом, сколько бы нам встретилось високосных годов. Вы видите, если жаркому угрожало высохнуть, то мы могли бы быть уверены, что погибнем все от голода и лишения сна. Будемте церемонны, если сердце нам подсказывает, но не слишком...
> И это правда. Точное число различных способов перемещений, которое 12 человек могли бы занять за столом, накрытым на 12 приборов, равняется, как ниже увидим, 479 001 600, т.е. более 479 миллионов, а 15 лет и 2 месяца содержат приблизительно такое число секунд.

Можно было бы еще заметить, что каждое перемещение 12 человек требует гораздо более времени, чем одна секунда, и что, следовательно, на отыскание удачного для всех положения за столом понадобилось бы гораздо более 15 лет. Это, впрочем, не меняет существа вопроса. Но что было бы, если бы собравшиеся обедать господа поступили по примеру обедавших в предыдущей задаче? Чтобы испробовать все возможные перемещения, им пришлось бы обедать вместе более чем 479 миллионов дней! Переведя на годы, получим миллионы лет...

О числе перестановок

Из двух предыдущих задач мы узнали и приняли пока на веру, что если произвести все перестановки из 7 элементов, то таких перестановок получается 5040, а из 12 элементов таких перестановок получается уже 479 001 600. Число элементов возросло всего на 5, а в какой огромной пропорции возросло число перестановок!

Впрочем, вышеуказанные числа были приняты нами пока на веру. Здесь мы попробуем получить их на самом деле и показать, как вообще найти число перестановок из любого числа элементов.

Возьмем сначала два различных элемента a и b. Ясно, что здесь единственно возможны только две перестановки.

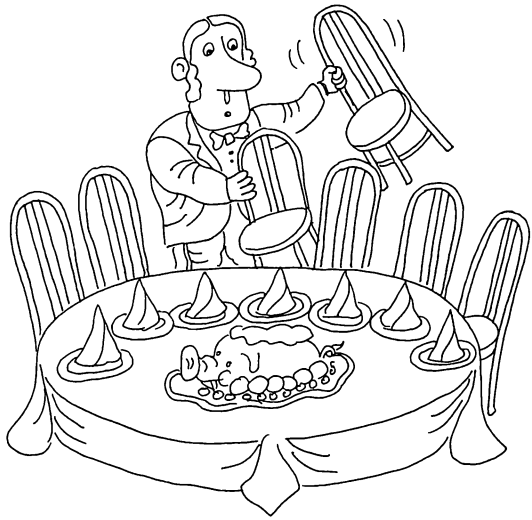
$$ab \text{ и } ba$$

Значит, число перестановок из 2 элементов равно

$$1 \times 2 = 2.$$

Возьмем три элемента: a, b и c. Чтобы получить из них все возможные перестановки без повторений и пропусков, поступаем так:

Берем сначала перестановки из двух элементов, т.е. ab и ba, и приставляем к каждой из них третий элемент: в конце, в середине и в начале. Значит, из каждой двухэлементной перестановки получим по три перестановки, — именно:



a b c	*b a c*
a c b	*b c a*
c a b	*c b a*

Всего 6 перестановок. Итак, число всех перестановок из 3 элементов получится от перемножения чисел $1 \times 2 \times 3 = 6$, или, принимая за знак умножения точку, напишем, что число всех перестановок из трех элементов будет

$$1 \cdot 2 \cdot 3 = 6.$$

Берем затем 4 элемента *a, b, c* и *d*. Сколько всех возможных перестановок дадут эти буквы? Чтобы получить все эти перестановки без пропусков и повторений, сам собой напрашивается следующий способ. Берем сначала все 6 найденных выше перестановок из 3 букв:

a b c, a c b, c a b, b a c, b c a, c b a.

В каждую из этих перестановок вводим четвертый элемент *d*, приставляя его последовательно: к концу, между 2-й и 3-й буквой, между 1-й и 2-й буквой и в начале. Так что *каждая* из этих 6 перестановок из 3-х элементов даст 4 перестановки из четырех элементов. А именно:

Перестановка	*abc*	*дает*	*abcd*	*abdc*	*adbc*	*dabc*
»	*acb*	»	*acbd*	*acdb*	*adcb*	*dacb*
»	*cab*	»	*cabd*	*cadb*	*cdab*	*dcab*
»	*bac*	»	*bacd*	*badc*	*bdac*	*dbac*

»	*bca*	»	*bcad*	*bcda*	*bdca*	*dbca*
»	*cba*	»	*cbad*	*cbda*	*cdba*	*dcba*

Всего из 5 различных элементов получаем 4 · 6 = 24 перестановки, или 1 · 2 · 3 · 4 = 24.

Итак, чтобы получить число всех линейных перестановок из 4 различных элементов, надо перемножить между собой четыре первых последовательных числа.

Прибавим еще пятый элемент *e* и посмотрим, сколько всего получится перестановок из 5 элементов: *a, b, c, d, e*. Получить все эти перестановки без пропусков и повторений можно, опять-таки поступая совершенно подобно предыдущему. Т.е., возьмем каждую из 24 вышенаписанных перестановок из 4-х букв и будем приставлять к ним пятую букву *e* в конце, между буквами и в начале, тогда первая, например, перестановка *abcd* даст пять перестановок:

abcde, abced, abecd, aebcd, eabcd.

Точно так же получим по пять перестановок в 5 букв из каждой из остальных 23 перестановок 4 букв. Следовательно, всего перестановок из 5 элементов можно сделать 24 · 5 = 120, или

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120.$$

Значит, число всех перестановок из 5 элементов равно произведению первых 5 последовательных чисел.

Введем шестой элемент *f*. Рассуждая по-предыдущему, мы найдем, что каждая из 120 перестановок в 5 букв даст шесть перестановок из 6 букв. Всего, значит, таких перестановок из 6 элементов будет 120 · 6 = 720, или

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720,$$

т.е. число всех перестановок из 6 элементов равно произведению 6 первых последовательных чисел.

Рассуждая точно так же, как выше, найдем, что число перестановок из 7 элементов будет 720 · 7 = 5040, или

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 5040.$$

Это число и есть как раз то, которое мы привели в задаче о церемонном обеде семи особ. Читатель теперь, думаем, убедился, что оно нисколько не преувеличено.

Идя указанным выше путем еще дальше, мы найдем, что число перестановок из 8 различных элементов будет равно произведению восьми последовательных чисел 1 · 2 · 3 · 4· 5 · 6 · 7 · 8 = 40 320. Число перестановок из 9 элементов будет равно произведению 9 чисел: 1 · 2 · 3 · 4· 5 · 6 · 7 · 8 · 9 = 362 880 и т.д.

Попробуем указанным путем составить таблицу числа перестановок от 1 до 25 элементов. Получается:

Число перестановок	Число элементов
1	1
2	2
6	3
24	4
120	5
720	6
5040	7
40 320	8
362 880	9
3 628 800	10
39 916 800	11
479 001 600	12
6 227 020 800	13
87 176 291 200	14
1 307 674 368 000	15
20 922 789 888 000	16
355 687 428 096 000	17
6 402 373 705 728 000	18
121 645 100 408 832 000	19
2 432 902 008 176 640 000	20
51 090 942 171 709 440 000	21
1 124 000 727 777 607 680 000	22
25 852 016 738 881 976 640 000	23
620 448 401 733 239 439 360 000	24
15 511 210 043 330 985 984 000 000	25

В этой таблице мы находим, между прочим, число перестановок из 12 элементов, равное 479 001 600, о котором нам приходилось говорить в задаче о церемонном обеде 12 особ.

Беглый взгляд на эту таблицу показывает нам, с какой огромной быстротой возрастает число перестановок при последовательном возрастании перемещаемых предметов. Уже при 25 элементах получается число из 26 цифр — головокружительное число, о котором мы не можем составить себе никакого реального представления, если не прибегнем к какому-либо описательному сравнению.

Возвратимся к главе об исторических анаграммах и пересчитаем, сколько перестановок из 13 букв пришлось бы сделать Яблонскому в словах *domus lescinia* для получения своих анаграмм, если бы он действительно делал все перестановки. Таблица показывает, что число перестановок из 13 элементов равно 6 227 020 800.

Если допустить даже такую невероятную скорость, что для получения каждой перестановки и ее прочтения Яблонский употреблял всего одну секунду, то и тогда, безостановочно работая по 12 часов в сутки, понадобилось бы на выполнение всех этих перестановок около 395 лет! Ясно, что, отыскивая свои анаграммы, Яблонский, проживший обыкновенную человеческую жизнь, шел не этим путем.

Обозначения и вывод общей формулы

Условимся в обозначениях. Обыкновенно число перестановок из n элементов обозначают символом P_n, т.е. ставят латинскую букву P (по-французски перестановка: Permutation) и внизу справа от нее маленькое n. Следовательно, символ P_2 означает число перестановок из двух элементов, P_3 — число перестановок из трех элементов, P_4 — число перестановок из четырех элементов и т.д. И мы нашли уже, что

$$\begin{aligned}
P_1 &= 1 \\
P_2 &= 1 \cdot 2 \\
P_3 &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \\
P_4 &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \\
P_5 &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \\
&\ldots\ldots\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Вообще, $P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \ldots \cdot n$

Эту последнюю *общую формулу* мы сейчас выведем со всей строгостью, а не просто путем того последовательного наведения, которого держались до сих пор. Итак, докажем теорему:

Число перестановок из n элементов равно произведению последовательных натуральных чисел от 1 до n, т.е.

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (n - 1) \cdot n.$$

В самом деле, пусть составлены перестановки из n — 1 букв $a, b, c, d, \ldots h, i, k$, и пусть число перестановок будет P_{n-1}. Чтобы составить перестановки из n букв, берем каждую перестановку из $n - 1$ букв и вводим в нее n-ю букву l, помещая последовательно слева и справа этой перестановки и во все промежутки между ее буквами. Таким образом мы составим все перестановки из n букв, без повторений и без пропусков. Без повторений — потому что одна перестановка будет отличаться от другой или порядком $n - 1$ первоначально взятых букв, или местом, которое занимает новая буква l. Без пропусков ибо, взяв перестановку *ablc...k,* например, замечаем, что она произошла из перестановки *abc...k,* составленной из $n - 1$ первоначальных элементов, в которую буква l введена на 3-е место; следовательно, такая перестановка была получена.

Итак: указанным способом получим все перестановки из n букв. Определим их число. Каждая перестановка из $n - 1$ букв дает n перестановок из n букв, ибо буква 1 может занять в первой n различных мест; следовательно,

$$P_n = nP_{n-1}.$$

Такова связь между P_{n-1} и Pn. Формула эта справедлива для всякого n, будучи совершенно общей: давая в ней n последовательно все значения от 2 до n, находим:

$$P_2 = P_1 \cdot 2;\ P_3 = P_2 \cdot 3;\ P_4 = P_3 \cdot 4;\ \ldots;\ P_n = P_{n-1} \cdot n.$$

Перемножив эти равенства, уничтожив общие множители в обеих частях и замечая, что $P_1 = 1$, находим:

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (n - 1)\, n.$$

Произведение n последовательных чисел, т.е. $1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n$, встречается в многочисленных формулах математического анализа и носит специальное название *факториала n*. Весьма часто для факториала n употребляется более короткое и, пожалуй, даже более изящное обозначение, а именно: вместо длинного иногда ряда цифр последовательных натуральных чисел ставят последнее число и после него восклицательный знак, так что

$$1 \cdot 2 = 2!$$

$$1 \cdot 2 \cdot 3 = 3!$$
$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 4!$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots (n - 1)\, n = n!$$

Читают:
два факториал
три факториал
....
n факториал.

Следовательно, общая формула числа перестановок из n элементов может быть написана и в таком кратком и изящном виде:

$$P_n = n!$$

Кроме того, математики договорились считать равными единице перестановки из одного элемента и из ни одного элемента, т.е.

$$P_0 = 0! = 1$$
$$P_1 = 1! = 1$$

Задача 46-я. Спор кучера с пассажиром

На станции дилижансов нетерпеливый проезжий, увидев кучера, спросил:

— Не пора ли запрягать?

— Что вы! — ответил кучер. — Еще полчаса до отхода дилижанса. За это время я успею двадцать раз и запрячь, и отпрячь, и опять запрячь. Нам не впервой...

— А сколько в дилижанс впрягается лошадей?

— Пять.

— Сколько времени полагается на запряжку лошадей?

— Да при аккуратности минуты две — не больше!

— Ой ли? — усомнился пассажир. — Пять лошадей запрячь в 2 минуты!.. Что-то очень скоро...

— И очень просто, господин, — отвечал кучер. — Выведут лошадей в сбруе, постромках с вальками, в вожжах, как есть. Остается только накинуть кольца вальков на крюки, приструнить «в секунд» двух средних лошадей к дышлу, взять вожжи в руки, сел на козлы и готово... Поезжай! Дело знакомое...

— Ну, хорошо! — заметил пассажир. — Допустим, что таким обра-

зом ты можешь запрячь и отпрячь лошадей хотя двадцать раз в час, как говоришь. Но если их придется перепрягать одну на место другой да еще всех, то уж этого ты никогда не сделаешь не только в час, но и в два.

— Тоже пустячное дело, господин! — расхвастался кучер. — Разве нам не приходится перепрягать! Да какими угодно вам манерами я их всех вам перепрягу в час, а то и меньше. Одну лошадь поставил на место другой, и готово! Минутное дело!

— Нет, ты перепряги их не теми «манерами», которые мне угодны, — сказал господин, — а **всеми** способами, какими только можно перепрягать 5 лошадей, считая на перепряжку уже одну минуту, как ты хвастаешь.

Самолюбие кучера было несколько задето.

— Конечно, всех лошадей и всеми способами перепрягу не больше как в час.

— Я дал бы сто рублей, чтобы посмотреть, как ты сделаешь это в час! — сказал пассажир.

— А я при своей бедности заплатил бы за ваш проезд в дилижансе, если бы этого не сделал, — отвечал кучер.

Так и условились: кучер обязался в час перепрячь 5 лошадей дилижанса всеми способами, какие только возможны. Если он это сделает, то получает с пассажира 100 руб., если же нет, то пассажир едет дальше на счет кучера. Каков был результат спора?

Решение

Пострадал кучер, который, очевидно, не отличался сильной сообразительностью. Число запряжек, которые он должен был по условию сделать, равно числу всех перестановок из 5 элементов. Но из предыдущего мы уже знаем, что

$$P_5 = 5! = 120.$$

Следовательно, кучеру пришлось сделать 120 перепряжек. Считая на такую перепряжку только минуту времени, выходит, что на все надо затратить 2 часа. Остановившись на 60-й перепряжке, кучер должен был уже ехать, заплатив за проезд пассажира.

Задача 47-я.
Класс

Сколькими способами могут разместиться в классе 30 учеников?

Решение

Приходится вычислять число перестановок из 30 элементов, т.е. P_{30}. Его нет в нашей таблице, доведенной только до $n = 25$. Советовать кому-либо тратить время на бесцельный ряд умножений не решаемся, а потому просто приводим это огромное число.

$$P_{30} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots 30 = 30! = 265\,252\,859\,812\,191\,058\,636\,308\,480\,000\,000.$$

Желающие поупражняться в умножении могут, впрочем, нас проверить. Сказать словами это написанное число довольно трудно.

Задача 48-я.
Числа из десяти цифр

Сколько различных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0 так, чтобы каждая цифра находилась в каждом числе только по одному разу, а числа, начинающиеся нулем, не считать?

Решение

Искомые числа, очевидно, будут все десятизначные. Берем сначала 9 значащих цифр. Число перестановок из них будет $P_9 = 9!$ (оно есть в таблице). Если теперь в каждую полученную перестановку будем приставлять нуль к концу и во все промежутки между цифрами, но к началу не будем его приставлять, то каждая перестановка из 9 цифр даст

еще 9 перестановок из 10 цифр. Итак, искомое число есть
$9P_9 = 9 \cdot 9! = 3\ 265\ 920$.

Задача 49-я.
Больше 23 тысяч

Сколько чисел больших 23 000 получится, если всеми возможными способами переставлять цифру 1, 2, 3, 4, 5?

Решение
Всех перестановок из данных пяти цифр можно сделать $P_9 = 120$. Но из полученных таким образом чисел надо отбросить, очевидно, все начинающиеся единицей, а таких чисел 24 (ибо $P_4 = 24$); кроме того, необходимо еще отбросить все числа, начинающиеся цифрами 21, а таких чисел 6. Итак, требуемых чисел получается 120 — 30 = 90.

Задача 50-я.
Группы из букв

Сколько групп можно составить из букв слова «склеить» так, чтобы гласные не были разъединены?

Решение
Гласные не разъединяются, поэтому считаем их за одну букву и находим число перестановок из шести букв. Число их P_6. Но гласные можно переставить одну на место другой. Значит, для числа искомых групп имеем: $P_6 = 1440$.

Фигурные или наглядные перестановки

Перестановки нескольких предметов можно представить *рисунком* (графически). Эта остроумная идея, сделавшаяся достоянием последнего времени, поведет еще к весьма многим интересным и важным открытиям или усовершенствованиям математических методов.

Покажем здесь, как графически изобразить P4, т.е. все перестановки из 4 элементов. Таких перестановок можно сделать, как знаем, 24. Так, например, выпишем все перестановки из четырех цифр 1, 2, 3, 4.

1234	2134	3124	4123
1243	2143	3142	4132
1324	2314	3214	4213
1342	2341	3241	4231
1423	2413	3412	4312
1432	2431	3421	4321

Чтобы графически изобразить, например, первую перестановку (1 2 3 4), берем квадрат, состоящий из 16 равных клеток ($4\times 4 = 16$), и условимся, что каждый вертикальный столбец клеток, считая слева направо и сверху вниз, будет соответствовать *месту* элемента в перестановке; а каждая горизонтальная строка *числу*, означающему элемент. В таком случае, беря перестановку **1 2 3 4**, находим, что числу **1** соответствует первая клеточка (сверху) первой строки и первого столбца: зачерним ее; числу **2** соответствует вторая клеточка второго столбца и второй строки: зачерним ее; числу **3** соответствует третья клеточка 3-го столбца и третьей строки: зачерним ее, и, наконец, числу **4** соответствует 4-я клеточка четвертого столбца и четвертой строки: зачерним ее. Перестановка **1 2 3 4** изображена графически на рис. 22.

Подобно же следующая перестановка **1 2 4 3** изображена на рис. 23.

Перестановка, например, **4 2 3 1** изображена на рис. 24.

На рис. 25 в последовательном порядке представлены графически все 24 перестановки из 4 элементов. Если бы вместо цифр элементами перестановки служили, например, буквы, жетоны, шашки и вообще любые предметы, то, обозначив каждый предмет соответствующим числом, мы опять-таки графически изобразим все перестановки

1 2 3 4

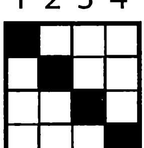


Рис. 22

1 2 4 3

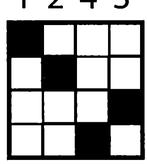


Рис. 23

4 2 3 1

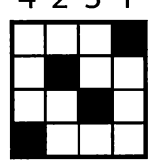


Рис. 24

из этих предметов, как указано выше.

Чтобы получить фигурные перестановки из 5 элементов, надо взять квадрат, состоящий из $5\times 5 = 25$ клеток. Способом, совершен-

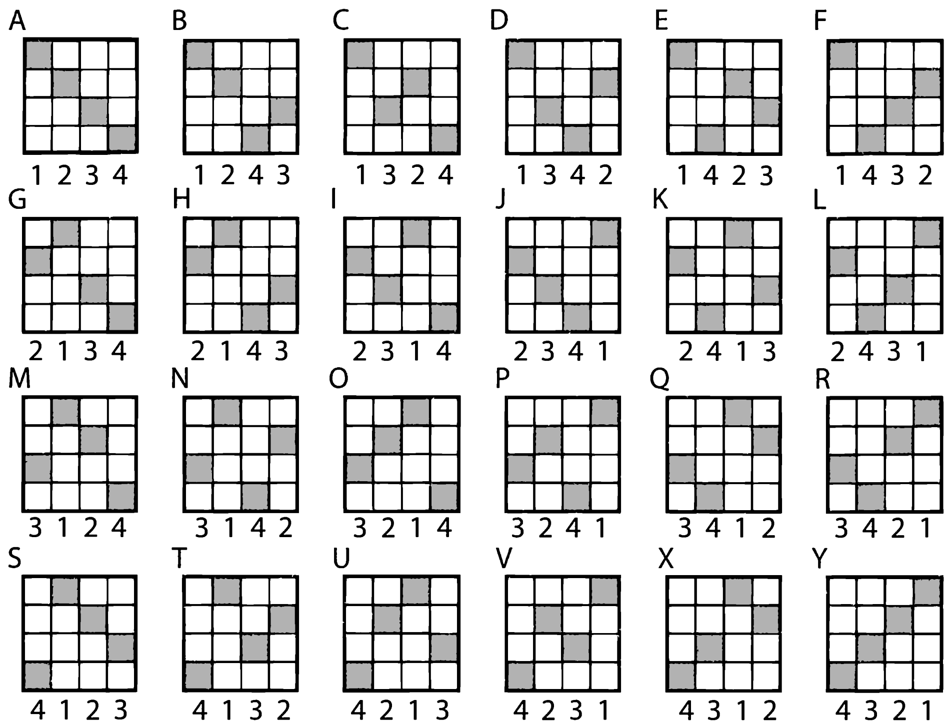


Рис. 25

но подобным предыдущему, на этой 25-клеточной квадратной доске мы можем графически представить все 120 ($P_5 = 5! = 120$) перестановок из 5 элементов.

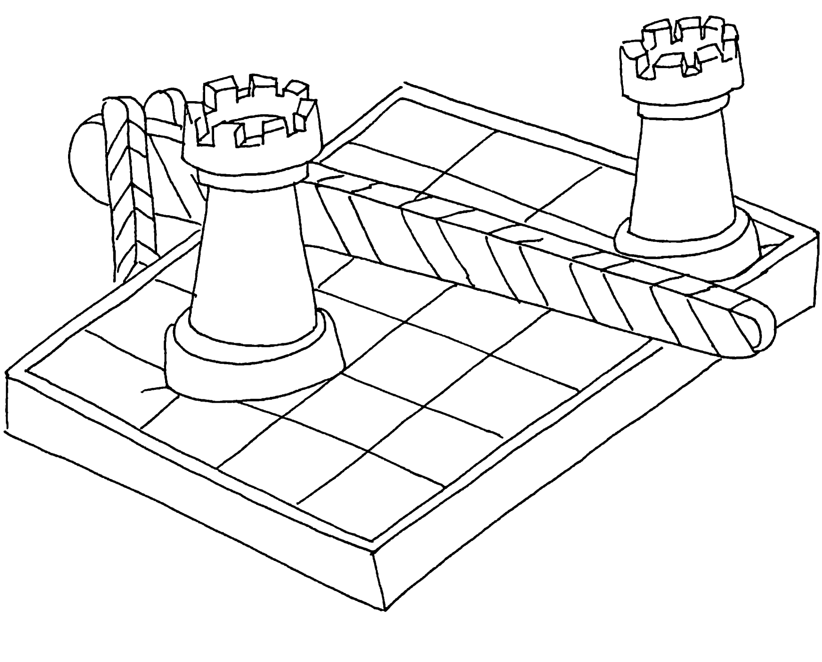
Для получения фигурных перестановок из 6 элементов ($P_6 = 6! = 720$) надо взять квадрат в 6×6 клеток и т.д. Вообще, для получения всех фигурных перестановок нужен квадрат, состоящий из $n \cdot n = n^2$ клеток.

Наша общераспространенная шахматная (или шашечная) доска может, следовательно, служить для практического получения фигурных перестановок из 8 элементов, т. е. для $P_8 = 8! = 40\,320$. И само собой разумеется, что, прикрывая полосками бумаги ненужные нам клетки, мы на этой же шахматной доске можем получить квадраты в $7 \cdot 7 = 49$, в $6 \cdot 6 = 36$, в $5 \cdot 5 = 25$, в $4 \cdot 4 = 16$ и в $3 \cdot 3 = 9$ клеток, на которых можем практически осуществлять фигурные перестановки P_7, P_6, P_5, P_4 и P_3.

Задача 51-я.
Шахматный вопрос

Шахматная фигура *тура* (или ладья), как известно, может «брать» всякую фигуру, стоящую с ней на одном столбце клеток или на одной горизонтальной полосе.

Всмотритесь в квадраты на рис. 59: каждый из них представляет тоже шахматную доску, но только из 16 клеток. И каждая фигурная перестановка на этой доске представляет такое положение четырех тур, при котором ни одна не может взять другой. Значит, на доске в 16 клеток 4 туры можно расставить 24 способами так, что ни одна не может взять другой. На доске из $5^2 = 25$ клеток можно, как уже указано, получить 120 фигурных перестановок, другими словами, это значит, что на такой доске можно расставить 120 способами 5 тур так, что ни одна не будет брать другой, и т.д. Итак, мы приходим к заключению, что каждая фигурная перестановка из любого числа элементов на соответствующей доске дает такое расположение шахматных тур, при котором они не могут брать одна другой. Теперь будет нетрудно решить вопрос, относящийся к нашей обыкновенной шахматной доске: сколькими способами на шахматной доске можно расставить 8 тур так, чтобы ни одна из них не могла брать другой?



Решение

Число таких способов равно числу перестановок из 8 элементов.

$P_8 = 8! = 40\ 320$.

Вряд ли у кого хватит терпения и времени 40 320 раз переставлять 8 тур на шахматной доске, чтобы разрешить поставленный вопрос практическим путем. Между тем с помощью теории графического изображения перестановок вопрос решается чуть не «в двух словах». Вообще, теория соединений имеет большое приложение к разного рода играм. Она, как и теория вероятностей, по остроумному выражению иных, родилась и выросла за игорным столом.

Перестановки с повторениями

Мы умеем пока определять число перестановок в том случае, когда все взятые для перестановки элементы *различны*. Но весьма обыкновенны случаи, когда предлагается поставить в ряд всеми возможными способами n элементов, причем не все элементы различны между собой. Так, например, возьмем слова *Сила* и *Анна*. То и другое слово состоит из 4 букв, и относительно первого мы уже знаем, что, переставляя в нем буквы всеми возможными способами, мы получим 24 *различных* перестановки ($P_4 = 4! = 24$). Не то будет в слове *Анна*. Здесь буква *а* повторяется два раза, буква *н* тоже повторяется 2 раза, и если в этом слове вы попробуете перемещать буквы всеми возможными способами, то различных перестановок вы получите только 6, а именно:

анна, анан, аанн, нана, ннаа, наан.

В самом деле, припишите одинаковым буквам в слове *анна* различные значки; тогда получите 4 различных элемента. Выпишите все 24 перестановки из этих элементов и затем уничтожьте значки. Вы убедитесь, что, в сущности, получается только 6 написанных выше различных перестановок.

Следовательно, необходимо различать линейные перестановки без повторений, и **перестановки с повторениями**. Число перестановок из n различных элементов мы умеем найти, но как *определить число перестановок из n элементов с повторениями?*

Задача эта не представляет особых трудностей, и мы разрешим ее сразу для общего случая.

Решение

Пусть дано n элементов, или предметов

$a, b, c, d, \ldots\ldots m,$

из которых не все различны, но некоторые повторяются, и пусть

a	повторяется	p	раз
b	»	q	»
c	»	r	»
. . . . . .	. . . . . .	. . . . . .	. . . . . .
m	»	s	»

Само собой разумеется, что некоторые из элементов могут не повторяться, т. е. они входят только по одному разу. В таком случае в ряду чисел $p, q, r, \ldots s$ некоторые будут равны 1. Все же эти числа связаны, очевидно, условием

$$p + q + r + \ldots . + s = n.$$

Мы не знаем пока числа перестановок из n элементов с повторениями, поэтому просто означим его буквой x. Если теперь мы найдем, в каком отношении находится это число x к известному нам числу перестановок из n элементов без повторений, P_n, то и решим вопрос.

Итак, представим, что *перестановки с повторениями* из n элементов у нас все выписаны и что их x. Возьмем теперь первый повторяющийся p раз элемент a и приставим к ним внизу значки 1, 2, 3, 4 . . . p. Таким приемом мы p одинаковых элементов как бы обратим в различные и затем переставим эти p элементов всеми возможными способами. Так как из p элементов получается P_p перестановок и мы делаем эти перестановки во всех x перестановках, то теперь мы получим, очевидно, вместо x перестановок с повторениями большее число их, а именно: всего $x \cdot P_p$ различных (что нетрудно доказать) перестановок, где теперь буква b повторяется q раз, буква c повторяется r раз . . . буква m повторяется s раз.

Подобно предыдущему, приставим значки 1, 2, 3 . . . q к одинаковым элементам b, сделаем их таким образом различными и, переставив всеми способами, найдем, что из каждой перестановки (число которых теперь $x \cdot P_p$) получим P_q новых различных перестановок; и число всех таким образом полученных перестановок будет, очевидно,

$$x \cdot P_p \cdot P_q.$$

Поступая совершенно подобно предыдущему с элементом c, мы увеличим еще число различных перестановок, которых теперь станет уже

$$x \cdot P_p \cdot P_q \cdot P_r$$

и т.д. Когда наконец мы придем к последнему элементу m, повторяющемуся s раз, и поступим с ним точно так же, как с предыдущими, то получим $x \cdot P_p \cdot P_q \cdot P_r \cdot \ldots \cdot P_s$ перестановок. Но каких и сколько именно?

Ясное дело, что путем введения значков мы n элементов с повторениями обратили в n **различных** элементов и описанным выше процессом получили, следовательно, *все* возможные перемещения из n элементов без повторений, т.е. Pn. Другими словами, мы нашли, что

$$x \cdot P_p \cdot P_q \cdot P_r \cdot \ldots \cdot P_s = P_n.$$

Чтобы определить x, надо обе части этого равенства разделить на $P_p \cdot P_q \cdot P_r \cdot \ldots \cdot P_s$. Следовательно,

$$x = \frac{P_n}{P_p \cdot P_q \cdot P_r \cdot \ldots \cdot P_s}$$

Такова общая формула для нахождения числа перестановок с повторениями из n элементов, если различные элементы повторяются p, q, r . . . s раз. Так как

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n = n!$$
$$P_p = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot p = p!$$
$$P_q = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot q = q! \text{ и т.д.,}$$

то формулу эту можно написать так:

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot n}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot P \cdot 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot q \cdot 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot s}$$

или в еще более изящном и кратком виде

$$\frac{n!}{P! \cdot q! \cdot r! \cdot \ldots \cdot s!}$$

Таким образом, мы видим, что на практике определение числа перестановок с повторениями не представляет никаких затруднений.

Возьмем, например, название известной горы Арарат. Сколько различных перестановок можно получить из составляющих это слово букв?

Решение

Есть 6 букв, из которых *а* повторяется 3 раза, *р* повторяется 2 раза. Следовательно, всего различных перестановок с повторениями получается

$$\frac{P_6}{P_3 \cdot P_2} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2} = 60.$$

Задача 52-я.
Флаги в зале

Зал украшается 14 флагами, из которых 2 синих, 3 красных, 2 белых, 3 зеленых, 2 желтых и 2 фиолетовых. Сколькими способами можно их расположить?

Ответ находим прямо по выведенной выше формуле для перестановок с повторениями. $\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot 14}{(1 \cdot 2 \cdot 3)^2 \cdot (1 \cdot 2)^4} = 151\,351\,200$.

За круглым столом

Возвратимся к задаче о церемонном обеде 7 лиц. Задача эта решена еще в XVII в.: церемонные гости должны были бы сделать 5040 пересадок, чтобы найти одну наиболее удовлетворяющую всех. При более внимательном рассмотрении оказывается, однако, что задача эта нуждается в существенных замечаниях. Если все места за столом принять как совершенно различные, то решение верно. Но если принимать в расчет не соседство того или иного стула с окном, печкой, дверью и т.д., а только взаимное расположение собеседников, то дело меняется.

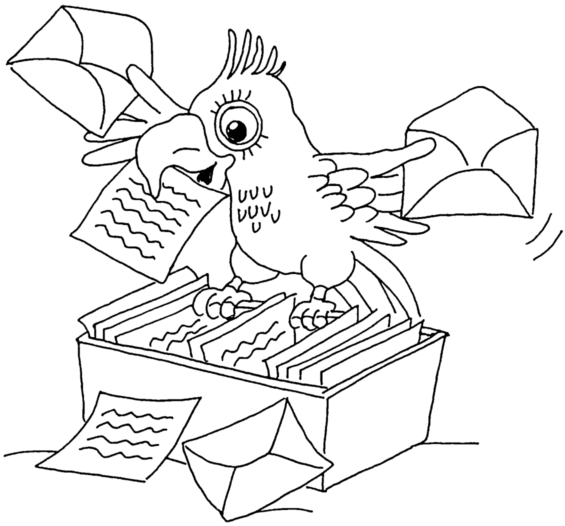
Положим, что 7 лиц обедают за *круглым столом*. Ясно, что относительное положение всех обедающих не изменится, если по данному знаку все они встанут и затем каждый сядет на место своего соседа справа, и так повторять 7 раз, пока каждый не возвратится на свое первоначальное место. При таком положении дела выходит, что в решении принимаются за различные такие 7 прямолинейных перестановок, которые, в сущности, равны одной **круговой перестановке**. Следовательно, найденное число совместных обедов семи лиц 5040 надо в данном случае уменьшить в 7 раз. Получится 720.

С другой стороны, надо обратить внимание и на то, что взаимное расположение гостей не изменится, если они сядут так, что каждый сосед справа окажется соседом слева. Значит, найденное число 720 нужно еще уменьшить в 2 раза, т.е. получается всего 360 обедов, которыми собеседники могут расчесться друг с другом в течение одного лишь года.

К тому же результату мы пришли бы, если бы один из обедающих сидел на одном и том же месте, а остальные шесть перемещались всеми возможными способами.

Таким образом, к понятиям о простых или линейных перестановках и о перестановках с повторениями мы должны присоединить еще понятие о *круговых перестановках*. Предлагаем читателю ознакомиться с ними в других книгах.

Задача 53-я. Письма и адреса



Имеется n писем, и для них заготовлено n конвертов с адресами. Сколькими способами можно разместить письма так, чтобы ни одно из них не находилось в назначенном для него конверте?

Решение

Задача сводится к определению числа таких перестановок из n букв с различными значками, как $a_1, b_2, c_3 \ldots n_n$, в которых ни одна буква не находилась бы на том месте, которое указано ее значком-номером. Известно несколько решений этой задачи. Вот одно из простейших:

Обозначим письма буквами $a, b, c \ldots$; конверты буквами $a', b', c' \ldots$ Пусть требуемое число будет $F(n)$, a можно положить в любому из $n - 1$ конвертов $b', c' \ldots$ Пусть a положено в k'; k можно положить в a', и тогда все остальные письма можно разместить не в надлежащие конверты $F(n - 2)$ способами. Также, если a положить в k', то остальные письма можно разместить так, чтобы k не попало в a', b не попало в b' и т.д. $F(n - 1)$ способами.

Итак, если a положено в k', то можно удовлетворить задаче $F(n - 1) + F(n - 2)$ способами. То же самое будет, если a будет помещено в какой угодно из конвертов $b', c' \ldots$ Следовательно,

$F(n) = (n - 1)[F(n - 1) + F(n - 2)]$,

или $F(n) - nF(n - 1) = -[F(n - 1) - (n - 1)F(n - 2)]$.

Подобным образом

$F(n - 1) - (n - 1)F(n - 2) = -[F(n - 2) - (n - 2)F(n - 3)]$,

$F(3) - 3F(2) = -[F(2) - 2F(1)]$.
Но, очевидно, $F(2) = 1$ *и* $F(1) = 0$;
поэтому $F(n) - nF(n-1) = (-1)^n$. Откуда:

$$\frac{F(n)}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n} - \frac{F(n-2)}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot (n-1)} = (1)^n \cdot \frac{1}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot (n-1)}.$$

Подобно этому:

$$\frac{F(n-1)}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot (n-1)} - \frac{F(n-2)}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot (n-2)} = \frac{1}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot (n-1)}\cdot (-1)^{n-1}.$$

. . . .

$$\frac{F(2)}{1\cdot 2} - \frac{F(1)}{1\cdot 1} = \left(-1^2\right)\cdot\frac{1}{1\cdot 2}$$

Отсюда, складывая, находим:

$$F(n) = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n(\frac{1}{1\cdot 2} - \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\,\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - \ldots + \frac{(-1)^n}{1\cdot 2\cdot 3\cdot n}.$$

Размещения

Задача 54-я.
Двузначные числа из трех цифр

Сколько различных двухзначных чисел можно составить из трех цифр 1, 3, 5?

Решение

Вопрос можно выразить другими словами так: из трех различных цифр составить все возможные группы по две цифры так, чтобы все эти группы отличались или самими цифрами, или только порядком их.

Чтобы получить все нужные нам группы без пропусков и повторений, поступаем так: берем поочередно каждую из данных цифр 1, 3, 5 и приставляем к ним справа каждую из остальных двух цифр. Получаем

1 3	3 1	5 1
1 5	3 5	5 3,

т.е. всего $3 \cdot 2 = 6$ групп.

Мы условились выше приставлять к каждой цифре остальные цифры справа. Само собой разумеется, что дело не изменилось бы, если бы мы приставляли к каждой цифре остальные не справа, а слева. Следует только во избежание путаницы помнить раз поставленное условие и приставлять элементы или только справа, или только слева.

Заметим также, что если бы в данной задаче мы задались вопросом получить из 3 цифр все возможные группы по 3, то пришли бы к известным уже нам линейным *перестановкам* из 3 элементов.

Прибавим еще один элемент, т.е. возьмем четыре нечетные цифры 1, 3, 5, 7 и спросим себя, сколько можно получить из этих четырех различных групп по две цифры, отличающихся или самими цифрами, или порядком их. Другими словами: из четырех различных цифр сколько можно составить различных двузначных чисел?

Чтобы получить все искомые нами группы по две цифры без пропусков и повторений, опять берем каждую цифру по очереди и приставляем к ней справа все остальные цифры. Получаем:

1 3	3 1	5 1	7 1
1 5	3 5	5 3	7 3
1 7	3 7	5 7	7 5.

Всего $4 \cdot 3 = 12$ различных двузначных чисел.

Сколько из элементов 1, 3, 5, 7 можно составить различных групп по 3 цифры в каждой группе?

Чтобы получить их все без пропусков и повторений, мы должны взять все вышенаписанные двузначные группы и к *каждой* из них приписать недостающие элементы справа. Таким образом, получаем:

1 3 5	3 1 5	5 1 3	7 1 3
1 3 7	3 1 7	5 1 7	7 1 5
1 5 3	3 5 1	5 3 1	7 3 1
1 5 7	3 5 7	5 3 7	7 3 5
1 7 3	3 7 1	5 7 1	7 5 1
1 7 5	3 7 5	5 7 3	7 5 3.

Всего $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ группы.

Если задаться целью найти все подобные группы из всех 4 данных элементов, то придем опять к известным нам линейным перестановкам.

Соединения, о которых мы сейчас говорили, носят название простых размещений.

Следовательно, выше мы находили: 1) число простых размещений из 3 элементов по 2; 2) из 4 элементов по 2 и 3) из 4 элементов по 3. Обозначают число размещений обыкновенно буквой A (по-французски *размещение* — Arrangement) с двумя указателями справа — внизу и вверху.

Нижний указатель показывает число *всех* элементов, взятых для размещений, а верхний, по сколько таких элементов берется для каждой группы. Значит, выше мы нашли, что

$$A_3^2 = 3 \cdot 2 = 6;\ A_4^2 = 4 \cdot 3 = 12;\ A_4^3 = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24.$$

Вообще:

Если взято n элементов $a, b, c, d, e \ldots m$ и из этих элементов составлены всевозможные группы по k элементов, отличающиеся или самими элементами, или только порядком их, то такие соединения называются размещениями.

Число размещений из n элементов по k обозначается, согласно предыдущему, символом A_n^k. Каждое же подобное размещение носиттакже название *размещения k-го порядка*. Размещения во многихвопросах математики имеют важное значение. Покажем общий прием, как найти число размещений из n элементов по k; другими словами, чему равно A_n^k.

Число размещений

Пусть дано n элементов: $a, b, c, d, e \ldots m$. Сколько можно из этих элементов составить размещений k-го порядка (или размещений из n элементов по k)?

Решение

Прежде всего заметим, что число размещений из n элементов $a, b, c, d, e \ldots m$ *по одному* (или 1-го порядка) равно, очевидно, самому числу элементов, т.е.

$$A_n^1 = n.$$

Составим теперь все размещения 2-го порядка. Для этого, по предыдущему, чтобы получить их все без пропусков и повторений, берем каждый элемент поочередно и приставляем к нему последовательно по одному справа все остальные $n - 1$ элементов. Получим таблицу

$a\ b$	$b\ a$	$c\ a$	...	$m\ a$
$a\ c$	$b\ c$	$c\ b$	...	$m\ b$
$a\ d$	$b\ d$	$c\ d$	...	$m\ c$
$a\ c$	$b\ e$	$c\ e$	...	md
..	.	.	.	
..	.	.	.	
$a\ l$	$b\ l$	$c\ l$	...	$m\ i$
$a\ m$	$b\ m$	$c\ m$	...	$m\ l$

Рассматривая эту таблицу, легко показать, что в ней находятся действительно все размещения 2-го порядка, ни одно не опущено и не повторено. В самом деле, для получения столбцов таблицы брались поочередно *все n* элементов a, b, c . . . m и к каждому прибавлялись справа по одному остальные $n - 1$ элементов. Значит, ни одно размещение не могло быть опущено. Но ни одно и не повторено, потому что, сравнивая любые два размещения таблицы, мы находим, по закону ее составления, что если эти размещения находятся в одном и том же столбце, то они должны различаться последними буквами, а если в разных столбцах, то они различаются первыми буквами. Итак, в таблице нет ни пропусков, ни повторений. Для подсчета же содержащихся в ней размещений 2-го порядка достаточно заметить, что в таблице n столбцов, а каждый столбец содержит $n - 1$ членов (т.е. в таблице $n - 1$ строк).

Следовательно, $A_n^2 = n\,(n-1)$.

Составим далее таблицу всех возможных размещений из n элементов по 3, или размещения 3-го порядка. Для этого берем нашу таблицу размещений 2-го порядка и к каждому из размещений этой таблицы приставляем справа поочередно по одному все остальные $n - 2$ элемента. Получается новая таблица:

$a\ b\ c$	$a\ c\ b$	$b\ c\ a$	$m\ l\ a$
$a\ b\ d$	$a\ c\ d$	$b\ c\ d$	$m\ l\ b$
$a\ b\ e$	$a\ c\ e$	$b\ c\ e$	$m\ l\ c$
. .	.	.	
. .	.	.	
$a\ b\ m$	$a\ c\ m$	$b\ c\ m$	$m\ l\ i$

Рассуждениями, подобными приведенным относительно таблицы размещений второго порядка, можно показать, что в этой таблице действительно содержатся все размещения из n элементов 3-го порядка без пропусков и повторений. А так как из $n\ (n - 1)$ двойных размещений каждое дало $n - 2$ размещения третьего порядка, то число всех размещений 3-го порядка из n элементов будет: $A_n^3 = n\,(n-1)\,(n-2)$.
Для числа размещений из n элементов по 4 получим

$$A_n^4 = n\,(n - 1)(n - 2)(n - 3).$$

Точно так же

$$A_n^5 = n\,(n - 1)(n - 2)(n - 3)(n - 4).$$

И т.д. Как видим, числа, выражающие число размещений из n элементов по 1, по 2, по 3, по 4 и т.д., составляются все по одному закону. Каждое такое число состоит из множителей, первый из которых есть n, а каждый следующий на единицу меньше.

Число множителей равно числу порядка размещений, т.е. для размещений из n элементов 2-го порядка имеем, как видели, два множителя $n\,(n-1)$; для размещений 3-го порядка — 3 множителя:

$$n\,(n-1)(n-2) \text{ и т. д.}$$

Можно сказать и так, что первый множитель будет n, а последний (для размещения порядка k) будет $n - k + 1$. Остальные множители составят ряд промежуточных последовательных натуральных чисел между n и $n - k + 1$.

Таким образом, для числа размещений из n элементов по k будем иметь общую формулу:

$$A_n^k = n\,(n - 1)\,(n - 2)\,.\,.\,.\,.\,.\,(n - k + 1),$$

т.е. *число размещений из n элементов по k равно произведению k множителей, из которых первый равен n, а остальные уменьшаются последовательно на 1.*

Общность приведенной формулы необходимо, впрочем, доказать более строго, что желающие могут сделать, руководствуясь предыдущим или обратясь к любому хорошему учебнику.

Полные размещения или размещения с повторениями

Возьмем n элементов

$$a,\ b,\ c,\ d\ .\ .\ .\ .\ .\ i,\ l,\ m.$$

При составлении простых размещений 2-го, 3-го, 4-го и т.д. порядка мы руководились следующим правилом: для получения таблицы размещений 2-го порядка брали каждую из букв и приставляли к ней справа все *остальные*. Для получения таблицы размещений 3-го порядка мы брали таблицу размещений из n элементов, по 2, и к каждому такому размещению приставляли справа по одной остальные $n - 2$ буквы (элемента) и т.д. Таким образом мы получали группы из n букв по 2, по 3 и т.д., которые разнились или *порядком* расположения, или *выбором* элементов, но *повторений* одного и того же элемента в таких группах не было.

Возьмем теперь те же n букв $a,\ b,\ c\ .\ .\ .\ .\ .\ l,\ m$ и будем составлять из них таблицы размещений 2-го, 3-го, 4-го и т.д. порядка по более общему закону, а именно: к каждой букве для получения по 2 будем приписывать не остальные $n - 1$ букв, а *все* буквы *без исключения*.

Таким образом мы получим таблицу двойных *полных размещений*, или *размещений с повторениями*, ибо буквы в размещениях могут повторяться.

$$\begin{array}{llllll} a\,a & a\,b & a\,c & \ldots & a\,i & a\,l & a\,m \\ b\,a & b\,b & b\,c & \ldots & b\,i & b\,l & b\,m \\ c\,a & c\,b & c\,c & \ldots & c\,i & e\,l & c\,m \\ \ldots\ldots\ldots & & & & & & \\ m\,a & m\,b & m\,c & \ldots & m\,i & m\,l & m\,m \end{array}$$

Число этих полных размещений из n элементов по 2 найти легко. Ясно, что каждая из n букв дает также и n размещений, а потому всех размещений с повторениями из n элементов по два будет $n \cdot n = n^2$. Или, обозначая число размещений с повторениями из n элементов по 2 символом B_n^2, напишем, что $B_n^2 = n^2$.

Составляем далее таблицу размещений с повторениями из n элементов по 3. Для этого берем предыдущую таблицу полных размещений по 2 и к каждому размещению этой таблицы приписываем по одному справа *все без исключения* элементы. Так что двойное размещение $a\,a$ даст n тройных.

$$a\,a\,a \quad a\,a\,b \quad a\,a\,c \quad \ldots \quad a\,a\,i \quad a\,a\,l \quad a\,a\,m.$$

Двойное размещение $a\,b$ даст опять n тройных:

$$a\,b\,a \quad a\,b\,b \quad a\,b\,c \quad \ldots \quad a\,b\,i \quad a\,b\,l \quad a\,b\,m$$

и т.д. Путем знакомых рассуждений легко доказать, что в полученных таблицах сочетаний нет ни пропусков, ни повторений одних и тех же размещений.

Каждое двойное размещение дает n тройных, но всех двойных размещений n^2, следовательно, получается всего $n^2 \times n = n^3$ тройных полных размещений, или:

$$B_n^3 = n^3.$$

Точно так же $B_n^4 = n^4$, $B_n^5 = n^5$, $B_n^6 = n^6$ и т.д.

Вообще, $B_n^k = n^k$.

Задача 55-я.
Игральные кости

Бросают три игральные кости. Сколькими способами они могут вскрыться?

Решение

Игральная кость представляет собой костяной кубик, на каждой грани которого обозначено известное число «очков». Так как в кубике шесть граней, то и числа очков будут на гранях кубика 1, 2, 3, 4, 5 и 6. Зная это, легко решить вопрос. Каждая кость может показать любую из 6 граней. Берется три таких кости. Число соединений каждой с каждой находят, очевидно, как число размещений с повторениями из 6 элементов по 3. Т.е. подбросив 4 кости, мы можем получить одну из $6^3 = 216$ комбинаций.

Задача

Сколько можно написать трехзначных чисел из десяти цифр 1, 2, 3 . . . . . 9?

Решение

Очевидно, столько, сколько можно сделать полных (с повторениями) размещений из 9 элементов по три, т.е. :

$$B_9^3 = 9^3 = 729.$$

Сочетания

Рассмотрим еще виды соединений, имеющих постоянное приложение в различных отделах математики:

Из n элементов a, b, c, d . . . . . m требуется составить, сколько возможно, таких групп по k элементов, чтобы каждая отличалась от остальных *по крайней мере одним элементом.*

Соединения подобного рода носят в математике название простых *сочетаний.* Как видим, здесь группы отличаются одна от другой не *порядком*, а выбором элементов.

Число сочетаний из n элементов по k обозначается обыкновенно буквой C со значками справа n и k (вверху и внизу) следующим образом: C_n^k.

Составление сочетаний

Берется n элементов: $a, b, c, d \ldots\ldots i, l, m$. Это и будут, очевидно, сочетания из n элементов по одному. Чтобы получить таблицу парных сочетаний из тех же элементов, мы должны помнить, что каждое сочетание должно отличаться от другого хоть одной буквой. Для получения подобных групп берем каждую данную нам букву по порядку, *кроме последней*, и к каждой такой взятой букве приписываем только по одной все следующие за ней. Получается таблица

$$\begin{array}{llllllll}
a\,b & a\,c & a\,d & a\,e & \ldots & a\,i & a\,l & a\,m \\
b\,c & b\,d & b\,e & & \ldots & b\,i & b\,l & b\,m \\
 & c\,d & c\,e & & \ldots & c\,i & c\,l & c\,m \\
 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
 & & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
 & & & & & & i\,l & i\,m \\
 & & & & & & & l\,m
\end{array}$$

Легко разобраться, что эту же таблицу мы получили бы, если бы взяли таблицу парных размещений из n элементов и выбросили бы из нее все размещения, отличающиеся только порядком букв.

Для получения тройных сочетаний из n элементов берем каждое из вышенаписанных двойных сочетаний, кроме последнего столбца, содержащего последнюю букву ($a\,m,\ b\,m,\ c\,m \ldots\ldots l\,m$), и приписываем к каждому такому сочетанию последовательно по одной каждую из следующих букв. Получается таблица

$$\begin{array}{lllll}
a\,b\,c & a\,b\,d & a\,b\,c \ldots\ldots & a\,b\,l & a\,b\,m \\
 & a\,c\,d & a\,c\,e \ldots\ldots & a\,c\,l & a\,c\,m \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \text{и т.д.}
\end{array}$$

Словом, способ последовательного получения таблиц сочетаний из n элементов 2-го, 3-го, 4-го и т.д. порядков уяснить и усвоить нетрудно. Но как подсчитать число полученных при этом групп?

Число сочетаний

Если взять n элементов, то между числом сочетаний из этих n элементов по k, (C_n^k), числом размещений из тех же n элементов по

k, (A_n^k) и числом простых перестановок из k элементов (P_k) можно установить следующее соотношение: $A_n^k = C_n^k \cdot P^k$.

Число размещений из n элементов по k равно числу сочетаний из n элементов по k, умноженному на число перестановок из k элементов.

Чтобы установить это весьма важное соотношение, рассуждаем так:

Представим, что способом, описанным только что выше, у нас составлена таблица всех сочетаний из n элементов по k. Число их обозначаем символом (C_n^k). Вспомним затем, что все эти сочетания отличаются друг от друга не порядком расстановки элементов, но самими элементами (хоть одним из них). Между тем размещения из n элементов по k могут отличаться одно от другого и порядком размещения, и самими элементами. Зная это, мы из таблицы всех *сочетаний* из n элементов по k можем получить таблицу всех *размещений* из n элементов по k.

Для этого из нашей воображаемой таблицы сочетаний берем каждое сочетание, содержащее по k букв, и делаем в нем всевозможные *перестановки*. Число таких перестановок, полученных из каждого сочетания, будет P_k, а так как всех сочетаний C_n^k, то, значит, мы получим всего $C_n^k \cdot P_k$ групп соединений.

Покажем теперь, что таким путем мы получили именно таблицу всех размещений из n элементов по k без пропусков и повторений, т.е. A_n^k.

В самом деле, если взять из составленной таблицы два члена, то: или они происходят от двух разных сочетаний, и в таком случае различаются буквами; или же происходят из одного и того же сочетания, — и в таком случае разнятся порядком букв. Следовательно, и таблица не содержит повторений. В ней нет и пропусков. В самом деле, вообразим некоторый член группы A_n^k, не обращая внимания на порядок букв в нем. Этот член представляет некоторое сочетание из n букв по k, и, следовательно, если не обращать внимания на порядок его букв, он находится в группе C_n^k. Так как буквы этого сочетания были перемещены всеми возможными способами, то любой рассматриваемый член необходимо содержится в числе полученных размещений.

Из всего вышесказанного ясно, что мы можем написать соотношение:

$$A_n^k = C_n^k \cdot P_k,$$

которое для числа сочетаний из n элементов по k дает выражение:

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k},$$

или $$C_n^k = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k},$$

что словами можно выразить так: *число сочетаний из n элементов по k равно произведению k целых чисел, последовательно убывающих на 1 и первое из которых есть n, деленному на произведение натуральных чисел от 1 до k.*

Задача 56-я. Выборы в комиссию

Из 7 русских и 4 немцев нужно составить комиссию в 6 лиц. Сколькими способами можно это сделать, если в состав комиссии должно войти не более и не менее как 2 немца?

Решение

Выбор русских может быть сделан C_7^4 способами, а выбор немцев C_4^2 способами. Каждую группу первых можно сочетать с каждой группой вторых. Для искомого числа, значит, имеем: $C_7^4 \cdot C_4^2 = 210$.

Задача 57-я. Выборы комиссии

Из 4 духовных и 8 светских лиц должна быть составлена комиссия в 6 человек. Сколькими способами может быть сделан выбор, если: 1) в состав комиссии должно входить только одно духовное лицо; 2) если в нее должно войти по меньшей мере одно духовное лицо?

Решение

Ответ на первый вопрос: $4 \cdot C_8^5 = 224$.

Во втором случае дело несколько сложнее: необходимо принять во внимание все возможные комбинации, так как комиссия может состоять: из 1 духовного и 5 светских, или из 2 духовных и 4 светских, или из 3 духовных и 3 светских, либо, наконец, из 4 духовных и 2 светских. Совокупность всех возможных при этом сочетаний даст

$$4 \cdot C_8^5 + C_8^4 \cdot C_4^2 + C_8^3 \cdot C_4^3 + C_8^2 = 896.$$

Задача 58-я. Сели за стол

Сколькими способами 7 русских и 7 французов могут разместиться за столом так, чтобы не оказывалось двух французов рядом?

Решение

Если один из русских, например, будет постоянно сидеть на одном и том же месте, то остальные русские могут перемещаться столькими способами, сколько можно сделать перестановок из 6 элементов, т.е. P_6 способами. Каждой такой их рассадке будет соответствовать 7 мест, которые могут быть заняты французами P_7 способами. Значит, искомое нами число будет

$$P_6 \cdot P_7 = 3\ 628\ 800.$$

Задача 59-я. Замок с секретом

Замок с секретом состоит из трех колец с 15 различными буквами каждое. Сколько безуспешных попыток возможно сделать раньше, чем отпереть замок?

Решение

Первому кольцу можно дать 15 различных положений, столько же второму и столько же третьему. Все эти положения соединяются каждое с каждым. Следовательно, число различных возможных попыток открыть замок есть $15 \cdot 15 \cdot 15 = 3375$. Но из них удачной может быть только одна. Значит, число неудачных равно 3374.

Способ шахматной доски

С шахматной доской мы встречались уже не раз. Очень многие с виду сложные вопросы арифметики и алгебры решаются весьма просто употреблением шахматной доски. Следует только помнить, что под шахматной доской мы понимаем не одну обыкновенную шашечницу из 64 клеток, но каждую квадратную или прямолинейную фигуру, разделенную на квадратные клетки. Пользуясь такой доской, можно, например, быстро решить следующие интересные задачи.

Задача 60-я.
Сумма чисел

Найти сумму n первых целых натуральных чисел по способу шахматной доски.

Решение

Для решения вопроса берем доску в виде прямоугольника: высоту его делим на n равных частей, а основание на $n + 1$ частей, т.е. наша фигура состоит из n горизонталей (линий) и $n + 1$ вертикалей (колонн). На рис. 26 имеем 9 клеток по линии и 8 в колонне (всего $8 \cdot 9 = 72$ клетки). Заштрихуем первую слева клетку первой линии, 2 первых второй, 3 первых третьей и т.д. Тогда все число заштрихованных клеток выразится суммой $1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n$. Но и число белых клеток, если его считать снизу вверх, тоже будет $1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n$.

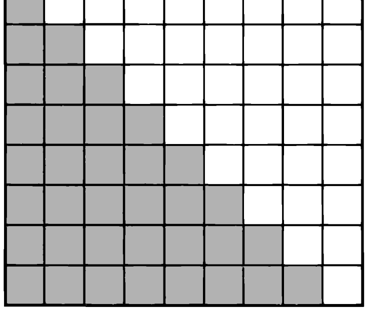


Рис. 26

Все же число клеток нашей доски равно $n\ (n+ 1)$ Следовательно,$2\ (1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n) = n\ (n + 1)$.

Отсюда для суммы n первых натуральных чисел имеем

$$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Задача 61-я.
Специальная

Способом шахматной доски показать, что
$8\ (1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n) + 1 = (2n + 1)^2$.

Решение

Берем квадратную доску, на которой каждая линия и каждая колонна состояла бы из $2n + 1$ клеток. Оставив центральную клетку белой, затемним некоторые из остальных так, как показано на рис. 27. Каждая затемненная часть содержит, очевидно, $1 + 2 + \ldots + n$ клеток. Вне центральной клетки имеем 4 одинаковых белых части. Следовательно, все число клеток фигуры, равное $(2n + 1)^2$, слагается из четырех заштрихованных частей, четырех таких же белых и из центральной клетки, т.е. $8\ (1 + 2 + 3 + \ldots + n) + 1 = (2n + 1)^2$.

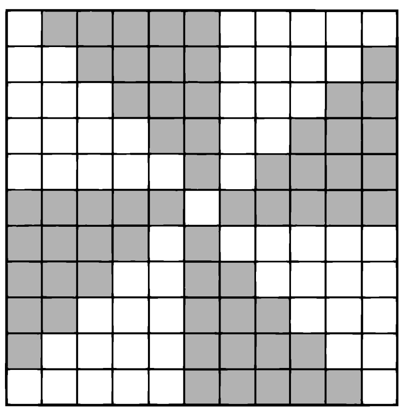


Рис. 27

Отрывки из теории вероятностей

«Теория вероятностей есть, в сущности, не что иное, как здравый смысл, сведенный к исчислению: она заставляет оценивать с точностью то, что здраво развитые умы чувствуют как бы инстинктом, часто не умея дать себе в этом отчет. Если принять во внимание аналитические методы, которые возникли из этой теории, истинность принципов, служащих ей основанием, утонченную и изящную логику, которой требует применение их к решению задач, учреждения общественной пользы, опирающиеся на нее, и распространение, которое она получила и может еще получить при применении ее к важнейшим вопросам натуральной философии и нравственных наук; если затем заметить, что даже в таких областях, которые не могут быть подчинены исчислению, она дает самые верные взгляды, которые могут нами руководить в наших суждениях, и что она нас учит предохранять себя от иллюзий, которые нас часто сбивают с верного пути, — мы увидим, что нет науки, более достойной наших размышлений, и что было бы очень полезно ввести ее в систему народного просвещения».

Такими словами великий Лаплас заканчивает свою знаменитую книгу«Опыт философии теории вероятностей», которую рекомендует вниманию каждого. Все более и более развивающаяся культурная жизнь народов лучше всего доказывает справедливость заключений и требований Лапласа. Развитие всякого рода систематической статистики, вычисления, связанные с самыми тщательными измерениями, биометрия, различного рода страхования, сделавшиеся важным фактором экономической и социальной жизни широких масс, — все это основано на математической теории вероятностей и лучше всего свидетельствует о том значении, которое может иметь эта наука даже в повседневном обиходе каждого образованного человека.

Русская наука вправе гордиться количеством и качеством своих трудов в области исчисления вероятностей. Имена наших академиков Буняковского, Чебышева и Маркова известны всему ученому миру, а не одной только России.

В нашем изложении рядом легких и интересных задач, историческими справками и отрывками из сочинений по предмету мы дадим читателю истинное понятие о предмете и подвигнем его к чтению и изучению предмета. Хорошо будет и то, если многие из читателей дадут себе ясный отчет в том, что же это за столь употребительное слово — «**Вероятность**»...

Задача 62-я (кавалера де Мере). Недоконченная игра

Два игрока, поставивши поровну, начали игру, условившись, что тот, кто раньше выиграет известное число партий, получит всю ставку. По некоторым обстоятельствам игра не могла быть окончена и прекратилась в тот момент, когда первому игроку не хватало до конца одной, а второму двух партий. Спрашивается, как игроки должны поделить ставку между собой?

Решение

Знаменитый Паскаль, о котором мы не раз уже упоминали, решил эту задачу следующим рассуждением.

Первый игрок говорит второму: «Половина ставки принадлежит мне бесспорно, так как даже в том случае, если бы ты выиграл следующую партию, наши шансы на получение целой ставки были бы одинаковы. Что касается второй половины, то шансы наши на ее получение одинаковы, а потому разделим ее пополам».

Значит, первый игрок получает *три четверти*, а второй *одну четверть* всей ставки.

Само собой разумеется, что оба игрока считаются совершенно равносильными друг другу, что в костях, или картах, или в чем бы и чем бы они ни играли, нет никакой фальши, — словом, окончательный результат игры зависит от случая, равновозможного для того и другого игрока, — и на этом-то зиждется все решение задачи.

Что же такое *случай* и как понимать это слово?.. Впрочем, об этом придется говорить особо.

Игра в кости и зачатки математической теории вероятностей

Задача 63-я весьма знаменита в летописях науки. Задачу эту в 1651 г. кавалер де Мере предложил для разрешения своему другу, знаменитому Паскалю. Последний решил ее и для более общего случая, когда до конца первому игроку не хватает, вообще говоря, m, а второму n партий. Решив задачу сам, Паскаль предложил решить ее и своему не менее знаменитому современнику Ферма. Этот также не замедлил найти решение задачи, но способом, отличным от способа Паскаля (при помощи теории сочетаний), и притом уже не для двух только, а для любого числа игроков. По поводу каждого из решений между великими математиками завязалась переписка и...

Таким образом, были положены основания математической теории вероятностей, которая с этого времени делает весьма быстрые успехи.

Страстный игрок в кости, кавалер де Мере, как видим, поэтому также должен быть отнесен к числу «основателей» теории вероятностей. Заслуга его состоит в том, что он настойчиво заставлял математиков решать различные задачи, на которые наталкивался сам во время своей практики игры. Ниже мы приведем еще одну из задач де Мере, предложенную тому же Паскалю и относящуюся тоже к игре в кости, а потому необходимо несколько ознакомиться с понятием об этой игре.

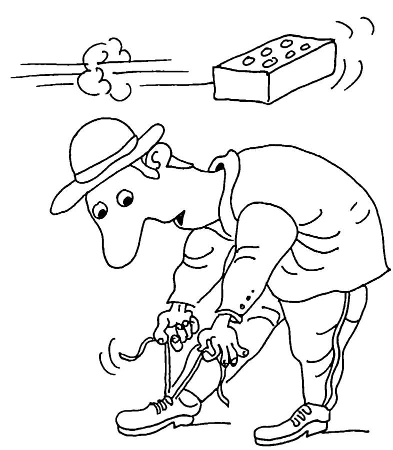
«Кость» в данном случае есть не что иное, как костяной кубик, на гранях которого отмечены кружочки-очки: на одной грани — одно очко, на другой — два, на третьей — три и т.д. до шести (в кубе 6 граней). Игра обыкновенно состоит в выбрасывании одной или нескольких костей и затем в подсчете суммы выпавшего числа очков. Самый простой способ игры тот, что выбросивший наибольшее число очков получает всю ставку, но ясно, что игру можно всячески разнообразить. При каждом новом условии, вводимом в игру, является вопрос: для кого теперь из игроков существует наиболее шансов выиграть. Таким образом возникали и создавались задачи, делавшиеся достоянием математиков, причем обыкновенно практика игроков сплошь и рядом обгоняла теоретические выводы математиков.

Страстному игроку, но плохому математику, кавалеру де Мере посчастливилось иметь такого друга, как Паскаль. Следует заметить, что всеобщее увлечение игрой в кости в Западной Европе привело к решению некоторых задач, имеющих связь с теорией игры.

О законности и случайности

Обратимся еще раз к задаче кавалера де Мере и припомним, что уже там нам пришлось остановиться на слове «случай». Слово это вообще играет большую роль как в практике, так и в теории всякой игры, а потому над его выяснением основатели математической теории вероятностей остановились прежде всего. Чтобы показать, к чему привели исследования в этом направлении, лучше всего привести следующие страницы из «Опыта философии теории вероятностей» Лапласа: «Все явления, даже те, которые по своей незначительности как будто не зависят от великих законов природы, суть следствия столь же неизбежные этих законов, как обращение солнца. Не зная уз, соединяющих их с системой мира в ее целом, их приписывают конечным причинам или случаю, в зависимости от того, происходили ли и следовали ли они одно за другим с известной правильностью, или же без видимого порядка; но эти мнимые причины отбрасывались по мере того как расширялись границы нашего знания, и совершенно исчезли перед здравой философией, которая видит в них лишь проявление неведения, истинная причина которого — мы сами.

«Всякое имеющее место явление связано с предшествующим на основании того очевидного принципа, что какое-либо явление не может возникнуть без производящей его причины». Эта аксиома, известная под именем «*принципа достаточного основания*», распространяется даже на действия, считаемые безразличными. Воля, самая свободная, не может породить эти действия без побуждающей причины, потому что, если бы она действовала в одном случае и воздерживалась от действия в другом, при полном подобии всех обстоятельств обоих положений, то выбор ее был бы действием без причины: она была бы, как сказал Лейбниц,



слепым случаем эпикурейцев. Противоположное мнение есть иллюзия ума, который, теряя из виду мелкие причины того или другого выбора воли в безразличных поступках, убеждается, что она определяется самой собой и беспричинна.

Таким образом, мы должны рассматривать настоящее состояние вселенной как следствие ее предыдущего состояния и как причину последующего.

Ум, которому были бы известны для какого-либо данного момента все силы, одушевляющие природу, и относительное положение всех ее составных частей, если бы вдобавок он оказался достаточно обширным, чтобы подчинить эти данные анализу, обнял бы в одной формуле движения величайших тел вселенной наравне с движением легчайших атомов: не осталось бы ничего, что было бы для него недостоверно, и будущее, так же как и прошедшее, предстало бы перед его взором. Ум человеческий в совершенстве, которое он сумел придать астрономии, дает нам представление о слабом наброске подобного разума. Его открытия в механике и геометрии в соединении с открытием всемирного тяготения сделали его способным понимать под одними и теми же аналитическими выражениями прошедшие и будущие состояния мировой системы. Применяя тот же метод к некоторым другим объектам знания, нашему разуму удалось подвести наблюдаемые явления под общие законы и предвидеть явления, которые будут вызваны данными условиями. Все усилия духа в поисках истины постоянно стремятся приблизить его к Разуму, о котором мы только что упоминали, но от которого он останется всегда бесконечно далеким. Это стремление, свойственное роду человеческому, возвышает его над животными; и успехи его в этом направлении различают нации и века и составляют их истинную славу.

Припомним, что в былое время, в эпоху не очень от нас отдаленную, на дождь или на чрезвычайную засуху, на комету с сильно растянутым хвостом, на солнечное затмение, на северное сияние и вообще на необычайные явления смотрели как на знак небесного гнева. Взывали к небу, чтобы отвратить их пагубное влияние. Небо не молили остановить движение планет или солнца: наблюдение скоро дало бы почувствовать всю бесполезность таких молений. Но, так как те явления, наступающие и исчезающие через длинные промежутки времени, казалось, противоречили порядку, установившемуся в природе, то люди предположили, что небо порождало и изменяло их по своему усмотрению в наказание земных грехов. Так, длинный хвост кометы 1456 г. произвел панику в Европе, уже приведенной в ужас быстрыми победами турок, от которых только что пала Византийская империя. После того как это небесное светило совершило четыре своих обращения, оно возбудило среди нас очень различный интерес. Знакомство с законами системы мира, приобретенное за этот промежуток времени, рассеяло страх, порожденный незнанием истинных отношений человека ко вселенной; и Галлей (Halley), признав тождество этой кометы с кометой 1531, 1607 и 1682 г., предсказал следующее ее возвращение в конце 1758 или в начале 1759 г. Ученый мир ждал с нетерпением этого возвращения, долженствовавшего подтвердить одно из самых великих открытий, сделанных в науке, и исполнить предсказание Сенеки, сказавшего об обращении небесных светил, которые спускаются из громадных расстояний: «Наступит день, когда благодаря длившемуся несколько столетий изучению вещи, ныне скрытые, явятся со всей своей очевидностью; и потомки наши изумятся, что столь очевидные истины ускользали от нас». Тогда Клэро (Clairaut) взялся подвергнуть анализу те возмущения, которые комета испытала под влиянием двух самых больших планет — Юпитера и Сатурна: после громадных вычислений он назначил ее ближайшее прохождение через перигелий на начало апреля 1759 г., и наблюдение не замедлило подтвердить это. Правильность, которую обнаруживает нам астрономия, без всякого сомнения, имеет место во всех явлениях. Кривая, описанная простой молекулой воздуха или пара, определена так же точно, как и орбиты планет: разницу меж ними делает только наше незнание».

Итак, «случая» и случайных явлений, в сущности говоря, нет. Все зависит только от меры и степени нашего знания. И некоторые совершающиеся на наших глазах явления мы называем *случайными* только потому, что всех причин и законов, вызывающих непременное появление именно этого, а не другого события, мы не в состоянии изучить и учесть. Другими словами, явления, которых мы с точностью предусмотреть или предсказать не можем, — потому ли, что еще не знаем их причин, или потому, что эти причины слишком сложны и разнообразны, — мы называем явлениями случайными.

Положим, например, что мы бросаем монету. Может выпасть орел, может выпасть и решетка. То и другое из этих двух явлений произойдет на основании общих физических законов и будет зависеть от толчка, который мы дадим монете при бросании, веса и формы монеты, сопротивления воздуха и прочих условий. Все эти условия, однако, столь разнообразны, многочисленны и сложны, что нет возможности обращаться к их исследованию для того, чтобы предсказать, чем закончится процесс бросания монет: орлом или решеткой. Мы и говорим, что вскрытие орла или вскрытие решетки суть явления случайные.

Определение математической вероятности события

Мы не в состоянии ничего точно предсказать наперед о появлении того или иного случайного события. Однако появление многих из таких событий (например: рождение, смерть, болезни, увечья, преступления, пожары, град, засуха, дождь и т.д.) часто сопровождается для нас такими материальными или моральными выгодами или ущербом, что знать о том, случится ли некоторое событие или нет, для нас весьма важно.

Не имея возможности судить о появлении ожидаемого события *достоверно*, мы стараемся все же найти какие-либо (в большинстве случаев — опытные) данные, которые позволили бы нам с некоторыми бесспорными основаниями утверждать, что одни из этих событий более, а другие менее вероятны. Из области гаданий, выражающихся в насмешливой, всем известной поговорке «либо дождик, либо снег, — либо будет, либо нет», мы переходим в область вероятности, составляющей нечто среднее между абсолютным случаем и полной достоверностью. Знать степень вероятности случайного события уже много значит. Известно, например, что для предотвращения случайных материальных убытков устраиваются разного рода страховые общества, как то: общества страхования от пожара, от кораблекрушения, от градобития, страхования пожизненных капиталов и доходов. Эти общества за незначительную ежегодную плату обязуются возмещать убытки, происшедшие от несчастных случаев. Все страховые общества основывают свои расчеты также на вероятности тех или других событий и сообразно с вероятностью их берут страховую премию. Данные, на основании которых определяются вероятности случайных событий, берутся из наблюдений над появлением этих событий в действительной жизни, для чего обыкновенно собираются статистические сведения за более или менее продолжительное время.

Теперь сам собой напрашивается вопрос: как же *математически* учесть вероятность, как условиться в том, какими *числами* мы будем выражать вероятности событий или явлений?

Условимся прежде всего в словах и терминах.

Два слова в первоначальной теории вероятности встречаются наиболее часто, а именно: **событие** и **случай**. Всякое отдельное явление при каком-либо опыте или наблюдении мы будем называть случаем, но заметим при этом, что во многих сочинениях по теории вероятностей вместо этого слова употребляют также термины «статочность» или «шанс».

В представляющемся нам целом ряде случаев (статочностей, шансов) могут быть случаи однородные или разнородные — это надо всегда иметь в виду.

Появление каждого из однородных случаев будем называть событием.

Например, возьмем урну, в которой заключается десять белых, пять черных и три красных шара. Вынимаем наудачу один шар из этой урны. При этом мы ожидаем 18 случаев (статочностей) — это появление каждого шара в отдельности — и только одного из трех *событий*: появления белого, черного или красного шара.

Для большей простоты делаем ограничения: во-первых, мы будем рассматривать только **равновозможные случаи**. Мы называем случаи равновозможными, когда нет никакой причины отдать предпочтение появлению одного случая перед другим. Во-вторых, будем полагать, что в каждом отдельном случае не может появиться более одного события. Кроме того, предполагаем, что случаи (статочности) **несовместимы**, т.е. если имеет место один случай, то одновременно не может быть другого.

Теперь нетрудно прийти к заключению, что вероятность события зависит как от числа случаев, благоприятных появлению ожидаемого события, так и от числа случаев, неблагоприятных этому событию; с возрастанием первого числа вероятность события увеличивается, с возрастанием второго она уменьшается. Определение вероятности сводится, значит, к точному подсчету всех случаев, при которых событие может наступить.

Пусть m означает полное число равновозможных случаев при данном наблюдении, а n — число тех из них, которые благоприятны появлению ожидаемого события. Легко видеть, что вероятность события увеличивается и уменьшается при тех же самых обстоятельствах, как и дробь $\frac{n}{m}$. Отсюда вытекает следующее наиболее простое определение математической вероятности.

Вероятность события измеряется дробью, числитель которой равен числу случаев, благоприятных появлению события, а знаменатель — числу всех случаев, могущих появиться при данном наблюдении.

Некоторые следствия, вытекающие из определения математической вероятности. Вероятность и достоверность

Из определения математической вероятности появления какого-либо события следует, что вероятность эта увеличивается и уменьшается одновременно с увеличением и уменьшением дроби $\frac{n}{m}$, где m означает число всех равновозможных случаев, а n — число случаев, благоприятных появлению ожидаемого события. Но при этом необходимо всегда помнить, что если две величины одновременно увеличиваются и уменьшаются, отсюда еще *не следует*, чтобы эти величины были равны или даже пропорциональны. Итак, данное выше определение вероятности *есть совершенно произвольное*. Можно было бы дать много других определений: например, **вероятность** можно определить как **отношение числа благоприятных к числу неблагоприятных случаев**. Нужно, однако же, заметить, что *данное определение есть простейшее из всех возможных*. Само собой разумеется, что при другом определении вероятности все формулы теории вероятности были бы иные.

Дробь $\frac{n}{m}$, которую мы приняли как меру математической вероятности, может принимать все значения между нулем и единицей.

Вероятность равна единице, когда $n = m$, т.е. когда все случаи благоприятны появлению ожидаемого события, и тогда событие достоверно, т.е. оно должно непременно случиться. Отсюда следует, что *за единицу меры вероятностей мы принимаем вероятность достоверного события*.

Вероятность обращается в нуль, когда $n = 0$, т.е. когда совсем нет случаев, благоприятных для появления события. В таком случае событие не появится вовсе. Следовательно, *если вероятность равна нулю, то событие вовсе не появится*.

Пусть n означает число благоприятных появлению ожидаемого события, а m — число всех возможных случаев. Вероятность появления ожидаемого события выразится, как мы знаем, дробью $\frac{n}{m}$. Вероятность появления того же события выразится дробью $\frac{m-n}{m}$.

Означим первую вероятность через p, тогда вторая будет $1 - p$. Отсюда заключаем следующее.

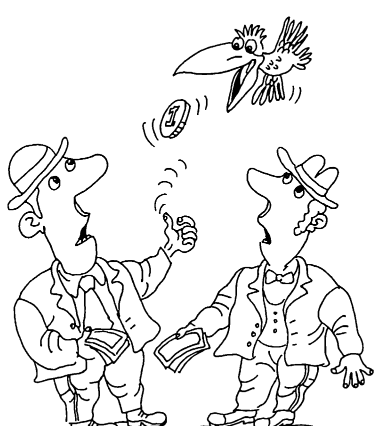
Если вероятность появления события есть p, то вероятность непоявления того же события есть 1 — p.

Для надлежащего усвоения теории вероятностей необходимо прежде всего умение вычислять вероятность различных событий. При этом учет шансов (случаев, статочностей) должен делаться со всей возможной осторожностью и внимательностью: 1) следует сосчитать все *возможные* случаи, ни один случай не должен быть пропущен; 2) случаи должны быть *равновозможны*; 3) они должны быть *несовместимы*.

Теперь мы можем приступить к решению некоторых простых задач, относящихся к исчислению случаев и определению вероятности некоторых событий.

Задача 63-я.
Орлянка

Подбрасывается монета один раз. Какова вероятность, что выпадет орел?



Решение

В этой задаче, как и во всех дальнейших, предполагается, что монета совершенно однородна, стороны ее совершенно подобны и что вообще в ней самой нет никаких физических причин, заставляющих ее падать на одну сторону предпочтительнее, чем на другую. Тогда мы имеем здесь всего два равновозможных случая: либо орел, либо решетка; а за выпадение орла имеется, значит, один благоприятный шанс. Итак, по определению математической вероятности, вероятность появления орла есть $\frac{1}{2} = 0{,}5$.

Задача 64-я. Двукратное бросание монеты

Монета подбрасывается вверх 2 раза. Какова вероятность, что при этом двукратном подбрасывании хоть один раз появится орел?

Решение

Подсчитываем все возможные случаи. Может случиться, что: 1) орел появится при первом и втором бросании; 2) орел при первом и решетка при втором бросании; 3) решетка при первом и орел при втором бросании; 4) решетка при первом и втором бросании. Всего 4 случая, и случая равновозможных. В трех из них может появляться орел. Значит, благоприятных появлению орла случаев 3, а потому, по определению для искомой вероятности, имеем $\frac{3}{4}$.

Задача 65-я. N-кратное бросание монеты

Монету подбрасывают последовательно n раз. Какова вероятность, что орел и решетка будут появляться в известном, наперед заданном порядке?

Решение

Появление орла или решетки равновозможно при каждом бросании, т.е. при каждом бросании имеем 2 равновозможных случая. Но всех бросаний n, значит, при каждом новом бросании каждые новые два случая будут сочетаться со всеми предыдущими. Так:

при	1-м	бросании	имеем	2 случая.
»	2-м	»	»	$2 \cdot 2 = 2^2$
»	3-м	»	»	$2^2 \cdot 2 = 2^3$

. . . .

» n-м » » $2^{n-1} \cdot 2 = 2^n$.

Итак, всех случаев 2^n.

Сколько же случаев, благоприятствующих наступлению спрашиваемого *события*? Один.

Итак, искомая вероятность есть $\frac{1}{2^n}$.

Приложение к рулетке

Совершенно такая же, как в предыдущей задаче, вероятность получается для появления в известном порядке красного и черного на рулетке (rouge-et-noire).

Например: *какова вероятность, что, показав в 1-й раз красные, рулетка вслед затем следующие 29 ударов будет каждый раз последовательно менять цвет?*

По предыдущему, для такой вероятности, находим:

$$\frac{1}{2^{30}} = 0{,}0000000093133.$$

Если принять, что последовательный ряд появления красного и черного может начаться все равно с какого, красного или черного цвета, то данное число для вероятности надо помножить на 2.

Задача 66-я.
Бросание одной кости

Бросается игральная кость. Определить величину вероятности, что выпадет 4 очка.

Решение

В игральной кости (кубике) шесть граней, и на них отмечены очки от 1 до 6.

Подброшенная кость может лечь вверх любой из этих шести граней и показать любое число очков от 1 до 6. Итак, имеем всего 6 равновозможных случаев. Появлению же 4 очков благоприятствует только 1.

Следовательно, вероятность того, что выпадет именно 4 очка, равна $\frac{1}{6}$.

В случае метания одной кости та же вероятность, $\frac{1}{6}$, будет и для выпадения всех остальных очков кости.

Задача 67-я.
Две кости

Как велика вероятность получить 8 очков, бросив две кости один раз?

Решение

Подсчитать число всех равновозможных случаев, могущих получиться при бросании двух костей, нетрудно, исходя из таких соображений: каждая из костей при бросании дает один из 6 равновозможных для нее случаев. Шесть таких случаев для одной кости сочетаются всеми способами с шестью же случаями для другой кости, и, таким образом, получается всего для двух костей $6 \times 6 = 6^2 = 36$ равновозможных случаев. Остается подсчитать число всех равновозможных случаев, благоприятствующих появлению суммы 8. Здесь дело уже несколько осложняется.

Мы должны сообразить, что при двух костях сумма 8 может выброситься только следующими способами:

1)	первая кость		4 очка,		вторая кость		4	очка
2)	»	»	6	»	»	»	2	»
3)	»	»	2	»	»	»	6	»
4)	»	»	5	»	»	»	3	»
5)	»	»	3	»	»	»	5	»

Итого случаев, благоприятных ожидаемому событию, имеем 5. Следовательно, искомая вероятность, что кости выбросят в сумме 8 очков, равна $\frac{5}{36}$.

Замечание. Для полного уяснения дела полезно составить табличку всех 36 комбинаций, которые могут получиться при бросании двух костей, и разобраться в ней. Для ясности изобразим очки первой кости римскими цифрами, а очки второй — арабскими. Иногда все 36 случаев, которые могут представиться при бросании двух костей, могут быть представлены следующей квадратной табличкой (рис. 28).

Сумма чисел каждой клетки этой фигуры дает сумму очков двух костей

I, 1	I, 2	I, 3	I, 4	I, 5	I, 6
II, 1	II, 2	II, 3	II, 4	II, 5	II, 6
III, 1	III, 2	III, 3	III, 4	III, 5	III, 6
IV, 1	IV, 2	IV, 3	IV, 4	IV, 5	IV, 6
V, 1	V, 2	V, 3	V, 4	V, 5	V, 6
VI, 1	VI, 2	VI, 3	VI, 4	VI, 5	VI, 6

Рис. 28

при каждом из 36 равновозможных случаев, как они могут выпасть.

Рассматривая эти суммы по всем диагоналям справа налево и сверху вниз, мы тотчас убеждаемся, насколько разнятся числа случаев благоприятных для выпадения той или другой суммы очков. Главная диагональ справа налево тотчас показывает нам, что наиболее шансов для выпада при двух костях имеет число 7, а именно число это может составиться шестью различными комбинациями двух костей: I + 6, II + 5, III + 4, IV + 3, V + 2, VI + 1. Следовательно, вероятность выпада этого числа очков при бросании двух костей равна $\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$.

Из таблицы видно, что для выпада

2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 и 12 очков

соответственные вероятности будут:

$$\frac{1}{36}, \frac{1}{18}, \frac{1}{12}, \frac{1}{9}, \frac{5}{36}, \frac{1}{6}, \frac{5}{36}, \frac{1}{9}, \frac{1}{12}, \frac{1}{18} \ и \ \frac{1}{36}.$$

По главной диагонали слева направо в табличке идут *дублеты*, т.е. случаи, когда обе кости одновременно показывают одно и то же число очков. Ясно, что верность получения любого из дублетов равна

$$\frac{1}{36}.$$

Задача 68-я.
Три очка

Какова вероятность, что, бросая n раз одну шестигранную кость, мы получим n раз подряд очко 3?

Решение

6 равновозможных случаев при каждом бросании. Следовательно, при

1-м	бросании	имеем	6 случаев	
2-м	»	»	$6 \cdot 6 = 6^2$	случаев
3-м	»	»	$6^2 \cdot 6 = 6^3$	»
. . . .				
n-м	»	»	$6^{n-1} \cdot 6 = 6^n$	»

Итак, всего при n последовательных бросаниях получается 6^n случаев. Спрашивается же наступление такого события, появлению которого каждый раз благоприятствует только один случай.

Искомая вероятность есть $\frac{1}{6^n}$.

Задача 69-я.
Дублет

Бросают 2 кости три раза. Какова вероятность, что хоть один раз выпадет дублет (т.е. на обеих костях будет одинаковое количество очков).

Решение

Всех равновозможных случаев будет $36^3 = 46\ 656$. Дублетов при двух костях шесть: 1 и 1, 2 и 2, 3 и 3, 4 и 4, 5 и 5, 6 и 6, и при каждом ударе возможно появление какого-либо из них. Итак, из 36 случаев при каждом ударе 30 ни в коем случае не дают дублета. При трех же бросаниях получается 30^3 — 27 000 недублетных случая. Случаев же, благоприятствующих появлению дублета, будет, значит,

$36^3 - 30^3 = 19\ 656$.

Искомая вероятность есть $\frac{19656}{46656} = 0{,}421\ 296$.

Задача 70-я.
Семь очков

Бросают n раз 2 кости. Какова вероятность, что получится n раз сумма по 7 очков?

Решение

При n бросаниях равновозможны $36n$ случаев. При каждом бросании появлению требуемого события благоприятствует 6 случаев. Всего при n бросаниях благоприятствующих случаев будет, следовательно, 6^n.

Вероятность искомого события: $\frac{6^n}{36^n}=\frac{1}{6^n}$.

Замечание. Полученная вероятность одинакова с вероятностью выбрасывания одной и той же грани при n бросаниях одной кости.

Задача 71-я.
Карты

Из колоды карт вынимается одна карта. Определить вероятность появления: 1) пиковой дамы, 2) какого-либо туза, 3) карты червонной масти, 4) какой-либо фигуры.

Решение

Заметив, что в колоде 52 карты, и что среди этих карт находится: 1 пиковая дама, 4 туза, 13 карт червонной масти и 12 фигур. Находим искомые вероятности соответственно:

$$1)\frac{1}{52};\ 2)\frac{4}{52}=\frac{1}{13};\ 3)\frac{13}{52}=\frac{1}{4};\ 4)\frac{12}{52}=\frac{3}{13}.$$

Задача 72-я.
Еще одна задача кавалера де Мере

Определить вероятность, при которой, бросив n раз подряд две кости, получим хоть раз 12 очков.

Решение

При каждом бросании двух костей возможно 36 расположений их, но 35 из них дадут непременно иное число очков, чем 12.

Число всех возможных сочетаний при n бросаниях костей есть 36^n, число же таких, из которых сумму очков 12 необходимо исключить, будет, очевидно, 35^n. Следовательно, число таких сочетаний, в которых 12 может заключаться один или несколько раз, равно $36^n - 35^n$. Поэтому для искомой вероятности находим: $\frac{36^n-35^n}{36^n}=1-(\frac{35}{36})^n$.

Если пожелать, чтобы эта вероятность была равна $\frac{1}{2}$, то необходимо определить n из уравнения: $1-(\frac{35}{36})^n=\frac{1}{2}$.

Это показательное уравнение решается с помощью логарифмов

$$n = \frac{\lg 2}{\lg 36 - \lg 35} = 24,605 .$$

Отсюда видим, что если кто берется выбросить 12 очков в 24 удара, то он имеет более шансов проиграть, чем выиграть. При 25 ударах получается обратное.

Из переписки Паскаля с Ферма

Задачи о бросании костей были предложены Паскалю кавалером де Мере. Они послужили толчком для разработки первых основ теории вероятностей.

«У меня нет времени, — писал по этому поводу Паскаль к Ферма, — чтобы переслать вам разъяснение одного затруднения, которое очень удивляло г. де Мере, потому что хотя он обладает очень здравым умом, но он не геометр. А это, как знаете, большой недостаток. Так, он сообщил мне, что нашел противоречие в числах по следующему поводу. Если браться выбросить 6 очков одной костью, то он имеет шансы сделать это в 4 удара, но если взяться выкинуть 12 с помощью двух костей, то он не имеет полных шансов сделать это в 24 удара, а между тем отношение 24 к 36, которое есть число всех граней, получаемых из двух костей, равно отношению 4 к 6, числу граней одной кости.

Такова приключившаяся с ним большая неприятность, которая заставляет его презрительно утверждать, что математические теоремы неустойчивы и что арифметика противоречит сама себе»...

Сомнения де Мере не могли затруднить ни Паскаля, ни Ферма. Пока дело идет об одной кости, — в области небольших чисел, рассуждения де Мере правильны: при 4 ударах он действительно имеет шансы выкинуть одной костью наперед заданное число очков (6). Но, как мы уже знаем, если увеличивается число костей и число их выбрасываний, то число всевозможных случаев, равно как и случаев, благоприятных появлению события, увеличивается, вообще, совсем не пропорционально ни числу получаемых сочетаний из граней костей, ни числу их выбрасываний. Убедиться в этом можно либо путем непосредственного опыта над простейшими случаями, либо путем вывода общей формулы. Кавалер де Мере постиг только первый путь. Паскаль хотел вывести его на второй, но тотчас увидел большой недостаток своего приятеля: он не был, при всем своем уме, математиком...

Задача 73-я.
В чем дело?

Имеются три шкатулки, совершенно одинаковые по внешнему виду, в каждой из них по два ящичка, а в каждом ящичке по монете. В одной шкатулке только золотая монета, в другой только серебряная, а в третьей — в одном ящичке золотая, а в другом серебряная монета. Берут одну из шкатулок (все равно какую). Какова вероятность найти в ней в одном из ящиков золотую, а в другом серебряную монету?

Решение

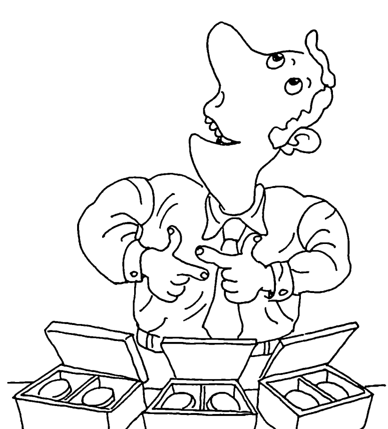
Можно подходить к решению задачи двояко:

1. Шкатулки тождественны. Значит, равновозможны 3 случая. Благоприятствует появлению события один. Следовательно, искомая вероятность равна $\frac{1}{3}$.

2. Взята наугад какая-либо из шкатулок, и в ней выдвинули один ящик. Какова бы ни была найденная там монета, но теперь оказываются возможными только два шанса (случая): во втором закрытом ящичке шкатулки находится монета такого же металла, что и в открытом, или другого. Из этих двух случаев один благоприятный ожидаемому нами событию, т.е. что у нас в руках шкатулка с разными монетами. Таким образом, вероятность взять сразу в руки требуемую шкатулку оказывается равной $\frac{1}{2}$.

Как же это так? Выходит, что достаточно в одной из шкатулок только открыть ящик, чтобы вероятность из $\frac{1}{3}$ обратилась в $\frac{1}{2}$.

В наших рассуждениях, очевидно, должна быть ошибка; и она действительно в них есть.



Когда мы открываем первый ящик в шкатулке, то остаются возможными два случая, и один только благоприятствует появлению ожидаемого события, это верно; но дело в том, что два получающихся случая **неравновозможны**. Допустим, что, открыв первый ящик, мы нашли там золотую монету; в другом, конечно, может быть серебряная, но есть больше оснований утверждать, что в этом закрытом ящике находится тоже золотая монета.

Чтобы сделать наше рассуждение более ясным, предположим, что у нас не три, а триста совершенно одинаковых с двумя ящичками шкатулок. Сто из них в обоих ящичках содержат по золотой монете, сто — по серебряной, а в третьей сотне шкатулок — в одном ящичке находится одна золотая, а в другом одна серебряная монета. Откроем по одному ящичку в каждой из шкатулок, и мы увидим 300 монет. Сто из них должно быть золотых и сто серебряных, — это мы можем утверждать вперед наверняка. Но относительно ста остальных ничего наперед сказать нельзя: они находятся в шкатулках с разными монетами, а какие и в каком числе при выдвигании ящичков откроются монеты, зависит только от случая.

Открыв триста ящичков, следует ожидать во всяком случае, что увидим менее двухсот золотых монет. Следовательно, вероятность, что в первой взятой наудачу шкатулке другая монета (в закрытом ящике) золотая, превышает $\frac{1}{2}$.

Настоящая задача может служить примером того, какую осторожность и точность в суждениях нужно соблюдать при определении равновозможности случаев.

Необходимое замечание

Во избежание неточностей и ошибок следует постоянно помнить, что *бесконечность* не есть число. Поэтому нельзя вводить это понятие в рассуждения без соответствующих пояснений. Кажущаяся только точность иных слов может также вести к противоречиям. Выражение: «выбрать *наудачу* из бесконечного числа возможных случаев» — не может, например, считаться достаточным указанием.

Вот еще пример неудачного задания, ведущего к противоречию.

Требуется определить вероятность того, что некоторое число, целое или дробное, соизмеримое или несоизмеримое, взятое *наудачу* между 0 и 100, будет более 50.

Решение

Ответ, по-видимому, ясен: число случаев (статочностей), благоприятствующих появлению события, равно половине числа всех возможных случаев. Искомая вероятность равна, следовательно, $\frac{1}{2}$.

Но вместо самого числа, нисколько не меняя условий вопроса, можно взять его квадрат. Если число заключается между 50 и 100, то его квадрат заключается между 2500 и 10 000. Вероятность, чтобы взятое *наудачу* между 0 и 10 000 число превышало 2500, тоже представляется очевидной: число случаев, благоприятствующих появлению события, равно трем четвертям всех равновозможных случаев. Искомая вероятность, значит, равна $\frac{3}{4}$.

Обе задачи тождественны. Почему же получается такая разница в ответах? Потому что в самом задании нет надлежащей точности. Противоречий подобного рода можно подобрать сколько угодно и получать таким образом новые виды математических софизмов.

Еще следствие из определения математической вероятности

Выведем из определения математической вероятности важное следствие. Положим, что при каком-нибудь опыте могут появиться несколько событий. Пусть n, n', n'' ... будут числа случаев, благоприятных соответственно каждому из них, а m — число всех возможных случаев. Так как, по сделанному ограничению, в каждом случае не могут появиться два или более события, то $m = n + n' + n'' + \ldots$ Вероятности каждого события выразятся дробями: $\frac{n}{m}, \frac{n'}{m}, \frac{n''}{m} \ldots$

Сумма этих дробей равна единице. Отсюда следует, что **сумма вероятностей всех событий, могущих появиться при данном опыте, равна единице.**

Задача 74-я. Белые и черные шары

В урне заключается m белых и n черных шаров. Из этой урны вынимаем наудачу два шара. При этом опыте могут появиться три события: 1) два белых, 2) белый и черный, 3) два черных шара. Как велика вероятность каждого из этих событий?

Решение

Число возможных случаев в опыте равно числу сочетаний из $m + n$ шаров по два: $\frac{(m+n)(m+n-1)}{2}$. Число случаев, благоприятных появлению первого события, равно числу сочетаний из m белых шаров по два, т.е. $\frac{m(m-1)}{2}$. Случаи, благоприятные появлению второго события, получаются комбинированием каждого белого с каждым черным шаром; число этих случаев равно $m\ n$. Число случав, благоприятных появлению третьего события, равно числу сочетаний из n черных шаров по два: $\frac{n(n-1)}{2}$. Разделив числа, благоприятные появлению каждого события, на число всех возможных случаев, получим искомые вероятности: на число всех возможных случаев, получим искомые вероятности:

$$\frac{m(m-1)}{(m+n)(m+n-1)}, \frac{2mn}{(m+n)(m+n-1)}, \frac{n(n-1)}{(m+n)(m+n-1)}.$$

Сумма этих вероятностей равна единице[1].

---

[1]Можно было рассматривать в опыте только два события: появление белого или черного шара. При этом только некоторые случаи благоприятны появлению обоих событий. Легко найти, что вероятности выхода белого и черного шара выражаются дробями:

$$\frac{m(m-1)+2mn}{(m+n)(m+n-1)}, \frac{n(n-1)+2mn}{(m+n)(m+n-1)}.$$

Сумма этих вероятностей уже не равна единице. А это ошибка! Объясните, почему так получилось.

Вероятности сложных событий

Появление нескольких событий будем называть *сложным событием.*

Каждое из составных событий, в свою очередь, может быть сложным, т.е. может состоять из нескольких *простых* событий.

Несколько событий будем называть *независимыми*, если вероятность каждого из них не зависит от того, случились ли другие события или нет.

События будем называть *зависимыми*, если появление или непоявление некоторых из них оказывает влияние на вероятности появления других событий.

Покажем прежде всего, как вычисляется вероятность сложного события, состоящего из нескольких независимых событий.

Положим, производится несколько опытов, из которых при первом может появиться событие A, при втором A', при третьем A'' и т.д. Обозначим через m число всех равновозможных случаев, могущих появиться при первом опыте, и через n число тех из этих случаев, которые благоприятны появлению события A; соответственные числа при втором, третьем и т.д. опытах означим через m' и n', m'' и n'' и т.д. Как велика вероятность, что появятся события: A, A', A'' и т.д.?

Если производить опыты одновременно или один за другим, то каждый случай при первом опыте может комбинироваться с каждым случаем при втором опыте, с каждым случаем при третьем опыте и т.д. Отсюда следует, что число всех возможных случаев при нескольких опытах равно произведению нескольких множителей, из которых каждый выражает число всех равновозможных случаев при каждом опыте в отдельности. Итак, число всех равновозможных случаев в опытах равно $mm'm''$...

Так как каждый случай, благоприятный появлению события A, может комбинироваться с каждым случаем, благоприятным событию

A', с каждым случаем, благоприятным A'', и т.д., то число всех случаев, благоприятных сложному событию $AA'A''...$, равно произведению $nn'n''...$, нескольких множителей, из которых каждый выражает число случаев, благоприятных каждому событию в отдельности.

Согласно определению вероятности, вероятность сложного события $AA'A''...$ выразится дробью: $\frac{nn'n''...}{mm'm''...}$

Но эта дробь может быть разложена на произведение нескольких дробей:

$$\frac{nn'n''...}{mm'm''...}=\frac{n}{m}\times\frac{n'}{m'}\times\frac{n''}{m''}...$$

Дробные множители в правой части равенства выражают вероятности появления каждого из событий A, A', $A''...$ в отдельности.

Отсюда вытекает следующее правило:

Вероятность появления нескольких независимых событий равна произведению вероятностей этих событий.

Задача 75-я. Все белые?

Имеется несколько урн с шарами: в первой m белых и n черных шаров, во второй m' белых и n' черных, в третьей m'' и n'' и т.д. Как велика вероятность, что, если вынуть по одному шару из каждой урны, все появившиеся шары будут белые?

Решение

Для решения этой задачи, согласно приведенному выше правилу, нужно вычислить вероятность выхода белого шара из каждой урны и полученные вероятности перемножить. Таким образом, искомая вероятность получится равной произведению: $\frac{m}{m+n}\times\frac{m'}{m'+n'}\times\frac{m''}{m''+n''}...$

Задача 76-я. Подряд белые

Из урны, содержащей m белых и n черных шаров, вынимаем по одному шару и каждый раз вынутый шар откладываем в сторону. Как велика вероятность выхода подряд двух белых шаров?

Решение

Задача эта, как и вообще многие задачи на вычисление вероятностей, может быть решена непосредственным вычислением как числа всех возможных случаев, так и числа случаев, благоприятных ожидаемому событию. Но такое непосредственное определение для многих задач бывает в высшей степени затруднительно. Число всех возможных случаев при вынимании двух шаров из урны равно числу размещений (если обращать внимание на порядок, в котором появляются шары) из всех $m+n$ шаров по два, т.е. равно $(m+n)(m+n—1)$. Число случаев, благоприятных выходу два раза подряд двух белых шаров, равно числу размещений из m белых шаров по два, т.е. равно m — 1. Следовательно, вероятность выхода два раза подряд двух белых шаров равна

$$\frac{m(m-1)}{(m+n)(m+n-1)}.$$

Эта задача решается также другим приемом, который может быть применен к решению многих более сложных задач.

Когда мы вынем один шар (белый или черный) из урны, то второй шар придется вынимать из урны, содержащей $m—1$ белых и n черных шаров, или из урны, содержащей m белых и $n—1$ черных шаров. В первом случае вероятность выхода белого шара за вторым разом равна

$$\frac{m-1}{m+n-1};$$

во втором случае вероятность того же события равна

$$\frac{m}{m+n-1}.$$

Таким образом, условия, при которых совершается второй опыт (выход второго шара), изменяются в зависимости от появления белого или черного шара при первом опыте; поэтому изменяется также и вероятность второго события (выход белого шара за вторым разом).

Из приведенных рассуждений легко заключить, что задача тождественна следующей.

Даны три урны с шарами; в первой m белых и n черных шаров, во второй m — 1 белых и n черных, в третьей m белых и n — 1 черных шаров. Вынимаем один шар из первой урны и один шар или из второй, или из третьей урны. При этом второй шар вынимаем из второй урны только в том случае, если из первой урны появится белый шар; в случае же выхода черного шара из первой урны второй шар вынимаем из третьей урны. Как велика вероятность, что при соблюдении сказанных условий появятся два белых шара?

Если мы желаем вычислить появление двух белых шаров, то на третью урну мы можем не обращать внимания (ее отбросить), так как, сообразно условиям задачи, с этой урной мы имеем дело только тогда, когда из первой урны появляется черный шар. Отсюда заключаем, что последняя задача равносильна следующей.

Задача 77-я.
Два белых шара

Из двух урн, содержащих первая m белых и n черных, вторая m — 1 белых и n черных шаров, вынимаем по одному шару. Как велика вероятность появления двух белых шаров?

Решение

При решении этой последней задачи мы имеем дело с независимыми событиями; поэтому искомая вероятность сложного события равна произведению вероятностей простых событий: $\frac{m}{m+n} \times \frac{m-1}{m+n-1}$.

Рассмотренная нами задача может быть обобщена следующим образом.

Задача 78-я.
Обобщение

Предстоит произвести один за другим два опыта — назовем их через P и Q; при первом опыте может появиться событие A, при втором B. При первом опыте число всех равновозможных случаев m, из которых n благоприятны появлению события A. Условия второго опыта меняются в зависимости от появления или непоявления события A: если событие A появилось, то при втором опыте число всех возможных случаев равно m', а число случаев, благоприятных событию B, равно n''; если же событие A не появилось, то при втором опыте всех возможных случаев будет m'', из которых n'' благоприятны событию B. Как велика вероятность появления двух событий A и B?

Решение

Вероятность первого события A равна $\frac{n}{m}$. Что касается вероятности второго события B, то она равна $\frac{n'}{m'}$, если первое событие появилось,

или $\frac{n''}{m''}$, если событие A не появилось.

Подобно тому как и в прежней задаче, мы можем опыт Q заменить двумя самостоятельными опытами R и S, при каждом из которых может появиться событие B. При опыте R число всех равновозможных случаев равно m', а число случаев, благоприятных событию B, равно n'; при опыте S соответственные числа равны m'' и n''.

Опыт P мы производим обязательно. Что касается остальных двух опытов, R и S, то из них мы производим только один, а именно — опыт R, если событие A появилось, в противном случае — опыт S.

Но если мы желаем определить вероятность появления двух событий, то на опыт S мы можем не обращать внимания, как бы его и вовсе не было, так как, по условию задачи, с этим опытом мы только тогда имеем дело, когда событие A не появляется.

Итак, задача наша приводится к определению вероятности появления двух событий A и B. Но в таком случае мы имеем дело с двумя независимыми событиями, и вероятность появления таких событий, согласно данному раньше пралу, равна произведению $\frac{n}{m} \times \frac{n'}{m'}$.

Это и будет ответ на нашу 79-ю задачу. Рассматривая полученный результат, мы заметим, что первый множитель $\frac{n}{m}$ есть вероятность первого события; второй множитель $\frac{n'}{m'}$ есть вероятность второго события, вычесленного в том предположении, что первое событие A уже случитлось. Таким образом, мы приходим к следубщему правилу. Вероятность появления двух зависимых событий равна произведению вероятности первого события на вероятность второго события, вычисленную в том предположении, что первое событие уже случилось.

Задача 79-я. Разъяснение

Даны две урны с шарами; в одной n белых и $m - n$ черных, в другой n' белых и $m' - n'$ черных шаров. Вынимаем один шар из первой урны, остальные же шары пересыпаем во вторую урну; после этого, перемешавши шары, вынимаем один шар из второй урны. Как велика вероятность появления два раза подряд двух белых шаров?

Вероятность первого события, выхода белого шара из первой урны, равна $\frac{n}{m}\cdot$ Предполагая, что первое событие случилось и, как сказано в задаче, остальные шары всыпаны во вторую урну, в этой последней будем иметь всех $m+m'-1$ шаров, в том числе $n+n'-1$ белых; вероятность выхода белого шара из такой урны равна $\frac{n+n'-1}{m+m'-1}$.

Искомая вероятность сложного события равна произведению:

$$\frac{n}{m}\times\frac{n+n'-1}{m+m'-1}.$$

Наше последнее правило может быть обобщено на несколько событий. Положим, нам нужно вычислить вероятность появления трех зависимых событий: A, B и C. Если мы появление двух первых событий A и B примем за одно (сложное) событие и назовем его через D, то вопрос приводится к определению вероятности появления двух зависимых событий D и C. Эта вероятность равна произведению двух множителей: $s\times r$, из которых первый есть вероятность первого события D, а второй — вероятность второго события C, вычисленная в том предположении, что событие D уже случилось. В свою очередь, вероятность события D как вероятность сложного события, состоящего из двух зависимых событий A и B, разлагается на произведение двух множителей, $s = p\times q$; первый из этих множителей есть вероятность события A, второй — вероятность события B, вычисленная в том предположении, что событие A уже появилось. Итак, вероятность появления трех зависимых событий равна $s\times r = p\times q\times r$.

Отсюда вытекает следующее общее правило.

Вероятность появления нескольких зависимых событий равна произведению нескольких множителей, из которых первый есть вероятность первого события, а каждый следующий множитель выражает вероятность следующего события, вычисленную в том предположении, что предыдущие события уже появились.

Задача 80-я.
Три карты

Из полной колоды карт вынимаем три карты. Как велика вероятность, что все вынутые карты будут фигуры?

Решение

В полной колоде 40 простых карт и 12 фигур. Результат будет один и тот же, вынимаем ли мы три карты разом, или одну за другой. Предположим, что мы вынимаем одну карту за другой и каждый раз вынутую карту откладываем в сторону; в таком случае мы имеем дело с тремя зависимыми событиями. Вероятность выхода фигуры за первым разом равна $^{12}/_{52}$. Предположим, что одна фигура уже вынута: вероятность выхода второй фигуры равна $^{11}/_{51}$. Если мы предположим, что вынуты две фигуры, то вероятность выхода третьей фигуры равна $^{10}/_{50}$. Искомая вероятность появления трех фигур получится перемножением найденных вероятностей:

$$\frac{12}{52}\times\frac{11}{51}\times\frac{10}{50}=\frac{11}{1105}$$

Задача 81-я.
Только белый шар

Из урны, содержащей a белых и b черных шаров, вынимаем по одному шару (каждый раз вынутый шар откладываем в сторону) до тех пор, пока появится белый шар. Как велика вероятность, что белый шар появится за n-м разом?

Решение

Мы ищем вероятность выхода n — 1 черных шаров и одного белого шара. Здесь мы имеем дело с n зависимыми событиями. Вероятность выхода черного шара за первым разом равна $\frac{b}{a+b}$. Предположим, что черный шар появился за первым разом: вероятность выхода черного шара за вторым разом равна $\frac{b-1}{a+b-1}$. Точно так же вероятность выхода черного шара за третьим разом равна $\frac{b-2}{a+b-2}$ и т. д. Вероятность выхода черного шара за m — 1 разом, предполагая, что прежде появившиеся шары — черные, равна $\frac{b-n+2}{a+b-n+2}$. Если предположить, что вынуты n — 1 черных шаров, вероятность выхода белого шара за n-м разом равна $\frac{a}{a+b-n+1}$.

Искомая вероятность сложного события получится перемножением найденных вероятностей: $\frac{b(b-1)(b-2)...(b-n+2)a}{(a+b)(a+b-1)(a+b-2)...(a+b-n+1)}$.

Под эту общую формулу не подходит только вероятность выхода белого шара за первым разом (так как здесь идет речь о простом событии), которая равна $\frac{a}{a+b}$. В частном случае вероятности выхода белого шара за вторым, за третьим и т.д. разом выражаются дробями:

$$\frac{ba}{(a+b)(a+b-1)},\ \frac{b(b-1)a}{(a+b)(a+b-1)(a+b-2)}.$$

Из последней задачи можно вывести одно интересное следствие. При нашем опыте белый шар может появиться или за первым, или за вторым, или за третьим разом и т.д.; других событий не может быть, так как белый шар должен непременно появиться. Сложив вероятности выхода белого шара за первым, вторым, третьим и т.д. разом, мы должны получить в сумме единицу:

$$1=\frac{a}{a+b}+\frac{ba}{(a+b)(a+b-1)}+\frac{b(b-1)a}{(a+b)(a+b-1)(a+b-2)}+...$$

Разделив обе части на a, получим следующее тождество:

$$\frac{1}{a}=\frac{1}{a+b}+\frac{b}{(a+b)(a+b-1)}+\frac{b(b-1)}{(a+b)(a+b-1)(a+b-2)}+...$$

Легко проверить это тождество на частных примерах; можно дать также независимое доказательство (и обобщить на тот случай, когда a и b не суть целые числа).

Примечание. Легко видеть, что последнее общее правило одинаково приложимо к вычислению вероятности появления как зависимых, так и независимых событий; поэтому им можно пользоваться во всех тех случаях, когда имеем дело с вычислением вероятности сложного события.

Математическое ожидание

Вопрос об *участи*, ожидающей игроков при тех или иных условиях игры и связанные с этим вопросы о так называемой *безобидности* игры были первыми, которыми занимались творцы теории вероятностей. При разработке этих вопросов пришлось тотчас внести новое понятие, определяемое словами *математическое ожидание*.

Математическое ожидание того, кто имеет вероятность p получить сумму s, измеряется произведением $p \cdot s$.

Если эта ожидаемая сумма заранее известна, то определение математического ожидания сводится, в сущности, к отысканию вероятности. Не то бывает, когда условия игры или предприятия допускают возможность как выигрыша, так и проигрыша нескольких различных сумм, смотря по тем или иным случайным обстоятельствам. Если же события, вероятности которых соответственно суть $p_1, p_2, p_3 \ldots p_n$, дают право на осуществление различных сумм соответственных прибылей или убытков $s_1, s_2, s_3 \ldots s_n$, то математическое ожидание определяется как сумма произведений

$$p_1 s_1 + p_2 s_2 + p_3 s_3 + \ldots + p_n s_n.$$

Отсюда видно, что математическое ожидание делается известным, если вычислить все различные возможные случаи. Но иногда удобнее искать его непосредственно, не вычисляя всех составляющих его членов.

Задача 82-я.
Математическое ожидание выигрыша в лотерею

Выпущено 1 200 000 билетов с 2928 выигрышами, размеры которых определены следующим образом:

1	выигрыш	в	100 000	руб.;
1	»	»	50 000	»
1	»	»	25 000	»
10	выигрышей	»	10 000	»
15	»	»	5000	»
100	»	»	1000	»
200	»	»	500	»
2600	»	»	250	»

Определить математическое ожидание выигрыша для владельца одного билета.

Решение

Величина выигрыша владельца одного билета рассматриваемой лотереи могла иметь значения 100 000 р., 50 000 р., 25 000 р., 10 000 р., 5000 р., 1000 р., 500 р., 250 р. и 0, а вероятность событий, при коих величина выигрыша получала указанные значения, на основании приведенного выше распределения выигрышных сумм, определится следующими дробями:

$$\frac{1}{1\,200\,000}, \frac{1}{1200\,000}, \frac{1}{1\,200\,000}, \frac{10}{1\,200\,000}, \frac{15}{1\,200\,000}, \frac{100}{1\,200\,0\,00},$$

$$\frac{200}{1\,200\,000}, \frac{2600}{1\,200\,000}, \frac{1\,200\,000-2928}{1\,200\,000}=\frac{1\,197\,072}{1\,200\,000}$$

Умножая каждую вероятность на соответствующую сумму и складывая все, найдем, что математическое ожидание выигрыша было, следовательно, равно

$$\frac{100\,000}{1\,200\,000}+\frac{50\,000}{1\,200\,000}+\frac{25\,000}{1\,200\,000}+\frac{10\ \ 10\,000}{1\,200\,000}+\frac{15\ \ 5000}{1\,200\,000}+\frac{100\cdot 1000}{1\,200\,0\,00}+\frac{200\ \ 5\,00}{1\,200\,000}+\frac{250\ \ 2600}{1\,200\,000}+$$

$$+\frac{0\ \ 1\,197\,072}{24}=\frac{1}{12}+\frac{1}{24}+\frac{1}{48}+\frac{1}{12}+\frac{1}{16}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}+\frac{1}{24}+0=1.$$

Условие безобидности игр

Возьмем какую-либо игру, состоящую из ряда партий, из которых каждая кончается выигрышем или проигрышем одного из двух игроков.

Предположим, для общности рассуждения, что математическое ожидание выигрыша или проигрыша для игрока изменяется от одной партии к другой. Допустим также при этом, что математическое ожидание выигрыша (или проигрыша) не может быть величиной бесконечно малой, т.е. оно остается все время не меньше некоторой конечной величины, отличной от нуля. С другой стороны, допустим, что математическое ожидание квадрата выигрыша не может быть бесконечно большим. При этих условиях можно доказать, что *если математическое ожидание выигрыша для одного из игроков есть величина положительная, то с вероятностью, сколько угодно близкой к достоверности, можно рассчитывать, что при достаточно большом числе партий выигрыш его превзойдет всякую наперед заданную величину.*

На этой теореме основывается понятие о *безобидности* игр. Пусть два лица A и B предприняли некоторую игру, состоящую из ряда отдельных партий, из которых каждая кончается выигрышем или проигрышем одного из них. Составим математическое ожидание выигрыша игрока A. Если эта величина окажется положительной, то на основании предшествующей теоремы можно с вероятностью, как угодно близкой к достоверности (к единице), рассчитывать, что при достаточно большом числе партий выигрыш A превзойдет всякую величину, наперед заданную.

Если, наоборот, математическое ожидание выигрыша для игрока A окажется отрицательным, то математическое ожидание выигрыша для игрока B будет положительно, и при достаточно большом числе партий можно с достоверностью рассчитывать, что выигрыш B будет столь велик, сколь угодно. На этом основании *безобидными играми называются такие игры, в которых математическое ожидание выигрыша для каждого игрока есть нуль.*

Понятие о безобидности применяется не только к собственно азартным играм, но и вообще ко всякого рода операциям, где уплата различных сумм или получение их обусловлены наступлением некоторых событий случайного характера; так, например, понятие о безобидности игр применяется к страховым операциям, где уплаты обеих сторон — страховщика и страхователя — обусловлены наступлением различных событий, связанных с жизнью человека.

Задача 83-я.
Пять из двадцати пяти

В мешке находится 10 белых и 15 черных шаров. Определить вероятность, что, взяв зараз оттуда 5 шаров, мы вытащим 2 белых и 3 черных.

Решение

Всего в мешке 25 шаров. Если берется сразу 5 шаров, то число *всех* равновозможных и несомненных случаев равно, очевидно, числу сочетаний из 25 элементов по 5, т.е.

$$C_{25}^5 = \frac{25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}.$$

Число всех равновозможных и несовместимых случаев, благоприятствующих появлению двух белых шаров, есть

$$C_{10}^2 = \frac{10 \cdot 9}{1 \cdot 2},$$

а число таких же случаев, благоприятных появлению трех черных, есть

$$C_{15}^3 = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13}{1 \cdot 2 \cdot 3}.$$

Эти последние могут комбинироваться каждое с каждым, т.е. числителем дроби, выражающей искомую вероятность ожидаемого события, надо взять произведение $C_{10}^2 C_{15}^3$. Знаменатель же искомой дроби будет

$$C_{25}^5.$$

Итак, для искомой вероятности имеем

$$\frac{C_{10}^2 C_{15}^3}{C_{25}^5} = \frac{\dfrac{10 \cdot 9 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3}}{\dfrac{25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21} = \frac{195}{506}.$$

Общий случай. *Вообще, если в мешке находится* ***p*** *белых и* ***q*** *черных шаров, то вероятность вытянуть за один раз* ***a*** *белых и* ***b*** *черных шаров равна дроби* $\frac{C_p^a C_p^a}{C_{p+q}^{a+b}}$.

Задача 84-я.
Генуэзская лотерея

Эта лотерея, до сих пор процветающая в Италии, в прежнее время имела также обширное распространение во Франции и во многих областях Германии. Она состоит из 90 номеров, и при каждом ее розыгрыше выходит по 5 номеров. По условию лотереи, можно ставить ту или иную сумму на любой из 90 номеров, или на любую совокупность двух, трех, четырех и наконец пяти номеров, что соответственно называется: *простая одиночка, амбо, терн, кватерн* и *квин.*

Если в числе вышедших номеров находится совокупность тех, на которые игрок ставил сумму, то администрация лотереи выдавала этому игроку условленную сумму, находящуюся в определенном отношении к величине ставки. Это отношение равно:

для простой одиночки		15
»	амбо	270
»	терна	5 500
»	кватерна	75 000
»	квина	1 000 000

После этих предварительных пояснений задачу о генуэзской лотерее мы можем формулировать так:

В сосуде содержится 90 билетов с номерами 1, 2, 3, 4 ...... 89, 90. Вынимают сразу или последовательно 5 билетов, причем в случае последовательного изъятия ни один из вынутых билетов не возвращают обратно в сосуд и новых туда также не подкладывают. Определить вероятность выигрыша на заранее выбранные: простую одиночку, на амбо, терн, кватерн и, наконец, на квин.

Решение

Читатель, решивший общий случай предыдущей задачи, тотчас сообразит, что настоящая задача есть частный случай ее.

Число всех равновозможных случаев в задаче равно, очевидно, числу сочетаний из 90 элементов по пяти, т.е.

$$C_{90}^{5}=\frac{90\cdot 89\cdot 88\cdot 87\cdot 86}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}.$$

Теперь остается только определить число случаев, благоприятных соответственно появлению наперед указанных простых одиночек или амбо, или терна, или кватерна, или квина.

1) Для случая простой наперед взятой одиночки задача сводится к такой: в сосуде находится 1 белый и 89 черных шаров. Вытаскивается сразу 5 шаров. Какова вероятность, что при этом окажется один белый и 4 черных шара? Число всех равновозможных случаев, как знаем, равно C_{90}^{5}.

Число таких же случаев, благоприятных появлению 1 белого и 4 черных шаров, будет, по предыдущей задаче, $C_{89}^{4}\cdot C_{1}^{1}$, или просто C_{89}^{4}, так как $C_{1}^{1}=1$.

2) Для амбо наша задача обращается в такую: в сосуде 2 белых и 88 черных шаров; определить вероятность, что, взяв сразу 5 шаров, мы вытянем эти 2 белых шара и 3 черных.

Число всех равновозможных случаев есть C_{90}^5. Число же благоприятных появлению события равновозможных случаев есть, по предыдущему, $C_{88}^3 \cdot C_2^2$, или просто C_{88}^3, так как $C_2^2=1$.

Итак, вероятность получения наперед взятого амбо выражается дробью

$$\frac{C_{88}^3}{C_{90}^5}.$$

Подобным же образом для математической вероятности терн, кватерн и квин найдем соответственно дроби:

$$\frac{C_{87}^2}{C_{90}^5}, \frac{C_{86}^1}{C_{90}^5} \text{ и } \frac{1}{C_{90}^5}$$

Вычисляя на самом деле, получаем, что вероятность появления наперед взятой простой одиночки равна:

$$\frac{C_{89}^4}{C_{90}^5} = \frac{89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86} = \frac{1}{18};$$

амбо:

$$\frac{C_{88}^3}{C_{90}^5} = \frac{88 \cdot 87 \cdot 86 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86} = \frac{2}{801};$$

терн:

$$\frac{C_{87}^2}{C_{90}^5} = \frac{87 \cdot 86 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86} = \frac{1}{11748};$$

кватерн:

$$\frac{C_{86}^1}{C_{90}^5} = \frac{86 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86} = \frac{1}{511038};$$

квин:

$$\frac{1}{C_{90}^5} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86} = \frac{1}{43949268};$$

Допустим далее, что ставка игрока в эту лотерею равна M, тогда математическое ожидание его прибыли от участия в лотерее соответственно выражается числами (см. выше: условия лотереи и выдача администрации):

в случае простой одиночки . . . $\left(\frac{15}{18}-1\right)M=-\frac{1}{6}M$

» амбо . . . . . . $\left(\frac{270\cdot 2}{801}-1\right)M=-\frac{29}{89}M$

» терна . . . . . . $\left(\frac{5500}{11748}-1\right)M=-\frac{1562}{2937}M$

и т. д.

Математическое ожидание выражается отрицательным числом. Значит, эта лотерея представляет не безобидную для публики игру. Она приносит пользу только ее устроителям.

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНОЕ ИЗДАНИЕ
Серия «Твой кругозор»

***Игнатьев** Емельян Игнатьевич*

В царстве смекалки,
или Арифметика для всех

Книга I

ДЛЯ СТАРШЕГО ШКОЛЬНОГО ВОЗРАСТА

Зав. редакцией *В. И. Егудин*
Редактор *Е. Г. Таран*
Художественный редактор *Т. В. Глушкова*
Компьютерная верстка *Э. Н. Малания*
Технический редактор *С. Н. Терехова*
Корректоры *В. М. Фрадкина, Е. В. Казакова*

Налоговая льгота — Общероссийский классификатор продукции ОК 005-93—953000. Изд. лиц. Серия ИД № 05824 от 12.09.01. Подписано в печать 19.12.07. Формат 70×100 $^1/_{16}$. Бумага офсетная. Гарнитура Ньютон. Печать офсетная. Уч.-изд. л. 7,45. Тираж 10 000 экз. Заказ № 25707.

Открытое акционерное общество «Издательство «Просвещение». 127521, Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, д. 41.

Отпечатано в ОАО «Саратовский полиграфкомбинат». 410004, г. Саратов, ул. Чернышевского, д. 59. www.sarpk.ru

ТВОЙ КРУГОЗОР

Е. И. Игнатьев

В царстве смекалки

Книга I

ЭТО НОВОЕ ИЗДАНИЕ ЗНАМЕНИТОГО ТРЕХТОМНИКА ЗАНИМАТЕЛЬНЫХ ЗАДАЧ ВЫХОДИТ В ГОД ЕГО СТОЛЕТНЕГО ЮБИЛЕЯ. КАК И ВЕК НАЗАД, ОН ДОСТАВИТ СВОИМ ЧИТАТЕЛЯМ МНОГО ПРИЯТНЫХ МИНУТ, ПОМОЖЕТ РАЗВИТЬ ЛОГИЧЕСКОЕ МЫШЛЕНИЕ И СМЕКАЛКУ.

«Твой кругозор» — это проверенные временем традиции научно-познавательной литературы для детей. В серию вошли лучшие книги по гуманитарным и естественно-научным предметам, написанные российскими и зарубежными авторами. Книги серии позволят вам расширить кругозор, повысить свой образовательный уровень и стать знатоками в различных областях знаний.

МАТЕМАТИКА РУССКИЙ ЯЗЫК ФИЗИКА ГЕОГРАФИЯ ИСТОРИЯ

ISBN 978-5-09-015927-2

9 785090 159272