Кнут Сюдсетер ▪ Арне Стрём ▪ Питер Берк

Справочник по математике для экономистов

БИБЛИОТЕКА "ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ШКОЛЫ"

Кнут Сюдсетер ▪ Арне Стрём ▪ Питер Берк

Справочник по математике для экономистов

Knut Sydsæter ▪ Arne Strøm ▪ Peter Berck

Matematisk formelsamling for økonomer

UNIVERSITETSFORLAGET

Кнут Сюдсетер ▪ Арне Стрём ▪ Питер Берк

Справочник по математике для экономистов

Перевод с норвежского
под редакцией Е. Ю. Смирновой

"ЭКОНОМИЧЕСКАЯ ШКОЛА"
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ЭКОНОМИКИ И ФИНАНСОВ
ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ
Санкт-Петербург 2000

ББК 22.1я2:
65.050я2
УДК 330.115(03)
С 98

БИБЛИОТЕКА «ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ШКОЛЫ»

Выпуск 30

Издатели:
ИНСТИТУТ «ЭКОНОМИЧЕСКАЯ ШКОЛА». САНКТ-ПЕТЕРБУРГ
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ЭКОНОМИКИ И ФИНАНСОВ
ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ). МОСКВА

Перевод с норвежского

Г. Н. ЗАХАРОВОЙ

Издание подготовлено при поддержке фонда MUNIN (Marketing Unit for Norwegian International Non-fiction)

ISBN 82-00-12797-4
ISBN 5-900428-56-7

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ К ТРЕТЬЕМУ ИЗДАНИЮ

Этот сборник формул появился в ответ на потребность практических экономистов и теоретиков в приемлемом справочном издании, содержащем точные формулировки математических, статистических и чисто экономических результатов.

Такие списки формул для экономистов имеют давнюю традицию в Норвегии. Первую подборку еще в 1954 г. сделал Б. Тальберг, она была затем расширена им и К. Сюдсетером (при участии О. Й. Мёркведа): Matematisk Formelsamling, 2. utg., I.S.Undervisningslitteratur (1985).

Первое издание нашего справочника вышло в 1991 г. благодаря участию Халвора Мелюма, который помог нам значительно улучшить книгу.

К работе над третьим, расширенным и улучшенным изданием присоединился третий соавтор — Арне Стрём. Справочник становится образцовым пособием для экономистов, использующих математику и статистические методы. Он издан на английском, итальянском, испанском, португальском и японском языках. Готовятся к выходу из печати переводы на русский и китайский.

По сравнению с предыдущими изданиями справочника теперь в нем более 250 новых формул. Многие из них давались ранее только в общей формулировке, теперь же конкретизированы для облегчения восприятия читателем. Третье издание также отличается большим количеством иллюстраций, основная часть которых подготовлена к печати Арне Михаэлсеном.

Авторы высоко оценивают значительное участие в работе над этой книгой многих помощников в Норвегии, а также иностранцев. Мы благодарим за ценные предложения, использованные в работе над третьим изданием и способствовавшие его улучшению и расширению, а также за указание на ошибки и неточности Г. Ашейма, Т. Акрама, Е. Бьёрна, Т. Эллингсена, П. Френгера, И. Фрихагена, Х. Гольдштейна, Ф. Грюлика, П. Хаммонда, Дж. Хелдала, А. Хилланда, Г. Джаджа, Д. Лунда, М. Мачину, К. Муне, Г. Нордена, А. Родсета, Т. Шведера, А. Сейерстада, Л. Саймона и Б. Оксендала.

За плодотворное участие в подготовке третьего издания мы хотим отдельно поблагодарить Олава Бьерхолта, Дженса-Хенрика Мадсена и переводчика на японский язык Тан-но Таданобу. В любом справочнике опечатки особенно вредны, поэтому мы надеемся, что наши читатели, обнаружившие в книге никем не выявленные ранее ошибки, укажут на них авторам для исправления при переиздании.

Большое спасибо всем, кто помогал нам в работе.

Осло и Беркли
Ноябрь 1998 г.

Кнут Сюдсетер, Арне Стрём, Питер Берк

Глава 1

ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ. ОТНОШЕНИЯ. ФУНКЦИИ

1.1 $x \in A, \quad x \notin B$

Элемент x принадлежит множеству A, но x не принадлежит множеству B.

1.2 $A = \{$элемент : свойства$\}$

Обозначение множества всех элементов, имеющих указанные свойства.

1.3 К паре утверждений P и Q часто применяют следующие логические операции:

- $P \wedge Q$ означает «P и Q (верны одновременно)»;
- $P \vee Q$ означает «P или Q»;
- $P \Rightarrow Q$ означает «если P, то Q» (или «P верно, только если верно Q», или «из P следует Q»);
- $P \Leftarrow Q$ означает «если Q, то P»;
- $P \Leftrightarrow Q$ означает «P верно тогда и только тогда, когда верно Q»;
- $\neg P$ означает «не P».

Обозначения логических операций. (Заметим, что «P или Q» означает «верно либо P, либо Q, либо оба этих утверждения».)

1.4

P	Q	$\neg P$	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \Rightarrow Q$	$P \Leftrightarrow Q$
T	T	F	T	T	T	T
T	F	F	F	T	F	F
F	T	T	F	T	T	F
F	F	T	F	F	T	T

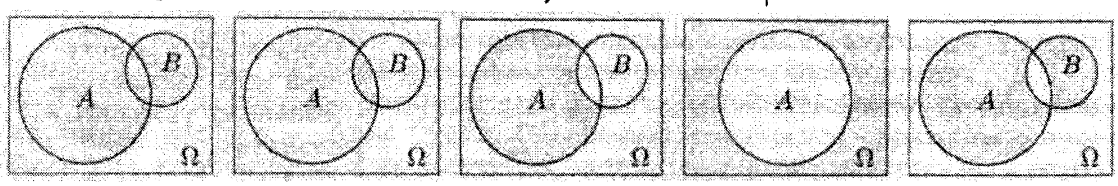
Таблицы истинности результатов логических операций. Здесь буквой T обозначена истина (true), а буквой F — ложь (false).

1.5

- P является *достаточным условием для* Q: $P \Rightarrow Q$;
- Q является *необходимым условием для* P: $P \Rightarrow Q$;
- P является *необходимым и достаточным условием для* Q: $P \Leftrightarrow Q$.

Часто применяемые термины.

1.6	$A \subset B \iff$ Каждый элемент множества A также является элементом множества B.	A является *подмножеством* множества B.
1.7	$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$ (*объединение (сложение)* множеств A и B) $A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$ (*пересечение* множеств A и B) $A \setminus B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$ (*разность* множеств A и B) $A^c = \{x : x \notin A\}$ (*дополнение* подмножества A до исходного множества) $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ (*симметричная разность* множеств A и B)	Основные операции над множествами. Пусть Ω — исходное множество, $A^c = \Omega \setminus A$. Для обозначения дополнения кроме записи A^c также используют символ $\complement A$.



$A \cup B$ $\quad$ $A \cap B$ $\quad$ $A \setminus B$ $\quad$ A^c $\quad$ $A \triangle B$

1.8	$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$	Важные тождества теории множеств.
1.9	$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n =$ $= \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) : a_i \in A_i$ для $i = 1, 2, \ldots, n\}$	*Декартово произведение* множеств A_1, A_2, ..., A_n.
1.10	$R \subset A \times B$	Любое подмножество R декартова произведения множеств $A \times B$ называется *отношением* A и B.
1.11	$xRy \iff (x, y) \in R$ $x \not R y \iff (x, y) \notin R$	Другой способ обозначения отношения и его отрицания. Говорят, что элемент x находится в отношении R к элементу y, если $(x, y) \in R$.

1.12

- $\operatorname{dom}(R) =$
  $= \{a \in A : (a, b) \in R$ для некоторых b из $B\}$
  $= \{a \in A : aRb$ для некоторых b из $B\}$
- $\operatorname{range}(R) =$
  $= \{b \in B : (a, b) \in R$ для некоторых a из $A\}$
  $= \{b \in B : aRb$ для некоторых a из $A\}$

Область определения (домейн) и ***область значений (образ)*** отношения.

1.13

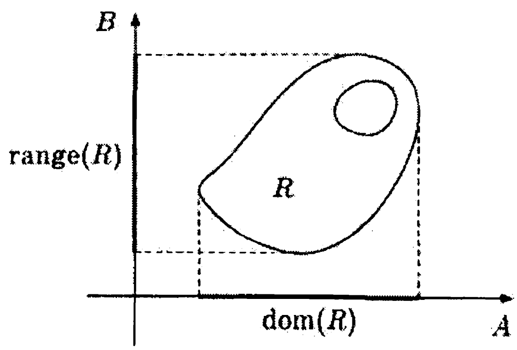


Иллюстрация понятий «область определения» и «область значений» отношения R в соответствии с определением (1.12). Точки серого множества образуют на диаграмме *график* отношения.

1.14 $R^{-1} = \{(b, a) \in B \times A : (a, b) \in R\}$

Обратное отношение R из A в B. R^{-1} является отношением из B в A.

1.15 Пусть R — отношение из A в B и S — отношение из B в C. Определим *композицию* $S \circ R$ отношений R и S как множество всех элементов (a, c) декартова произведения $A \times C$, таких, что найдется b из B такой, что aRb и bSc. $S \circ R$ является отношением из A в C.

$S \circ R$ является композицией (произведением) отношений R и S.

1.16 Отношение R из A в A называется *бинарным отношением* на множестве A. Бинарное отношение R на множестве A называется

- *рефлексивным*, если aRa для любого a из A;
- *иррефлексивным*, если $a \not R a$ для любого a из A;
- *полным*, если aRb или bRa для любых a и b из A, таких, что $a \neq b$;
- *транзитивным*, если aRb и bRc, то aRc;
- *симметричным*, если aRb, то bRa;
- *антисимметричным*, если aRb и bRa, то $a = b$;
- *асимметричным*, если aRb, то $b \not R a$.

Разновидности бинарных отношений.

Бинарное отношение R на множестве A называется отношением

- *предпорядка* (или *квазипорядка*), если оно рефлексивно и транзитивно;
- *слабого порядка*, если оно транзитивно и полно;
- 1.17 *частичного порядка*, если оно рефлексивно, транзитивно и антисимметрично;
- *линейного* (или *абсолютного*) *порядка*, если оно рефлексивно, транзитивно, антисимметрично и полно;
- *эквивалентности*, если оно рефлексивно, транзитивно и симметрично.

Отношения порядка. (Данная терминология не является универсальной.) Заметим, что отношение линейного порядка — то же самое, что и полное отношение частичного порядка.

Для обозначения отношений порядка часто используют такие символы, как $\preccurlyeq$, $\leq$, $\ll$ и т. п. Тогда обратные отношения обозначаются, соответственно, символами $\succcurlyeq$, $\geq$, $\gg$ и т. п.

- Отношение $=$ на множестве вещественных чисел является отношением эквивалентности.
- Отношение $\leq$ на множестве вещественных чисел является отношением линейного порядка.
- Отношение $<$ на множестве вещественных чисел является отношением слабого порядка, которое иррефлексивно и асимметрично.
- Отношение $\subset$ между подмножествами одного и того же множества является отношением частичного порядка.
- 1.18 Отношение $\mathbf{x} \preceq \mathbf{y}$ ($\mathbf{y}$ *не хуже, чем* $\mathbf{x}$) на множестве векторов (наборов) потребления обычно считают полным отношением предпорядка.
- Отношение $\mathbf{x} \prec \mathbf{y}$ ($\mathbf{y}$ *(строго) более предпочтителен, чем* $\mathbf{x}$) на множестве векторов потребления обычно считают отношением иррефлексивным и транзитивным (из чего следует его асимметричность).
- Отношение безразличия $\mathbf{x} \sim \mathbf{y}$ ($\mathbf{x}$ *не хуже, но и не лучше, чем* $\mathbf{y}$) на множестве векторов потребления обычно наделяют свойствами отношения эквивалентности.

Примеры бинарных отношений. Отношения предпочтения $\mathbf{x} \preceq \mathbf{y}$, $\mathbf{x} \prec \mathbf{y}$ и $\mathbf{x} \sim \mathbf{y}$ рассмотрены далее, в главе 26.

1.19 Пусть $\preccurlyeq$ — отношение предпорядка на множестве A. Элемент g из A называется *наибольшим элементом* в смысле отношения $\preccurlyeq$ на A, если $x \preccurlyeq g$ для любого x из A. Элемент m из A называется *максимальным элементом* в смысле отношения $\preccurlyeq$ на A, если $x \in A$ и из $m \preccurlyeq x$ следует $x \preccurlyeq m$. *Наименьший элемент* и *минимальный элемент* в смысле отношения $\preccurlyeq$ являются, соответственно, наибольшим и наименьшим элементами в смысле отношения $\succcurlyeq$, обратного к $\preccurlyeq$.

Определения наибольшего, максимального, наименьшего и минимального элементов множества в смысле заданного на нем отношения предпорядка.

1.20 Если $\preccurlyeq$ есть отношение предпорядка на A и M является подмножеством A, то элемент b из A называется *верхней границей* подмножества M (в смысле отношения $\preccurlyeq$), если $x \preccurlyeq b$ для любого x из M. *Нижней границей* для подмножества M является такой элемент a из A, что $a \preccurlyeq x$ для всех x из M.

Определение верхней и нижней границ.

1.21 Если $\preccurlyeq$ есть отношение предпорядка на непустом множестве A и если всякое его подмножество M, на котором задано отношение линейного порядка, имеет верхнюю границу на множестве A, то A содержит максимальный элемент в смысле отношения $\preccurlyeq$.

Лемма Цорна. (Формулируется обычно для частично упорядоченного множества, но верна и для предупорядоченного.)

1.22 Отношение R из A в B называется *функцией* или *отображением*, если для каждого a из A найдется соответствующий ему образ b из B aRb, причем единственный. При обозначении функции буквой f пишут $f(a) = b$ вместо afb и *график* функции f определяют как

$$\mathrm{graph}(f) = \{(a, b) \in A \times B : f(a) = b\}.$$

Определение функции и ее графика.

1.23 Функция f из A в B ($f : A \to B$) называется

- *инъекцией* (или *отображением в*), если из $f(x) = f(y)$ следует $x = y$;
- *сюръекцией* (или *отображением на*), если $\mathrm{range}(f) = B$;
- *биекцией* (*биективной функцией*), если является одновременно и инъекцией, и сюръекцией.

Важные понятия, относящиеся к функциям.

1.24 Если функция $f : A \to B$ биективна (т. е. является взаимно однозначным отображением на множество B), то она имеет *обратную функцию* $g : B \to A$, определяемую как $g(f(u)) = u$ для всех u из A.

Характеристика обратных функций. Для обозначения обратной функции через исходную f часто используют запись f^{-1}.

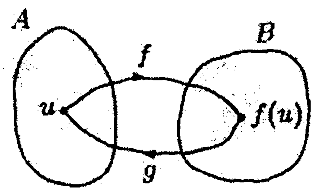
1.25 

Иллюстрация понятия обратной функции.

1.26 Если f — отображение (функция) из A в B и $C \subset A$, $D \subset B$, тогда используется обозначение

- $f(C) = \{f(x) : x \in C\}$
- $f^{-1}(D) = \{x \in A : f(x) \in D\}$

$f(C)$ называется *образом* множества A при отображении f, а $f^{-1}(D)$ называется *прообразом* множества D.

1.27 Если f — отображение из A в B и $S \subset A$, $T \subset A$, $U \subset B$, $V \subset B$, то

- $f(S \cup T) = f(S) \cup f(T)$
- $f(S \cap T) \subset f(S) \cap f(T)$
- $f^{-1}(U \cup V) = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)$
- $f^{-1}(U \cap V) = f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V)$
- $f^{-1}(U \setminus V) = f^{-1}(U) \setminus f^{-1}(V)$

Важные факты. (Знак включения $\subset$ на знак равенства $=$ заменять нельзя.)

1.28 Пусть $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ — множество всех натуральных чисел, а $\mathbb{N}_n = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$. Тогда:

- множество A является *конечным*, если оно пустое или если найдется взаимно однозначное отображение A на $\mathbb{N}_n$ для некоторого натурального числа n;
- множество A является *бесконечным счетным*, если найдется взаимно однозначное отображение A на $\mathbb{N}$.

Конечные множества и бесконечно счетные объединяют часто под названием *счетные*. Множество рациональных чисел — бесконечное счетное, а множество вещественных чисел счетным не является.

ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

См. [33], [16] и [38].

Глава 2

УРАВНЕНИЯ. ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

2.1 $ax^2 + bx + c = 0 \iff x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Общая формула корней *квадратного* уравнения. Оба корня вещественны при условии $b^2 \geq 4ac$ (если все коэффициенты уравнения a, b и c вещественны).

2.2 Если x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2 + px + q = 0$, то

$$x_1 + x_2 = -p, \qquad x_1 x_2 = q$$

Правило Виета.

2.3 $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$

Общий вид *кубического* уравнения.

2.4 $x^3 + px + q = 0$

Формулу (2.3) можно привести к виду (2.4), если вместо x в (2.3) подставить $x - b/3a$.

2.5 $x^3 + px + q = 0$, где $\Delta = 4p^3 + 27q^2$ имеет

- три разных вещественных корня, если $\Delta < 0$;
- три вещественных корня, по крайней мере два из которых одинаковы, если $\Delta = 0$;
- один вещественный корень и два комплексных, если $\Delta > 0$.

Классификация случаев разрешимости уравнения (2.4) (если коэффициенты p и q вещественны).

2.6 Решениями уравнения $x^3 + px + q = 0$ являются $x_1 = u + v$, $x_2 = \omega u + \omega^2 v$ и $x_3 = \omega^2 u + \omega v$, где $\omega = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3}$ и

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4p^3 + 27q^2}{27}}}$$

$$v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4p^3 + 27q^2}{27}}}$$

Формулы Кардано для корней кубического уравнения. i является мнимой единицей (см. (2.72)), а ω есть комплексный корень третьей степени из 1 (см. (2.85)). (Не пытайтесь применить эту формулу без крайней необходимости!)

2.7 Если x_1, x_2 и x_3 — корни уравнения $x^3 + px^2 + qx + r = 0$, то

$$x_1 + x_2 + x_3 = -p$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = q$$

$$x_1x_2x_3 = -r$$

Полезные соотношения.

2.8 $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$

Многочлен (полином) степени n. ($a_n \neq 0$.)

2.9 Для многочлена $P(x)$ вида (2.8) существуют константы $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (вещественные или комплексные), такие, что

$$P(x) = a_n(x - x_1)\cdots(x - x_n)$$

Основная теорема алгебры. $x_1, \ldots, x_n$ называются *нулями* многочлена $P(x)$ и *корнями* уравнения $P(x) = 0$.

2.10
$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n = \sum_{i<j} x_ix_j = \frac{a_{n-2}}{a_n}$$

$$x_1x_2\cdots x_n = (-1)^n\frac{a_0}{a_n}$$

Соотношения между корнями и коэффициентами уравнения $P(x) = 0$, где $P(x)$ определен в (2.8). (Обобщает формулы (2.2) и (2.7).)

2.11 Если все коэффициенты $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ уравнения (2.8) целые, то его вещественными корнями могут быть только те несократимые дроби вида p/q с целым числителем p и знаменателем q, у которых p является делителем числа a_0, а q — делитель числа a_n.

Вещественные нули многочлена.

2.12 Пусть k — число перемен знаков в ряду коэффициентов a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0 многочлена (2.8). Число положительных вещественных корней уравнения $P(x) = 0$, включая кратные (равные друг другу) корни, равно k или k минус положительное четное число. Если $k = 1$, то уравнение имеет единственное положительное вещественное решение.

Правило знаков Декарта.

2.13 Графиком уравнения

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

является

- эллипс, единственная точка или пустое множество, если $4AC > B^2$;
- парабола, прямая, две параллельные прямые или пустое множество, если $4AC = B^2$;
- гипербола или две пересекающиеся прямые, если $4AC < B^2$.

Классификация *конических сечений.*

2.14 $x = x' \cos\theta - y' \sin\theta, \quad y = x' \sin\theta + y' \cos\theta,$ где $\mathrm{ctg} 2\theta = (A - C)/B$

Замена переменных приводит к записи уравнения (2.13) в квадратичной форме относительно x' и y', где коэффициент при члене $x'y'$ равен 0.

2.15 $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

(Евклидово) *расстояние* между точками (x_1, y_1) и (x_2, y_2) на плоскости.

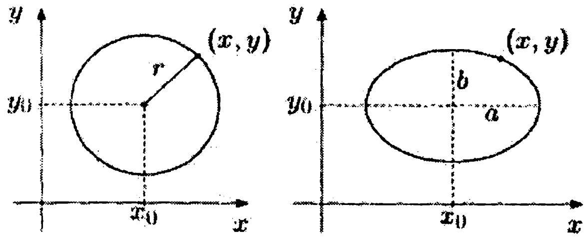
2.16 $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$

Окружность с центром в начале координат (x_0, y_0) и радиусом r.

2.17 $\dfrac{(x - x_0)^2}{a^2} + \dfrac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$

Эллипс с центром в начале координат (x_0, y_0), оси которого параллельны осям координат.

2.18



Графики уравнений (2.16) и (2.17).

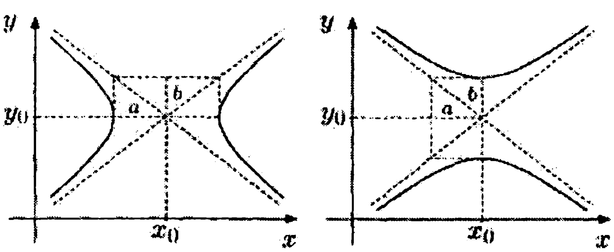
2.19 $$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=\pm 1$$

Гипербола **с центром в начале координат** (x_0, y_0)**, оси которой параллельны осям координат.**

2.20 **Асимптоты для (2.19):**
$$y-y_0=\pm\frac{b}{a}(x-x_0)$$

Формулы асимптот гипербол, заданных в (2.19).

2.21



Графики заданных в (2.19) гипербол для случаев + и − соответственно с асимптотами, заданными формулой (2.20).

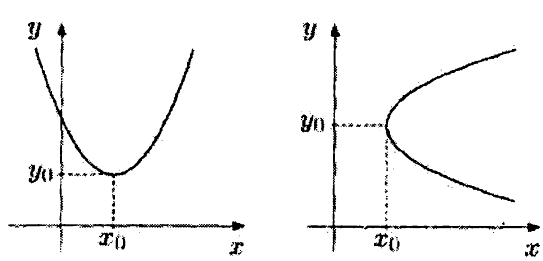
2.22 $$y-y_0=a(x-x_0)^2, \quad a\neq 0$$

Парабола **с вершиной в начале координат** (x_0, y_0)**, ось которой параллельна оси ординат** y**.**

2.23 $$x-x_0=a(y-y_0)^2, \quad a\neq 0$$

Парабола **с вершиной в начале координат** (x_0, y_0)**, ось которой параллельна оси абсцисс** x**.**

2.24

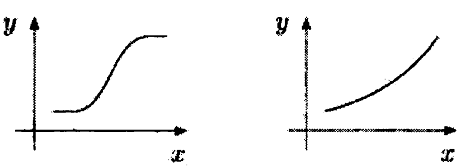


Графики парабол, заданных в (2.22) и (2.23) при условии $a > 0$**.**

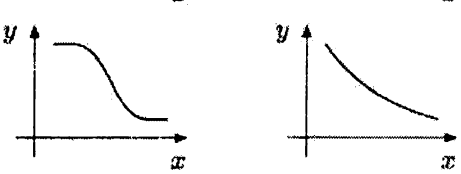
Функция f является

- ***возрастающей***, **если**
  $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2)$;
- ***строго возрастающей***, **если**
  $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$;
- ***убывающей***, **если**
  $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \ge f(x_2)$;
- ***строго убывающей***, **если**
  $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$;
- ***четной***, **если**
  2.25 $f(x) = f(-x)$ **для всех** x;
- ***нечетной***, **если**
  $f(x) = -f(-x)$ **для всех** x;
- ***симметричной относительно прямой*** $x = a$, **если**
  $f(a + x) = f(a - x)$ **для всех** x;
- ***симметричной относительно точки*** $(a, 0)$, **если**
  $f(a - x) = -f(a + x)$ **для всех** x;
- ***периодической*** **(с периодом** k**), если найдется число** $k > 0$**, такое что**
  $f(x + k) = f(x)$ **для всех** x.

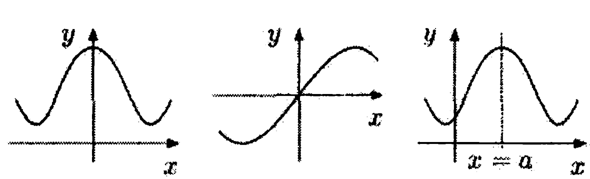
Свойства функций.

2.26 

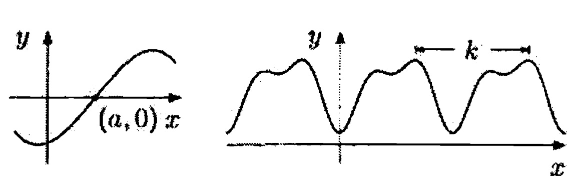
Графики возрастающей и строго возрастающей функций.

2.27 

Графики убывающей и строго убывающей функций.

2.28 

Графики функций: четной, нечетной и симметричной относительно вертикальной прямой $x = a$.

2.29 

Графики функций: симметричной относительно точки $(a, 0)$ **и периодической с периодом** k.

2.30

$y = ax + b$ является *наклонной асимптотой* для кривой $y = f(x)$, если

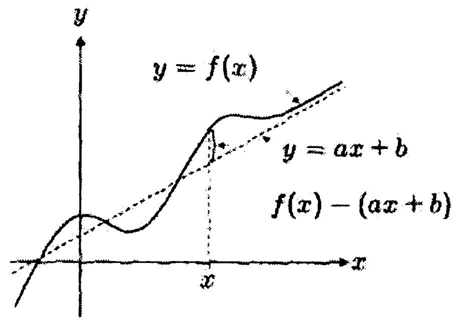
$$\lim_{x \to \infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$$

или

$$\lim_{x \to -\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0.$$

Определение наклонной (невертикальной) асимптоты.

2.31



$y = ax + b$ является асимптотой для кривой $y = f(x)$.

2.32

Как найти асимптоту для кривой $y = f(x)$ при $x \to \infty$:

- Проверяем, существует ли предел $\lim\limits_{x \to \infty} (f(x)/x)$. Если его нет, то нет и асимптоты при $x \to \infty$.
- Если есть $\lim\limits_{x \to \infty} (f(x)/x) = a$, то ищем предел $\lim\limits_{x \to \infty} (f(x) - ax)$. Если этот предел не существует, то кривая не имеет асимптот при $x \to \infty$.
- Если имеется $\lim\limits_{x \to \infty} (f(x) - ax) = b$, то уравнение $y = ax + b$ задает *асимптоту* кривой $y = f(x)$ при $x \to \infty$.

Метод нахождения наклонных асимптот для кривой $y = f(x)$ при $x \to \infty$. Заменив здесь $x \to \infty$ на $x \to -\infty$, получим метод нахождения наклонных асимптот при $x \to -\infty$.

2.33

Для приближенного решения уравнения $f(x) = 0$, зададим правило уточнения ранее найденного корня x_n для $n = 1, 2, \ldots$, как

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Если начальное приближение x_0 расположено близко к истинному решению x^*, то последовательность $\{x_n\}$ обычно быстро к нему сходится.

Метод приближения Ньютона.

2.34

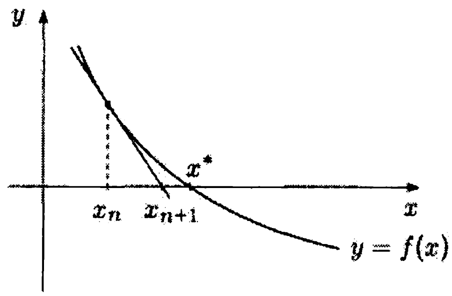


Иллюстрация метода приближения Ньютона (также известен как метод касательных).

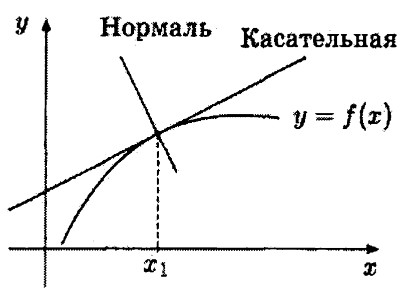
2.35 $y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1)$

Уравнение *касательной* к кривой $y = f(x)$ в точке $(x_1, f(x_1))$.

2.36 $y - f(x_1) = -\dfrac{1}{f'(x_1)}(x - x_1)$

Уравнение *нормали* к кривой $y = f(x)$ в точке $(x_1, f(x_1))$ (перпендикуляр к касательной, проходящий через точку касания).

2.37



Касательная и нормаль к кривой $y = f(x)$ в точке $(x_1, f(x_1))$.

2.38
(I) $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$ (II) $(a^r)^s = a^{rs}$
(III) $(ab)^r = a^r b^r$ (IV) $a^r / a^s = a^{r-s}$
(V) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^r = \dfrac{a^r}{b^r}$ (VI) $a^{-r} = \dfrac{1}{a^r}$

Правила действий над степенями. (Здесь показатели степени r и s — любые вещественные числа, а основания a и b — положительные вещественные числа.)

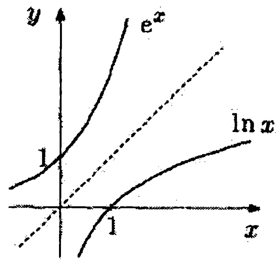
2.39 $e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = 2.718281828459\ldots$

Определение числа e. (Это частный случай формулы (8.20) при $x = 1$.)

2.40 $e^{\ln x} = x$

Определение натурального логарифма (по основанию e).

2.41



Графики экспоненциальной (показательной) $y = e^x$ и натуральной логарифмической функций $y = \ln x$.

2.42

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y; \quad \ln\frac{x}{y} = \ln x - \ln y$$

$$\ln x^p = p \ln x; \quad \ln\frac{1}{x} = -\ln x$$

Свойства натурального логарифма. (Для положительных чисел x и y.)

2.43 $a^{\log_a x} = x \quad (a > 0,\ a \neq 1)$

Определение *логарифма* по основанию a.

2.44

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}; \quad \log_a b \cdot \log_b a = 1$$

$$\log_e x = \ln x; \quad \log_{10} x = \log_{10} e \cdot \ln x$$

Логарифмы с различными основаниями.

2.45

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

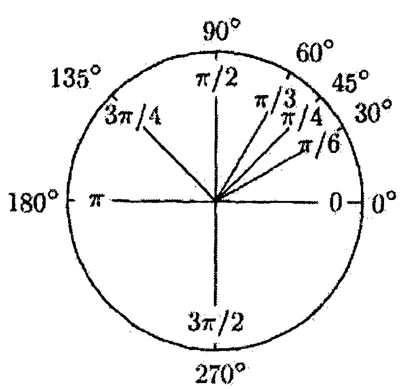
$$\log_a x^p = p \log_a x, \quad \log_a \frac{1}{x} = -\log_a x$$

Свойства логарифмов. (Для положительных чисел x и y.)

2.46 $1^\circ = \dfrac{\pi}{180}\ \text{rad}, \quad 1\ \text{rad} = \left(\dfrac{180}{\pi}\right)^\circ$

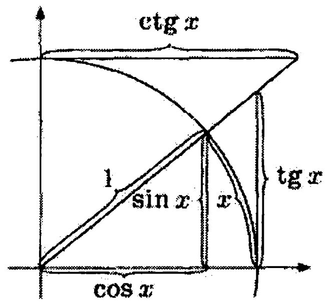
Связь между градусами и круговым измерением углов (в радианах — rad).

2.47



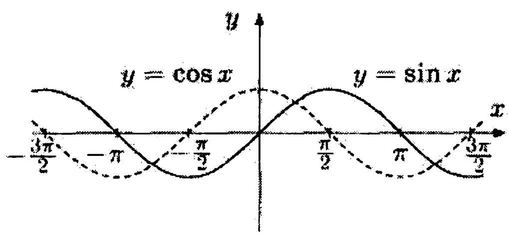
Соответствие между градусам и радианами.

2.48



Определение основных *тригонометрических* функций. x представляет собой длину дуги окружности, что соответствует радианному измерению угла.

2.49

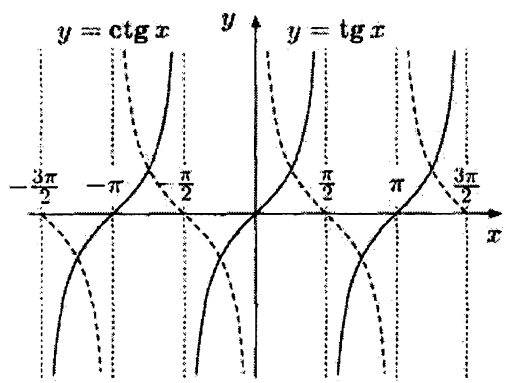


Графики уравнений $y = \sin x$ (—) и $y = \cos x$ (- - -). Функции sin и cos являются периодическими, их период равен 2π:
$\sin(x + 2\pi) = \sin x$,
$\cos(x + 2\pi) = \cos x$.

2.50 $$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$$

Определение функций *тангенс* и *котангенс*.

2.51



Графики уравнений $y = \operatorname{tg} x$ (—) и $y = \operatorname{ctg} x$ (- - -). Функции tg и ctg периодические с периодом π:
$\operatorname{tg}(x + \pi) = \operatorname{tg} x$,
$\operatorname{ctg}(x + \pi) = \operatorname{ctg} x$.

2.52

x	0	$\frac{\pi}{6} = 30°$	$\frac{\pi}{4} = 45°$	$\frac{\pi}{3} = 60°$	$\frac{\pi}{2} = 90°$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
$\cos x$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg} x$	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	*
$\operatorname{ctg} x$	*	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0

* Значение не определено.

Таблицы значений тригонометрических функций.

2.53

x	$\frac{3\pi}{4} = 135°$	$\pi = 180°$	$\frac{3\pi}{2} = 270°$	$2\pi = 360°$
$\sin x$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	0	-1	0
$\cos x$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	-1	0	1
$\operatorname{tg} x$	-1	0	*	0
$\operatorname{ctg} x$	-1	*	0	*

* Значение не определено.

Таблицы значений тригонометрических функций.

2.54 $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

2.55 $\operatorname{tg}^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x} - 1, \quad \operatorname{ctg}^2 x = \dfrac{1}{\sin^2 x} - 1$

2.56
$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$
$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

2.57
$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$
$$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$

2.58
$$\operatorname{tg}(x+y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$$
$$\operatorname{tg}(x-y) = \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{1 + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$$

Тригонометрические формулы. (Формулы разложения тригонометрических функций в ряд см. в главе 8.)

2.59
$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$$
$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

2.60 $\sin^2 \dfrac{x}{2} = \dfrac{1 - \cos x}{2}, \qquad \cos^2 \dfrac{x}{2} = \dfrac{1 + \cos x}{2}$

2.61
$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$
$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

2.62
$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$
$$\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

2.63

$$y = \arcsin x \Leftrightarrow x = \sin y, \ x \in [-1, 1], \ y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

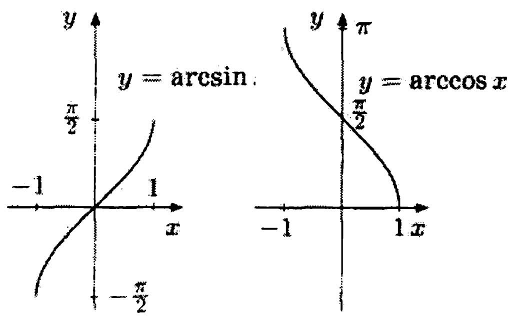
$$y = \arccos x \Leftrightarrow x = \cos y, \ x \in [-1, 1], \ y \in [0, \pi]$$

$$y = \mathrm{arctg}\, x \Leftrightarrow x = \mathrm{tg}\, y, \ x \in \mathbb{R}, \ y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$$

$$y = \mathrm{arcctg}\, x \Leftrightarrow x = \mathrm{ctg}\, y, \ x \in \mathbb{R}, \ y \in (0, \pi)$$

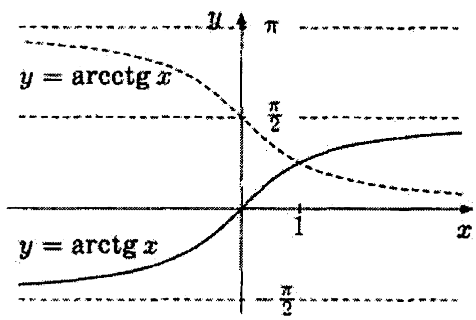
Определения обратных тригонометрических функций (аркусфункций).

2.64



Графики обратных тригонометрических функций $y = \arcsin x$ и $y = \arccos x$.

2.65



Графики обратных тригонометрических функций $y = \mathrm{arctg}\, x$ and $y = \mathrm{arcctg}\, x$.

2.66

$$\arcsin x = \sin^{-1} x, \quad \arccos x = \cos^{-1} x$$

$$\mathrm{arctg}\, x = \mathrm{tg}^{-1} x, \quad \mathrm{arcctg}\, x = \mathrm{ctg}^{-1} x$$

Другой способ обозначения обратных тригонометрических функций.

2.67

$$\arcsin(-x) = -\arcsin x$$

$$\arccos(-x) = \pi - \arccos x$$

$$\mathrm{arctg}(-x) = \mathrm{arctg}\, x$$

$$\mathrm{arcctg}(-x) = \pi - \mathrm{arcctg}\, x$$

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$$

$$\mathrm{arctg}\, x + \mathrm{arcctg}\, x = \frac{\pi}{2}$$

$$\mathrm{arctg}\, \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} - \mathrm{arctg}\, x, \quad x > 0$$

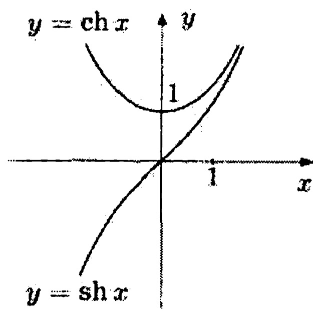
$$\mathrm{arctg}\, \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2} - \mathrm{arctg}\, x, \quad x < 0$$

Свойства обратных тригонометрических функций.

2.68 $\operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad \operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

Гиперболические синус и косинус.

2.69



Графики гиперболических функций $y = \operatorname{sh} x$ и $y = \operatorname{ch} x$.

2.70
$$\begin{aligned}
&\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1\\
&\operatorname{ch}(x+y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y\\
&\operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x\\
&\operatorname{sh}(x+y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y + \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y\\
&\operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x
\end{aligned}$$

Свойства гиперболических функций.

2.71
$$\begin{aligned}
&y = \operatorname{arsh} x \iff x = \operatorname{sh} y\\
&y = \operatorname{arch} x,\ x \ge 1 \iff x = \operatorname{ch} y,\ y \ge 0\\
&\operatorname{arsh} x = \ln(x + \sqrt{x^2+1}\,)\\
&\operatorname{arch} x = \ln(x + \sqrt{x^2-1}\,),\ x \ge 1
\end{aligned}$$

Определение обратных гиперболических функций.

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

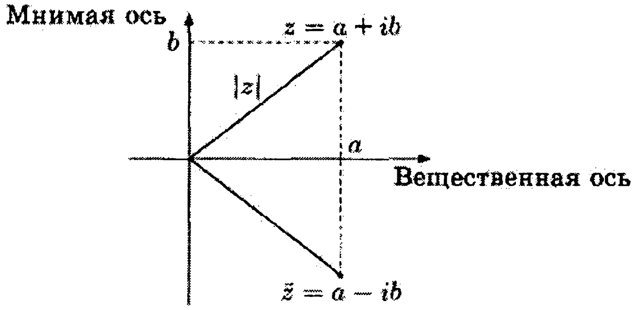
2.72 $z = a + ib, \quad \bar z = a - ib$

Сопряженные комплексные числа. a, $b \in \mathbb{R}$, а $i^2 = -1$. i называется *мнимой единицей*.

2.73 $|z| = \sqrt{a^2+b^2}, \quad \operatorname{Re}(z) = a, \quad \operatorname{Im}(z) = b$

$|z|$ называется *модулем* или *абсолютной величиной* комплексного числа $z = a + ib$. $\operatorname{Re}(z)$ и $\operatorname{Im}(z)$ называются соответственно *вещественной* и *мнимой частями* комплексного числа z.

2.74



Геометрическая интерпретация сопряженных комплексных чисел.

2.75

- $(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d)$
- $(a + ib) - (c + id) = (a - c) + i(b - d)$
- $(a + ib)(c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc)$
- $\dfrac{a + ib}{c + id} = \dfrac{1}{c^2 + d^2}((ac + bd) + i(bc - ad))$

Сложение, вычитание, умножение и деление комплексных чисел.

2.76

$|\bar{z}_1| = |z_1|$, $z_1\bar{z}_1 = |z_1|^2$, $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$,
$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$, $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$

Основные правила. Здесь числа z_1 и z_2 — комплексные.

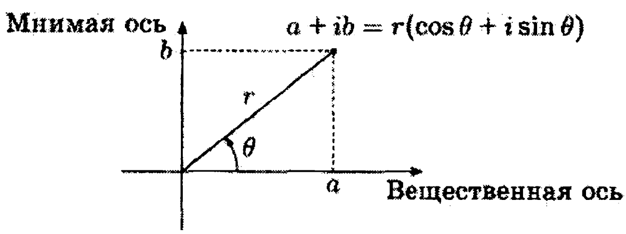
2.77

$z = a + ib = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$, где

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \cos\theta = \frac{a}{r}, \quad \sin\theta = \frac{b}{r}$$

Тригонометрическая или *полярная* форма комплексного числа. Угол θ называется *аргументом* комплексного числа z. См. (2.81) для $e^{i\theta}$.

2.78



Геометрическая интерпретация тригонометрической формы комплексного числа.

2.79

Если $z_k = r_k(\cos\theta_k + i\sin\theta_k)$, $k = 1, 2$, то

$$z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2))$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2))$$

Правила выполнения умножения и деления комплексных чисел в тригонометрической форме.

2.80

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

Формула Муавра, $n = 0, 1, \ldots$.

2.81

Если $z = x + iy$, то

$$e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y).$$

Комплексная показательная функция.

2.82	$e^{\pi i} = -1$	Замечательная формула.
2.83	$e^{\bar{z}} = \overline{e^{z}},\ e^{z+2\pi i} = e^{z},\ e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2},$ $e^{z_1-z_2} = e^{z_1}/e^{z_2}$	Свойства комплексной показательной функции.
2.84	$\cos z = \dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2},\quad \sin z = \dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$	*Формулы Эйлера*.
2.85	Если $a = r(\cos\theta + i\sin\theta) \neq 0$, то уравнение $z^n = a$ имеет ровно n корней вида $z_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\dfrac{\theta+2k\pi}{n} + i\sin\dfrac{\theta+2k\pi}{n}\right),$ $k = 0, 1, \ldots, n-1.$	*Корни степени* n, $n = 1, 2, \ldots$ из комплексного числа.

ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

Большинство приведенных здесь формул найдется в любом учебнике высшей алгебры, например [15] или [81]. Формулы (2.3)–(2.12) есть, например, в книге [85]. Комплексные числа см. в [15] или [83].

Глава 3

ПРЕДЕЛЫ. НЕПРЕРЫВНОСТЬ. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ (ПО ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ)

3.1 Число A называют *пределом* функции $f(x)$ в точке a,

$$\lim_{x\to a} f(x) = A \text{ или } f(x) \to A \text{ при } x \to a,$$

если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta > 0$, такое, что

$$|f(x) - A| < \varepsilon, \text{ если } x \in D_f \text{ и } 0 < |x - a| < \delta$$

Определение предела функции одной переменной. D_f есть область определения для f.

3.2 Если $\lim_{x\to a} f(x) = A$ и $\lim_{x\to a} g(x) = B$, то

- $\lim\limits_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = A \pm B$,
- $\lim\limits_{x\to a}(f(x) \cdot g(x)) = A \cdot B$;
- $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B}$ (если $B \neq 0$).

Свойства пределов.

3.3 Функция f *непрерывна* в точке $x = a$, если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$, т. е. если $a \in D_f$ и для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$, такое, что

$$|f(x) - A| < \varepsilon, \text{ если } x \in D_f \text{ и } |x - a| < \delta$$

Функция f *непрерывна на множестве* $S \subset D_f$, если f непрерывна в каждой точке этого множества S.

Определение непрерывности.

3.4 Если функции f и g непрерывны в точке a, то:

- $f \pm g$ и $f \cdot g$ непрерывны в точке a,
- f/g непрерывна в точке a если $g(a) \neq 0$.

Свойства непрерывных функций.

3.5 Если g непрерывна в точке a, а f непрерывна в образе этой точки $g(a)$, то композиция $f(g(x))$ непрерывна в точке a.

Непрерывность *сложной* функции.

3.6 На области своего определения непрерывны любые функции, получаемые из других непрерывных функций путем сложения, вычитания, умножения, деления и взятия сложной функции.

Полезный результат.

3.7 Функция f *равномерно непрерывна* на множестве S, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta > 0$ (зависящее от ε, но не от x и y), такое, что

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon \text{ если } x, y \in S \text{ и } |x - y| < \delta$$

Определение равномерной непрерывности.

3.8 Если f непрерывна на замкнутом ограниченном интервале I, то она на нем равномерно непрерывна.

Функции, непрерывные на отрезках, равномерно непрерывны на этих отрезках.

3.9 Если f непрерывна на отрезке I, содержащем точки a и b, и значение A находится между значениями функции $f(a)$ и $f(b)$ в этих точках, то найдется, по крайней мере, одна точка ξ между a и b, являющаяся прообразом этого значения $A = f(\xi)$.

Теорема (Коши) о промежуточном значении (непрерывной функции на отрезке).

3.10

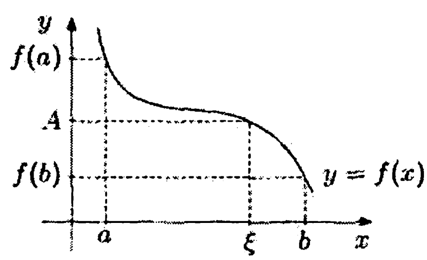


Иллюстрация теоремы о промежуточном значении.

3.11

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Определение *производной* (от) функции f в точке x. Если этот предел существует, то функция f называется *дифференцируемой* в точке x.

3.12 Производную $y = f(x)$ обозначают и иначе:

$$f'(x) = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx} = Df(x)$$

Другие способы обозначения производной.

3.13 $y = f(x) \pm g(x) \Rightarrow y' = f'(x) \pm g'(x)$

Правила действий с производными.

3.14 $y = f(x)g(x) \Rightarrow y' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

3.15 $y = \dfrac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow y' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$

Правила действий с производными.

3.16 $y = f(g(x)) \Rightarrow y' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Цепное правило **для вычисления производной сложной функции.**

3.17 $y = (f(x))^{g(x)} \Rightarrow$

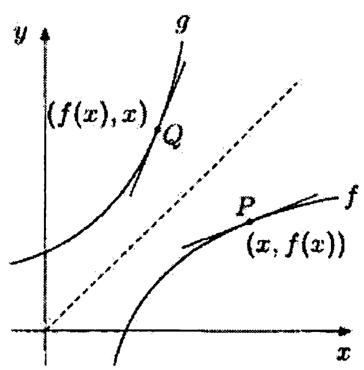
$$y' = (f(x))^{g(x)}\left(g'(x)\ln f(x) + g(x)\frac{f'(x)}{f(x)}\right)$$

3.18 **Если $g = f^{-1}$ является обратной к взаимно однозначной функции f и f дифференцируема в точке x, причем производная $f'(x) \neq 0$, то и g дифференцируема в точке $f(x)$, причем**

$$g'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$$

Запись f^{-1} обозначает обратную функцию к f.

3.19



Если тангенс угла наклона касательной к функции f в точке P равен $k = f'(x)$, то наклон касательной Q к обратной ей функции g в симметричной точке Q измеряется обратным числом $1/k = g'(f(x))$.

3.20 $y = c \Rightarrow y' = 0$ **(c —константа)**

Производные элементарных функций.

3.21 $y = x^a \Rightarrow y' = ax^{a-1}$ **(a — константа)**

3.22 $y = \dfrac{1}{x} \Rightarrow y' = -\dfrac{1}{x^2}$

3.23 $y = \sqrt{x} \Rightarrow y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

3.24 $y = e^x \Rightarrow y' = e^x$

3.25 $y = a^x \Rightarrow y' = a^x \ln a$ $(a > 0)$

3.26 $y = \ln x \;\Rightarrow\; y' = \dfrac{1}{x}$

Производные элементарных функций.

3.27 $y = \log_a x \;\Rightarrow\; y' = \dfrac{1}{x}\log_a e \qquad (a > 0,\ a \neq 1)$

3.28 $y = \sin x \;\Rightarrow\; y' = \cos x$

3.29 $y = \cos x \;\Rightarrow\; y' = -\sin x$

3.30 $y = \operatorname{tg} x \;\Rightarrow\; y' = \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$

3.31 $y = \operatorname{ctg} x \;\Rightarrow\; y' = -\dfrac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \operatorname{ctg}^2 x)$

3.32 $y = \sin^{-1} x = \arcsin x \;\Rightarrow\; y' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

3.33 $y = \cos^{-1} x = \arccos x \;\Rightarrow\; y' = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

3.34 $y = \operatorname{tg}^{-1} x = \operatorname{arctg} x \;\Rightarrow\; y' = \dfrac{1}{1 + x^2}$

3.35 $y = \operatorname{ctg}^{-1} x = \operatorname{arcctg} x \;\Rightarrow\; y' = -\dfrac{1}{1 + x^2}$

3.36 $y = \operatorname{sh} x \;\Rightarrow\; y' = \operatorname{ch} x$

3.37 $y = \operatorname{ch} x \;\Rightarrow\; y' = \operatorname{sh} x$

3.38 **Если f непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема на интервале (a, b), тогда внутри него найдется хотя бы одна точка ξ, такая, что**

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Теорема о среднем значении (формула конечных приращений Лагранжа).

3.39

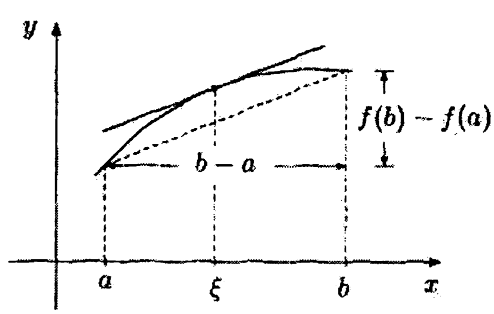


Иллюстрация теоремы о среднем значении.

3.40 Если функции f и g непрерывны на отрезке $[a, b]$ и дифференцируемы на интервале (a, b), то внутри него найдется хотя бы одна точка ξ, такая, что

$$[f(b) - f(a)]g'(\xi) = [g(b) - g(a)]f'(\xi)$$

Теорема Коши о среднем значении (обобщение формулы конечных приращений Лагранжа).

3.41 Пусть функции f и g дифференцируемы на некотором интервале (α, β) в окрестности точки a, за исключением, может быть, самой этой точки, и пусть значения обеих этих функций $f(x)$ и $g(x)$ стремятся к 0 по мере приближения x к числу a. Если $g'(x) \neq 0$ для всех $x \neq a$ в проколотой окрестности (α, β) и двусторонний предел

$$\lim_{x \to a} f'(x)/g'(x) = L$$

(L может быть конечным или $L = \infty$, или $L = -\infty$), тогда

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

Правило Лопиталя. Оно также справедливо и для случаев право/левосторонних пределов $x \to a^+$, $x \to a^-$, $x \to \infty$, а также при $x \to -\infty$ или если $f(x) \to \pm\infty$ и $g(x) \to \pm\infty$.

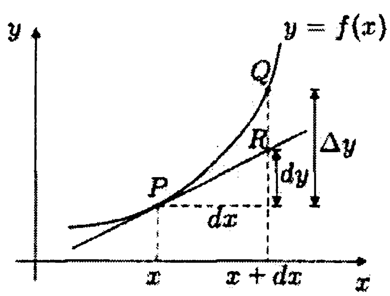
3.42 Если $y = f(x)$, а dx — произвольное число, то

$$dy = f'(x)\,dx$$

называется *дифференциалом* y.

Определение дифференциала.

3.43



Геометрическая интерпретация понятия дифференциала.

3.44 $\Delta y = f(x + dx) - f(x) \approx f'(x)\,dx$, когда величина $|dx|$ мала.

Полезное приближенное равенство, точная формула дана ниже, в (3.45).

3.45 $f(x + dx) - f(x) = f'(x)\,dx + \varepsilon\,dx$, где $\varepsilon \to 0$ по мере стремления $dx \to 0$

Свойство дифференцируемой функции. (Если величина dx очень мала, то и величина ε очень мала, а величина их произведения $\varepsilon\,dx$ «мала очень-очень».)

3.46	$d(af+bg) = a\,df + b\,dg$ (a и b — константы $d(fg) = g\,df + f\,dg$ $d(f/g) = (g\,df - f\,dg)/g^2$ $df(u) = f'(u)\,du$	Свойства дифференциалов. f и g дифференцируемы, а u — произвольная дифференцируемая функция.

ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

Все формулы здесь стандартны, и отыскать их можно в любом учебнике высшей математики, например [15] или [81]. О равномерной непрерывности читайте [70].

Глава 4

ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ

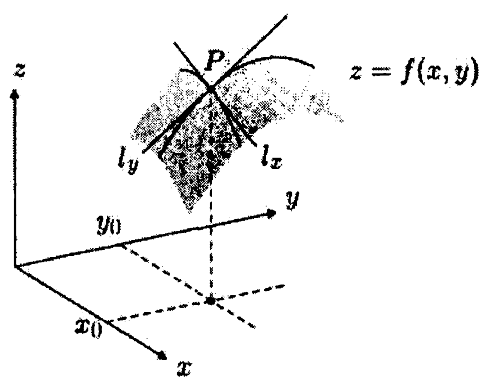
Если $z = f(x_1, \dots, x_n) = f(\mathbf{x})$, то

$$\frac{\partial z}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} = f_i'(\mathbf{x}) = D_{x_i} f = D_i f$$

4.1 обозначают все частные производные (первого порядка) функции многих переменных $f(x_1, \dots, x_n)$ по одной из переменных x_i при фиксированных значениях всех остальных.

Определение *частной производной*. (Также используются другие обозначения.)

4.2



На рисунке дана геометрическая интерпретация частных производных для функции двух переменных, $z = f(x, y)$: $f_1'(x_0, y_0)$ задает наклон касательной l_x, а $f_2'(x_0, y_0)$ задает наклон касательной l_y.

4.3 $$\frac{\partial^2 z}{\partial x_j \partial x_i} = f_{ij}''(x_1, \dots, x_n) = \frac{\partial}{\partial x_j} f_i'(x_1, \dots, x_n)$$

Частные производные второго порядка функции $z = f(x_1, \dots, x_n)$.

4.4 $$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n$$

Теорема Янга (или *Шварца*), верна при непрерывности обеих частных производных.

4.5 Говорят, что $f(x_1, \dots, x_n)$ относится *к классу* C^k, или, более кратко, является C^k-функцией на множестве $S \subset \mathbb{R}^n$, если все ее частные производные, порядок которых $\leq k$, непрерывны на S.

Определение функции класса гладкости C^k. (Определение непрерывности дано далее, в (12.12).)

4.6 $z = F(x,y)$, $x = f(t)$, $y = g(t)$ $\Rightarrow$

$$\frac{dz}{dt} = F_1'(x,y)\frac{dx}{dt} + F_2'(x,y)\frac{dy}{dt}$$

Цепное правило.

4.7 Если $z = F(x_1, \ldots, x_n)$ и $x_i = f_i(t_1, \ldots, t_m)$, $i = 1, \ldots, n$, то для всех $j = 1, \ldots, m$

$$\frac{\partial z}{\partial t_j} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial t_j}$$

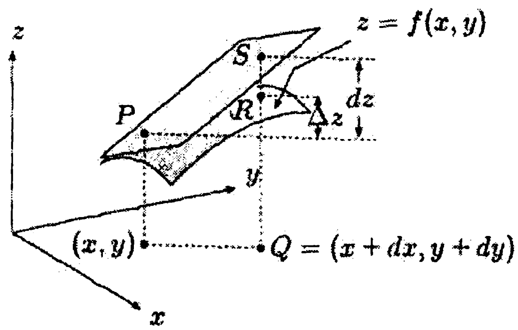
Цепное правило. (Общий случай.)

4.8 Если $z = f(x_1, \ldots, x_n)$ и величины $dx_1, \ldots, dx_n$ произвольные, то

$$dz = \sum_{i=1}^{n} f_i'(x_1, \ldots, x_n)\,dx_i$$

является *дифференциалом* функции многих переменных z.

Определение дифференциала.

4.9 

Геометрическая интерпретация определения дифференциала функции двух переменных. На рисунке также видна ошибка линейного приближения полного приращения значения функции ее дифференциалом $\Delta z \approx dz$, данного ниже, в (4.10).

4.10 $\Delta z \approx dz$, если все частные приращения $|dx_1|, \ldots, |dx_n|$ малы, где
$\Delta z = f(x_1 + dx_1, \ldots, x_n + dx_n) - f(x_1, \ldots, x_n)$

Полезное приближенное равенство, точная формула которого для дифференцируемых функций дана ниже, в (4.11).

4.11 Функция f *дифференцируема* по $\mathbf{x}$, если существуют все частные производные $f_i'(\mathbf{x})$, и найдутся функции $\varepsilon_i = \varepsilon_i(dx_1, \ldots, dx_n)$, $i = 1, \ldots, n$, которые все сходятся к нулю, если все частные приращения dx_i стремятся к нулю, причем верно равенство

$$\Delta z - dz = \varepsilon_1\,dx_1 + \cdots + \varepsilon_n\,dx_n$$

Определение дифференцируемости.

4.12 Если функция f относится к классу гладкости C^1, т. е. имеет непрерывные производные первого порядка, то она дифференцируема.

Важный факт. (Класс гладкости также называют классом дифференцируемости.)

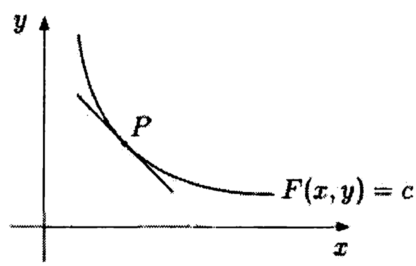
4.13
$$d(af + bg) = a\,df + b\,dg \quad (a \text{ и } b \text{ — константы})$$
$$d(fg) = g\,df + f\,dg$$
$$d(f/g) = (g\,df - f\,dg)/g^2$$
$$dF(u) = F'(u)\,du$$

Свойства дифференциалов. Функции f и g дифференцируемы по аргументам $x_1, \ldots, x_n$, F — дифференцируемая функция одного аргумента, и u — произвольная дифференцируемая функция по аргументам $x_1, \ldots, x_n$.

4.14
$$F(x,y) = c \;\Rightarrow\; \frac{dy}{dx} = -\frac{F_1'(x,y)}{F_2'(x,y)}$$

Формула тангенса угла наклона касательной к линии уровня $z = F(x,y)$. Формулировка точных предположений, при которых она верна, дана ниже, в (4.17).

4.15



Наклон касательной в точке P выражается через
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_1'(x,y)}{F_2'(x,y)}.$$

4.16

Если $y = f(x)$ относится к C^2 и верно равенство $F(x,y) = c$, то
$$f''(x) = -\frac{F_{11}''(F_2')^2 - 2F_{12}''F_1'F_2' + F_{22}''(F_1')^2}{(F_2')^3}$$
$$= \frac{1}{(F_2')^3}\begin{vmatrix} 0 & F_1' & F_2' \\ F_1' & F_{11}'' & F_{12}'' \\ F_2' & F_{12}'' & F_{22}'' \end{vmatrix}$$

Полезный результат. Все частные производные взяты в точке (x,y).

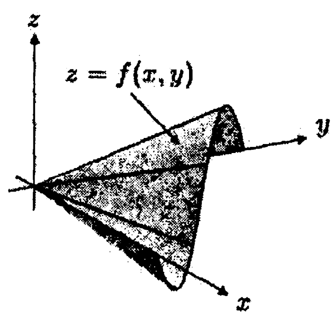
4.17

Если $F(x,y)$ относится к C^k на множестве A, (x_0, y_0) является внутренней точкой множества A, $F(x_0,y_0) = c$ и $F_2'(x_0,y_0) \neq 0$, тогда уравнение $F(x,y) = c$ определяет y как функцию аргумента x из C^k, $y = \varphi(x)$, в некоторой окрестности точки (x_0, y_0), и производная функции y есть
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_1'(x,y)}{F_2'(x,y)}$$

Теорема о неявной функции. (Более общий результат приводится в (6.3).)

4.18	Если $F(x_1, x_2, \ldots, x_n, z) = c$ (c — константа), то $$\frac{\partial z}{\partial x_i} = -\frac{\partial F/\partial x_i}{\partial F/\partial z}, \quad i = 1, 2, \ldots, n \quad \left(\frac{\partial F}{\partial z} \neq 0\right)$$	Обобщение формулы (4.14).

ОДНОРОДНЫЕ И ГОМОТЕТИЧНЫЕ ФУНКЦИИ

4.19	$f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ является *однородной степени* k на $D \subset \mathbb{R}^n$, если $$f(tx_1, tx_2, \ldots, tx_n) = t^k f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$ для всех $t > 0$ и всех $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ из D.	Определение однородной (гомогенной) функции. D является *конусом* в том смысле, что $t\mathbf{x} \in D$ для любого $\mathbf{x} \in D$ и $t > 0$.
4.20		Иллюстрация понятия однородной функции первой степени.
4.21	Функция $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \ldots, x_n)$ однородна степени k на открытом конусе D тогда и только тогда, когда $$\sum_{i=1}^{n} x_i f_i'(\mathbf{x}) = kf(\mathbf{x}) \text{ для любого } \mathbf{x} \text{ из } D$$	Формулировка *теоремы Эйлера*, справедливой для C^1-функций.
4.22	Если $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \ldots, x_n)$ однородна степени k на открытом конусе D, то • $\partial f/\partial x_i$ однородна степени $k-1$ на D, • $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} x_i x_j f_{ij}''(\mathbf{x}) = k(k-1)f(\mathbf{x})$.	Свойства однородных функций.
4.23	Функция $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \ldots, x_n)$ *гомотетична* на конусе D, если для всех $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in D$ и для любого $t > 0$, $$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{y}) \Rightarrow f(t\mathbf{x}) = f(t\mathbf{y})$$	Определение гомотетичной функции (является преобразованием подобия).

4.24

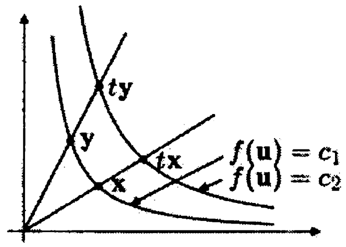


Иллюстрация понятия гомотетичной функции. Для $f(\mathbf{u})$, обладающей этим свойством, верно, что если уровень ее значений на $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ одинаков, то и точки $t\mathbf{x}$ и $t\mathbf{y}$ лежат на одной и той же линии уровня (при условии $t > 0$).

4.25 Пусть $f(\mathbf{x})$ — непрерывная и гомотетичная функция, определенная на конусе D. Предположим, что значения f строго возрастают при движении вверх по любому лучу конуса D, т. е. для любого $\mathbf{x}_0$ из D, $f(t\mathbf{x}_0)$ является строго возрастающей функцией аргумента t. Тогда найдутся такие однородная функция g и строго возрастающая функция F, что

$$f(\mathbf{x}) = F(g(\mathbf{x})) \text{ для всех } \mathbf{x} \text{ из } D.$$

Свойство непрерывных однородных функций (иногда его формулировку применяют в качестве определения гомотетии). Здесь можно использовать и предположение однородности первой степени.

ГРАДИЕНТЫ, ПРОИЗВОДНЫЕ ПО НАПРАВЛЕНИЮ И КАСАТЕЛЬНЫЕ ПЛОСКОСТИ

4.26 $$\nabla f(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_n}\right)$$

Градиент функции f в точке $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$.

4.27 $$f'_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\mathbf{x} + h\mathbf{a}) - f(\mathbf{x})}{h}, \quad \|\mathbf{a}\| = 1$$

Производная функции f в точке $\mathbf{x}$ *по направлению* $\mathbf{a}$.

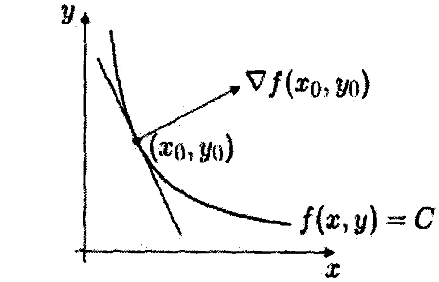
4.28 $$f'_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} f'_i(\mathbf{x}) a_i = \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{a}$$

Зависимость между производной по направлению и градиентом.

4.29
- $\nabla f(\mathbf{x})$ перпендикулярен поверхности уровня $f(\mathbf{x}) = C$.
- Вектор $\nabla f(\mathbf{x})$ указывает направление максимального роста значений функции f.
- Нормой $\|\nabla f(\mathbf{x})\|$ измеряется скорость изменения f по направлению $\nabla f(\mathbf{x})$.

Свойства градиента.

4.30



Градиент $\nabla f(x_0, y_0)$ функции $f(x, y)$ в точке (x_0, y_0).

4.31 *Касательная плоскость* к графику $z = f(x, y)$ в точке $P = (x_0, y_0, z_0)$, где $z_0 = f(x_0, y_0)$, задается уравнением

$$z - z_0 = f_1'(x_0, y_0)(x - x_0) + f_2'(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Определение касательной плоскости.

4.32

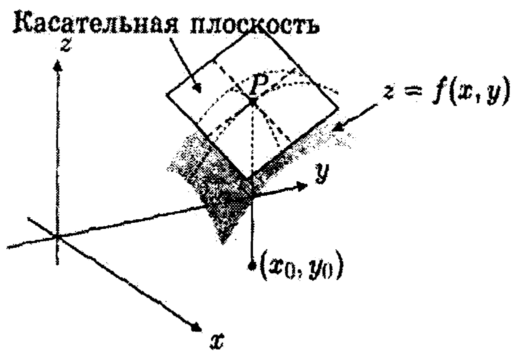


График функции и касательная плоскость к нему.

4.33 *Касательная гиперплоскость* к поверхности уровня

$$F(\mathbf{x}) = F(x_1, \ldots, x_n) = C$$

в точке $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$ задается уравнением

$$\nabla F(\mathbf{x}^0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}^0) = 0$$

Определение касательной гиперплоскости. Вектор $\nabla F(\mathbf{x}^0)$ является *нормалью* (перпендикулярен) к касательной гиперплоскости.

ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

Все формулы стандартны и содержатся почти во всех учебниках высшей математики, например в [15] или [81], [82]. О свойствах гомотетичных функций читайте [77], [75], а также [25].

Глава 5

ЭЛАСТИЧНОСТЬ. ЭЛАСТИЧНОСТИ ЗАМЕНЫ

5.1 $$\mathrm{El}_x f(x) = \frac{x}{f(x)} f'(x) = \frac{d(\ln f(x))}{d(\ln x)}$$

Эластичность $\mathrm{El}_x f(x)$ функции $f(x)$ по аргументу x измеряет приближенное процентное изменение $f(x)$ при увеличении значения x на один процент.

5.2

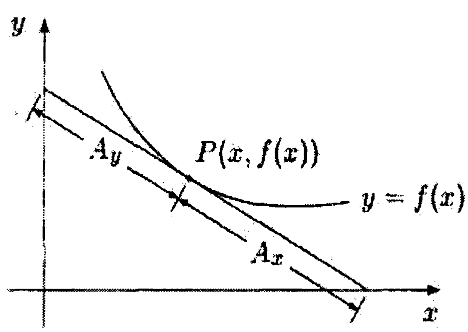


Иллюстрация правила Маршалла.

5.3 *Правило Маршалла.* Чтобы найти эластичность $y = f(x)$ по x в точке P (смотри рисунок выше), сначала строится касательная к кривой в точке P. Затем измеряется расстояние A_yот P до той точки, где касательная пересекает ось y, и расстояние A_x от P до точки пересечения касательной оси x. Тогда $\mathrm{El}_x f(x) = \pm A_y/A_x$.

Правило Маршалла. В качестве расстояния используется метрика с положительными значениями. Знак плюс соответствует возрастанию функции в точке P, а минус — убыванию.

5.4 $$\mathrm{El}_x(f(x)g(x)) = \mathrm{El}_x f(x) + \mathrm{El}_x g(x)$$

Общие правила расчета эластичности.

5.5 $$\mathrm{El}_x \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \mathrm{El}_x f(x) - \mathrm{El}_x g(x)$$

5.6 $$\mathrm{El}_x(f(x) \pm g(x)) = \frac{f(x)\,\mathrm{El}_x f(x) \pm g(x)\,\mathrm{El}_x g(x)}{f(x) \pm g(x)}$$

5.7 $$\mathrm{El}_x f(g(x)) = \mathrm{El}_u f(u)\,\mathrm{El}_x u, \quad u = g(x)$$

Общие правила расчета эластичности.

5.8 $$\mathrm{El}_x A = 0, \quad \mathrm{El}_x x^a = a, \quad \mathrm{El}_x e^x = x.$$
(A и a — константы, $A \neq 0$.)

5.9 $$\mathrm{El}_x \sin x = x \operatorname{ctg} x, \quad \mathrm{El}_x \cos x = -x \operatorname{tg} x$$

5.10 $$\mathrm{El}_x \operatorname{tg} x = \frac{x}{\sin x \cos x}, \quad \mathrm{El}_x \operatorname{ctg} x = \frac{-x}{\sin x \cos x}$$

5.11 $$\mathrm{El}_x \ln x = 1/\ln x, \quad \mathrm{El}_x \log_a x = 1/\ln x$$

Свойства эластичности некоторых функций.

5.12 $$\mathrm{El}_i f(\mathbf{x}) = \mathrm{El}_{x_i} f(\mathbf{x}) = \frac{x_i}{f(\mathbf{x})} \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i}$$

Частные эластичности функции $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \dots, x_n)$ по x_i, $i = 1, \dots, n$.

5.13 Если $z = F(x_1, \dots, x_n)$ и $x_i = f_i(t_1, \dots, t_m)$ при $i = 1, \dots, n$, тогда для всех $j = 1, \dots, m$,
$$\mathrm{El}_{t_j} z = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{El}_i F(x_1, \dots, x_n)\,\mathrm{El}_{t_j} x_i$$

Цепное правило для эластичностей.

5.14 *Эластичность* функции f в точке $\mathbf{x}$ *по направлению* $\mathbf{x}/\|\mathbf{x}\|$ есть
$$\mathrm{El}_{\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = \frac{\|\mathbf{x}\|}{f(\mathbf{x})} f'_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{f(\mathbf{x})} \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{x}$$

Эластичностью по направлению $\mathrm{El}_{\mathbf{a}} f(\mathbf{x})$ приближенно измеряется процентное изменение значения функции $f(\mathbf{x})$, соответствующее увеличению на один процент значений всех элементов вектора $\mathbf{x}$. Определение $f'_{\mathbf{a}}(\mathbf{x})$ дано в (4.27)–(4.28).

5.15 $$\mathrm{El}_{\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{El}_i f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{a} = \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}$$

Полезный факт.

5.16 $$R_{yx} = \frac{f'_1(x,y)}{f'_2(x,y)}, \qquad f(x,y) = c$$

Предельная норма замены между y и x, R_{yx}, приблизительно равна тому, на сколько нужно увеличить y, чтобы при уменьшении x на единицу уровень f не изменился.

- Когда f является функцией полезности, а x и y — товарами, R_{yx} называется *предельной нормой замены* (устоялось обозначение MRS — от *англ.* «marginal rate of substitution»).
- Когда f является производственной функцией, а x и y затратами факторов производства, R_{yx} называется *предельной нормой технической замены* (устоялось обозначение MRTS — от *англ.* «marginal rate of technical substitution»).
- Когда $f(x, y) = 0$ является производственной функцией, заданной в неявной форме (при данных затратах факторов производства), а x и y — два продукта, R_{yx} называтеся *предельной нормой изменения продукта* (устоялось обозначение MRPT — от *англ.* «marginal rate of product transformation»).

5.17 Частные случаи (5.16). См. главы 25 и 26.

5.18 $$\sigma_{yx} = \mathrm{El}_{R_{yx}}\left(\frac{y}{x}\right) = -\frac{\partial \ln\left(\frac{y}{x}\right)}{\partial \ln\left(\frac{f_2'}{f_1'}\right)}, \quad f(x, y) = c$$

Эластичность замены между y и x, σ_{yx} есть приближенное процентное изменение значения отношения факторов y/x, соответствующее увеличению на один процент предельной нормы замены, при постоянном уровне f.

5.19 $$\sigma_{yx} = \frac{\dfrac{1}{xf_1'} + \dfrac{1}{yf_2'}}{-\dfrac{f_{11}''}{(f_1')^2} + 2\dfrac{f_{12}''}{f_1'f_2'} - \dfrac{f_{22}''}{(f_2')^2}}, \quad f(x, y) = c$$

Другая формула для эластичности замены.

Если $f(x, y)$ однородна степени 1, то

5.20 $$\sigma_{yx} = \frac{f_1'f_2'}{ff_{12}''}$$

Частный случай.

5.21 $$\sigma_{ij} = -\frac{\partial \ln \frac{(x_i}{x_j)}}{\partial \ln\left(\frac{f_i'}{f_j'}\right)}, \quad f(x_1, \ldots, x_n) = c, \ i \neq j$$

Эластичность замены для случая n переменных.

5.22 $$\sigma_{ij} = \frac{\dfrac{1}{x_i f_i'} + \dfrac{1}{x_j f_j'}}{-\dfrac{f_{ii}''}{(f_i')^2} + \dfrac{2f_{ij}''}{f_i' f_j'} - \dfrac{f_{jj}''}{(f_j')^2}}, \quad i \neq j$$

Эластичность замены, $f(x_1, \ldots, x_n) = c$.

ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

Этих формул не приводят обычно в учебниках математики. (5.4)–(5.20) есть, например, в [81]. А (5.21)–(5.22) см. в [7] или [24]. Эластичность замены применительно к теории производства обсуждается далее, в главе 25.

Глава 6

СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

6.1
$$
\begin{aligned}
f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_m) &= 0 \\
f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_m) &= 0 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_m) &= 0
\end{aligned}
$$

Общий вид системы уравнений с n *экзогенными переменными* $x_1, \ldots, x_n$ и m *эндогенными переменными* $y_1, \ldots, y_m$.

6.2
$$
\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial \mathbf{y}} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial y_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial y_m} \end{pmatrix}
$$

Матрица частных производных функций $f_1, \ldots, f_m$ по переменным $y_1, \ldots, y_m$, определитель которой называется *якобианом*.

6.3 Предположим, что $f_1, \ldots, f_m$ являются функциями класса гладкости C^k на множестве A в $\mathbb{R}^{n+m}$, и пусть точка $(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0) = (x_1^0, \ldots, x_n^0, y_1^0, \ldots, y_m^0)$ является решением системы уравнений (6.1) внутри A. Предположим также, что значение якобиана $\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y})/\partial \mathbf{y}$ в (6.2) отлично от нуля 0 в точке $(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0)$. Тогда система (6.1) определяет $y_1, \ldots, y_m$ как функции класса гладкости C^k от $x_1, \ldots, x_n$ на некоторой окрестности точки $(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0)$, и для всех $j = 1, \ldots, n$ выполняется

$$
\begin{pmatrix} \dfrac{\partial y_1}{\partial x_j} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial y_m}{\partial x_j} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial y_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial y_m} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_j} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_j} \end{pmatrix}
$$

Обобщенная теорема о неявной функции. **(Формулировка достаточных условий, при выполнении которых эндогенные переменные $y_1, \ldots, y_m$ системы уравнений (6.1) выражаются через дифференцируемые функции от экзогенных переменных $x_1, \ldots, x_n$. (Частный случай для $n = m = 1$ приведен в (4.17).)**

6.4
$$\begin{aligned} &f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \\ &f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \end{aligned}$$

Общий вид системы из m уравнений с n переменными.

6.5 Система (6.4) имеет k *степеней свободы*, если можно произвольно выбрать подмножество k переменных так, чтобы $n-k$ оставшихся однозначно определялись теми значениями, которые придаются k выбранным переменным. Если значения переменных изменяются только внутри множества S в $\mathbb{R}^n$, то система имеет k *степеней свободы на* S.

Определение числа степеней свободы для системы уравнений.

6.6 Для нахождения числа степеней свободы системы уравнений сравните число переменных n с числом уравнений m. Если $n > m$, то система имеет $n-m$ степеней свободы. Если же $n < m$, то система вообще неразрешима.

«Правило подсчета» числа степеней свободы для системы уравнений. Оно неточно и, вообще говоря, *некорректно*.

6.7 При выполнении условий теоремы (6.3) система уравнений (6.1) имеет n степеней свободы.

Точное (в локальном смысле) правило.

6.8
$$\mathbf{f}'(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \ldots & \dfrac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \ldots & \dfrac{\partial f_m(\mathbf{x})}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Для обозначения матрицы частных производных функций $f_1, \ldots, f_m$ по переменным $x_1, \ldots, x_n$ (определитель которой является *якобианом*) также используют запись $\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})/\partial \mathbf{x}$.

6.9 Если $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$ есть решение системы (6.4), $m \le n$ и ранг матрицы частных производных $\mathbf{f}'(\mathbf{x})$ равен m, то система (6.4) имеет $n-m$ степеней свободы в некоторой окрестности точки $\mathbf{x}^0$.

Точное (в локальном смысле) правило оценки числа степеней свободы. (Справедливо, если функции $f_1, \ldots, f_m$ из класса гладкости C^1.)

6.10 Функции $f_1(\mathbf{x}), \ldots, f_m(\mathbf{x})$ называются *функционально зависимыми* на открытом множестве A из $\mathbb{R}^n$, если найдется функция F с вещественными значениями, входящая в класс гладкости C^1 и определенная на некоторой окрестности

$$S = \{(f_1(\mathbf{x}), \ldots, f_m(\mathbf{x})) : \mathbf{x} \in A\}$$

такая, что

$$F(f_1(\mathbf{x}), \ldots, f_m(\mathbf{x})) = 0 \quad \text{для всех } \mathbf{x} \text{ из } A,$$

где $\nabla F \neq \mathbf{0}$ на S.

Определение фукнциональной зависимости. (См. [58].)

6.11 Если $f_1(\mathbf{x}), \ldots, f_m(\mathbf{x})$ функционально зависимы на открытом множестве $A \subset \mathbb{R}^n$, то ранг матрицы частных производных $\mathbf{f}'(\mathbf{x})$ меньше m для любого $\mathbf{x}$ из A.

Необходимое условие функциональной зависимости.

6.12 Если система уравнений (6.4) разрешима и $f_1(\mathbf{x}), \ldots, f_m(\mathbf{x})$ функционально зависимы, тогда в системе (6.4) есть хотя бы одно лишнее уравнение.

Достаточное условие, при котором «правило подсчета» (числа степеней свободы) работает неправильно.

6.13
$$\det(\mathbf{f}'(\mathbf{x})) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \ldots & \dfrac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_n(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \ldots & \dfrac{\partial f_n(\mathbf{x})}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

Якобиан (определитель матрицы частных производных) функций $f_1, \ldots, f_n$ по $x_1, \ldots, x_n$. (Сведения об определителях даны в главе 20.)

6.14 Если $f_1(\mathbf{x}), \ldots, f_n(\mathbf{x})$ функционально зависимы, то определитель $\det(\mathbf{f}(\mathbf{x})) \equiv 0$.

Частный случай (6.11). Обратное утверждение неверно.

6.15
$$\begin{array}{l} y_1 = f_1(x_1, \ldots, x_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n = f_n(x_1, \ldots, x_n) \end{array} \iff \mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$$

Преобразование $\mathbf{f}$ $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$ (отображение в себя).

6.16 Пусть преобразование $\mathbf{f}$, определенное в (6.15), относится к классу гладкости C^1 на некоторой окрестности $\mathbf{x}^0$ и якобиан (6.13) не обращается в нуль в точке $\mathbf{x}^0$. Тогда в классе гладкости C^1 найдется преобразование $\mathbf{g}$, которое является локальным обратным отображением к $\mathbf{f}$, т. е. $\mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{x})) = \mathbf{x}$ для всех $\mathbf{x}$ на некоторой окрестности $\mathbf{x}^0$.

Существование *локального обратного преобразования. Теорема о локальной обратной функции.*

6.17 Пусть преобразование $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ принадлежит к классу гладкости C^1 и найдутся положитльные числа h и k, такие, что

$$|\det(\mathbf{f}'(\mathbf{x}))| \geq h \text{ и } |\partial f_i(\mathbf{x})/\partial x_j| \leq k$$

для любого $\mathbf{x}$ и всех $i, j = 1, \ldots, n$. Тогда $\mathbf{f}$ имеет обратное в классе гладкости C^1, определенное на всех точках $\mathbb{R}^n$.

Теорема существования *глобального обратного преобразования.* (Теорема Адамара.)

6.18 Пусть $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ принадлежит к классу гладкости C^1 и определитель (6.13) не равен нулю для всех $\mathbf{x}$. Преобразование $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ имеет обратное, принадлежащее классу гладкости C^1 и определенное на всем $\mathbb{R}^n$ тогда и только тогда, когда

$$\inf\{\|\mathbf{f}(\mathbf{x})\| : \|\mathbf{x}\| \geq n\} \to \infty \text{ при } n \to \infty$$

Теорема о глобальной обратной функции.

6.19 Пусть $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ принадлежит классу гладкости C^1, а Ω является прямоугольником: $\Omega = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{a} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{b}\}$, где векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ выбраны в $\mathbb{R}^n$. Преобразование $\mathbf{f}$ является взаимно однозначным на Ω, если для всех $\mathbf{x}$ справедливо *хотя бы одно* из следующих условий:

- все главные миноры матрицы $\mathbf{f}'(\mathbf{x})$ строго положительны;
- все главные миноры матрицы $\mathbf{f}'(\mathbf{x})$ строго отрицательны.

Теорема Гейла–Никайдо. (Главные миноры определены в (20.15).)

6.20 Матрица $\mathbf{A}$ $n \times n$ (не обязательно симметричная) называется *положительно определенной*, если для любого n-вектора $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ верно $\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x} > 0$.

Определение положительно определенной матрицы.

6.21 Предположим, что функция $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ принадлежит классу гладкости C^1 и что матрица ее частных производных $\mathbf{f}'(\mathbf{x})$ положительно определена на всех элементах выпуклого множества Ω. Тогда функция $\mathbf{f}$ является взаимно однозначным отображением элементов множества Ω.

Теорема Гейла–Никайдо.

6.22 $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ называется *сжимающим отображением*, если на интервале $[0, 1)$ найдется константа k, такая, что

$$\|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{y})\| \leq k\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$$

для любых $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ из $\mathbb{R}^n$.

Определение сжимающего отображения в $\mathbb{R}^n$.

6.23 Если $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ является сжимающим отображением, то $\mathbf{f}$ имеет ровно одну *неподвижную точку*, т. е. найдется такая точка $\mathbf{x}^*$ из $\mathbb{R}^n$, что $\mathbf{f}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{x}^*$. Для любой точки $\mathbf{x}_0$ из $\mathbb{R}^n$ верно $\mathbf{x}^* = \lim_{n\to\infty} \mathbf{x}_n$, где $\mathbf{x}_n = \mathbf{f}(\mathbf{x}_{n-1})$ при $n \geq 1$.

Теорема существования неподвижной точки сжимающего отображения. (Этот результат можно обобщить на случай полного метрического пространства — см. (18.26)).

6.24 Пусть K — непустое компактное выпуклое множество в $\mathbb{R}^n$ и $\mathbf{f}$ является непрерывным функциональным отображением множества K в себя. Тогда функция $\mathbf{f}$ имеет неподвижную точку $\mathbf{x}^* \in K$, т. е. такую точку $\mathbf{x}^*$, что $\mathbf{f}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{x}^*$.

Теорема Брауэра о неподвижной точке.

6.25

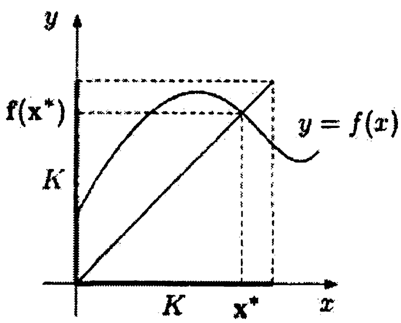


Иллюстрация к теореме Брауэра о неподвижной точке для случая $n = 1$.

6.26 Пусть K — непустое компактное выпуклое множество в $\mathbb{R}^n$, а $\mathbf{f}$ ставит в соответствие каждой точке $\mathbf{x}$ из K непустое выпуклое подмножество $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ множества K. Предположим, что график $\mathbf{f}$ замкнут, т. е. множество

$$\{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^{2n} : \mathbf{x} \in K \text{ и } \mathbf{y} \in \mathbf{f}(\mathbf{x})\}$$

замкнуто в $\mathbb{R}^{2n}$. Тогда $\mathbf{f}$ имеет неподвижную точку, т. е. найдется такая точка $\mathbf{x}^*$ из K, что $\mathbf{x}^* \in \mathbf{f}(\mathbf{x}^*)$.

Теорема Какутани о неподвижной точке. (Определение соответствия см. в (12.25)).

6.27

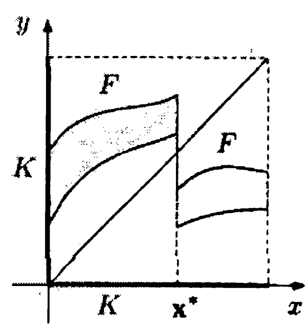


Иллюстрация к теореме Какутани о неподвижной точке для случая $n = 1$.

6.28 Если $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ и $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$ — два вектора в $\mathbb{R}^n$, то их *пересечение* $\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}$ и *объединение* $\mathbf{x} \vee \mathbf{y}$ являются векторами в $\mathbb{R}^n$, определенными следующим образом:

$$\mathbf{x} \wedge \mathbf{y} = (\min\{x_1, y_1\}, \dots, \min\{x_n, y_n\}),$$
$$\mathbf{x} \vee \mathbf{y} = (\max\{x_1, y_1\}, \dots, \max\{x_n, y_n\}).$$

Определение пересечения и объединения двух векторов в $\mathbb{R}^n$.

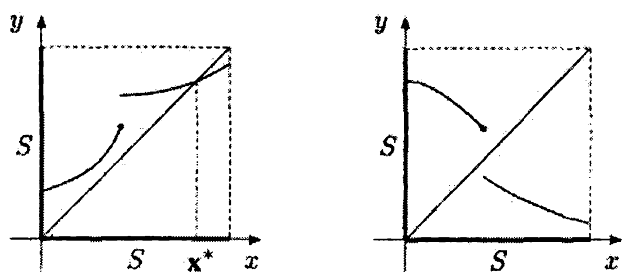
6.29 Множество S из $\mathbb{R}^n$ называется *полурешеткой* в $\mathbb{R}^n$, если пересечение и объединение двух любых его точек принадлежат также множеству S. Если S при этом компактное, то оно называется *компактной полурешеткой*.

Определение (компактной) полурешетки в $\mathbb{R}^n$.

6.30 Пусть S — непустая компактная полурешетка в $\mathbb{R}^n$. Пусть функция $\mathbf{f} : S \to S$ возрастающая, т. е. если $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in S$ и $\mathbf{x} \le \mathbf{y}$, то $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \le \mathbf{f}(\mathbf{y})$. Тогда $\mathbf{f}$ имеет неподвижную точку в множестве S, т. е. найдется $\mathbf{x}^*$ из S, такая, что $\mathbf{f}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{x}^*$.

Теорема Тарски о неподвижной точке. (Для случая убывающей функции утверждение теоремы неверно — см. (6.31)).

6.31



x^* является неподвижной точкой возрастающей функции на рисунке слева. На рисунке справа убывающая функция неподвижной точки не имеет.

6.32

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

Общий вид системы линейных уравнений, состоящей из m ограничений с числом неизвестных n.

6.33

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A_b} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

$\mathbf{A}$ является матрицей коэффициентов уравнений линейной системы (6.32), а $\mathbf{A_b}$ является «расширенной матрицей коэффициентов».

- Система (6.32) имеет хотя бы одно решение тогда и только тогда, когда $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A_b})$.

6.34
- Если $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A_b}) = k < m$, то система (6.32) имеет $m - k$ лишних уравнений.
- Если $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A_b}) = k < n$, то система (6.32) имеет $n - k$ степеней свободы.

Основные случаи разрешимости системы линейных уравнений. Запись $r(\mathbf{B})$ обозначает ранг матрицы $\mathbf{B}$. (См. (19.23)).

6.35

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{array}$$

Общий вид *однородной* системы линейных уравнений с m ограничениями и числом неизвестных n.

6.36
- Однородная система (6.35) имеет нетривиальное (ненулевое) решение тогда и только тогда, когда $r(\mathbf{A}) < n$.
- Если $n = m$, то однородная система (6.35) имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда $|\mathbf{A}| = 0$.

Основные случаи разрешимости однородной системы линейных уравнений.

ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

Подробнее о (6.1)–(6.16) и (6.22)–(6.23) смотри, например, [70] или [58]. Утверждения (6.17)–(6.21) есть в [64]. Теоремы о неподвижной точке Брауэра и Какутани даны в [62], а также в [72]. Теорема Тарски о неподвижной точке рассмотрена подробно в [80]. Стандартные результаты линейной алгебры (6.34)–(6.36) есть, например, в [21], [52] или [83].

Глава 7
НЕРАВЕНСТВА

7.1 $||a| - |b|| \le |a \pm b| \le |a| + |b|$

Неравенство треугольника. $a, b \in \mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$).

7.2 $$\frac{n}{\sum_{i=1}^{n} 1/a_i} \le \left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)^{1/n} \le \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n}, \quad a_i > 0$$

Гармоническое среднее $\le$ геометрическое среднее $\le$ арифметическое среднее. Равенство верно тогда и только тогда, когда $a_1 = \dots = a_n$.

7.3 $$\frac{2}{1/a_1 + 1/a_2} \le \sqrt{a_1 a_2} \le \frac{a_1 + a_2}{2}$$

Вид неравенства (7.2) для случая $n = 2$.

7.4 $a_1^{\lambda_1} \cdots a_n^{\lambda_n} \le \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n$

Неравенство для *взвешенных средних.* $a_i \ge 0$, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$, $\lambda_i \ge 0$.

7.5 $a_1{}^{\lambda} a_2{}^{1-\lambda} \le \lambda a_1 + (1 - \lambda) a_2$

Вид неравенства (7.4) для случая $n = 2$, $a_1 \ge 0$, $a_2 \ge 0$, $\lambda \in [0, 1]$.

7.6 $$\sum_{i=1}^{n} |a_i b_i| \le \left[\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p\right]^{1/p} \left[\sum_{i=1}^{n} |b_i|^q\right]^{1/q}$$

Неравенство Гёльдера. $p, q > 1$, $1/p + 1/q = 1$. Равенство верно при условии $|b_i| = c|a_i|^{p-1}$ для неотрицательной константы c.

7.7 $$\left[\sum_{i=1}^{n} |a_i b_i|\right]^2 \le \left[\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right] \left[\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right]$$

Неравенство Коши–Шварца. (Получается из (7.6) подстановкой $p = q = 2$).

7.8 $$\left[\sum_{i=1}^{n} a_i\right]\left[\sum_{i=1}^{n} b_i\right] \le n\sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

Неравенство Чебышева. $a_1 \ge \cdots \ge a_n$, $b_1 \ge \cdots \ge b_n$.

7.9 $$\left[\sum_{i=1}^{n}|a_i+b_i|^p\right]^{1/p} \le \left[\sum_{i=1}^{n}|a_i|^p\right]^{1/p} + \left[\sum_{i=1}^{n}|b_i|^p\right]^{1/p}$$

Неравенство Минковского. $p \ge 1$. Равенство верно при условии $b_i = ca_i$ для неотрицательной константы c.

Если f обладает свойством выпуклости, то

7.10 $$f\left[\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right] \le \sum_{i=1}^{n} a_i f(x_i)$$

Неравенство Иенсена. $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$, $a_i \ge 0$, $i = 1, \ldots, n$.

7.11 $$\left[\sum_{i=1}^{n}|a_i|^q\right]^{1/q} \le \left[\sum_{i=1}^{n}|a_i|^p\right]^{1/p}$$

Еще одно *неравенство Иенсена*; $0 < p < q$.

7.12 $$\int_a^b |f(x)g(x)|\,dx \le \left[\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right]^{1/p}\left[\int_a^b |g(x)|^q\,dx\right]^{1/q}$$

Неравенство Гёльдера. $p > 1$, $q > 1$, $1/p + 1/q = 1$. Равенство верно при условии $|g(x)| = c|f(x)|^{p-1}$ для неотрицательной константы c.

7.13 $$\left[\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right]^2 \le \int_a^b (f(x))^2dx \int_a^b (g(x))^2dx$$

Неравество Коши–Шварца.

7.14 $$\left[\int_a^b |f(x)+g(x)|^p\,dx\right]^{1/p} \le \left[\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right]^{1/p} + \left[\int_a^b |g(x)|^p\,dx\right]^{1/p}$$

Неравенство Минковского. $p \ge 1$. Равенство верно при условии $g(x) = cf(x)$ для неотрицательной константы c.

Если f обладает свойством выпуклости, то

7.15 $$f\Big(\int a(x)g(x)\,dx\Big) \le \int a(x)f(g(x))\,dx$$

Неравенство Иенсена. $a(x) \ge 0$, $f(u) \ge 0$, $\int a(x)\,dx = 1$. f определена на области значений g.

Если f выпукла на интервале I и X — случайная переменная с конечным математическим ожиданием, то

7.16 $$f(E[X]) \le E[f(X)]$$

Если f строго выпукла, то и неравенство выполняется строго, исключая тот случай, когда X постоянна с вероятностью 1.

Частный случай неравенства Иенсена. Знак E используется для обозначения математического ожидания.

7.17	Если U вогнута на интервале I и X — случайная переменная с конечным математическим ожиданием, то $E[U(X)] \leq U(E[X])$	Важное утверждение в теории полезности. (Получается из (7.16) подстановкой $f = -U$.)

ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

Книга [34] была и до сих пор остается хорошим источником знаний о неравенствах.

Глава 8

РЯДЫ. ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА

8.1	$\sum_{i=0}^{n-1}(a+id)=na+\frac{n(n-1)d}{2}$	Сумма первых n членов *арифметической прогрессии*.
8.2	$a+ak+ak^2+\cdots+ak^{n-1}=a\,\frac{1-k^n}{1-k},\ k\neq 1$	Сумма первых n членов *геометрической прогрессии*.
8.3	$a+ak+\cdots+ak^{n-1}+\cdots=\frac{a}{1-k},\quad$ если $\lvert k\rvert<1$	Сумма бесконечной (убывающей) геометрической прогрессии.
8.4	$a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots=s$ означает, что $\lim_{n\to\infty}(a_1+a_2+\cdots+a_n)=s$ (последовательность частных сумм имеет конечный предел).	Определение *сходимости* бесконечного ряда. Ряд, который не является сходящимся, *расходится*.
8.5	$a_1+\cdots+a_n+\cdots$ сходится $\Rightarrow\ \lim_{n\to\infty}a_n=0$	Необходимое (но НЕ достаточное) условие сходимости бесконечного ряда.
8.6	$\lim_{n\to\infty}\left\lvert\frac{a_{n+1}}{a_n}\right\rvert<1\ \Rightarrow\ \sum_{n=1}^{\infty}a_n$ сходится.	*Относительный признак* сходимости ряда.
8.7	$\lim_{n\to\infty}\left\lvert\frac{a_{n+1}}{a_n}\right\rvert>1\ \Rightarrow\ \sum_{n=1}^{\infty}a_n$ расходится.	*Относительный признак* отсутствия сходимости ряда.

8.8 Если последовательность $\sum a_n$ является числовым рядом с положительными значениями, а $f(x)$ — положительно определенная, убывающая, непрерывная функция при $x \geq 1$ и если $f(n) = a_n$ для любого целого $n \geq 1$, то бесконечный ряд и несобственный интеграл

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{и} \quad \int_1^{\infty} f(x)\,dx$$

сходятся или расходятся одновременно.

Интегральный признак сходимости.

8.9 Если $0 \leq a_n \leq b_n$ для любого n, то

- $\sum a_n$ сходится, если сходится $\sum b_n$,
- $\sum b_n$ расходится, если расходится $\sum a_n$.

Сравнительный признак сходимости для рядов.

8.10 $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \text{ сходится } \iff p > 1$$

Важный результат.

8.11 $$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a) \qquad (x \text{ близок к } a)$$

Приближение первого порядка (линейная аппроксимация) $f(x)$ в точке $x = a$.

8.12 $$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a) + \tfrac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 \qquad (x \text{ близок к } a)$$

Приближение второго порядка (квадратичная аппроксимация) $f(x)$ в точке $x = a$.

8.13 $$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}, \quad 0 < \theta < 1$$

Формула Маклорена. Остаточный член записан в форме Лагранжа.

8.14 $$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots$$

Разложение в *ряд Маклорена* функции $f(x)$ верно для тех значений x, при которых остаточный член в (8.13) стремится к 0 по мере приближения n к ∞.

8.15 $$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(a+\theta(x-a))}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}, \quad 0 < \theta < 1$$

Формула Тейлора. Остаточный член в форме Лагранжа.

8.16	$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots$	Разложение в *ряд Тейлора* функции $f(x)$ верно для тех значений x, при которых остаточный член в (8.15) стремится к 0 по мере приближения n к ∞.
8.17	$f(x,y) \approx f(a,b) + f_1'(a,b)(x-a) + f_2'(a,b)(y-b)$ (точка (x,y) близка к (a,b))	*Приближение первого порядка (линейная аппроксимация)* значения $f(x,y)$ в точке (a,b).
8.18	$f(x,y) \approx$ $\approx f(a,b) + f_1'(a,b)(x-a) + f_2'(a,b)(y-b) +$ $+ \frac{1}{2}[f_{11}''(a,b)(x-a)^2 +$ $+ 2f_{12}''(a,b)(x-a)(y-b) +$ $+ f_{22}''(a,b)(y-b)^2]$	*Приближение второго порядка (квадратичная аппроксимация)* значения $f(x,y)$ в точке (a,b).
8.19	$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) + \sum_{i=1}^{n} f_i'(\mathbf{a})(x_i - a_i) +$ $+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f_{ij}''(\mathbf{a} + \theta(\mathbf{x}-\mathbf{a}))(x_i - a_i)(x_j - a_j)$	*Формула Тейлора* второго порядка для функций n переменных, $\theta \in (0,1)$.
8.20	$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$	Верно для любого x.
8.21	$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$	Верно для $-1 < x \leq 1$.
8.22	$(1+x)^m = \binom{m}{0} + \binom{m}{1}x + \binom{m}{2}x^2 + \cdots$	Верно для $-1 < x < 1$. Определение $\binom{m}{k}$ смотри ниже, в (8.27).
8.23	$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \cdots$	Верно для любого x.
8.24	$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \cdots$	Верно для любого x.
8.25	$\arcsin x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\frac{x^7}{7} + \cdots$	Верно для $\lvert x \rvert \leq 1$.

8.26 $\operatorname{arctg} x = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{x^7}{7} + \cdots$

Верно для $|x| \le 1$.

8.27 $\dbinom{m}{k} = \dfrac{m(m-1)\cdots(m-k+1)}{k!}, \quad \dbinom{m}{0} = 1$

Биномиальные коэффициенты. **(m — произвольное вещественное число, k — натуральное число.)**

8.28 $\sum\limits_{i=0}^{n} \dbinom{n}{i} a^{n-i} b^i = (a+b)^n$

Биномиальная формула Ньютона.

8.29 $\sum\limits_{i=0}^{n} \dbinom{n}{i} = (1+1)^n = 2^n$

Частный случай (8.28).

8.30 $\sum\limits_{i=r}^{n} \dbinom{i}{r} = \dbinom{n+1}{r+1}$

Свойства биномиальных коэффициентов.

8.31 $\sum\limits_{i=0}^{j} \dbinom{n}{i} \dbinom{m}{j-i} = \dbinom{n+m}{j}$

8.32 $\sum\limits_{i=0}^{n} i \dbinom{n}{i} = n2^{n-1}$

8.33 $\sum\limits_{i=0}^{n} i^2 \dbinom{n}{i} = (n^2+n)2^{n-2}$

8.34 $\sum\limits_{i=0}^{n} \dbinom{n}{i}^2 = \dbinom{2n}{n}$

8.35
$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_m)^n = \sum_{k_1+\cdots+k_m=n} \frac{n!}{k_1!\cdots k_m!} a_1^{k_1} \cdots a_m^{k_m}$$

Полиномиальная формула.

8.36 $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

Формулы суммирования.

8.37 $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$

8.38 $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

8.39	$1^3+2^3+3^3+\dots+n^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$	**Формулы суммирования.**
8.40	$1^4+2^4+3^4+\dots+n^4=$ $=\frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$	
8.41	$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\dots+\frac{1}{n^2}+\dots=\frac{\pi^2}{6}$	**Знаменитая формула.**
8.42	$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}\right)-\ln n\right]=\gamma\approx 0.5772\dots$	**Постоянная γ называется *константой Эйлера*.**

ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

Все формулы стандартны и имеются обычно в книгах по высшей математике, например в [15] и [81]. Вывод формулы биномиальных коэффициентов см. в учебниках теории вероятностей.

Глава 9

ИНТЕГРИРОВАНИЕ

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

9.1	$\int f(x)\,dx = F(x) + C \iff F'(x) = f(x)$	Определение *неопределенного интеграла* функции f.
9.2	$\int (af(x) + bg(x))\,dx = a\int f(x)\,dx + b\int g(x)\,dx$	*Линейность* интеграла. a и b — постоянные.
9.3	$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx$	*Интегрирование по частям.*
9.4	$\int f(x)\,dx = \int f(g(t))g'(t)\,dt, \quad x = g(t)$	*Замена переменной. (Интегрирование подстановкой.)*
9.5	$\int x^n\,dx = \begin{cases} \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C, & n \neq -1 \\ \ln\lvert x\rvert + C, & n = -1 \end{cases}$	Интегралы элементарных функций.
9.6	$\int a^x\,dx = \dfrac{1}{\ln a}a^x + C, \quad a > 0,\ a \neq 1$	
9.7	$\int e^x\,dx = e^x + C$	
9.8	$\int xe^x\,dx = xe^x - e^x + C$	
9.9	$\int x^n e^{ax}\,dx = \dfrac{x^n}{a}e^{ax} - \dfrac{n}{a}\int x^{n-1}e^{ax}\,dx,\ a \neq 0$	
9.10	$\int \log_a x\,dx = x\log_a x - x\log_a e + C, \quad a > 0,\ a \neq 1$	
9.11	$\int \ln x\,dx = x\ln x - x + C$	
9.12	$\int x^n \ln x\,dx = \dfrac{x^{n+1}((n+1)\ln x - 1)}{(n+1)^2} + C$	$(n \neq -1)$.

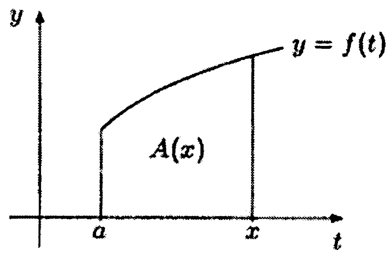
9.13	$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$	**Интегралы элементарных функций.**
9.14	$\int \cos x\,dx = \sin x + C$	
9.15	$\int \operatorname{tg} x\,dx = -\ln\lvert\cos x\rvert + C$	
9.16	$\int \operatorname{ctg} x\,dx = \ln\lvert\sin x\rvert + C$	
9.17	$\displaystyle\int \frac{1}{\sin x}\,dx = \ln\left\lvert\frac{1-\cos x}{\sin x}\right\rvert + C$	
9.18	$\displaystyle\int \frac{1}{\cos x}\,dx = \ln\left\lvert\frac{1+\sin x}{\cos x}\right\rvert + C$	
9.19	$\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\operatorname{ctg} x + C$	
9.20	$\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \operatorname{tg} x + C$	
9.21	$\int \sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\sin x\cos x + C$	
9.22	$\int \cos^2 x\,dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\sin x\cos x + C$	
9.23	$\displaystyle\int \sin^n x\,dx = -\frac{\sin^{n-1} x\cos x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} x\,dx$	$(n \neq 0)$.
9.24	$\displaystyle\int \cos^n x\,dx = \frac{\cos^{n-1} x\sin x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x\,dx$	$(n \neq 0)$.
9.25	$\displaystyle\int e^{\alpha x}\sin\beta x\,dx = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2+\beta^2}(\alpha\sin\beta x - \beta\cos\beta x) + C$	$(\alpha^2+\beta^2 \neq 0)$.
9.26	$\displaystyle\int e^{\alpha x}\cos\beta x\,dx = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2+\beta^2}(\beta\sin\beta x + \alpha\cos\beta x) + C$	$(\alpha^2+\beta^2 \neq 0)$.

9.27	$\int \frac{1}{x^2-a^2}\,dx = \frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert + C$	**Интегралы элементарных функций ($a \neq 0$).**
9.28	$\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C$	($a \neq 0$).
9.29	$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \arcsin\frac{x}{a} + C$	($a > 0$).
9.30	$\int \frac{1}{\sqrt{x^2\pm a^2}}\,dx = \ln\left\lvert x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right\rvert + C$	
9.31	$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C$	($a > 0$).
9.32	$\int \sqrt{x^2\pm a^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2\pm a^2} \pm \frac{a^2}{2}\ln\left\lvert x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right\rvert + C$	
9.33	$\int \frac{dx}{ax^2+2bx+c} = \frac{1}{2\sqrt{b^2-ac}}\ln\left\lvert\frac{ax+b-\sqrt{b^2-ac}}{ax+b+\sqrt{b^2-ac}}\right\rvert + C$	($b^2 > ac$, $a \neq 0$).
9.34	$\int \frac{dx}{ax^2+2bx+c} = \frac{1}{\sqrt{ac-b^2}}\operatorname{arctg}\frac{ax+b}{\sqrt{ac-b^2}} + C$	($b^2 < ac$).
9.35	$\int \frac{dx}{ax^2+2bx+c} = \frac{-1}{ax+b} + C$	($b^2 = ac$, $a \neq 0$).

ОПРЕДЕЛЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

9.36	$\int_a^b f(x)\,dx = \Big|_a^b F(x) = F(b) - F(a)$, если $F'(x) = f(x)$ для всех x из $[a, b]$.	**Определение *определенного интеграла* функции f.**
9.37	• $A(x) = \int_a^x f(t)\,dt \ \Rightarrow\ A'(x) = f(x)$ • $A(x) = \int_x^b f(t)\,dt \ \Rightarrow\ A'(x) = -f(x)$	**Важные математические факты.**

9.38



Площадь выделенной области является функцией $A(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, и производная этой функции площади $A(x)$ есть $A'(x) = f(x)$.

9.39

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$
$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$
$$\int_a^b \alpha f(x)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx$$
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

a, b, c, и α — произвольные вещественные числа.

9.40

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du, \quad u = g(x)$$

Замена переменной. (Интегрирование подстановкой.)

9.41

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = \Big|_a^b f(x)g(x) - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx$$

Интегрирование по частям.

9.42

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{M\to\infty} \int_a^M f(x)\,dx$$

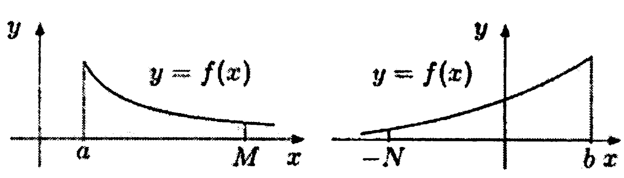
Если этот предел существует, данный интеграл *сходится*. (В противном случае интеграл *расходится*.)

9.43

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{N\to\infty} \int_{-N}^b f(x)\,dx$$

Если этот предел существует, данный интеграл *сходится*. (В противном случае интеграл *расходится*.)

9.44



Поясняющие рисунки к формулам (9.42) и (9.43). Выделенная под графиком область на первом рисунке соответствует $\int_a^M f(x)\,dx$, и $\int_{-N}^b f(x)\,dx$ на втором.

9.45 $$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx + \int_{a}^{\infty} f(x)\,dx = \\ = \lim_{N\to\infty}\int_{-N}^{a} f(x)\,dx + \lim_{M\to\infty}\int_{a}^{M} f(x)\,dx$$

Оба **предела в правой части равенства должны существовать.** a **— произвольно выбранное число. При этом говорят, что интеграл** ***сходится.*** **(Если же условия существования пределов нарушены, то интеграл** ***расходится.*****)**

9.46 $$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = \lim_{h\to 0+}\int_{a+h}^{b} f(x)\,dx$$

Определение интеграла функции f**, непрерывной на** $(a, b]$**.**

9.47 $$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = \lim_{h\to 0+}\int_{a}^{b-h} f(x)\,dx$$

Определение интеграла функции f**, непрерывной на** $[a, b)$**.**

9.48

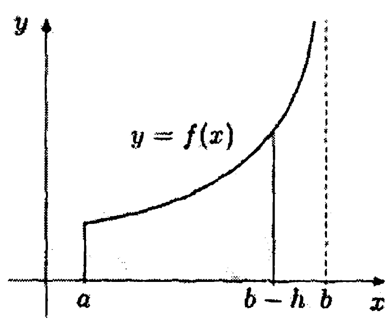


Иллюстрация определения (9.47). Здесь выделена область $\int_a^{b-h} f(x)\,dx$**.**

9.49 $$|f(x)| \le g(x) \text{ для всех } x \ge a \;\Rightarrow\; \left|\int_{a}^{\infty} f(x)\,dx\right| \le \int_{a}^{\infty} g(x)\,dx$$

Сравнительный признак сходимости **для интегралов. Подынтегральные функции** f **и** g **непрерывны на множестве** $x \ge a$**.**

9.50 $$\frac{d}{dx}\int_{a}^{b} f(x,t)\,dt = \int_{a}^{b} f'_x(x,t)\,dt$$

«Дифференцирование под знаком интеграла». Здесь величины a **и** b **независимы от** x**.**

9.51 $$\frac{d}{dx}\int_c^{\infty} f(x,t)\,dt = \int_c^{\infty} f'_x(x,t)\,dt$$

Верно для x внутри (a,b), если $f(x,t)$ и $f'_x(x,t)$ непрерывны для всех $t \geq c$ и всех x внутри (a,b), а $\int_c^{\infty} f(x,t)\,dt$ и $\int_c^{\infty} f'_x(x,t)\,dt$ равномерно сходятся на (a,b).

9.52 $$\frac{d}{dx}\int_{u(x)}^{v(x)} f(x,t)\,dt = \\ = f(x,v(x))v'(x) - f(x,u(x))u'(x) + \int\limits_{u(x)}^{v(x)} f'_x(x,t)\,dt$$

Формула Лейбница.

9.53 $$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t}t^{x-1}\,dt, \quad x > 0$$

Гамма-функция.

9.54

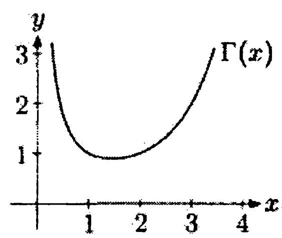


График гамма-функции. Она достигает своего минимального значения ≈ 0.8856 в точке $x \approx 1.4616$.

9.55 $\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$ для всех $x > 0$

Функциональное уравнение для гамма-функции.

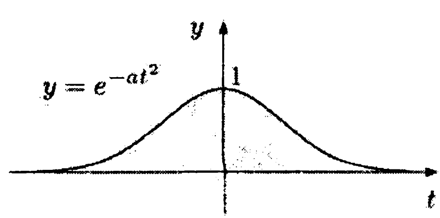
9.56 $\Gamma(n) = (n-1)!$, когда n — положительное целое.

Прямое следствие из функционального уравнения.

9.57 $$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at^2}\,dt = \sqrt{\pi/a} \qquad (a > 0)$$

Важная формула.

9.58



В соответствии с (9.57) площадь выделенной области $\sqrt{\pi/a}$.

9.59 $$\int_0^{\infty} t^k e^{-at^2}\,dt = \frac{1}{2}a^{-(k+1)/2}\Gamma((k+1)/2)$$

Верно для $a > 0$, $k > -1$.

9.60 $\Gamma(x) = \sqrt{2\pi}\, x^{x-\frac{1}{2}} e^{-x} e^{\theta/12x}, \quad x > 0,\ \theta \in (0,1)$ — *Формула Стирлинга.*

9.61 $B(p,q) = \int_0^1 u^{p-1}(1-u)^{q-1}\, du, \quad p, q > 0$ — *Бета-функция.*

9.62 $B(p,q) = \dfrac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$ — Соотношение между бета-функцией и гамма-функцией.

9.63 $\int\limits_a^b f(x)\, dx \approx \dfrac{b-a}{2n}[f(x_0) + 2\sum\limits_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n)]$ — *Формула трапеций.* $x_i = a + i\dfrac{b-a}{n}$, $i = 0, \ldots, n$.

9.64 Если f принадлежит классу гладкости C^2 на $[a,b]$ и $|f''(x)| \le M$ для всех x на $[a,b]$, то $M(b-a)^3/12n^2$ является верхней границей погрешности приближения по (9.63). — Оценка погрешности формулы трапеций.

9.65 $\int_a^b f(x)\, dx \approx \dfrac{b-a}{6n} D$, где

$$D = f(x_0) + 4\sum_{i=1}^{n} f(x_{2i-1}) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_{2i}) + f(x_{2n})$$

— *Формула Симпсона.* Последовательность точек $x_j = a + j\dfrac{b-a}{2n}$, $j = 0, \ldots, 2n$ задает разбиение отрезка $[a,b]$ на $2n$ частичных промежутков одинаковой длины.

9.66 Если f принадлежит классу гладкости C^4 на $[a,b]$ и $|f^{(4)}(x)| \le M$ для всех x из $[a,b]$, то $M(b-a)^5/180n^4$ является верхней границей погрешности приближения по (9.65). — Оценка погрешности формулы Симпсона.

КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

9.67
$$\iint_R f(x,y)\, dx\, dy = \int_a^b \Bigl(\int_c^d f(x,y)\, dy\Bigr)\, dx = \int_c^d \Bigl(\int_a^b f(x,y)\, dx\Bigr)\, dy$$

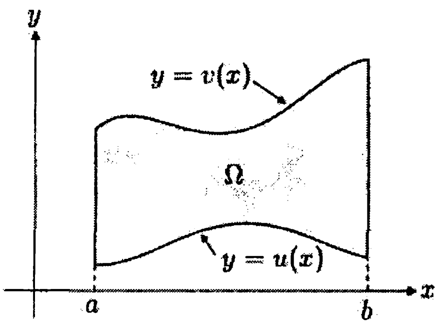
— Определение *двойного интеграла* функции $f(x,y)$ на прямоугольнике $R = [a,b] \times [c,d]$. (Тот факт, что два последних интеграла для непрерывных функций совпадают, известен как *теорема Фубини*.)

9.68 $$V = \int_a^b \left(\int_{u(x)}^{v(x)} f(x,y)\,dy\right)dx$$

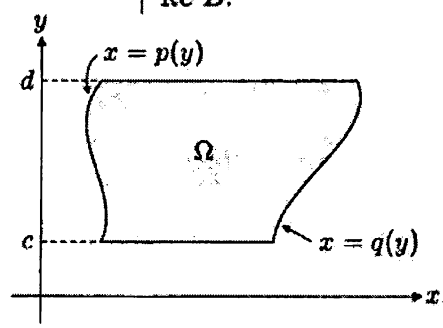
Двойной интеграл функции $f(x,y)$ по области Ω на рисунке A.

9.69 $$V = \int_c^d \left(\int_{p(y)}^{q(y)} f(x,y)\,dx\right)dy$$

Двойной интеграл функции $f(x,y)$ по области Ω на рисунке B.



A



B

9.70 $$F''_{xy}(x,y) = f(x,y), \quad (x,y) \in [a,b] \times [c,d] \;\Rightarrow$$
$$\int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right)dy = $$
$$= F(b,d) - F(a,d) - F(b,c) + F(a,c)$$

Интересный результат. Функция $f(x,y)$ непрерывна.

9.71 $$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy =$$
$$= \iint_{A'} f(g(u,v), h(u,v))|J|\,du\,dv$$

Замена переменной в двойном интеграле. Здесь $x = g(u,v)$ и $y = h(u,v)$ являются взаимно однозначными отображениями класса гладкости C^1 множества A' на A, и определитель матрицы частных производных $J = \partial(g,h)/\partial(u,v)$ (якобиан) не обращается в нуль на множестве A'. Функция f непрерывна.

9.72 $$\iint \cdots \int_\Omega f(\mathbf{x})\,dx_1 \ldots dx_{n-1}\,dx_n =$$
$$= \int_{a_n}^{b_n} \left(\int_{a_{n-1}}^{b_{n-1}} \cdots \left(\int_{a_1}^{b_1} f(\mathbf{x})\,dx_1\right) \cdots dx_{n-1}\right) dx_n$$

***n-кратный интеграл* функции f на n-мерном прямоугольнике Ω. $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$.**

9.73
$$\int\cdots\int_A f(\mathbf{x})\,dx_1\ldots dx_n = \\ = \int\cdots\int_{A'} f(g_1(\mathbf{u}),\ldots,g_n(\mathbf{u}))\,|J|\,du_1\ldots du_n$$

Замена переменной в n-кратном интеграле. $x_i = g_i(\mathbf{u})$, $i = 1,\ldots,n$, является взаимно однозначным отображением класса гладкости C^1 множества A' на A, и определитель матрицы частных производных
$$J = \frac{\partial(g_1,\ldots,g_n)}{\partial(u_1,\ldots,u_n)}$$
(якобиан) не обращается в нуль на множестве A'. Функция f непрерывна.

ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

Большинство этих формул приводится в учебниках по высшей математике, например в [15], [81] и [82]. Результаты (9.67)–(9.73) см. в книге [58], где кратные интегралы обсуждаются более подробно. (В нашем разделе о кратных интегралах перечислены не все необходимые предположения.)

Глава 10

РАЗНОСТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

10.1 $x_t = a_t x_{t-1} + b_t, \qquad t = 1, 2, \ldots$

Линейное разностное уравнение первого порядка.

10.2 $x_t = (\prod_{s=1}^{t} a_s) x_0 + \sum_{k=1}^{t} (\prod_{s=k+1}^{t} a_s) b_k$

Решение уравнения (10.1), если приравнять, по определению, в произведении $\prod_{s=k+1}^{t} a_s$ множители с нулевыми членами к 1.

10.3 $x_t = a^t x_0 + \sum_{k=1}^{t} a^{t-k} b_k, \qquad t = 1, 2, \ldots$

Решение уравнения (10.1) при $a_t = a$, постоянная.

10.4
- $x_t = Aa^t + \sum_{s=0}^{\infty} a^s b_{t-s}, \quad |a| < 1$
- $x_t = Aa^t - \sum_{s=1}^{\infty} \left(\frac{1}{a}\right)^s b_{t+s}, \quad |a| > 1$

Решения уравнения (10.1) при $a_t = a$ и при произвольно выбранной константе A.

10.5 $x_t = ax_{t-1} + b \Leftrightarrow x_t = a^t\left(x_0 - \frac{b}{1-a}\right) + \frac{b}{1-a}$

Уравнение (10.1) и его решение при $a_t = a \neq 1$, $b_t = b$.

10.6
$$
\begin{aligned}
(*) \quad & x_t + a_1(t)x_{t-1} + \cdots + a_n(t)x_{t-n} = b_t \\
(**) \quad & x_t + a_1(t)x_{t-1} + \cdots + a_n(t)x_{t-n} = 0
\end{aligned}
$$

Здесь $(*)$ — *обыкновенное неоднородное линейное разностное уравнение порядка* n, а $(**)$ — соответствующее ему *однородное*.

10.7 Если $u_1(t), \dots, u_n(t)$ являются линейно независимыми решениями однородного уравнения (10.6) (**), а u_t^* — некоторое частное решение неоднородного уравнения (10.6) (*) и $C_1, \dots, C_n$ — произвольно выбранные константы, то общее решение однородного уравнения (**) есть

$$x_t = C_1 u_1(t) + \dots + C_n u_n(t),$$

а общее решение неоднородного (*)

$$x_t = C_1 u_1(t) + \dots + C_n u_n(t) + u_t^*.$$

Структура решений уравнения (10.6). (Определение линейной независимости смотри далее, в (11.14).)

10.8 При $b \neq 0$ уравнение $x_t + ax_{t-1} + bx_{t-2} = 0$ разрешимо:

- при $\frac{1}{4}a^2 - b > 0$: $x_t = C_1 m_1^t + C_2 m_2^t$, где $m_{1,2} = -\frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b}$;
- при $\frac{1}{4}a^2 - b = 0$: $x_t = (C_1 + C_2 t)(-a/2)^t$;
- при $\frac{1}{4}a^2 - b < 0$: $x_t = Ar^t \cos(\theta t + \omega)$, где $r = \sqrt{b}$ and $\cos\theta = -\dfrac{a}{2\sqrt{b}}$, $\theta \in [0, \pi]$.

Решения однородного линейного разностного уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами a и b. C_1, C_2 и ω здесь произвольные константы.

Поиск частного решения уравнения

$$(*) \quad x_t + ax_{t-1} + bx_{t-2} = c_t, \quad b \neq 0$$

ведется подстановкой предложенных ниже пробных функций, при этом константы определяются методом неопределенных коэффициентов:

10.9
- при $c_t = c$ пробуют $u_t^* = A$;
- при $c_t = ct + d$ пробуют $u_t^* = At + B$;
- при $c_t = t^n$ пробуют $u_t^* = A_0 + A_1 t + \dots + A_n t^n$;
- при $c_t = c^t$ пробуют $u_t^* = Ac^t$;
- при $c_t = \alpha \sin ct + \beta \cos ct$ пробуют $u_t^* = A \sin ct + B \cos ct$.

Если функция c_t сама является решением однородного уравнения, то пробное решение умножают на t. Если полученное таким образом новое пробное решение опять решает однородное уравнение, то эту функцию нужно умножить на t еще раз. (Полное описание общей процедуры смотри в [37], раздел 1.8.)

10.10
$$(*) \quad x_t + a_1 x_{t-1} + \dots + a_n x_{t-n} = b_t$$
$$(**) \quad x_t + a_1 x_{t-1} + \dots + a_n x_{t-n} = 0$$

Линейные разностные уравнения с постоянными коэффициентами.

10.11 $m^n + a_1 m^{n-1} + \cdots + a_{n-1}m + a_n = 0$

Характеристическое уравнение **для (10.10). Его решения называются также *характеристическими корнями.***

Предположим, характеристическое уравнение (10.11) имеет n различных корней, $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, и определим

10.12 $$\theta_r = \frac{\lambda_r}{\prod\limits_{\substack{1 \le s \le n \\ s \ne r}} (\lambda_r - \lambda_s)}, \quad r = 1, 2, \dots, n$$

Тогда частное решение уравнения (10.10) (*) есть

$$u_t^* = \sum_{r=1}^{n} \theta_r \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_r^i b_{t-i}$$

Решение неоднородного уравнения (10.10)(*) для случая $|\lambda_r| < 1$ при всех $r = 1, \dots, n$.

Для получения n линейно независимых решений уравнения (10.10) (**) необходимо найти все корни характеристического уравнения (10.11). Тогда:

- вещественный корень m_i кратности 1 порождает решение m_i^t,
- вещественный корень m_j кратности $p > 1$ порождает решения $m_j^t, tm_j^t, \dots, t^{p-1}m_j^t$,
- 10.13 пара комплексных корней $m_k = \alpha + i\beta$, $\overline{m}_k = \alpha - i\beta$ кратности 1 порождает решения $r^t \cos\theta t$, $r^t \sin\theta t$, где $r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ и $\theta \in [0, \pi]$ удовлетворяют равенству $\cos\theta = \alpha/r$, $\sin\theta = \beta/r$,
- пара комплексных корней $m_e = \lambda + i\mu$, $\overline{m}_e = \lambda - i\mu$ кратности $q > 1$ порождает решения u, v, tu, tv, ..., $t^{q-1}u$, $t^{q-1}v$, где $u = s^t \cos\varphi t$, $v = s^t \sin\varphi t$, а $s = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2}$ и $\varphi \in [0, \pi]$ удовлетворяют равенствам

  $\cos\varphi = \lambda/s$ и $\sin\varphi = \mu/s$.

Общий метод получения n линейно независимых решений для (10.10) (**).

10.14 Определенные в (10.10) уравнения называются *(глобально асимптотически) устойчивыми*, если любое решение однородного уравнения (10.10) (**) стремится к 0 при $t \to \infty$.

Определение устойчивости линейного разностного уравнения с постоянными коэффициентами.

10.15 Уравнения (10.10) устойчивы тогда и только тогда, когда все корни характеристического уравнения (10.11) по модулю меньше 1.

Критерий устойчивости для (10.10).

$$\left|\begin{array}{c|c} 1 & a_n \\ \hline a_n & 1 \end{array}\right| > 0, \quad \left|\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & a_n & a_{n-1} \\ a_1 & 1 & 0 & a_n \\ \hline a_n & 0 & 1 & a_1 \\ a_{n-1} & a_n & 0 & 1 \end{array}\right| > 0, \ \ldots,$$

10.16
$$\left|\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \ldots & 0 & a_n & a_{n-1} & \ldots & a_1 \\ a_1 & 1 & \ldots & 0 & 0 & a_n & \ldots & a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1} & a_{n-2} & \ldots & 1 & 0 & 0 & \ldots & a_n \\ \hline a_n & 0 & \ldots & 0 & 1 & a_1 & \ldots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & \ldots & 0 & 0 & 1 & \ldots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_n & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{array}\right| > 0$$

Необходимое и достаточное условие того, что все корни (10.11) по модулю меньше 1. (*Теорема Шура.*)

10.17 $x_t + a_1 x_{t-1} = b_t$ устойчиво $\Longleftrightarrow$ $|a_1| < 1$

Частный случай (10.15) и (10.16).

10.18 $x_t + a_1 x_{t-1} + a_2 x_{t-2} = b_t$ устойчиво
$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 1 - a_2 > 0 \\ 1 - a_1 + a_2 > 0 \\ 1 + a_1 + a_2 > 0 \end{cases}$$

Частный случай (10.15) и (10.16).

10.19 $x_t + a_1 x_{t-1} + a_2 x_{t-2} + a_3 x_{t-3} = b_t$ устойчиво
$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 3 - a_2 > 0 \\ 1 - a_2 + a_1 a_3 - a_3^2 > 0 \\ 1 + a_2 - |a_1 + a_3| > 0 \end{cases}$$

Частный случай (10.15) и (10.16).

10.20 $x_t + a_1 x_{t-1} + a_2 x_{t-2} + a_3 x_{t-3} + a_4 x_{t-4} = b_t$ устойчиво $\Longleftrightarrow$
$$\begin{cases} 1 - a_4 > 0 \\ 3 + 3a_4 - a_2 > 0 \\ 1 + a_2 + a_4 - |a_1 + a_3| > 0 \\ (1 - a_4)^2 (1 + a_4 - a_2) > (a_1 - a_3)(a_1 a_4 - a_3) \end{cases}$$

Частный случай (10.15) и (10.16).

10.21
$$\begin{array}{c} x_1(t) = a_{11}(t) x_1(t-1) + \cdots + a_{1n}(t) x_n(t-1) + b_1(t) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n(t) = a_{n1}(t) x_1(t-1) + \cdots + a_{nn}(t) x_n(t-1) + b_n(t) \end{array}$$

Система линейных разностных уравнений.

10.22 $\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t-1) + \mathbf{b}(t), \quad t = 1, 2, \ldots$

Матричная форма записи ограничений системы (10.21). Векторы $\mathbf{x}(t)$ и $\mathbf{b}(t)$ имеют размерность $n \times 1$, а матрица $\mathbf{A}(t) = (a_{ij}(t))$ квадратная $n \times n$.

10.23 $\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}^t\mathbf{x}(0) + (\mathbf{A}^{t-1} + \mathbf{A}^{t-2} + \cdots + \mathbf{A} + \mathbf{I})\mathbf{b}$

Решение системы (10.22) при $\mathbf{A}(t) = \mathbf{A}$, $\mathbf{b}(t) = \mathbf{b}$.

10.24 $\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}x(t-1) \iff \mathbf{x}(t) = \mathbf{A}^t\mathbf{x}(0)$

Частный случай (10.23) при $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ и $\mathbf{A}^0 = \mathbf{I}$.

10.25 Если квадратная матрица $\mathbf{A}$ порядка n дигонализируема и имеет собственные числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, то решение системы (10.24) можно записать в форме

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{P}\begin{pmatrix} \lambda_1^t & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2^t & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n^t \end{pmatrix}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}(0),$$

где $\mathbf{P}$ является матрицей соответствующих линейно независимых собственных векторов матрицы $\mathbf{A}$.

Важный результат.

10.26 Разностное уравненение (10.22) при $\mathbf{A}(t) = \mathbf{A}$ называется устойчивым, если $\mathbf{A}^t\mathbf{x}(0)$ сходится к нулевому вектору при произвольно выбранном векторе $\mathbf{x}(0)$.

Определение *устойчивости* линейной системы.

10.27 Разностное уравнение (10.22) при $\mathbf{A}(t) = \mathbf{A}$ устойчиво тогда и только тогда, когда все собственные числа матрицы $\mathbf{A}$ по модулю меньше 1.

Характеристика устойчивости линейной системы.

10.28 Если все собственные числа матрицы $\mathbf{A} = (a_{ij})_{n\times n}$ по модулю меньше 1, тогда любое решение $\mathbf{x}(t)$ системы

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t-1) + \mathbf{b}, \quad t = 1, 2, \ldots$$

сходится к вектору $(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}$.

Решение важного для экономистов уравнения.

ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

Большую часть формул и утверждений можно найти, например, в [30], [26] или [37]. См. также [82].

Глава 11
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

11.1 $\dot{x}(t) = f(t) \iff x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(\tau)\,d\tau$

Простое дифференциальное уравнение и его решение. Функция $f(t)$ задана, а функция $x(t)$ неизвестна.

11.2 $$\frac{dx}{dt} = f(t)g(x) \iff \int \frac{dx}{g(x)} = \int f(t)\,dt$$

Перейдите сначала к интегралам. Затем решите полученное неявное уравнение относительно $x = x(t)$.

Дифференциальное уравнение *с разделяющимися переменными*. Если $g(a) = 0$, то решение задается тождеством $x(t) \equiv a$.

11.3 $\dot{x} = g(x/t)$ и $z = x/t \implies t\dfrac{dz}{dt} = g(z) - z$

Однородное дифференциальное уравнение. Подстановка $z = x/t$ дает уравнение с разделяющимися переменными относительно z.

11.4 Уравнение $\dot{x} = B(x-a)(x-b)$ имеет решения
$$x \equiv a, \quad x \equiv b, \quad x = a + \frac{b-a}{1 - Ce^{B(b-a)t}}$$

$a \neq b$. Случай $a = 0$ порождает *логистическое* дифференциальное уравнение. Величина C является постоянной.

11.5
- $\dot{x} + ax = b \quad \Leftrightarrow x = Ce^{-at} + \dfrac{b}{a}$
- $\dot{x} + ax = b(t) \Leftrightarrow x = e^{-at}(C + \int b(t)e^{at}\,dt)$

Линейные дифференциальные уравнения первого порядка с постоянными коэффициентами $a \neq 0$. C является постоянной.

11.6 $\dot{x} + a(t)\,x = b(t) \iff$

$$x = e^{-\int a(t)\,dt}\left(C + \int e^{\int a(t)\,dt} b(t)\,dt\right)$$

Общий вид линейного дифференциального уравнения первого порядка. **Функции $a(t)$ и $b(t)$ известны. C является постоянной.**

11.7 $\dot{x} + a(t)\,x = b(t) \iff$

$$x(t) = x_0 e^{-\int_{t_0}^{t} a(\xi)\,d\xi} + \int_{t_0}^{t} b(\tau) e^{-\int_{\tau}^{t} a(\xi)\,d\xi}\,d\tau$$

Решение уравнения (11.6) при заданном начальном условии $x(t_0) = x_0$.

11.8 $\dot{x} = Q(t)\,x + R(t)\,x^n$ **имеет решение**

$$x(t) = e^{\frac{P(t)}{1-n}}\left[C + (1-n)\int R(t) e^{-P(t)}\,dt\right]^{\frac{1}{1-n}},$$

где $P(t) = (1-n)\int Q(t)\,dt$.

Дифференциальное уравнение *Бернулли* и его решение ($n \neq 1$). C является постоянной.

11.9 $\dot{x} = P(t) + Q(t)\,x + R(t)\,x^2$

Дифференциальное уравнение *Риккати*. Принципиально неразрешимо аналитически. Подстановка $x = u + 1/z$ дает решение *при условии*, что известно частное решение $u = u(t)$.

11.10 **Дифференциальное уравнение**

$$P(t,x) + Q(t,x)\,\dot{x} = 0$$

называется уравнением *в полных дифференциалах*, если найдется функция $\varphi(t,x)$ класса гладкости C^1, такая, что $P(t,x) = \varphi_1'(t,x)$ и $Q(t,x) = \varphi_2'(t,x)$. Тогда у него есть решение $\varphi(t,x) = C$ при некоторой константе C.

Уравнение *в полных дифференциалах* и его решение.

11.11 **Если функции $P(t,x)$ и $Q(t,x)$ принадлежат классу гладкости C^1, то дифференциальное уравнение**

$$P(t,x) + Q(t,x)\,\dot{x} = 0$$

является уравнением *в полных дифференциалах* на открытом прямоугольнике R тогда и только тогда, когда $P_2'(t,x) = Q_1'(t,x)$ на R.

Необходимое и достаточное решение того, что дифференциальное уравнение является уравнением в полных дифференциалах.

УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

11.12 $$\frac{d^n x}{dt^n} + a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(t)\frac{dx}{dt} + a_n(t)x = f(t)$$

Обыкновенное линейное дифференциальное уравнение порядка n.

11.13 $$\frac{d^n x}{dt^n} + a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(t)\frac{dx}{dt} + a_n(t)x = 0$$

Однородное уравнение, соответствующее (11.12).

11.14 Функции $u_1(t), \ldots, u_m(t)$ *линейно независимы*, если равенство

$$C_1u_1(t) + \cdots + C_mu_m(t) = 0$$

выполняется для всех t только при обращении в нуль всех констант $C_1, \ldots, C_m$. Если эти функции не являются линейно независимыми, то они *линейно зависимы*.

Определение линейной (не)зависимости функций.

11.15 Если $u_1(t), \ldots, u_n(t)$ являются линейно независимыми решениями однородного уравнения (11.13), а $u^*(t)$ — некоторое частное решение неоднородного уравнения (11.12), то общим решением (11.13) будет

$$x(t) = C_1u_1(t) + \cdots + C_nu_n(t),$$

а общим решением (11.12) будет

$$x(t) = C_1u_1(t) + \cdots + C_nu_n(t) + u^*(t),$$

где $C_1, \ldots, C_n$ — произвольные константы.

Структура решений уравнений (11.13) и (11.12). (Заметим, что записать аналитические выражения для n искомых решений $u_1(t), \ldots, u_n(t)$ уравнения (11.13) принципиально невозможно.)

11.16 Метод поиска частного решения уравнения (11.12) при условии того, что $u_1, \ldots, u_n$ являются n линейно независимыми решениями для (11.13): решается система

$$\begin{aligned}
\dot{C}_1(t)u_1 &+ \cdots + \dot{C}_n(t)u_n = 0\\
\dot{C}_1(t)\dot{u}_1 &+ \cdots + \dot{C}_n(t)\dot{u}_n = 0\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\dot{C}_1(t)u_1^{(n-2)} &+ \cdots + \dot{C}_n(t)u_n^{(n-2)} = 0\\
\dot{C}_1(t)u_1^{(n-1)} &+ \cdots + \dot{C}_n(t)u_n^{(n-1)} = b(t)
\end{aligned}$$

относительно $\dot{C}_1(t), \ldots, \dot{C}_n(t)$. Их интегрируют для получения $C_1(t), \ldots, C_n(t)$. Тогда одним из частных решений для (11.12) является $u^*(t) = C_1(t)u_1 + \cdots + C_n(t)u_n$.

Метод *вариации постоянных*, всегда дающий возможность найти частное решение (11.12), при известном общем решении (11.13). Здесь запись $u_j^{(i)} = d^iu_j/dt^i$ обозначает производную порядка i от функции u_j.

11.17 $\ddot{x} + a\dot{x} + bx = 0$ имеет общее решение:

- если $\frac{1}{4}a^2 - b > 0$: $\quad x = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}$ где $r_{1,2} = -\frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b}$;
- если $\frac{1}{4}a^2 - b = 0$: $\quad x = (C_1 + C_2 t)e^{-at/2}$;
- если $\frac{1}{4}a^2 - b < 0$: $\quad x = Ae^{\alpha t}\cos(\beta t + \omega)$, где $\alpha = -\frac{1}{2}a$, $\beta = \sqrt{b - \frac{1}{4}a^2}$.

Решение однородного линейного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами a и b. C_1, C_2, A и ω постоянны.

11.18 $\ddot{x} + a\dot{x} + bx = f(t)$, $b \neq 0$, имеет частное решение $u^* = u^*(t)$:

- $f(t) = A$: $\quad u^* = A/b$.
- $f(t) = At + B$: $\quad u^* = \dfrac{A}{b}t + \dfrac{bB - aA}{b^2}$.
- $f(t) = At^2 + Bt + C$: $u^* = \frac{A}{b}t^2 + \frac{(bB - 2aA)}{b^2}t + \frac{Cb^2 - (2A + aB)b + 2a^2A}{b^3}$.
- $f(t) = pe^{qt}$: $\quad u^* = pe^{qt}/(q^2 + aq + b)$ (если $q^2 + aq + b \neq 0$).

Частные решения $\ddot{x} + a\dot{x} + bx = f(t)$. Если $f(t) = pe^{qt}$, $q^2 + aq + b = 0$ и $2q + a \neq 0$, то решением является $u^* = pte^{qt}/(2q + a)$. Если $f(t) = pe^{qt}$, $q^2 + aq + b = 0$ и $2q + a = 0$, то решением является $u^* = \frac{1}{2}pt^2e^{qt}$.

11.19 $t^2\ddot{x} + at\dot{x} + bx = 0$, $t > 0$, имеет общее решение:

- если $(a-1)^2 > 4b$: $\quad x = C_1 t^{r_1} + C_2 t^{r_2}$, где $r_{1,2} = -\frac{1}{2}\left[(a-1) \pm \sqrt{(a-1)^2 - 4b}\right]$;
- если $(a-1)^2 = 4b$: $\quad x = (C_1 + C_2 \ln t)\, t^{(1-a)/2}$;
- если $(a-1)^2 < 4b$: $\quad x = At^{\lambda}\cos(\mu \ln t + \omega)$, где $\lambda = \frac{1}{2}(1-a)$, $\mu = \frac{1}{2}\sqrt{4b - (a-1)^2}$.

Решения *дифференциального уравнения Эйлера* второго порядка. C_1, C_2, A и ω постоянны.

11.20 $$\frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}\frac{dx}{dt} + a_n x = f(t)$$

Обыкновенное линейное дифференциальное уравнение порядка n с постоянными коэффициентами.

11.21 $$\frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}\frac{dx}{dt} + a_n x = 0$$

Соответствующее (11.20) *однородное уравнение.*

11.22 $$r^n + a_1 r^{n-1} + \cdots + a_{n-1}r + a_n = 0$$

Соответствующее (11.20) и (11.21) *характеристическое уравнение.*

11.23 $x = x(t) = C_1e^{r_1t} + C_2e^{r_2t} + \dots + C_ne^{r_nt}$

Общее решение (11.21) при условии того, что все корни $r_1, \dots, r_n$ уравнения (11.22) вещественны и между собой различны.

11.24 Для получения n линейно независимых решений (11.21) необходимо найти все корни уравнения (11.22).

- Вещественный корень r_i кратности 1 порождает решение e^{r_it}.
- Вещественный корень r_i кратности $p > 1$ порождает решения $e^{r_jt}, te^{r_jt}, \dots, t^{p-1}e^{r_jt}$.
- Пара комплексных корней $r_k = \alpha + i\beta$, $\bar{r}_k = \alpha - i\beta$ кратности 1 порождает решения $e^{\alpha t}\cos\beta t$ и $e^{\alpha t}\sin\beta t$.
- Пара комплексных корней $r_e = \lambda + i\mu$, $\bar{r}_e = \lambda - i\mu$ кратности $q > 1$ порождает решения u, v, tu, $tv, \dots, t^{q-1}u$, $t^{q-1}v$, где $u = e^{\lambda t}\cos\mu t$ и $v = e^{\lambda t}\sin\mu t$.

Общий метод нахождения n линейно независимых решений (11.21).

11.25 Уравнение (11.21) (или (11.20)) *устойчивр (глобально асимптотически устойчиво)*, если любое решение (11.21) стремится к нулю при
$t \to \infty$.

Определение устойчивости линейных уравнений с постоянными коэффициентами.

11.26 Уравнение (11.21) устойчиво $\iff$ вещественные части всех корней характеристического уравнения (11.22) отрицательны.

Критерий устойчивости (11.21).

11.27 Уравнение (11.21) устойчиво $\Longrightarrow$ $a_i > 0$ для всех $i = 1, \dots, n$

Необходимое условие устойчивости (11.21).

11.28 $$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-2} & a_n \end{pmatrix}$$

Матрица коэффициентов уравнения (11.21) (при $a_0 = 1$). k-й столбец этой матрицы имеет вид
$\dots a_{k+1}\, a_k\, a_{k-1} \dots$,
где элемент a_k расположен на главной диагонали. Элемент a_{k+j}, индекс которого $k + j$ отрицателен или больше, чем n, полагается равным нулю.

11.29 (a_1), $\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 1 & a_2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ 1 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{pmatrix}$

Матрица **A** в (11.28) порядка $n = 1, 2, 3$ при $a_0 = 1$.

(11.21) устойчиво $\iff$

11.30 $\left\{\begin{array}{l}\text{все угловые главные миноры}\\ \mathbf{A}\text{ в (11.28) (при } a_0 = 1\text{) поло-}\\ \text{жительны.}\end{array}\right.$

Условия устойчивости *Рауса–Гурвица*.

11.31

- $\dot{x} + a_1 x = f(t)$ устойчиво $\iff a_1 > 0$
- $\ddot{x} + a_1\dot{x} + a_2 x = f(t)$ устойчиво $\iff \begin{cases} a_1 > 0 \\ a_2 > 0 \end{cases}$
- $\dddot{x} + a_1\ddot{x} + a_2\dot{x} + a_3 x = f(t)$ устойчиво $\iff a_1 > 0,\ a_3 > 0$ и $a_1 a_2 > a_3$

Частные случаи (11.30). (Легче увидеть эквивалентность выполнения этих условий, чем проверить положительность всех угловых главных миноров матриц, выписанных в (11.29).)

СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

11.32 $$\left.\begin{array}{l} \dfrac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1, \ldots, x_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = f_n(t, x_1, \ldots, x_n) \end{array}\right\} \iff \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(t, \mathbf{x})$$

Нормальная (неавтономная) система дифференциальных уравнений. Здесь $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\dot{\mathbf{x}} = (\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n)$ и $\mathbf{F} = (f_1, \cdots, f_n)$.

11.33 $$\begin{array}{l} \dot{x}_1 = a_{11}(t)x_1 + \cdots + a_{1n}(t)x_n + b_1(t) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dot{x}_n = a_{n1}(t)x_1 + \cdots + a_{nn}(t)x_n + b_n(t) \end{array}$$

Линейная система дифференциальных уравнений.

11.34 $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{b}(t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0$

Матричная форма записи ограничений системы (11.33) с заданным начальным условием. $\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}$ и $\mathbf{b}(t)$ — векторы-столбцы, а матрица $\mathbf{A}(t) = (a_{ij}(t))_{n\times n}$ квадратна.

11.35 $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0 \iff \mathbf{x} = e^{\mathbf{A}(t-t_0)}\mathbf{x}^0$

Решение (11.34) для $\mathbf{A}(t) = \mathbf{A}$, $\mathbf{b}(t) = \mathbf{0}$. (Показательная функция для матриц определена далее, в (19.30).)

11.36 Пусть $\mathbf{p}_j(t) = (p_{1j}(t), \ldots, p_{nj}(t))'$, $j = 1, \ldots, n$ являются n линейно независимыми решениями однородного дифференциального уравнения $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}$ при условии $\mathbf{p}_j(t_0) = \mathbf{e}_j$, $j = 1, \ldots, n$, где $\mathbf{e}_j$ есть j-й стандартный единичный вектор пространства $\mathbb{R}^n$. Тогда *резольвентой* для данного уравнения будет матрица

$$\mathbf{P}(t, t_0) = \begin{pmatrix} p_{11}(t) & \ldots & p_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1}(t) & \ldots & p_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

Определение резольвенты однородного линейного дифференциального уравнения. Заметим, что $\mathbf{P}(t_0, t_0) = \mathbf{I}_n$.

11.37 $\mathbf{x} = \mathbf{P}(t, t_0)\mathbf{x}^0 + \int_{t_0}^{t} \mathbf{P}(t, s)\mathbf{b}(s)\, ds$

Решение (11.34).

11.38 Если $\mathbf{P}(t, s)$ — резольвента $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}$, то $\mathbf{P}(s, t)'$ (результат транспонирования матрицы $\mathbf{P}(s, t)$) будет резольвентой уравнения $\dot{\mathbf{z}} = -(\mathbf{A}(t))'\mathbf{z}$.

Полезный математический факт.

11.39 Рассмотрим дифференциальное уравнение порядка n

$$(*) \quad \frac{d^n x}{dt^n} = F\left(t, x, \frac{dx}{dt}, \ldots, \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}\right).$$

Введя новые переменные

$$y_1 = x, \; y_2 = \frac{dx}{dt}, \; \ldots, \; y_n = \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}},$$

уравнение $(*)$ можно преобразовать в такую нормальную систему:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2 \\ \dot{y}_2 &= y_3 \\ &\ldots\ldots \\ \dot{y}_{n-1} &= y_n \\ \dot{y}_n &= F(t, y_1, y_2, \ldots, y_n) \end{aligned}$$

От любого дифференциального уравнения порядка n при помощи новых переменных можно перейти к нормальной системе. (Аналогично введением новых переменных в нормальные системы преобразуется и большой класс систем дифференциальных уравнений высших порядков.)

Рассмотрим начальную задачу

(*) $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0,$

где и сама функция $\mathbf{F} = (f_1, \ldots, f_n)$, и ее частные производные первого порядка по $x_1, \ldots, x_n$ непрерывны на множестве

11.40 $\Gamma = \{ (t, \mathbf{x}) : |t - t_0| \le a, \ \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0\| \le b \}$

Определим

$$M = \max_{(t,\mathbf{x}) \in \Gamma} \|\mathbf{F}(t, \mathbf{x})\|, \quad r = \min(a, b/M).$$

Тогда (*) имеет единственное решение $\mathbf{x}(t)$ на открытом интервале $(t_0 - r, t_0 + r)$ и на этом интервале верно $\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^0\| \le b$.

(Локальная) теорема существования и единственности решения.

Рассмотрим начальную задачу

1) $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0,$

где $\mathbf{F} = (f_1, \ldots, f_n)$ и ее частные производные первого порядка по $x_1, \ldots, x_n$ непрерывны для всех $(t, \mathbf{x})$. Более того, предположим, что найдутся непрерывные функции $a(t)$ и $b(t)$, такие, что

11.41 2) $\|\mathbf{F}(t, \mathbf{x})\| \le a(t)\|\mathbf{x}\| + b(t)$ для всех $(t, \mathbf{x})$

или

3) $\mathbf{x} \cdot \mathbf{F}(t, \mathbf{x}) \le a(t)\|\mathbf{x}\|^2 + b(t)$ для всех $(t, \mathbf{x})$.

Тогда для любой начальной точки $(t_0, \mathbf{x}^0)$ существует единственное решение $\mathbf{x}(t)$ уравнения (1), определенное на $(-\infty, \infty)$.

В частности, *выполняется* неравенство (2), если для всех $(t, \mathbf{x})$

4) $\|\mathbf{F}'_{\mathbf{x}}(t, \mathbf{x})\| \le c(t)$ для непрерывной $c(t)$.

Глобальная теорема существования и единственности. В (4) можно брать произвольную матричную норму для $\mathbf{F}'_{\mathbf{x}}(t, \mathbf{x})$. (Нормы для матриц приводятся в (19.26).)

АВТОНОМНЫЕ СИСТЕМЫ

11.42
$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, \ldots, x_n) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, \ldots, x_n) \end{aligned}$$

Автономная система дифференциальных уравнений первого порядка.

11.43 $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ является *положением равновесия* для системы (11.42), если $f_i(\mathbf{a}) = 0$, $i = 1, \ldots, n$.

Определение положения равновесия (точки покоя) для (11.42).

11.44 Если $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$ является решением системы (11.42) на интервале I, тогда множество точек $\mathbf{x}(t)$ в $\mathbb{R}^n$ задает кривую в $\mathbb{R}^n$, называемую *траекторией* (или *орбитой*) этой системы.

Определение траектории (или орбиты), называемой также *интегральной кривой.*

Положение равновесия $\mathbf{a}$ для системы (11.42) *(локально) устойчиво*, если все решения, начинающиеся в окрестности $\mathbf{a}$, остаются в окрестности $\mathbf{a}$. Для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что $\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \delta$, тогда существует решение $\varphi(t)$ системы (11.42), определенное при $t \geq 0$, при этом $\varphi(0) = \mathbf{x}$ удовлетворяет условию

11.45 $$\|\varphi(t) - \mathbf{a}\| < \varepsilon \quad \text{для всех } t > 0.$$

Если $\mathbf{a}$ устойчиво и найдется такое $\delta' > 0$, что

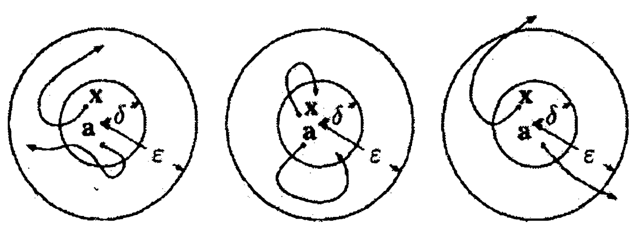
$$\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \delta' \implies \lim_{t\to\infty} \|\varphi(t) - \mathbf{a}\| = 0,$$

то решение $\mathbf{a}$ (локально) *асимптотически устойчиво.*

Если решение $\mathbf{a}$ не является устойчивым, его называют *неустойчивым.*

Определение (локальной) устойчивости и неустойчивости.

11.46



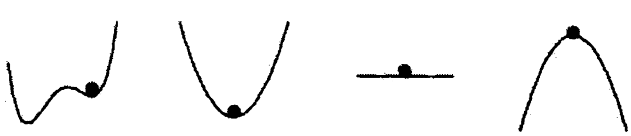
Локально устойчиво | Асимптотически устойчиво | Неустойчиво

Иллюстрации понятия устойчивости решений. Кривыми линиями со стрелками показаны возможные траектории.

11.47 Если независимо от начального положения любое решение системы (11.42) сходится к единственному положению равновесия $\mathbf{a}$, то $\mathbf{a}$ *глобально асимптотически устойчиво.*

Глобальная асимптотическая устойчивость.

11.48



Локально устойчиво | Глобально устойчиво | Неустойчиво | Неустойчиво

Принципиальные иллюстрации понятия устойчивости решений с меньшим числом технических деталей на рисунке.

11.49 Пусть $\mathbf{x}(t)$ является решением (11.42) в предположении принадлежности функций $\mathbf{F} = (f_1, \ldots, f_n)$ к классу гладкости C^1 и выполнении $\mathbf{x}(t_0 + T) = \mathbf{x}(t_0)$ при некоторых t_0 и $T > 0$. Тогда $\mathbf{x}(t+T) = \mathbf{x}(t)$ для *всех* t.

Если траектория, являющаяся решением системы (11.42), возвращается к своему начальному положению по прошествии времени T, то она должна быть *периодическим* решением с периодом длины T.

Пусть решение $(x(t), y(t))$ системы

$$\dot{x} = f(x,y), \quad \dot{y} = g(x,y)$$

11.50 остается внутри компактной области на плоскости, в которой нет положения равновесия системы. Тогда эта траектория должна навиваться (наподобие спирали) вокруг замкнутой кривой, являющейся траекторией периодического решения системы.

Теорема *Пуанкаре–Бендиксона*.

Пусть $\mathbf{a}$ — положение равновесия (11.42), и определим

11.51
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1(\mathbf{a})}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1(\mathbf{a})}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_n(\mathbf{a})}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_n(\mathbf{a})}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Если у всех собственных чисел матрицы $\mathbf{A}$ вещественные части отрицательны, то равновесие $\mathbf{a}$ (локально) асимптотически устойчиво.

Если хотя бы у одного из этих собственных чисел вещественная часть положительна, то равновесие $\mathbf{a}$ неустойчиво.

Теорема Ляпунова. Положение равновесия $\mathbf{a}$ называют *стоком*, если все собственные числа матрицы $\mathbf{A}$ имеют отрицательные вещественные части. (Если вещественные части всех собственных чисел матрицы $\mathbf{A}$ положительны, то равновесие называется *источником*.)

Необходимым и достаточным условием того, что вещественные части всех собственных чисел вещественной $n \times n$ матрицы $\mathbf{A} = (a_{ij})$ отрицательны, является выполнение следующих неравенств:

11.52
- при $n = 2$: $\operatorname{tr}(\mathbf{A}) < 0$ и $|\mathbf{A}| > 0$;
- при $n = 3$: $\operatorname{tr}(\mathbf{A}) < 0$, $|\mathbf{A}| < 0$ и

$$\begin{vmatrix} a_{22} + a_{33} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & a_{11} + a_{33} & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & a_{11} + a_{22} \end{vmatrix} < 0.$$

Полезные характеристики устойчивых матриц порядка 2 и 3. (Часто квадратную матрицу $n \times n$ называют *устойчивой*, если все ее собственные числа имеют отрицательные вещественные части.)

11.53 Пусть (a, b) является положением равновесия для системы

$$\dot{x} = f(x, y), \quad \dot{y} = g(x, y),$$

определим

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f(a,b)}{\partial x} & \dfrac{\partial f(a,b)}{\partial y} \\ \dfrac{\partial g(a,b)}{\partial x} & \dfrac{\partial g(a,b)}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Тогда, если $\mathrm{tr}(\mathbf{A}) < 0$ и $|\mathbf{A}| > 0$, (a, b) локально асимптотически устойчиво.

Частный случай (11.51). Формулировка устойчивости в терминах знаков следа и определителя матрицы $\mathbf{A}$ для $n = 2$.

11.54 Положение равновесия а системы (11.42) называется *гиперболическим*, если у матрицы $\mathbf{A}$ (11.51) нет собственных чисел с нулевой вещественной частью.

Определение гиперболического положения равновесия.

11.55 Гиперболическое положение равновесия системы (11.42) либо неустойчиво, либо асимптотически устойчиво.

Важный результат.

11.56 Пусть (a, b) является положением равновесия системы

$$\dot{x} = f(x, y), \quad \dot{y} = g(x, y),$$

определим

$$\mathbf{A}(x, y) = \begin{pmatrix} f_1'(x,y) & f_2'(x,y) \\ g_1'(x,y) & g_2'(x,y) \end{pmatrix}.$$

Предположим, что для всех $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ выполняются три условия:

a) $\mathrm{tr}(\mathbf{A}(x, y)) = f_1'(x, y) + g_2'(x, y) < 0$;

b) $|\mathbf{A}(x, y)| = \begin{vmatrix} f_1'(x,y) & f_2'(x,y) \\ g_1'(x,y) & g_2'(x,y) \end{vmatrix} > 0$;

c) по крайней мере, одно из произведений $f_1'(x, y)g_2'(x, y)$ и $f_2'(x, y)g_1'(x, y)$ не равно нулю для всех точек плоскости $\mathbb{R}^2$.

Тогда (a, b) глобально асимптотически устойчиво.

Теорема устойчивости Олеча.

$V(\mathbf{x}) = V(x_1, \ldots, x_n)$ является функцией Ляпунова для системы (11.42) на открытом множестве Ω, содержащем положение равновесия $\mathbf{a}$, если

11.57
- $V(\mathbf{x}) > 0$ для всех $\mathbf{x} \neq \mathbf{a}$ из Ω, $V(\mathbf{a}) = 0$

и
- $$\dot{V}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial x_i} f_i(\mathbf{x}) \le 0$$

  для всех $\mathbf{x} \neq \mathbf{a}$ на Ω.

Определение *функции Ляпунова.*

11.58 Пусть $\mathbf{a}$ — положение равновесия для (11.42) и для этой системы найдется функция Ляпунова $V(\mathbf{x})$ на открытом множестве Ω, содержащем $\mathbf{a}$. Тогда $\mathbf{a}$. Если, кроме того,

$$\dot{V}(\mathbf{x}) < 0 \text{ для всех } \mathbf{x} \neq \mathbf{a} \text{ из } \Omega,$$

то $\mathbf{a}$ локально асимптотически устойчиво.

Теорема Ляпунова.

Модифицированная модель Лотка–Вольтерра

$$\dot{x} = kx - axy - \varepsilon x^2, \qquad \dot{y} = -hy + bxy - \delta y^2$$

имеет асимптотически устойчивое равновесие

11.59
$$(x_0, y_0) = \left(\frac{ah + k\delta}{ab + \delta\varepsilon}, \frac{bk - h\varepsilon}{ab + \delta\varepsilon}\right)$$

Функция $V(x, y) = H(x, y) - H(x_0, y_0)$, где

$$H(x, y) = b(x - x_0 \ln x) + a(y - y_0 \ln y)$$

для этой системы является функцией Ляпунова, так как верно $\dot{V}(x, y) < 0$ везде, кроме положения равновесия.

Пример использования(11.58): x — число кроликов, y — число лис. (a, b, h, k, δ и ε положительны, $bk > h\varepsilon$.) $\varepsilon = \delta = 0$ задает классическую модель Лотка–Вольтерра с равенством $\dot{V} = 0$ везде и интегральными кривыми, замкнутыми в окрестности положения равновесия.

Пусть(a, b) — положение равновесия для системы

$$\dot{x} = f(x, y), \quad \dot{y} = g(x, y),$$

11.60 определим матрицу $\mathbf{A}$ в соответствии с (11.53). Если $|\mathbf{A}| < 0$, то существует (с точностью до сдвига t) ровно два решения $(x_1(t), y_1(t))$ и $(x_2(t), y_2(t))$, которые определены на интервале $[t_0, \infty)$ и сходятся к (a, b) с противоположных направлений, и оба этих направления перпендикулярны линии, проходящей через (a, b) параллельно собственному вектору, соответствующему отрицательному собственному числу. Такое положение равновесия называется *седловой точкой.*

Теорема о локальной седловой точке. ($|\mathbf{A}| < 0$ тогда и только тогда, когда значения собственных чисел $\mathbf{A}$ вещественны и их знаки противоположны.) Глобальный вариант этого утверждения см. в [73, раздел 3.10, теорема 19].

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

11.61 Метод решения

$$(*)\quad P(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial x}+Q(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial y}=R(x,y,z)$$

- Найти решения системы
$$\frac{dy}{dx}=\frac{Q}{P},\quad \frac{dz}{dx}=\frac{R}{P},$$
где переменная x свободна. Если получается решение $y=\varphi_1(x,C_1,C_2)$ и $z=\varphi_2(x,C_1,C_2)$, то выразите явно C_1 и C_2 как $C_1=u(x,y,z)$ и $C_2=v(x,y,z)$.
- Пусть Φ — произвольная функция класса гладкости C^1 от двух переменных и хотя бы одна из функций u и v зависит от аргумента z, тогда $z=z(x,y)$, явно заданная уравнением
$$\Phi(u(x,y,z),v(x,y,z))=0,$$
будет решением сисетмы $(*)$.

Обыкновенное *квазилинейное дифференциальное уравнение первого порядка в частных производных* и метод его решения. В общем случае данный метод не позволяет найти *все* решения для $(*)$. (См. об этом подробнее в [88, гл. II].)

11.62 Следующая система дифференциальных уравнений в частных производных

$$\frac{\partial z(\mathbf{x})}{\partial x_1}=f_1(\mathbf{x},z(\mathbf{x}))$$
$$\frac{\partial z(\mathbf{x})}{\partial x_2}=f_2(\mathbf{x},z(\mathbf{x}))$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{\partial z(\mathbf{x})}{\partial x_n}=f_n(\mathbf{x},z(\mathbf{x}))$$

разрешима относительно неизвестной функции $z(\mathbf{x})=z(x_1,\dots,x_n)$ тогда и только тогда, когда квадратная $n\times n$ матрица частных производных функций $f_1,\dots,f_n$ по $x_1,\dots,x_n$ симметрична.

Теорема Фробениуса. Функции $f_1,\dots,f_n$ принадлежат классу гладкости C^1.

ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

Хорошим пособием по обыкновенным дифференциальным уравнениям является [9]. См. также [66]. Подробнее результаты (11.28)–(11.31) есть в книгах [84 или [26]. В [3] содержится большинство качественных результатов и их приложений к экономике. Про (11.61) см. [78] или [88]. Теорема (11.62) приводится в [35]. Ее экономические приложения есть в [59].

Глава 12

ТОПОЛОГИЯ В ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

12.1 $B(\mathbf{a}; r) = \{ \mathbf{x} : \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < r \} \qquad (r > 0)$

Определение *открытого n-шара* с радиусом r и центром $\mathbf{a}$ в $\mathbb{R}^n$. (Обозначение $\| \ \|$ вводится в (18.13).)

12.2
- Точка $\mathbf{a}$ множества $S \subset \mathbb{R}^n$ является его *внутренней точкой*, если найдутся n-шары с центром $\mathbf{a}$, все точки которых входят в S.
- Точка $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ (не обязательно принадлежащая S) является *граничной точкой* множества S, если любой n-шар с центром $\mathbf{b}$ содержит хотя бы одну точку множества S и хотя бы одну точку вне S.

Определение внутренних и граничных точек.

12.3 Множество S в $\mathbb{R}^n$ называется
- *открытым*, если все его точки являются внутренними,
- *замкнутым*, если $\mathbb{R}^n \setminus S$ открыто,
- *ограниченным*, если найдется такое число M, что $\|\mathbf{x}\| \leq M$ для всех $\mathbf{x}$ из S,
- *компактным*, если оно замкнуто и ограничено.

Важные определения. $\mathbb{R}^n \setminus S = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{x} \notin S\}$.

12.4 Множество S в $\mathbb{R}^n$ тогда и только тогда, когда оно содержит все свои граничные точки. Множество $\bar{S}$, состоящее из всех точек S и всех его граничных точек, называется *замыканием* множества S.

Полезные характеристики замкнутых множеств и определение замыкания данного множества.

12.5 Множество S в $\mathbb{R}^n$ называется *окрестностью* точки $\mathbf{a}$ в $\mathbb{R}^n$, если $\mathbf{a}$ является внутренней точкой множества S.

Определение окрестности.

12.6	Последовательность $\{\mathbf{x}_k\}$ в $\mathbb{R}^n$ *сходится* к $\mathbf{x}$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое целое число N (номер члена последовательности), что $\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}\| < \varepsilon$ для всех $k \geq N$.	Сходимость последовательности в $\mathbb{R}^n$. Если последовательность не сходится, то она *расходится*.
12.7	Последовательность $\{\mathbf{x}_k\}$ в $\mathbb{R}^n$ является *последовательностью Коши*, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое целое число N, что $\|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k\| < \varepsilon$ для всех $j, k \geq N$.	Определение последовательности Коши.
12.8	Последовательность $\{\mathbf{x}_k\}$ в $\mathbb{R}^n$ сходится тогда и только тогда, когда она является последовательностью Коши.	*Признак сходимости Коши.*
12.9	Множество S в $\mathbb{R}^n$ замкнуто тогда и только тогда, когда предел $\mathbf{x} = \lim_k \mathbf{x}_k$ любой сходящейся последовательности $\{\mathbf{x}_k\}$ точек множества S принадлежит также множеству S.	Характеристика замкнутого множества.
12.10	Пусть $\{\mathbf{x}_k\}$ — последовательность в $\mathbb{R}^n$, а $k_1 < k_2 < k_3 < \cdots$ — возрастающая последовательность целых чисел. Тогда $\{\mathbf{x}_{k_j}\}_{j=1}^{\infty}$ называется *подпоследовательностью* последовательности $\{\mathbf{x}_k\}$.	Определение подпоследовательности.
12.11	Множество S в $\mathbb{R}^n$ компактно тогда и только тогда, когда любая последовательность его точек имеет подпоследовательность, сходящуюся к точке множества S.	Характеристика компактного множества.
12.12	$f : M \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *непрерывна* в точке $\mathbf{a}$ из M, если для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что $$\lvert f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a})\rvert < \varepsilon$$ для всех $\mathbf{x}$ из M при условии $\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \delta$.	Определение непрерывной функции n переменных.
12.13	Функция $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_m) : M \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *непрерывна* в точке $\mathbf{a}$ из M, если для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что $$\|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{a})\| < \varepsilon$$ для всех $\mathbf{x}$ из M при условии $\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \delta$.	Определение непрерывной векторной функции n переменных (значениями функции являются не числа, а векторы).

12.14 Пусть $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_m)$ — функция из $M \subset \mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$, а точка $\mathbf{a}$ из множества M. Тогда:

- $\mathbf{f}$ непрерывна в точке $\mathbf{a}$ тогда и только тогда, когда любая функция f_i непрерывна в точке $\mathbf{a}$ в соответствии с определением (12.12);
- $\mathbf{f}$ непрерывна в точке $\mathbf{a}$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{f}(\mathbf{x}_k) \to \mathbf{f}(\mathbf{a})$ для любой последовательности $\{\mathbf{x}_k\}$ точек M, сходящейся к $\mathbf{a}$.

Характеристики непрерывной векторной функции n переменных.

12.15 Функция $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ непрерывна в каждой точке $\mathbf{x}$ из $\mathbb{R}^n$ тогда и только тогда, когда множество $\mathbf{f}^{-1}(T)$ открыто (замкнуто) для любого открытого (замкнутого) множества T в $\mathbb{R}^m$.

Свойство непрерывной векторной функции из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$.

12.16 Если $\mathbf{f}$ из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$ непрерывна и множество M в $\mathbb{R}^n$ компактно, то и множество $\mathbf{f}(M)$ компактно.

Непрерывные функции отображают компактные множества на компактные.

12.17 Пусть дано множество A в $\mathbb{R}^n$. *Относительный шар* $B^A(\mathbf{a}; r)$ с центром в точке $\mathbf{a} \in A$ радиуса r определяется формулой $B^A(\mathbf{a}; r) = B(\mathbf{a}; r) \cap A$.

Определение относительного шара.

12.18 Понятия *относительных внутренних точек, относительных граничных точек, относительных открытых множеств и относительных замкнутых множеств* определяются так же, как и соответствующие исходные понятия, только в формулировках этих определений $\mathbb{R}^n$ заменяется множеством A, а шары — на относительные шары.

Понятия *относительной (индуцированной) топологии.*

12.19

- Подмножество $U \subset A$ относительно открыто в множестве $A \subset \mathbb{R}^n$ тогда и только тогда, когда найдется такое открытое множество V в $\mathbb{R}^n$, что $U = V \cap A$.
- Подмножество $F \subset A$ относительно замкнуто в множестве $A \subset \mathbb{R}^n$ тогда и только тогда, когда найдется такое замкнутое множество H in $\mathbb{R}^n$, что $F = H \cap A$.

Характеристики относительно открытых и относительно замкнутых подмножеств множества $A \subset \mathbb{R}^n$.

Функция $\mathbf{f}$ из $S \subset \mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$ непрерывна тогда и только тогда, когда выполнено любое из следующих условий:

12.20
- $\mathbf{f}^{-1}(U)$ относительно открыто в S для любого открытого множества U в $\mathbb{R}^m$;
- $\mathbf{f}^{-1}(T)$ относительно замкнуто в S для любого замкнутого множества T в $\mathbb{R}^m$.

Характеристика непрерывности функций, область определения которых у́же пространства $\mathbb{R}^n$ целиком.

12.21 Функция $\mathbf{f} : M \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ называется *равномерно непрерывной* на множестве $S \subset M$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$ (зависящее от ε, но НЕ от $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$), что

$$\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\| < \varepsilon$$

для всех $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ из S при условии $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < \delta$.

Определение равномерной непрерывности (векторной) функции из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$.

12.22 Если $\mathbf{f} : M \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ непрерывна, а множество $S \subset M$ компактно, то $\mathbf{f}$ равномерно непрерывна на S.

На компактных множествах непрерывные функции непрерывны равномерно.

12.23 Пусть $\{\mathbf{f}_n\}$ — последовательность функций с областью определения $S \subset \mathbb{R}^n$ и множеством значений в $\mathbb{R}^m$. Говорят, что последовательность $\{\mathbf{f}_n\}$ *поточечно сходится* к функции $\mathbf{f}$ на множестве S, если последовательность $\{\mathbf{f}_n(\mathbf{x})\}$ (в $\mathbb{R}^m$) сходится к $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ для любого $\mathbf{x}$ из S.

Определение (поточечной) сходимости функциональной последовательности.

12.24 Говорят, что последовательность функций $\{\mathbf{f}_n\}$, определенных на множестве $S \subset \mathbb{R}^n$, область значений которых лежит в $\mathbb{R}^m$, *равномерно сходится* к функции $\mathbf{f}$ на множестве S, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое натуральное число $N(\varepsilon)$ (зависящее от ε, но НЕ от $\mathbf{x}$), что

$$\|\mathbf{f}_n(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x})\| < \varepsilon$$

для всех $n \geq N(\varepsilon)$ и всех $\mathbf{x}$ из S.

Определение равномерной сходимости функциональной последовательности.

12.25 *Соответствием* F из множества A в множество B является правило, отображающее каждый $x \in A$ в непустое подмножество $F(x)$ множества B. *Графом (графиком)* соответствия F является множество

$$\operatorname{graph}(F) = \{(a, b) \in A \times B : b \in F(a)\}.$$

Определение соответствия и графа (графика) соответствия.

12.26 Соответствие $\mathbf{F} : X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ имеет *замкнутый граф*, если для каждой пары таких сходящихся последовательностей $\{\mathbf{x}_k\}$ из X и $\{\mathbf{y}_k\}$ из $\mathbb{R}^m$, что $\mathbf{y}_k \in \mathbf{F}(\mathbf{x}_k)$ и $\lim_k \mathbf{x}_k = \mathbf{x} \in X$, предел $\lim_k \mathbf{y}_k$ принадлежит множеству $\mathbf{F}(\mathbf{x})$.

Таким образом, граф соответствия $\mathbf{F}$ замкнут тогда и только тогда, когда $\mathrm{graph}(\mathbf{F})$ является относительно замкнутым подмножеством множества $X \times \mathbb{R}^m \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$.

Определение соответствия с *замкнутым графом*.

12.27 Соответствие $\mathbf{F} : X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ называют *полунепрерывным снизу* в точке $\mathbf{x}^0$, если для каждого $\mathbf{y}^0$ из $\mathbf{F}(\mathbf{x}^0)$ и произвольной окрестности U точки $\mathbf{y}^0$ найдется такая окрестность N точки $\mathbf{x}^0$, что $\mathbf{F}(\mathbf{x}) \cap U \neq \varnothing$ для всех $\mathbf{x}$ из $N \cap X$.

Определение полунепрерывности соответствия снизу.

12.28 Соответствие $\mathbf{F} : X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ называется *полунепрерывным сверху* в точке $\mathbf{x}^0$, если для любого открытого множества U, содержащего точку $\mathbf{F}(\mathbf{x}^0)$, найдется такая окрестность N точки $\mathbf{x}^0$, что $\mathbf{F}(\mathbf{x}) \subset U$ для всех x из $N \cap X$.

Определение полунепрерывности соответствия сверху.

12.29 Пусть $\mathbf{F} : X \subset \mathbb{R}^n \to K \subset \mathbb{R}^m$ является соответствием, множество значений которого K компактно. Пусть для любого $\mathbf{x} \in X$ множество $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ — замкнутое подмножество K. Тогда граф соответствия $\mathbf{F}$ замкнут тогда и только тогда, когда $\mathbf{F}$ полунепрерывно сверху.

Интересный результат.

ИНФИМУМ И СУПРЕМУМ

12.30

- У любого непустого множества S, состоящего из вещественных чисел и ограниченного сверху, есть *наименьшая верхняя граница* b^*, т. е. b^* является верхней границей множества S и верно $b^* \leq b$ для любой другой его верхней границы b. b^* называется *супремумом* множества S и обозначается записью $b^* = \sup S$.
- У любого непустого множества S, состоящего из вещественных чисел и ограниченного снизу, есть *наибольшая нижняя граница* a^*, т. е. a^* является нижней границей множества S и верно $a^* \geq a$ для любой другой верхней границы a множества S. a^* называется *инфимумом* множества S и обозначается $a^* = \inf S$.

Принцип наименьшей верхней границы и наибольшей нижней границы для множеств, элементами которых являются вещественные числа. Если множество S не ограничено сверху, пишут $\sup S = \infty$, а если S не ограничено снизу, то пишут $\inf S = -\infty$. По определению обычно принимают, что $\sup \varnothing = -\infty$ и $\inf \varnothing = \infty$.

12.31 $$\inf_{\mathbf{x}\in B} f(\mathbf{x}) = \inf\{f(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in B\}$$ $$\sup_{\mathbf{x}\in B} f(\mathbf{x}) = \sup\{f(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in B\}$$

Определение инфимума и супремума для функции с вещественными значениями, определенной на множестве B в $\mathbb{R}^n$.

12.32 $$\inf_{\mathbf{x}\in B}(f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})) \geq \inf_{\mathbf{x}\in B} f(\mathbf{x}) + \inf_{\mathbf{x}\in B} g(\mathbf{x})$$ $$\sup_{\mathbf{x}\in B}(f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})) \leq \sup_{\mathbf{x}\in B} f(\mathbf{x}) + \sup_{\mathbf{x}\in B} g(\mathbf{x})$$

Свойства sup и inf.

12.33 $$\inf_{\mathbf{x}\in B}(\lambda f(\mathbf{x})) = \lambda \inf_{\mathbf{x}\in B} f(\mathbf{x}), \quad \text{если } \lambda > 0$$ $$\sup_{\mathbf{x}\in B}(\lambda f(\mathbf{x})) = \lambda \sup_{\mathbf{x}\in B} f(\mathbf{x}), \quad \text{если } \lambda > 0$$

Число λ вещественное.

12.34 $$\sup_{\mathbf{x}\in B}(-f(\mathbf{x})) = -\inf_{\mathbf{x}\in B} f(\mathbf{x})$$ $$\inf_{\mathbf{x}\in B}(-f(\mathbf{x})) = -\sup_{\mathbf{x}\in B} f(\mathbf{x})$$

12.35 $$\sup_{(\mathbf{x},\mathbf{y})\in A\times B} f(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sup_{\mathbf{x}\in A}(\sup_{\mathbf{y}\in B} f(\mathbf{x},\mathbf{y}))$$

$A \times B = \{(\mathbf{x},\mathbf{y}) : \mathbf{x} \in A \wedge \mathbf{y} \in B\}$.

12.36 $$\underline{\lim}_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^0} f(\mathbf{x}) = \lim_{r\to 0}(\inf\{f(\mathbf{x}) : 0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0\| < r,\ \mathbf{x} \in M\})$$ $$\overline{\lim}_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^0} f(\mathbf{x}) = \lim_{r\to 0}(\sup\{f(\mathbf{x}) : 0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0\| < r,\ \mathbf{x} \in M\})$$

Определение $\underline{\lim} = \liminf$ и $\overline{\lim} = \limsup$. f определена на $M \subset \mathbb{R}^n$ и $\mathbf{x}^0$ является замыканием множества $M \setminus \{\mathbf{x}^0\}$.

12.37 $$\underline{\lim}(f + g) \geq \underline{\lim}\, f + \underline{\lim}\, g$$ $$\overline{\lim}(f + g) \leq \overline{\lim}\, f + \overline{\lim}\, g$$

Эти неравенства верны, если определены пределы в правой их части.

12.38 $$\underline{\lim}\, f \leq \overline{\lim}\, f$$

Свойства $\liminf$ и $\limsup$.

12.39 $$\underline{\lim}\, f = -\overline{\lim}(-f), \quad \overline{\lim}\, f = -\underline{\lim}(-f)$$

12.40 Пусть f — функция с вещественными значениями, определенная на интервале $[t_0, \infty)$. Тогда, по определению:

- $\underline{\lim}_{t\to\infty} f(t) = \lim_{t\to\infty} \inf\{f(s) : s \in [t_0, \infty)\}$;
- $\overline{\lim}_{t\to\infty} f(t) = \lim_{t\to\infty} \sup\{f(s) : s \in [t_0, \infty)\}$.

Определение $\underline{\lim}_{t\to\infty}$ и $\overline{\lim}_{t\to\infty}$. Формулы (12.37)–(12.39) и для них верны.

12.41	• $\varliminf\limits_{t\to\infty} f(t) \geq a \Leftrightarrow \left\{\text{для любого } \varepsilon > 0 \text{ найдется такое } t', \text{ что } f(t) \geq a - \varepsilon \text{ для всех } t \geq t';\right.$ • $\varlimsup\limits_{t\to\infty} f(t) \geq a \Leftrightarrow \left\{\text{для любого } \varepsilon > 0 \text{ и произвольного } t' \text{ найдется такое } t \geq t', \text{ что } f(t) \geq a - \varepsilon \text{ для всех } t \geq t'.\right.$	Фундаментальные математические факты.

ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

Хорошими пособиями по топологии традиционно считаются [2], [58] и [70]. Соответствия и их свойства обсуждаются в [38] или [39]. См. также [82].

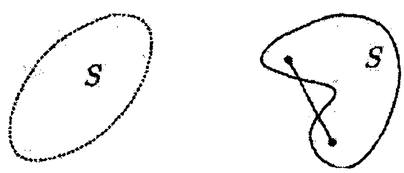
Глава 13

ВЫПУКЛОСТЬ

13.1 Множество S в $\mathbb{R}^n$ *выпукло*, если

$$\mathbf{x}, \mathbf{y} \in S \text{ и } \lambda \in [0,1] \;\Rightarrow\; \lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y} \in S.$$

Определение выпуклого множества. Пустое множество является выпуклым по определению.

13.2 

На этом рисунке первое множество выпукло, а второе – нет.

13.3 Если множества S и T выпуклы в $\mathbb{R}^n$, то

- $S \cap T = \{\mathbf{x} : \mathbf{x} \in S \text{ и } \mathbf{x} \in T\}$ выпукло,
- $aS + bT = \{a\mathbf{s} + b\mathbf{t} : \mathbf{s} \in S,\ \mathbf{t} \in T\}$ выпукло.

Свойства выпуклых множеств. (Числа a и b вещественны.)

13.4 Любой вектор $\mathbf{x} = \lambda_1\mathbf{x}_1 + \cdots + \lambda_m\mathbf{x}_m$, где $\lambda_i \geq 0$ для $i = 1, \ldots, m$ и $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$, называется *выпуклой комбинацией* векторов $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m$ из $\mathbb{R}^n$.

Определение выпуклой комбинации векторов.

13.5 $\mathrm{co}(S) = \begin{cases} \text{множество всех выпуклых ком-} \\ \text{бинаций большого конечного чи-} \\ \text{сла векторов из множества } S. \end{cases}$

$\mathrm{co}(S)$ является *выпуклой оболочкой* множества S в $\mathbb{R}^n$.

13.6 

Если на рисунке светлое множество — это S, то к его выпуклой оболочке $\mathrm{co}(S)$ дополнительно относятся и темные области.

13.7 $\mathrm{co}(S)$ является наименьшим выпуклым множеством, содержащим S.

Полезная характеристика выпуклой оболочки.

13.8 Если $S \subset \mathbb{R}^n$ и $\mathbf{x} \in \mathrm{co}(S)$, то $\mathbf{x}$ является выпуклой комбинацией, по крайней мере, $n+1$ точек множества S.

Теорема Каратеодори (для выпуклых множеств).

13.9 $\mathbf{z}$ является *экстремальной точкой* выпуклого множества S, если $\mathbf{z} \in S$ и не существует таких $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ из S и числа λ на $(0,1)$, что $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ и $\mathbf{z} = \lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y}$.

Определение экстремальной точки.

13.10 Пусть S — компактное выпуклое множество в $\mathbb{R}^n$. Тогда S является выпуклой оболочкой своих экстремальных точек.

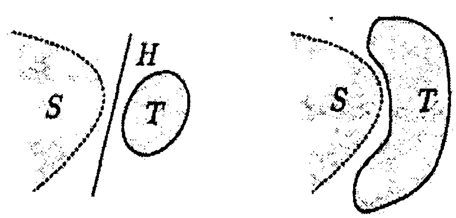
Теорема Крейна–Мильмана.

13.11 Пусть S и T — два непересекающихся непустых выпуклых множества в $\mathbb{R}^n$. Тогда точки множеств S и T можно разделить гиперплоскостью, т. е. найдется такой ненулевой вектор $\mathbf{a}$, что

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{x} \leq \mathbf{a}\cdot\mathbf{y} \quad \text{для всех } \mathbf{x} \text{ из } S \text{ и всех } \mathbf{y} \text{ из } T.$$

Теорема отделимости Минковского. Гиперплоскость $\{\mathbf{x} : \mathbf{a}\cdot\mathbf{x} = A\}$, при условии $\mathbf{a}\cdot\mathbf{x} \leq A \leq \mathbf{a}\cdot\mathbf{y}$ для всех $\mathbf{x}$ из S и всех $\mathbf{y}$ из T называется *разделяющей гиперплоскостью.*

13.12



На левом рисунке множества S и T (строго) разделены H. На правом рисунке показаны такие множества S и T, разделить которые гиперплоскостью нельзя.

13.13 Пусть S — выпуклое множество в $\mathbb{R}^n$, имеющее внутренние точки, а T — такое выпуклое множество в $\mathbb{R}^n$, что никакая внутренняя точка пересечения $S \cap T$ (если она есть) не является внутренней точкой для множества S. Тогда S и T можно разделить гиперплоскостью, т. е. найдется такой вектор $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, что

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{x} \leq \mathbf{a}\cdot\mathbf{y} \text{ для всех } \mathbf{x} \text{ из } S \text{ и всех } \mathbf{y} \text{ из } T.$$

Общая формулировка теоремы отделимости в $\mathbb{R}^n$.

ВОГНУТЫЕ И ВЫПУКЛЫЕ ФУНКЦИИ

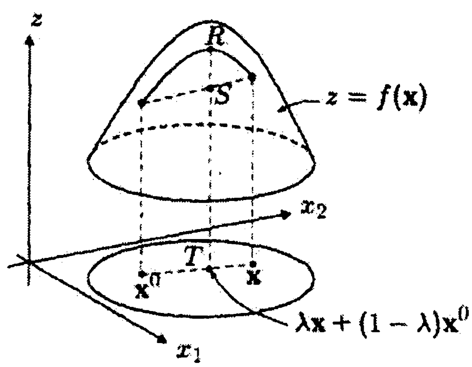
13.14 $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \dots, x_n)$ определенная на выпуклом множестве S в $\mathbb{R}^n$ является *вогнутой* на S, если

$$f(\lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{x}^0) \geq \lambda f(\mathbf{x}) + (1-\lambda) f(\mathbf{x}^0)$$

для всех $\mathbf{x}$, $\mathbf{x}^0$ из S и всех λ из $(0,1)$.

Для определения *выпуклой* функции поменяйте знак неравенства. Поэтому верно, что f выпукла тогда и только тогда, когда $-f$ вогнута.

13.15



Функция $f(\mathbf{x})$ (строго) вогнута. $TR = f(\lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{x}^0) \geq TS = \lambda f(\mathbf{x}) + (1-\lambda) f(\mathbf{x}^0)$. ($TR$ и TS — высоты от точек R и S до плоскости $\mathbf{x}$. Если точка лежит ниже плоскости $\mathbf{x}$, то соответствующая высота отрицательна.)

13.16 $f(\mathbf{x})$ *строго вогнута*, если $f(\mathbf{x})$ вогнута, и неравенство $\geq$ в (13.14) выполняется строго для $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}^0$.

Определение строго вогнутой функции. Для случая строгой выпуклости, поменяйте знак неравенства.

13.17 Если функция $f(\mathbf{x})$, определенная на выпуклом множестве S в $\mathbb{R}^n$, вогнута (выпукла), то $f(\mathbf{x})$ непрерывна в любой внутренней точке множества S.

О непрерывности вогнутых и выпуклых функций.

13.18

- Если $f(\mathbf{x})$ и $g(\mathbf{x})$ вогнуты (выпуклы) и числа a и b неотрицательны, то $af(\mathbf{x}) + bg(\mathbf{x})$ является вогнутой (выпуклой).
- Если $f(\mathbf{x})$ вогнута и $F(u)$ вогнутая возрастающая, то $U(\mathbf{x}) = F(f(\mathbf{x}))$ вогнута.
- Если $f(\mathbf{x}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{x} + b$ и $F(u)$ вогнута, то $U(\mathbf{x}) = F(f(\mathbf{x}))$ вогнута.
- Если $f(\mathbf{x})$ вогнута и $F(u)$ вогнутая возрастающая, то $U(\mathbf{x}) = F(f(\mathbf{x}))$ вогнута.
- Если $f(\mathbf{x}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{x} + b$ и $F(u)$ вогнута, то $U(\mathbf{x}) = F(f(\mathbf{x}))$ вогнута.

Свойства вогнутых и выпуклых функций.

13.19 Принадлежащая классу гладкости C^1 функция $f(\mathbf{x})$ вогнута на открытом выпуклом множестве S из of $\mathbb{R}^n$ тогда и только тогда, когда

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}^0) \le \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(\mathbf{x}^0)}{\partial x_i}(x_i - x_i^0)$$

либо верно эквивалентное условие

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}^0) \le \nabla f(\mathbf{x}^0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)$$

для всех $\mathbf{x}$ и $\mathbf{x}_0$ из S.

Вогнутость C^1-функций. Для случая выпуклости справедливы неравенства с обратным знаком.

13.20 Принадлежащая классу гладкости C^1 функция $f(\mathbf{x})$ строго вогнута на открытом выпуклом множестве S в $\mathbb{R}^n$ тогда и только тогда, когда неравенства в (13.19) выполняются строго для $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}^0$.

Строгая вогнутость C^1-функций. Для случая выпуклости верны обратные неравенства.

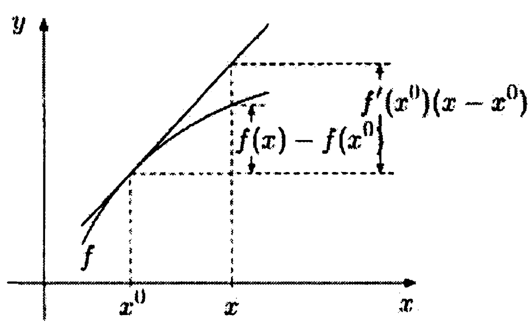
13.21 Принадлежащая классу гладкости C^1 функция $f(x)$ вогнута на открытом интервале I тогда и только тогда, когда

$$f(x) - f(x^0) \le f'(x^0)(x - x^0)$$

для любых x и x^0 из интервала I.

Частный случай (13.19) для функции одной переменной.

13.22



Геометрическая интерпретация (13.21). C^1-функция f вогнута тогда и только тогда, когда график функции f лежит ниже касательной к ней в любой точке. (На этом рисунке на самом деле функция f даже строго вогнута.)

13.23 Принадлежащая классу гладкости C^1 функция $f(x, y)$ вогнута на открытом выпуклом множестве S, лежащем на плоскости (x, y) тогда и только тогда, когда

$$f(x, y) - f(x^0, y^0) \le$$
$$\le f_1'(x^0, y^0)(x - x^0) + f_2'(x^0, y^0)(y - y^0)$$

для любых (x, y), (x^0, y^0) из S.

Частный случай (13.19) для функции двух переменных.

13.24	$$\mathbf{f}''(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f''_{11}(\mathbf{x}) & f''_{12}(\mathbf{x}) & \dots & f''_{1n}(\mathbf{x}) \\ f''_{21}(\mathbf{x}) & f''_{22}(\mathbf{x}) & \dots & f''_{2n}(\mathbf{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f''_{n1}(\mathbf{x}) & f''_{n2}(\mathbf{x}) & \dots & f''_{nn}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$$	Матрица вторых частных производных, определитель которой называется *гессианом* функции f в точке $\mathbf{x}$. Если f из класса гладкости C^2, то эта матрица симметрична.
13.25	Главные миноры $\Delta_r(\mathbf{x})$ порядка r для матрицы $\mathbf{f}''(\mathbf{x})$, определитель которой называется гессианом, являются определителями подматриц, которые получаются удалением из исходной матрицы $n-r$ произвольно выбранных строк и $n-r$ столбцов с теми же самыми номерами.	Главные миноры гессиана. (См. также (20.15).)
13.26	Принадлежащая классу гладкости C^2 функция $f(\mathbf{x})$ вогнута на открытом выпуклом множестве S в $\mathbb{R}^n$ тогда и только тогда, когда для любых $\mathbf{x}$ из S и для всех Δ_r $(-1)^r\Delta_r(\mathbf{x}) \geq 0$ при $r = 1, \dots, n$.	Вогнутость C^2-функций.
13.27	Принадлежащая классу гладкости C^2 функция $f(\mathbf{x})$ выпукла на открытом выпуклом множестве S в $\mathbb{R}^n$ тогда и только тогда, когда для любых $\mathbf{x}$ из S и для всех Δ_r $\Delta_r(\mathbf{x}) \geq 0$ при $r = 1, \dots, n$.	Выпуклость C^2-функций.
13.28	$$D_r(\mathbf{x}) = \begin{vmatrix} f''_{11}(\mathbf{x}) & f''_{12}(\mathbf{x}) & \dots & f''_{1r}(\mathbf{x}) \\ f''_{21}(\mathbf{x}) & f''_{22}(\mathbf{x}) & \dots & f''_{2r}(\mathbf{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f''_{r1}(\mathbf{x}) & f''_{r2}(\mathbf{x}) & \dots & f''_{rr}(\mathbf{x}) \end{vmatrix}$$	Главные угловые миноры гессиана функции f в точке $\mathbf{x}$ при $r = 1, 2, \dots, n$.
13.29	Принадлежащая классу гладкости C^2 функция $f(\mathbf{x})$ строго вогнута на открытом выпуклом множестве S в $\mathbb{R}^n$, если для всех $\mathbf{x} \in S$ $(-1)^r D_r(\mathbf{x}) > 0$ при $r = 1, \dots, n$.	Достаточные (но НЕ необходимые) условия строгой вогнутости C^2-функций.

13.30 Принадлежащая классу гладкости C^2 функция $f(\mathbf{x})$ строго выпукла на открытом выпуклом множестве S в $\mathbb{R}^n$, если для всех $\mathbf{x} \in S$

$$D_r(\mathbf{x}) > 0 \quad \text{при} \quad r = 1, \ldots, n.$$

Достаточные (но НЕ необходимые) условия строгой выпуклости C^2-функций.

13.31 Пусть $f(x)$ является функцией класса C^2 на открытом интервале I. Тогда:

- $f(x)$ вогнута на $I \Leftrightarrow f''(x) \leq 0$ для любого x из I,
- $f(x)$ выпукла на $I \Leftrightarrow f''(x) \geq 0$ для любого x из I,
- $f''(x) < 0$ для всех x из $I \Rightarrow f(x)$ строго вогнута на I,
- $f''(x) > 0$ для всех x из $I \Rightarrow f(x)$ строго выпукла на I.

Одномерные случаи (13.26), (13.27), (13.29) и (13.30). Здесь направления стрелок знаков следования НЕЛЬЗЯ заменить и поставить знаки эквивалентности. ($f(x) = -x^4$ строго вогнута, но $f''(0) = 0$. $f(x) = x^4$ строго выпукла, но $f''(0) = 0$.)

13.32 Принадлежащая классу гладкости C^2 функция $f(x, y)$ вогнута на открытом выпуклом множестве S на плоскости (x, y) тогда и только тогда, когда

$$f''_{11}(x,y) \leq 0, \quad f''_{22}(x,y) \leq 0 \quad \text{и}$$

$$f''_{11}(x,y)f''_{22}(x,y) - (f''_{12}(x,y))^2 \geq 0$$

для всех (x, y) из S.

Двумерный случай (13.26). Условие выпуклости функций класса C^2 получается изменением знака двух первых неравенств.

13.33 Принадлежащая классу гладкости C^2 функция $f(x, y)$ строго вогнута на открытом выпуклом множестве S на плоскости (x, y) тогда (но НЕ только тогда), когда

$$f''_{11}(x,y) < 0 \quad \text{и}$$

$$f''_{11}(x,y)f''_{22}(x,y) - (f''_{12}(x,y))^2 > 0$$

для всех (x, y) из S.

Двумерный случай (13.29). (Заметим, что из этих двух неравенств вытекает $f''_{22}(x,y) < 0$.) Для строгой выпуклости нужно поменять знак первого неравенства.

КВАЗИВОГНУТЫЕ И КВАЗИВЫПУКЛЫЕ ФУНКЦИИ

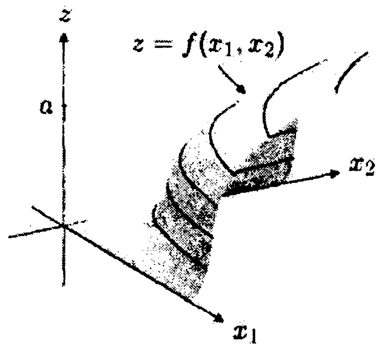
13.34 $f(\mathbf{x})$ *квазивогнута* на выпуклом множестве $S \subset \mathbb{R}^n$, если *(верхнее) множество уровня*

$$P_a = \{\mathbf{x} \in S : f(\mathbf{x}) \geq a\}$$

выпукло для любого вещественного числа a.

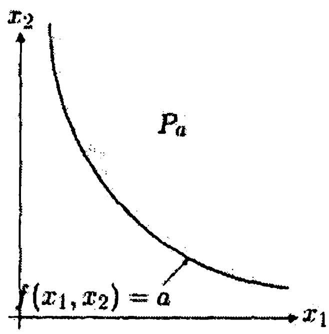
Определение квазивогнутой функции. (Верхнее множество уровня называется также *надграфиком*.)

13.35



Типичный пример квазивогнутой функции двух переменных, $z = f(x_1, x_2)$.

13.36



(Верхнее) множество уровня для функции из (13.35), $P_a = \{(x_1, x_2) \in S : f(x_1, x_2) \geq a\}$.

13.37 $f(\mathbf{x})$ квазивогнута на открытом выпуклом множестве S в $\mathbb{R}^n$ тогда и только тогда, когда

$$f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}^0) \Rightarrow f(\lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{x}^0) \geq f(\mathbf{x}^0)$$

для всех $\mathbf{x}$, $\mathbf{x}^0$ из S из любого λ из $[0, 1]$.

Характеристика квазивогнутости.

13.38 $f(\mathbf{x})$ *квазивогнута строго* на открытом выпуклом множестве S в $\mathbb{R}^n$, если

$$f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}^0) \Rightarrow f(\lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{x}^0) > f(\mathbf{x}^0)$$

для всех $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}^0$ из S и любого λ из $[0, 1]$.

Определение строгой квазивогнутости (в наиболее распространенной формулировке).

13.39 Функция $f(\mathbf{x})$ *(строго) квазивыпукла* на $S \subset \mathbb{R}^n$, если функция $-f(\mathbf{x})$ (строго) квазивогнута.

Определение (строго) квазивыпуклой функции.

13.40 Если $f_1, \ldots, f_m$ — вогнутые функции, определенные на выпуклом множестве S в $\mathbb{R}^n$, и сложная функция g задана для каждого $\mathbf{x}$ из S в соответствии с равенством

$$g(\mathbf{x}) = F(f_1(\mathbf{x}), \ldots, f_m(\mathbf{x})),$$

где $F(u_1, \ldots, u_m)$ квазивогнута и по всем переменным возрастает, то g квазивогнута.

Полезный результат.

1) $f(\mathbf{x})$ вогнута $\Rightarrow$ $f(\mathbf{x})$ квазивогнута.
2) $f(\mathbf{x})$ выпукла $\Rightarrow$ $f(\mathbf{x})$ квазивыпукла.
3) Любая возрастающая или убывающая функция одной переменной является квазивогнутой и квазивыпуклой.
4) Сумма квазивогнутых функций не обязательно является квазивогнутой.
5) Сумма квазивыпуклых функций не обязательно квазивыпукла.

13.41 6) Если $f(\mathbf{x})$ квазивогнута (квазивыпукла), а F возрастающая, то $F(f(\mathbf{x}))$ квазивогнута (квазивыпукла).

7) Если $f(\mathbf{x})$ квазивогнута (квазивыпукла), а F убывающая, то $F(f(\mathbf{x}))$ квазивыпукла (квазивогнута).

8) Если $f(\mathbf{x})$ — функция с положительными значениями, определенная на выпуклом конусе C в $\mathbb{R}^n$, и при этом f однородна степени 1 и квазивогнута на C, то f вогнута на C.

Основные результаты для квазивогнутых и квазивыпуклых функций. (Пример к 4): функции $f(x) = x^3$ и $g(x) = -x$ квазивогнуты, но этим свойством не обладает их сумма $f(x) + g(x) = x^3 - x$.)

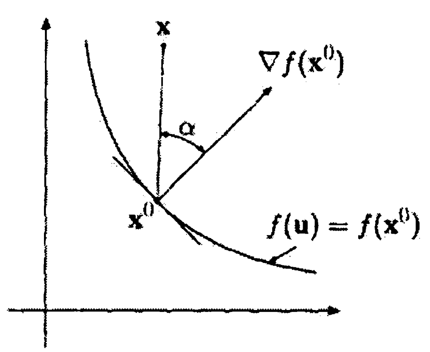
13.42 Принадлежащая классу гладкости C^1 функция $f(\mathbf{x})$ квазивогнута на открытом выпуклом множестве S в $\mathbb{R}^n$ тогда и только тогда, когда

$$f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}^0) \Rightarrow \nabla f(\mathbf{x}^0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}^0) \geq 0$$

для всех $\mathbf{x}$ и $\mathbf{x}^0$ из S.

Квазивогнутость C^1-функций.

13.43



Геометрическая интерпретация (13.42). Здесь неравенство $\nabla f(\mathbf{x}^0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}^0) \geq 0$ означает, что угол α острый, т. е. меньше 90°.

13.44
$$B_r(\mathbf{x}) = \begin{vmatrix} 0 & f_1'(\mathbf{x}) & \dots & f_r'(\mathbf{x}) \\ f_1'(\mathbf{x}) & f_{11}''(\mathbf{x}) & \dots & f_{1r}''(\mathbf{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_r'(\mathbf{x}) & f_{r1}''(\mathbf{x}) & \dots & f_{rr}''(\mathbf{x}) \end{vmatrix}$$

Окаймленный гессиан для функции f в точке $\mathbf{x}$.

13.45 Если $f(\mathbf{x})$ квазивогнута на открытом выпуклом множестве S в $\mathbb{R}^n$, то
$$(-1)^r B_r(\mathbf{x}) \geq 0 \text{ при } r = 1, \ldots, n$$
для всех $\mathbf{x} \in S$.

Необходимые условия квазивогнутости для C^2-функций.

13.46 Если $(-1)^r B_r(\mathbf{x}) > 0$ при $r = 1, \ldots, n$ для всех из $\mathbf{x}$ открытого выпуклого множества S в $\mathbb{R}^n$, то $f(\mathbf{x})$ квазивогнута на S.

Достаточные условия квазивогнутости для C^2-функций.

13.47 Если $f(\mathbf{x})$ квазивыпукла на открытом выпуклом множестве S в $\mathbb{R}^n$, то
$$B_r(\mathbf{x}) \leq 0 \text{ при } r = 1, \ldots, n$$
и для всех $\mathbf{x}$ из S.

Необходимые условия квазивыпуклости для C^2-функций.

13.48 Если $B_r(\mathbf{x}) < 0$ при $r = 1, \ldots, n$ и для всех $\mathbf{x}$ на открытом выпуклом множестве S в $\mathbb{R}^n$, то $f(\mathbf{x})$ квазивыпукла на S.

Достаточные условия квазивыпуклости для C^2-функций.

ПСЕВДОВОГНУТЫЕ И ПСЕВДОВЫПУКЛЫЕ ФУНКЦИИ

13.49 Принадлежащая классу гладкости C^1 функция $f(\mathbf{x})$, определенная на выпуклом множестве S в $\mathbb{R}^n$, *псевдовогнута* в точке $\mathbf{x}^0$ множества S, если
$$(*) \quad f(\mathbf{x}) > f(\mathbf{x}^0) \;\Rightarrow\; \nabla f(\mathbf{x}^0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}^0) > 0$$
для всех $\mathbf{x}$ из S. $f(\mathbf{x})$ *псевдовогнута над множеством* S, если $(*)$ верно для всех $\mathbf{x}$ и $\mathbf{x}^0$ из S.

Чтобы дать определение псевдовыпуклых функций, измените знак второго неравенства в $(*)$. (Сравните с характеристикой квазивогнутости в (13.42).)

13.50 Пусть $f(\mathbf{x})$ является функцией класса гладкости C^1, определенной на выпуклом множестве S в $\mathbb{R}^n$. Тогда:

- если f псевдовогнута на S, то f квазивогнута на S,
- если S открыто и $\nabla f(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$ для всех $\mathbf{x}$ из S, то f псевдовогнута на S тогда и только тогда, когда f квазивогнута на S.

Важные соотношения между псевдовогнутыми и квазивогнутыми функциями.

13.51 Пусть множество S открыто и выпукло в $\mathbb{R}^n$, а функция $f : S \to \mathbb{R}$ псевдовогнута. Если $\mathbf{x}^0 \in S$ обладает таким свойством, что
$$\nabla f(\mathbf{x}^0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}^0) \leq 0 \text{ для всех } \mathbf{x} \text{ из } S$$
(что *совпадает* со случаем $\nabla f(\mathbf{x}^0) = \mathbf{0}$), то $\mathbf{x}^0$ является точкой глобального максимума для функции f на S.

Вот одна из причин введения понятия псевдовогнутости.

ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

О (квази)вогнутых и (квази)выпуклых функциях читайте, например, [77] или [82]. О псевдовогнутых и псевдовыпуклых см. источник [77] и данный в нем список литературы. Специальные результаты теории выпуклых множеств есть в [61] и [84]. Стандартным пособием по теории выпуклости служит [67].

Глава 14

КЛАССИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ОПТИМИЗАЦИИ

14.1 $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \dots, x_n)$ имеет *максимум (минимум)* в точке $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0) \in S$, если

$$f(\mathbf{x}^0) - f(\mathbf{x}) \geq 0 \;\; (\leq 0) \quad \text{для всех } \mathbf{x} \text{ из } S.$$

$\mathbf{x}^0$ называется *точкой максимума (минимума)*, $f(\mathbf{x}^0)$ называется *максимальным (минимальным) значением.*

Определение (глобального) максимума (минимума) для функции n переменных. Для обозначения обоих возможных случаев применяются собирательные термины: *оптимум* или *экстремум* для наилучших значений функции и *оптимальная* или *экстремальная* точка для тех ее аргументов, на которых это значение достигается.

14.2 Точка $\mathbf{x}^0$ максимизирует значение функции $f(\mathbf{x})$ на множестве S тогда и только тогда, когда $\mathbf{x}^0$ минимизирует $-f(\mathbf{x})$ на S.

Утверждение, позволяющее превратить задачу минимизации в задачу максимизации.

14.3

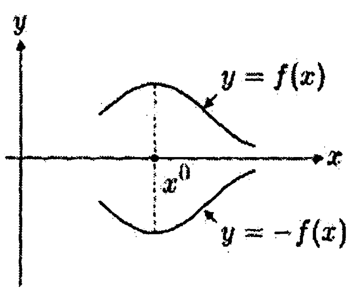


Иллюстрация (14.2). x^0 максимизирует $f(x)$ тогда и только тогда, когда x^0 минимизирует $-f(x)$

14.4 Предположим, что $f(\mathbf{x})$ определена на $S \subset \mathbb{R}^n$ и что $F(u)$ строго возрастает на множестве значений f. Тогда $\mathbf{x}^0$ максимизирует (минимизирует) $f(\mathbf{x})$ на S тогда и только тогда, когда $\mathbf{x}^0$ максимизирует (минимизирует) $F(f(\mathbf{x}))$ на S.

Важный математический факт.

14.5 Если $f : S \to \mathbb{R}$ непрерывна на замкнутом, ограниченном множестве S в $\mathbb{R}^n$, тогда для f существуют точки минимума и максимума на S.

Теорема об экстремальном значении (или ***теорема Вейерштрасса***).

14.6 $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$ является ***стационарной*** точкой $f(\mathbf{x})$, если

$$f_1'(\mathbf{x}^0) = 0, \; f_2'(\mathbf{x}^0) = 0, \; \ldots, \; f_n'(\mathbf{x}^0) = 0.$$

Определение стационарных точек для дифференцируемой функции n переменных.

14.7 Пусть $f(\mathbf{x})$ вогнута (выпукла) и определена на выпуклом множестве S в $\mathbb{R}^n$, а точка $\mathbf{x}^0$ является внутренней для S. Тогда $\mathbf{x}^0$ максимизирует (минимизирует) $f(\mathbf{x})$ на S тогда и только тогда, когда $\mathbf{x}^0$ является стационарной точкой.

Максимум (минимум) вогнутой (выпуклой) функции.

14.8

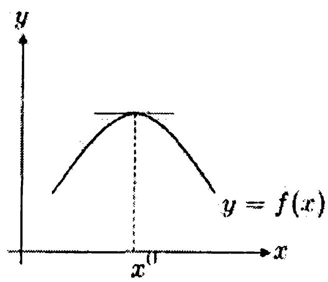


Иллюстрация (14.7) для случая одной переменной. f вогнута, $f'(x^0) = 0$, а x^0 является точкой максимума.

14.9 Если $f(\mathbf{x})$ имеет максимум или минимум на $S \subset \mathbb{R}^n$, то точки ее максимума/манимума находятся среди:

- внутренних точек S, являющихся стационарными,
- экстремальных точек f на границе множества S,
- тех точек S, где f не дифференцируема.

Где искать точки (глобального) максимума или минимума.

14.10 $f(\mathbf{x})$ имеет *локальный* максимум (минимум) в точке $\mathbf{x}^0$, если

$$(*) \quad f(\mathbf{x}^0) - f(\mathbf{x}) \geq 0 \;\; (\leq 0)$$

для всех $\mathbf{x}$ из S, достаточно близких к $\mathbf{x}^0$. В более точной формулировке найдется такой n-шар $B(\mathbf{x}^0; r)$, что $(*)$ верно для всех $\mathbf{x}$ из $B(\mathbf{x}^0; r)$.

Определение точки локального (или *относительного*) максимума (минимума) функции n переменных. Собирательный термин ***локальные экстремальные точки***.

14.11 Если локальный максимум (минимум) $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \ldots, x_n)$ достигается во внутренней точке $\mathbf{x}^0$ множества S, то $\mathbf{x}^0$ является стационарной точкой функции f.

Условия первого порядка для дифференцируемых функций.

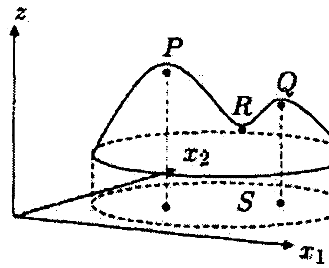
14.12 Стационарная точка $\mathbf{x}^0$ функции

$$f(\mathbf{x}) = f(x_1, \ldots, x_n)$$

называется *седловой точкой*, если она не является локальной экстремальной точкой ни в смысле максимума, ни в смысле минимума, т. е. если любой n-шар $B(\mathbf{x}^0; r)$ содержит такие точки $\mathbf{x}$, что $f(\mathbf{x}) < f(\mathbf{x}^0)$, и такие другие точки $\mathbf{z}$, что $f(\mathbf{z}) > f(\mathbf{x}^0)$.

Определение седловой точки функции.

14.13



Все три точки P, Q и R являются стационарными. В точке P достигается (глобальный) максимум, Q является точкой локального максимума, а R — седловая точка.

РЕЗУЛЬТАТЫ ДЛЯ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

14.14 Если функция $f(x)$ дифференцируема на интервале I, то

- $f'(x) > 0 \implies f(x)$ строго возрастает,
- $f'(x) \geq 0 \iff f(x)$ возрастает,
- $f'(x) = 0 \iff$ значение $f(x)$ — постоянная величина,
- $f'(x) \leq 0 \iff f(x)$ убывает,
- $f'(x) < 0 \implies f(x)$ строго убывает.

Важные математические факты. Направление стрелок знаков следования менять нельзя. ($f(x) = x^3$ строго возрастает, но $f'(0) = 0$. $g(x) = -x^3$ строго убывает, но $g'(0) = 0$.)

14.15

- Если $f'(x) \geq 0$ при $x \leq c$ и $f'(x) \leq 0$ при $x \geq c$, то $x = c$ является точкой максимума для f.
- Если $f'(x) \leq 0$ при $x \leq c$ и $f'(x) \geq 0$ при $x \geq c$, то $x = c$ является точкой минимума для f.

Проверка точки на (глобальную) экстремальность по знаку первой производной справа и слева от нее. (Этот критерий часто забывают упомянуть в пособиях по элементарной математике для экономистов.)

14.16

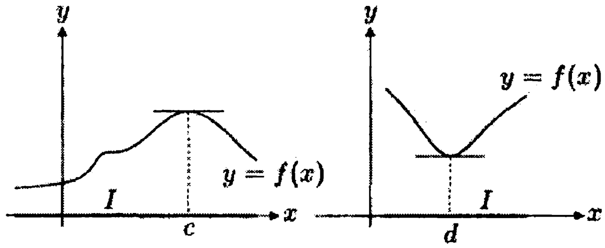
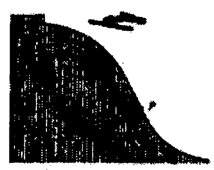


Иллюстрация (14.15) для случая функции одной переменной. c — точка максимума. d — точка минимума.

14.17 c является ***точкой перегиба*** для $f(x)$, если вторая производная $f''(x)$ меняет знак в точке c.

Определение точки перегиба для функции одной переменной.

14.18



Неортодоксальная иллюстрация понятия точки перегиба. Точка P, где наклон касательной к кривой наикрутейший, является точкой перегиба.

14.19 Пусть f является функцией, имеющей непрерывную производную второго порядка на интервале I, а точка c является внутренней для I. Тогда:

- c является точкой перегиба для f $\Longrightarrow$ $f''(c) = 0$,
- $f''(c) = 0$ и f'' меняет знак в c $\Longrightarrow$ c является точкой перегиба для f.

Проверка на свойство быть точкой перегиба.

УСЛОВИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

14.20 Если $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \ldots, x_n)$ имеет локальный максимум (минимум) в точке $\mathbf{x}^0$, то

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} f''_{ij}(\mathbf{x}^0) h_i h_j \leq 0 \ (\geq 0)$$

при произвольном выборе $h_1, \ldots, h_n$.

Необходимое условие (второго порядка) достижимости локального экстремума.

14.21 Если точка $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$ является стационарной для $f(x_1, \ldots, x_n)$ и если $D_k(\mathbf{x}^0)$ есть определитель выписанной ниже матрицы вторых частных производных

$$D_k(\mathbf{x}^0) = \begin{vmatrix} f''_{11}(\mathbf{x}^0) & f''_{12}(\mathbf{x}^0) & \ldots & f''_{1k}(\mathbf{x}^0) \\ f''_{21}(\mathbf{x}^0) & f''_{22}(\mathbf{x}^0) & \ldots & f''_{2k}(\mathbf{x}^0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f''_{k1}(\mathbf{x}^0) & f''_{k2}(\mathbf{x}^0) & \ldots & f''_{kk}(\mathbf{x}^0) \end{vmatrix},$$

то:

- если $(-1)^k D_k(\mathbf{x}^0) > 0$ при $k = 1, \ldots, n$, то $\mathbf{x}^0$ является точкой локального максимума,
- если $D_k(\mathbf{x}^0) > 0$ при $k = 1, \ldots, n$, то $\mathbf{x}^0$ является точкой локального минимума,
- если $D_n(\mathbf{x}^0) \neq 0$ и не выполняется ни одно из двух предложенных выше условий, то точка $\mathbf{x}^0$ является седловой.

Классификация стационарных точек для функции n переменных, принадлежащей классу гладкости C^2. *Условия второго порядка* достижимости локального экстремума.

14.22
$$f'(x^0) = 0 \text{ и } f''(x^0) < 0 \implies x^0 \text{ — точка локального максимума } f.$$
$$f'(x^0) = 0 \text{ и } f''(x^0) > 0 \implies x^0 \text{ — точка локального минимума } f.$$

Формулировка условий второго порядка для достижимости локального экстремума функции одной переменной.

14.23 Если точка (x_0, y_0) является стационарной для $f(x, y)$ и

$$D = f''_{11}(x_0, y_0) f''_{22}(x_0, y_0) - (f''_{12}(x_0, y_0))^2,$$

то

- $f''_{11}(x_0, y_0) > 0$ и $D > 0 \implies$ (x_0, y_0) — точка локального минимума f,
- $f''_{11}(x_0, y_0) < 0$ и $D > 0 \implies$ (x_0, y_0) — точка локального максимума f,
- $D < 0 \implies (x_0, y_0)$ — седловая точка f.

Формулировка условий второго порядка для достижимости локального экстремума функции двух переменных. (Классификация стационарных точек функции двух переменных, принадлежащей классу гладкости C^2.)

ОПТИМИЗАЦИЯ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ В ВИДЕ РАВЕНСТВ

14.24 $\max\ (\min)\ f(x, y)$ при условии $g(x, y) = b$

Задача Лагранжа. Две переменные, одно ограничение.

Метод Лагранжа. Рецепт решения задачи (14.24):

1) ввести *функцию Лагранжа*

$$L(x,y) = f(x,y) - \lambda(g(x,y) - b),$$

где параметр λ является константой;

2) подвергнуть L дифференцированию по обеим переменным x и y и приравнять полученные выражения частных производных к 0;

14.25 3) два уравнения из 2) и исходное равенство дают три ограничения:

$$f_1'(x,y) = \lambda g_1'(x,y)$$
$$f_2'(x,y) = \lambda g_2'(x,y)$$
$$g(x,y) = b$$

4) решить эту систему из трех уравнений с тремя неизвестными x, y и λ. Так будут найдены все возможные пары тех (x,y), которые могут оказаться решениями задачи.

Необходимые условия разрешимости задачи (14.24). Предполагается, что $g_1'(x,y)$ и $g_2'(x,y)$ не равны нулю обе одновременно. Более точную формулировку смотри ниже, в (14.27). λ называется *множителем Лагранжа*.

Предположим, что точка (x_0, y_0) удовлетворяет предложенным в (14.25) условиям. Тогда:

14.26 1) если $L(x,y)$ вогнута, то (x_0, y_0) — решение задачи максимизации (14.24),

2) если $L(x,y)$ выпукла, то (x_0, y_0) — решение задачи минимизации (14.24).

Достаточные условия разрешимости задачи (14.24).

14.27 Пусть $f(x,y)$ и $g(x,y)$ принадлежат классу гладкости C^1 на области определения S в плоскости (x,y), а точка (x_0, y_0) для множества S является внутренней, а для функции $f(x,y)$ локальной экстремальной точкой при ограничении $g(x,y) = b$. Далее предположим, что $g_1'(x_0, y_0)$ и $g_2'(x_0, y_0)$ не равны нулю одновременно. Тогда найдется единственное число λ такое, что для функции Лагранжа

$$L(x,y) = f(x,y) - \lambda\,(g(x,y) - b)$$

точка (x_0, y_0) является стационарной.

Точный вариант метода множителей Лагранжа. (*Теорема Лагранжа.*)

Рассмотрим задачу поиска локального экстремума

$$\max(\min) f(x,y) \text{ при условии } g(x,y) = b,$$

где точка (x_0, y_0) удовлетворяет условиям первого порядка, данным в (14.25). Определим окаймленный гессиан $D(x,y)$ как определитель выписанной ниже окаймленной матрицы

14.28

$$D(x,y) = \begin{vmatrix} 0 & g_1' & g_2' \\ g_1' & f_{11}'' - \lambda g_{11}'' & f_{12}'' - \lambda g_{12}'' \\ g_2' & f_{21}'' - \lambda g_{21}'' & f_{22}'' - \lambda g_{22}'' \end{vmatrix}$$

1) Если $D(x_0, y_0) > 0$, то план (x_0, y_0) является оптимальным в локальной задаче максимизации.
2) Если $D(x_0, y_0) < 0$, то план (x_0, y_0) является оптимальным в локальной задаче минимизации

Локальные достаточные условия разрешимости задачи Лагранжа.

14.29

$$\max(\min) f(x_1, \ldots, x_n)$$

$$\text{при ограничении } \begin{cases} g_1(x_1, \ldots, x_n) = b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ g_m(x_1, \ldots, x_n) = b_m \end{cases}$$

Общая формулировка *задачи Лагранжа* в предположении $m < n$.

Метод Лагранжа. Рецепт решения задачи (14.29):

1) ввести *функцию Лагранжа*

$$L(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j (g_j(\mathbf{x}) - b_j),$$

где $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ — константы;

14.30 2) приравнять 0 частные производные L первого порядка

$$\frac{\partial L(\mathbf{x})}{\partial x_k} = \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_k} - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \frac{\partial g_j(\mathbf{x})}{\partial x_k} = 0;$$

3) решить систему, составленную из n полученных уравнений и m исходных ограничений относительно переменных $x_1, \ldots, x_n$ и $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$.

Необходимые условия разрешимости задачи (14.29) в предположении принадлежности функций f и $g_1 \ldots, g_m$ к классу гладкости C^1 на открытом множестве S в $\mathbb{R}^n$, где $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$. Также предполагается, что ранг Якобиана $(\partial g_j / \partial x_i)_{m \times n}$ равен m. (См. (6.8).) $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ называются *множителями Лагранжа*.

Если $\mathbf{x}^0$ является решением задачи (14.29), а градиенты $\nabla g_1(\mathbf{x}^0), \ldots, \nabla g_m(\mathbf{x}^0)$ линейно
14.31 независимы, то найдется единственный набор чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, таких, что

$$\nabla f(\mathbf{x}^0) = \lambda_1 \nabla g_1(\mathbf{x}^0) + \cdots + \lambda_m \nabla g_m(\mathbf{x}^0).$$

Альтернативная формулировка (14.30).

14.32 Предположим, что $f(\mathbf{x})$ и $g_1(\mathbf{x}), \ldots, g_m(\mathbf{x})$ в (14.29) определены на открытом выпуклом множестве S в $\mathbb{R}^n$. Пусть $\mathbf{x}^0 \in S$ является стационарной точкой функции Лагранжа и $g_j(\mathbf{x}^0) = b_j$, $j = 1, \ldots, m$. Тогда

$$L(\mathbf{x}) \text{ вогнута} \Rightarrow \mathbf{x}^0 \text{ решает задачу (14.29).}$$

Достаточные условия разрешимости задачи (14.29). (Для случая задачи минимизации замените условие «$L(\mathbf{x})$ вогнута» на «$L(\mathbf{x})$ выпукла».)

14.33
$$B_r = \begin{vmatrix} 0 & \ldots & 0 & \dfrac{\partial g_1}{\partial x_1} & \ldots & \dfrac{\partial g_1}{\partial x_r} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & \dfrac{\partial g_m}{\partial x_1} & \ldots & \dfrac{\partial g_m}{\partial x_r} \\ \dfrac{\partial g_1}{\partial x_1} & \ldots & \dfrac{\partial g_m}{\partial x_1} & L''_{11} & \ldots & L''_{1r} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial g_1}{\partial x_r} & \ldots & \dfrac{\partial g_m}{\partial x_r} & L''_{r1} & \ldots & L''_{rr} \end{vmatrix}$$

Окаймленный гессиан, соответствующий задаче (14.29), $r = 1, \ldots, n$. L является функцией Лагранжа, определенной в (14.30).

14.34 Пусть $f(\mathbf{x})$ и $g_1(\mathbf{x}), \ldots, g_m(\mathbf{x})$ принадлежат классу гладкости C^2 на открытом множестве S в $\mathbb{R}^n$, а точка $\mathbf{x}^0 \in S$ удовлетворяет необходимым условиям разрешимости задачи (14.29), данным в (14.30). Пусть $B_r(\mathbf{x}^0)$ является определителем (14.33), вычисленным в точке $\mathbf{x}^0$. Тогда:

- если $(-1)^m B_r(\mathbf{x}^0) > 0$ при $r = m+1, \ldots, n$, тогда $\mathbf{x}^0$ является локальной точкой минимума в задаче (14.29);
- если $(-1)^r B_r(\mathbf{x}^0) > 0$ при $r = m+1, \ldots, n$, тогда $\mathbf{x}^0$ является локальной точкой максимума в задаче (14.29).

Локальные достаточные условия разрешимости задачи Лагранжа.

ФУНКЦИИ НАИЛУЧШЕГО ЗНАЧЕНИЯ И ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТЬ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

14.35 $f^*(\mathbf{b}) = \max\limits_{\mathbf{x}} \{f(\mathbf{x}) : g_j(\mathbf{x}) = b_j,\ j = 1, \ldots, m\}$

Функция наилучшего значения в задаче (14.29) в зависимости от параметра $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_m)$ в левой части ограничений в предположении, что имеется оптимальное решение $\mathbf{x}$, на котором максимум достигается.

14.36 Множители Лагранжа как «теневые цены»:

$$\frac{\partial f^*(\mathbf{b})}{\partial b_i} = \lambda_i(\mathbf{b}), \qquad i = 1, \dots, m$$

$\lambda_i(\mathbf{b})$ являются уникальными значениями множителей Лагранжа из (14.30). Достаточные условия дифференцируемости можно вывести из (14.42).

14.37 $V(\mathbf{a}) = \max\limits_{\mathbf{x} \in X} f(\mathbf{x}, \mathbf{a})$

Функция наилучшего значения в задаче максимизации с параметром в целевой функции. Предполагается достижимость максимума. $X \subset \mathbb{R}^n$ и $\mathbf{a} \in A$, где $A \subset \mathbb{R}^k$.

14.38 Если $f(\mathbf{x}, \mathbf{a})$ непрерывна на $X \times A$ и X компактно, то $V(\mathbf{a})$, определенная в (14.37), непрерывна на A. Если решение (14.37) $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{a})$ единственно для любого значения параметра $\mathbf{a}$ из A, то оптимальный план $\mathbf{x}(\mathbf{a})$ является непрерывной функцией параметра $\mathbf{a}$.

Непрерывность функции наилучшего значения и доставляющего его решения по параметру в целевой функции.

14.39 Пусть задача максимизации $f(\mathbf{x}, \mathbf{a})$ на $\mathbf{x}$ из допустимого множества X имеет единственное решение $\mathbf{x}^0(\mathbf{a}^0)$ в точке $\mathbf{a} = \mathbf{a}^0$, а также существуют $\partial f / \partial a_i$, $i = 1, \dots, k$, непрерывные в окрестности $(\mathbf{x}^0, \mathbf{a}^0)$. Тогда

$$\frac{\partial V(\mathbf{a}^0)}{\partial a_i} = \frac{\partial f(\mathbf{x}^0, \mathbf{a}^0)}{\partial a_i}, \qquad i = 1, \dots, k$$

Теорема покрытия.

14.40 $\max_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}, \mathbf{a})$ при $g_j(\mathbf{x}, \mathbf{a}) = 0$, $j = 1, \dots, m$

Задача Лагранжа с параметром $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_k)$.

14.41 $V(\mathbf{a}) = \sup\{f(\mathbf{x}, \mathbf{a}) : g_j(\mathbf{x}, \mathbf{a}) = 0,\ j = 1, \dots, m\}$

Функция наилучшего значения в задаче (14.40).

Рассмотрим задачу (14.40) при таких предположениях:

- при $\mathbf{a} = \mathbf{a}^0$ задача имеет единственное решение $\mathbf{x}^0 = \mathbf{x}(\mathbf{a}^0)$;
- найдутся такой шар $B(\mathbf{a}^0; \alpha)$ и такая константа K, что для любого $\mathbf{a}$ из $B(\mathbf{a}^0; \alpha)$ в задаче (14.40) существует решение $\mathbf{x}'$ из $B(\mathbf{x}^0; K)$;

14.42
- функции f и $g_1, \ldots, g_m$ принадлежат классу гладкости C^1 в некоторой окрестности точки $(\mathbf{x}(\mathbf{a}^0), \mathbf{a}^0)$;
- ранг матрицы $(\partial g_j(\mathbf{x}^0)/\partial x_i)_{m\times n}$ равен m.

Тогда $V(\mathbf{a})$ в точке $\mathbf{a}^0$ имеет частные производные и верно

$$\frac{\partial V(\mathbf{a}^0)}{\partial a_i} = \frac{\partial L(\mathbf{x}(\mathbf{a}^0), \mathbf{a}^0)}{\partial a_i}, \quad i = 1, \ldots, k$$

Формулировка теоремы покрытия для задачи (14.40).
$L = f - \sum \lambda_j g_j$ — **функция Лагранжа.**

ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

См. [77], [82], [44], [55] и [14].

Глава 15

ЛИНЕЙНОЕ И НЕЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

15.1

$$\max z = c_1x_1 + \cdots + c_nx_n \text{ при ограничениях}$$
$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n &\le b_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n &\le b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n &\le b_m \\ x_1 \ge 0, \ldots, x_n &\ge 0 \end{aligned}$$

Задача линейного программирования. (*Прямая* задача.) $\sum_{j=1}^{n} c_jx_j$ называется *целевой функцией*. Вектор $(x_1, \ldots, x_n)$ является *допустимым*, если он удовлетворяет всем m ограничениям.

15.2

$$\min Z = b_1\lambda_1 + \cdots + b_m\lambda_m \text{ при ограничениях}$$
$$\begin{aligned} a_{11}\lambda_1 + \cdots + a_{m1}\lambda_m &\ge c_1 \\ a_{12}\lambda_1 + \cdots + a_{m2}\lambda_m &\ge c_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{1n}\lambda_1 + \cdots + a_{mn}\lambda_m &\ge c_n \\ \lambda_1 \ge 0, \ldots, \lambda_m &\ge 0 \end{aligned}$$

Задача, *двойственная* к (15.1). $\sum_{i=1}^{m} b_i\lambda_i$ называется *целевой функцией*. Вектор $(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ является *допустимым*, если он удовлетворяет всем $n + m$ ограничениям.

15.3

$$\max \mathbf{c}'\mathbf{x} \text{ при условии } \mathbf{A}\mathbf{x} \le \mathbf{b},\ \mathbf{x} \ge \mathbf{0}$$
$$\min \mathbf{b}'\boldsymbol{\lambda} \text{ при условии } \mathbf{A}'\boldsymbol{\lambda} \ge \mathbf{c},\ \boldsymbol{\lambda} \ge \mathbf{0}$$

Задачи (15.1) и (15.2) в матричной формулировке. $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m\times n}$, $\mathbf{x} = (x_j)_{n\times 1}$, $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_i)_{m\times 1}$, $\mathbf{c} = (c_j)_{n\times 1}$, $\mathbf{b} = (b_i)_{m\times 1}$.

15.4 Если $(x_1, \ldots, x_n)$ и $(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ допустимы в (15.1) и (15.2) соответственно, то

$$b_1\lambda_1 + \cdots + b_m\lambda_m \ge c_1x_1 + \cdots + c_nx_n.$$

Значение целевой функции в двойственной задаче всегда не меньше значения целевой функции в прямой задаче.

Пусть $(x_1^*, \ldots, x_n^*)$ и $(\lambda_1^*, \ldots, \lambda_m^*)$ допустимы в (15.1) и (15.2) соответственно и верно

15.5 $c_1x_1^* + \cdots + c_nx_n^* = b_1\lambda_1^* + \cdots + b_m\lambda_m^*$,

тогда $(x_1^*, \ldots, x_n^*)$ и $(\lambda_1^*, \ldots, \lambda_m^*)$ являются оптимальными решениями для этих задач.

Интересный результат.

15.6 Если любая задача из пары (15.1) и (15.2) имеет конечное оптимальное решение, то и другая тоже, причем соответствующие значения целевых функций на этих решениях равны. Если в любой задаче из этой пары допустимое множество не ограничено в направлении движения к оптимальному значению целевой функции, то допустимое множество второй задачи пусто.

Теорема двойственности в линейном программировании.

15.7 Рассмотрим задачу (15.1). Если заменить b_i на $b_i + \Delta b_i$ для $i = 1, \ldots, m$, а решение двойственной задачи при этом остается прежним $(\lambda_1^*, \ldots, \lambda_m^*)$, то изменение оптимального значения целевой фукнции прямой задачи измеряется величиной выражения

$$\Delta z^* = \lambda_1^*\Delta b_1 + \cdots + \lambda_m^*\Delta b_m.$$

Результат, важный для анализа чувствительности и устойчивости оптимальных решений. (Двойственная задача обычно *будет* иметь то же самое решение, если изменения $|\Delta b_1|, \ldots, |\Delta b_m|$ достаточно малы.)

15.8 Величина i-й оптимальной двойственной переменной λ_i^* равна изменению целевой функции прямой задачи (15.1) при увеличении значения b_i на одну единицу.

Интерпретация λ_i^* как *«теневой цены»*. (Частный случай (15.7), имеющий тот же смысл.)

Пусть прямая задача (15.1) имеет оптимальное решение $(x_1^*, \ldots, x_n^*)$, а у двойственной задачи (15.2) есть оптимальное решение $(\lambda_1^*, \ldots, \lambda_m^*)$. Тогда для $i = 1, \ldots, n$, $j =$

15.9 $= 1, \ldots, m$:

1) $x_j^* > 0 \Rightarrow a_{1j}\lambda_1^* + \cdots + a_{mj}\lambda_m^* = c_j$,

2) $\lambda_i^* > 0 \Rightarrow a_{i1}x_1^* + \cdots + a_{in}x_n^* = b_i$.

Дополняющая нежесткость. (1) если в оптимальном плане прямой задачи переменная j положительна, то j-ое ограничение в двойственной задаче при оптимальном плате выполняется как равенство. 2) условие имеет такую же интерпретацию.)

15.10	Пусть **A** — матрица порядка $m \times n$, а **b** — n-вектор. Тогда вектор **y** такой, что $\mathbf{Ay} \geq \mathbf{0}$ и $\mathbf{b}'\mathbf{y} < 0$ существует тогда и только тогда, когда не найдется такого $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$, что $\mathbf{A}'\mathbf{x} = \mathbf{b}$.	Лемма Фаркаша.

НЕЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

15.11	$\max\ f(x,y)$ при ограничениях $g(x,y) \leq b$.	*Задача нелинейного программирования.*

15.12 *Рецепт решения задачи* (15.11).

1) Определить функцию Лагранжа $\mathcal{L}$ как
$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda(g(x,y) - b)$$
где λ является *множителем Лагранжа*, соответствующим ограничению $g(x,y) \leq b$.
2) Приравнять частные производные $\mathcal{L}(x,y,\lambda)$ по x и y нулю:
$$\mathcal{L}'_1(x,y,\lambda) = f'_1(x,y) - \lambda g'_1(x,y) = 0,$$
$$\mathcal{L}'_2(x,y,\lambda) = f'_2(x,y) - \lambda g'_2(x,y) = 0.$$
3) Ввести *условие дополняющей нежесткости*
$$\lambda \geq 0\ (= 0 \text{ если } g(x,y) < b).$$
4) Наложить на (x,y) трубование $g(x,y) \leq b$.

Необходимые условия решения задачи (15.11), точнее сформулированы в (15.20). Если найти все пары (x,y) (вместе с подходящими значениями λ), удовлетворяющие всем этим условиям, то в это множество войдут все претенденты на роль оптимального решения задачи. Если функция Лагранжа вогнута по (x,y), то эти же условия являются достаточными для оптимального решения.

15.13	$\max\limits_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x})$ при условиях $\begin{cases} g_1(\mathbf{x}) \leq b_1 \\ \dots\dots\dots\dots \\ g_m(\mathbf{x}) \leq b_m \end{cases}$	*Задача нелинейного программирования.* Вектор $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ является *допустимым*, если он удовлетворяет всем этим ограничениям.
15.14	$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = f(\mathbf{x}) - \sum\limits_{j=1}^{m} \lambda_j (g_j(\mathbf{x}) - b_j)$	*Функция Лагранжа* для задлачи (15.13). $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ являются *множителями Лагранжа*.

Рассмотрим задачу (15.13) в предположении принадлежности функций f и $g_1, \dots, g_m$ классу C^1. Предположим, что найдутся такие вектор $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ и допустимый вектор $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$, что

15.15 a) $\dfrac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{x}^0, \boldsymbol{\lambda})}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n,$

b) для всех $j = 1, \dots, m$,

$\lambda_j \geq 0 \;\; (= 0, \text{ если } g_j(\mathbf{x}^0) < b_j),$

c) функция Лагранжа $\mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})$ вогнута по $\mathbf{x}$.

Тогда $\mathbf{x}^0$ является решением задачи (15.13).

Достаточные условия Куна–Таккера.

15.16 b') $\lambda_j \geq 0$ и $\lambda_j(g_j(\mathbf{x}^0) - b_j) = 0, \;\; j = 1, \dots, m$

Альтернативная формулировка b) в (15.15).

15.17 (15.15) также действует, если c) заменить условием

c') $f(\mathbf{x})$ вогнута и $\lambda_j g_j(\mathbf{x})$ квазивогнуты при $j = 1, \dots, m$.

Альтернативные достаточные условия Куна–Таккера.

15.18 Ограничение j в (15.13) называется *активным в решении* $\mathbf{x}^0$, если $g_j(\mathbf{x}^0) = b_j$.

Определение *активного* (или *связанного*) ограничения.

15.19 В задаче (15.13) часто используется следующее условие: Векторы-градиенты в точке $\mathbf{x}^0$ тех функций g_j, которые задают ограничения, активные в решении $\mathbf{x}^0$, линейно независимы.

Дополнительное *требование к ограничениям* задачи (15.13).

15.20 Пусть вектор $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ является оптимальным решением в задаче (15.13), а функции f и $g_1, \dots, g_m$ принадлежат классу гладкости C^1. Предположим далее, что требование к ограничениям (15.19) выполняются в решении $\mathbf{x}^0$. Тогда найдется одинединственный набор таких чисел $\lambda_1, \dots, \lambda_m$, что

a) $\dfrac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{x}^0, \boldsymbol{\lambda})}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n,$

b) $\lambda_j \geq 0 \;\; (= 0, \text{ если } g_j(\mathbf{x}^0) < b_j), \quad j = 1, \dots, m.$

Необходимые условия Куна–Таккера для задачи (15.13). (Заметим, что те допустимые векторы, на которых не выполняется дополнительное требование к ограничениям, не могут претендовать на роль оптимальных решений задачи.)

15.21 $(\mathbf{x}^0, \boldsymbol{\lambda}^0)$ является *седловой точкой* функции Лагранжа $\mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})$, если

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}^0) \leq \mathcal{L}(\mathbf{x}^0, \boldsymbol{\lambda}^0) \leq \mathcal{L}(\mathbf{x}^0, \boldsymbol{\lambda})$$

для всех $\boldsymbol{\lambda} \geq \mathbf{0}$ и всех $\mathbf{x}$.

Определение седловой точки для задачи (15.13).

15.22 Если $\mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})$ имеет седловую точку $(\mathbf{x}^0, \boldsymbol{\lambda}^0)$, то план $(\mathbf{x}^0, \boldsymbol{\lambda}^0)$ является решением задачи (15.13).

Достаточное условие существования решения в задаче (15.13). (Не требуется выполнения условий дифференцируемости или выпуклости.)

15.23 К условиям задачи (15.13) часто добавляют следующее требование: для некоторого вектора $\mathbf{x}' = (x'_1, \ldots, x'_n)$, $g_j(\mathbf{x}') < b_j$ для $j = 1, \ldots, m$.

Условие (регулярности) Слейтера.

15.24 Рассмотрим задачу (15.13) в предположении вогнутости целевой функции f и выпуклости функций всех ограничений $g_1, \ldots, g_m$. Пусть верно условие Слейтера (15.23). Тогда необходимым и достаточным условием оптимальности $\mathbf{x}^0$ является существование таких неотрицательных чисел $\lambda_1^0, \ldots, \lambda_m^0$, что $(\mathbf{x}^0, \boldsymbol{\lambda}^0)$ есть седловая точка функции Лагранжа $\mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})$.

Результат седловой точки для вогнутого программирования.

15.25 Рассмотрим задачу (15.13) в предположении принадлежности функций f и $g_1, \ldots, g_m$ к классу гладкости C^1. Пусть найдется такие числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ и вектор $\mathbf{x}^0$, что

- на $\mathbf{x}^0$ верны (a) и (b) в (15.15),
- $\nabla f(\mathbf{x}^0) \neq \mathbf{0}$,
- $f(\mathbf{x})$ квазивогнута, а $\lambda_j g_j(\mathbf{x})$ квазивыпуклы при $j = 1, \ldots, m$.

Тогда $\mathbf{x}^0$ является решением задачи (15.13).

Достаточные условия разрешимости задачи *квазивогнутого программирования.*

15.26 $$V(\mathbf{b}) = \max\{f(\mathbf{x}) : g_j(\mathbf{x}) \le b_j,\ j = 1, \ldots, m\}$$

Функция наилучшего значения задачи (15.13), если этот максимум достигается при $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_m) \in \mathbb{R}^m$.

15.27

1) $V(\mathbf{b})$ возрастает по всем переменным.
2) $\partial V(\mathbf{b})/\partial b_j = \lambda_j(\mathbf{b}), \quad j = 1, \ldots, m.$
3) Если $f(\mathbf{x})$ вогнута, а $g_1(\mathbf{x}), \ldots, g_m(\mathbf{x})$ выпуклы, то $V(\mathbf{b})$ вогнута.

Свойства функции наилучшего значения. (Точную формулировку 2) можно получить из (15.30).)

15.28 $\max\limits_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}, \mathbf{a})$ при ограничениях

$$g_j(\mathbf{x}, \mathbf{a}) \le 0,\ j = 1, \ldots, m$$

Задача нелинейного программирования с параметрами $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^k$.

15.29 $V(\mathbf{a}) = \sup\{f(\mathbf{x}, \mathbf{a}) : g_j(\mathbf{x}, \mathbf{a}) \le 0,\ j = 1, \dots, m\}$

Функция наилучшего значения задачи (15.28).

Рассмотрим задачу (15.28) при следующих предположениях.

- При $\mathbf{a} = \mathbf{a}^0$ задача имеет единственное решение $\mathbf{x}^0$.
- Найдутся такой шар $B(\mathbf{a}^0; \alpha)$ и такая константа K, что для любого $\mathbf{a}$ из $B(\mathbf{a}^0; \alpha)$ существует такой оптимальный план $\mathbf{x}'$ задачи (15.28), что $\mathbf{x}' \in B(\mathbf{x}^0; K)$.
- f и $g_1, \dots, g_m$ принадлежат классу гладкости C^1 на некотором шаре вокруг точки $(\mathbf{x}^0, \mathbf{a}^0)$.
- В точке $\mathbf{x}^0$ векторы-градиенты тех функций g_j, которые соответствуют ограничениям, активным в $\mathbf{x}^0$, линейно независимы.

15.30 Тогда у функции $V(\mathbf{a})$ в точке $\mathbf{a}^0$ существуют частные производные, и

$$\frac{\partial V(\mathbf{a}^0)}{\partial a_i} = \frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{x}^0, \mathbf{a}^0, \boldsymbol{\lambda})}{\partial a_i}, \qquad i = 1, \dots, k.$$

Теорема покрытия для задачи (15.28). $\mathcal{L} = f - \sum \lambda_j g_j$ является функцией Лагранжа, а j-ое ограничение активно в точке $(\mathbf{x}^0, \mathbf{a}^0)$, если $g_j(\mathbf{x}^0, \mathbf{a}^0) = 0$.

НЕЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ С УСЛОВИЯМИ НЕОТРИЦАТЕЛЬНОСТИ

15.31
$$\max_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x})$$
$$\text{при ограничениях} \begin{cases} g_1(\mathbf{x}) \le b_1 \\ \dots\dots\dots\dots \\ g_m(\mathbf{x}) \le b_m \end{cases}, \quad \mathbf{x} \ge \mathbf{0}$$

Если условия неотрицательности записаны в форме $g_{m+i}(\mathbf{x}) = -x_i \le 0$ для $i = 1, \dots, n$, то (15.31) сводится к (15.13).

Пусть в задаче (15.31) функции f и $g_1, \dots, g_m$ принадлежат классу гладкости C^1 и найдутся такие числа $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ и допустимый вектор $\mathbf{x}^0$, что:

a) для всех $i = 1, \dots, n$, $x_i^0 \ge 0$ и

15.32
$$\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{x}^0, \boldsymbol{\lambda})}{\partial x_i} \le 0, \qquad x_i^0 \frac{\mathcal{L}(\mathbf{x}^0, \boldsymbol{\lambda})}{\partial x_i} = 0,$$

b) для всех $j = 1, \dots, m$,

$\lambda_j \ge 0$ $(= 0$, если $g_j(\mathbf{x}^0) < b_j)$,

c) функция Лагранжа $\mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})$ вогнута по $\mathbf{x}$.

Тогда $\mathbf{x}^0$ является решением задачи (15.31).

Достаточные условия Куна–Таккера для задачи (15.31). $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_i)_{m \times 1}$. $\mathcal{L}(\mathbf{x}^0, \boldsymbol{\lambda})$ определена в (15.14).

15.33 В формулировке (15.32) с) можно заменить на

c') $f(\mathbf{x})$ вогнута, а $\lambda_j g_j(\mathbf{x})$ квазивогнуты при $j = 1, \ldots, m$.

Альтернативная формулировка достаточных условий Куна–Таккера.

15.34 Пусть $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$ — оптимальный план задачи (15.31), а функции f и $g_1, \ldots, g_m$ принадлежат классу гладкости C^1. Предположим также, что в точке $\mathbf{x}^0$ векторы-градиенты функций g_j (включая все ограничения неотрицательности $g_{m+1}, \ldots, g_{m+n}$, записанные в соответствии с комментарием к (15.31)), соответствующих ограничениям, активным в плане $\mathbf{x}^0$, линейно независимы. Тогда найдется единственный набор таких чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, что

a) для всех $i = 1, \ldots, n$, $x_i^0 \geq 0$ и

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{x}^0, \boldsymbol{\lambda})}{\partial x_i} \leq 0, \qquad x_i^0 \frac{\mathcal{L}(\mathbf{x}^0, \boldsymbol{\lambda})}{\partial x_i} = 0,$$

b) $\lambda_j \geq 0$ ($= 0$, если $g_j(\mathbf{x}^0) < b_j$), $j = 1, \ldots, m$.

Необходимые условия Куна–Таккера для задачи (15.31). (Заметим, что все допустимые точки, в которых нарушено условие регулярности, претендуют на роль оптимального решения задачи.)

ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

См. [28], [55], [44], [82], [77], [3] и [14]. (В трех последних книгах не обсуждается линейное программирование.)

Глава 16

ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ И ТЕОРИЯ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

16.1	Простейшая задача вариационного исчисления (числа t_0, t_1, x^0 и x^1 фиксированы): $$\max \int_{t_0}^{t_1} F(t, x, \dot{x})\, dt, \quad x(t_0) = x^0, \quad x(t_1) = x^1.$$	Функция F принадлежит классу гладкости C^2. Неизвестная $x = x(t)$ *допустима*, если она из класса гладкости C^1 и удовлетворяет двум указанным здесь граничным условиям. От задачи минимизации можно перейти к задаче максимизации, заменив F на $-F$.
16.2	$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right) = 0$$	*Уравнение Эйлера.* Необходимое условие разрешимости задачи (16.1).
16.3	$$\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x} \partial \dot{x}} \cdot \ddot{x} + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial \dot{x}} \cdot \dot{x} + \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial \dot{x}} - \frac{\partial F}{\partial x} = 0$$	Альтернативная форма записи уравнения Эйлера.
16.4	$F''_{\dot{x}\dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t)) \le 0$ для всех t из $[t_0, t_1]$	*Условие Лежандра.* Необходимое условие разрешимости задачи (16.1).
16.5	Если $F(t, x, \dot{x})$ вогнута по $(x, \dot{x})$, то допустимая функция $x = x(t)$, удовлетворяющая уравнению Эйлера, является решением задачи (16.1).	Достаточные условия разрешимости задачи (16.1).
16.6	$x(t_1)$ в (16.1) свободна $\Rightarrow$ $\left[\dfrac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right]_{t=t_1} = 0$	*Условие трансверсальности.* В сочетании с (16.5) дает достаточные условия.

16.7	$x(t_1) \geq x^1$ в (16.1) $\Rightarrow$ $\left[\dfrac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right]_{t=t_1} \leq 0$ $(= 0,$ если $x(t_1) > x^1)$	Условие трансверсальности. В сочетании с (16.5) дает достаточные условия.
16.8	t_1 в(16.1) свободно $\Rightarrow$ $\left[F - \dot{x}\dfrac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right]_{t=t_1} = 0$	Условие трансверсальности.
16.9	$x(t_1) = g(t_1)$ в (16.1) $\Rightarrow$ $\left[F + (\dot{g} - \dot{x})\dfrac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right]_{t=t_1} = 0$	Условие трансверсальности. g — заданная C^1-функция.
16.10	$\max\left[\displaystyle\int_{t_0}^{t_1} F(t, x, \dot{x})\, dt + S(x(t_1))\right], \quad x(t_0) = x^0$	Вариационная задача с *функцией невязок* S, принадлежащей классу гладкости C^1.
16.11	$\left[\dfrac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right]_{t=t_1} + S'(x(t_1)) = 0$	Решение задачи (16.10) должно удовлетворять уравнению (16.2) и этому условию трансверсальности.
16.12	Если $F(t, x, \dot{x})$ вогнута по $(x, \dot{x})$ и $S(x)$ вогнута, то допустимая функция, удовлетворяющая уравнению Эйлера и условию трансверсальности (16.11), является решением задачи (16.10).	Достаточные условия разрешимости (16.10).
16.13	$\max \displaystyle\int_{t_0}^{t_1} F\left(t, x, \frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}, \ldots, \frac{d^n x}{dt^n}\right) dt$	Вариационная задача с производными высших порядков. (Граничные условия не указаны.)
16.14	$\dfrac{\partial F}{\partial x} - \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right) + \cdots + (-1)^n \dfrac{d^n}{dt^n}\left(\dfrac{\partial F}{\partial x^{(n)}}\right) = 0$	*(Обобщенное) уравнение Эйлера* для задачи (16.13).
16.15	$\max \displaystyle\iint_R F\left(t, s, x, \frac{\partial x}{\partial t}, \frac{\partial x}{\partial s}\right) dt\, ds$	Вариационная задача, в которой неизвестная функция $x(t, s)$ зависит от двух переменных. (Граничные условия не указаны.)
16.16	$\dfrac{\partial F}{\partial x} - \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{\partial F}{\partial x'_t}\right) - \dfrac{\partial}{\partial s}\left(\dfrac{\partial F}{\partial x'_s}\right) = 0$	*(Обобщенное) уравнение Эйлера* для задачи (16.15).

ТЕОРИЯ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ. ОДНА ПЕРЕМЕННАЯ СОСТОЯНИЯ И ОДНА ПЕРЕМЕННАЯ УПРАВЛЕНИЯ

16.17 Простейший случай. Фиксированный интервал времени $[t_0, t_1]$ и свободная правая часть:

$$\max \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), u(t))\, dt, \quad u(t) \in \mathbb{R},$$

$$\dot{x}(t) = g(t, x(t), u(t)), \; x(t_0) = x^0, \; x(t_1) \text{ свободно.}$$

Пара $(x(t), u(t))$ *допустима*, если она удовлетворяет этому дифференциальному уравнению, $x(t_0) = x^0$ и функция управления $u(t)$ кусочно-непрерывна. От задачи минимизации можно перейти к задаче максимизации, заменив F на $-F$.

16.18 $H(t, x, u, p) = f(t, x, u) + pg(t, x, u)$

Гамильтониан для задачи (16.17).

16.19 Пусть $(x^*(t), u^*(t))$ является решением задачи (16.17). Тогда найдется такая непрерывная функция $p(t)$, что для любого t из $[t_0, t_1]$,

1) $H(t, x^*(t), u, p(t)) \le H(t, x^*(t), u^*(t), p(t))$ для всех u из $\mathbb{R}$. В частности, $H'_u(t, x^*(t), u^*(t), p(t)) = 0$.
2) Функция $p(t)$ удовлетворяет $\dot{p}(t) = -H'_x(t, x^*(t), u^*(t), p(t)), \quad p(t_1) = 0$.

Принцип максимума. Дифференциальное уравнение относительно $p(t)$ не обязательно выполняется в точках разрыва функции $u^*(t)$. Уравнение $p(t_1) = 0$ называется *условием трансверсальности*.

16.20 Если $(x^*(t), u^*(t))$ удовлетворяют условиям (16.19) и $H(t, x, u, p(t))$ вогнута по (x, u), то пара $(x^*(t), u^*(t))$ является решением задачи (16.17).

Достаточные условия Мангасариана для задачи (16.17).

16.21

$$\max \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), u(t))\, dt, \quad u(t) \in U \subset \mathbb{R},$$

$$\dot{x}(t) = g(t, x(t), u(t)), \quad x(t_0) = x^0,$$

$$\text{(a) } x(t_1) = x^1 \quad \text{or} \quad \text{(b) } x(t_1) \ge x^1.$$

Задача управления с граничными условиями и фиксированным временным интервалом. U является *областью управления*. $u(t)$ кусочно-непрерывна.

16.22 $H(t, x, u, p) = p_0 f(t, x, u) + pg(t, x, u)$

Гамильтониан для задачи (16.21).

16.23 Пусть $(x^*(t), u^*(t))$ является решением задачи (16.21). Тогда найдутся такие непрерывная функция $p(t)$ и число p_0, что для всех t из $[t_0, t_1]$

1) $p_0 = 0$ или 1 и $(p_0, p(t))$ никогда не совпадает с парой $(0,0)$.
2) $H(t, x^*(t), u, p(t)) \leq H(t, x^*(t), u^*(t), p(t))$ для всех u из U.
3) $\dot{p}(t) = -H'_x(t, x^*(t), u^*(t), p(t))$.
4) a') Отсутствуют ограничения на $p(t_1)$.
   b') $p(t_1) \geq 0$ $(= 0$, если $x^*(t_1) > x^1)$.

Принцип максимума. Дифференциальное уравнение относительно $p(t)$ не обязательно выполняется в точках разрыва $u^*(t)$. 4) b') называется *условием трансверсальности* (Во всех случаях, кроме вырожденных, можно положить $p_0 = 1$ и игнорировать затем 1).)

НЕСКОЛЬКО ПЕРЕМЕННЫХ СОСТОЯНИЯ И УПРАВЛЕНИЯ

16.24
$$\max \int_{t_0}^{t_1} f(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))\, dt,$$
$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{g}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0,$$
$$\mathbf{u}(t) = (u_1(t), \dots, u_r(t)) \in U \subset \mathbb{R}^r,$$

a) $x_i(t_1) = x_i^1, \qquad i = 1, \dots, l,$
b) $x_i(t_1) \geq x_i^1, \qquad i = l+1, \dots, q,$
c) $x_i(t_1)$ free, $\qquad i = q+1, \dots, n.$

Стандартная задача управления с фиксированным временным интервалом. U является областью управления, $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$, $\mathbf{g} = (g_1, \dots, g_n)$. $\mathbf{u}(t)$ кусочно-непрерывна.

16.25
$$H(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{p}) = p_0 f(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) + \sum_{i=1}^{n} p_i g_i(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})$$

Гамильтониан.

16.26 Если $(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t))$ является решением задачи (16.24), то найдутся такие константа p_0 и непрерывная функция
$$\mathbf{p}(t) = (p_1(t), \dots, p_n(t)),$$
то для всех t из $[t_0, t_1]$

1) $p_0 = 0$ или 1 и $(p_0, \mathbf{p}(t))$ никогда не совпадает с парой $(0,0)$,
2) $H(t, \mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}, \mathbf{p}(t)) \leq H(t, \mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t), \mathbf{p}(t))$ для любого $\mathbf{u}$ из U,
3) $\dot{p}_i(t) = -\partial H^* / \partial x_i, \qquad i = 1, \dots, n$
4) a') нет ограничений на $p_i(t_1)$, $i = 1, \dots, l$
   b') $p_i(t_1) \geq 0$ $(= 0$, если $x_i^*(t_1) > x_i^1)$ $\qquad i = l+1, \dots, q$
   c') $p_i(t_1) = 0, \qquad i = q+1, \dots, n$

Принцип максимума. H^* — значение гамильтониана в $(t, \mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t), \mathbf{p}(t))$. Дифференциальное уравнение относительно $p_i(t)$ не обязательно выполняется в точках разрыва функции $\mathbf{u}^*(t)$. 4) b') и c') являются *условиями трансверсальности.* (Во всех случаях, кроме вырожденных, можно положить $p_0 = 1$, и игнорировать затем 1).)

16.27	Если $(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t))$ удовлетворяет всем условиям, наложенным в (16.26) при $p_0 = 1$, а $H(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{p}(t))$ вогнут по $(\mathbf{x}, \mathbf{u})$, то $(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t))$ является решением задачи (16.24).	*Достаточные условия Мангасариана* для задачи (16.24).
16.28	В (16.27) требование вогнутости гамильтониана $H(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{p}(t))$ по $(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ можно заменить более слабым условием, что *максимизированный Гамильтониан* $\widehat{H}(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}(t)) = \max_{\mathbf{u} \in U} H(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{p}(t))$ вогнут по $\mathbf{x}$.	*Достаточные условия Эрроу.*
16.29	$V(\mathbf{x}^0, \mathbf{x}^1, t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} f(t, \mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t))\, dt$	*Функция наилучшего значения* задачи (16.24), где решением является $(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t))$, причем $\mathbf{x}^1 = (x_1^1, \ldots, x_q^1)$.
16.30	$\dfrac{\partial V}{\partial x_i^0} = p_i(t_0), \quad i = 1, \ldots, n$ $\dfrac{\partial V}{\partial x_i^1} = -p_i(t_1), \quad i = 1, \ldots, q$ $\dfrac{\partial V}{\partial t_0} = -H^*(t_0), \quad \dfrac{\partial V}{\partial t_1} = H^*(t_1)$	Свойства функции наилучшего значения V в предположении ее дифференцируемости. $H^*(t) = H(t, \mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t), \mathbf{p}(t))$. (Точные предположения сформулированы в [73, раздел 3.5].)
16.31	Если в задаче (16.24) t_1 свободно, а $(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t))$ является решением соответствующей задачи на $[t_0, t_1^*]$, то все условия принципа (16.26) на $[t_0, t_1^*]$ выполняются, и, кроме того, $H(t_1^*, \mathbf{x}^*(t_1^*), \mathbf{u}^*(t_1^*), \mathbf{p}(t_1^*)) = 0.$	Необходимые условия для задачи со свободным конечным временем. (Вогнутость гамильтониана по $(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ *не*достаточна для оптимальности, если t_1 свободно. См. [73, раздел 2.9].)

Рассмотрим задачу (16.24) с заменой конечных условий a), b) и c) на

$$R_k(\mathbf{x}(t_1)) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, r_1',$$

$$R_k(\mathbf{x}(t_1)) \ge 0, \quad k = r_1' + 1, r_1' + 2, \ldots, r_1,$$

где функции $R_1, \ldots, R_{r_1}$ принадлежат классу гладкости C^1. Если пара $(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t))$ оптимальна, то выполняются условия (16.26), кроме 4), вместо которого верно условие существования таких чисел $a_1, \ldots, a_{r_1}$, что

16.32

$$p_j(t_1) = \sum_{k=1}^{r_1} a_k \frac{\partial R_k(\mathbf{x}^*(t_1))}{\partial x_j}, \quad j = 1, \ldots, n,$$

где $a_k \ge 0$ ($= 0$, если $R_k(\mathbf{x}^*(t_1)) > 0$) для $k = r_1' + 1, \ldots, r_1$ и 1) заменяется на

$$p_0 = 0 \text{ или } 1, \ (p_0, a_1, \ldots, a_{r_1}) \ne (0, 0, \ldots, 0).$$

Если $\widehat{H}(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}(t))$ вогнут по $\mathbf{x}$ при $p_0 = 1$ и сумма $\sum_{k=1}^{r_1} a_k R_k(\mathbf{x})$ квазивогнута по $\mathbf{x}$, то пара $(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*)$ оптимальна.

Более общие конечные условия. Гамильтониан $\widehat{H}(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}(t))$ определен (16.28).

16.33

$$\max\left[\int_{t_0}^{t_1} f(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) e^{-rt}\, dt + S(t_1, \mathbf{x}(t_1)) e^{-rt_1}\right]$$

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{g}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0, \quad \mathbf{u}(t) \in U \subset \mathbb{R}^r$$

a) $x_i(t_1) = x_i^1, \quad i = 1, \ldots, l$

b) $x_i(t_1) \ge x_i^1, \quad i = l + 1, \ldots, q$

c) $x_i(t_1)$ свободно, $\quad i = q + 1, \ldots, n$

Задача управления с *функцией невязок* S в составе максимизируемой функции. t_0 и t_1 фиксированы.

16.34

$$H^c(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{q}) = q_0 f(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) + \sum_{j=1}^{n} q_j g_j(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})$$

Гамильтониан текущего значения для задачи (16.33).

16.35

Если $(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t))$ является решением задачи (16.33), то найдутся такие константа q_0 и непрерывная функция $\mathbf{q}(t) = (q_1(t), \ldots, q_n(t))$, то для любого t на $[t_0, t_1]$

1) $q_0 = 0$ или 1 и $(q_0, \mathbf{q}(t))$ никогда не совпадает с парой $(0, 0)$.

2) $H^c(t, \mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}, \mathbf{q}(t)) \le H^c(t, \mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t), \mathbf{q}(t))$ для всех $\mathbf{u}$ из U.

3) $\dot{q}_i - r q_i = -\dfrac{\partial H^c(t, \mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*, \mathbf{q})}{\partial x_i}, \quad i = 1, \ldots, n.$

4) a') Нет ограничений на $q_i(t_1)$, $\quad i = 1, \ldots, l$.

b') $q_i(t_1) \ge q_0 \dfrac{\partial S^*(t_1, \mathbf{x}^*(t_1))}{\partial x_i}$ (верно $=$ в случае $x_i^*(t_1) > x_i^1$) $i = l + 1, \ldots, m$.

c') $q_i(t_1) = q_0 \dfrac{\partial S^*(t_1, \mathbf{x}^*(t_1))}{\partial x_i}, \quad i = m + 1, \ldots, n.$

Принцип максимума для задачи (16.33), *формулировка в терминах текущего значения.* Дифференциальное уравнение $\dot{q}_i = \dot{q}_i(t)$ не обязательно выполняется в точках разрыва функции $\mathbf{u}^*(t)$.(Во всех случаях, кроме вырожденных, можно положить $q_0 = 1$ и игнорировать затем 1).)

16.36	Если пара $(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t))$ удовлетворяет условиям (16.35) при $q_0 = 1$, гамильтониан $H^c(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{q}(t))$ вогнут по $(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ и функция невязок $S(t, \mathbf{x})$ вогнута по $\mathbf{x}$, то $(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t))$ является решением задачи.	Достаточные условия разрешимости (16.33). (Мангасариан.)
16.37	В (16.36) требование вогнутости гамильтониана $H^c(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{q}(t))$ по $(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ можно заменить более слабым условием — *максимизированный гамильтониан текущего значения* $\widehat{H}^c(t, \mathbf{x}, \mathbf{q}(t)) = \max_{\mathbf{u} \in U} H^c(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{q}(t))$ вогнут по $\mathbf{x}$.	*Достаточные условия Эрроу.*
16.38	Если в задаче (16.33) t_1 свободно и $(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*)$ является решением соответствующей задачи на интервале $[t_0, t_1^*]$, тогда на $[t_0, t_1^*]$ выполняются все условия (16.35) и, кроме того, $H^c(t_1^*, \mathbf{x}^*(t_1^*), \mathbf{u}^*(t_1^*), \mathbf{q}(t_1^*)) = q_0 r S(t_1^*, \mathbf{x}^*(t_1^*)) - q_0 \frac{\partial S(t_1^*, \mathbf{x}^*(t_1^*))}{\partial t_1}$.	Необходимое условие разрешимости (16.33) при свободном t_1. (Во всех случаях, кроме вырожденных, можно положить $q_0 = 1$, и игнорировать затем 1).)

ЛИНЕЙНЫЕ КВАДРАТИЧНЫЕ ЗАДАЧИ

16.39	$\min[\int_{t_0}^{t_1} (\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{u}'\mathbf{B}\mathbf{u})\,dt + (\mathbf{x}(t_1))'\mathbf{S}\mathbf{x}(t_1)]$, $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}\mathbf{x} + \mathbf{G}\mathbf{u}, \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0, \quad \mathbf{u} \in \mathbb{R}^r$. Матрицы $\mathbf{A} = \mathbf{A}(t)_{n\times n}$ и $\mathbf{S}_{n\times n}$ симметричны и положительно полуопределены, $\mathbf{B} = \mathbf{B}(t)_{r\times r}$ симметрична и положительно определена, $\mathbf{F} = \mathbf{F}(t)_{n\times n}$ и $\mathbf{G} = \mathbf{G}(t)_{n\times r}$.	*Линейная квадратичная задача управления.* Исходные функции $\mathbf{A}(t)$, $\mathbf{B}(t)$, $\mathbf{F}(t)$ и $\mathbf{G}(t)$ непрерывны по t. $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ $n \times 1$, $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t)$ $r \times 1$.
16.40	$\dot{\mathbf{R}} = -\mathbf{R}\mathbf{F} - \mathbf{F}'\mathbf{R} + \mathbf{R}\mathbf{G}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{G}'\mathbf{R} - \mathbf{A}$	Дифференциальное уравнение *Риккати*, соответствующее задаче (16.39).

16.41	Пусть пара $(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t))$ является допустимой в задаче (16.39), причем $\mathbf{u}^* = -(\mathbf{B}(t))^{-1}(\mathbf{G}(t))'\mathbf{R}(t)\mathbf{x}^*$, где $\mathbf{R} = \mathbf{R}(t)$ как симметричная матрица $n \times n$, а исходные функции $\mathbf{A}(t)$, $\mathbf{B}(t)$, $\mathbf{F}(t)$ и $\mathbf{G}(t)$ принадлежат классу гладкости C^1 и удовлетворяют уравнению (16.40) при $\mathbf{R}(t_1) = \mathbf{S}$. Тогда $(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t))$ является решением (16.39).	Решение задачи (16.39).

БЕСКОНЕЧНЫЙ ИНТЕРВАЛ

16.42	$$\max \int_{t_0}^{\infty} f(t, x(t), u(t)) e^{-rt}\, dt,$$ $$\dot{x}(t) = g(t, x(t), u(t)), \quad x(t_0) = x^0, \quad u(t) \in U,$$ $$\lim_{t\to\infty} x(t) \geq x^1 \qquad (\text{число } x^1 \text{ фиксировано}).$$	Простая задача *на бесконечном временном интервале* с одной переменной в предположении сходимости интеграла на всех допустимых парах.
16.43	$$H^c(t, x, u, q) = q_0 f(t, x, u) + q g(t, x, u)$$	Гамильтониан текущего значения задачи (16.42).
16.44	Пусть при $q_0 = 1$ в задаче (16.42) допустимая пара $(x^*(t), u^*(t))$ при всех $t \geq t_0$ удовлетворяет следующим условиям: 1) $H^c(t, x^*(t), u, q(t)) \leq H^c(t, x^*(t), u^*(t), q(t))$ для любого u из U, 2) $\dot{q}(t) - rq = -\partial H^c(t, x^*(t), u^*(t), q(t))/\partial x$, 3) $H^c(t, x, u, q(t))$ вогнут по (x, u), 4) $\lim_{t\to\infty}[q(t)e^{-rt}(x(t) - x^*(t))] \geq 0$ для всех допустимых $x(t)$. Тогда пара $(x^*(t), u^*(t))$ является оптимальной.	Достаточные условия Мангасариана. (Требования 1) и 2) (существенно) необходимы для задачи (16.42), а 4) — нет. Необходимые условия обсуждаются, например, в [73, раздел 3.7].)
16.45	$$\max \int_{t_0}^{\infty} f(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) e^{-rt}\, dt$$ $$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{g}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0, \quad \mathbf{u}(t) \in U \subset \mathbb{R}^r$$ a) $\underline{\lim}_{t\to\infty} x_i(t) = x_i^1, \quad i = 1, \ldots, l$ b) $\underline{\lim}_{t\to\infty} x_i(t) \geq x_i^1, \quad i = l+1, \ldots, m$ c) $x_i(t)$ свободно при $t \to \infty, \quad i = m+1, \ldots, n$	*Задача на бесконечном интервале* с несколькими переменными состояния и управления. Определение предела $\underline{\lim}$ см. в (12.40) и (12.41).

16.46 $D(t) = \int_{t_0}^{t} (f^* - f)e^{-r\tau}\,d\tau$, где
$f^* = f(\tau, \mathbf{x}^*(\tau), \mathbf{u}^*(\tau))$, $f = f(\tau, \mathbf{x}(\tau), \mathbf{u}(\tau))$

Обозначение, используемое далее в (16.47). Пара $(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t))$ подозрительна на оптимальность, а пара $(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$ — любая допустимая.

Пара $(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t))$ является

- *спорадически почти оптимальной*, если для любой допустимой пары $(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$
  $\overline{\lim}_{t\to\infty} D(t) \geq 0$,
  т. е. для любого $\varepsilon > 0$ и любого T найдется такое $t \geq T$, что $D(t) \geq -\varepsilon$;
- 16.47 *почти оптимальной*, если для любой допустимой пары $(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$
  $\underline{\lim}_{t\to\infty} D(t) \geq 0$,
  т. е. для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое T, что $D(t) \geq -\varepsilon$ для всех $t \geq T$;
- *совсем оптимальной*, если для любой допустимой пары $(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$ найдется такое число T, что $D(t) \geq 0$ для всех $t \geq T$.

Различные формы понятия оптимальности для задач на бесконечном интервале. (Спорадическую почти оптимальность также называют *слабой оптимальностью*, при таком подходе *сильной оптимальностью* называется почти оптимальность.)

16.48 совсем оптимальность $\Rightarrow$ почти оптимальность $\Rightarrow$ спорадическая почти оптимальность

Связь критиериев оптимальности.

Пусть $(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t))$ спорадически почти оптимальна, почти оптимальна или совсем оптимальна в задаче (16.45). Тогда найдутся такие константа q_0 и непрерывная функция $\mathbf{q}(t) = (q_1(t), \ldots, q_n(t))$, что для всех $t \geq t_0$

16.49
1) $q_0 = 0$ или 1 и $(q_0, \mathbf{q}(t))$ никогда не совпадает с парой $(0, \mathbf{0})$,
2) $H^c(t, \mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}, \mathbf{q}(t)) \leq H^c(t, \mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t), \mathbf{q}(t))$ для любого $\mathbf{u}$ из U,
3) $\dot{q}_i - rq_i = -\dfrac{\partial H^c(t, \mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*, \mathbf{q})}{\partial x_i}$, $i = 1, \ldots, n$.

Принцип максимума. Бесконечный интервал. (Отсутствует условие трансверсальности.) Дифференциальное уравнение относительно $q_i(t)$ не обязательно верно в точках разрыва функции $\mathbf{u}^*(t)$.

16.50 Условия 2) и 3) в (16.49) (при $q_0 = 1$) достаточны для почти оптимальности, если
1) $H^c(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{q}(t))$ вогнут по $(\mathbf{x}, \mathbf{u})$,
2) $\underline{\lim}_{t\to\infty} e^{-rt}\mathbf{q}(t)\cdot(\mathbf{x}(t)-\mathbf{x}^*(t)) \geq 0$ для всех допустимых $\mathbf{x}(t)$.

Достаточные условия разрешимости задачи на бесконечном временном интервале.

16.51 Условие (16.50) 2) верно при выполнении при любом допустимом $\mathbf{x}(t)$ следующих условий:
1) $\underline{\lim}_{t\to\infty} e^{-rt}q_i(t)(x_i^1 - x_i^*(t)) \geq 0, \quad i = 1, \ldots, m.$
2) Найдется такая константа M, что $|e^{-rt}q_i(t)| \leq M$ при любом $t \geq t_0$, $i = 1, \ldots, m.$
3) Найдется либо $t' \geq t_0$, при котором $q_i(t) \geq 0$ для всех $t \geq t'$, либо такое число P, что $|x_i(t)| \leq P$ для всех $t \geq t_0$, и $\underline{\lim}_{t\to\infty} q_i(t) \geq 0, \quad i = l+1, \ldots, m.$
4) Найдется такое число Q, что $|x_i(t)| < Q$ для всех $t \geq t_0$ и $\lim_{t\to\infty} q_i(t) = 0, \quad i = m+1, \ldots, n.$

Достаточные условия выполнения (16.50) 2). См. [73, раздел 3.7, замечание 16].

СМЕШАННЫЕ ОГРАНИЧЕНИЯ СОСТОЯНИЯ

16.52
$$\max \int_{t_0}^{t_1} f(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))\,dt$$
$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{g}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0, \quad \mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^r$$
$$h_k(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \geq 0, \quad k = 1, \ldots, s$$
a) $x_i(t_1) = x_i^1, \quad i = 1, \ldots, l$
b) $x_i(t_1) \geq x_i^1, \quad i = l+1, \ldots, q$
c) $x_i(t_1)$ свободно, $\quad i = q+1, \ldots, n$

Задача со смешанными ограничениями. $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$. $h_1, \ldots, h_s$ — заданные функции. (Все требования, предъявляемые к $\mathbf{u}$, должны быть включены в ограничения на h_k.)

16.53
$$\mathcal{L}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{p}, \mathbf{q}) = H(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{p}) + \sum_{k=1}^{s} q_k h_k(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})$$

Лагранжиан для задачи (16.52). $H(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{p})$ — обычный гамильтониан.

Пусть пара $(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t))$ допустима в задаче (16.52). Далее предположим, что существуют такие функции $\mathbf{p}(t) = (p_1(t), \dots, p_n(t))$ и $\mathbf{q}(t) = (q_1(t), \dots, q_s(t))$, причем $\mathbf{p}(t)$ непрерывна, а $\dot{\mathbf{p}}(t)$ и $\mathbf{q}(t)$ кусочно-непрерывны, что при $p_0 = 1$ выполняются следующие условия:

16.54

1) $\dfrac{\partial \mathcal{L}^*}{\partial u_j} = 0, \qquad j = 1, \dots, r$

2) $q_k(t) \geq 0 \ (= 0, \text{ если } h_k(t, \mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t)) > 0), \quad k = 1, \dots, s$

3) $\dot{p}_i(t) = -\dfrac{\partial \mathcal{L}^*}{\partial x_i}, \qquad i = 1, \dots, n$

4) a') Нет ограничений на $p_i(t_1)$, $\quad i = 1, \dots, l$

b') $p_i(t_1) \geq 0 \ (= 0, \text{ если } x_i^*(t_1) > x_i^1), \quad i = l+1, \dots, m$

c') $p_i(t_1) = 0, \qquad i = m+1, \dots, n$

5) $H(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{p}(t))$ вогнут по $(\mathbf{x}, \mathbf{u})$

6) $h_k(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})$ квазивогнуты по $(\mathbf{x}, \mathbf{u})$, $\quad k = 1, \dots, s$.

Тогда $(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t))$ является решением задачи.

Достаточные условия Мангасариана для задачи (16.52). $\mathcal{L}^*$ обозначает оценку значения при $(t, \mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t), \mathbf{p}(t), \mathbf{q}(t))$. (Стандартная формулировка *необходимых* условий оптимальности включает в себя требования к ограничениям задачи, заметно сужающие разнообразие типов функций, которые можно использовать в ограничениях на h_k. В частности, каждое ограничение, активное на оптимуме, должно зависеть хотя бы от одной из переменных управления. Подробнее см. Литературу.)

ЧИСТЫЕ ОГРАНИЧЕНИЯ СОСТОЯНИЯ

16.55

$$\max \int_{t_0}^{t_1} f(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))\, dt$$

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{g}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0$$

$$\mathbf{u}(t) = (u_1(t), \dots, u_r(t)) \in U \subset \mathbb{R}^r$$

$$h_k(t, \mathbf{x}(t)) \geq 0, \quad k = 1, \dots, s$$

a) $x_i(t_1) = x_i^1, \qquad i = 1, \dots, l$

b) $x_i(t_1) \geq x_i^1, \qquad i = l+1, \dots, q$

c) $x_i(t_1)$ свободно, $\qquad i = q+1, \dots, n$

Задача с чистыми ограничениями на переменные состояния. U — область управления. Функции $h_1, \dots, h_s$ заданы.

16.56

$$\mathcal{L}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{p}, \mathbf{q}) = H(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{p}) + \sum_{k=1}^{s} q_k h_k(t, \mathbf{x})$$

Лагранжиан для задачи (16.55). $H(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{p})$ — обычный гамильтониан.

16.57

Пусть пара $(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t))$ допустима в задаче (16.55) и найдутся такие векторные функции $\mathbf{p}(t)$ и $\mathbf{q}(t)$, причем $\mathbf{p}(t)$ непрерывна, а $\dot{\mathbf{p}}(t)$ и $\mathbf{q}(t)$ кусочно-непрерывны на $[t_0, t_1)$, и числа β_k, $k = 1, \ldots, s$, что при выполняются следующие условия $p_0 = 1$:

1) $\mathbf{u} = \mathbf{u}^*(t)$ максимизирует $H(t, \mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}, \mathbf{p}(t))$ для $\mathbf{u}$ из U,
2) $q_k(t) \geq 0$ $(= 0$, если $h_k(t, \mathbf{x}^*(t)) > 0)$, $\quad k = 1, \ldots, s$
3) $\dot{p}_i(t) = -\dfrac{\partial \mathcal{L}^*}{\partial x_i}, \quad i = 1, \ldots, n$
4) на t_1, непрерывность $p_i(t)$ может быть нарушена скачком её значения, в этом случае
$$p_i(t_1^-) - p_i(t_1) = \sum_{k=1}^{s} \beta_k \frac{\partial h_k(t_1, \mathbf{x}^*(t_1))}{\partial x_i}, \quad i = 1, \ldots, n$$
5) $\beta_k \geq 0$ $(= 0$, если $h_k(t_1, \mathbf{x}^*(t_1)) > 0)$, $\quad k = 1, \ldots, s$
6) a') без ограничений на $p_i(t_1)$, $\quad i = 1, \ldots, l$
   b') $p_i(t_1) \geq 0$ $(= 0$, если $x_i^*(t_1) > x_i^1)$, $\quad i = l+1, \ldots, m$
   c') $p_i(t_1) = 0$, $\quad i = m+1, \ldots, n$
7) $\widehat{H}(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}(t)) = \max_{\mathbf{u} \in U} H(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{p}(t))$ вогнут по $\mathbf{x}$.
8) $h_k(t, \mathbf{x})$ квазивогнуты по $\mathbf{x}$, $\quad k = 1, \ldots, s$

Тогда $(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t))$ — решение задачи.

Достаточные условия Мангасариана для задачи (16.55) с чистыми ограничениями на переменные состояния. $\mathbf{p}(t) = (p_1(t), \ldots, p_n(t))$ и $\mathbf{q}(t) = (q_1(t), \ldots, q_s(t))$. $\mathcal{L}^*$ обозначает оценку значения на $(t, \mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t), \mathbf{p}(t), \mathbf{q}(t))$. (Условия этой теоремы довольно жесткие. В частности, надо разрешить $\mathbf{p}(t)$ иметь нарушения непрерывности на внутренних точках интервала $[t_0, t_1]$. Подробнее см. Литературу.)

СМЕШАННЫЕ И ЧИСТЫЕ ОГРАНИЧЕНИЯ СОСТОЯНИЯ

16.58

$$\max \int_{t_0}^{t_1} f(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))\, dt$$
$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{g}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0$$
$$\mathbf{u}(t) = (u_1(t), \ldots, u_r(t)) \in U \subset \mathbb{R}^r$$
$$h_k(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \geq 0, \quad k = 1, \ldots, s'$$
$$h_k(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) = \bar{h}_k(t, \mathbf{x}(t)) \geq 0, \ k = s'+1, \ldots, s$$
a) $x_i(t_1) = x_i^1, \quad i = 1, \ldots, l$
b) $x_i(t_1) \geq x_i^1, \quad i = l+1, \ldots, q$
c) $x_i(t_1)$ свободно, $\quad i = q+1, \ldots, n$

Задача со смешанными и чистыми ограничениями на переменные состояния.

16.59

Пусть пара $(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t))$ допустима в задаче (16.58). Предположим, что найдутся такие векторные функции $\mathbf{p}(t)$ и $\mathbf{q}(t)$, причем $\mathbf{p}(t)$ непрерывна, а $\dot{\mathbf{p}}(t)$ и $\mathbf{q}(t)$ кусочно-непрерывны и числа β_k, $k = 1, \dots, s$, что при $p_0 = 1$ выполняются следующие условия:

1) $\left(\dfrac{\partial \mathcal{L}^*}{\partial \mathbf{u}}\right) \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}^*(t)) \leq 0$ для любого $\mathbf{u}$ из U

2) $\dot{p}_i(t) = -\dfrac{\partial \mathcal{L}^*}{\partial x_i}$, $\quad i = 1, \dots, n$

3) $p_i(t_1) - \sum\limits_{k=1}^{s} \beta_k \dfrac{\partial h_k(t_1, \mathbf{x}^*(t_1), \mathbf{u}^*(t_1))}{\partial x_i}$ удовлетворяет требованиям

   a') ограничения отсутствуют, $\quad i = 1, \dots, l$

   b') ≥ 0 ($= 0$ если $x_i^*(t_1) > x_i^1$), $\quad i = l+1, \dots, m$

   c') $= 0$, $\quad i = m+1, \dots, n$

4) $\beta_k = 0$, $\quad k = 1, \dots, s'$

5) $\beta_k \geq 0$ ($= 0$ если $\bar{h}_k(t_1, \mathbf{x}^*(t_1)) > 0$), $\quad k = s'+1, \dots, s$

6) $q_k(t) \geq 0$ ($= 0$ если $h_k(t, \mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t)) > 0$), $\quad k = 1, \dots, s$

7) $h_k(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})$ квазивогнуты по $(\mathbf{x}, \mathbf{u})$, $\quad k = 1, \dots, s$

8) $H(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{p}(t))$ вогнут по $(\mathbf{x}, \mathbf{u})$.

Тогда $(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t))$ — решение задачи.

Достаточные условия Мангасариана для задачи с чистыми и смешанными ограничениями на переменные состояния (с непрерывной $\mathbf{p}(t)$). Функция Лагранжа $\mathcal{L}$ определена (16.53), а $\mathcal{L}^*$ обозначает оценку ее значения на $(t, \mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t), \mathbf{p}(t), \mathbf{q}(t))$. $\mathbf{p}(t) = (p_1(t), \dots, p_n(t))$, $\mathbf{q}(t) = (q_1(t), \dots, q_s(t))$. Требования к ограничениям здесь не налагаются, но эти достаточные условия часто не выполняются в связи с нарушениями непрерывности $\mathbf{p}(t)$, в частности на t_1. См., например, [73], теорема 6.2 дает формулировку достаточных условий и для случаев нарушения непрерывности $\mathbf{p}(t)$ во внутренних точках интервала $[t_0, t_1]$.

ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

См. [48], [54], [3], [4], а также [82]. Подробнее читайте [73] или [19] (на немецком языке).

Глава 17
ДИСКРЕТНАЯ ДИНАМИЧЕСКАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ

ДИНАМИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

17.1
$$\max \sum_{t=0}^{T} f(t, \mathbf{x}_t, \mathbf{u}_t)$$
$$\mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{g}(t, \mathbf{x}_t, \mathbf{u}_t), \quad t = 0, \ldots, T-1$$
$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}^0, \ \mathbf{x}_t \in \mathbb{R}^n, \ \mathbf{u}_t \in U \subset \mathbb{R}^r, \quad t = 0, \ldots, T$$

Задача динамического программирования. Здесь $\mathbf{g} = (g_1, \ldots, g_n)$, а $\mathbf{x}^0$ фиксированный вектор из $\mathbb{R}^n$. U *является областью управления* .

17.2
$$J_s(\mathbf{x}) = \max_{\mathbf{u}_s, \ldots, \mathbf{u}_T \in U} \sum_{t=s}^{T} f(t, \mathbf{x}_t, \mathbf{u}_t), \text{ где}$$
$$\mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{g}(t, \mathbf{x}_t, \mathbf{u}_t), \quad t = s, \ldots, T-1, \quad \mathbf{x}_s = \mathbf{x}$$

Определение *функции наилучшего значения* $J_s(\mathbf{x})$ для задачи (17.1).

17.3
$$J_T(\mathbf{x}) = \max_{\mathbf{u} \in U} f(T, \mathbf{x}, \mathbf{u})$$
$$J_s(\mathbf{x}) = \max_{\mathbf{u} \in U} [f(s, \mathbf{x}, \mathbf{u}) + J_{s+1}(\mathbf{g}(s, \mathbf{x}, \mathbf{u}))]$$
при $s = 0, 1, \ldots, T-1$.

Фундаментальные уравнения динамического программирования. (Уравнения Беллмана.)

17.4 Формулировка задачи динамического программирования со «свободным параметром управления»:
$$\max \sum_{t=0}^{T} F(t, \mathbf{x}_t, \mathbf{x}_{t+1})$$
$$\mathbf{x}_{t+1} \in \Gamma_t(\mathbf{x}_t), \quad t = 0, \ldots, T, \quad \mathbf{x}_0 \text{ задан}$$

Множество $\Gamma_t(\mathbf{x}_t)$ задают часто с помощью векторных неравенств $\mathbf{G}(t, \mathbf{x}_t) \le \mathbf{x}_{t+1} \le \mathbf{H}(t, \mathbf{x}_t)$ для данных векторных функций $\mathbf{G}$ и $\mathbf{H}$.

17.5 $J_s(\mathbf{x}) = \max \sum_{t=s}^{T} F(t, \mathbf{x}_t, \mathbf{x}_{t+1})$, где максимум берется по всем $\mathbf{x}_{t+1}$ из $\Gamma_t(\mathbf{x}_t)$ при $t = s, \ldots, T$, $\mathbf{x}_s = \mathbf{x}$.

Функция наилучшего значения $J_s(\mathbf{x})$ в задаче (17.4).

17.6
$$J_T(\mathbf{x}) = \max_{\mathbf{y} \in \Gamma_T(\mathbf{x})} F(T, \mathbf{x}, \mathbf{y})$$
$$J_s(\mathbf{x}) = \max_{\mathbf{y} \in \Gamma_s(\mathbf{x})} [F(s, \mathbf{x}, \mathbf{y}) + J_{s+1}(\mathbf{y})]$$
при $s = 0, 1, \ldots, T$.

Фундаментальные уравнения для задачи (17.4).

17.7 Если $\{\mathbf{x}_0^*, \ldots, \mathbf{x}_{T+1}^*\}$ является оптимальным решением задачи (17.4), в котором точка $\mathbf{x}_{t+1}^*$ — внутренняя для множества $\Gamma_t(\mathbf{x}_t^*)$ при всех t, и если соответствие $\mathbf{x} \mapsto \mathfrak{Gr}_t(\mathbf{x})$ полунепрерывно сверху, то $\{\mathbf{x}_0^*, \ldots, \mathbf{x}_{T+1}^*\}$ удовлетворяет *векторному разностному уравнению Эйлера*

$$F_2'(t+1, \mathbf{x}_{t+1}, \mathbf{x}_{t+2}) + F_3'(t, \mathbf{x}_t, \mathbf{x}_{t+1}) = 0.$$

F является функцией $1+n+n$ переменных, F_2' обозначает n-вектор частных производных F по переменным с номерами $2, 3, \ldots, n+1$, а F_3' является n-вектором частных производных F по переменным с номерами $n+2, n+3, \ldots, 2n+1$.

БЕСКОНЕЧНЫЙ ИНТЕРВАЛ

17.8
$$\max \sum_{t=0}^{\infty} \alpha^t f(\mathbf{x}_t, \mathbf{u}_t)$$
$$\mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{g}(\mathbf{x}_t, \mathbf{u}_t), \quad t = 0, 1, 2, \ldots$$
$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}^0, \ \mathbf{x}_t \in \mathbb{R}^n, \ \mathbf{u}_t \in U \subset \mathbb{R}^r, \quad t = 0, 1, 2, \ldots$$

Задача на бесконечном временном интервале. $\alpha \in (0, 1)$ является постоянным дисконтирующим множителем.

17.9 Последовательность $\{(\mathbf{x}_t, \mathbf{u}_t)\}$ называется *допустимой*, если $\mathbf{u}_t \in U$, $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}^0$, а разностное уравнение из (17.8) выполняется для всех $t = 0, 1, 2, \ldots$.

Определение *допустимой* последовательности.

17.10
(B) $M \le f(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \le N$
(BB) $f(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \ge M$
(BA) $f(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \le N$

Условия ограниченности. Числа M и N заданы.

17.11 $V(\mathbf{x}, \pi, s, \infty) = \sum_{t=s}^{\infty} \alpha^t f(\mathbf{x}_t, \mathbf{u}_t)$, где $\pi = (\mathbf{u}_s, \mathbf{u}_{s+1}, \ldots)$, при $\mathbf{u}_{s+k} \in U$ для $k = 0, 1, \ldots$, и при $\mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{g}(\mathbf{x}_t, \mathbf{u}_t)$ для $t = s, s+1, \ldots$, и при $\mathbf{x}_s = \mathbf{x}$.

Общая полезность, достигнутая начиная с периода s и далее, при условии, что вектором состояния в момент $t = s$ является $\mathbf{x}$.

17.12 $J_s(\mathbf{x}) = \sup_\pi V(\mathbf{x}, \pi, s, \infty)$ где супремум берется по всем векторам $\pi = (\mathbf{u}_s, \mathbf{u}_{s+1}, \ldots)$ при $\mathbf{u}_{s+k} \in U$, при $(\mathbf{x}_t, \mathbf{u}_t)$ допустимом для $t \ge s$, и при $\mathbf{x}_s = \mathbf{x}$.

Функция наилучшего значения задачи (17.8).

17.13
$$J_s(\mathbf{x}) = \alpha^s J_0(\mathbf{x}), \quad s = 1, 2, \ldots$$
$$J_0(\mathbf{x}) = \sup_{\mathbf{u} \in U} \{f(\mathbf{x}, \mathbf{u}) + \alpha J_0(\mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}))\}$$

Свойства функции наилучшего значения в предположении выполнения хотя бы одного из условий ограниченности (17.10).

ДИСКРЕТНАЯ ТЕОРИЯ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

17.14 $H = f(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) + \mathbf{p} \cdot \mathbf{g}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}), \quad t = 0, \dots, T$

Гамильтониан $H = H(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{p})$, соответствующий (17.1), при $\mathbf{p} = (p^1, \dots, p^n)$.

17.15 Пусть $\{(\mathbf{x}_t^*, \mathbf{u}_t^*)\}$ является оптимальной последовательностью для задачи (17.1). Тогда найдутся такие векторы $\mathbf{p}_t$ в $\mathbb{R}^n$, что при $t = 0, \dots, T$:

- $H'_{\mathbf{u}}(t, \mathbf{x}_t^*, \mathbf{u}_t^*, \mathbf{p}_t) \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}_t^*) \le 0$ для всех $\mathbf{u}$ из U,
- вектор $\mathbf{p}_t = (p_t^1, \dots, p_t^n)$ является решением
  $$\mathbf{p}_{t-1} = H'_{\mathbf{x}}(t, \mathbf{x}_t^*, \mathbf{u}_t^*, \mathbf{p}_t), \quad t = 1, \dots, T$$
  при $\mathbf{p}_T = \mathbf{0}$.

Принцип максимума для (17.1). Необходимые условия оптимальности. Множество допустимых управлений U выпукло. (Гамильтониан не обязательно максимизируется вектором $\mathbf{u}_t^*$.)

17.16
a) $x_T^i = \bar{x}^i$ при $i = 1, \dots, l$
b) $x_T^i \ge \bar{x}^i$ при $i = l+1, \dots, m$
c) x_T^i свободен при $i = m+1, \dots, n$

Конечные условия для задачи (17.1).

17.17 $$H = \begin{cases} q_0 f(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) + \mathbf{p} \cdot \mathbf{g}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}), & t = 0, \dots, T-1 \\ f(T, \mathbf{x}, \mathbf{u}), & t = T \end{cases}$$

Гамильтониан $H = H(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{p})$, соответствующий задаче (17.1) с конечными условиями (17.16).

17.18 Пусть $\{(\mathbf{x}_t^*, \mathbf{u}_t^*)\}$ является оптимальной последовательностью в задаче (17.1) с конечными условиями (17.16). Тогда найдется такой вектор $\mathbf{p}_t$ в $\mathbb{R}^n$ и такое число q_0 при $(q_0, \mathbf{p}_T) \ne (0, \mathbf{0})$ и при $q_0 = 0$ или 1, что для $t = 0, \dots, T$:

1) $H'_{\mathbf{u}}(t, \mathbf{x}_t^*, \mathbf{u}_t^*, \mathbf{p}_t) \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}_t^*) \le 0$ для всех $\mathbf{u}$ из U,
2) $\mathbf{p}_t = (p_t^1, \dots, p_t^n)$ является решением
   $$p_{t-1}^i = H'_{x^i}(t, \mathbf{x}_t^*, \mathbf{u}_t^*, \mathbf{p}_t), \quad t = 1, \dots, T-1,$$
3) $$p_{T-1}^i = q_0 \frac{\partial f(T, \mathbf{x}_T^*, \mathbf{u}_T^*)}{\partial x_T^i} + p_T^i,$$
   где p_T^i удовлетворяет

a') без ограничений на p_T^i, $i = 1, \dots, l$
b') $p_T^i \ge 0$ ($= 0$, если $x_T^{*i} > \bar{x}^i$), $i = l+1, \dots, m$
c') $p_T^i = 0$, $i = m+1, \dots, n$

Принцип максимума для (17.1) с конечными условиями (17.16). Необходимые условия оптимальности. a'), b') или c') верны, когда выполняются a), b) или c) в (17.16) соответственно. U выпукло. (Кроме случаев вырожденности, можно полагать $q_0 = 1$.)

17.19	**Предположим, что для последовательности $\{(\mathbf{x}_t^*, \mathbf{u}_t^*, \mathbf{p}_t)\}$ верны все условия (17.18) для $q_0 = 1$, а также вогнутость $H(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{p}_t)$ по $(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ для любого $t \geq 0$. Тогда последовательность $\{(\mathbf{x}_t^*, \mathbf{u}_t^*, \mathbf{p}_t)\}$ является оптимальной.**	**Достаточные условия оптимальности.**

БЕСКОНЕЧНЫЙ ИНТЕРВАЛ

17.20	$\max \sum_{t=0}^{\infty} f(t, \mathbf{x}_t, \mathbf{u}_t)$ $\mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{g}(t, \mathbf{x}_t, \mathbf{u}_t), \quad t = 0, 1, 2, \ldots$ $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}^0, \ \mathbf{x}_t \in \mathbb{R}^n, \ \mathbf{u}_t \in U \subset \mathbb{R}^r, \quad t = 0, 1, 2, \ldots$	**Предполагается сходимость бесконечной суммы на любой допустимой паре.**
17.21	**Последовательность $\{(\mathbf{x}_t{}^*, \mathbf{u}_t{}^*)\}$ является *почти оптимальной*, если для любой допустимой последовательности $\{(\mathbf{x}_t, \mathbf{u}_t)\}$** $\underline{\lim}_{t\to\infty} D(t) \geq 0,$ где $D(t) = \sum_{\tau=0}^{t} (f(\tau, \mathbf{x}_\tau^*, \mathbf{u}_\tau^*) - f(\tau, \mathbf{x}_\tau, \mathbf{u}_\tau))$.	**Определение «почти оптимальности».**
17.22	**Пусть последовательность $\{(\mathbf{x}_t^*, \mathbf{u}_t^*, \mathbf{p}_t)\}$ удовлетворяет условиям 1) и 2) в (17.18) при $q_0 = 1$. Далее предположим, что Гамильтониан $H(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{p}_t)$ является вогнутой функцией по $(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ для любого t. Тогда $\{(\mathbf{x}_t^*, \mathbf{u}_t^*\})$ является почти оптимальной, если выполнено следующее предельное условие: для всех допустимых последовательностей $\{(\mathbf{x}_t, \mathbf{u}_t)\}$** $\underline{\lim}_{t\to\infty} \mathbf{p}_t \cdot (\mathbf{x}_t - \mathbf{x}_t^*) \geq 0.$	**Достаточные условия оптимальности для задачи на бесконечном временном интервале при отсутствии конечных условий.**

ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

См. [4], [82] и [79].

Глава 18

ВЕКТОРЫ В $\mathbb{R}^n$. АБСТРАКТНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

18.1 $\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix}, \ldots, \mathbf{a}_m = \begin{pmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \vdots \\ a_{nm} \end{pmatrix}$

m векторов (столбцов) в $\mathbb{R}^n$.

18.2 Если числа $x_1, x_2, \ldots, x_m$ вещественные, то

$$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_m\mathbf{a}_m$$

является *линейной комбинацией* векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$.

Определение линейной комбинации векторов.

18.3 Векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$ в $\mathbb{R}^n$

- *линейно зависимы*, если найдутся такие числа $c_1, c_2, \ldots, c_m$, не все равные нулю, что

  $$c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + \cdots + c_m\mathbf{a}_m = \mathbf{0},$$

- *линейно независимы*, если они не являются линейно зависимыми.

Определение линейной (не)зависимости векторов.

18.4 Векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$ из (18.1) линейно независимы тогда и только тогда, когда ранг матрицы $(a_{ij})_{n\times m}$ равен m.

Характеристика линейной независимости m векторов в $\mathbb{R}^n$. (Определение ранга матрицы см. в (19.23).)

18.5 Векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ в $\mathbb{R}^n$ линейно независимы тогда и только тогда, когда

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

Характеристика линейной независимости m векторов в $\mathbb{R}^n$. (Частный случай (18.4).)

18.6	Непустое подмножество V векторов из $\mathbb{R}^n$ является *подпространством* $\mathbb{R}^n$, если $c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 \in V$ для всех $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ из V и любых чисел c_1, c_2.	Определение подпространства.
18.7	Если V — подмножество $\mathbb{R}^n$, то $\mathcal{S}[V]$ является множеством всех линейных комбинаций векторов из V.	$\mathcal{S}[V]$ называется *(линейной) оболочкой* множества векторов V.
18.8	Набор векторов $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$ из подпространства V в $\mathbb{R}^n$ является *базисом* подпространства V при выполнении двух следующих условий: • $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$ линейно независимы, • $\mathcal{S}[\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m] = V$.	Определение базиса подпространства $\mathbb{R}^n$.
18.9	*Размерностью* $\dim V$ подпространства V в $\mathbb{R}^n$ является число векторов в базисе V. (Число векторов в двух разных базисах V всегда одинаково.)	Определение размерности подпространства. В частности, $\dim \mathbb{R}^n = n$.
18.10	Пусть V является m-мерным подпространством в $\mathbb{R}^n$. • Любой набор m линейно независимых векторов из V является базисом подпространства V. • Любой набор m векторов подпространства V, таких, что их линейная оболочка совпадает с V, является базисом V.	Важные сведения о подпространствах.
18.11	*Внутренним произведением* векторов $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_m)$ и $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_m)$ называется число $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + \dots + a_m b_m$	Определение внутреннего произведения, называемого также *скалярным произведением.*
18.12	$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$ $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$ $(\alpha \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot (\alpha \mathbf{b}) = \alpha(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$ $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} > 0 \iff \mathbf{a} \neq \mathbf{0}$	Свойства скалярного произведения. α является скаляром (т. е. вещественным числом).

18.13 $\|\mathbf{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2} = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}$

Определение *(евклидовой) нормы* (или *длины*) вектора.

18.14
a) $\|\mathbf{a}\| > 0$ при $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ и $\|\mathbf{0}\| = 0$
b) $\|\alpha\mathbf{a}\| = |\alpha|\,\|\mathbf{a}\|$
c) $\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\| \leq \|\mathbf{a}\| + \|\mathbf{b}\|$
d) $|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| \leq \|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\|$

Свойства нормы. $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, α — вещественное число. Здесь d) — *неравенство Коши–Шварца*. $\|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|$ является *расстоянием* между $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$.

18.15 *Угол* φ между двумя ненулевыми векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ определяется как

$$\cos\varphi = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\|}, \qquad 0 \leq \varphi \leq \pi$$

Определение угла между двумя векторами в $\mathbb{R}^n$. Векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ называются *ортогональными*, если $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$.

ВЕКТОРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

18.16 *Векторным пространством* (или *линейным пространством*) (над вещественными числами $\mathbb{R}$) является множество V, состоящее из элементов, называемых часто *векторами*, с двумя операциями — «сложение» ($V \times V \to V$) и «умножение на число» ($\mathbb{R} \times V \to V$), так что для всех x, y, z из V и произвольных вещественных чисел α и β верны следующие аксиомы:

a) $(x + y) + z = x + (y + z)$, $\quad x + y = y + x$.
b) В V имеется нулевой элемент 0 со свойством $x + 0 = x$.
c) Для любого x из V противоположный элемент $(-1)x$ из V имеет свойство $x + (-1)x = 0$.
d) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$, $\quad \alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$, $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$, $\quad 1x = x$.

Определение векторного пространства. Определения линейной комбинации (18.2), линейной зависимости и независимости множества векторов (18.3), линейного подпространства (18.6) и линейной оболочки (18.7) очевидным образом переносимы на векторное пространство.

18.17 Множество B векторов векторного пространства V является *базисом* для V, если векторы множества B линейно независимы и множество всех линейных комбинаций векторов множества B совпадает с векторным пространством V, $\mathcal{S}[B] = V$.

Определение базиса векторного пространства.

МЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

18.18 *Метрическим пространством* является множество M, снабженное такой *функцией расстояния* $d : M \times M \to \mathbb{R}$, что для всех x, y, z из M верны аксиомы:

a) $d(x,y) \geq 0$, и $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,

b) $d(x,y) = d(y,x)$,

c) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$.

Определение метрического пространства. Функция расстояния d называется также *метрикой* множества M. c) называется *неравенством треугольника*.

18.19 Последовательность $\{x_n\}$ элементов метрического пространства является

- *сходящейся* к пределу x, что записывается $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ (или $x_n \to x$ при $n \to \infty$), если $d(x_n, x) \to 0$ при $n \to \infty$;
- *последовательностью Коши*, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое целое число N, что $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ для всех $m, n \geq N$.

Важные определения. Последовательность, которая не сходится, называется *расходящейся*.

18.20 Подмножество S метрического пространства M является *плотным* в M, если любая точка M является пределом последовательности точек из S.

Определение плотного подмножества.

18.21 Метрическое пространство M является

- *полным*, если любая последовательность Коши элементов M сходится;
- *сепарабельным*, если в M найдется счетное подмножество S, плотное в M.

Определение полного и сепарабельного метрического пространства.

НОРМИРОВАННЫЕ ВЕКТОРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА. БАНАХОВЫ ПРОСТРАНСТВА

18.22 *Нормированным векторным пространством* (над $\mathbb{R}$) является векторное пространство V вместе с такой функцией $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$, что для всех x, y из V и любых вещественных чисел α

a) $\|x\| > 0$ при $x \neq 0$ и $\|0\| = 0$,

b) $\|\alpha x\| = |\alpha|\,\|x\|$,

c) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

В комплекте с функцией расстояния $d(x,y) = \|x - y\|$ векторное пространство V становится метрическим пространством. Если это метрическое пространство V является полным, то оно называется *банаховым пространством*.

- $l^p(n)$: $\mathbb{R}^n$, с нормой $\|\mathbf{x}\| = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}$ ($p \geq 1$). (При $p = 2$ это евклидова норма.)
- $l^\infty(n)$: $\mathbb{R}^n$, с нормой
$$\|\mathbf{x}\| = \max(|x_1|, \ldots, |x_n|).$$
- l^p ($p \geq 1$): множество всех таких бесконечных последовательностей вещественных чисел $\mathbf{x} = (x_0, x_1, \ldots)$, что $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p$ сходится. $\|\mathbf{x}\| = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p\right)^{1/p}$.
Для $\mathbf{x} = (x_0, x_1, \ldots)$ и $\mathbf{y} = (y_0, y_1, \ldots)$ в l^p,
18.23 по определению, $\mathbf{x}+\mathbf{y} = (x_0+y_0, x_1+y_1, \ldots)$ и $\alpha\mathbf{x} = (\alpha x_0, \alpha x_1, \ldots)$.
- l^∞: множество всех *ограниченных* бесконечных последовательностей вещественных чисел $\mathbf{x} = (x_0, x_1, \ldots)$ с нормой $\|\mathbf{x}\| = \sup_i |x_i|$. (Векторные операции определения как и в случае l^p.)
- $C(X)$: множество всех ограниченных, непрерывных функций $f : X \to \mathbb{R}$, где X — метрическое пространство с нормой $\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|$. Если f и g из $C(X)$ и $\alpha \in \mathbb{R}$, то $f + g$ и αf определяются равенствами $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ и $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$.

Несколько стандартных примеров нормированных векторных пространств, которые также являются и банаховыми.

Пусть X — компактное метрическое пространство, а F — подмножество банахова пространства $C(X)$ (см. (18.23)), которое

- *равномерно ограничено*, т. е. найдется такое число M, что $|f(x)| \leq M$ для всех f
18.24 из F и всех x из X;
- *равностепенно непрерывно*, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что если $\|x - x'\| < \delta$, то $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$ для всех f из F.

Тогда замыкание F компактно.

Теорема Асколи. (Вместе с теоремой Шаудера (18.25) этот математический результат полезен, например, для теории экономической динамики. См. [79].)

18.25 Если K является компактным, выпуклым множеством в Банаховом пространстве X, то любая непрерывная функция f, отображающая K в себя, имеет неподвижную точку, т. е. существует такая точка x^* множества K, что $f(x^*) = x^*$.

Теорема Шаудера о неподвижной точке.

18.26 Пусть $T : X \to X$ является отображением полного метрического пространства X в себя и пусть найдется такое число k из $[0, 1)$, что

(*) $d(Tx, Ty) \le kd(x, y)$. для всех x, y из X

Тогда:

a) T имеет неподвижную точку x^*, т. е. $T(x^*) = x^*$.

b) $d(T^n x^0, x^*) \le k^n d(x^0, x^*)$ для всех x^0 из X и любого $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Существование неподвижной точки у сжимающего отображения. k называется *модулем* сжимающего отображения. (См. также (6.23.) Отображение, удовлетворяющее условию (*) при некотором k из $[0, 1)$, называется *сжимающим отображением.*

18.27 Пусть $C(X)$ — банахово пространство, определенное в (18.23), а T — сжимающее отображение $C(X)$ в себя, удовлетворяющее следующим условиям.

a) Монотонность. Если $f, g \in C(X)$ и $f(x) \le \le g(x)$ для всех x из X, то $(Tf)(x) \le \le (Tg)(x)$ для всех $x \in X$.

b) Дисконтирование. Найдется некоторое число α из $(0, 1)$, такое, что для всех f из $C(X)$, всех $a \ge 0$ и любого x из X,

$[T(f + a)](x) \le (Tf)(x) + \alpha a$.

Тогда T является сжимающим отображением с модулем α.

Достаточные условия Блэквелла для сжимающего отображения. Здесь $(f + a)(x)$ определена как $f(x) + a$.

ПРОСТРАНСТВА С ПРОИЗВЕДЕНИЕМ. ГИЛЬБЕРТОВЫ ПРОСТРАНСТВА

18.28 *Пространством с внутренним (скалярным) произведением* (над $\mathbb{R}$) является векторное пространство V вместе с функцией, ставящей в соответствие каждой упорядоченной паре векторов (x, y) из V такое вещественное число $\langle x, y \rangle$, что для всех x, y, z из V и любых вещественных чисел α

a) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$,

b) $\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$,

c) $\alpha \langle x, y \rangle = \langle \alpha x, y \rangle + \langle x, \alpha y \rangle$,

d) $\langle x, x \rangle \ge 0$ и $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Определение пространства со скалярным произведением. Если определить $\|x\| = = \sqrt{\langle x, x \rangle}$, то V становится нормированным векторным пространством. Если это пространство V полное, то оно называется *гильбертовым пространством.*

18.29

- $l^2(n)$ с произведением $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i$
- l^2 с произведением $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i y_i$

Примеры гильбертовых пространств.

18.30 a) $|\langle x,y\rangle| \le \sqrt{\langle x,x\rangle}\sqrt{\langle y,y\rangle}$ для любых x, y из V

b) $\langle x,y\rangle = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2)$

a) — неравенство Коши–Шварца. (Превращается в равенство тогда и только тогда, когда x и y линейно зависимы.) Равенство b) показывает, что внутреннее (скалярное) произведение можно выразить через норму этого векторного пространства.

18.31
- Два вектора x и y в пространстве V, имеющем внутреннее произведение, *ортогональны*, если $\langle x,y\rangle = 0$.
- Множество S векторов в V называется *ортогональным*, если $\langle x,y\rangle = 0$ для всех $x \neq y$ из S.
- Множество S векторов в V называется *ортонормальным*, если оно является ортогональным, и $\|x\| = 1$ для всех x из S.
- Ортонормальное множество S в V называется *полным*, если не существует такого x в V, который ортогонален всем векторам из S.

Важные определения.

18.32 Пусть U является ортонормальным множеством векторов в пространстве V со внутренним произведением.

a) Если $u_1, \ldots, u_n$ — произвольный набор конечного числа различных между собой элементов множества U, то

$$(*) \quad \sum_{i=1}^{n} |(x,u_i)|^2 \le \|x\|^2 \quad \text{для всех } x \text{ из } V.$$

b) Если V — полное (гильбертово) пространство и U — полное ортонормальное подмножество V, то

$$(**) \quad \sum_{u\in U} |(x,u)|^2 = \|x\|^2 \quad \text{для всех } x \text{ из } V.$$

(*) — *неравенство Бесселя*, (**) — *формула Парсеваля*.

ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

Все сведения о векторах в $\mathbb{R}^n$ стандартны и имеются в любом учебнике линейной алгебры, например [21] или [52], [83]. Об абстрактных пространствах читайте [50] или [69]. О сжимающих отображениях и их приложении к теории экономической динамики см. [79].

Глава 19

МАТРИЦЫ

19.1 $$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{m\times n}$$

Форма записи для *матрицы*, где a_{ij} является элементом, расположенным на пересечении i-й строки и j-го столбца. *Порядок* (размер) этой матрицы обозначается записью $m \times n$. Если $m = n$, то матрица является *квадратной* порядка n.

19.2 $$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Верхняя треугольная матрица. (Все элементы под ее главной диагональю равны 0. При транспонировании этой матрицы **A** (см. (19.11)) получается *нижняя треугольная матрица*.

19.3 $$\mathrm{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n) = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$$

Диагональная матрица.

19.4 $$\begin{pmatrix} a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a \end{pmatrix}_{n\times n}$$

Скалярная матрица.

19.5 $$\mathbf{I}_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}_{n\times n}$$

Единичная матрица.

19.6 Если $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m\times n}$, $\mathbf{B} = (b_{ij})_{m\times n}$ и α является скаляром, определим

$$\mathbf{A}+\mathbf{B} = (a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}$$
$$\alpha\mathbf{A} = (\alpha a_{ij})_{m\times n}$$
$$\mathbf{A}-\mathbf{B} = \mathbf{A}+(-1)\mathbf{B} = (a_{ij}-b_{ij})_{m\times n}$$

Действия с матрицами. (Скаляры могут быть числами вещественными или комплексными.)

19.7
$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C} = \mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C})$$
$$\mathbf{A}+\mathbf{B} = \mathbf{B}+\mathbf{A}$$
$$\mathbf{A}+\mathbf{0} = \mathbf{A}$$
$$\mathbf{A}+(-\mathbf{A}) = \mathbf{0}$$
$$(a+b)\mathbf{A} = a\mathbf{A}+b\mathbf{A}$$
$$a(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = a\mathbf{A}+a\mathbf{B}$$

Свойства действий с матрицами. $\mathbf{0}$ — нулевая матрица, значения всех элементов которой равны нулю. a и b — скаляры.

19.8 Если $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m\times n}$ и $\mathbf{B} = (b_{ij})_{n\times p}$, определим *произведение* $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$ как матрицу порядка $m\times p$ $\mathbf{C} = (c_{ij})_{m\times p}$, где

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j}+\cdots+a_{ik}b_{kj}+\cdots+a_{in}b_{nj}$$

Определение операции *умножения матриц*.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \boxed{a_{i1} & \ldots & a_{ij} & \ldots & a_{in}} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mj} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & \ldots & \boxed{b_{1k}} & \ldots & b_{1p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{j1} & \ldots & b_{jk} & \ldots & b_{jp} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \ldots & b_{nk} & \ldots & b_{np} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & \ldots & c_{1k} & \ldots & c_{1p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & \ldots & \boxed{c_{ik}} & \ldots & c_{ip} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & \ldots & c_{mk} & \ldots & c_{mp} \end{pmatrix}$$

19.9
$$(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$$
$$\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{AB}+\mathbf{AC}$$
$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC}+\mathbf{BC}$$

Свойства операции умножения матриц.

19.10
$$\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$$
$$\mathbf{AB} = \mathbf{0} \not\Rightarrow \mathbf{A} = \mathbf{0} \text{ or } \mathbf{B} = \mathbf{0}$$
$$\mathbf{AB} = \mathbf{AC} \ \& \ \mathbf{A} \neq \mathbf{0} \not\Rightarrow \mathbf{B} = \mathbf{C}$$

Важные замечания относительно умножения матриц. $\mathbf{0}$ представляет собой нулевую матрицу. Знак $\not\Rightarrow$ следует читать как «не обязательно влечет за собой».

19.11
$$\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Матрица $\mathbf{A}'$, являющаяся *транспонированной* к матрице $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m\times n}$, есть матрица порядка $n\times m$, строки которой являются столбцам $\mathbf{A}$, и наоборот.

19.12
$$\begin{aligned}(\mathbf{A}')' &= \mathbf{A}\\ (\mathbf{A}+\mathbf{B})' &= \mathbf{A}'+\mathbf{B}'\\ (\alpha\mathbf{A})' &= \alpha\mathbf{A}'\\ (\mathbf{AB})' &= \mathbf{B}'\mathbf{A}' \quad \text{(ЗАПОМНИТЕ порядок!)}\end{aligned}$$

Правила действий с транспонированными матрицами.

19.13 $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1} \iff \mathbf{AB} = \mathbf{I}_n \iff \mathbf{BA} = \mathbf{I}_n$

Обратная матрица для квадратной $\mathbf{A}$ порядка n. Матрица $\mathbf{I}_n$ является единичной.

19.14 $\mathbf{A}^{-1}$ существует $\iff |\mathbf{A}| \neq 0$

Необходимое и достаточное условие того, что матрица имеет обратную, т. е. является *обратимой*. Запись $|\mathbf{A}|$ используется для обозначения определителя квадратной матрицы $\mathbf{A}$. (Определение определителя см. в главе 20.)

19.15 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Longrightarrow \mathbf{A}^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

Верно при $|\mathbf{A}| = ad - bc \neq 0$.

19.16

Если $\mathbf{A} = (a_{ij})_{n\times n}$ — квадратная матрица и $|\mathbf{A}| \neq 0$, то элементы единственной обратной к $\mathbf{A}$ матрицы задаются формулой

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|}\,\mathrm{adj}(\mathbf{A}), \quad \text{где адъюнкта}$$

$$\mathrm{adj}(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Здесь *алгебраическое дополнение* A_{ij} элемента a_{ij} есть

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{i1} & \ldots & \boxed{a_{ij}} & \ldots & a_{in} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nj} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Общая формула обращения квадратной матрицы. ОБРАТИТЕ ВНИМАНИЕ на порядок индексов элементов матрицы $\mathrm{adj}(\mathbf{A})$. Матрица $(A_{ij})_{n\times n}$ называется *матрицей алгебраических дополнений (кофакторов)* элементов исходной матрицы $\mathbf{A}$. Таким образом, адъюнкта $\mathrm{adj}(\mathbf{A}) = (A_{ij})'_{n\times n}$ является транспонированной матрицей алгебраических дополнений. Определитель, фигурирующий в формуле для A_{ij}, вычисляется для подматрицы, образующейся из исходной матрицы $\mathbf{A}$ при удалении из нее i-й строки и j-го столбца.

19.17
$$(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$$
$$(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1} \quad \text{(ЗАПОМНИТЕ порядок!)}$$
$$(\mathbf{A}')^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})'$$
$$(c\mathbf{A})^{-1} = c^{-1}\mathbf{A}^{-1}$$

Свойства обратных матриц. ($\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ — обратимые квадратные матрицы $n \times n$. c — скаляр, $\neq 0$.)

19.18
$$(\mathbf{I}_m + \mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{I}_m - \mathbf{A}(\mathbf{I}_n + \mathbf{BA})^{-1}\mathbf{B}$$

$\mathbf{A}$ $m \times n$, $\mathbf{B}$ $n \times m$, $|\mathbf{I}_m + \mathbf{AB}| \neq 0$.

19.19
$$\mathbf{R}^{-1}\mathbf{A}'(\mathbf{A}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{A}' + \mathbf{Q}^{-1})^{-1} = (\mathbf{A}'\mathbf{QA} + \mathbf{R})^{-1}\mathbf{A}'\mathbf{Q}$$

Правило парной компоновки матриц при сложном обращении. Формула верна при существовании всех используемых здесь обратных матриц.

19.20 Квадратная матрица $\mathbf{A}$ порядка n называется

- *симметричной*, если $\mathbf{A} = \mathbf{A}'$,
- *кососимметричной*, если $\mathbf{A} = -\mathbf{A}'$,
- *идемпотентной*, если $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$,
- *инволютивной*, если $\mathbf{A}^2 = \mathbf{I}_n$,
- *ортогональной*, если $\mathbf{A}'\mathbf{A} = \mathbf{I}_n$,
- *вырожденной*, если $|\mathbf{A}| = 0$, *невырожденной*, если $|\mathbf{A}| \neq 0$.

Несколько важных определений. Запись $|\mathbf{A}|$ используется для обозначения определителя квадратной матрицы $\mathbf{A}$. (См. главу 20.) Свойства идемпотентных и ортогональных матриц обсуждаются далее, в главе 22.

19.21
$$\operatorname{tr}(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

След матрицы $\mathbf{A} = (a_{ij})_{n\times n}$ есть сумма ее диагональных элементов.

19.22
$$\operatorname{tr}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \operatorname{tr}(\mathbf{A}) + \operatorname{tr}(\mathbf{B})$$
$$\operatorname{tr}(c\mathbf{A}) = c\operatorname{tr}(\mathbf{A}) \quad (c \text{ — скаляр})$$
$$\operatorname{tr}(\mathbf{AB}) = \operatorname{tr}(\mathbf{BA})$$
(если матрица $\mathbf{AB}$ квадратная)
$$\operatorname{tr}(\mathbf{A}') = \operatorname{tr}(\mathbf{A})$$

Свойства следа матрицы.

19.23 $r(\mathbf{A})$ = максимальное число линейно независимых строк матрицы $\mathbf{A}$ = максимальное число линейно независимых столбцов матрицы $\mathbf{A}$ = порядок наибольшего минора матрицы $\mathbf{A}$, не равного нулю.

Эквивалентные друг другу определения *ранга* матрицы. О минорах см. (20.15).

19.24

1) $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}') = r(\mathbf{A}'\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}\mathbf{A}')$
2) $r(\mathbf{AB}) \le \min(r(\mathbf{A}), r(\mathbf{B}))$
3) $r(\mathbf{AB}) = r(\mathbf{B})$ если $|\mathbf{A}| \ne 0$
4) $r(\mathbf{CA}) = r(\mathbf{C})$ если $|\mathbf{A}| \ne 0$
5) $r(\mathbf{PAQ}) = r(\mathbf{A})$ если $|\mathbf{P}| \ne 0$, $|\mathbf{Q}| \ne 0$
6) $|r(\mathbf{A}) - r(\mathbf{B})| \le r(\mathbf{A}+\mathbf{B}) \le r(\mathbf{A}) + r(\mathbf{B})$
7) $r(\mathbf{AB}) \ge r(\mathbf{A}) + r(\mathbf{B}) - n$
8) $r(\mathbf{AB}) + r(\mathbf{BC}) \le r(\mathbf{B}) + r(\mathbf{ABC})$

Свойства ранга. Порядок матриц соответствует определениям использованных операций. В свойстве 7), называемом *неравенством Сильвестра*, $\mathbf{A}$ $m \times n$ и $\mathbf{B}$ $n \times p$. Свойство 8) называется *неравенством Фробениуса*.

19.25 $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ для некоторого $\mathbf{x} \ne \mathbf{0} \iff r(\mathbf{A}) \le n-1$

Результат полезен для решения систем однородных линейных уравнений. $\mathbf{A}$ $m \times n$, $\mathbf{x}$ $n \times 1$.

19.26

Матричной нормой является функция $\|\cdot\|_\beta$, которая ставит в соответствие любой квадратной матрице $\mathbf{A}$ такое вещественное число $\|\mathbf{A}\|_\beta$, что:

- $\|\mathbf{A}\|_\beta > 0$ при $\mathbf{A} \ne \mathbf{0}$ и $\|\mathbf{0}\|_\beta = 0$
- $\|c\mathbf{A}\|_\beta = |c|\,\|\mathbf{A}\|_\beta$ (c — скаляр)
- $\|\mathbf{A}+\mathbf{B}\|_\beta \le \|\mathbf{A}\|_\beta + \|\mathbf{B}\|_\beta$
- $\|\mathbf{AB}\|_\beta \le \|\mathbf{A}\|_\beta\,\|\mathbf{B}\|_\beta$

Определение *нормы матрицы*. (Таких норм бесконечно много, некоторые примеры есть в (19.27).)

19.27

- $\|\mathbf{A}\|_1 = \max\limits_{j=1,\dots,n} \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ij}|$
- $\|\mathbf{A}\|_\infty = \max\limits_{i=1,\dots,n} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|$
- $\|\mathbf{A}\|_2 = \sqrt{\lambda}$, где λ является наибольшим собственным числом матрицы $\mathbf{A}'\mathbf{A}$.
- $\|\mathbf{A}\|_M = n \max\limits_{i,j=1,\dots,n} |a_{ij}|$
- $\|\mathbf{A}\|_T = \left(\sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ij}|^2\right)^{1/2}$

Некоторые нормы для матрицы $\mathbf{A} = (a_{ij})_{n\times n}$. (О собственных числах см. главу 21.)

19.28

Число λ собственное для $\mathbf{A} = (a_{ij})_{n\times n}$

$$\Longrightarrow \quad |\lambda| \le \|\mathbf{A}\|_\beta$$

Любое собственное число матрицы $\mathbf{A}$ не превосходит по модулю значение любой нормы этой матрицы.

19.29 $\|\mathbf{A}\|_\beta < 1 \;\Rightarrow\; \mathbf{A}^t \to 0$ при $t \to \infty$

Достаточное условие сходимости $\mathbf{A}^t \to 0$ при $t \to \infty$. $\|\mathbf{A}\|_\beta$ — произвольная норма матрицы A.

19.30 $$e^{\mathbf{A}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\mathbf{A}^n$$

***Экспоненциальная матрица* для исходной квадратной A.**

19.31 $$e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}} = e^{\mathbf{A}}e^{\mathbf{B}}, \quad \text{если} \quad \mathbf{AB} = \mathbf{BA}$$
$$(e^{\mathbf{A}})^{-1} = e^{-\mathbf{A}}, \quad \frac{d}{dx}(e^{x\mathbf{A}}) = \mathbf{A}e^{x\mathbf{A}}$$

Свойства экспоненциальной матрицы.

ЛИНЕЙНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

19.32 Функция $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ называется *линейным* преобразованием (или линейной функцией), если

1) $T(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = T(\mathbf{x}) + T(\mathbf{y})$,
2) $T(c\mathbf{x}) = cT(\mathbf{x})$

для всех **x** и **y** из $\mathbb{R}^n$ и для любого скаляра c.

Определение линейного преобразования.

19.33 Если **A** — матрица порядка $m \times n$, то функция $T_{\mathbf{A}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, определенная равенством $T_{\mathbf{A}}(\mathbf{x}) = \mathbf{Ax}$, является линейным преобразованием.

Важный математический факт.

19.34 Пусть $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ является линейным преобразованием, а **A** — матрица порядка $m \times n$, j-й столбец которой есть $T(\mathbf{e}_j)$, где $\mathbf{e}_j$ — стандартный j-й единичный вектор в $\mathbb{R}^n$. Тогда $T(\mathbf{x}) = \mathbf{Ax}$ для всех **x** в $\mathbb{R}^n$.

Матрица A называется *стандартным матричным представлением преобразования T*.

19.35 Пусть $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ и $S : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ — два линейных преобразования со стандартными матричными представлениями **A** и **B** соответственно. Тогда композиция $S \circ T$ этих двух преобразований является линейным преобразованием со стандартным матричным представлением **BA**.

Фундаментальный факт.

19.36 Пусть $\mathbf{A}$ является обратимой матрицей порядка $n \times n$, представляющей линейное преобразование T. Преобразование T^{-1}, стандартным матричным представлением которого является обратная к исходной матрица $\mathbf{A}^{-1}$, есть обратное преобразование к T.

Фундаментальный факт.

ОБОБЩЕННЫЕ ОБРАТНЫЕ МАТРИЦЫ

19.37 $n \times m$ матрица $\mathbf{A}^-$ называется *обобщенной обратной* матрицей к исходной $m \times n$ матице $\mathbf{A}$, если

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^-\mathbf{A} = \mathbf{A}.$$

Определение обобщенной обратной матрицы. (Вообще говоря, матрица $\mathbf{A}^-$ не единственна.)

19.38 Необходимым и достаточным условием разрешимости матричного уравнения $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ является $\mathbf{A}\mathbf{A}^-\mathbf{b} = \mathbf{b}$. Тогда общее решение имеет вид $\mathbf{x} = \mathbf{A}^-\mathbf{b} + (\mathbf{I} - \mathbf{A}^-\mathbf{A})\mathbf{q}$, где $\mathbf{q}$ — произвольный вектор подходящей размерности.

Важное приложение понятия обобщенной обратной матрицы.

19.39 Если $\mathbf{A}^-$ — обобщенная обратная матрица к $\mathbf{A}$, то

- $\mathbf{A}\mathbf{A}^-$ и $\mathbf{A}^-\mathbf{A}$ идемпотентны,
- $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}^-\mathbf{A}) = \mathrm{tr}(\mathbf{A}^-\mathbf{A})$,
- $(\mathbf{A}^-)'$ - обобщенная обратная к $\mathbf{A}'$,
- $\mathbf{A}$ квадратная и невырожденная $\Rightarrow \mathbf{A}^- - = \mathbf{A}^{-1}$.

Свойства обобщенных обратных матриц.

19.40 $n \times m$ матрица $\mathbf{A}^+$ называется *обратной матрицей Мура–Пенроза* к исходной вещественной $m \times n$ матрице $\mathbf{A}$, если она удовлетворяет четырем следующим условиям:

I) $\mathbf{A}\mathbf{A}^+\mathbf{A} = \mathbf{A}$ II) $\mathbf{A}^+\mathbf{A}\mathbf{A}^+ = \mathbf{A}^+$

III) $(\mathbf{A}\mathbf{A}^+)' = \mathbf{A}\mathbf{A}^+$ IV) $(\mathbf{A}^+\mathbf{A})' = \mathbf{A}^+\mathbf{A}$

Определение обратной матрицы Мура–Пенроза. ($\mathbf{A}^+$ существует и единственна.)

19.41 Необходимым и достаточным условием разрешимости матричного уравнения $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ является $\mathbf{A}\mathbf{A}^+\mathbf{b} = \mathbf{b}$. Тогда общее решение имеет вид $\mathbf{x} = \mathbf{A}^+\mathbf{b} + (\mathbf{I} - \mathbf{A}^+\mathbf{A})\mathbf{q}$, где $\mathbf{q}$ — произвольный вектор подходящей размерности.

Важное приложение понятия обратной матрицы Мура–Пенроза.

19.42
- A квадратная и невырожденная $\Rightarrow$ $\mathbf{A}^{+}$ $+ = \mathbf{A}^{-1}$.
- $(\mathbf{A}^{+})^{+} = \mathbf{A}$, $(\mathbf{A}')^{+} = (\mathbf{A}^{+})'$.
- $\mathbf{A}^{+} = \mathbf{A}$ если $\mathbf{A}$ симментрична и идемпотентна.
- $\mathbf{A}^{+}\mathbf{A}$ и $\mathbf{A}\mathbf{A}^{+}$ идемпотентны.
- Ранг матриц $\mathbf{A}$, $\mathbf{A}^{+}$, $\mathbf{A}\mathbf{A}^{+}$ и $\mathbf{A}^{+}\mathbf{A}$ один и тот же.
- $\mathbf{A}'\mathbf{A}\mathbf{A}^{+} = \mathbf{A}' = \mathbf{A}^{+}\mathbf{A}\mathbf{A}'$.
- $(\mathbf{A}\mathbf{A}^{+})^{+} = \mathbf{A}\mathbf{A}^{+}$.
- $(\mathbf{A}'\mathbf{A})^{+} = \mathbf{A}^{+}(\mathbf{A}^{+})'$, $(\mathbf{A}\mathbf{A}')^{+} = (\mathbf{A}^{+})'\mathbf{A}^{+}$.
- $(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})^{+} = \mathbf{A}^{+} \otimes \mathbf{B}^{+}$.

Свойства обратной матрицы Мура–Пенроза. (Знак $\otimes$ обозначает кронекерово произведение. См. главу 23.)

БЛОЧНЫЕ МАТРИЦЫ

19.43 $$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{11} & \mathbf{P}_{12} \\ \mathbf{P}_{21} & \mathbf{P}_{22} \end{pmatrix}$$

Блочная матрица порядка $(p+q) \times (r+s)$. ($\mathbf{P}_{11}$ $p \times r$, $\mathbf{P}_{12}$ $p \times s$, $\mathbf{P}_{21}$ $q \times r$, $\mathbf{P}_{22}$ $q \times s$.)

19.44 $$\begin{pmatrix} \mathbf{P}_{11} & \mathbf{P}_{12} \\ \mathbf{P}_{21} & \mathbf{P}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_{11} & \mathbf{Q}_{12} \\ \mathbf{Q}_{21} & \mathbf{Q}_{22} \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{11}\mathbf{Q}_{11} + \mathbf{P}_{12}\mathbf{Q}_{21} & \mathbf{P}_{11}\mathbf{Q}_{12} + \mathbf{P}_{12}\mathbf{Q}_{22} \\ \mathbf{P}_{21}\mathbf{Q}_{11} + \mathbf{P}_{22}\mathbf{Q}_{21} & \mathbf{P}_{21}\mathbf{Q}_{12} + \mathbf{P}_{22}\mathbf{Q}_{22} \end{pmatrix}$$

Умножение блочных матриц. (Преполагается, что порядок подматриц сомножителей соответствует определению матричного произведения.)

19.45 $$\begin{vmatrix} \mathbf{P}_{11} & \mathbf{P}_{12} \\ \mathbf{P}_{21} & \mathbf{P}_{22} \end{vmatrix} = |\mathbf{P}_{11}| \cdot |\mathbf{P}_{22} - \mathbf{P}_{21}\mathbf{P}_{11}^{-1}\mathbf{P}_{12}|$$

Определитель блочной матрица порядка $n \times n$, если существует обратная $\mathbf{P}_{11}^{-1}$.

19.46 $$\begin{vmatrix} \mathbf{P}_{11} & \mathbf{P}_{12} \\ \mathbf{P}_{21} & \mathbf{P}_{22} \end{vmatrix} = |\mathbf{P}_{22}| \cdot |\mathbf{P}_{11} - \mathbf{P}_{12}\mathbf{P}_{22}^{-1}\mathbf{P}_{21}|$$

Определитель блочной матрицы порядка $n \times n$, если обратная $\mathbf{P}_{22}^{-1}$ существует.

19.47 $$\begin{vmatrix} \mathbf{P}_{11} & \mathbf{P}_{12} \\ 0 & \mathbf{P}_{22} \end{vmatrix} = |\mathbf{P}_{11}| \cdot |\mathbf{P}_{22}|$$

Частный случай.

19.48
$$\begin{pmatrix} \mathbf{P}_{11} & \mathbf{P}_{12} \\ \mathbf{P}_{21} & \mathbf{P}_{22} \end{pmatrix}^{-1} =$$
$$= \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{11}^{-1} + \mathbf{P}_{11}^{-1}\mathbf{P}_{12}\Delta^{-1}\mathbf{P}_{21}\mathbf{P}_{11}^{-1} & -\mathbf{P}_{11}^{-1}\mathbf{P}_{12}\Delta^{-1} \\ -\Delta^{-1}\mathbf{P}_{21}\mathbf{P}_{11}^{-1} & \Delta^{-1} \end{pmatrix},$$
где $\Delta = \mathbf{P}_{22} - \mathbf{P}_{21}\mathbf{P}_{11}^{-1}\mathbf{P}_{12}$.

Матрица, обратная к блочной, если $\mathbf{P}_{11}^{-1}$ существует.

19.49
$$\begin{pmatrix} \mathbf{P}_{11} & \mathbf{P}_{12} \\ \mathbf{P}_{21} & \mathbf{P}_{22} \end{pmatrix}^{-1} =$$
$$= \begin{pmatrix} \Delta_1^{-1} & -\Delta_1^{-1}\mathbf{P}_{12}\mathbf{P}_{22}^{-1} \\ -\mathbf{P}_{22}^{-1}\mathbf{P}_{21}\Delta_1^{-1} & \mathbf{P}_{22}^{-1} + \mathbf{P}_{22}^{-1}\mathbf{P}_{21}\Delta_1^{-1}\mathbf{P}_{12}\mathbf{P}_{22}^{-1} \end{pmatrix},$$
где $\Delta_1 = \mathbf{P}_{11} - \mathbf{P}_{12}\mathbf{P}_{22}^{-1}\mathbf{P}_{21}$.

Матрица, обратная к блочной, если $\mathbf{P}_{22}^{-1}$ существует.

МАТРИЦЫ С КОМПЛЕКСНЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ

19.50 Пусть $\mathbf{A} = (a_{ij})$ — комплексная матрица (т. е. значения элементов матрицы $\mathbf{A}$ являются комплексными числами). Тогда:

- $\bar{\mathbf{A}} = (\bar{a}_{ij})$ называется *сопряженной* к матрице $\mathbf{A}$. ($\bar{a}_{ij}$ обозначает сопряженное комплексное число к элементу исходной матрицы a_{ij}.)
- $\mathbf{A}^* = \bar{\mathbf{A}}' = (\bar{a}_{ji})$ называется *эрмитово сопряженной* матрицей к исходной $\mathbf{A}$.
- $\mathbf{A}$ называется *эрмитовой* (самосопряженной), если $\mathbf{A} = \mathbf{A}^*$.
- $\mathbf{A}$ называется *унитарной*, если $\mathbf{A}^* = \mathbf{A}^{-1}$.

Определения, полезные для работы с комплексными матрицами.

19.51
- $\mathbf{A}$ вещественна $\iff \mathbf{A} = \bar{\mathbf{A}}$.
- Если $\mathbf{A}$ вещественна, то

  $\mathbf{A}$ эрмитова $\iff$ $\mathbf{A}$ симметрична.

Простые следствия из определений.

19.52 Пусть $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ — комплексные матрицы, а c — комплексное число. Тогда

1) $(\mathbf{A}^*)^* = \mathbf{A}$
2) $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^* = \mathbf{A}^* + \mathbf{B}^*$
3) $(c\mathbf{A})^* = \bar{c}\mathbf{A}^*$
4) $(\mathbf{A}\mathbf{B})^* = \mathbf{B}^*\mathbf{A}^*$

Свойства эрмитово сопряженной матрицы. Свойства 2) и 4) верны, если можно определить сумму и произведение данных матриц.

ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

Большинство формул стандартны и имеются почти в любом учебнике линейной алгебры, например в [21] или [52]. Про (19.26)–(19.29) подробнее см. [18]. Об обобщенных обратных матрицах читайте [57]. Стандартным источником служит [27].

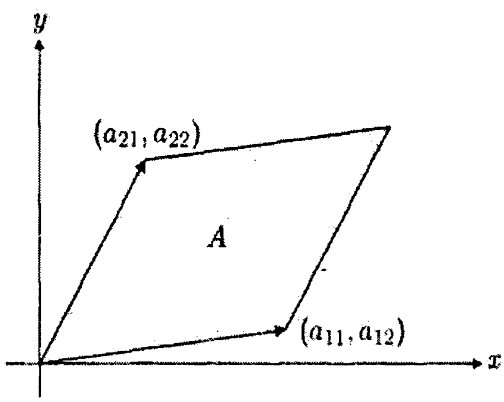
Глава 20

ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

20.1 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$

Определение определителя (матрицы) порядка 2×2.

20.2



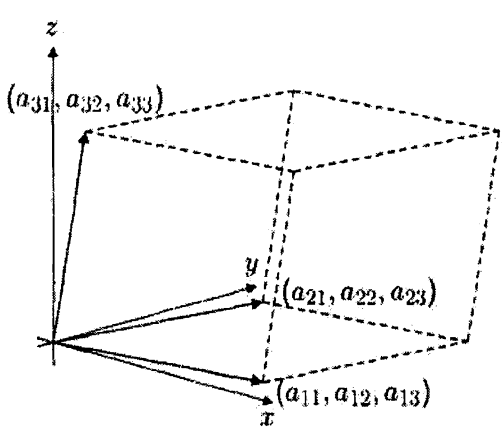
Геометрическая интерпретация определителя порядка 2×2. Площадь фигуры A совпадает с абсолютным значением определителя

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

20.3 $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \left\{ \begin{array}{r} a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \\ + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} \\ + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} \end{array} \right.$$

Определение определителя (матрицы) порядка 3×3.

20.4



Геометрическая интерпретация определителя порядка 3×3. Объем «ящика», направление ребер которого задано этими тремя векторами, совпадает с абсолютным значением определителя

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Для квадратной матрицы $\mathbf{A} = (a_{ij})_{n\times n}$ ***определителем*** является число

$$|\mathbf{A}| = a_{i1}A_{i1} + \cdots + a_{in}A_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij},$$

где A_{ij} — алгебраическое дополнение элемента a_{ij}, т. е.

20.5

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ \cancel{a_{i1}} & \ldots & \boxed{a_{ij}} & \ldots & \cancel{a_{in}} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nj} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Общее определение определителя порядка n, данное в терминах его *разложения в сумму* произведений алгебраических дополнений на соответствующие элементы i-й строки. Значение определителя не зависит от выбора i.

20.6

$$a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} = |\mathbf{A}|$$
$$a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + \cdots + a_{in}A_{kn} = 0, \quad \text{если } k \neq i$$

$$a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} = |\mathbf{A}|$$
$$a_{1j}A_{1k} + a_{2j}A_{2k} + \cdots + a_{nj}A_{nk} = 0, \quad \text{если } k \neq j$$

Разложение определителя матрицы по строке или по столбцу в сумму произведений элементов на их алгебраические дополнения. Сумма произведений элементов строки или столбца матрицы на алгебраические дополнения элементов другой строки или другого столбца той же матрицы равна 0.

20.7

- Если все элементы строки (или столбца) матрицы **A** равны 0, то и $|\mathbf{A}| = 0$.
- При перестановке двух строк (или двух столбцов) матрицы **A** определитель матрицы меняет знак, а его абсолютное значение сохраняется.
- Если все элементы одной и той же строки (или столбца) матрицы **A** умножить на число c, то и значение определителя увеличится в c раз.
- Если две строки (или столбца) матрицы **A** пропорциональны, то $|\mathbf{A}| = 0$.
- Величина определителя $|\mathbf{A}|$ не изменяется при замене значений элементов одной строки (столбца) на их сумму с элементами другой строки (или столбца), прибавляемая строка (столбец) матрицы на прежнем месте сохраняется.
- $|\mathbf{A}'| = |\mathbf{A}|$, $\mathbf{A}'$ — транспонированная к **A**.

Важные свойства определителей. Матрица **A** квадратная.

20.8	$\lvert\mathbf{AB}\rvert = \lvert\mathbf{A}\rvert \cdot \lvert\mathbf{B}\rvert$ $\lvert\mathbf{A}+\mathbf{B}\rvert \neq \lvert\mathbf{A}\rvert + \lvert\mathbf{B}\rvert$ (в общем случае)	**Свойства определителей. Матрицы A и B квадратные порядка n.**
20.9	$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{vmatrix} = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)$	***Определитель Вандермонда*** **порядка $n = 3$.**
20.10	$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & & x_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \le j < i \le n} (x_i - x_j)$	**Общая формула определителя Вандермонда.**
20.11	$\begin{vmatrix} a_1 & 1 & & 1 \\ 1 & a_2 & & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & & a_n \end{vmatrix} = (a_1 - 1)(a_2 - 1)\cdots(a_n - 1)\left[1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i - 1}\right]$	**Определитель специальной матрицы. $a_i \neq 1$ при $i = 1, \dots, n$.**
20.12	$\begin{vmatrix} 0 & p_1 & \dots & p_n \\ q_1 & a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_n & a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} p_i A_{ji} q_j$	**Полезный определитель ($n > 2$). A_{ji} есть в (20.5).**
20.13	$\begin{vmatrix} \alpha & p_1 & & p_n \\ q_1 & a_{11} & & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ q_n & a_{n1} & & a_{nn} \end{vmatrix} = (\alpha - \mathbf{P}'\mathbf{A}^{-1}\mathbf{Q})\,\lvert\mathbf{A}\rvert$	**Обобщение (20.12) на случай существования $\mathbf{A}^{-1}$, $\mathbf{P}' = (p_1, \dots, p_n)$, $\mathbf{Q}' = (q_1, \dots, q_n)$.**
20.14	$\lvert\mathbf{AB} + \mathbf{I}_m\rvert = \lvert\mathbf{BA} + \mathbf{I}_n\rvert$	**Полезный результат. A $m \times n$, B $n \times m$.**

- *Минором* порядка k матрицы $\mathbf{A}$ является определитель подматрицы $k \times k$, получаемой удалением из исходной матрицы лишних строк и столбцов, в результате которого остается ровно k строк и k столбцов исходной матрицы $\mathbf{A}$.

20.15
- *Главным минором* порядка k матрицы $\mathbf{A}$ является минор, в котором оставлены k строк и столбцов с *одинаковыми* исходными номерами.
- *Угловым главным минором* порядка k матрицы $\mathbf{A}$ является главный минор, состоящий из k первых строк и k первых столбцов исходной матрицы.

Определение миноров, главных миноров и главных угловых миноров матрицы.

20.16
$$D_k = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Угловые главные миноры матрицы $\mathbf{A} = (a_{ij})_{n \times n}$.

20.17
Если $|\mathbf{A}| = |(a_{ij})_{n \times n}| \neq 0$, то система из n линейных уравнений с n неизвестными

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

имеет единственное решение

$$x_j = \frac{|\mathbf{A}_j|}{|\mathbf{A}|}, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

где

$$|\mathbf{A}_j| = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j-1} & b_1 & a_{1j+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2j-1} & b_2 & a_{2j+1} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj-1} & b_n & a_{nj+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Правило Крамера. Обратите внимание, что определитель $|\mathbf{A}_j|$, фигурирующий в числителе, вычисляется по матрице, элементы j-го столбца которой заменены элементами $b_1, b_2, \dots, b_n$ вектора правой части неоднородной системы уравнений.

ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

Большинство формул стандартны и имеются почти во всех учебниках линейной алгебры, например в [21] или [52]. Как стандартное пособие используется [27].

Глава 21

СОБСТВЕННЫЕ ЧИСЛА. КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ

21.1 Число λ называется *собственным числом* квадратной матрица $\mathbf{A}$ порядка $n \times n$, если найдется такой n-вектор $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$, что

$$\mathbf{A}\mathbf{c} = \lambda\mathbf{c}.$$

Вектор $\mathbf{c}$ называется *собственным вектором* матрицы $\mathbf{A}$.

Собственные числа (собственные значения) называют также *характеристическими корнями*, а собственные векторы — *характеристическими векторами*. λ и $\mathbf{c}$ могут быть комплексными даже для вещественной матрицы $\mathbf{A}$.

21.2
$$|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix}$$

Характеристический многочлен матрицы $\mathbf{A} = (a_{ij})_{n\times n}$. $\mathbf{I}$ — единичная матрица порядка n.

21.3 λ является собственным числом матрицы $\mathbf{A}$ $\Leftrightarrow$ $p(\lambda) = |\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = 0$

Необходимое и достаточное условие для того, чтобы λ являлось собственным числом матрицы $\mathbf{A}$.

21.4
$$|\mathbf{A}| = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdots \lambda_{n-1} \cdot \lambda_n$$
$$\operatorname{tr}(\mathbf{A}) = a_{11} + \dots + a_{nn} = \lambda_1 + \dots + \lambda_n$$

$\lambda_1, \dots, \lambda_n$ — собственные числа матрицы $\mathbf{A}$.

21.5 Пусть $f(\ )$ — многочлен. Если λ является собственным числом матрицы $\mathbf{A}$, то $f(\lambda)$ является собственным числом матрицы $f(\mathbf{A})$.

Собственные числа матричного многочлена.

21.6 Квадратная матрица **A** обратима тогда и только тогда, когда число 0 не является ее собственным значением. Если матрица **A** обратима и λ является ее собственным значением, то обратное число λ^{-1} является собственным значением обратной матрицы $\mathbf{A}^{-1}$.

Как найти собственные числа матрицы, обратной к квадратной.

21.7 Модули всех собственных чисел матрицы **A** (строго) меньше 1 тогда и только тогда, когда $\mathbf{A}^t \to \mathbf{0}$ при $t \to \infty$.

Важный результат.

21.8 Матрицы **AB** и **BA** имеют одни и те же собственные числа.

A и **B** имеют порядок $n \times n$.

21.9 Если матрица **A** симметрична и состоит только из вещественных элементов, то все ее собственные значения являются вещественными числами.

21.10 Если

$$p(\lambda) = |\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = \\ = (-\lambda)^n + b_{n-1}(-\lambda)^{n-1} + \cdots + b_1(-\lambda) + b_0$$

— характеристический многочлен матрицы **A**, то b_k — сумма всех главных миноров **A** порядка $n-k$ (количество этих миноров $\binom{n}{k}$).

Характеристика коэффициентов характеристического многочлена матрицы **A** порядка $n \times n$. (Определение главных миноров см. в (20.15).) $p(\lambda) = 0$ называется *характеристическим уравнением* матрицы **A**.

21.11
$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)^2 + b_1(-\lambda) + b_0,$$
где $b_1 = a_{11} + a_{22} = \operatorname{tr}(\mathbf{A})$, $b_0 = |\mathbf{A}|$

(21.10) для случая $n = 2$. ($\operatorname{tr}(\mathbf{A})$ — след матрицы **A**.)

21.12
$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} = \\ = (-\lambda)^3 + b_2(-\lambda)^2 + b_1(-\lambda) + b_0,$$
где
$$b_2 = a_{11} + a_{22} + a_{33} = \operatorname{tr}(\mathbf{A})$$
$$b_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$
$$b_0 = |\mathbf{A}|$$

(21.10) для случая $n = 3$.

21.13 Матрица **A** *диагонализируема* $\iff \begin{cases} \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{D} \text{ для некоторой матрицы } \mathbf{P} \text{ и некоторой диагональной матрицы } \mathbf{D}. \end{cases}$

Определение.

21.14 **A** и $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$ имеют одни и те же собственные числа.

21.15 Если матрица $\mathbf{A} = (a_{ij})_{n\times n}$ имеет n различных собственных значений, то она диагонализируема.

Достаточное (но НЕ необходимое) условие диагонализируемости матрицы **A**.

21.16 $\mathbf{A} = (a_{ij})_{n\times n}$ имеет n линейно независимых собственных векторов $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ с соответствующими им собственными числами $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ тогда и только тогда, когда

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

где $\mathbf{P} = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)_{n\times n}$.

Свойство диагонализируемой матрицы.

21.17 Если $\mathbf{A} = (a_{ij})_{n\times n}$ симметрична и имеет собственные числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, то найдется такая ортогональная матрица **U**, что

$$\mathbf{U}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Спектральная теорема для симметричных матриц. Сведения об ортогональных матрицах приводятся далее, в главе 22.

21.18 Если $\mathbf{A}$ — матрица порядка $n \times n$, имеющая собственные числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ (не обязательно все разные), то найдется обратимая блочно-диагональная квадратная $n \times n$ матрица $\mathbf{T}$ [нормальная Жорданова форма], имеющая вид

$$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \mathbf{J}_{k_1}(\lambda_1) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \mathbf{J}_{k_2}(\lambda_2) & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \mathbf{J}_{k_r}(\lambda_r) \end{pmatrix},$$

где $k_1 + k_2 + \cdots + k_r = n$, а матрица $\mathbf{J}_k$ является квадратной порядка $k \times k$ и выглядит следующим образом:

$$\mathbf{J}_k(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda \end{pmatrix}, \quad \mathbf{J}_1(\lambda) = \lambda.$$

Теорема Жордана о разложении.

21.19 Пусть $\mathbf{A}$ — комплексная матрица порядка $n \times n$. Тогда найдется такая унитарная матрица $\mathbf{U}$, что матрица $\mathbf{U}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{U}$ является верхней треугольной.

Лемма Шура. (Определение унитарной матрицы см. в (19.50).)

21.20 Пусть матрица $\mathbf{A} = (a_{ij})$ эрмитова. Тогда найдется такая унитарная матрица $\mathbf{U}$, что $\mathbf{U}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{U}$ матрица является диагональной. Тогда все собственные числа $\mathbf{A}$ вещественны.

Спектральная теорема для эрмитовых матриц. (Определение эрмитовой матрицы см. в (19.50).)

21.21 Для любой исходной матрицы $\mathbf{A} = (a_{ij})_{n \times n}$ и любого $\varepsilon > 0$ найдется такая матрица $\mathbf{B}_\varepsilon = (b_{ij})_{n \times n}$, имеющая n *различных* собственных чисел, что

$$\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij} - b_{ij}| < \varepsilon.$$

Результатом даже незначительного изменения значений элементов исходной матрицы является матрица с другими собственными значениями.

21.22 Квадратная матрица $\mathbf{A}$ является корнем своего собственного характеристического уравнения:

$$p(\mathbf{A}) = (-\mathbf{A})^n + b_{n-1}(-\mathbf{A})^{n-1} + \cdots + b_1(-\mathbf{A}) + b_0\mathbf{I} = \mathbf{0}$$

Теорема *Кэли–Гамильтона*. Многочлен $p(\ )$ определен в (21.10).

21.23 $$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{A}^2 - \operatorname{tr}(\mathbf{A})\mathbf{A} + |\mathbf{A}|\mathbf{I} = \mathbf{0}$$

Теорема *Кэли–Гамильтона* для случая $n = 2$. (См. (21.11).)

21.24

$$Q=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j = \\ = a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \cdots + a_{1n}x_1x_n + \\ + a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{2n}x_2x_n + \\ + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ + a_{n1}x_nx_1 + a_{n2}x_nx_2 + \cdots + a_{nn}x_n^2$$

Квадратичная форма, **зависящая от n переменных $x_1, \ldots, x_n$. Без потери общности можно предполагать, что $a_{ij} = a_{ji}$ для всех $i, j = 1, \ldots, n$.**

21.25

$$Q=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j = \mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x}, \text{ где}$$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ и } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Квадратичная форма в матричной записи. Без потери общности можно предполагать, что матрица A симметрична.

21.26

$\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x}$ **является ПО** $\iff$ $\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x} > 0$ **для всех** $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$

$\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x}$ **является ППО** $\iff$ $\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x} \geq 0$ **для всех** $\mathbf{x}$

$\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x}$ **является ОО** $\iff$ $\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x} < 0$ **для всех** $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$

$\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x}$ **является ОПО** $\iff$ $\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x} \leq 0$ **для всех** $\mathbf{x}$

$\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x}$ **является НО** $\iff$ $\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x}$ **не является ни ППО, ни ОПО**

Типы определенности квадратичных форм ($\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x}$) и соответствующих симметричных матриц ($\mathbf{A}$). Этих типов пять: *положительно определенная* (ПО), *положительно полуопределенная* (ППО), *отрицательно определенная* (ОО), *отрицательно полуопределенная* (ОПО), *неопределенность* (НО).

21.27

$\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x}$ **является ПО** $\implies$ $a_{ii} > 0$ **для** $i = 1, \ldots, n$

$\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x}$ **является ППО** $\implies$ $a_{ii} \geq 0$ **для** $i = 1, \ldots, n$

$\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x}$ **является ОО** $\implies$ $a_{ii} < 0$ **для** $i = 1, \ldots, n$

$\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x}$ **является ОПО** $\implies$ $a_{ii} \leq 0$ **для** $i = 1, \ldots, n$

Следует из (21.24) при $x_i = 1$ и $x_j = 0$ для $j \neq i$.

21.28

$\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x}$ является ПО $\Longleftrightarrow$ все собственные числа $\mathbf{A}$ строго положительны

$\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x}$ является ППО $\Longleftrightarrow$ все собственные числа $\mathbf{A}$ неотрицательны

$\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x}$ является ОО $\Longleftrightarrow$ все собственные числа $\mathbf{A}$ строго отрицательны

$\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x}$ является ОПО $\Longleftrightarrow$ все собственные числа $\mathbf{A}$ неположительны

Характеристика определенности квадратичных форм в терминах знаков собственных значений матриц.

21.29 $\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x}$ является неопределенной (НО) тогда и только тогда, когда матрица $\mathbf{A}$ имеет хотя бы одно положительное и одно отрицательное собственное значение.

Характеристика *неопределенной* квадратичной формы.

21.30

$\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x}$ является ПО $\Longleftrightarrow$ $D_k > 0$ при $k = 1, \dots, n$;

$\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x}$ является ОО $\Longleftrightarrow$ $(-1)^k D_k > 0$ при $k = 1, \dots, n$,

где *угловые главные миноры* D_k матрицы $\mathbf{A}$ есть определители вида

$$D_k = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix}, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

Характеристики определенных квадратичных форм (матриц) в терминах угловых главных миноров. *Обратите внимание, что замена знака строгого неравенства $>$ на $\geq$ НЕ дает критерия для случая полуопределенности.* Пример: $Q = 0x_1^2 + 0x_1x_2 - x_2^2$.

21.31

$\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x}$ является ППО $\Longleftrightarrow$ $\Delta_r \geq 0$ при $r = 1, \dots, n$;

$\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x}$ является ОПО $\Longleftrightarrow$ $(-1)^r \Delta_r \geq 0$ при $r = 1, \dots, n$.

Для любого r запись Δ_r обозначает угловой главный минор порядка r матрицы $\mathbf{A}$.

Характеристики положительной и отрицательной полуопределенности квадратичных форм в терминах главных миноров матрицы. (См. (20.15).)

21.32 Если $\mathbf{A} = (a_{ij})_{n \times n}$ положительно определена и $\mathbf{P}$ порядка $n \times m$ имеет ранг $r(\mathbf{P}) = m$, то матрица $\mathbf{P}'\mathbf{A}\mathbf{P}$ положительно определена.

Результаты для положительно определенных матриц.

21.33 Если $\mathbf{P}$ порядка $n \times m$ имеет ранг $r(\mathbf{P}) = m$, то $\mathbf{P}'\mathbf{P}$ положительно определена и имеет ранг m.

Результаты для положительно определенных матриц.

21.34 **Если $\mathbf{A}$ положительно определена, то найдется такая невырожденная матрица $\mathbf{P}$, что $\mathbf{PAP}' = \mathbf{I}$, и $\mathbf{P}'\mathbf{P} = \mathbf{A}^{-1}$.**

21.35 **Пусть $\mathbf{A}$ — $m \times n$ матрица, ранг которой $r(\mathbf{A}) = k$. тогда найдутся такие унитарные матрицы $\mathbf{U}$ порядка $m \times m$ и $\mathbf{V}$ порядка $n \times n$, а также диагональная матрица $\mathbf{D}$ порядка $k \times k$, диагональные элементы которой строго положительны, что**

$$\mathbf{A} = \mathbf{USV}^*, \text{ где } \mathbf{S} = \begin{pmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

Если $k = m = n$, то $\mathbf{S} = \mathbf{D}$. Если $\mathbf{A}$ — вещественная матрица, то $\mathbf{U}$ и $\mathbf{V}$ можно найти среди вещественных ортогональных.

Теорема о разложении вырожденной матрицы. **Диагональные элементы $\mathbf{D}$ называются** ***сингулярными числами*** **матрицы $\mathbf{A}$. Определение унитарной матрицы дано в (19.50), а ортогональной в (22.8).**

21.36 **Пусть $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ — симметричные матрицы порядка $n \times n$. Тогда такая ортогональная матрица $\mathbf{Q}$, что и $\mathbf{Q}'\mathbf{AQ}$, и $\mathbf{Q}'\mathbf{BQ}$ являются диагональными матрицами, найдется тогда и только тогда, когда $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$.**

Совместная диагонализация.

21.37 **Квадратичная форма**

$$(*) \quad Q = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j, \qquad (a_{ij} = a_{ji})$$

положительно (отрицательно) определена при линейных ограничениях

$$\begin{aligned} & b_{11}x_1 + \cdots + b_{1n}x_n = 0 \\ (**) \quad & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \qquad (m < n) \\ & b_{m1}x_1 + \cdots + b_{mn}x_n = 0, \end{aligned}$$

если $Q > 0$ (< 0) для всех $(x_1, \dots, x_n) \neq$ $\neq (0, \dots, 0)$, удовлетворяющих $(**)$.

Определение положительной (отрицательной) определенности при линейных ограничениях.

21.38 $$D_r = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_{m1} & \cdots & b_{mr} \\ b_{11} & \cdots & b_{m1} & a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{1r} & \cdots & b_{mr} & a_{r1} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix}$$

Определитель окаймленной матрицы, соответствующей (21.37), $r = 1, \dots, n$.

21.39 Для квадратичной формы (*) в (21.37) необходимым и достаточным условием положительной определенности при ограничениях (**) и предположении линейной независимости *первых* m столбцов матрицы $(b_{ij})_{m\times n}$ является

$$(-1)^m D_r > 0, \quad r = m+1, \ldots, n.$$

Аналогичным условием (*) отрицательной определенности при ограничениях (**) является

$$(-1)^r D_r > 0, \quad r = m+1, \ldots, n.$$

Критерий проверки определенности квадратичных форм при линейных ограничениях. (Предположения о том, что $(b_{ij})_{m\times n}$ имеет ранг m, здесь недостаточно, что видно на таком примере — форма $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$ с ограничением $x_3 = 0$.)

21.40 Квадратичная форма $ax^2 + 2bxy + cy^2$ положительна при всех $(x, y) \neq (0, 0)$, удовлетворяющих ограничению $px + qy = 0$, тогда и только тогда, когда

$$\begin{vmatrix} 0 & p & q \\ p & a & b \\ q & b & c \end{vmatrix} < 0$$

Частный случай (21.39) в предположении $(p, q) \neq (0, 0)$.

ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

Большинство этих формул имеется почти в каждом учебнике по линейной алгебре, например [21] или [52]. См. также [42] и [83]. Стандартным пособием служит [27].

Глава 22

СПЕЦИАЛЬНЫЕ МАТРИЦЫ. СИСТЕМЫ ЛЕОНТЬЕВА

ИДЕМПОТЕНТНЫЕ МАТРИЦЫ

22.1	$\mathbf{A} = (a_{ij})_{n\times n}$ является *идемпотентной* $\iff \mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$	Определение идемпотентной матрицы.
22.2	**A** идемпотентна $\iff$ $\mathbf{I} - \mathbf{A}$ идемпотентна.	Свойства идемпотентных матриц.
22.3	**A** идемпотентна $\Rightarrow$ только 0 и 1 являются единственно возможными значениями ее собственных чисел, и **A** положительно полуопределена.	
22.4	**A** идемпотентна и имеет k собственных чисел, равных 1 $\Rightarrow$ $r(\mathbf{A}) = \mathrm{tr}(\mathbf{A}) = k$.	
22.5	**A** идемпотентна и **C** ортогональна $\Rightarrow$ $\mathbf{C}'\mathbf{AC}$ идемпотентна.	Определение ортогональной матрицы дано в (22.8).
22.6	**A** идемпотентна $\iff$ соответствующее ей линейное преобразование является проекцией.	Линейное преобразование P из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$ является *проекцией*, если $P(P(\mathbf{x})) = P(\mathbf{x})$ для всех $\mathbf{x}$ в $\mathbb{R}^n$.
22.7	$\mathbf{I}_n - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'$ идемпотентна.	**X** порядка $n \times m$, $\lvert\mathbf{X}'\mathbf{X}\rvert \neq 0$.

ОРТОГОНАЛЬНЫЕ МАТРИЦЫ

22.8	$\mathbf{P} = (p_{ij})_{n\times n}$ *ортогональна* $\iff \mathbf{P}'\mathbf{P} = \mathbf{PP}' = \mathbf{I}_n$	Определение ортогональной матрицы.
22.9	Матрица **P** ортогональная $\iff$ векторы столбцы **P** являются взаимноортогональными единичными векторами.	Свойство ортогональных матриц.

22.10	$\mathbf{P}$ и $\mathbf{Q}$ ортогональны $\Rightarrow$ $\mathbf{PQ}$ ортогональна.	Свойства ортогональных матриц.
22.11	$\mathbf{P}$ ортогональна $\Rightarrow$ $\lvert\mathbf{P}\rvert = \pm 1$, ее единственно возможными собственными значениями являются числа 1 и -1.	
22.12	$\mathbf{P}$ ортогональна $\iff$ $\lVert\mathbf{Px}\rVert = \lVert\mathbf{x}\rVert$ для всех $\mathbf{x}$ в $\mathbb{R}^n$.	При ортогональном преобразовании сохраняется длина вектора.
22.13	Если $\mathbf{P}$ ортогональна, то угол между $\mathbf{Px}$ и $\mathbf{Py}$ равен углу между $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$.	При ортогональном преобразовании сохраняется величина угла.

МАТРИЦЫ ПЕРЕСТАНОВОК

22.14	$\mathbf{P} = (p_{ij})_{n\times n}$ является *матрицей перестановок*, если в каждой ее строке и в каждом столбце только один элемент равен 1, а все остальные равны 0.	Определение матрицы перестановок.
22.15	$\mathbf{P}$ является матрицей перестановок $\Rightarrow$ $\mathbf{P}$ невырождена и ортогональна.	Свойства матриц перестановок

НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫЕ МАТРИЦЫ

22.16	$\mathbf{A} = (a_{ij})_{m\times n} \geq \mathbf{0} \iff a_{ij} \geq 0$ для всех i, j. $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m\times n} > \mathbf{0} \iff a_{ij} > 0$ для всех i, j.	Определения *неотрицательной* и *положительной* матриц.
22.17	Если $\mathbf{A} = (a_{ij})_{n\times n} \geq 0$, то у матрицы $\mathbf{A}$ есть хотя бы одно неотрицательное собственное число. Наибольшее по своему значению неотрицательное собственное число называется *корнем Фробениуса* матрицы $\mathbf{A}$ и обозначается $\lambda(\mathbf{A})$. $\mathbf{A}$ имеет неотрицательный собственный вектор, соответствующий собственному числу $\lambda(\mathbf{A})$.	Определение корня Фробениуса (или *доминирующего корня*) неотрицательной матрицы.
22.18	• число μ собственное для $\mathbf{A} \Rightarrow \lvert\mu\rvert \leq \lambda(\mathbf{A})$ • $\mathbf{0} \leq \mathbf{A}_1 \leq \mathbf{A}_2 \Rightarrow \lambda(\mathbf{A}_1) \leq \lambda(\mathbf{A}_2)$ • $\rho > \lambda(\mathbf{A}) \Leftrightarrow (\rho\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$ существует и $\geq \mathbf{0}$ • $\min\limits_{1\leq j\leq n} \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij} \leq \lambda(\mathbf{A}) \leq \max\limits_{1\leq j\leq n} \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij}$	Свойства неотрицательных матриц. $\lambda(\mathbf{A})$ — корень Фробениуса матрицы A.

22.19 Матрица $\mathbf{A} = (a_{ij})_{n\times n}$ является *разложимой* или *редуцируемой*, если перестановкой некоторых строк и соответствующих им столбцов матрицу $\mathbf{A}$ ее можно привести к виду

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{22} \end{pmatrix},$$

где $\mathbf{A}_{11}$ и $\mathbf{A}_{22}$ — квадратные подматрицы.

Определение разложимой квадратной матрицы. Матрица, не являющаяся разложимой, называется *неразложимой (нередуцируемой)*.

22.20 $\mathbf{A} = (a_{ij})_{n\times n}$ разложима тогда и только тогда, когда найдется такая матрица перестановок $\mathbf{P}$, что

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{22} \end{pmatrix},$$

где $\mathbf{A}_{11}$ и $\mathbf{A}_{22}$ — квадратные подматрицы.

Характеристика разложимой матрицы.

22.21 Если $\mathbf{A} = (a_{ij})_{n\times n} \geq \mathbf{0}$ неразложима, то

- корень Фробениуса $\lambda(\mathbf{A}) > 0$ является однократным корнем характеристического уравнения, которому соответствует собственный вектор $\mathbf{x} > \mathbf{0}$.
- Если $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mu\mathbf{x}$ при некотором $\mu \geq 0$ и $\mathbf{x} > \mathbf{0}$, то $\mu = \lambda(\mathbf{A})$.

Свойства неразложимых матриц.

22.22 $\mathbf{A} = (a_{ij})_{n\times n}$ имеет *доминирующую главную диагональ*, если найдутся такие положительные числа $d_1, \ldots, d_n$, что

$$d_j|a_{jj}| > \sum_{i\neq j} d_i|a_{ij}| \quad \text{при} \quad j = 1, \ldots, n.$$

Определение матрицы, имеющей доминирующую главную диагональ.

22.23 Предположим, что матрица $\mathbf{A}$ имеет доминирующую главную диагональ. Тогда:

- $|\mathbf{A}| \neq 0$.
- Если все элементы этой диагонали положительны, то положительны и вещественные части всех собственных чисел матрицы $\mathbf{A}$.

Свойства матриц, имеющих доминирующую главную диагональ.

СИСТЕМЫ ЛЕОНТЬЕВА

22.24 Если $\mathbf{A} = (a_{ij})_{n\times n} \geq 0$ и $\mathbf{c} \geq \mathbf{0}$, то система уравнений

$$\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{c} = \mathbf{x}$$

называется *системой Леонтьева*.

Определение системы Леонтьева. $\mathbf{x}$ и $\mathbf{c}$ здесь матрицы порядка $n \times 1$.

22.25 Если $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} < 1$ при $j = 1, \ldots, n$, то система Леонтьева имеет решение $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$.

Достаточное условие существования неотрицательного решения для системы Леонтьева.

Система Леонтьева $\mathbf{Ax} + \mathbf{c} = \mathbf{x}$ имеет решение $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ при любом $\mathbf{c} \geq \mathbf{0}$ тогда и только тогда, когда выполняется одно (т. е. все) из следующих эквивалентных друг другу условий:

- Существует неотрицательная матрица $(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$, равная $\mathbf{I} + \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 + \cdots$.
- 22.26 $\mathbf{A}^m \to \mathbf{0}$ при $m \to \infty$.
- Любое собственное значение $\mathbf{A}$ по модулю < 1.
- $$\begin{vmatrix} 1 - a_{11} & -a_{12} & \ldots & -a_{1k} \\ -a_{21} & 1 - a_{22} & \ldots & -a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{k1} & -a_{k2} & \ldots & 1 - a_{kk} \end{vmatrix} > 0$$

  при $k = 1, \ldots, n$.

Необходимые и достаточные условия существования неотрицательного решения для системы Леонтьева. Последняя из приводимых здесь альтернативных формулировок есть *условия Хавкинса–Саймона*.

22.27 Если $0 \leq a_{ii} < 1$ при $i = 1, \ldots, n$, и $a_{ij} \geq 0$ для всех $i \neq j$, то система $\mathbf{Ax} + \mathbf{c} = \mathbf{x}$ будет иметь решение $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ при любом $\mathbf{c} \geq \mathbf{0}$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{I} - \mathbf{A}$ имеет доминирующую главную диагональ.

Необходимое и достаточное условие существования неотрицательного решения для системы Леонтьева.

ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

Сведения о матрицах см. в [27] или [42]. О системах Леонтьева читайте [62] и [84].

Глава 23

КРОНЕКЕРОВО ПРОИЗВЕДЕНИЕ И ВЕКТОРИЗАЦИЯ МАТРИЦ. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ МАТРИЦ И ВЕКТОРОВ

23.1	$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_{11}\mathbf{B} & a_{12}\mathbf{B} & \dots & a_{1n}\mathbf{B} \\ a_{21}\mathbf{B} & a_{22}\mathbf{B} & \dots & a_{2n}\mathbf{B} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}\mathbf{B} & a_{m2}\mathbf{B} & \dots & a_{mn}\mathbf{B} \end{pmatrix}$$	*Кронекерово (тензорное) произведение* матриц $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m\times n}$ и $\mathbf{B} = (b_{ij})_{p\times q}$. $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$ имеет порядок $mp \times nq$. Вообще говоря, тензорное произведение некоммутативно — $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \otimes \mathbf{A}$.
23.2	$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & a_{12}b_{11} & a_{12}b_{12} \\ a_{11}b_{21} & a_{11}b_{22} & a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} & a_{22}b_{11} & a_{22}b_{12} \\ a_{21}b_{21} & a_{21}b_{22} & a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$	Частный случай (23.1).
23.3	$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} \otimes \mathbf{C} = (\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) \otimes \mathbf{C} = \mathbf{A} \otimes (\mathbf{B} \otimes \mathbf{C})$	Верно всегда.
23.4	$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \otimes (\mathbf{C} + \mathbf{D}) = \mathbf{A} \otimes \mathbf{C} + \mathbf{A} \otimes \mathbf{D} + \mathbf{B} \otimes \mathbf{C} + \mathbf{B} \otimes \mathbf{D}$	Верно, если определены суммы $\mathbf{A}+\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}+\mathbf{D}$.
23.5	$(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})(\mathbf{C} \otimes \mathbf{D}) = \mathbf{AC} \otimes \mathbf{BD}$	Верно, если определены произведения $\mathbf{AC}$ и $\mathbf{BD}$.
23.6	$(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})' = \mathbf{A}' \otimes \mathbf{B}'$	Правило транспонирования кронекерова произведения матриц.
23.7	$(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \otimes \mathbf{B}^{-1}$	Верно, если существуют $\mathbf{A}^{-1}$ и $\mathbf{B}^{-1}$.
23.8	$\operatorname{tr}(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) = \operatorname{tr}(\mathbf{A}) \operatorname{tr}(\mathbf{B})$	Матрицы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ квадратные, не обязательно одного и того же порядка.

23.9	$\alpha \otimes \mathbf{A} = \alpha\mathbf{A} = \mathbf{A}\alpha = \mathbf{A} \otimes \alpha$	α — скалярная матрица порядка 1×1.
23.10	Если числа $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ являются собственными для матрицы $\mathbf{A}$, а числа $\mu_1, \dots, \mu_p$ — собственные для $\mathbf{B}$, то np собственных чисел $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$ равны $\lambda_i\mu_j$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, p$.	Собственные числа $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$, где $\mathbf{A}$ $n \times n$, а $\mathbf{B}$ $p \times p$.
23.11	Если $\mathbf{x}$ — собственный вектор матрицы $\mathbf{A}$, а $\mathbf{y}$ — собственный вектор матрицы $\mathbf{B}$, то $\mathbf{x} \otimes \mathbf{y}$ является собственным вектором матрицы $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$.	ЗАМЕЧАНИЕ: собственный вектор матрицы $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$ не обязан быть результатом кронекерова произведения собственных векторов матриц $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$.
23.12	Если матрицы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ положительно (полу)определены, то и матрица $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$ положительно (полу)определена.	Следствие из (23.10).
23.13	$\lvert\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}\rvert = \lvert\mathbf{A}\rvert^p \cdot \lvert\mathbf{B}\rvert^n$	$\mathbf{A}$ $n \times n$, $\mathbf{B}$ $p \times p$.
23.14	$r(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) = r(\mathbf{A})\, r(\mathbf{B})$	Ранг Кронекерова произведения.
23.15	Если $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n)_{m \times n}$, то $\operatorname{vec}(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{pmatrix}_{mn \times 1}$	Результат операции векторизации $\operatorname{vec}(\mathbf{A})$ состоит из столбцов матрицы $\mathbf{A}$, записанных друг под другом.
23.16	$\operatorname{vec}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$	Частный случай (23.15).
23.17	$\operatorname{vec}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \operatorname{vec}(\mathbf{A}) + \operatorname{vec}(\mathbf{B})$	Верно, если определена сумма $\mathbf{A} + \mathbf{B}$.
23.18	$\operatorname{vec}(\mathbf{ABC}) = (\mathbf{C}' \otimes \mathbf{A}) \operatorname{vec}(\mathbf{B})$	Верно, если определено произведение $\mathbf{ABC}$.
23.19	$\operatorname{tr}(\mathbf{AB}) = (\operatorname{vec}(\mathbf{A}'))' \operatorname{vec}(\mathbf{B}) = (\operatorname{vec}(\mathbf{B}'))' \operatorname{vec}(\mathbf{A})$	Верно, если определены результаты операций, входящих в эти выражения.

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ВЕКТОРОВ И МАТРИЦ

23.20	Если $y = f(x_1, \ldots, x_n) = f(\mathbf{x})$, то $$\frac{\partial y}{\partial \mathbf{x}} = \left(\frac{\partial y}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial y}{\partial x_n}\right)$$	Градиент $y = f(\mathbf{x})$. (Производная скалярной функции по векторному аргументу.) Альтернативным обозначением для градиента служит $\nabla f(\mathbf{x})$. См. (4.26).
23.21	$$\begin{matrix} y_1 = f_1(x_1, \ldots, x_n) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_m = f_m(x_1, \ldots, x_n) \end{matrix} \iff \mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$$	Преобразование $\mathbf{f}$ из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$. Мы считаем векторы $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ столбцами.
23.22	$$\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial y_1(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial y_1(\mathbf{x})}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial y_m(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial y_m(\mathbf{x})}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$	Матрица, определитель которой является *якобианом* преобразования (23.21). (Производная векторной функции по векторному аргументу.)
23.23	$$\frac{\partial^2 \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x} \partial \mathbf{x}'} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \operatorname{vec}\left[\left(\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}}\right)'\right]$$	Оператор векторизации определен в (23.15).
23.24	$$\frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \operatorname{vec}(\mathbf{A}(\mathbf{r}))$$	Общее определение производной матрицы по вектору.
23.25	$$\frac{\partial^2 y}{\partial \mathbf{x} \partial \mathbf{x}'} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 y}{\partial x_n \partial x_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_n} & \cdots & \dfrac{\partial^2 y}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$	Частный случай (23.23). (Определитель матрицы $\partial^2 y / \partial \mathbf{x} \partial \mathbf{x}'$ является гессианом, см. (13.24).)
23.26	$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{a}' \cdot \mathbf{x}) = \mathbf{a}'$$	$\mathbf{a}$ и $\mathbf{x}$ — векторы порядка $n \times 1$.
23.27	$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x}) = \mathbf{x}'(\mathbf{A} + \mathbf{A}')$$ $$\frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x} \partial \mathbf{x}'}(\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x}) = \mathbf{A} + \mathbf{A}'$$	Дифференцировние квадратичной формы. $\mathbf{A}$ $n \times n$, $\mathbf{x}$ $n \times 1$.

23.28	$\dfrac{\partial}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{A}\mathbf{x}) = \mathbf{A}$	$\mathbf{A}$ $m \times n$, $\mathbf{x}$ $n \times 1$.
23.29	Если $\mathbf{y} = \mathbf{A}(\mathbf{r})\mathbf{x}(\mathbf{r})$, то $\dfrac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{r}} = (\mathbf{x}' \otimes \mathbf{I}_m)\dfrac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{A}\dfrac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{r}}$	$\mathbf{A}(\mathbf{r})$ $m \times n$, $\mathbf{x}(\mathbf{r})$ is $n \times 1$ и $\mathbf{r}$ $k \times 1$.
23.30	Если $y = f(\mathbf{A})$, то $\dfrac{\partial y}{\partial \mathbf{A}} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial y}{\partial a_{11}} & \dots & \dfrac{\partial y}{\partial a_{1n}} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial y}{\partial a_{m1}} & \dots & \dfrac{\partial y}{\partial a_{mn}} \end{pmatrix}$	Определение производной скалярной функции по матрице $\mathbf{A} = (a_{ij})$ порядка $m \times n$.
23.31	$\dfrac{\partial \lvert\mathbf{A}\rvert}{\partial \mathbf{A}} = (A_{ij}) = \lvert\mathbf{A}\rvert(\mathbf{A}')^{-1}$	$\mathbf{A}$ порядка $n \times n$. (A_{ij}) является матрицей алгебраических дополнений к элементам $\mathbf{A}$. (См. (19.16).) Последнее равенство верно, если матрица $\mathbf{A}$ обратима.
23.32	$\dfrac{\partial\, \mathrm{tr}(\mathbf{A})}{\partial \mathbf{A}} = \mathbf{I}_n, \quad \dfrac{\partial\, \mathrm{tr}(\mathbf{A}'\mathbf{A})}{\partial \mathbf{A}} = 2\mathbf{A}$	Матрица $\mathbf{A}$ квадратная порядка $n \times n$. $\mathrm{tr}(\mathbf{A})$ — след $\mathbf{A}$.
23.33	$\dfrac{\partial a^{ij}}{\partial a_{hk}} = -a^{ih}a^{kj}; \qquad i, j, h, k = 1, \dots, n$	a^{ij} является (i, j)-м элементом обратной матрицы $\mathbf{A}^{-1}$.

ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

Данные выше определения распространены в экономической литературе, см. [1: Авторы книг [56] и [57] разрабатывают более стройную систему обозначений, в которую вписываются не только приведенные здесь результаты, но и многие другие.

Глава 24

СРАВНИТЕЛЬНАЯ СТАТИКА

24.1
$$\begin{aligned} E_1(\mathbf{p},\mathbf{a}) &= S_1(\mathbf{p},\mathbf{a}) - D_1(\mathbf{p},\mathbf{a}) \\ E_2(\mathbf{p},\mathbf{a}) &= S_2(\mathbf{p},\mathbf{a}) - D_2(\mathbf{p},\mathbf{a}) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ E_n(\mathbf{p},\mathbf{a}) &= S_n(\mathbf{p},\mathbf{a}) - D_n(\mathbf{p},\mathbf{a}) \end{aligned}$$

$S_i(\mathbf{p},\mathbf{a})$ — предложение, а $D_i(\mathbf{p},\mathbf{a})$ — спрос на товар i. $E_i(\mathbf{p},\mathbf{a})$ — избыточное предложение. $\mathbf{p} = (p_1,\ldots,p_n)$ — вектор цен, $\mathbf{a} = (a_1,\ldots,a_k)$ — вектор внешних (экзогенных) переменных.

24.2
$$E_1(\mathbf{p},\mathbf{a}) = 0,\ E_2(\mathbf{p},\mathbf{a}) = 0,\ \ldots,\ E_n(\mathbf{p},\mathbf{a}) = 0$$

Условия равновесия.

24.3
$$\begin{aligned} E_1(p_1,p_2,a_1,\ldots,a_k) &= 0 \\ E_2(p_1,p_2,a_1,\ldots,a_k) &= 0 \end{aligned}$$

Условия равновесия для модели рынка двух товаров.

24.4
$$\frac{\partial p_1}{\partial a_j} = \frac{\dfrac{\partial E_1}{\partial p_2}\dfrac{\partial E_2}{\partial a_j} - \dfrac{\partial E_2}{\partial p_2}\dfrac{\partial E_1}{\partial a_j}}{\dfrac{\partial E_1}{\partial p_1}\dfrac{\partial E_2}{\partial p_2} - \dfrac{\partial E_1}{\partial p_2}\dfrac{\partial E_2}{\partial p_1}}$$
$$\frac{\partial p_2}{\partial a_j} = \frac{\dfrac{\partial E_2}{\partial p_1}\dfrac{\partial E_1}{\partial a_j} - \dfrac{\partial E_1}{\partial p_1}\dfrac{\partial E_2}{\partial a_j}}{\dfrac{\partial E_1}{\partial p_1}\dfrac{\partial E_2}{\partial p_2} - \dfrac{\partial E_1}{\partial p_2}\dfrac{\partial E_2}{\partial p_1}}$$

Результаты сравнительной статики для модели рынка двух товаров, $j = 1,\ldots,k$.

24.5
$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial p_1}{\partial a_j} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial p_n}{\partial a_j} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \dfrac{\partial E_1}{\partial p_1} & \cdots & \dfrac{\partial E_1}{\partial p_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial E_n}{\partial p_1} & \cdots & \dfrac{\partial E_n}{\partial p_n} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial E_1}{\partial a_j} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial E_n}{\partial a_j} \end{pmatrix}$$

Результаты сравнительной статики для модели рынка n товаров, $j = 1,\ldots,k$. Общую формулу матрицы, обратной к квадратной, см. в (19.16).

24.6 Рассмотрим задачу

$\max f(\mathbf{x}, \mathbf{a})$ при ограничениях $g(\mathbf{x}, \mathbf{a}) = 0$,

где f и g — C^1-функции, и пусть L — соответствующая ей функция Лагранжа с множителем Лагранжа λ. Если $x_i^* = x_i^*(\mathbf{a})$, $i = 1, \ldots, n$ является решением задачи, то для $i, j = 1, \ldots, m$,

$$\sum_{k=1}^{n} L''_{a_i x_k} \frac{\partial x_k^*}{\partial a_j} + g'_{a_i} \frac{\partial \lambda}{\partial a_j} = \sum_{k=1}^{n} L''_{a_j x_k} \frac{\partial x_k^*}{\partial a_i} + g'_{a_j} \frac{\partial \lambda}{\partial a_i}.$$

Отношения взаимной зависимости. (Векторной) переменной решения является $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_m)$ — параметры. О системе использования этих отношений читайте [76].

МОНОТОННАЯ СРАВНИТЕЛЬНАЯ СТАТИКА

24.7 Функция $F : Z \to \mathbb{R}$, определенная на полурешетке Z в $\mathbb{R}^m$, называется *супермодулярной*, если

$$F(\mathbf{z}) + F(\mathbf{z}') \leq F(\mathbf{z} \wedge \mathbf{z}') + F(\mathbf{z} \vee \mathbf{z}')$$

для всех $\mathbf{z}$ и $\mathbf{z}'$ из Z. Если данное неравенство выполняется строго всякий раз, когда $\mathbf{z}$ и $\mathbf{z}'$ несравнимы между собой в предупорядочении $\leq$, то F называется *строго супермодулярной.*

Определение (строгой) супермодулярности. См. в (6.28) и (6.29) определения операций $\wedge$ и $\vee$ для решеток.

24.8 Пусть S и P — полурешетки в $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^l$ соответственно. Говорят, что функция $f : S \times P \to \mathbb{R}$ обладает свойством (удовлетворяет условию) *возрастающих различий* по $(\mathbf{x}, \mathbf{p})$, если

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{x}' \text{ и } \mathbf{p} \geq \mathbf{p}' \Rightarrow f(\mathbf{x}, \mathbf{p}) - f(\mathbf{x}', \mathbf{p}) \geq f(\mathbf{x}, \mathbf{p}') - f(\mathbf{x}', \mathbf{p}')$$

для всех пар $(\mathbf{x}, \mathbf{p})$ и $(\mathbf{x}', \mathbf{p}')$ из $S \times P$. Если данное неравенство выполняется строго всякий раз, когда $\mathbf{x} > \mathbf{x}'$ и $\mathbf{p} > \mathbf{p}'$, то говорят, что f обладает свойством *строго возрастающих различий по* $(\mathbf{x}, \mathbf{p})$.

Определение (строго) возрастающих различий. (Разница $f(\mathbf{x}, \mathbf{p}) - f(\mathbf{x}', \mathbf{p})$ между значениями f от большего «действия» $\mathbf{x}$ и меньшего по сравнению с ним «действия» $\mathbf{x}'$ является функцией, (строго) возрастающей по параметру $\mathbf{p}$.)

24.9 Пусть S и P — полурешетки в $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^l$ соответственно. Если $f : S \times P \to \mathbb{R}$ супермодулярна по $(\mathbf{x}, \mathbf{p})$, то

- f супермодулярна по $\mathbf{x}$ для фиксированного $\mathbf{p}$, т. е. для любого фиксированного $\mathbf{p}$ из P, м для всех $\mathbf{x}$ и $\mathbf{x}'$ из S,

  $$f(\mathbf{x}, \mathbf{p}) + f(\mathbf{x}', \mathbf{p}) \leq f(\mathbf{x} \wedge \mathbf{x}', \mathbf{p}) + f(\mathbf{x} \vee \mathbf{x}', \mathbf{p});$$
- f удовлетворяет условию возрастающих различий по $(\mathbf{x}, \mathbf{p})$.

Важные математические факты. Заметим, что $S \times P$ является полурешеткой в $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^l = \mathbb{R}^{n+l}$.

24.10 Пусть X — открытая полурешетка в $\mathbb{R}^m$. C^2-функция $F : X \to \mathbb{R}$ супермодулярна по X тогда и только тогда, когда для всех $\mathbf{x}$ из X

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}) \geq 0, \quad i,j = 1,\ldots,m, \ i \neq j.$$

24.11 Предположим, что задача

$$\max F(x,p) \text{ при ограничениях } x \in S \subset \mathbb{R}$$

имеет хотя бы одно решение для любого $p \in P \subset \mathbb{R}$. Пусть F также обладает свойством строго возрастающих различий по (x,p). Тогда оптимальное действие $x^*(p)$ возрастает по параметру p.

Частный результат, который нельзя распространять на более общий случай $S \subset \mathbb{R}^n$ при $n \geq 2$.

24.12 В (24.11) предположим, что

$$F(x,p) = pf(x) - C(x),$$

где S компактно, а f и C непрерывны. Тогда $\partial^2 F/\partial x \partial p = f'(x)$, т. е. в соответствии с (24.10), F супермодулярна тогда и только тогда, когда $f(x)$ возрастает. Таким образом, возрастания $f(x)$ достаточно для обеспечения возрастания оптимального действия $x^*(p)$ по p.

Важное следствие из (24.10).

24.13 Пусть S — компактная полурешетка в $\mathbb{R}^n$, а P является полурешеткой в $\mathbb{R}^l$, и функция $f : S \times P \to \mathbb{R}$ непрерывна на S для любого фиксированного $\mathbf{p}$. Предположим, что f удовлетворяет условию возрастающих различий по $(\mathbf{x},\mathbf{p})$ и супермодулярна по $\mathbf{x}$ при любом заданном $\mathbf{p}$. Определим соответствие Γ из P в S следующим образом:

$$\Gamma(\mathbf{p}) = \operatorname{argmax}\{f(\mathbf{x},\mathbf{p}) : \mathbf{x} \in S\}.$$

- Для любого $\mathbf{p}$ из P $\Gamma(\mathbf{p})$ является непустой компактной полурешеткой в $\mathbb{R}^n$, и имеет наибольший элемент, обозначаемый $\mathbf{x}^*(\mathbf{p})$.
- $\mathbf{p}_1 > \mathbf{p}_2 \Rightarrow \mathbf{x}^*(\mathbf{p}_1) \geq \mathbf{x}^*(\mathbf{p}_2)$.
- Если f обладает свойством строгого возрастания различий по $(\mathbf{x},\mathbf{p})$, то $\mathbf{x}_1 \geq \mathbf{x}_2$ для всех $\mathbf{x}_1$ из $\Gamma(\mathbf{p}_1)$ и всех $\mathbf{x}_2$ из $\Gamma(\mathbf{p}_2)$ всякий раз, когда $\mathbf{p}_1 > \mathbf{p}_2$.

Основной результат. Для заданного $\mathbf{p}$, $\operatorname{argmax}\{f(\mathbf{x},\mathbf{p}) : \mathbf{x} \in S\}$ представляет собой множество всех точек $\mathbf{x}$ из S, на которых $f(\mathbf{x},\mathbf{p})$ достигает максимального значения.

ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

Сравнение в статике изложено в книгах [86] и [76]. По монотонной сравнительной статике читайте [80].

Глава 25

СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ ЗАТРАТ И ПРИБЫЛИ

25.1 $$C(\mathbf{w}, y) = \min_{\mathbf{x}} \sum_{i=1}^{n} w_i x_i \quad \text{при} \quad f(\mathbf{x}) = y$$

Минимизация затрат. Однопродуктовая модель производства. f является производственной функцией, $\mathbf{w} = (w_1, \ldots, w_n)$ — цены факторов производства, y — выпуск продукта, а $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ — затраты факторов. $C(\mathbf{w}, y)$ является функцией затрат.

25.2 $C(\mathbf{w}, y) = \Big\{$ минимальные затраты на выпуск y единиц производимого товара при ценах факторов производства $\mathbf{w} = (w_1, \ldots, w_n)$.

Функция затрат.

25.3
- $C(\mathbf{w}, y)$ возрастает по каждой цене w_i.
- $C(\mathbf{w}, y)$ однородна степени 1 по $\mathbf{w}$.
- $C(\mathbf{w}, y)$ вогнута по $\mathbf{w}$.
- $C(\mathbf{w}, y)$ непрерывна по $\mathbf{w}$ для $\mathbf{w} > \mathbf{0}$.

Свойства функции затрат.

25.4 $x_i^*(\mathbf{w}, y) = \Big\{$ минимизирующий затраты вариант выбора i-го фактора производства как функция цен на факторы $\mathbf{w}$ и заданного уровня выпуска y.

Условные функции спроса на факторы. $\mathbf{x}^*(\mathbf{w}, y)$ является оптимальным вектором $\mathbf{x}^*$, решающим задачу (25.1).

25.5
- $x_i^*(\mathbf{w}, y)$ убывает по w_i.
- $x_i^*(\mathbf{w}, y)$ однородна степени 0 по $\mathbf{w}$.

Свойства условных функций спроса на факторы производства.

25.6 $\dfrac{\partial C(\mathbf{w},y)}{\partial w_i} = x_i^*(\mathbf{w},y), \quad i = 1,\ldots,n$

Лемма Шеппарда.

25.7 $\left(\dfrac{\partial^2 C(\mathbf{w},y)}{\partial w_i \partial w_j}\right)_{(n\times n)} = \left(\dfrac{\partial x_i^*(\mathbf{w},y)}{\partial w_j}\right)_{(n\times n)}$ симметрична и положительно полуопределена.

Свойства *матрицы замены.*

25.8 $\pi(p,\mathbf{w}) = \max\limits_{\mathbf{x}} \left(pf(\mathbf{x}) - \sum\limits_{i=1}^{n} w_i x_i\right)$

Задача максимизации прибыли фирмы. p — цена единицы выпускаемой продукции. $\pi(p,\mathbf{w})$ — *функция прибыли.*

25.9 $\pi(p,\mathbf{w}) = \begin{cases} \text{максимальная прибыль есть функция, зависящая от цен} \\ \text{на факторы производства } \mathbf{w} \text{ и цены } p \text{ на выпускаемый продукт.} \end{cases}$

Функция прибыли.

25.10 $\pi(p,\mathbf{w}) \equiv \max\limits_{y} (py - C(\mathbf{w},y))$

Функция прибыли в виде превышения выручки над затратами.

25.11
- $\pi(p,\mathbf{w})$ возрастает по p.
- $\pi(p,\mathbf{w})$ однородна степени 1 по $(p,\mathbf{w})$.
- $\pi(p,\mathbf{w})$ выпукла по $(p,\mathbf{w})$.
- $\pi(p,\mathbf{w})$ непрерывна по $(p,\mathbf{w})$ для $\mathbf{w} > 0$, $p > 0$.

Свойства функции прибыли.

25.12 $x_i(p,\mathbf{w}) = \begin{cases} \text{максимизирующий прибыль вариант выбора } i\text{-го фактора} \\ \text{как функция цены единицы выпускаемой продукции } p \text{ и} \\ \text{цен на факторы производства } \mathbf{w}. \end{cases}$

Функции спроса на факторы. $\mathbf{x}(p,\mathbf{w})$ — тот вектор $\mathbf{x}$, который является оптимальным решением задачи (25.8).

25.13
- $x_i(p,\mathbf{w})$ возрастает по w_i.
- $x_i(p,\mathbf{w})$ однородна степени 0 по $(p,\mathbf{w})$.

Перекрестные ценовые эффекты симметричны:

$$\frac{\partial x_i(p,\mathbf{w})}{\partial w_j} = \frac{\partial x_j(p,\mathbf{w})}{\partial w_i}, \quad i,j = 1,\ldots,n.$$

Свойства функций спроса на факторы производства.

25.14	$y(p,\mathbf{w}) = \begin{cases}\text{выпуск, максимизирующий прибыль, является функцией} \\ \text{цены единицы выпуска } p \text{ и вектора цен на факторы про-} \\ \text{изводства } \mathbf{w}.\end{cases}$	Значением *функции предложения* $y(p,\mathbf{w}) = f(\mathbf{x}(p,\mathbf{w}))$ является тот объем выпуска y, который служит решением задачи (25.10).
25.15	• $y(p,\mathbf{w})$ возрастает по p. • $y(p,\mathbf{w})$ однородна степени 0 по $(p,\mathbf{w})$.	Свойства функции предложения.
25.16	$\dfrac{\partial\pi(p,\mathbf{w})}{\partial p} = y(p,\mathbf{w})$ $\dfrac{\partial\pi(p,\mathbf{w})}{\partial w_i} = -x_i(p,\mathbf{w}), \quad i = 1,\dots,n$	*Лемма Хотеллинга.*
25.17	$\dfrac{\partial x_j(p,\mathbf{w})}{\partial w_k} = \dfrac{\partial x_j^*(\mathbf{w},y)}{\partial w_k} + \dfrac{\dfrac{\partial x_j(p,\mathbf{w})}{\partial p}\dfrac{\partial y(p,\mathbf{w})}{\partial w_k}}{\dfrac{\partial y(p,\mathbf{w})}{\partial p}}$	*Уравнение Пу*, $j,k = 1,\dots,n$ показывает эффекты замены и масштаба при росте цены единицы фактора производства.

ЭЛАСТИЧНОСТЬ ЗАМЕНЫ В ТЕОРИИ ПРОИЗВОДСТВА

25.18	$\sigma_{yx} = \mathrm{El}_{R_{yx}}(\frac{y}{x}) = -\dfrac{\partial\ln\frac{(y}{x)}}{\partial\ln(\frac{p_2}{p_1})}, \quad f(x,y) = c$	*Эластичность замены* одного фактора на другой между y и x, в предположении существования конкуренции на рынке факторов производства. (См. также (5.18).)
25.19	$\sigma_{ij} = -\dfrac{\partial\ln\dfrac{(C_i'(\mathbf{w},y)}{C_j'(\mathbf{w},y))}}{\partial\ln(\dfrac{w_i}{w_j})}, \quad i \neq j$ y, C и w_k (при $k \neq i,j$) — константы.	*Теневая эластичность замены* между факторами i и j.
25.20	$\sigma_{ij} = \dfrac{-\dfrac{C_{ii}''}{(C_i')^2} + \dfrac{2C_{ij}''}{C_i'C_j'} - \dfrac{C_{jj}''}{(C_j')^2}}{\dfrac{1}{w_iC_i'} + \dfrac{1}{w_jC_j'}}, \quad i \neq j$	Альтернативная форма (25.19).

25.21 $A_{ij}(\mathbf{w},y) = \dfrac{C(\mathbf{w},y)C''_{ij}(\mathbf{w},y)}{C'_i(\mathbf{w},y)C'_j(\mathbf{w},y)}, \quad i \neq j$

Эластичность замены по Аллену–Узаве.

25.22 $A_{ij}(\mathbf{w},y) = \dfrac{\varepsilon_{ij}(\mathbf{w},y)}{S_j(\mathbf{w},y)}, \quad i \neq j$

Здесь $\varepsilon_{ij}(\mathbf{w},y)$ представляет собой перекрестную эластичность спроса (при постоянном выпуске), а $S_j(\mathbf{w},y) = p_jC_j(\mathbf{w},y)/C(\mathbf{w},y)$ показывает долю j-го фактора в общих затратах.

25.23
$$M_{ij}(\mathbf{w},y) = \frac{w_iC''_{ij}(\mathbf{w},y)}{C'_j(\mathbf{w},y)} - \frac{w_iC''_{ii}(\mathbf{w},y)}{C'_i(\mathbf{w},y)} = \varepsilon_{ji}(\mathbf{w},y) - \varepsilon_{ii}(\mathbf{w},y), \quad i \neq j$$

Эластичность замены по Моришиме.

25.24 Если $n > 2$, то $M_{ij}(\mathbf{w},y) = M_{ji}(\mathbf{w},y)$ для всех $i \neq j$ тогда и только тогда, когда все $M_{ij}(\mathbf{w},y)$ равны одной и той же константе.

Симметрия эластичности замены по Моришиме

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФОРМЫ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ И ИХ СВОЙСТВА

Функция Кобба–Дугласа

25.25 $y = Ax_1^{a_1}x_2^{a_2}\cdots x_n^{a_n}$

Функция Кобба–Дугласа, определенная для $x_i > 0$, $i = 1,\dots,n$. $a_1,\dots,a_n$ и A — положительные константы.

25.26 Функция Кобба–Дугласа в (25.25) является:

a) однородной степени $a_1 + \cdots + a_n$,
b) квазивогнутой для всех $a_1, \dots, a_n$,
c) вогнутой, если $a_1 + \cdots + a_n \leq 1$,
d) строго вогнутой, если $a_1 + \cdots + a_n < 1$.

Свойства функции Кобба–Дугласа. ($a_1, \dots, a_n$ и A — положительные константы.)

25.27 $x_k^*(\mathbf{w},y) = A^{-\frac{1}{s}}\left(\dfrac{a_k}{w_k}\right)\left(\dfrac{w_1}{a_1}\right)^{\frac{a_1}{s}}\cdots\left(\dfrac{w_n}{a_n}\right)^{\frac{a_n}{s}} y^{\frac{1}{s}}$

Условные функции спроса, где $s = a_1 + \cdots + a_n$.

25.28 $C(\mathbf{w},y) = sA^{-\frac{1}{s}}\left(\dfrac{w_1}{a_1}\right)^{\frac{a_1}{s}}\cdots\left(\dfrac{w_n}{a_n}\right)^{\frac{a_n}{s}} y^{\frac{1}{s}}$

Функция затрат, где $s = a_1 + \cdots + a_n$.

25.29 $$\frac{w_k x_k^*}{C(\mathbf{w}, y)} = \frac{a_k}{a_1 + \cdots + a_n}$$

Доли отдельных факторов в общих затратах.

25.30 $$x_k(p, \mathbf{w}) = \frac{a_k}{w_k}(pA)^{\frac{1}{1-s}} \left(\frac{w_1}{a_1}\right)^{\frac{a_1}{s-1}} \cdots \left(\frac{w_n}{a_n}\right)^{\frac{a_n}{s-1}}$$

Функции спроса на факторы, где $s = a_1 + \cdots + a_n < 1$.

25.31 $$\pi(p, \mathbf{w}) = (1 - s)(pA)^{\frac{1}{1-s}} \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{w_i}{a_i}\right)^{-\frac{a_i}{1-s}}$$

Функция прибыли, где $s = a_1 + \cdots + a_n < 1$. (Если $s = a_1 + \cdots + a_n \geq 1$, то имеет место возрастащая отдача от масштаба и задача максимизации прибыли решения не имеет.)

Функция CES с постоянной эластичностью замены

25.32 $$y = ((a_1 x_1)^e + (a_2 x_2)^e + \cdots + (a_n x_n)^e)^{s/e}$$

Функция CES*, определенная при $x_i > 0$, $i = 1, \ldots, n$. $a_1, \ldots, a_n$ положительны, $e \neq 0$, $s > 0$.

25.33 **Функция CES в (25.32) является:**

a) однородной степени s,

b) вогнутой при $e \leq 1$, $s \in (0, 1]$,

c) квазивогнутой при $e \leq 1$, $s > 1$,

d) квазивыпуклой при $e \geq 1$, $s \in (0, 1]$,

e) выпуклой при $e \geq 1$, $s > 1$.

Свойства функции CES.

25.34 $$x_k^*(\mathbf{w}, y) = \frac{y^{\frac{1}{s}} w_k^{r-1}}{a_k^r} \left[\left(\frac{w_1}{a_1}\right)^r + \cdots + \left(\frac{w_n}{a_n}\right)^r\right]^{-\frac{1}{e}}$$

Условные функции спроса, где $r = e/(e-1)$.

25.35 $$C(\mathbf{w}, y) = y^{\frac{1}{s}} \left[\left(\frac{w_1}{a_1}\right)^r + \cdots + \left(\frac{w_n}{a_n}\right)^r\right]^{\frac{1}{r}}$$

Функция затрат, где $r = e/(e-1)$.

25.36 $$\frac{w_k x_k^*}{C(\mathbf{w}, y)} = \frac{\left(\frac{w_k}{a_k}\right)^r}{\left(\frac{w_1}{a_1}\right)^r + \cdots + \left(\frac{w_n}{a_n}\right)^r}$$

Доля отдельных факторов в общих затратах.

---

* Функция с постоянной эластичностью замены (устоялось название «функция CES» — от *англ.* «constant elasticity of substitution»).

Закон минимума

25.37	$y = \min(a_1 + b_1x_1, \ldots, a_n + b_nx_n)$	Закон минимума. Когда $a_1 = \cdots = a_n = 0$, эта функция называется *функцией Леонтьева*, или *функцией спроса с постоянными коэффициентами*.
25.38	$x_k^*(\mathbf{w}, y) = \dfrac{y - a_k}{b_k}, \quad k = 1, \ldots, n$	Условные функции спроса на факторы.
25.39	$C(\mathbf{w}, y) = \left(\dfrac{y - a_1}{b_1}\right)w_1 + \cdots + \left(\dfrac{y - a_n}{b_n}\right)w_n$	Функция затрат.

Функция затрат Дьюверта (обобщенная функция затрат Леонтьева)

25.40	$C(\mathbf{w}, y) = y \displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}\sqrt{w_iw_j} \quad \text{при } b_{ij} = b_{ji}$	*Функция затрат Дьюверта.*
25.41	$x_k^*(\mathbf{w}, y) = y \displaystyle\sum_{j=1}^{n} b_{kj}\sqrt{w_k/w_j}$	Условные функции спроса на факторы.

Транслогарифмическая функция затрат

25.42	$\ln C(\mathbf{w}, y) = a_0 + c_1 \ln y + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i \ln w_i + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \ln w_i \ln w_j + \sum_{i=1}^{n} b_i \ln w_i \ln y$ Ограничения: $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i = 1, \ \sum_{i=1}^{n} b_i = 0,$ $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 0, \qquad i, j = 1, \ldots, n$	Транслогарифмическая функция затрат. $a_{ij} = a_{ji}$ при всех i и j. Ограничения на коэффициент гарантируют однородность степени 1 для $C(\mathbf{w}, y)$.
25.43	$\dfrac{w_kx_k^*}{C(\mathbf{w}, y)} = a_k + \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{kj} \ln w_j + b_i \ln y$	Доля отдельных факторов в общих затратах.

ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

Основным источником является [86]. Детальное обсуждение предпосылок существования и дифференцируемости см. в [24]. Уравнение Пу (25.17) есть в [40]. Об эластичностях (25.18)–(25.24) см. [7]. Специальные формы производственных функций обсуждаются в [24].

Глава 26

ТЕОРИЯ ПОВЕДЕНИЯ ПОТРЕБИТЕЛЯ

26.1 *Отношение предпочтения* $\succeq$ на множестве X, состоящем из потребительских наборов $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, является бинарным отношением на X в интерпретации

$\mathbf{x} \succeq \mathbf{y}$ означает: набор $\mathbf{x}$ по меньшей мере так же хорош, как и набор $\mathbf{y}$.

Определение отношения предпочтения. О бинарных отношениях см. (1.16).

26.2 Отношения, производные от $\succeq$:

- $\mathbf{x} \sim \mathbf{y} \iff \mathbf{x} \succeq \mathbf{y}$ и $\mathbf{y} \succeq \mathbf{x}$
- $\mathbf{x} \succ \mathbf{y} \iff \mathbf{x} \succeq \mathbf{y}$ но не $\mathbf{y} \succeq \mathbf{x}$

Отношение безразличия $\mathbf{x} \sim \mathbf{y}$ читается «товар $\mathbf{x}$ *индифферентен* товару $\mathbf{y}$» (потребителю все равно, какой из них выбрать), а $\mathbf{x} \succ \mathbf{y}$ читается «товар $\mathbf{x}$ *(строго) более предпочтителен*, чем $\mathbf{y}$».

26.3

- Функция $u : X \to \mathbb{R}$ является *функцией полезности, представляющей отношение предпочтения* $\succeq$, если
$$\mathbf{x} \succeq \mathbf{y} \iff u(\mathbf{x}) \geq u(\mathbf{y}).$$
- Для любой строго возрастающей функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $u^*(\mathbf{x}) = f(u(\mathbf{x}))$ является новой функцией полезности, представляющей те же самые предпочтения, что и $u(\cdot)$.

Такое свойство функции полезности, которое инвариантно при любом строго возрастающем преобразовании, называется *ординальным*. *Кардинальными* являются те свойства, которые *не* сохраняются при строго возрастающих преобразованиях.

26.4 Пусть $\succeq$ является полным, рефлексивным и транзитивным отношением предпочтения, которое также *непрерывно* в том смысле, что множества $\{\mathbf{x} : \mathbf{x} \succeq \mathbf{x}^0\}$ и $\{\mathbf{x} : \mathbf{x}^0 \succeq \mathbf{x}\}$ замкнуты оба при $\mathbf{x}^0$ из X. Тогда найдется непрерывная функция полезности, представляющая $\succeq$.

Существование непрерывной функции полезности. Свойства отношений см. в (1.16).

26.5 Задача *максимизации полезности* при бюджетном ограничении:

$$\max_{\mathbf{x}} u(\mathbf{x}) \text{ при условии } \mathbf{p} \cdot \mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i = m.$$

$\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ — вектор (количества) товаров, $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_n)$ — вектор цен товаров, m — доход, а u — функция полезности.

26.6 $$v(\mathbf{p}, m) = \max_{\mathbf{x}}\{u(\mathbf{x}) : \mathbf{p} \cdot \mathbf{x} = m\}$$

Косвенная функция полезности, $v(\mathbf{p}, m)$, дает функциональную зависимость максимальной полезности от вектора цен $\mathbf{p}$ и дохода m.

26.7
- $v(\mathbf{p}, m)$ возрастает по $\mathbf{p}$.
- $v(\mathbf{p}, m)$ возрастает по m.
- $v(\mathbf{p}, m)$ однородна степени 0 по $(\mathbf{p}, m)$.
- $v(\mathbf{p}, m)$ квазивыпукла по $\mathbf{p}$.
- $v(\mathbf{p}, m)$ непрерывна по $(\mathbf{p}, m)$, $\mathbf{p} > \mathbf{0}$, $m > 0$.

Свойства косвенной функции полезности.

26.8 $$\omega = \frac{u_1'(\mathbf{x})}{p_1} = \cdots = \frac{u_n'(\mathbf{x})}{p_n}$$

Условия первого порядка для задачи (26.5), где ω — соответствующий множитель Лагранжа.

26.9 $$\omega = \frac{\partial v(\mathbf{p}, m)}{\partial m}$$

ω называется *предельной полезностью денег*.

26.10 $x_i(\mathbf{p}, m) =$ оптимальный выбор количества i-го товара как функция вектора цен $\mathbf{p}$ и величина дохода m.

Функции спроса потребителя, или *функции спроса по Маршаллу*, выведенные из задачи (26.5).

26.11 $$\mathbf{x}(t\mathbf{p}, tm) = \mathbf{x}(\mathbf{p}, m),$$
t — положительное число.

Функции спроса однородны степени 0.

26.12 $$x_i(\mathbf{p}, m) = -\frac{\dfrac{\partial v(\mathbf{p}, m)}{\partial p_i}}{\dfrac{\partial v(\mathbf{p}, m)}{\partial m}}, \quad i = 1, \ldots, n$$

Равенство Роя.

26.13	$e(\mathbf{p}, u) = \min\limits_{\mathbf{x}}\{\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} : u(\mathbf{x}) \geq u\}$	***Функция издержек***, $e(\mathbf{p}, u)$ дает значение минимальных издержек, необходимых для достижения при ценах p уровня полезности, по меньшей мере равного u.
26.14	• $e(\mathbf{p}, u)$ возрастает по $\mathbf{p}$. • $e(\mathbf{p}, u)$ однородна степени 1 по $\mathbf{p}$. • $e(\mathbf{p}, u)$ вогнута по $\mathbf{p}$. • $e(\mathbf{p}, u)$ непрерывна по $\mathbf{p}$ при $\mathbf{p} > \mathbf{0}$.	Свойства функции издержек.
26.15	$\mathbf{h}(\mathbf{p}, u) = \begin{cases} \text{минимизирующий издержки набор, необходимый для до-} \\ \text{стижения уровня полезности} \\ u \text{ при ценах } \mathbf{p}. \end{cases}$	***Функция спроса по Хиксу (или компенсационная функция спроса)***. $\mathbf{h}(\mathbf{p}, u)$ — тот вектор $\mathbf{x}$, который является решением задачи $\min\limits_{\mathbf{x}}\{\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} : u(\mathbf{x}) \geq u\}$.
26.16	$\dfrac{\partial e(\mathbf{p}, u)}{\partial p_i} = h_i(\mathbf{p}, u) \quad \text{при} \quad i = 1, \ldots, n$	Связь между функциями издержек и спроса по Хиксу.
26.17	$\dfrac{\partial h_i(\mathbf{p}, u)}{\partial p_j} = \dfrac{\partial h_j(\mathbf{p}, u)}{\partial p_i}, \quad i, j = 1, \ldots, n$	Симметрия перекрестных частных производных функции спроса по Хиксу. (***Перекрестные частные производные функции спроса по Маршаллу*** не обязательно симметричны.)
26.18	Матрица $\left(\dfrac{\partial h_i(\mathbf{p}, u)}{\partial p_j}\right)_{n \times n}$ отрицательно полуопределена.	Следует из (26.16) и вогнутости функции издержек.
26.19	$e(\mathbf{p}, v(\mathbf{p}, m)) = m : \begin{cases} \text{минимальные издержки, необходимые для} \\ \text{достижения полезности } v(\mathbf{p}, m)\text{, равны до-} \\ \text{ходу } m. \end{cases}$	Полезные равенства, которые верны почти всегда, кроме специальных исключительных случаев.

26.20 $v(\mathbf{p}, e(\mathbf{p}, u)) = u$: $\left\{\begin{array}{l}\text{максимальная полезность, которую можно}\\ \text{извлечь, распорядившись доходом } e(\mathbf{p}, u),\\ \text{равна } u.\end{array}\right.$

Полезные равенства.

26.21 Спрос по Маршаллу при величине дохода m совпадает со спросом по Хиксу при уровне полезности $v(\mathbf{p}, m)$:

$$x_i(\mathbf{p}, m) = h_i(\mathbf{p}, v(\mathbf{p}, m)).$$

26.22 Спрос по Хиксу при уровне полезности u совпадает со спросом по Маршаллу при величине дохода $e(\mathbf{p}, u)$:

$$h_i(\mathbf{p}, u) = x_i(\mathbf{p}, e(\mathbf{p}, u)).$$

26.23
- $e_{ij} = \mathrm{El}_{p_j}\, x_i = \dfrac{p_j}{x_i}\dfrac{\partial x_i}{\partial p_j}$ *(эластичности Курно)*.
- $E_i = \mathrm{El}_m\, x_i = \dfrac{m}{x_i}\dfrac{\partial x_i}{\partial m}$ *(эластичности Энгеля)*.
- $S_{ij} = \mathrm{El}_{p_j}\, h_i = \dfrac{p_j}{x_i}\dfrac{\partial h_i}{\partial p_j}$ *(эластичности Слуцкого)*.

e_{ij} — эластичности спроса по ценам, E_i — эластичности спроса по доходу, а S_{ij} — эластичности спроса по Хиксу по ценам.

26.24
- $\dfrac{\partial x_i(\mathbf{p}, m)}{\partial p_j} = \dfrac{\partial h_i(\mathbf{p}, u)}{\partial p_j} - x_j(\mathbf{p}, m)\dfrac{\partial x_i(\mathbf{p}, m)}{\partial m}$
- $S_{ij} = e_{ij} + a_j E_i, \quad a_j = p_j x_j / m$

Две эквивалентные друг другу формы *уравнения Слуцкого*.

26.25 Следующие $\frac{1}{2}n(n+1)+1$ ограничения на частные производные функций спроса линейно независимы:

a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial x_i(\mathbf{p}, m)}{\partial m} = 1$

b) $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} p_j \frac{\partial x_i}{\partial p_j} + m\frac{\partial x_i}{\partial m} = 0, \quad i = 1, \dots, n$

c) $\dfrac{\partial x_i}{\partial p_j} + x_j\dfrac{\partial x_i}{\partial m} = \dfrac{\partial x_j}{\partial p_i} + x_i\dfrac{\partial x_j}{\partial m}$

при $1 \le i < j \le n$

a) представляет собой бюджетное ограничение, продифференцированное по доходу m.
b) есть уравнение Эйлера (для однородных функций), записанное для функции потребительского спроса.
c) является следствием из уравнения Слуцкого и (26.17).

26.26 $EV = e(\mathbf{p}^0, v(\mathbf{p}^1, m^1)) - e(\mathbf{p}^0, v(\mathbf{p}^0, m^0))$

EV является разницей между денежной суммой, необходимой для достижения нового (период 1) уровня полезности при прежних ценах (период 0), и денежной суммой, необходимой для достижения прежнего уровня полезности при прежних ценах.

Эквивалентное изменение. **$\mathbf{p}^0$, m^0 и $\mathbf{p}^1$, m^1 — цены и доходы в периоды 0 и 1 соответственно. ($e(\mathbf{p}^0, v(\mathbf{p}^0, m^0)) = m^0$.)**

26.27 $CV = e(\mathbf{p}^1, v(\mathbf{p}^1, m^1)) - e(\mathbf{p}^1, v(\mathbf{p}^0, m^0))$

CV является разницей между денежной суммой, необходимой для достижения нового (период 1) уровня полезности при новых ценах, и денежной суммой, необходимой для достижения прежнего (период 0) уровня полезности при новых ценах.

Компенсирующее изменение. **$\mathbf{p}^0$, m^0 и $\mathbf{p}^1$, m^1 — цены и доход в периоды 0 и 1, соответсвтенно. ($e(\mathbf{p}^1, v(\mathbf{p}^1, m^1)) = m^1$.)**

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФОРМЫ ФУНКЦИЙ ПОЛЕЗНОСТИ И ИХ СВОЙСТВА

Модель с линейными издержками*

26.28 $$u(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^{n}(x_i - c_i)^{\beta_i}, \qquad \beta_i > 0$$

Функция полезности *Стоуна–Гири*. Если $c_i = 0$ для всех i, то $u(\mathbf{x})$ является функцией Кобба–Дугласа.

26.29 $$x_i(\mathbf{p}, m) = c_i + \frac{1}{p_i}\frac{\beta_i}{\beta}\left(m - \sum_{i=1}^{n} p_i c_i\right)$$

Функции спроса. $\beta = \sum_{i=1}^{n} \beta_i$.

26.30 $$v(\mathbf{p}, m) = \beta^{-\beta}\left(m - \sum_{i=1}^{n} p_i c_i\right)^{\beta} \prod_{i=1}^{n}\left(\frac{\beta_i}{p_i}\right)^{\beta_i}$$

Функция косвенной полезности.

26.31 $$e(\mathbf{p}, u) = \sum_{i=1}^{n} p_i c_i + \frac{\beta u^{1/\beta}}{\left[\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{\beta_i}{p_i}\right)^{\beta_i}\right]^{1/\beta}}$$

Функция издержек.

* Устоялось обозначение LES — от *англ.* «linear expenditure system».

Модель с почти идеальным спросом *

26.32	$\ln(e(\mathbf{p},u)) = a(\mathbf{p}) + ub(\mathbf{p})$ $a(\mathbf{p}) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \ln p_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \gamma_{ij}^* \ln p_i \ln p_j$ $b(\mathbf{p}) = \beta_0 \prod_{i=1}^{n} p_i^{\beta_i}$ Ограничения: $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$, $\sum_{i=1}^{n} \beta_i = 0$, и $\sum_{i=1}^{n} \gamma_{ij}^* = \sum_{j=1}^{n} \gamma_{ij}^* = 0$.	Модель с почти идеальным спросом, определенная через логарифм функции издержек. Ограничения делают функцию издержек $e(\mathbf{p},u)$ однородной степени 1 по $\mathbf{p}$.
26.33	$x_i(\mathbf{p},m) = \frac{m}{p_i}\Big(\alpha_i + \sum_{j=1}^{n} \gamma_{ij} \ln p_j + \beta_i \ln(\frac{m}{P})\Big)$, где индекс цен P задан соотношением $\ln P = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \ln p_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \gamma_{ij} \ln p_i \ln p_j$ при $\gamma_{ij} = \frac{1}{2}(\gamma_{ij}^* + \gamma_{ji}^*) = \gamma_{ji}$	Функции спроса.

Транслогарифмическая косвенная функция полезности

26.34	$\ln v(\mathbf{p},m) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \ln\Big(\frac{p_i}{m}\Big) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \beta_{ij}^* \ln\Big(\frac{p_i}{m}\Big) \ln\Big(\frac{p_j}{m}\Big)$	Транслогарифмическая косвенная функция полезности.
26.35	$x_i(\mathbf{p},m) = \frac{m}{p_i}\left(\frac{\alpha_i + \sum_{j=1}^{n} \beta_{ij} \ln(p_j/m)}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i + \sum_{i,j=1}^{n} \beta_{ij}^* \ln(p_i/m)}\right)$, где $\beta_{ij} = \frac{1}{2}(\beta_{ij}^* + \beta_{ji}^*)$.	Функции спроса.

* Устоялось обозначение AIDS — от *англ.* «almost ideal demand system».

ИНДЕКСЫ ЦЕН

26.36 Рассмотрим «корзину» из n товаров. Определим при $i = 1, \dots, n$,

$q^{(i)}$ = число единиц i-го товара в корзине,

$p_0^{(i)}$ = цена единицы i-го товара в году 0,

$p_t^{(i)}$ = цена единицы i-го товара в году t.

Индекс цен, P на год t по сравнению с годом 0, взятым как базовый для сравнения, определяется по формуле

$$P = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_t^{(i)} q^{(i)}}{\sum_{i=1}^{n} p_0^{(i)} q^{(i)}} \cdot 100$$

Самое распространенное определение индекса цен. P равен произведению числа 100 на затраты на приобретение потребительской корзины в году t, деленному на затраты на приобретение той же самой потребительской корзины в году 0. (При более общем подходе индекс изменения (потребительских) цен можно определить, используя такую функцию цен на все товары $P(p_1, \dots, p_n)$, которая однородна степени 1 и возрастает по каждой переменной.)

26.37

- Если количества $q^{(i)}$ в выражении индекса цен P представляют собой уровни потребления отдельных товаров в базовом году 0, то P называется *индексом цен Ласпейреса*.
- Если количества $q^{(i)}$ являются уровнями потребления в году t, то P называется *индексом цен Пааше*.

Две важные формы индекса цен.

26.38 $F = \sqrt{(\text{индекс Ласпейреса}) \cdot (\text{индекс Пааше})}$

Идеальный индекс цен Фишера.

ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

Основными пособиями служат [86] и [71]. Углубленное изложение этих вопросов дается в [59]. Модель с почти идеальным спросом есть в [12], транслогистическая — в [11]. См. также [65].

Глава 27

СВЕДЕНИЯ ИЗ ФИНАНСОВ И ТЕОРИИ РОСТА

27.1 $S_t = S_{t-1} + rS_{t-1} = (1+r)S_{t-1}, \quad t = 1, 2, \ldots$

Исходная сумма S_{t-1}, будучи положенной в банк по ставке процента r, по истечении одного расчетного периода вырастет до суммы S_t.

27.2 *Наращенная сумма (будущая стоимость)* S_t *исходной* S_0 к концу t периодов начисления процентов по ставке r при капитализации процентов в конце каждого периода равна

$$S_t = S_0(1+r)^t.$$

Сложные проценты. (Решение дифференциального уравнения (27.1).)

27.3 Та исходная денежная сумма S_0, которую нужно сегодня пустить в рост под проценты по ставке r с увеличением начисления в конце каждого периода на сумму начисленных процентов для того, чтобы по истечении t расчетных периодов наращенная сумма составила S_t, задается выражением

$$S_0 = S_t(1+r)^{-t}.$$

S_0 называется *текущей стоимостью* будущей суммы S_t.

27.4 Если капитализация процентов происходит регулярно по истечении равных периодов времени n раз в год по ставке r/n за каждый такой период внутри года, то эффективная доходность составляет

$$\left(1 + \frac{r}{n}\right)^n - 1.$$

Эффективный годовой процент.

27.5
$$A_t = \frac{R}{(1+r)^1} + \frac{R}{(1+r)^2} + \dots + \frac{R}{(1+r)^t} = R\frac{1-(1+r)^{-t}}{r}$$

Текущая стоимость A_t ***аннуитета*** **(постоянной финансовой ренты) с выплатой в каждом периоде сумм одинакового размера** R **на протяжении** t **расчетных перидов с начислением процентов по ставке** r **за период между платежами.**

27.6 **Текущая стоимость** A **аннуитета с выплатой суммы** R **за каждый период при бесконечном числе процентных периодов по ставке** r **за один период составляет**
$$A = \frac{R}{(1+r)^1} + \frac{R}{(1+r)^2} + \dots = \frac{R}{r}.$$

Текущая стоимость бессрочного аннуитета (вечной ренты).

27.7
$$T = \frac{\ln\left(\dfrac{R}{R-rA}\right)}{\ln(1+r)}$$

Число периодов T**, за которые можно вернуть долг исходного размера** A**, внося периодически платежи одинакового размера** R **с учетом начисления на остаток долга процентов по ставке** r **за период между платежами.**

27.8
$$S_t = (1+r)S_{t-1} + (y_t - x_t), \quad t = 1, 2, \dots$$

На банковском счете с процентной ставкой r **за выбранный расчетный период сумма** S_{t-1} **увеличивается через один период до суммы** S_t**, если** y_t **— поступления средств, а** x_t **— изъятия, относящиеся к периоду** t**.**

27.9
$$S_t = (1+r)^t S_0 + \sum_{k=1}^{t}(1+r)^{t-k}(y_k - x_k)$$

Решение уравнения (27.8).

27.10
$$S_t = (1+r_t)S_{t-1} + (y_t - x_t), \quad t = 1, 2, \dots$$

Обобщение формулы (27.8) на случай переменной процентной ставки, r_t**.**

27.11 $D_k = \dfrac{1}{\prod_{s=1}^{k}(1+r_s)}$

Множитель дисконтирования, соответствующий (27.10). (Приведение денежных сумм будущих k периодов к более раннему периоду 0.)

27.12 $R_k = \dfrac{D_k}{D_t} = \prod_{s=k+1}^{t}(1+r_s)$

Множитель наращения, соответствующий (27.10).

27.13 $S_t = R_0 S_0 + \sum_{k=1}^{t} R_k(y_k - x_k)$

Решение (27.10). R_k определены в (27.12). (Обобщает формулу (27.9).)

27.14 $a_0 + \dfrac{a_1}{1+r} + \dfrac{a_2}{(1+r)^2} + \cdots + \dfrac{a_n}{(1+r)^n} = 0$

r является ***внутренней нормой доходности*** денежного потока инвестиционного проекта. Отрицательные a_t представляют собой отток денежных средств, а положительные a_t — поступления в период времени t.

27.15 Если $a_0 < 0$ и $a_1, \ldots, a_n$ все ≥ 0, то неявное уравнение (27.14) имеет единственное решение $1 + r^* > 0$, т. е. единственное значение внутренней нормы доходности, равное $r^* > -1$. Внутренняя норма доходности положительна при условии $\sum_{i=0}^{n} a_i > 0$.

Следствие правила знаков Декарта (2.12).

27.16 $A_0 = a_0,\ A_1 = a_0 + a_1,\ A_2 = a_0 + a_1 + a_2,\ \ldots,$ $A_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$

Аккумулированный денежный поток для (27.14).

27.17 Если $A_n \neq 0$, и последовательность

$$A_0, A_1, \ldots, A_n$$

меняет знак только один раз, то денежный поток (27.14) имеет единственное и положительное значение внутренней нормы доходности.

Правило Норстрёма.

27.18	Состояние банковского счета через t лет при условии, что первоначально вложенный капитал размером K долларов работает с непрерывным начислением сложных процентов по ставке r, есть Ke^{rt}.	*Непрерывные сложные проценты.*
27.19	Эффективный годовой процент при непрерывной капитализации процентов, начисляемых по ставке r, равен $e^r - 1$.	*Эффективный годовой процент* при непрерывной капитализации.
27.20	$Ke^{-rt}, \quad r = p/100$	*Текущая стоимость* (при непрерывной капитализации) денежной суммы K, причитающейся через t лет, если процентная ставка равна $p\,\%$ в год.
27.21	Дисконтированная к моменту времени 0 текущая стоимость непрерывного потока доходов со скоростью $K(t)$ долларов в год на протяжении интервала времени $[0,T]$, при условии непрерывной капитализации процентов по ставке r, составляет $\int_0^T K(t)e^{-rt}\,dt.$	*Дисконтированный доход (текущая стоимость)* при непрерывной капитализации.
27.22	Дисконтированная к моменту времени s стоимость непрерывного потока доходов со скоростью $K(t)$ долларов в год на протяжении интервала времени $[s,T]$, при условии непрерывной капитализации процентов по ставке r, составляет $\int_s^T K(t)e^{-r(t-s)}\,dt.$	*Дисконтированный доход (текущая стоимость)* при непрерывной капитализации.
27.23	*Модель роста Солоу:* • $X(t) = F(K(t), L(t))$ • $\dot{K}(t) = sX(t)$ • $L(t) = L_0 e^{\lambda t}$	$X(t)$ — национальный доход, $K(t)$ — капитал, а $L(t)$ — рабочая сила в момент времени t. F является производственной функцией. s (норма сбережений), λ и L_0 — положительные числа.

27.24 Если F однородна степени 1, $k(t) = K(t)/L(t)$ представляет собой капитал на одного рабочего, а $f(k) = F(k, 1)$, тогда (27.23) приводится к виду

$$\dot{k} = sf(k) - \lambda k, \quad k(0) \text{ задан.}$$

Упрощенная версия (27.23).

27.25 Если $\lambda/s < f'(0) < \infty, f'(k) \to 0$ при $k \to \infty$, а $f''(k) \leq 0$ для всех $k \geq 0$, тогда уравнение (27.24) имеет единственное решение на $[0, \infty)$. Это решение k^*, определелеяемое выражением

$$sf(k^*) = \lambda k^*,$$

является устойчивым положением равновесия.

Существование и единственность решения на $[0, \infty)$ следует из (11.41).

27.26 *Модель роста Рамсея:*

$$\max \int_0^T U(C(t))e^{-rt}\,dt \quad \text{при ограничениях}$$

$$C(t) = f(K(t)) - \dot{K}(t),$$

$$K(0) = K_0, \quad K(T) \geq K_1.$$

Стандартная задача теории роста. U — функция полезности, $K(t)$ — капитал, имеющийся в наличии в момент времени t, $f(K)$ — производственная функция, $C(t)$ — потребление, r — норма дисконтирования, T — плановый горизонт.

27.27 $$\ddot{K} - f'(K)\dot{K} + \frac{U'(C)}{U''(C)}(r - f'(K)) = 0$$

Уравнение Эйлера для задачи

27.28 $$\frac{\dot{C}}{C} = \frac{r - f'(K)}{\check{w}}, \text{ где}$$

$$\check{w} = \mathrm{El}_C\, U'(C) = CU''(C)/U'(C)$$

Необходимое условие разрешимости задачи (27.26)

ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

См. формулы сложных процентов в [30] или [81]. Правило (27.17) есть в [63]. По теории роста читайте [10], [8] или [1].

Глава 28

РИСК И ТЕОРИЯ НЕСКЛОННОСТИ К РИСКУ

28.1 $R_A = -\dfrac{u''(y)}{u'(y)}, \qquad R_R = yR_A = -\dfrac{yu''(y)}{u'(y)}$

Абсолютная несклонность к риску (R_A) и *относительная несклонность к риску* (R_R). $u(y)$ — функция полезности, y — доход, или потребление.

28.2

- $R_A = \lambda \;\Leftrightarrow\; u(y) = A_1 + A_2 e^{-\lambda y}$
- $R_R = k \;\Leftrightarrow\; u(y) = \begin{cases} A_1 + A_2 \ln y, & \text{если } k = 1 \\ A_1 + A_2 y^{1-k}, & \text{если } k \neq 1 \end{cases}$

Характеристика функций полезности с постоянным абсолютной и относительной несклонностью к риску соответственно. A_1 и A_2 постоянны, $A_2 \neq 0$.

28.3

- $u(y) = y - \frac{1}{2}by^2 \;\Rightarrow\; R_A = \dfrac{b}{1-by}$
- $u(y) = \dfrac{1}{b-1}(a+by)^{1-\frac{1}{b}} \;\Rightarrow\; R_A = \dfrac{1}{a+by}$

Выражения несклонности к риску для двух специальных форм функции полезности.

28.4

$$E[u(y+z+\pi)] = E[u(y)]$$
$$\pi \approx -\frac{u''(y)}{u'(y)}\frac{\sigma^2}{2} = R_A\frac{\sigma^2}{2}$$

Премия за риск Эрроу–Пратта. π — премия за риск. z — проект с риском, математическое ожидание которого равно нулю. $\sigma^2 = \mathrm{var}[z]$ — дисперсия z. $E[\ ]$ — математическое ожидание. (Математическое ожидание и дисперсия определены далее, в главе 31.)

Если F и G — кумулятивные функции распределения случайной величины дохода, то

28.5 F является *стохастической доминантой первой степени* для G

$\iff$ $G(Z) \geq F(Z)$ для всех Z из I.

Определение стохастического доминирования первой степени (СД1). I — замкнутый интервал $[Z_1, Z_2]$. Для $Z \leq Z_1$, $F(Z) = G(Z) = 0$ и для $Z \geq Z_2$, $F(Z) = G(Z) = 1$.

28.6 F СД1 $G \iff \begin{cases} E_F[u(Z)] \geq E_G[u(Z)] \\ \text{для всех возрастающих } u(Z). \end{cases}$

Важный результат. СД1 означает «стохастическое доминирование первой степени». $E_F[u(Z)]$ — ожидаемое значение полезности дохода Z, когда кумулятивной функцией распределения его случайного значения является $F(Z)$. $E_G[u(Z)]$ определяется аналогично.

28.7 $T(Z) = \int_{Z_1}^{Z} (G(z) - F(z))\, dz$

Определение, используемое в (28.8).

28.8 F является *стохастической доминантой второй степени для* G

$\iff$ $T(Z) \geq 0$ для всех Z из I.

Определение стохастического доминирования второй степени (СД2). $I = [Z_1, Z_2]$. Заметим, что СД1 $\Rightarrow$ СД2.

28.9 F СД2 $G \iff \begin{cases} E_F[u(Z)] \geq E_G[u(Z)] \text{ для} \\ \text{всех возрастающих и вогнутых } u(Z). \end{cases}$

Теорема Адара–Расселла. Каждый несклонный к риску участник рынка предпочитает доход с распределением F, а не G тогда и только тогда, когда F СД2 G.

Пусть F и G — функции распределения для X и Y соответственно, положим $I = [Z_1, Z_2]$ и возьмем $T(Z)$ в соответствии с определением в (28.7). Тогда эквивалентны следующие утверждения:

28.10
- $T(Z_2) = 0$ и $T(Z) \geq 0$ для всех Z из I,
- найдется такая стохастическая переменная ε с математическим ожиданием $E[\varepsilon \mid X] = 0$ для всех X, что Y распределена так же, как $X + \varepsilon$,
- распределения F и G имеют одинаковые средние, и все несклонные к риску участники рынка предпочитают F, а не G.

Теорема Ротшильда–Штиглица.

ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

См. [43], [32], а также [68].

Глава 29

ФИНАНСЫ И СТОХАСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

*Связь доходности и риска финансового актива в модели ценообразования CAPM**:

29.1 $$E[r_i] = r + \beta_i(E[r_m] - r)$$

где $\beta_i = \dfrac{\mathrm{corr}(r_i, r_m)\sigma_i}{\sigma_m} = \dfrac{\mathrm{cov}(r_i, r_m)}{\sigma_m^2}$.

r_i — доходность актива i. $E[r_k]$ — ожидаемое значение r_k. r — доходность безрискового актива. r_m — доходность рынка. σ_i — стандартное отклонение величины r_i.

Уравнение с β-коэффициентом в модели ценообразования, где доходность зависит от колебаний индивидуального потребления:

29.2 $$E(r_i) = r + \frac{\beta_{ic}}{\beta_{mc}}(E(r_m) - r),$$

где $\beta_{jc} = \dfrac{\mathrm{cov}(r_j, d\ln C)}{\mathrm{var}(d\ln C)}$, $j = i$ или m.

C — потребление. r_m — доходность произвольно выбранного портфеля. $d\ln C$ — стохастический логарифмичсекий дифференциал. (См. (29.13).)

Модель цены опциона Блэка–Шоулза. (Европейский или американский опцион call** на акцию без выплаты дивидендов):

29.3 $$c = c(S, K, t, r, \sigma) = SN(x) - KN(x - \sigma\sqrt{t})e^{-rt},$$

где $x = \dfrac{\ln(S/K) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)t}{\sigma\sqrt{t}}$

и $N(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{y} e^{-z^2/2}\,dz$ — кумулятивная функция нормального распределения.

c — стоимость опциона S в момент времени t. S — подразумеваемая цена акции, $dS/S = \alpha\,dt + \sigma\,dB$, где B — (стандартное) броуновское движение, α — параметр дрейфа. σ — *волатильность* (измеряет отклонение от среднего). t — остаток времени до погашения. r — процентная ставка. K — цена проведения сделки.

---

* От *англ.* «capital asset pricing model»

** Опцион call — право на покупку, опцион put — право на продажу.

- $\partial c/\partial S = N(x) > 0$
- $\partial c/\partial K = -N(x - \sigma\sqrt{t})e^{-rt} < 0$

29.4
- $\partial c/\partial t = \dfrac{\sigma}{2\sqrt{t}} SN'(x) + re^{-rt}KN(x - \sigma\sqrt{t}) > 0$
- $\partial c/\partial r = tKN(x - \sigma\sqrt{t})e^{-rt} > 0$
- $\partial c/\partial \sigma = SN'(x)\sqrt{t} > 0$

Математические результаты, полезные для анализа чувствительности в модели Блэка–Шоулза. (Соответствующие результаты для обобщенной модели Блэка–Шоулза (29.5) даны в [36, приложение В].)

29.5 *Обобщенная модель Блэка-Шоулза*, учитывающая *стоимость доставки* b (применяется в ценообразовании на европейские опционы на покупку (c) и продажу (p) финансовых активов с непрерывно выплачиваемым дивидендным доходом, опционы на фьючерсы и валютные опционы):

$$c = SN(x)e^{(b-r)t} - KN(x - \sigma\sqrt{t})\,e^{-rt},$$

$$p = KN(\sigma\sqrt{t} - x)e^{-rt} - SN(-x)e^{(b-r)t},$$

где $x = \dfrac{\ln(S/K) + (b + \frac{1}{2}\sigma^2)t}{\sigma\sqrt{t}}$.

b — норма затрат на доставку ценной бумаги покупателю. $b = r$ задает модель Блэка–Шоулза. $b = r - q$ задает модель Мертона для опциона на акцию с непрерывно выплачиваемым дивидендным доходом q. $b = 0$ задает модель Блэка для опциона на фьючерс.

29.6 $p = c - Se^{(b-r)t} + Ke^{-rt}$

Паритет put-call для обобщенной модели Блэка–Шоулза.

29.7 $P(S, K, t, r, b, \sigma) = C(K, S, t, r - b, -b, \sigma)$

Преобразование, дающее выражение цены американского опциона put (право на продажу) P через соответствующий опцион call C.

Рыночная стоимость *американского бессрочного опциона put* без дивидендов на продаваемую акцию:

29.8
$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{K}{1+\gamma}\left(\dfrac{x}{c}\right)^{-\gamma}, & \text{если } x \geq c, \\ K - x, & \text{если } x < c, \end{cases}$$

где $c = \dfrac{\gamma K}{1+\gamma}$, $\gamma = \dfrac{2r}{\sigma^2}$.

x — текущая цена. c — цена вызова. r — процентная ставка. K — цена проведения сделки. σ — волатильность.

29.9 $X_t = X_0 + \int_0^t u(s,\omega)\,ds + \int_0^t v(s,\omega)\,dB_s$,
где $P[\int_0^t v(s,\omega)^2\,ds < \infty$ для всехl $t \geq 0] = 1$ и $P[\int_0^t |u(s,\omega)|\,ds < \infty$ для всех $t \geq 0] = 1$. Как u, так и v адаптированы к фильтрации $\{\mathcal{F}_t\}$, где B_t является *$\mathcal{F}_t$-броуновским движением*.

X_t, по определению, есть *стохастический интеграл* одной переменной.

29.10 $dX_t = u\,dt + v\,dB_t$

Дифференциальная форма (29.9).

29.11 Если $dX_t = u\,dt + v\,dB_t$ и $Y_t = g(X_t)$, где g принадлежит классу гладкости C^2, то

$$dY_t = (g'(X_t)u + \tfrac{1}{2}g''(X_t)v^2)\,dt + g'(X_t)v\,dB_t$$

Формула Ито (для одной переменной).

29.12 $dt \cdot dt = dt \cdot dB_t = dB_t \cdot dt = 0, \quad dB_t \cdot dB_t = dt$

Полезные соотношения.

29.13

$$d\ln X_t = \left(\frac{u}{X_t} - \frac{v^2}{2X_t^2}\right)dt + \frac{v}{X_t}\,dB_t$$

$$de^{X_t} = \left(e^{X_t}u + \frac{1}{2}e^{X_t}v^2\right)dt + e^{X_t}v\,dB_t$$

Два частных случая (29.11).

29.14

$$\begin{pmatrix} dX_1 \\ \vdots \\ dX_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} v_{11} & \dots & v_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ v_{n1} & \dots & v_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dB_1 \\ \vdots \\ dB_m \end{pmatrix}$$

Векторная версия записи (29.10), где $B_1, \dots, B_m$ — m независимых одномерных броуновских движения.

29.15 Если $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_k) = \mathbf{g}(t, \mathbf{X})$, где $\mathbf{g} = (g_1, \dots, g_k)$ — C^2-функция, то при $r = 1, \dots, k$

$$dY_r = \frac{\partial g_r(t,\mathbf{X})}{\partial t}\,dt + \sum_{i=1}^n \frac{\partial g_r(t,\mathbf{X})}{\partial x_i}\,dX_i + {} + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 g_r(t,\mathbf{X})}{\partial x_i \partial x_j}\,dX_i\,dX_j,$$

где $dt \cdot dt = dt \cdot dB_i = 0$ и $dB_i \cdot dB_j = dt$, если $i = j$, 0, если $i \neq j$.

n-мерный вариант *формулы Ито*.

29.16 $J(t,x) = \max_u E^{t,x}[\int_t^T e^{-rs}W(s, X_s, u_s)\,ds]$,
где T фиксировано, $u_s \in U$, U — фиксированный интервал, и

$$dX_t = b(t, X_t, u_t)\,dt + \sigma(t, X_t, u_t)\,dB_t.$$

Стохастическая задача управления. J — функция наилучшего значения, u_t — управление. $E^{t,x}$ является ожидаемым значением при начальном условии $X_t = x$.

29.17	$$-J'_t(t,x) = \max_{u\in U}[W(t,x,u) + J'_x(t,x)b(t,x,u) + \tfrac{1}{2}J''_{xx}(t,x)(\sigma(t,x,u))^2]$$	*Уравнение Гамильтона–Якоби–Беллмана.* Необходимое условие оптимальности в задаче (29.16).

ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

Формулы (29.1) и (29.2) см. в книге [74]. (29.3) — в статье [6]. Формулу (29.5) и многие другие модели ценообразования для опционов, а также подробный список литературы и программный код для выполнения расчетов на компьютере даны в [36]. О модели (29.8) см. [60]. Стохастический анализ и стохастическая теория управления излагаются в [89], [20], а также в [49].

Глава 30

НЕКООПЕРАТИВНАЯ ТЕОРИЯ ИГР

30.1 В игре n лиц каждому i-му игроку ($i = 1,\ldots,n$) соответствует *множество стратегий* S_i и функция выигрыша в чистых стратегиях u_i, приносящая i-му игроку полезность $u_i(\mathbf{s}) = u_i(s_1,\ldots,s_n)$ для любого *профиля стратегий* $\mathbf{s} = (s_1,\ldots,s_n) \in S = S_1 \times \cdots \times S_n$.

***Игра n лиц* в *стратегической* (или *нормальной*) форме. Если число элементов во всех множествах стратегий S_i конечно, то игра называется *конечной игрой*.**

30.2 Набор стратегий $(s_1^*,\ldots,s_n^*)$ в игре n лиц является *равновесием по Нэшу в чистых стратегиях*, если для всех $i = 1,\ldots,n$ и всех s_i из S_i,

$$u_i(s_1^*,\ldots,s_n^*) \geq u_i(s_1^*,\ldots,s_{i-1}^*,s_i,s_{i+1}^*,\ldots s_n^*).$$

Определение равновесия по Нэшу в чистых стратегиях в игре n лиц.

30.3 Если у всех игроков $i = 1,\ldots,n$, множества стратегий S_i являются непустыми компактными и выпуклыми подмножествами $\mathbb{R}^m$, а $u_i(s_1,\ldots,s_n)$ непрерывна в $S = S_1 \times \cdots \times S_n$ и квазивогнута по своей i-й переменной, то у этой игры есть равновесие по Нэшу в чистых стратегиях.

Достаточные условия существования равновесия по Нэшу в чистых стратегиях. (Равновесий по Нэшу в этом случае обычно несколько.)

30.4 Рассмотрим конечную игру n лиц, где S_i — множество чистых стратегий i-го игрока, и положим $S = S_1 \times \cdots \times S_n$. Пусть Ω_i — множество вероятностных распределений на S_i. Элемент σ_i множества Ω_i (σ_i тогда является функцией $\sigma_i : S_i \to [0,1]$) называется *смешанной стратегией* игрока i, с той интерпретацией, что если i ведет игру по σ_i, то i выбирает чистую стратегию s_i с вероятностью $\sigma_i(s_i)$.

Если игроки выбирают *набор смешанных стратегий* $\sigma = (\sigma_1,\ldots,\sigma_n) \in \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_n$, то вероятности использования ими при этом набора чистых стратегий $\mathbf{s} = (s_1,\ldots,s_n)$ образуют вектор $\sigma_1(s_1)\cdots\sigma_n(s_n)$. Ожидаемый выигрыш i-го игрока тогда равен

$$u_i(\sigma) = \sum_{s \in S} \sigma_1(s_1)\cdots\sigma_n(s_n)u_i(s).$$

Определение *смешанной стратегии* в игре n лиц.

30.5 Набор смешанных стратегий $\sigma^* = (\sigma_1^*, \dots, \sigma_n^*)$ является *равновесием по Нэшу*, если для каждого игрока i и любой σ_i,

$$u_i(\sigma^*) \geq u_i(\sigma_1^*, \dots, \sigma_{i-1}^*, \sigma_i, \sigma_{i+1}^*, \dots, \sigma_n^*).$$

Определение *равновесия по Нэшу в смешанных стратегиях* для игры n лиц.

30.6 σ^* является равновесием по Нэшу тогда и только тогда, когда для всех игроков $i = 1, 2, \dots, n$ верны два следующих условия:

$$\sigma_i^*(s_i) > 0 \Rightarrow u_i(\sigma^*) = u_i(s_i, \sigma_{-i}^*) \quad \text{при всех } s_i,$$

$$\sigma_i^*(s_i') = 0 \Rightarrow u_i(\sigma^*) \geq u_i(s_i', \sigma_{-i}^*) \quad \text{при всех } s_i',$$

где $\sigma_{-i}^* = (\sigma_1^*, \dots, \sigma_{i-1}^*, \sigma_{i+1}^*, \dots, \sigma_n^*)$, а s_i и s_i' рассматриваются как вырожденные смешанные стратегии.

Эквивалентное определение равновесия по Нэшу (в смешанных стратегиях).

30.7 Каждая конечная игра n лиц имеет равновесие по Нэшу в смешанных стратегиях.

Важный результат.

30.8 Чистая стратегия $s_i \in S_i$ игрока i является *строго доминирующей*, если найдется такая смешанная стратегия σ_i игрока i, что при любых допустимых сочетаниях чистых стратегий других игроков благодаря стратегии ведения игры s_i выигрыш i-го строго меньше его выигрыша по стратегии σ_i:

$$u_i(s_1, \dots, s_{i-1}, s_i, s_{i+1}, \dots, s_n) <$$
$$< u_i(s_1, \dots, s_{i-1}, \sigma_i, s_{i+1}, \dots, s_n)$$

для любого набора $(s_1, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_n)$, который можно построить по множествам стратегий других игроков $S_1, \dots, S_{i-1}, S_{i+1}, \dots, S_n$.

Определение строго доминирующих стратегий.

30.9 Для игры n лиц, справедлив следующий результат:

- если при итеративном элиминировании доминирующих стратегий элиминируются все другие стратегии кроме

$$(s_1^*, \dots, s_n^*),$$

то эти стратегии и являются единственным равновесием игры по Нэшу;

- если набор смешанных стратегий

$$(\sigma_1^*, \dots, \sigma_n^*)$$

является равновесием по Нэшу и, для некоторого игрока i, $\sigma_i^*(s_i) > 0$, то s_i выдерживает итеративное элиминирование строго доминирующих стратегий.

Полезные результаты. Итеративное элиминирование строго доминирующих стратегий не обязательно приводит к полному элиминированию всех стратегий. (Обсуждение итеративного элиминирования строго доминирующих стратегий см. в Литературе.)

30.10 Игру двух лиц, в которой игроки 1 и 2 имеют m и n (чистых) стратегий соответственно, можно представить двумя матрицами выигрыша

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

a_{ij} (b_{ij}) — выигрыш игрока 1 (2) в том случае, когда игроки придерживаются своих чистых стратегий i и j соответственно. Если $\mathbf{A} = -\mathbf{B}$, то говорят об игре *с нулевой суммой*. Если $\mathbf{A} = \mathbf{B}'$, то говорят о *симметричной* игре.

30.11 Для игры двух лиц (30.10) найдется такое равновесие по Нэшу, что $(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*)$

- $\mathbf{p} \cdot \mathbf{A}\mathbf{q}^* \le \mathbf{p}^* \cdot \mathbf{A}\mathbf{q}^*$ для всех $\mathbf{p}$ из Δ_m,
- $\mathbf{p}^* \cdot \mathbf{B}\mathbf{q} \le \mathbf{p}^* \cdot \mathbf{B}\mathbf{q}^*$ для всех $\mathbf{q}$ из Δ_n.

Существование равновесия по Нэшу в игре двух лиц. Δ_k обозначает симплекс в $\mathbb{R}^k$, состоящий из всех неотрицательных векторов, сумма компонент которого равна единице.

30.12 В игре двух лиц с нулевой суммой ($\mathbf{A} = -\mathbf{B}$) условие существования равновесия по Нэшу эквивалентно выполнению условия, что $\mathbf{p} \cdot \mathbf{A}\mathbf{q}$ имеет *седловую точку* $(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*)$, т. е. для всех $\mathbf{p}$ из Δ_m и всех $\mathbf{q}$ из Δ_n,

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{A}\mathbf{q}^* \le \mathbf{p}^* \cdot \mathbf{A}\mathbf{q}^* \le \mathbf{p}^* \cdot \mathbf{A}\mathbf{q}.$$

Свойство *седловой точки* для равновесия по Нэшу для игры двух лиц с нулевой суммой.

30.13 Равновесный выигрыш $v = \mathbf{p}^* \cdot \mathbf{A}\mathbf{q}^*$ называется *ценой* игры, и

$$v = \min_{\mathbf{q} \in \Delta_n} \max_{\mathbf{p} \in \Delta_m} \mathbf{p} \cdot \mathbf{A}\mathbf{q} = \max_{\mathbf{p} \in \Delta_m} \min_{\mathbf{q} \in \Delta_n} \mathbf{p} \cdot \mathbf{A}\mathbf{q}.$$

Классическая *теорема о минимаксе* для игры двух лиц с нулевой суммой.

30.14 Пусть $(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*)$ и $(\mathbf{p}^{**}, \mathbf{q}^{**})$ являются равновесиями по Нэшу в игре (30.10). Тогда $(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^{**})$ и $(\mathbf{p}^{**}, \mathbf{q}^*)$ также являются равновесными наборами стратегий.

Свойство *прямоугольности* или *взаимозаменяемости*.

ЭВОЛЮЦИОННАЯ ТЕОРИЯ ИГР

30.15 В симметричной игре двух лиц (30.10) при условии $\mathbf{A} = \mathbf{B}'$ стратегия $\mathbf{p}^*$ называется *эволюционно устойчивой стратегией*, если для любой $\mathbf{q} \neq \mathbf{p}^*$ найдется такое $\bar{\varepsilon} > 0$, что

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{A}(\varepsilon\mathbf{q} + (1-\varepsilon)\mathbf{p}^*) < \mathbf{p}^* \cdot \mathbf{A}(\varepsilon\mathbf{q} + (1-\varepsilon)\mathbf{p}^*)$$

для всех положительных $\varepsilon < \bar{\varepsilon}$.

Величина $\bar{\varepsilon}$ может зависеть от $\mathbf{q}$. Биологическая интерпретация: все животные запрограммированы на стратегию $\mathbf{p}^*$. Любая мутация, приводящая к примешиванию в их игру стратегии $\mathbf{q}$, приводит к нелучшей физической форме.

В постановке (30.15) стратегия $\mathbf{p}^*$ эволюционно устойчива тогда и только тогда, когда

30.16 $\mathbf{q} \cdot \mathbf{A}\mathbf{p}^* \leq \mathbf{p}^* \cdot \mathbf{A}\mathbf{p}^*$ для всех $\mathbf{q}$.

Если $\mathbf{q} \neq \mathbf{p}^*$ и $\mathbf{q} \cdot \mathbf{A}\mathbf{p}^* = \mathbf{p}^* \cdot \mathbf{A}\mathbf{p}^*$, то

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{A}\mathbf{q} < \mathbf{p}^* \cdot \mathbf{A}\mathbf{q}.$$

Первое условие (*условие равновесия*) эквивалентно условию для равновесия по Нэшу. Второе условие называется *условием устойчивости*.

ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

Стандартным пособием служит [22]. См. также [29] (простейшее изложение), [51] и [23]. По эволюционной теории игр читайте [87].

Глава 31

ВЕРОЯТНОСТЬ И СТАТИСТИКА

31.1 Вероятность события A, $P(A)$ удовлетворяет следующим аксиомам:

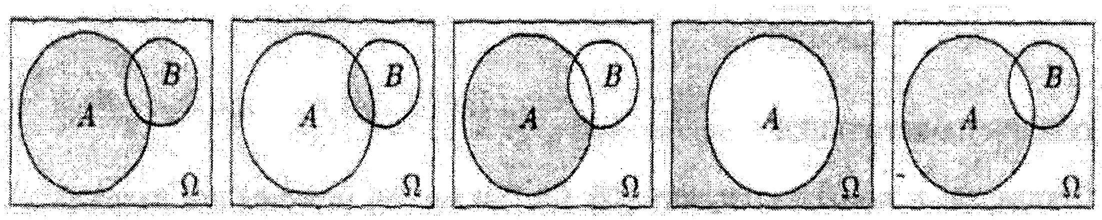
a) $0 \leq P(A) \leq 1$,

b) $P(\Omega) = 1$,

c) Если $A_i \cap A_j = \varnothing$ при $i \neq j$, то

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

Аксиомы вероятностей. Ω — элементарное пространство, состоящее из всех возможных исходов. Событие является подмножеством Ω.



$A \cup B$	$A \cap B$	$A \setminus B$	A^c	$A \triangle B$
Происходит событие A или B	Происходят оба события — и A, и B	Событие A происходит, а B — нет	Событие A не происходит	Происходит одно событие — или A, или B, но не то и другое одновременно

31.2

- $P(A^c) = 1 - P(A)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$
  $- P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C)$
  $+ P(A \cap B \cap C)$
- $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$
- $P(A \triangle B) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$

Правила вычисления вероятностей.

31.3 $P(A \mid B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$ является *условной вероятностью* того, что событие A произойдет при условии осуществления события B.

Определение *условной вероятности* ($P(B) > 0$).

31.4	**События A и B *(стохастически) независимы*, если** $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. **Если $P(B) > 0$, это эквивалентно** $P(A \mid B) = P(A)$.	**Определение (стохастической) независимости.**
31.5	$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2 \mid A_1) \cdots P(A_n \mid A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1})$	**Общее правило умножения вероятностей.**
31.6	$P(A \mid B) = \frac{P(B \mid A) \cdot P(A)}{P(B)} = \frac{P(B \mid A)P(A)}{P(B \mid A)P(A) + P(B \mid A^c)P(A^c)}$	***Правило Байеса.*** ($P(B) \neq 0$.)
31.7	$P(A_i \mid B) = \frac{P(B \mid A_i) \cdot P(A_i)}{\sum\limits_{j=1}^{n} P(B \mid A_j) \cdot P(A_j)}$	**Обобщенное *правило Байеса*. События $A_1, \ldots, A_n$ не пересекаются, $\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = P(\Omega) = 1$, где $\Omega = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ образует элементарное пространство исходов. B — произвольное событие.**

СЛУЧАЙНЫЕ ПЕРЕМЕННЫЕ (ОДНОМЕРНЫЙ СЛУЧАЙ)

31.8	• $P(X \in A) = \sum\limits_{x \in A} f(x)$ • $P(X \in A) = \int\limits_{A} f(x)\,dx$	**$f(x)$ является дискретной/непрерывной плотностью распределения вероятности. X — случайная (или стохастическая) переменная.**
31.9	• $F(x) = P(X \leq x) = \sum\limits_{t \leq x} f(t)$ • $F(x) = P(X \leq x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$	**F — кумулятивная дискретная/непрерывная функция распределения. В непрерывном случае $P(X = x) = 0$.**

31.10	• $E[X] = \sum_x x f(x)$ • $E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx$	**Математическое ожидание дискретной/непрерывной функции плотности распределения вероятности f. $\mu = E[X]$ называется *средним значением*.**
31.11	• $E[g(X)] = \sum_x g(x) f(x)$ • $E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x)\,dx$	**Математическое ожидание сложной функции g от дискретной/непрерывной функции плотности f.**
31.12	$\mathrm{var}[X] = E[(X - E[X])^2]$	***Дисперсией* случайной переменной является, по определению, математическое ожидание квадрата отклонения ее значения от своего среднего.**
31.13	$\mathrm{var}[X] = E[X^2] - (E[X])^2$	**Другое выражение дисперсии.**
31.14	$\sigma = \sqrt{\mathrm{var}[X]}$	***Стандартное отклонение* случайной величины X.**
31.15	$\mathrm{var}[aX + b] = a^2\,\mathrm{var}[X]$	**a и b — вещественные числа.**
31.16	$\mu_k = E[(X - \mu)^k]$	***k-й центральный момент*, $\mu = E[X]$.**
31.17	$\eta_3 = \dfrac{\mu_3}{\sigma^3}, \quad \eta_4 = \dfrac{\mu_4}{\sigma^4} - 3$	***Коэффициент асимметрии* η_3 и *коэффициент эксцесса* η_4. σ — стандартное отклонение. Для нормального распределения $\eta_3 = \eta_4 = 0$.**

31.18
- $P(|X| \geq \lambda) \leq E[X^2]/\lambda^2$
- $P(|X - \mu| \geq \lambda) \leq \sigma^2/\lambda^2, \quad \lambda > 0$
- $P(|X - \mu| \geq k\sigma) \leq 1/k^2, \quad k > 0$

Несколько вариантов *неравенства Чебышева.* σ — стандартное отклонение X, $\mu = E[X]$ — среднее.

31.19 Если функция f выпукла на интервале I, а X — случайная переменная с конечным математическим ожиданием, то

$$f(E[X]) \leq E[f(X)].$$

Если f строго выпукла, то неравенство выполняется строго для всех случаев, за исключением того, когда величина X является постоянной с вероятностью 1.

Частный случай неравенства Иенсена.

31.20
- $M(t) = E[e^{tX}] = \sum\limits_x e^{tx} f(x)$
- $M(t) = E[e^{tX}] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x)\,dx$

Производящие функции моментов. $M(t)$ не всегда существует, но если найдется, то $M(t) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{E[X^k]}{k!} t^k$.

31.21
- $C(t) = E[e^{itX}] = \sum\limits_x e^{itx} f(x)$
- $C(t) = E[e^{itX}] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x)\,dx$

Характеристические функции. $C(t)$ найдется всегда, и если существует $E[X^k]$ для всех k, то $C(t) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{i^k E[X^k]}{k!} t^k$.

СЛУЧАЙНЫЕ ПЕРЕМЕННЫЕ (ДВУМЕРНЫЙ СЛУЧАЙ)

31.22
- $P((X,Y) \in A) = \sum\limits_{(x,y)\in A} f(x,y)$
- $P((X,Y) \in A) = \iint\limits_A f(x,y)\,dx\,dy$

$f(x,y)$ — двумерная дискретная/непрерывная *функция плотности совместного распределения.* X и Y — случайные переменные.

31.23 $F(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y) =$
- $\sum\limits_{u\leq x} \sum\limits_{v\leq y} f(u,v)$ (дискретный случай)
- $\int\limits_{-\infty}^{x} \int\limits_{-\infty}^{y} f(u,v)\,du\,dv$ (непрерывный случай)

F — совместная кумулятивная дискретная/непрерывная функция распределения.

31.24	• $E[g(X,Y)] = \sum_x \sum_y g(x,y)f(x,y)$ • $E[g(X,Y)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y)f(x,y)\,dx\,dy$	**Математическое ожидание $g(X,Y)$, где X и Y имеют дискретную/непрерывную функцию плотности совместного распределения вероятностей f.**
31.25	$\text{cov}[X,Y] = E[(X - E[X])(Y - E[Y])]$	**Определение *ковариации*.**
31.26	$\text{cov}[X,Y] = E[XY] - E[X]\,E[Y]$	**Полезный факт.**
31.27	**Если $\text{cov}[X,Y] = 0$, X и Y *не коррелируют* между собой.**	**Определение.**
31.28	$E[XY] = E[X]\,E[Y]$, **если X и Y не коррелируют между собой.**	**Следует из (31.26) и (31.27).**
31.29	$(E[XY])^2 \le E[X^2]\,E[Y^2]$	**Неравенство Коши–Шварца.**
31.30	**Если X и Y стохастически независимы, то** $\text{cov}[X,Y] = 0$.	**Обратное неверно.**
31.31	$\text{var}[X \pm Y] = \text{var}[X] + \text{var}[Y] \pm 2\,\text{cov}[X,Y]$	**Дисперсия суммы/разности двух случайных переменных.**
31.32	$E[a_1X_1 + \cdots + a_nX_n + b] = a_1E[X_1] + \cdots + a_nE[X_n] + b$	**$X_1,\ldots,X_n$ — случайные переменные, а $a_1,\ldots,a_n$, b — вещественные числа.**
31.33	$\text{var}\left[\sum_{i=1}^n a_iX_i\right] = \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_ia_j\,\text{cov}[X_i,X_j] = \sum_{i=1}^n a_i^2\,\text{var}[X_i] + 2\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^n a_ia_j\,\text{cov}[X_i,X_j]$	**Дисперсия линейной комбинации случайных переменных.**
31.34	$\text{var}\left[\sum_{i=1}^n a_iX_i\right] = \sum_{i=1}^n a_i^2\,\text{var}[X_i]$	**Формула (31.33) в случае отсутствия попарной корреляции между переменными $X_1,\ldots,X_n$.**

31.35 $\operatorname{corr}[X,Y] = \dfrac{\operatorname{cov}[X,Y]}{\sqrt{\operatorname{var}[X]\operatorname{var}[Y]}} \in [-1,1]$

Определение *коэффициента корреляции* как нормированной ковариации.

Если $f(x,y)$ — функция плотности совместного распределения вероятностей случайных величин X и Y, то

31.36
- $f_X(x) = \sum_y f(x,y), \quad f_Y(y) = \sum_x f(x,y)$.
- $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy, \quad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx$

являются *предельными плотностями* для X и Y соответственно.

Определения *предельных плотностей* для дискретных и непрерывных распределений.

31.37 $f(x \mid y) = \dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}, \quad f(y \mid x) = \dfrac{f(x,y)}{f_X(x)}$.

Определение *условных плотностей*.

31.38 Случайные переменные X и Y *стохастически независимы*, если $f(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$. При выполнении условия $f_Y(y) > 0$ это требование эквивалентно $f(x \mid y) = f_X(x)$.

Стохастическая независимость.

31.39
- $E[X \mid y] = \sum_x x f(x \mid y)$
- $E[X \mid y] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x \mid y)\,dx$
- $\operatorname{var}[X \mid y] = \sum_x (x - E[X \mid y])^2 f(x \mid y)$
- $\operatorname{var}[X \mid y] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E[X \mid y])^2 f(x \mid y)\,dx$

Определение *условного математического ожидания* и *условной дисперсии* для дискретных и непрерывных распределений. Заметьте, что краткая запись $E[X \mid y]$ обозначает $E[X \mid Y = y]$, а запись $\operatorname{var}[X \mid y]$ обозначает $\operatorname{var}[X \mid Y = y]$.

31.40 $E[Y] = E_X[E[Y \mid X]]$

Закон *повторного ожидания*. Запись E_X обозначает математическое ожидание по X.

31.41 $E[XY] = E_X[XE[Y \mid X]] = E[X\mu_{Y \mid X}]$.

Математическое ожидание произведения XY равно математическому ожиданию произведения X и условного математического ожидания Y при условии X.

31.42 $$\sigma_Y^2 = \mathrm{var}[Y] = E_X[\mathrm{var}[Y \mid X]] + \mathrm{var}_X[E[Y \mid X]] = E[\sigma^2_{Y|X}] + \mathrm{var}[\mu_{Y|X}]$$

Дисперсия Y равна сумме математического ожидания его условной дисперсии и дисперсии условного математического ожидания.

Пусть $f(x,y)$ — функция плотности совместного распределения для пары стохастических переменных (X, Y). Предположим, что

$$U = \phi_1(X,Y), \quad V = \phi_2(X,Y)$$

задает взаимно однозначное и принадлежащее классу гладкости C^1 преобразование стохастических переменных X и Y, причем обратное преобразование задается формулой

31.43 $$X = \psi_1(U,V), \quad Y = \psi_2(U,V).$$

Тогда функция плотности $g(u,v)$ для пары (U,V) есть

$$g(u,v) = f(\psi_1(u,v), \psi_2(u,v)) \cdot |J(u,v)|$$

при условии, что якобиан

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial\psi_1(u,v)}{\partial u} & \dfrac{\partial\psi_1(u,v)}{\partial v} \\ \dfrac{\partial\psi_2(u,v)}{\partial u} & \dfrac{\partial\psi_2(u,v)}{\partial v} \end{vmatrix}$$

не равен 0.

Как найти функцию плотности для преобразования стохастических переменных. (Формула прямо обобщается на случай произвольного числа стохастических переменных. Требуемые условия регулярности здесь даны не полностью. См. Литературу.)

СТАТИСТИЧЕСКИЕ ВЫВОДЫ

31.44 Если $E[\hat{\theta}] = \theta$ для всехl $\theta \in \Theta$, то $\hat{\theta}$ называется *несмещенной оценкой* параметра θ.

Определение несмещенной оценки. Θ — пространство параметров.

Если $\hat{\theta}$ не является несмещенной, то

31.45 $$b = E[\hat{\theta}] - \theta$$

называется *смещением* $\hat{\theta}$.

Определение смещения (оценки).

31.46 $$\mathrm{MSE}(\hat{\theta}) = E[\hat{\theta} - \theta]^2 = \mathrm{var}[\hat{\theta}] + b^2.$$

Определение *среднеквадратической ошибки* (MSE — от *англ.* «mean square error»).

31.47	$\operatorname{plim} \hat{\theta}_T = \theta$ означает, что для любого $\varepsilon > 0$ $\lim\limits_{T\to\infty} P(\lvert\hat{\theta}_T - \theta\rvert < \varepsilon) = 1.$	Определение вероятностного предела. Оценка $\hat{\theta}_T$ является функцией T наблюдений.
31.48	$\hat{\theta}$ является *состоятельной* оценкой параметра θ, если $\operatorname{plim} \hat{\theta}_T = \theta$ для любого $\theta \in \Theta$.	Определение состоятельности.
31.49	$\hat{\theta}$ является *асимптотически несмещенной*, если $\lim\limits_{T\to\infty} E[\hat{\theta}_T] = \theta$ для любого $\theta \in \Theta$.	Определение асимптотически несмещенной оценки.
31.50	H_0 Нулевая гипотеза (например, $\theta \leq 0$). H_1 Альтернативная гипотеза ($\theta > 0$). T Статистика, лежащая в основе критерия. C Критическая область. θ Неизвестный параметр.	Определение *статистического оценивания*.
31.51	Критерий: отклонить гипотезу H_0 в пользу гипотезы H_1, если $T \in C$.	Критерий проверки статистических гипотез.
31.52	Функция мощности критерия $\pi(\theta) = P(\text{отклонить } H_0 \mid \theta),\ \theta \in \Theta.$	Определение *мощности* критерия.
31.53	Отклонение гипотезы H_0, когда H_0 верна, называется ошибкой I рода. Неотклонение H_0, когда верна гипотеза H_1, называется ошибкой II рода.	Ошибки I и II рода.
31.54	α-уровень значимости: наименьшее такое число α, что $P(\text{ошибка I рода}) \leq \alpha$ для всех θ удовлетворяющих H_0.	α — *уровень значимости* критерия.
31.55	*Критическая вероятность* (или *P-значение*) — это наименьший уровень значимости, приводящий к отклонению гипотезы H_0, при заданной выборке данных и статистическом критерии.	Важное понятие.

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Пусть $\{X_i\}$ — последовательность независимых и одинаково распределенных случайных переменных с конечным математическим ожиданием $E[X_i] = \mu$. Пусть $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Тогда:

31.56 1) при любом $\varepsilon > 0$

$$P\left\{\left|\frac{S_n}{n} - \mu\right| \geq \varepsilon\right\} \to 0 \text{ при } n \to \infty;$$

2) с вероятностью 1 $\dfrac{S_n}{n} \to \mu$ при $n \to \infty$.

Формулировка 1) представляет собой (слабый) *закон больших чисел*. S_n/n — состоятельная оценка для μ. 2) является *усиленным законом больших чисел*.

Пусть $\{X_i\}$ — последовательность независимых и одинаково распределенных случайных переменных с конечным математическим ожиданием $E[X_i] = \mu$ и конечной дисперсией
$\text{var}[X_i] = \sigma^2$. Пусть $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Тогда

31.57 распределение $\dfrac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$ стремится к стандартному нормальному распределению при $n \to \infty$, т. е.

$$P\left\{\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq a\right\} \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{a} e^{-x^2/2}\, dx$$

при $n \to \infty$.

Центральная предельная теорема.

ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

См. [5], [53], [31], а также [41].

Глава 32

РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ. МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{p-1}(1-x)^{q-1}}{B(p,q)}, & x \in (0,1), \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

$p > 0$, $q > 0$.

32.1 Среднее: $E[X] = \dfrac{p}{p+q}$.

Дисперсия: $\mathrm{var}[X] = \dfrac{pq}{(p+q)^2(p+q+1)}$.

k-й момент: $E[X^k] = \dfrac{B(p+k,q)}{B(p,q)}$.

Бета-распределение. B является бета-функцией, определенной в (9.61).

$$f(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x},$$

$x = 0, 1, \ldots, n$; $n = 1, 2, \ldots$; $p \in (0,1)$.

Среднее: $E[X] = np$.

32.2 Дисперсия: $\mathrm{var}[X] = np(1-p)$.

Производящая функция моментов:

$$[pe^t + (1-p)]^n.$$

Характеристическая функция:

$$[pe^{it} + (1-p)]^n.$$

Биномиальное распределение. $f(x)$ есть вероятность того, что событие произойдет ровно x раз при n независимых наблюдениях, если вероятность осуществления события в каждом наблюдении равна p. Обозначение $\binom{n}{x}$ см. в (8.27).

$$f(x,y) = \frac{e^{-Q}}{2\pi\sigma\tau\sqrt{1-\rho^2}}, \quad \text{где}$$

32.3 $$Q = \frac{\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2 - 2\rho\frac{(x-\mu)(y-\eta)}{\sigma\tau} + \left(\frac{y-\eta}{\tau}\right)^2}{2(1-\rho^2)},$$

$x, y, \mu, \eta \in (-\infty, \infty)$, $\sigma > 0$, $\tau > 0$, $|\rho| < 1$.

Среднее: $E[X] = \mu$, $E[Y] = \eta$.

Дисперсия: $\mathrm{var}[X] = \sigma^2$, $\mathrm{var}[Y] = \tau^2$.

Ковариация: $\mathrm{cov}[X,Y] = \rho\sigma\tau$.

Бинормальное распределение. (Выражения для производящих функций моментов и характеристических функций см. в более общем многомерном нормальном распределении (32.15).)

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{\frac{1}{2}\nu-1}e^{-\frac{1}{2}x}}{2^{\frac{1}{2}\nu}\Gamma(\frac{1}{2}\nu)}, & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}; \quad \nu = 1, 2, \ldots$$

32.4 Среднее: $E[X] = \nu$.
Дисперсия: $\operatorname{var}[X] = 2\nu$.
Производящая функция моментов:

$$(1-2t)^{-\frac{1}{2}\nu}, \ t < \tfrac{1}{2}.$$

Характеристическая функция: $(1-2it)^{-\frac{1}{2}\nu}$.

χ^2-распределение с ν степенями свободы. Γ является гамма-функцией, определенной в (9.53).

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}; \qquad \lambda > 0.$$

Среднее: $E[X] = 1/\lambda$.
32.5 Дисперсия: $\operatorname{var}[X] = 1/\lambda^2$.
Производящая функция моментов:

$$\lambda/(\lambda - t), \ t < \lambda.$$

Характеристическая функция: $\lambda/(\lambda - it)$.

Экспоненциальное распределение.

$$f(x) = \frac{1}{\beta}e^{-z}e^{-e^{-z}}, \quad z = \frac{x-\alpha}{\beta}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \beta > 0$$

Среднее: $E[X] = \alpha - \beta\Gamma'(1)$.
Дисперсия: $\operatorname{var}[X] = \beta^2\pi^2/6$.
32.6 Производящая функция моментов:

$$e^{\alpha t}\Gamma(1-\beta t), \ t < 1/\beta.$$

Характеристическая функция:

$$e^{i\alpha t}\Gamma(1 - i\beta t).$$

Распределение экстремального значения (Гумбеля). $\Gamma'(1)$ — значение производной гамма-функции, вычисленное в точке 1. (См. (9.53).) $\Gamma'(1) = -\gamma$, где $\gamma \approx 0.5772$ представляет собой постоянную Эйлера, см. (8.42).

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\nu_1^{\frac{1}{2}\nu_1}\nu_2^{\frac{1}{2}\nu_2}x^{\frac{1}{2}\nu_1-1}}{B(\frac{1}{2}\nu_1, \frac{1}{2}\nu_2)(\nu_2+\nu_1 x)^{\frac{1}{2}(\nu_1+\nu_2)}}, & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$$

$\nu_1, \nu_2 = 1, 2, \ldots$

Среднее: $E[X] = \nu_2/(\nu_2 - 2)$ при $\nu_2 > 2$ (не существует при $\nu_2 = 1, 2$).
32.7 Дисперсия:

$$\operatorname{var}[X] = \frac{2\nu_2^2(\nu_1+\nu_2-2)}{\nu_1(\nu_2-2)^2(\nu_2-4)} \text{ при } \nu_2 > 4$$

(не существует при $\nu_2 \le 4$).
k-й момент:

$$E[X^k] = \frac{\Gamma(\frac{1}{2}\nu_1 + k)\Gamma(\frac{1}{2}\nu_2 - k)}{\Gamma(\frac{1}{2}\nu_1)\Gamma(\frac{1}{2}\nu_2)}\left(\frac{\nu_2}{\nu_1}\right)^k, \quad 2k < \nu_2.$$

F-распределение. B является бета-функцией, определенной в (9.61). ν_1, ν_2 — степени свободы числителя и знаменателя соответственно.

32.8
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^n x^{n-1} e^{-\lambda x}}{\Gamma(n)}, & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}; \quad n,\ \lambda > 0.$$

Среднее: $E[X] = n/\lambda$.
Дисперсия: $\mathrm{var}[X] = n/\lambda^2$.
Производящая функция моментов:
$$[\lambda/(\lambda - t)]^n,\ t < \lambda.$$
Характеристическая функция: $[\lambda/(\lambda - it)]^n$.

Гамма-распределение. **Γ является гамма-функцией, определенной в (9.53). При $n = 1$ это распределение является экспоненциальным.**

32.9
$$f(x) = p(1-p)^x; \quad x = 0, 1, 2, \ldots, \quad p \in (0,1).$$

Среднее: $E[X] = (1-p)/p$.
Дисперсия: $\mathrm{var}[X] = (1-p)/p^2$.
Производящая функция моментов:
$$p/[1-(1-p)e^t], \quad t < -\ln(1-p).$$
Характеристическая функция:
$$p/[1-(1-p)e^{it}].$$

Геометрическое распределение.

32.10
$$f(x) = \frac{\dbinom{M}{x}\dbinom{N-M}{n-x}}{\dbinom{N}{n}},$$
$$x = 0, 1, \ldots, n; \quad n = 1, 2, \ldots, N.$$

Среднее: $E[X] = nM/N$.
Дисперсия: $\mathrm{var}[X] = np(1-p)(N-n)/(N-1)$, **где** $p = M/N$.

Гипергеометрическое распределение. **Задан набор N объектов, M из которых обладают некоторой характеристикой, а $N - M$ оставшихся — нет. Возьмем случайно n объектов из этого набора. Тогда $f(x)$ является вероятностью того, что x из взятых нами объектов обладают данной характеристикой, а $n - x$ оставшихся — нет.**

32.11
$$f(x) = \frac{1}{2\beta}\, e^{-|x-\alpha|/\beta}; \quad x \in \mathbb{R}, \quad \beta > 0.$$

Среднее: $E[X] = \alpha$.
Дисперсия: $\mathrm{var}[X] = 2\beta^2$.
Производящая функция моментов:
$$\frac{e^{\alpha t}}{1-\beta^2 t^2}, \quad |t| < 1/\beta.$$
Характеристическая функция: $\dfrac{e^{i\alpha t}}{1+\beta^2 t^2}$.

Распределение Лапласа.

32.12

$$f(x) = \frac{e^{-z}}{\beta(1+e^{-z})^2}, \quad z = \frac{x-\alpha}{\beta}, \; x \in \mathbb{R}, \; \beta > 0.$$

Среднее: $E[X] = \alpha$.
Дисперсия: $\mathrm{var}[X] = \pi^2\beta^2/3$.
Производящая функция моментов:

$$e^{\alpha t}\Gamma(1-\beta t)\Gamma(1+\beta t) = \pi\beta t e^{\alpha t}/\sin(\pi\beta t).$$

Характеристическая функция:

$$i\pi\beta t e^{i\alpha t}/\sin(i\pi\beta t).$$

Логистическое распределение.

32.13

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-(\ln x - \mu)^2/2\sigma^2}}{\sigma x\sqrt{2\pi}}, & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}; \quad \sigma > 0.$$

Среднее: $E[X] = e^{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2}$.
Дисперсия: $\mathrm{var}[X] = e^{2\mu}(e^{2\sigma^2} - e^{\sigma^2})$.
k-й момент: $E[X^k] = e^{k\mu + \frac{1}{2}k^2\sigma^2}$.

Логарифмически нормальное распределение.

32.14

$$f(\mathbf{x}) = \frac{n!}{x_1!\cdots x_k!} p_1^{x_1}\cdots p_k^{x_k}$$

$x_1 + \cdots + x_k = n, \quad p_1 + \cdots + p_k = 1,$
$x_j \in \{0, 1, \ldots, n\}, \quad p_j \in (0,1), \quad j = 1, \ldots, k.$

Среднее значение X_j: $E[X_j] = np_j$.
Дисперсия X_j: $\mathrm{var}[X_j] = np_j(1-p_j)$.
Ковариация: $\mathrm{cov}[X_j, X_r] = -np_jp_r$, $j, r = 1, \ldots, n$, $j \neq r$.
Производящая функция моментов:

$$\left[\sum_{j=1}^k p_j e^{t_j}\right]^n.$$

Характеристическая функция:

$$\left[\sum_{j=1}^k p_j e^{it_j}\right]^n.$$

Полиномиальное распределение. $f(\mathbf{x})$ есть вероятность того, что k событий $A_1, \ldots, A_k$ произойдут ровно $x_1, \ldots, x_k$ раз при n независимых наблюдениях, если вероятности этих событий $p_1, \ldots, p_k$.

32.15

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{k/2}\sqrt{|\Sigma|}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})'\Sigma^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})}$$

$\Sigma = (\sigma_{ij})$ симметрична и положительно определена, $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_k)'$, $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \ldots, \mu_k)'$.
Среднее: $E[X_i] = \mu_i$.
Дисперсия: $\mathrm{var}[X_i] = \sigma_{ii}$.
Ковариация: $\mathrm{cov}[X_i, X_j] = \sigma_{ij}$.
Производящая функция моментов: $e^{\boldsymbol{\mu}'\mathbf{t} + \frac{1}{2}\mathbf{t}'\Sigma\mathbf{t}}$.
Характеристическая функция: $e^{-\frac{1}{2}\mathbf{t}'\Sigma\mathbf{t}}e^{i\mathbf{t}'\boldsymbol{\mu}}$.

Многомерное нормальное распределение. Знак $|\Sigma|$ обозначает определитель ковариационной матрицы Σ. $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_k)'$, $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \ldots, \mu_k)'$.

$$f(x) = \binom{x-1}{r-1} p^r (1-p)^{x-r},$$

$x = r, r+1, \ldots;\quad r = 1, 2, \ldots;\quad p \in (0,1)$.

Среднее: $E[X] = r/p$.

32.16 **Дисперсия:** $\text{var}[X] = r(1-p)/p^2$.

Производящая функция моментов:

$$p^r(1-(1-p)e^t)^{-r}.$$

Характеристическая функция:

$$p^r(1-(1-p)e^{it})^{-r}.$$

Отрицательное биномиальное распределение.

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}, \quad x \in \mathbb{R},\ \sigma > 0.$$

32.17 **Среднее:** $E[X] = \mu$.

Дисперсия: $\text{var}[X] = \sigma^2$.

Производящая функция моментов: $e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$.

Характеристическая функция: $e^{i\mu t - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$.

Нормальное распределение. **Если $\mu = 0$ и $\sigma = 1$, то распределение является** ***стандартным нормальным распределением.***

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{ca^c}{x^{c+1}}, & x > a \\ 0, & x \le a \end{cases}; \quad a > 0, c > 0.$$

32.18 **Среднее:** $E[X] = ac/(c-1), \quad c > 1$.

Дисперсия:

$$\text{var}[X] = a^2c/(c-1)^2(c-2), \quad c > 2.$$

k**-й момент:** $E[X^k] = a^k c/c - k, \quad c > k$.

Распределение Парето.

$$f(x) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}; \quad x = 0, 1, 2, \ldots, \quad \lambda > 0.$$

32.19 **Среднее:** $E[X] = \lambda$.

Дисперсия: $\text{var}[X] = \lambda$.

Производящая функция моментов: $e^{\lambda(e^t - 1)}$.

Характеристическая функция: $e^{\lambda(e^{it}-1)}$.

Распределение Пуассона.

$$f(x) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2}(\nu+1))}{\sqrt{\nu\pi}\,\Gamma(\frac{1}{2}\nu)}\left(1 + \frac{x^2}{\nu}\right)^{-\frac{1}{2}(\nu+1)},$$

$x \in \mathbb{R}, \quad \nu = 1, 2, \ldots$

Среднее: $E[X] = 0$ **при** $\nu > 1$

(не существует при $\nu = 1$**).**

32.20 **Дисперсия:** $\text{var}[X] = \dfrac{\nu}{\nu - 2}$ **при** $\nu > 2$

(не существует при $\nu = 1, 2$**).**

k**-й момент (существует только при** $k < \nu$**):**

$$E[X^k] = \begin{cases} \dfrac{\Gamma(\frac{1}{2}(k+1))\Gamma(\frac{1}{2}(\nu-k))}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\frac{1}{2}\nu)}\nu^{\frac{1}{2}k}, & k \text{ четное}, \\ 0, & k \text{ нечетное}. \end{cases}$$

t-распределение стьюдента с ν степенями свободы.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta-\alpha}, & \alpha \le x \le \beta \\ 0 & \text{во всех других случаях.} \end{cases}$$

$\alpha < \beta$.

Среднее: $E[X] = \frac{1}{2}(\alpha+\beta)$.

32.21 Дисперсия: $\mathrm{var}[X] = \frac{1}{12}(\beta-\alpha)^2$.

Производящая функция моментов:

$$\frac{e^{\beta t} - e^{\alpha t}}{t(\beta-\alpha)}.$$

Характеристическая функция: $\dfrac{e^{i\beta t} - e^{i\alpha t}}{it(\beta-\alpha)}$.

Равномерное распределение.

$$f(x) = \begin{cases} \beta\lambda^\beta x^{\beta-1} e^{-(\lambda x)^\beta}, & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}; \quad \beta,\ \lambda > 0.$$

Среднее: $E[X] = \dfrac{1}{\lambda}\Gamma(1+\dfrac{1}{\beta})$.

32.22 Дисперсия:

$$\mathrm{var}[X] = \frac{1}{\lambda^2}\left[\Gamma(1+\frac{2}{\beta}) - \Gamma(1+\frac{1}{\beta})^2\right].$$

k-й момент: $E[X^k] = \dfrac{1}{\lambda^k}\Gamma(1+k/\beta)$.

Распределение Вейбулла. При $\beta = 1$ получаем экспоненциальное распределение.

Прямая линия $y = ax + b$, которая ближе всего расположена на плоскости ко всем n точкам выборочных данных (x_1, y_1), $(x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ в том смысле, что сумма квадратов отклонений

32.23
$$\sum_{i=1}^n e_i^2 = \sum_{i=1}^n [y_i - (ax_i + b)]^2$$

минимальна, задается уравнением $y - \bar{y} = \hat{a}(x - \bar{x})$, где

$$\hat{a} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}.$$

Таким образом, $y = \hat{a}x + \hat{b}$, откуда $\hat{b} = \bar{y} - \hat{a}\bar{x}$.

Метод наименьших квадратов. Здесь $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i$, $\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n y_i$.

32.24

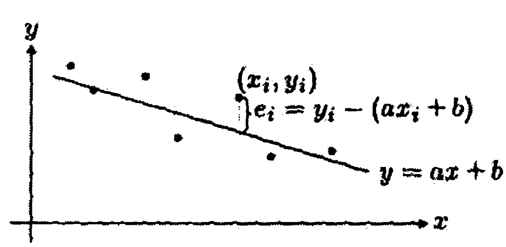


Иллюстрация метода наименьших квадратов.

32.25 **Метод наименьших квадратов.** ***Множественная регрессия.***

Известны n значений $(x_{i1}, \ldots, x_{ik})$, $i = 1, \ldots, n$ k числовых переменных $x_1, \ldots, x_k$, а также n значений $y_1, \ldots, y_n$ другого вектора числовых переменных y. Определим

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \ldots & x_{1k} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \ldots & x_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{n1} & x_{n2} & \ldots & x_{nk} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_k \end{pmatrix}.$$

Вектор коэффициентов $\boldsymbol{\beta} = (\beta_0, \ldots, \beta_k)'$ гиперплоскости $y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \cdots + \beta_k x_k$, ближе всего расположенной ко всем точкам данных в многомерном пространстве в том смысле, что минимизируется сумма квадратов отклонений $(\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})'(\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})$ задается уравнением

$$\boldsymbol{\beta} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y}.$$

ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

См., например, [17], [45], [46], [47], а также [41].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Barro R. J., Sala-i-Martin X.* Economic Growth. New York: McGraw-Hill, 1995.
2. *Bartle R. G.* Introduction to Real Analysis. New York: John Wiley & Sons, 1982.
3. *Beavis B., Dobbs I. M.* Optimization and Stability Theory for Economic Analysis. Cambridge: Cambridge University Press, 1990.
4. *Bellman R.* Dynamic Programming. Princeton: Princeton University Press, 1957. (Русский перевод: *Беллман Р.* Динамическое программирование. М.: Изд. иностр. лит., 1960.)
5. *Bhattacharyya G. K., Johnson R. A.* Statistics: Principles and Methods, 3rd ed. New York: John Wiley & Sons, 1996.
6. *Black F., Scholes M.* The pricing of options and corporate liabilities // Journal of Political Economy, 1973. Vol. 81. P. 637–654.
7. *Blackorby C., Russell R. R.* Will the real elasticity of substitution please stand up? (A comparison of the Allen/Uzawa and Morishima elasticities) // American Economic Review, 1989. Vol. 79. P. 882–888.
8. *Blanchard O., Fischer S.* Lectures on Macroeconomics. Cambridge: MIT Press, 1989.
9. *Braun M.* Differential Equations and their Applications, 4th ed. New York: Springer, 1993.
10. *Burmeister E., Dobell A. R.* Mathematical Theories of Economic Growth. London: Macmillan, 1970.
11. *Christensen L. R., Jorgenson D., Lau L. J.* Transcendental logarithmic utility functions // American Economic Review, 1975. Vol. 65. P. 367–383.
12. *Deaton A., Muellbauer J.* Economics and Consumer Behaviour. Cambridge: Cambridge University Press, 1980.
13. *Dhrymes P. J.* Mathematics for Econometrics. New York: Springer, 1978.
14. *Dixit A. K.* Optimization in Economic Theory, 2nd ed. Oxford: Oxford University Press, 1990.
15. *Edwards C. H., Penney D. E.* Calculus with Analytic Geometry, 5th ed. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1998.
16. *Ellickson B.* Competitive Equilibrium. Theory and Applications. Cambridge: Cambridge University Press, 1993.
17. *Evans M., Hastings N., Peacock B.* Statistical Distributions, 2nd ed. New York: John Wiley & Sons, 1993.
18. *Faddeeva V. N.* Computational Methods of Linear Algebra. New York: Dover Publications, Inc., 1959. (Оригинал на русском: *Фаддеева В. Н.* Вычислительные методы линейной алгебры. М.;Л.: Гос. изд. техн.-теоретич. лит., 1950.)

19. *Feichtinger G., Hartl R. F.* Optimale Kontrolle Ökonomischer Prozesse. Berlin: Walter de Gruyter, 1986.
20. *Fleming W. H., Rishel R. W.* Deterministic and Stochastic Optimal Control. Berlin: Springer, 1975.
21. *Fraleigh J. B., Beauregard R. A.* Linear Algebra, 3rd ed. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1995.
22. *Friedman J. W.* Game Theory with Applications to Economics. Oxford: Oxford University Press, 1986.
23. *Fudenberg D., Tirole J.* Game Theory. Cambridge: MIT Press, 1991.
24. *Fuss M., McFadden D.* (eds.). Production Economics: A Dual Approach to Theory and Applications. Vol. I. Amsterdam: North-Holland, 1978.
25. *Førsund F.* The homothetic production function // The Swedish Journal of Economics, 1975. Vol. 77. P. 234–244.
26. *Gandolfo G.* Economic Dynamics, 3rd ed. Berlin: Springer, 1996.
27. *Gantmacher F. R.* The Theory of Matrices. New York: Chelsea Publishing Co., 1959. (Оригинал на русском: *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М.;Л.: Гос. изд. техн.-теоретич. лит., 1953.)
28. *Gass S. I.* Linear Programming: Methods and Applications, 5th ed. New York: McGraw-Hill, 1994. (Русский перевод: *Гасс С. И.* Линейное программирование: методы и приложения. М.: Физматгиз, 1961.)
29. *Gibbons R.* A Primer in Game Theory. New York: Harvester and Wheatsheaf, 1992.
30. *Goldberg S.* Introduction to Difference Equations. New York: John Wiley & Sons, 1961.
31. *Griffiths W. E., Carter Hill R., Judge G. G.* Learning and Practicing Econometrics. New York: John Wiley & Sons, 1993.
32. *Hadar J., Russell W. R.* Rules for ordering uncertain prospects // American Economic Review, 1969. Vol. 59. P. 25–34.
33. *Halmos P. R.* Naive Set Theory. New York: Springer, 1974.
34. *Hardy G. H., Littlewood J. E., Pólya G.* Inequalities. Cambridge: Cambridge University Press, 1952. (Русский перевод: *Харди Г. Г., Литтльвуд Дж. Е.* Динамическое программирование. М.: Изд. иностр. лит., 1960.)
35. *Hartman P.* Ordinary Differential Equations. Boston: Birkhäuser, 1982.
36. *Haug E. G.* The Complete Guide to Option Pricing Formulas. New York: McGraw-Hill, 1997.
37. *Hildebrand F. B.* Finite-Difference Equations and Simulations. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1968.
38. *Hildenbrand W.* Core and Equilibria of a Large Economy. Princeton: Princeton University Press, 1974. (Русский перевод: *Гильденбранд В.* Ядро и равновесие в большой экономике М.: Наука, 1986.)
39. *Hildenbrand W., Kirman A. P.* Introduction to Equilibrium Analysis. Amsterdam: North-Holland 1976.
40. *Hoel M., Moene K. O.* Produksjonsteori. 2.utg. Oslo: Universitetsforlaget, 1993.
41. *Hogg, R. V., Craig A. T.* Introduction to Mathematical Statistics, 5th ed. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1995.
42. *Horn R. A., Johnson C. R.* Matrix Analysis. Cambridge: Cambridge University Press, 1985. (Русский перевод: *Хорн Р., Джонсон Ч.* Матричный анализ. М.: Мир, 1989.)
43. *Huang, Chi-fu, Litzenberger R. H.* Foundations for Financial Economics. Amsterdam: North-Holland, 1988.

44. *Intriligator M. D.* Mathematical Optimization and Economic Theory. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1971. (Русский перевод: *Интрилигатор М.* Математические методы оптимизации и экономическая теория. М.: Прогресс, 1975.)
45. *Johnson N. L., Kotz S., Kemp S.* Univariate Discrete Distributions, 2nd ed. New York: John Wiley & Sons, 1993.
46. *Johnson N. L., Kotz S., Balakrishnan N.* Continuous Univariate Discrete Distributions. New York: John Wiley & Sons, 1995.
47. *Johnson N. L., Kotz S., Balakrishnan N.* Discrete Multivariate Distributions. New York: John Wiley & Sons, 1997.
48. *Kamien M. I., Schwartz N. I.* Dynamic Optimization: the Calculus of Variations and Optimal Control in Economics and Management, 2nd ed. Amsterdam: North-Holland, 1991.
49. *Karatzas I., Shreve S. E.* Brownian Motion and Stochastic Calculus, 2nd ed. New York: Springer, 1991.
50. *Kolmogorov A. N., Fomin S. V.* Introductory Real Analysis. New York: Dover Publications, 1975. (Оригинал на русском: *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1968.)
51. *Kreps D. M.* A Course in Microeconomic Theory. Princeton: Princeton University Press, 1990.
52. *Lang S.* Linear Algebra, 3rd ed. New York: Springer, 1987.
53. *Larsen R. J., Marx M. L.* An Introduction to Mathematical Statistics and its Applications. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1986.
54. *Léonard D., Van Long N.* Optimal Control Theory and Static Optimization in Economics. Cambridge: Cambridge University Press, 1992.
55. *Luenberger D. G.* Introduction to Linear and Nonlinear Programming, 2nd ed. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1984.
56. *Lütkepohl H.* Handbook of Matrices. New York: John Wiley & Sons, 1996.
57. *Magnus J. R., Neudecker H.* Matrix Differential Calculus with Applications in Statistics and Econometrics. New York: John Wiley & Sons, 1988.
58. *Marsden J. E., Hoffman M. J.* Elementary Classical Analysis, 2nd ed. San Francisco: W. H. Freeman and Company, 1993.
59. *Mas-Colell A., Whinston M. D., Green J. R.* Microeconomic Theory. Oxford: Oxford University Press, 1995.
60. *Merton R. C.* Theory of rational option pricing // Bell Journal of Economics and Management Science, 1973. Vol. 4. P. 141–183.
61. *Nikaido H.* Convex Structures and Economic Theory. London: Academic Press, 1968. (Русский перевод: *Никайдо X.* Выпуклые структуры и математическая экономика. М.: Мир, 1972.)
62. *Nikaido H.* Introduction to Sets and Mappings in Modern Economics. Amsterdam: North-Holland, 1970.
63. *Norstrøm C. J.* A sufficient condition for a unique nonnegative internal rate of return // Journal of Financial and Quantitative Analysis, 1972. Vol. 7. P. 1835–1839.
64. *Parthasarathy T.* On Global Univalence Theorems. Lecture Notes in Mathematics. No. 977. Berlin: Springer, 1983.
65. *Phlips L.* Applied Consumption Analysis. Amsterdam: North-Holland, 1983.
66. *Pontryagin L. S.* Ordinary Differential Equations. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1962. (Оригинал на русском: *Понтрягин Л. С.* Обыкновенные дифференциальные

уравнения. М.: Физматгиз, 1961.)

67. *Rockafellar T.* Convex Analysis. Princeton: Princeton University Press, 1970. (Русский перевод: *Рокафеллар Т.* Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973.)
68. *Rothschild M., Stiglitz J.* Increasing risk: (1) A definition // Journal of Economic Theory, 1970. Vol. 2. P. 225–243.
69. *Royden H. L.* Real Analysis, 3rd ed. New York: Macmillan, 1968.
70. *Rudin W.* Principles of Mathematical Analysis, 2nd ed. New York: McGraw-Hill, 1982. (Русский перевод 1-го изд.: *Рудин У.* Основы математического анализа. М.: Мир, 1966.)
71. *Rødseth A.* Konsumentteori. 3.utg. Oslo: Universitetsforlaget, 1997.
72. *Scarf H. (with the collaboration of T. Hansen)* The Computation of Economic Equilibria. Cowles Foundation Monograph, 24. New Haven: Yale University Press, 1973.
73. *Seierstad A., Sydsæter K.* Optimal Control Theory with Economic Applications. Amsterdam: North-Holland, 1987.
74. *Sharpe W. F.* Capital asset prices: A theory of market equilibrium under conditions of risk // Journal of Finance, 1964. Vol. 19. P. 425–442.
75. *Shephard R. W.* Cost and Production Functions. Princeton: Princeton University Press, 1970.
76. *Silberberg E.* The Structure of Economics. A Mathematical Analysis, 2nd ed. New York: McGraw-Hill, 1990.
77. *Simon C. P., Blume L.* Mathematics for Economists. New York: Norton, 1994.
78. *Sneddon I. N.* Elements of Partial Differential Equations. New York: McGraw-Hill, 1957.
79. *Stokey N. L., Lucas R. E., Prescott E. C.* Recursive Methods in Economic Dynamics. Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1989.
80. *Sundaram R. K.* A First Course in Optimization Theory. Cambridge: Cambridge University Press, 1996.
81. *Sydsæter K., Hammond P. J.* Matematisk Analyse: Bind I. 6.utg. Oslo: Universitetsforlaget, 1994.
82. *Sydsæter K., Seierstad A., Strøm A.* Matematisk Analyse: Bind II. 3.utg. Oslo: Universitetsforlaget, 1990.
83. *Sydsæter K., Øksendal B.* Lineær Algebra: Med en innføring i lineær programming. 4.utg. Oslo: Universitetsforlaget, 1996.
84. *Takayama A.* Mathematical Economics, 2nd ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1985.
85. *Turnbull H. W.* Theory of Equations, 5th ed. Edinburgh: Oliver & Boyd, 1952.
86. *Varian H.* Microeconomic Analysis, 3rd ed. New York: Norton, 1992.
87. *Weibull J. W.* Evolutionary Game Theory. Cambridge: MIT Press, 1995.
88. *Zachmanoglou E. C., Thoe D. W.* Introduction to Partial Differential Equations with Applications. New York: Dover Publications, 1986.
89. *Øksendal, B.* Stochastic Differential Equations, an Introduction with Applications, 5th ed. Berlin: Springer, 1998.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

С 98 *Сюдсетер К., Стрём А., Берк П.* **Справочник по математике для экономистов** / Пер. с норвежск. Под редакцией Е. Ю. Смирновой. СПб. : Экономическая школа, 2000. X + 229 с.

ISBN 5-900428-56-7

Авторы справочника первыми решили задачу создания списка тех формул и математических утверждений, знание которых необходимо студентам высших учебных заведений при знакомстве с общим курсом высшей математики и изучении математических методов анализа экономики. Эта выборка охватывает дифференциальное исчисление, матричную алгебру, математическое программирование, оптимальное управление, теорию поведения потребителя, производственные функции, модели роста, финансовую математику, теорию игр и прикладную статистику.

Краткие комментарии помогут читателю освежить в памяти математические результаты, как порожденные потребностями экономических исследований, так и носящие универсальный характер. Книга выдержала уже три издания на нескольких языках и пользуется устойчивым спросом в Европе, Америке, Японии и Африке. Третье издание дополнено 250 формулами.

Учебная литература. Выпуск 30

Кнут Сюдсетер, Арне Стрём, Питер Берк

СПРАВОЧНИК ПО МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ ЭКОНОМИСТОВ

Редактор *Е. Ю. Смирнова*
Художник *Г. О. Вельте*
Технический редактор *Л. П. Полякова*
Корректор *Е. Я. Лапинь*
Компьютерная верстка *М. К. Лебедев*

Подписано в печать 15.11.00.
Формат $70\times100^1/_{16}$. Печать офсетная. Усл. печ. л. 19,35.
Уч.-изд. л. 14,0. Тираж 2000 экз. Заказ № 2268.

«Экономическая школа».
192241, Санкт-Петербург, Пражская ул., д. 30, корп. 1.
Лицензия № 061692 от 19 октября 1997 г.
Отпечатано с оригинал-макета в ГПП «Печатный двор»
Министерства РФ по делам печати, телерадиовещания
и средств массовых коммуникаций.
197110, Санкт-Петербург, Чкаловский пр., 15.

Авторы справочника первыми решили задачу создания списка тех формул и математических утверждений, знание которых необходимо студентам высших учебных заведений при знакомстве с общим курсом высшей математики и изучении математических методов анализа экономики. Эта выборка охватывает дифференциальное исчисление, матричную алгебру, математическое программирование, оптимальное управление, теорию поведения потребителя, производственные функции, модели роста, финансовую математику, теорию игр и прикладную статистику.

Краткие комментарии помогут читателю освежить в памяти математические результаты, как порожденные потребностями экономических исследований, так и носящие универсальный характер. Книга выдержала уже три издания на нескольких языках и пользуется устойчивым спросом в Европе, Японии и Африке. Третье издание дополнено 250 формулами.

ISBN 5-900428-56-7
9 785900 428567