

А. Д. ПОЛЯНИН, А. В. МАНЖИРОВ

**СПРАВОЧНИК
ПО ИНТЕГРАЛЬНЫМ
УРАВНЕНИЯМ**

МОСКВА
ИЗДАТЕЛЬСКАЯ ФИРМА
«ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛИТЕРАТУРА»
2003

УДК 517.9
ББК 517.2
П-54

Полянин А. Д., Манжиров А. В. **Справочник по интегральным уравнениям.** — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. — 608 с. — ISBN 5-9221-0288-5.

Справочник содержит более 2200 интегральных уравнений с решениями. Особое внимание уделено уравнениям общего вида, которые зависят от произвольных функций.

Излагаются точные, асимптотические, приближенные аналитические и численные методы решения линейных и нелинейных интегральных уравнений. Для лучшего понимания описанных методов даны примеры решения конкретных уравнений.

Рассмотрен ряд интегральных уравнений, которые встречаются в теории упругости, теории пластичности, теории массо- и теплопереноса, аэро- и гидродинамике, теории колебаний, электродинамике и других приложениях.

В целом справочник содержит больше интегральных уравнений, чем любые другие книги.

Справочник предназначен для широкого круга научных работников, преподавателей вузов, инженеров и студентов, специализирующихся в различных областях математики, механики, физики, теории управления и инженерных наук.

Табл. 7. Ил. 4. Библиогр. 136 назв.

Справочное издание

*ПОЛЯНИН Андрей Дмитриевич
МАНЖИРОВ Александр Владимирович*

СПРАВОЧНИК ПО ИНТЕГРАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ

Компьютерная верстка *А. В. Манжиров, А. Д. Полянин*

Формат 70 × 100/16. Гарнитура таймс. Бумага офсетная № 1. Печать офсетная. Усл. печ. л. 49. Усл. изд. л. 56,5. Подписано к печати 27.09.2003. Тираж 5000 экз. Заказ № .

Издательская фирма «Физико-математическая литература»
МАИК «Наука/Интерпериодика»
119864, Москва, ул. Профсоюзная, 90

Отпечатано с готовых диапозитивов в РГУП «Чебоксарская типография № 1»
428010, г. Чебоксары, пр. И. Яковлева, 15

ISBN 5-9221-0288-5

© А. Д. Полянин, А. В. Манжиров, 2003
© Физматлит, 2003

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	13
Некоторые обозначения и замечания	14
1. Линейные уравнения первого рода с переменным пределом интегрирования	15
1.1. Уравнения, ядра которых содержат степенные функции	15
1.1-1. Ядра уравнений линейны по аргументам x, t	15
1.1-2. Ядра уравнений квадратичны по аргументам x, t	16
1.1-3. Ядра уравнений в виде кубических полиномов по аргументам x, t	16
1.1-4. Ядра уравнений в виде полиномов более высокой степени	18
1.1-5. Ядра уравнений, содержащие рациональные функции	18
1.1-6. Ядра уравнений, содержащие квадратные корни	20
1.1-7. Ядра уравнений, содержащие произвольные степени	22
1.2. Уравнения, ядра которых содержат экспоненциальные функции	25
1.2-1. Ядра уравнений, содержащие экспоненциальные функции	25
1.2-2. Ядра уравнений, содержащие экспоненциальные и степенные функции	28
1.3. Уравнения, ядра которых содержат гиперболические функции	31
1.3-1. Ядра уравнений, содержащие гиперболический косинус	31
1.3-2. Ядра уравнений, содержащие гиперболический синус	36
1.3-3. Ядра уравнений, содержащие гиперболический тангенс	42
1.3-4. Ядра уравнений, содержащие гиперболический котангенс	44
1.3-5. Ядра уравнений, содержащие комбинации гиперболических функций	45
1.4. Уравнения, ядра которых содержат логарифмические функции	47
1.4-1. Ядра уравнений, содержащие логарифмические функции	47
1.4-2. Ядра уравнений, содержащие степенные и логарифмические функции	49
1.5. Уравнения, ядра которых содержат тригонометрические функции	50
1.5-1. Ядра уравнений, содержащие косинус	50
1.5-2. Ядра уравнений, содержащие синус	55
1.5-3. Ядра уравнений, содержащие тангенс	61
1.5-4. Ядра уравнений, содержащие котангенс	63
1.5-5. Ядра уравнений, содержащие комбинации тригонометрических функций	64
1.6. Уравнения, ядра которых содержат обратные тригонометрические функции	67
1.6-1. Ядра уравнений, содержащие арккосинус	67
1.6-2. Ядра уравнений, содержащие арксинус	68
1.6-3. Ядра уравнений, содержащие арктангенс	69
1.6-4. Ядра уравнений, содержащие арккотангенс	71
1.7. Уравнения, ядра которых содержат комбинации элементарных функций	72
1.7-1. Ядра уравнений, содержащие экспоненциальные и гиперболические функции	72
1.7-2. Ядра уравнений, содержащие экспоненциальные и логарифмические функции	76
1.7-3. Ядра уравнений, содержащие экспоненциальные и тригонометрические функции	77
1.7-4. Ядра уравнений, содержащие гиперболические и логарифмические функции	81
1.7-5. Ядра уравнений, содержащие гиперболические и тригонометрические функции	82
1.7-6. Ядра уравнений, содержащие логарифмические и тригонометрические функции	83
1.8. Уравнения, ядра которых содержат специальные функции	83
1.8-1. Ядра уравнений, содержащие функции Бесселя	83
1.8-2. Ядра уравнений, содержащие модифицированные функции Бесселя	89
1.8-3. Ядра уравнений, содержащие присоединенные функции Лежандра	95
1.8-4. Ядра уравнений, содержащие гипергеометрические функции	95
1.9. Уравнения, ядра которых содержат произвольные функции	96
1.9-1. Уравнения с вырожденным ядром $K(x, t) = g_1(x)h_1(t) + g_2(x)h_2(t)$	96
1.9-2. Уравнения с разностным ядром: $K(x, t) = K(x - t)$	98
1.9-3. Другие уравнения	104
1.10. Некоторые формулы и преобразования	106

2. Линейные уравнения второго рода с переменным пределом интегрирования . . .	108
2.1. Уравнения, ядра которых содержат степенные функции	108
2.1-1. Ядра уравнений линейны по аргументам x, t	108
2.1-2. Ядра уравнений квадратичны по аргументам x, t	109
2.1-3. Ядра уравнений в виде кубических полиномов по аргументам x, t	112
2.1-4. Ядра уравнений в виде полиномов с более высокой степенью	113
2.1-5. Ядра уравнений, содержащие рациональные функции	115
2.1-6. Ядра уравнений, содержащие квадратные корни и дробные степени	117
2.1-7. Ядра уравнений, содержащие произвольные степени	118
2.2. Уравнения, ядра которых содержат экспоненциальные функции	122
2.2-1. Ядра уравнений, содержащие экспоненциальные функции	122
2.2-2. Ядра уравнений, содержащие степенные и экспоненциальные функции	128
2.3. Уравнения, ядра которых содержат гиперболические функции	131
2.3-1. Ядра уравнений, содержащие гиперболический косинус	131
2.3-2. Ядра уравнений, содержащие гиперболический синус	133
2.3-3. Ядра уравнений, содержащие гиперболический тангенс	137
2.3-4. Ядра уравнений, содержащие гиперболический котангенс	138
2.3-5. Ядра уравнений, содержащие комбинации гиперболических функций	139
2.4. Уравнения, ядра которых содержат логарифмические функции	139
2.4-1. Ядра уравнений, содержащие логарифмические функции	139
2.4-2. Ядра уравнений, содержащие степенные и логарифмические функции	141
2.5. Уравнения, ядра которых содержат тригонометрические функции	141
2.5-1. Ядра уравнений, содержащие косинус	141
2.5-2. Ядра уравнений, содержащие синус	144
2.5-3. Ядра уравнений, содержащие тангенс	148
2.5-4. Ядра уравнений, содержащие котангенс	149
2.5-5. Ядра уравнений, содержащие комбинации тригонометрических функций	150
2.6. Уравнения, ядра которых содержат обратные тригонометрические функции	150
2.6-1. Ядра уравнений, содержащие арккосинус	150
2.6-2. Ядра уравнений, содержащие арксинус	151
2.6-3. Ядра уравнений, содержащие арктангенс	151
2.6-4. Ядра уравнений, содержащие арккотангенс	152
2.7. Уравнения, ядра которых содержат комбинации элементарных функций	153
2.7-1. Ядра уравнений, содержащие экспоненциальные и гиперболические функции	153
2.7-2. Ядра уравнений, содержащие экспоненциальные и логарифмические функции	153
2.7-3. Ядра уравнений, содержащие экспоненциальные и тригонометрические функции	154
2.7-4. Ядра уравнений, содержащие гиперболические и логарифмические функции	157
2.7-5. Ядра уравнений, содержащие гиперболические и тригонометрические функции	158
2.7-6. Ядра уравнений, содержащие логарифмические и тригонометрические функции	159
2.8. Уравнения, ядра которых содержат специальные функции	159
2.8-1. Ядра уравнений, содержащие функции Бесселя	159
2.8-2. Ядра уравнений, содержащие модифицированные функции Бесселя	161
2.9. Уравнения, ядра которых содержат произвольные функции	162
2.9-1. Уравнения с ядром вида $K(x, t) = g_1(x)h_1(t) + \dots + g_n(x)h_n(t)$	162
2.9-2. Уравнения с разностным ядром: $K(x, t) = K(x - t)$	172
2.9-3. Другие уравнения	180
2.10. Некоторые формулы	183
3. Линейные уравнения первого рода с постоянными пределами интегрирования . .	184
3.1. Уравнения, ядра которых содержат степенные функции	184
3.1-1. Ядра уравнений линейны по аргументам x, t	184
3.1-2. Ядра уравнений квадратичны по аргументам x, t	186
3.1-3. Ядра уравнений, содержащие целые степени аргументов x, t	186
3.1-4. Ядро уравнения, содержащее рациональную функцию	187
3.1-5. Ядра уравнений, содержащие квадратные корни	188
3.1-6. Ядра уравнений, содержащие произвольные степени	189
3.1-7. Уравнения, содержащие неизвестную функцию сложного аргумента	192
3.1-8. Сингулярные уравнения	193
3.2. Уравнения, ядра которых содержат экспоненциальные функции	194
3.2-1. Ядра уравнений, содержащие экспоненциальные функции	194
3.2-2. Ядра уравнений, содержащие степенные и экспоненциальные функции	197

3.3. Уравнения, ядра которых содержат гиперболические функции	198
3.3-1. Ядра уравнений, содержащие гиперболический косинус	198
3.3-2. Ядра уравнений, содержащие гиперболический синус	198
3.3-3. Ядра уравнений, содержащие гиперболический тангенс	201
3.3-4. Ядра уравнений, содержащие гиперболический котангенс	201
3.4. Уравнения, ядра которых содержат логарифмические функции	202
3.4-1. Ядра уравнений, содержащие логарифмические функции	202
3.4-2. Ядра уравнений, содержащие степенные и логарифмические функции	203
3.4-3. Уравнение, содержащее неизвестную функцию сложного аргумента	204
3.5. Уравнения, ядра которых содержат тригонометрические функции	204
3.5-1. Ядра уравнений, содержащие косинус	204
3.5-2. Ядра уравнений, содержащие синус	205
3.5-3. Ядра уравнений, содержащие тангенс	207
3.5-4. Ядра уравнений, содержащие котангенс	208
3.5-5. Ядра уравнений, содержащие комбинации тригонометрических функций	208
3.5-6. Уравнения, содержащие неизвестную функцию сложного аргумента	209
3.5-7. Сингулярное уравнение	209
3.6. Уравнения, ядра которых содержат комбинации элементарных функций	210
3.6-1. Ядра уравнений, содержащие гиперболические и логарифмические функции	210
3.6-2. Ядра уравнений, содержащие логарифмические и тригонометрические функции	211
3.7. Уравнения, ядра которых содержат специальные функции	211
3.7-1. Ядра уравнений, содержащие функции Бесселя	211
3.7-2. Ядра уравнений, содержащие модифицированные функции Бесселя	212
3.7-3. Другие ядра	212
3.8. Уравнения, ядра которых содержат произвольные функции	213
3.8-1. Уравнения с вырожденным ядром	213
3.8-2. Уравнения, содержащие знак модуля	213
3.8-3. Уравнения с разностным ядром: $K(x, t) = K(x - t)$	218
3.8-4. Другие уравнения вида $\int_a^b K(x, t)y(t) dt = F(x)$	219
3.8-5. Уравнения вида $\int_a^b K(x, t)y(\dots) dt = F(x)$	220
4. Линейные уравнения второго рода с постоянными пределами интегрирования	227
4.1. Уравнения, ядра которых содержат степенные функции	227
4.1-1. Ядра уравнений линейны по аргументам x, t	227
4.1-2. Ядра уравнений квадратичны по аргументам x, t	229
4.1-3. Ядра уравнений в виде кубических полиномов по аргументам x, t	232
4.1-4. Ядра уравнений в виде полиномов более высокой степени	235
4.1-5. Ядра уравнений, содержащие рациональные функции	238
4.1-6. Ядра уравнений, содержащие произвольные степени	240
4.1-7. Сингулярные уравнения	242
4.2. Уравнения, ядра которых содержат экспоненциальные функции	242
4.2-1. Ядра уравнений, содержащие экспоненциальные функции	242
4.2-2. Ядра уравнений, содержащие экспоненциальные и степенные функции	247
4.3. Уравнения, ядра которых содержат гиперболические функции	249
4.3-1. Ядра уравнений, содержащие гиперболический косинус	249
4.3-2. Ядра уравнений, содержащие гиперболический синус	250
4.3-3. Ядра уравнений, содержащие гиперболический тангенс	253
4.3-4. Ядра уравнений, содержащие гиперболический котангенс	253
4.3-5. Ядра уравнений, содержащие комбинации гиперболических функций	254
4.4. Уравнения, ядра которых содержат логарифмические функции	255
4.4-1. Ядра уравнений, содержащие логарифмические функции	255
4.4-2. Ядра уравнений, содержащие степенные и логарифмические функции	255
4.5. Уравнения, ядра которых содержат тригонометрические функции	256
4.5-1. Ядра уравнений, содержащие косинус	256
4.5-2. Ядра уравнений, содержащие синус	258
4.5-3. Ядра уравнений, содержащие тангенс	261
4.5-4. Ядра уравнений, содержащие котангенс	262
4.5-5. Ядра уравнений, содержащие комбинации тригонометрических функций	263
4.5-6. Сингулярное уравнение	263
4.6. Уравнения, ядра которых содержат обратные тригонометрические функции	263
4.6-1. Ядра уравнений, содержащие арккосинус	263
4.6-2. Ядра уравнений, содержащие арксинус	264
4.6-3. Ядра уравнений, содержащие арктангенс	265
4.6-4. Ядра уравнений, содержащие арккотангенс	266

4.7. Уравнения, ядра которых содержат комбинации элементарных функций	267
4.7-1. Ядра уравнений, содержащие экспоненциальные и гиперболические функции	267
4.7-2. Ядра уравнений, содержащие экспоненциальные и логарифмические функции	267
4.7-3. Ядра уравнений, содержащие экспоненциальные и тригонометрические функции	268
4.7-4. Ядра уравнений, содержащие гиперболические и логарифмические функции	269
4.7-5. Ядра уравнений, содержащие гиперболические и тригонометрические функции	270
4.7-6. Ядра уравнений, содержащие логарифмические и тригонометрические функции	271
4.8. Уравнения, ядра которых содержат специальные функции	271
4.8-1. Ядра уравнений, содержащие функции Бесселя	271
4.8-2. Ядра уравнений, содержащие модифицированные функции Бесселя	273
4.9. Уравнения, ядра которых содержат произвольные функции	274
4.9-1. Уравнения с ядром вида $K(x, t) = g_1(x)h_1(t) + \dots + g_n(x)h_n(t)$	274
4.9-2. Уравнения с разностным ядром: $K(x, t) = K(x - t)$	287
4.9-3. Другие уравнения вида $y(x) + \int_a^b K(x, t)y(t) dt = F(x)$	289
4.9-4. Уравнения вида $y(x) + \int_a^b K(x, t)y(\dots) dt = F(x)$	293
4.10. Некоторые формулы и преобразования	301
5. Нелинейные уравнения с переменным пределом интегрирования	302
5.1. Уравнения с квадратичной нелинейностью, содержащие произвольные параметры	302
5.1-1. Уравнения вида $\int_0^x y(t)y(x-t) dt = F(x)$	302
5.1-2. Уравнения вида $\int_0^x K(x, t)y(t)y(x-t) dt = F(x)$	304
5.1-3. Уравнения вида $\int_0^x G(\dots) dt = F(x)$	305
5.1-4. Уравнения вида $y(x) + \int_a^x K(x, t)y^2(t) dt = F(x)$	305
5.1-5. Уравнения вида $y(x) + \int_a^x K(x, t)y(t)y(x-t) dt = F(x)$	307
5.2. Уравнения с квадратичной нелинейностью, содержащие произвольные функции	308
5.2-1. Уравнения вида $\int_a^x G(\dots) dt = F(x)$	308
5.2-2. Уравнения вида $y(x) + \int_a^x K(x, t)y^2(t) dt = F(x)$	309
5.2-3. Уравнения вида $y(x) + \int_a^x G(\dots) dt = F(x)$	310
5.3. Уравнения со степенной нелинейностью	310
5.3-1. Уравнения, содержащие произвольные параметры	310
5.3-2. Уравнения, содержащие произвольные функции	312
5.4. Уравнения с экспоненциальной нелинейностью	313
5.4-1. Уравнения, содержащие произвольные параметры	313
5.4-2. Уравнения, содержащие произвольные функции	315
5.5. Уравнения с гиперболическими нелинейностями	315
5.5-1. Подынтегральные выражения с нелинейностью вида $\text{ch}[\beta y(t)]$	315
5.5-2. Подынтегральные выражения с нелинейностью вида $\text{sh}[\beta y(t)]$	316
5.5-3. Подынтегральные выражения с нелинейностью вида $\text{th}[\beta y(t)]$	317
5.5-4. Подынтегральные выражения с нелинейностью вида $\text{cth}[\beta y(t)]$	318
5.6. Уравнения с логарифмической нелинейностью	319
5.6-1. Подынтегральные выражения, содержащие степенные функции	319
5.6-2. Подынтегральные выражения, содержащие экспоненциальные функции	320
5.6-3. Другие подынтегральные выражения	320
5.7. Уравнения с тригонометрическими нелинейностями	321
5.7-1. Подынтегральные выражения с нелинейностью вида $\cos[\beta y(t)]$	321
5.7-2. Подынтегральные выражения с нелинейностью вида $\sin[\beta y(t)]$	322
5.7-3. Подынтегральные выражения с нелинейностью вида $\text{tg}[\beta y(t)]$	323
5.7-4. Подынтегральные выражения с нелинейностью вида $\text{ctg}[\beta y(t)]$	324
5.8. Уравнения с нелинейностями общего вида	325
5.8-1. Уравнения вида $\int_a^x G(\dots) dt = F(x)$	325
5.8-2. Уравнения вида $y(x) + \int_a^x K(x, t)G(y(t)) dt = F(x)$	325
5.8-3. Уравнения вида $y(x) + \int_a^x K(x, t)G(t, y(t)) dt = F(x)$	328
5.8-4. Другие уравнения	330

6. Нелинейные уравнения с постоянными пределами интегрирования	331
6.1. Уравнения с квадратичной нелинейностью, содержащие произвольные параметры	331
6.1-1. Уравнения вида $\int_a^b K(t)y(x)y(t) dt = F(x)$	331
6.1-2. Уравнения вида $\int_a^b G(\cdots) dt = F(x)$	332
6.1-3. Уравнения вида $y(x) + \int_a^b K(x, t)y^2(t) dt = F(x)$	334
6.1-4. Уравнения вида $y(x) + \int_a^b K(x, t)y(x)y(t) dt = F(x)$	335
6.1-5. Уравнения вида $y(x) + \int_a^b G(\cdots) dt = F(x)$	335
6.2. Уравнения с квадратичной нелинейностью, содержащие произвольные функции	337
6.2-1. Уравнения вида $\int_a^b G(\cdots) dt = F(x)$	337
6.2-2. Уравнения вида $y(x) + \int_a^b K(x, t)y^2(t) dt = F(x)$	342
6.2-3. Уравнения вида $y(x) + \int_a^b \sum K_{nm}(x, t)y^n(x)y^m(t) dt = F(x)$	343
6.2-4. Уравнения вида $y(x) + \int_a^b G(\cdots) dt = F(x)$	344
6.3. Уравнения со степенной нелинейностью	347
6.3-1. Уравнения вида $\int_a^b G(\cdots) dt = F(x)$	347
6.3-2. Уравнения вида $y(x) + \int_a^b K(x, t)y^\beta(t) dt = F(x)$	348
6.3-3. Уравнения вида $y(x) + \int_a^b G(\cdots) dt = F(x)$	349
6.4. Уравнения с экспоненциальными нелинейностями	350
6.4-1. Подынтегральные выражения с нелинейностью вида $\exp[\beta y(t)]$	350
6.4-2. Другие подынтегральные выражения	351
6.5. Уравнения с гиперболическими нелинейностями	351
6.5-1. Подынтегральные выражения с нелинейностью вида $\text{ch}[\beta y(t)]$	351
6.5-2. Подынтегральные выражения с нелинейностью вида $\text{sh}[\beta y(t)]$	352
6.5-3. Подынтегральные выражения с нелинейностью вида $\text{th}[\beta y(t)]$	352
6.5-4. Подынтегральные выражения с нелинейностью вида $\text{cth}[\beta y(t)]$	353
6.5-5. Другие подынтегральные выражения	354
6.6. Уравнения с логарифмическими нелинейностями	355
6.6-1. Подынтегральные выражения с нелинейностью вида $\ln[\beta y(t)]$	355
6.6-2. Другие подынтегральные выражения	355
6.7. Уравнения с тригонометрическими нелинейностями	356
6.7-1. Подынтегральные выражения с нелинейностью вида $\cos[\beta y(t)]$	356
6.7-2. Подынтегральные выражения с нелинейностью вида $\sin[\beta y(t)]$	356
6.7-3. Подынтегральные выражения с нелинейностью вида $\text{tg}[\beta y(t)]$	357
6.7-4. Подынтегральные выражения с нелинейностью вида $\text{ctg}[\beta y(t)]$	358
6.7-5. Другие подынтегральные выражения	359
6.8. Уравнения с нелинейностями общего вида	359
6.8-1. Уравнения вида $\int_a^b G(\cdots) dt = F(x)$	359
6.8-2. Уравнения вида $y(x) + \int_a^b K(x, t)G(y(t)) dt = F(x)$	362
6.8-3. Уравнения вида $y(x) + \int_a^b K(x, t)G(t, y(t)) dt = F(x)$	364
6.8-4. Уравнения вида $y(x) + \int_a^b G(x, t, y(t)) dt = F(x)$	367
6.8-5. Уравнения вида $F(x, y(x)) + \int_a^b G(x, t, y(x), y(t)) dt = 0$	368
6.8-6. Другие уравнения	368
7. Основные определения и формулы. Интегральные преобразования	378
7.1. Некоторые определения, замечания и формулы	378
7.1-1. Некоторые определения	378
7.1-2. Структура решений линейных интегральных уравнений	379
7.1-3. Интегральные преобразования	379
7.1-4. Вычеты. Формулы для вычислений	381
7.1-5. Лемма Жордана	381
7.2. Преобразование Лапласа	381
7.2-1. Определение. Формула обращения	381
7.2-2. Обращение рациональных функций	382
7.2-3. Представление оригиналов в виде ряда	382
7.2-4. Теорема о свертке для преобразования Лапласа	383
7.2-5. Предельные теоремы	383
7.2-6. Основные свойства преобразования Лапласа	383
7.2-7. Формула Поста–Уидлера	384

7.3. Преобразование Меллина	384
7.3-1. Определение. Формула обращения	384
7.3-2. Основные свойства преобразования Меллина	385
7.3-3. Связь преобразований Меллина, Лапласа и Фурье	385
7.4. Преобразование Фурье	385
7.4-1. Определение. Формула обращения	385
7.4-2. Несимметричная форма преобразования	386
7.4-3. Альтернативное преобразование Фурье	386
7.4-4. Теорема о свертке для преобразования Фурье	386
7.5. Синус- и косинус-преобразования Фурье	387
7.5-1. Косинус-преобразование Фурье	387
7.5-2. Синус-преобразование Фурье	387
7.6. Другие интегральные преобразования	388
7.6-1. Преобразование Ханкеля	388
7.6-2. Преобразование Мейера	388
7.6-3. Преобразование Конторовича–Лебедева	388
7.6-4. У-преобразование и другие преобразования	389
8. Методы решения линейных уравнений вида $\int_a^x K(x, t)y(t) dt = f(x)$	391
8.1. Уравнения Вольтерра первого рода	391
8.1-1. Структура уравнений. Классы функций и ядер	391
8.1-2. Существование и единственность решения	392
8.2. Уравнения с вырожденным ядром: $K(x, t) = g_1(x)h_1(t) + \dots + g_n(x)h_n(t)$	392
8.2-1. Уравнения с ядром $K(x, t) = g_1(x)h_1(t) + g_2(x)h_2(t)$	392
8.2-2. Уравнения с вырожденным ядром общего вида	393
8.3. Сведение уравнений Вольтерра первого рода к уравнениям Вольтерра второго рода	393
8.3-1. Первый способ	393
8.3-2. Второй способ	394
8.4. Уравнения с разностным ядром: $K(x, t) = K(x - t)$	394
8.4-1. Метод решения, основанный на преобразовании Лапласа	394
8.4-2. Случай рационального образа решения	395
8.4-3. Представление решения в виде композиции	395
8.4-4. Использование вспомогательного уравнения	396
8.4-5. Сведение к обыкновенным дифференциальным уравнениям	396
8.4-6. Связь уравнений Вольтерра и Винера–Хопфа	397
8.5. Метод дробного дифференцирования	397
8.5-1. Определение дробных интегралов	397
8.5-2. Определение дробных производных	398
8.5-3. Основные свойства	399
8.5-4. Решение обобщенного уравнения Абеля	399
8.6. Уравнения с ядрами, имеющими слабую особенность	400
8.6-1. Метод преобразования ядра	400
8.6-2. Ядро с логарифмической особенностью	401
8.7. Метод квадратур	402
8.7-1. Квадратурные формулы	402
8.7-2. Общая схема метода	402
8.7-3. Алгоритм на основе формулы трапеций	403
8.7-4. Алгоритм для уравнения с вырожденным ядром	404
8.8. Уравнения с бесконечным пределом интегрирования	404
8.8-1. Уравнение с переменным нижним пределом интегрирования	404
8.8-2. Приведение к уравнению Винера–Хопфа первого рода	405
9. Методы решения линейных уравнений вида $y(x) - \int_a^x K(x, t)y(t) dt = f(x)$	406
9.1. Интегральные уравнения Вольтерра второго рода	406
9.1-1. Предварительные замечания. Уравнения для резольвенты	406
9.1-2. Связь между решениями интегральных уравнений	406
9.2. Уравнения с вырожденным ядром: $K(x, t) = g_1(x)h_1(t) + \dots + g_n(x)h_n(t)$	407
9.2-1. Уравнения с ядром $K(x, t) = \varphi(x) + \psi(x)(x - t)$	407
9.2-2. Уравнения с ядром $K(x, t) = \varphi(t) + \psi(t)(t - x)$	408
9.2-3. Уравнения с ядром $K(x, t) = \sum_{m=1}^n \varphi_m(x)(x - t)^{m-1}$	408
9.2-4. Уравнения с ядром $K(x, t) = \sum_{m=1}^n \varphi_m(t)(t - x)^{m-1}$	409
9.2-5. Уравнения с вырожденным ядром общего вида	409

9.3. Уравнения с разностным ядром: $K(x, t) = K(x - t)$	410
9.3-1. Метод решения, основанный на преобразовании Лапласа	410
9.3-2. Метод, основанный на решении вспомогательного уравнения	412
9.3-3. Сведение к обыкновенным дифференциальным уравнениям	412
9.3-4. Приведение к уравнению Винера–Хопфа второго рода	413
9.3-5. Метод дробного интегрирования для уравнения Абеля	413
9.3-6. Системы интегральных уравнений Вольтерра	414
9.4. Операторные методы решения линейных интегральных уравнений	414
9.4-1. Использование решения «укороченного» уравнения	414
9.4-2. Использование вспомогательного уравнения второго рода	416
9.4-3. Метод решения «квадратных» операторных уравнений	417
9.4-4. Решение операторных уравнений полиномиального вида	418
9.4-5. Некоторые обобщения	418
9.5. Построение решений уравнений со специальной правой частью	419
9.5-1. Общая схема	419
9.5-2. Порождающая функция экспоненциального вида	419
9.5-3. Порождающая функция степенного вида	421
9.5-4. Порождающая функция, содержащая синусы или косинусы	422
9.6. Метод модельных решений	423
9.6-1. Предварительные замечания	423
9.6-2. Описание метода	424
9.6-3. Модельное решение для экспоненциальной правой части	424
9.6-4. Модельное решение для степенной правой части	425
9.6-5. Модельное решение для синусоидальной правой части	426
9.6-6. Модельное решение для косинусоидальной правой части	426
9.6-7. Некоторые обобщения	426
9.7. Метод дифференцирования интегральных уравнений	427
9.7-1. Ядро содержит сумму экспонент	427
9.7-2. Ядро содержит сумму гиперболических функций	428
9.7-3. Ядро содержит сумму тригонометрических функций	429
9.7-4. Ядро содержит комбинации различных функций	430
9.8. Сведение уравнений Вольтерра второго рода к уравнениям Вольтерра первого рода	430
9.8-1. Первый способ	430
9.8-2. Второй способ	430
9.9. Метод последовательных приближений	431
9.9-1. Общая схема	431
9.9-2. Формула для резольвенты	432
9.10. Метод квадратур	432
9.10-1. Общая схема метода	432
9.10-2. Применение формулы трапеций	433
9.10-3. Случай вырожденного ядра	433
9.11. Уравнения с бесконечным пределом интегрирования	433
9.11-1. Случай переменного нижнего предела интегрирования	433
9.11-2. Приведение к уравнению Винера–Хопфа второго рода	435
10. Методы решения линейных уравнений вида $\int_a^b K(x, t)y(t) dt = f(x)$	436
10.1. Предварительные замечания	436
10.1-1. Интегральные уравнения Фредгольма первого рода	436
10.1-2. Интегральные уравнения первого рода со слабой особенностью	436
10.1-3. Интегральные уравнения типа свертки	436
10.1-4. Парные интегральные уравнения первого рода	437
10.2. Метод Крейна	438
10.2-1. Основное и вспомогательное уравнения	438
10.2-2. Решение основного уравнения	438
10.3. Метод интегральных преобразований	439
10.3-1. Уравнение с разностным ядром на всей оси	439
10.3-2. Уравнения с ядром $K(x, t) = K(x/t)$ на полуоси	439
10.3-3. Уравнение с ядром $K(x, t) = K(xt)$ и его обобщения	439
10.4. Задача Римана для действительной оси	440
10.4-1. Связь интеграла Фурье с интегралом типа Коши	440
10.4-2. Односторонние интегралы Фурье	441
10.4-3. Теорема об аналитическом продолжении и теорема Лиувилля	443
10.4-4. Краевая задача Римана	443
10.4-5. Задача Римана с рациональными коэффициентами	448
10.4-6. Исключительные случаи. Однородная задача	449
10.4-7. Исключительные случаи. Неоднородная задача	451

10.5. Метод Карлемана для уравнений типа свертки первого рода	453
10.5-1. Уравнение Винера–Хопфа первого рода	453
10.5-2. Интегральные уравнения с двумя ядрами первого рода	454
10.6. Парные интегральные уравнения первого рода	456
10.6-1. Метод Карлемана для уравнения с разностными ядрами	456
10.6-2. Точные решения некоторых парных уравнений первого рода	457
10.6-3. Приведение парных уравнений к уравнению Фредгольма	459
10.7. Асимптотические методы решения уравнений с логарифмической особенностью	461
10.7-1. Предварительные замечания	461
10.7-2. Решение при больших значениях характерного параметра	462
10.7-3. Решение при малых значениях характерного параметра	463
10.7-4. Интегральные уравнения теории упругости	464
10.8. Методы регуляризации	464
10.8-1. Метод регуляризации Лаврентьева	464
10.8-2. Метод регуляризации Тихонова	465
11. Методы решения линейных уравнений вида $y(x) - \int_a^b K(x, t)y(t) dt = f(x)$	466
11.1. Предварительные замечания	466
11.1-1. Уравнения Фредгольма и уравнения со слабой особенностью	466
11.1-2. Структура решений	466
11.1-3. Интегральные уравнения типа свертки второго рода	467
11.1-4. Парные интегральные уравнения второго рода	467
11.2. Уравнения Фредгольма второго рода с вырожденным ядром	468
11.2-1. Простейшее вырожденное ядро	468
11.2-2. Вырожденное ядро в общем случае	468
11.3. Решение в виде ряда по степеням параметра. Метод последовательных приближений	470
11.3-1. Итерированные ядра	470
11.3-2. Метод последовательных приближений	471
11.3-3. Построение резольвенты	471
11.3-4. Ортогональные ядра	472
11.4. Метод определителей Фредгольма	473
11.4-1. Формула для резольвенты	473
11.4-2. Рекуррентные соотношения	474
11.5. Теоремы и альтернатива Фредгольма	475
11.5-1. Теоремы Фредгольма	475
11.5-2. Альтернатива Фредгольма	475
11.6. Интегральные уравнения Фредгольма второго рода с симметричными ядрами	475
11.6-1. Характеристические числа и собственные функции	475
11.6-2. Билинейный ряд	477
11.6-3. Теорема Гильберта–Шмидта	477
11.6-4. Билинейные ряды итерированных ядер	478
11.6-5. Решение неоднородного уравнения	478
11.6-6. Альтернатива Фредгольма для симметричных уравнений	479
11.6-7. Резольвента симметричного ядра	479
11.6-8. Экстремальные свойства характеристических чисел	480
11.6-9. Интегральные уравнения, приводимые к симметричным	480
11.6-10. Кососимметричное интегральное уравнение	480
11.7. Операторный метод решения интегральных уравнений второго рода	481
11.7-1. Простейшая схема	481
11.7-2. Решение уравнений второго рода на полуоси	481
11.8. Метод интегральных преобразований и метод модельных решений	482
11.8-1. Уравнение с разностным ядром на всей оси	482
11.8-2. Уравнение с ядром $K(x, t) = t^{-1}Q(x/t)$ на полуоси	483
11.8-3. Уравнение с ядром $K(x, t) = t^{\beta}Q(xt)$ на полуоси	484
11.8-4. Метод модельных решений для уравнений на всей оси	485
11.9. Метод Карлемана для интегральных уравнений типа свертки второго рода	485
11.9-1. Уравнение Винера–Хопфа второго рода	485
11.9-2. Интегральное уравнение второго рода с двумя ядрами	489
11.9-3. Уравнения типа свертки с переменным пределом интегрирования	492
11.9-4. Парное уравнение типа свертки второго рода	494
11.10. Метод Винера–Хопфа	495
11.10-1. Некоторые замечания	495
11.10-2. Однородное уравнение Винера–Хопфа второго рода	497
11.10-3. Общая схема метода. Проблема факторизации	499
11.10-4. Неоднородное уравнение Винера–Хопфа второго рода	501
11.10-5. Исключительный случай уравнения Винера–Хопфа второго рода	501

11.11. Метод Крейна для уравнения Винера–Хопфа	502
11.11-1. Некоторые замечания. Проблема факторизации	502
11.11-2. Решение уравнения Винера–Хопфа второго рода	504
11.11-3. Формула Хопфа–Фока	505
11.12. Методы решения уравнений с разностным ядром на конечном отрезке	506
11.12-1. Метод Крейна	506
11.12-2. Ядра с рациональными преобразованиями Фурье	507
11.12-3. Сведение к обыкновенным дифференциальным уравнениям	507
11.13. Метод замены ядра вырожденным	509
11.13-1. Аппроксимация ядра	509
11.13-2. Приближенное решение	510
11.14. Метод Бейтмена	511
11.14-1. Общая схема метода	511
11.14-2. Некоторые частные случаи	511
11.15. Метод коллокации	513
11.15-1. Общие замечания	513
11.15-2. Приближенное решение	514
11.15-3. Собственные функции уравнения	515
11.16. Метод наименьших квадратов	515
11.16-1. Описание метода	515
11.16-2. Построение собственных функций	516
11.17. Метод Бубнова–Галеркина	517
11.17-1. Описание метода	517
11.17-2. Характеристические числа уравнения	518
11.18. Метод квадратур	519
11.18-1. Общая схема для уравнений Фредгольма второго рода	519
11.18-2. Построение собственных функций	520
11.18-3. Особенности применения квадратурных формул	520
11.19. Системы интегральных уравнений Фредгольма второго рода	521
11.19-1. Некоторые замечания	521
11.19-2. Метод преобразования системы уравнений в одно уравнение	521
11.20. Метод регуляризации для некоторых уравнений второго рода	522
11.20-1. Основное уравнение и теоремы Нетера	522
11.20-2. Регуляризующие операторы	523
11.20-3. Метод регуляризации	523
12. Методы решения сингулярных интегральных уравнений первого рода	525
12.1. Предварительные замечания	525
12.1-1. Интегральные уравнения первого рода с ядром Коши	525
12.1-2. Интегральные уравнения первого рода с ядром Гильберта	525
12.2. Интеграл типа Коши	526
12.2-1. Определение интеграла типа Коши	526
12.2-2. Условие Гёльдера	526
12.2-3. Главное значение сингулярного интеграла	527
12.2-4. Многозначные функции	528
12.2-5. Главное значение сингулярного криволинейного интеграла	529
12.2-6. Формула перестановки Пуанкаре–Бертрана	530
12.3. Краевая задача Римана	531
12.3-1. Теорема об аналитическом продолжении и теорема Лиувилля	531
12.3-2. Интерполяционный полином Эрмита	532
12.3-3. Понятие индекса	532
12.3-4. Постановка задачи Римана	534
12.3-5. Решение однородной задачи	536
12.3-6. Решение неоднородной задачи	536
12.3-7. Задача Римана с рациональными коэффициентами	538
12.3-8. Задача Римана для действительной оси	540
12.3-9. Исключительные случаи задачи Римана	542
12.3-10. Задача Римана для многосвязной области	545
12.3-11. Случаи разрывных коэффициентов и разомкнутых контуров	548
12.3-12. Краевая задача Гильберта	548
12.4. Сингулярные интегральные уравнения первого рода	548
12.4-1. Простейшее уравнение с ядром Коши	548
12.4-2. Уравнение с ядром Коши на действительной оси	549
12.4-3. Уравнение первого рода на конечном отрезке	549
12.4-4. Общее уравнение первого рода с ядром Коши	550
12.4-5. Уравнения первого рода с ядром Гильберта	551

12.5. Метод Мультиппа–Каландия	552
12.5-1. Решение, не ограниченное на концах отрезка	552
12.5-2. Решение, ограниченное на одном конце отрезка	554
12.5-3. Решение, ограниченное на обоих концах отрезка	554
13. Методы решения полных сингулярных интегральных уравнений	556
13.1. Некоторые замечания	556
13.1-1. Интегральные уравнения с ядром Коши	556
13.1-2. Интегральные уравнения с ядром Гильберта	557
13.1-3. Об уравнениях Фредгольма второго рода на контуре	558
13.2. Метод Карлемана для характеристических уравнений	559
13.2-1. Характеристическое уравнение с ядром Коши	559
13.2-2. Уравнение, союзное с характеристическим	562
13.2-3. Характеристическое уравнение на действительной оси	563
13.2-4. Исключительный случай характеристического уравнения	563
13.2-5. Характеристическое уравнение с ядром Гильберта	565
13.2-6. Уравнение Трикоми	566
13.3. Полные сингулярные интегральные уравнения, разрешаемые в замкнутой форме	566
13.3-1. Замкнутое решение при постоянных коэффициентах	566
13.3-2. Замкнутое решение в общем случае	567
13.4. Метод регуляризации для полных сингулярных интегральных уравнений	568
13.4-1. Некоторые свойства сингулярных операторов	568
13.4-2. Регуляризующий оператор	570
13.4-3. Способы регуляризации слева и справа	571
13.4-4. Проблема равносильной регуляризации	571
13.4-5. Теоремы Нётера	572
13.4-6. Способ регуляризации Карлемана–Векуа	573
13.4-7. Регуляризация в исключительных случаях	574
13.4-8. Полное уравнение с ядром Гильберта	574
14. Методы решения нелинейных интегральных уравнений	577
14.1. Некоторые определения и замечания	577
14.1-1. Нелинейные интегральные уравнения Вольтерра	577
14.1-2. Нелинейные уравнения с постоянными пределами интегрирования	578
14.2. Нелинейные интегральные уравнения Вольтерра	579
14.2-1. Метод интегральных преобразований	579
14.2-2. Метод дифференцирования интегральных уравнений	579
14.2-3. Метод последовательных приближений	580
14.2-4. Метод Ньютона–Канторовича	582
14.2-5. Метод коллокации	583
14.2-6. Метод квадратур	584
14.3. Уравнения с постоянными пределами интегрирования	585
14.3-1. Нелинейные уравнения с вырожденными ядрами	585
14.3-2. Метод интегральных преобразований	587
14.3-3. Метод дифференцирования интегральных уравнений	587
14.3-4. Метод последовательных приближений	588
14.3-5. Метод Ньютона–Канторовича	589
14.3-6. Метод квадратур	591
14.3-7. Метод регуляризации Тихонова	591
15. Интегральные операторы	593
15.1. Линейные операторы в нормированных пространствах	593
15.1-1. Интегральные уравнения и интегральные операторы	593
15.1-2. Нормированные и евклидовы пространства	593
15.1-3. Линейные операторы в нормированных пространствах	594
15.1-4. Резольвента, спектр и корневые подпространства	595
15.1-5. Компактные линейные операторы и их свойства	596
15.2. Линейные операторы в евклидовых пространствах	597
15.2-1. Самосопряженные операторы	597
15.2-2. Самосопряженные компактные операторы	598
15.3. Интегральные операторы. Условия непрерывности и компактности	599
15.3-1. Условия непрерывности интегральных операторов	599
15.3-2. Условия компактности интегральных операторов	600
15.4. Сингулярные интегральные операторы	602
15.4-1. Сингулярные операторы Гильберта и Коши	602
15.4-2. Пространства ВМО и VMO	603
15.4-3. Условия ограниченности и компактности сингулярных операторов	603
Список литературы	605

ПРЕДИСЛОВИЕ

Интегральные уравнения встречаются в различных областях науки и многочисленных приложениях (в теории упругости, теории пластичности, теории массо- и теплопереноса, теории колебаний, аэро- и гидродинамике, теории фильтрации, электростатике, электродинамике, биомеханике, теории игр, теории управления, теории массового обслуживания, электротехнике, экономике, медицине и др.).

Точные решения интегральных уравнений играют большую роль для формирования правильного понимания качественных особенностей многих явлений и процессов в различных областях естествознания. Эти решения можно использовать для проверки корректности и оценки погрешности различных численных, асимптотических и приближенных методов.

В первой части книги приведено более 2200 линейных и нелинейных интегральных уравнений с решениями. Особое внимание уделено уравнениям общего вида, которые зависят от произвольных функций. Остальные уравнения содержат один или несколько свободных параметров, значения которых можно выбирать произвольно по усмотрению читателя. Рассмотрены интегральные уравнения, которые встречаются в различных областях механики и физики. В целом справочник содержит больше интегральных уравнений, чем любые другие книги (по сравнению с предыдущими изданиями добавлен ряд новых уравнений).

Во второй части книги излагаются точные, асимптотические, приближенные аналитические и численные методы решения линейных и нелинейных интегральных уравнений. При отборе материала авторы отдавали безусловное предпочтение практической стороне вопроса (конструктивным методам, позволяющим эффективно «строить» решения). Для лучшего понимания рассмотренных методов даны примеры решения конкретных уравнений.

Для удобства широкого круга потенциальных читателей с разной математической подготовкой авторы по возможности старались избегать использования специальной терминологии. Поэтому некоторые методы излагаются схематически и упрощенно (с необходимыми ссылками на книги, в которых эти методы рассмотрены более детально).

Расположение уравнений внутри всех разделов отвечает принципу «от простого к сложному». Это существенным образом облегчает работу с материалом. Многие разделы книги могут читаться независимо друг от друга, что позволяет быстро вникать в суть вопроса. Подробное оглавление поможет читателю находить искомую информацию.

Отдельные разделы книги могут быть использованы в качестве основы для специальных курсов по интегральным уравнениям и уравнениям математической физики для студентов и аспирантов университетов и технических вузов.

Авторы надеются, что справочник окажется полезным для широкого круга научных работников, преподавателей вузов, инженеров и студентов, специализирующихся в различных областях прикладной математики, механики, физики, теории управления и инженерных наук.

*А. Д. Полянин
А. В. Манжиров*

Некоторые обозначения и замечания

1. В книге при записи исходных интегральных уравнений независимая переменная обозначается через x , переменная интегрирования — через t , а неизвестная функция — через $y = y(x)$.

2. Обозначения для обыкновенных производных функции $f = f(x)$:

$$f'_x \equiv \frac{df}{dx}, \quad f''_{xx} \equiv \frac{d^2 f}{dx^2}, \quad f'''_{xxx} \equiv \frac{d^3 f}{dx^3}, \quad f''''_{xxxx} \equiv \frac{d^4 f}{dx^4}, \quad \text{а далее } f_x^{(n)} \equiv \frac{d^n f}{dx^n} \text{ при } n \geq 4.$$

Аналогичные обозначения используются также для частных производных функций двух переменных, например, $K'_x(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} K(x, t)$.

3. В ряде случаев используется операторное обозначение $\left(f \frac{d}{dx}\right)^n g$, которое действует следующим образом:

$$\left(f(x) \frac{d}{dx}\right)^n g(x) = f(x) \frac{d}{dx} \left[\left(f(x) \frac{d}{dx}\right)^{n-1} g(x) \right].$$

4. В начале первых шести глав написано, что $f = f(x)$, $g = g(x)$, ... — произвольные функции, A, B, \dots — произвольные параметры. Это означает следующее (в тексте ниже сказанное специально не оговаривается):

(а) $f = f(x)$, $g = g(x)$, ... — произвольные действительные непрерывные функции действительного аргумента;

(б) если решение содержит производные этих функций, то функции предполагаются дифференцируемыми (достаточное число раз);

(в) если уравнение или решение содержит интегралы с этими (в комбинации с другими) функциями, то интегралы предполагаются существующими (сходящимися);

(г) свободные параметры A, B, \dots могут принимать любые действительные значения, при которых рассматриваемое уравнение и его решение имеет смысл (например, если решение содержит комбинацию $\frac{A}{1-A}$, то предполагается, что $A \neq 1$).

5. Используются следующие специальные обозначения специальных функций:

$$\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-\xi^2) d\xi \quad \text{— интеграл вероятностей } (\operatorname{erfc} x = 1 - \operatorname{erf} x),$$

$$I_\nu(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x/2)^{\nu+2n}}{n! \Gamma(\nu+n+1)} \quad \text{— модифицированная функция Бесселя первого рода,}$$

$$J_\nu(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x/2)^{\nu+2n}}{n! \Gamma(\nu+n+1)} \quad \text{— функция Бесселя первого рода,}$$

$$K_\nu(x) = \frac{\pi}{2} \frac{I_{-\nu}(x) - I_\nu(x)}{\sin(\pi\nu)} \quad \text{— модифицированная функция Бесселя второго рода,}$$

$$Y_\nu(x) = \frac{J_\nu(x) \cos(\pi\nu) - J_{-\nu}(x)}{\sin(\pi\nu)} \quad \text{— функция Бесселя второго рода,}$$

$$\gamma(\alpha, x) = \int_0^x e^{-\xi} \xi^{\alpha-1} d\xi \quad \text{— неполная гамма-функция,}$$

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-\xi} \xi^{\alpha-1} d\xi \quad \text{— гамма-функция,}$$

$$\Phi(\alpha, \beta; x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1) \dots (\alpha+n-1)}{\beta(\beta+1) \dots (\beta+n-1)} \frac{x^n}{n!} \quad \text{— вырожденная гипергеометрическая функция.}$$

Более подробное описание этих и других специальных функций можно найти в справочниках Г. Бейтмена, А. Эрдейи (1973, 1974) и М. Абрамовица, И. Стигана (1979).

6. При ссылках в тексте на конкретные уравнения запись вида «2.3.15» означает «уравнение 15 из раздела 2.3».

7. Некоторые классы интегральных уравнений сводились к обыкновенным дифференциальным уравнениям. Для решения последних использовались материалы справочников Э. Камке (1976), В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (1995, 2001); ссылки на эти книги обычно опускаются.

1. Линейные уравнения первого рода с переменным пределом интегрирования

► **Обозначения:** $f = f(x)$, $g = g(x)$, $h = h(x)$, $K = K(x)$, $M = M(x)$ — произвольные функции (вместо x у функций может быть сложный аргумент, зависящий от двух переменных x и t); $A, B, C, D, E, a, b, c, \alpha, \beta, \gamma, \lambda, \mu$ — свободные параметры; m, n — целые неотрицательные числа.

► **Предварительные замечания.** Для уравнений вида

$$\int_a^x K(x, t)y(t) dt = f(x), \quad a \leq x \leq b,$$

где функции $K(x, t)$ и $f(x)$ непрерывны, предполагается, что правая часть $f(x)$ удовлетворяет следующим условиям.

1°. Если $K(a, a) \neq 0$, то $f(a) = 0$ (например, правые части уравнений 1.1.1 и 1.2.1 должны удовлетворять этому условию).

2°. Если $K(a, a) = K'_x(a, a) = \dots = K_x^{(n-1)}(a, a) = 0$, $0 < |K_x^{(n)}(a, a)| < \infty$, то для правой части имеем

$$f(a) = f'_x(a) = \dots = f_x^{(n)}(a) = 0.$$

Например, при $n = 1$ эти ограничения накладываются на правую часть уравнения 1.1.2.

3°. Если $K(a, a) = K'_x(a, a) = \dots = K_x^{(n-1)}(a, a) = 0$, $K_x^{(n)}(a, a) = \infty$, то условия на правую часть принимают вид

$$f(a) = f'_x(a) = \dots = f_x^{(n-1)}(a) = 0.$$

Например, при $n = 1$ им должна удовлетворять правая часть уравнения 1.1.30.

В случае когда $K(x, t)$ имеет интегрируемую степенную или логарифмическую особенность при $x = t$, а $f(x)$ непрерывна, дополнительные условия на правые части интегральных уравнений не накладываются (например, см. уравнение Абеля 1.1.36).

В главе 1 условия типа 1°–3° как правило не приводятся.

1.1. Уравнения, ядра которых содержат степенные функции

1.1-1. Ядра уравнений линейны по аргументам x, t

1. $\int_a^x y(t) dt = f(x).$

Решение: $y(x) = f'_x(x).$

2. $\int_a^x (x - t)y(t) dt = f(x).$

Решение: $y(x) = f''_{xx}(x).$

3. $\int_a^x (Ax + Bt + C)y(t) dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.5 при $g(x) = x$.

1°. Решение при $B \neq -A$:

$$y(x) = \frac{d}{dx} \left\{ [(A+B)x + C]^{-\frac{A}{A+B}} \int_a^x [(A+B)t + C]^{-\frac{B}{A+B}} f'_t(t) dt \right\}.$$

2°. Решение при $B = -A$:

$$y(x) = \frac{1}{C} \frac{d}{dx} \left[\exp\left(-\frac{A}{C}x\right) \int_a^x \exp\left(\frac{A}{C}t\right) f'_t(t) dt \right].$$

1.1-2. Ядра уравнений квадратичны по аргументам x, t

$$4. \int_a^x (x-t)^2 y(t) dt = f(x), \quad f(a) = f'_x(a) = f''_{xx}(a) = 0.$$

Решение: $y(x) = \frac{1}{2} f'''_{xxx}(x)$.

$$5. \int_a^x (x^2 - t^2) y(t) dt = f(x), \quad f(a) = f'_x(a) = 0.$$

Частный случай уравнения 1.9.2 при $g(x) = x^2$.

Решение: $y(x) = \frac{1}{2x^2} [x f''_{xx}(x) - f'_x(x)]$.

$$6. \int_a^x (Ax^2 + Bt^2) y(t) dt = f(x).$$

При $B = -A$ см. уравнение 1.1.5. Частный случай уравнения 1.9.4 при $g(x) = x^2$.

Решение: $y(x) = \frac{1}{A+B} \frac{d}{dx} \left[x^{-\frac{2A}{A+B}} \int_a^x t^{-\frac{2B}{A+B}} f'_t(t) dt \right]$.

$$7. \int_a^x (Ax^2 + Bt^2 + C) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.5 при $g(x) = x^2$.

Решение:

$$y(x) = \text{sign } \varphi(x) \frac{d}{dx} \left\{ |\varphi(x)|^{-\frac{A}{A+B}} \int_a^x |\varphi(t)|^{-\frac{B}{A+B}} f'_t(t) dt \right\},$$

где $\varphi(x) = (A+B)x^2 + C$.

$$8. \int_a^x [Ax^2 + (B-A)xt - Bt^2] y(t) dt = f(x), \quad f(a) = f'_x(a) = 0.$$

Дифференцируя по x , получим уравнение вида 1.1.3:

$$\int_a^x [2Ax + (B-A)t] y(t) dt = f'_x(x).$$

Решение:

$$y(x) = \frac{1}{A+B} \frac{d}{dx} \left[x^{-\frac{2A}{A+B}} \int_a^x t^{\frac{A-B}{A+B}} f''_{tt}(t) dt \right].$$

$$9. \int_a^x (Ax^2 + Bt^2 + Cx + Dt + E) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.6 при $g(x) = Ax^2 + Cx$, $h(t) = Bt^2 + Dt + E$.

$$10. \int_a^x (Axt + Bt^2 + Cx + Dt + E) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.15 при $g_1(x) = x$, $h_1(t) = At + C$, $g_2(x) = 1$, $h_2(t) = Bt^2 + Dt + E$.

$$11. \int_a^x (Ax^2 + Bxt + Cx + Dt + E) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.15 при $g_1(x) = Bx + D$, $h_1(t) = t$, $g_2(x) = Ax^2 + Cx + E$, $h_2(t) = 1$.

1.1-3. Ядра уравнений в виде кубических полиномов по аргументам x, t

$$12. \int_a^x (x-t)^3 y(t) dt = f(x), \quad f(a) = f'_x(a) = f''_{xx}(a) = f'''_{xxx}(a) = 0.$$

Решение: $y(x) = \frac{1}{6} f'''_{xxx}(x)$.

$$13. \int_a^x (x^3 - t^3)y(t) dt = f(x), \quad f(a) = f'_x(a) = 0.$$

Частный случай уравнения 1.9.2 при $g(x) = x^3$.

Решение: $y(x) = \frac{1}{3x^3} [xf'''_{xxx}(x) - 2f'_x(x)]$.

$$14. \int_a^x (Ax^3 + Bt^3)y(t) dt = f(x).$$

При $B = -A$ см. уравнение 1.1.13. Частный случай уравнения 1.9.4 при $g(x) = x^3$.

Решение при $0 \leq a \leq x$: $y(x) = \frac{1}{A+B} \frac{d}{dx} \left[x^{-\frac{3A}{A+B}} \int_a^x t^{-\frac{3B}{A+B}} f'_t(t) dt \right]$.

$$15. \int_a^x (Ax^3 + Bt^3 + C)y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.5 при $g(x) = x^3$.

$$16. \int_a^x (x^2t - xt^2)y(t) dt = f(x), \quad f(a) = f'_x(a) = 0.$$

Частный случай уравнения 1.9.11 при $g(x) = x^2$, $h(x) = x$.

Решение: $y(x) = \frac{1}{x} \frac{d^2}{dx^2} \left[\frac{1}{x} f(x) \right]$.

$$17. \int_a^x (Ax^2t + Bxt^2)y(t) dt = f(x).$$

При $B = -A$ см. уравнение 1.1.16. Частный случай уравнения 1.9.12 при $g(x) = x^2$, $h(x) = x$.

Решение:

$$y(x) = \frac{1}{(A+B)x} \frac{d}{dx} \left\{ x^{-\frac{A}{A+B}} \int_a^x t^{-\frac{B}{A+B}} \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{t} f(t) \right] dt \right\}.$$

$$18. \int_a^x (Ax^3 + Bxt^2)y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.15 при $g_1(x) = Ax^3$, $h_1(t) = 1$, $g_2(x) = Bx$, $h_2(t) = t^2$.

$$19. \int_a^x (Ax^3 + Bx^2t)y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.15 при $g_1(x) = Ax^3$, $h_1(t) = 1$, $g_2(x) = Bx^2$, $h_2(t) = t$.

$$20. \int_a^x (Ax^2t + Bt^3)y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.15 при $g_1(x) = Ax^2$, $h_1(t) = t$, $g_2(x) = B$, $h_2(t) = t^3$.

$$21. \int_a^x (Axt^2 + Bt^3)y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.15 при $g_1(x) = Ax$, $h_1(t) = t^2$, $g_2(x) = B$, $h_2(t) = t^3$.

$$22. \int_a^x (A_3x^3 + B_3t^3 + A_2x^2 + B_2t^2 + A_1x + B_1t + C)y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.6 при $g(x) = A_3x^3 + A_2x^2 + A_1x + C$, $h(t) = B_3t^3 + B_2t^2 + B_1t$.

1.1-4. Ядра уравнений в виде полиномов более высокой степени

$$23. \int_a^x (x-t)^n y(t) dt = f(x), \quad n = 1, 2, \dots$$

Считается, что выполнены условия $f(a) = f'_x(a) = \dots = f_x^{(n)}(a) = 0$.

Решение: $y(x) = \frac{1}{n!} f_x^{(n+1)}(x)$.

В частном случае при $f(x) = Ax^m$, где m — натуральное число, $m > n$, решение имеет вид

$$y(x) = \frac{Am!}{n!(m-n-1)!} x^{m-n-1}.$$

$$24. \int_a^x (x^n - t^n) y(t) dt = f(x), \quad f(a) = f'_x(a) = 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

Решение: $y(x) = \frac{1}{n} \frac{d}{dx} \left[\frac{f'_x(x)}{x^{n-1}} \right]$.

$$25. \int_a^x (t^n x^{n+1} - x^n t^{n+1}) y(t) dt = f(x), \quad n = 2, 3, \dots$$

Частный случай уравнения 1.9.11 при $g(x) = x^{n+1}$, $h(x) = x^n$.

Решение: $y(x) = \frac{1}{x^n} \frac{d^2}{dx^2} \left[\frac{f(x)}{x^n} \right]$.

1.1-5. Ядра уравнений, содержащие рациональные функции

$$26. \int_0^x \frac{y(t) dt}{x+t} = f(x).$$

1°. Для полиномиальной правой части $f(x) = \sum_{n=0}^N A_n x^n$ решение имеет вид

$$y(x) = \sum_{n=0}^N \frac{A_n}{B_n} x^n, \quad B_n = (-1)^n \left[\ln 2 + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k} \right].$$

2°. Для правой части $f(x) = x^\lambda \sum_{n=0}^N A_n x^n$, где λ — любое ($\lambda > -1$), решение имеет вид

$$y(x) = x^\lambda \sum_{n=0}^N \frac{A_n}{B_n} x^n, \quad B_n = \int_0^1 \frac{t^{\lambda+n} dt}{1+t}.$$

3°. Для правой части $f(x) = \ln x \left(\sum_{n=0}^N A_n x^n \right)$ решение имеет вид

$$y(x) = \ln x \sum_{n=0}^N \frac{A_n}{B_n} x^n + \sum_{n=0}^N \frac{A_n I_n}{B_n^2} x^n,$$

$$B_n = (-1)^n \left[\ln 2 + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k} \right], \quad I_n = (-1)^n \left[\frac{\pi^2}{12} + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k^2} \right].$$

4°. Для правой части $f(x) = \sum_{n=0}^N A_n (\ln x)^n$ решение уравнения имеет вид

$$y(x) = \sum_{n=0}^N A_n Y_n(x),$$

где функции $Y_n = Y_n(x)$ определяются по формулам:

$$Y_n(x) = \left\{ \frac{d^n}{d\lambda^n} \left[\frac{x^\lambda}{I(\lambda)} \right] \right\}_{\lambda=0}, \quad I(\lambda) = \int_0^1 \frac{z^\lambda dz}{1+z}.$$

5°. Для правой части $f(x) = \sum_{n=1}^N A_n \cos(\lambda_n \ln x) + \sum_{n=1}^N B_n \sin(\lambda_n \ln x)$ решение уравнения имеет вид

$$y(x) = \sum_{n=1}^N C_n \cos(\lambda_n \ln x) + \sum_{n=1}^N D_n \sin(\lambda_n \ln x),$$

где постоянные C_n и D_n определяются методом неопределенных коэффициентов.

6°. Для произвольной правой части $f(x)$ преобразование

$$x = \frac{1}{2} e^{2z}, \quad t = \frac{1}{2} e^{2\tau}, \quad y(t) = e^{-\tau} w(\tau), \quad f(x) = e^{-z} g(z)$$

приводит к интегральному уравнению с разностным ядром вида 1.9.26:

$$\int_{-\infty}^z \frac{w(\tau) d\tau}{\operatorname{ch}(z-\tau)} = g(z).$$

27. $\int_0^x \frac{y(t) dt}{ax+bt} = f(x), \quad a > 0, \quad a+b > 0.$

1°. Для полиномиальной правой части $f(x) = \sum_{n=0}^N A_n x^n$ решение имеет вид

$$y(x) = \sum_{n=0}^N \frac{A_n}{B_n} x^n, \quad B_n = \int_0^1 \frac{t^n dt}{a+bt}.$$

2°. Для правой части $f(x) = x^\lambda \sum_{n=0}^N A_n x^n$, где λ — любое ($\lambda > -1$), решение имеет вид

$$y(x) = x^\lambda \sum_{n=0}^N \frac{A_n}{B_n} x^n, \quad B_n = \int_0^1 \frac{t^{\lambda+n} dt}{a+bt}.$$

3°. Для правой части $f(x) = \ln x \left(\sum_{n=0}^N A_n x^n \right)$ решение имеет вид

$$y(x) = \ln x \sum_{n=0}^N \frac{A_n}{B_n} x^n - \sum_{n=0}^N \frac{A_n C_n}{B_n^2} x^n, \quad B_n = \int_0^1 \frac{t^n dt}{a+bt}, \quad C_n = \int_0^1 \frac{t^n \ln t}{a+bt} dt.$$

4°. Для некоторых других частных видов правой части (см. пп. 4, 5 в уравнении 1.1.26) решение можно найти методом неопределенных коэффициентов.

28. $\int_0^x \frac{y(t) dt}{ax^2+bt^2} = f(x), \quad a > 0, \quad a+b > 0.$

1°. Для полиномиальной правой части $f(x) = \sum_{n=0}^N A_n x^n$ решение имеет вид

$$y(x) = \sum_{n=0}^N \frac{A_n}{B_n} x^{n+1}, \quad B_n = \int_0^1 \frac{t^{n+1} dt}{a+bt^2}.$$

В частном случае при $a = b = 1$ и $f(x) = Ax^2 + Bx + C$ решение интегрального уравнения дается формулой

$$y(x) = \frac{2A}{1-\ln 2} x^3 + \frac{4B}{4-\pi} x^2 + \frac{2C}{\ln 2} x.$$

2°. Для правой части $f(x) = x^\lambda \sum_{n=0}^N A_n x^n$, где λ — любое ($\lambda > -1$), решение имеет вид

$$y(x) = x^\lambda \sum_{n=0}^N \frac{A_n}{B_n} x^{n+1}, \quad B_n = \int_0^1 \frac{t^{\lambda+n+1} dt}{a + bt^2}.$$

3°. Для правой части $f(x) = \ln x \left(\sum_{n=0}^N A_n x^n \right)$ решение имеет вид

$$y(x) = \ln x \sum_{n=0}^N \frac{A_n}{B_n} x^{n+1} - \sum_{n=0}^N \frac{A_n C_n}{B_n^2} x^{n+1},$$

$$B_n = \int_0^1 \frac{t^{n+1} dt}{a + bt^2}, \quad C_n = \int_0^1 \frac{t^{n+1} \ln t}{a + bt^2} dt.$$

29. $\int_0^\infty \frac{y(t) dt}{ax^m + bt^m} = f(x), \quad a > 0, \quad a + b > 0, \quad m = 1, 2, \dots$

1°. Для полиномиальной правой части $f(x) = \sum_{n=0}^N A_n x^n$ решение имеет вид

$$y(x) = \sum_{n=0}^N \frac{A_n}{B_n} x^{m+n-1}, \quad B_n = \int_0^1 \frac{t^{m+n-1} dt}{a + bt^m}.$$

2°. Для правой части $f(x) = x^\lambda \sum_{n=0}^N A_n x^n$, где λ — любое ($\lambda > -1$), решение имеет вид

$$y(x) = x^\lambda \sum_{n=0}^N \frac{A_n}{B_n} x^{m+n-1}, \quad B_n = \int_0^1 \frac{t^{\lambda+m+n-1} dt}{a + bt^m}.$$

3°. Для правой части $f(x) = \ln x \left(\sum_{n=0}^N A_n x^n \right)$ решение имеет вид

$$y(x) = \ln x \sum_{n=0}^N \frac{A_n}{B_n} x^{m+n-1} - \sum_{n=0}^N \frac{A_n C_n}{B_n^2} x^{m+n-1},$$

$$B_n = \int_0^1 \frac{t^{m+n-1} dt}{a + bt^m}, \quad C_n = \int_0^1 \frac{t^{m+n-1} \ln t}{a + bt^m} dt.$$

1.1-6. Ядра уравнений, содержащие квадратные корни

30. $\int_a^\infty \sqrt{x-t} y(t) dt = f(x).$

Дифференцируя по x , приходим к уравнению Абеля 1.1.36:

$$\int_a^x \frac{y(t) dt}{\sqrt{x-t}} = 2f'_x(x).$$

Решение:

$$y(x) = \frac{2}{\pi} \frac{d^2}{dx^2} \int_a^x \frac{f(t) dt}{\sqrt{x-t}}.$$

31. $\int_a^\infty (\sqrt{x} - \sqrt{t}) y(t) dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.1.44 при $\mu = \frac{1}{2}$.

Решение: $y(x) = 2 \frac{d}{dx} [\sqrt{x} f'_x(x)].$

$$32. \int_a^x (A\sqrt{x} + B\sqrt{t})y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.1.45 при $\mu = \frac{1}{2}$.

$$33. \int_a^x (1 + b\sqrt{x-t})y(t) dt = f(x).$$

Дифференцируя по x , приходим к уравнению Абеля второго рода 2.1.46:

$$y(x) + \frac{b}{2} \int_a^x \frac{y(t) dt}{\sqrt{x-t}} = f'_x(x).$$

$$34. \int_a^x (t\sqrt{x} - x\sqrt{t})y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.11 при $g(x) = \sqrt{x}$, $h(x) = x$.

$$35. \int_a^x (At\sqrt{x} + Bx\sqrt{t})y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.12 при $g(x) = \sqrt{x}$, $h(t) = t$.

$$36. \int_a^x \frac{y(t) dt}{\sqrt{x-t}} = f(x).$$

Уравнение Абеля.

Решение:

$$y(x) = \frac{1}{\pi} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{f(t) dt}{\sqrt{x-t}} = \frac{f(a)}{\pi\sqrt{x-a}} + \frac{1}{\pi} \int_a^x \frac{f'_t(t) dt}{\sqrt{x-t}}.$$

⊙ Литература: Э. Т. Уиттекер, Дж. Ватсон (1963, стр. 322).

$$37. \int_a^x \left(b + \frac{1}{\sqrt{x-t}}\right)y(t) dt = f(x).$$

Запишем это уравнение в виде

$$\int_a^x \frac{y(t) dt}{\sqrt{x-t}} = f(x) - b \int_a^x y(t) dt.$$

Считая теперь правую часть этого выражения известной, решим его как уравнение Абеля 1.1.36. В результате после некоторых преобразований получим уравнение Абеля второго рода 2.1.46:

$$y(x) + \frac{b}{\pi} \int_a^x \frac{y(t) dt}{\sqrt{x-t}} = F(x), \quad \text{где} \quad F(x) = \frac{1}{\pi} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{f(t) dt}{\sqrt{x-t}}.$$

$$38. \int_a^x \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{t}}\right)y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.1.45 при $\mu = -\frac{1}{2}$.

Решение: $y(x) = -2[x^{3/2}f'_x(x)]'_x$, $a > 0$.

$$39. \int_a^x \left(\frac{A}{\sqrt{x}} + \frac{B}{\sqrt{t}}\right)y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.1.46 при $\mu = -\frac{1}{2}$.

$$40. \int_{-x}^x \sqrt{\frac{x-t}{x+t}} y(t) dt = f(x).$$

Решение:

$$y(x) = \frac{\text{sign } x}{2\pi} \left[\frac{d}{dx} \int_0^{|x|} \frac{f(t) - f(-t)}{\sqrt{x^2 - t^2}} dt - \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \int_0^{|x|} \frac{t[f(t) - f(-t)]}{\sqrt{x^2 - t^2}} dt \right].$$

⊙ Литература: А. Р. Prudnikov, Yu. А. Brychkov, O. I. Marichev (1992, стр. 431).

$$41. \int_a^x \frac{y(t) dt}{\sqrt{x^2 - t^2}} = f(x).$$

Решение:

$$y(x) = \frac{2}{\pi} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{t f(t) dt}{\sqrt{x^2 - t^2}}.$$

⊙ Литература: П. П. Забрейко, А. И. Кошелев и др. (1968, стр. 32).

$$42. \int_0^x \frac{y(t) dt}{\sqrt{ax^2 + bt^2}} = f(x), \quad a > 0, \quad a + b > 0.$$

1°. Для полиномиальной правой части $f(x) = \sum_{n=0}^N A_n x^n$ решение имеет вид

$$y(x) = \sum_{n=0}^N \frac{A_n}{B_n} x^n, \quad B_n = \int_0^1 \frac{t^n dt}{\sqrt{a + bt^2}}.$$

2°. Для правой части $f(x) = x^\lambda \sum_{n=0}^N A_n x^n$, где λ — любое ($\lambda > -1$), решение имеет вид

$$y(x) = x^\lambda \sum_{n=0}^N \frac{A_n}{B_n} x^n, \quad B_n = \int_0^1 \frac{t^{\lambda+n} dt}{\sqrt{a + bt^2}}.$$

3°. Для правой части $f(x) = \ln x \left(\sum_{n=0}^N A_n x^n \right)$ решение имеет вид

$$y(x) = \ln x \sum_{n=0}^N \frac{A_n}{B_n} x^n - \sum_{n=0}^N \frac{A_n C_n}{B_n^2} x^n, \quad B_n = \int_0^1 \frac{t^n dt}{\sqrt{a + bt^2}}, \quad C_n = \int_0^1 \frac{t^n \ln t}{\sqrt{a + bt^2}} dt.$$

4°. Для правой части $f(x) = \sum_{n=0}^N A_n (\ln x)^n$ решение уравнения имеет вид

$$y(x) = \sum_{n=0}^N A_n Y_n(x),$$

где функции $Y_n = Y_n(x)$ определяются по формулам:

$$Y_n(x) = \left\{ \frac{d^n}{d\lambda^n} \left[\frac{x^\lambda}{I(\lambda)} \right] \right\}_{\lambda=0}, \quad I(\lambda) = \int_0^1 \frac{z^\lambda dz}{\sqrt{a + bz^2}}.$$

5°. Для правой части $f(x) = \sum_{n=1}^N A_n \cos(\lambda_n \ln x) + \sum_{n=1}^N B_n \sin(\lambda_n \ln x)$ решение уравнения имеет вид

$$y(x) = \sum_{n=1}^N C_n \cos(\lambda_n \ln x) + \sum_{n=1}^N D_n \sin(\lambda_n \ln x),$$

где постоянные C_n и D_n определяются методом неопределенных коэффициентов.

1.1-7. Ядра уравнений, содержащие произвольные степени

$$43. \int_a^x (x-t)^\lambda y(t) dt = f(x), \quad f(a) = 0, \quad 0 < \lambda < 1.$$

Дифференцируя по x , приходим к обобщенному уравнению Абеля 1.1.47:

$$\int_a^x \frac{y(t) dt}{(x-t)^{1-\lambda}} = \frac{1}{\lambda} f'_x(x).$$

Решение:

$$y(x) = k \frac{d^2}{dx^2} \int_a^x \frac{f(t) dt}{(x-t)^\lambda}, \quad k = \frac{\sin(\pi\lambda)}{\pi\lambda}.$$

⊙ Литература: Ф. Д. Гахов (1977, стр. 602).

$$44. \int_a^x (x-t)^\mu y(t) dt = f(x).$$

При $\mu = 0, 1, 2, \dots$ см. уравнения 1.1.1, 1.1.2, 1.1.4, 1.1.12, 1.1.23. При $0 < \mu < 1$ см. уравнение 1.1.42.

Пусть $\mu = n - \lambda$, где $n = 1, 2, \dots$, $0 \leq \lambda < 1$ и $f(a) = f'_x(a) = \dots = f_x^{(n-1)}(a) = 0$. Дифференцируя обе части уравнения n раз, получим уравнение вида 1.1.47:

$$\int_a^x \frac{y(t) dt}{(x-t)^\lambda} = \frac{\Gamma(\mu - n + 1)}{\Gamma(\mu + 1)} f_x^{(n)}(x),$$

где $\Gamma(\mu)$ — гамма-функция.

В частном случае при $f(x) = Ax^\beta$, где $\beta \geq 0$, $\mu > -1$, $\mu - \beta \neq 0, 1, 2, \dots$, решение имеет следующий вид: $y(x) = \frac{A\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\mu+1)\Gamma(\beta-\mu)} x^{\beta-\mu-1}$.

● Литература: М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко (1968, стр. 55).

$$45. \int_a^x (x^\mu - t^\mu) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.2 при $g(x) = x^\mu$.

Решение: $y(x) = \frac{1}{\mu} [x^{1-\mu} f'_x(x)]'_x$.

$$46. \int_a^x (Ax^\mu + Bt^\mu) y(t) dt = f(x).$$

При $B = -A$ см. уравнение 1.1.45. Частный случай уравнения 1.9.4 при $g(x) = x^\mu$.

Решение: $y(x) = \frac{1}{A+B} \frac{d}{dx} \left[x^{-\frac{A\mu}{A+B}} \int_a^x t^{-\frac{B\mu}{A+B}} f'_t(t) dt \right]$.

$$47. \int_a^x \frac{y(t) dt}{(x-t)^\lambda} = f(x), \quad 0 < \lambda < 1.$$

Обобщенное уравнение Абеля.

Решение:

$$y(x) = \frac{\sin(\pi\lambda)}{\pi} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{f(t) dt}{(x-t)^{1-\lambda}} = \frac{\sin(\pi\lambda)}{\pi} \left[\frac{f(a)}{(x-a)^{1-\lambda}} + \int_a^x \frac{f'_t(t) dt}{(x-t)^{1-\lambda}} \right].$$

● Литература: Э. Т. Уиттекер, Дж. Ватсон (1963, стр. 322).

$$48. \int_a^x \left[b + \frac{1}{(x-t)^\lambda} \right] y(t) dt = f(x), \quad 0 < \lambda < 1.$$

Запишем это уравнение в виде

$$\int_a^x \frac{y(t) dt}{(x-t)^\lambda} = f(x) - b \int_a^x y(t) dt.$$

Считая теперь правую часть этого выражения известной, решим его как обобщенное уравнение Абеля 1.1.47. В результате после некоторых преобразований получим уравнение Абеля второго рода 2.1.60:

$$y(x) + \frac{b \sin(\pi\lambda)}{\pi} \int_a^x \frac{y(t) dt}{(x-t)^{1-\lambda}} = F(x), \quad F(x) = \frac{\sin(\pi\lambda)}{\pi} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{f(t) dt}{(x-t)^{1-\lambda}}.$$

$$49. \int_a^x (\sqrt{x} - \sqrt{t})^\lambda y(t) dt = f(x), \quad 0 < \lambda < 1.$$

Решение:

$$y(x) = \frac{k}{\sqrt{x}} \left(\sqrt{x} \frac{d}{dx} \right)^2 \int_a^x \frac{f(t) dt}{\sqrt{t} (\sqrt{x} - \sqrt{t})^\lambda}, \quad k = \frac{\sin(\pi\lambda)}{\pi\lambda}.$$

$$50. \int_a^x \frac{y(t) dt}{(\sqrt{x} - \sqrt{t})^\lambda} = f(x), \quad 0 < \lambda < 1.$$

Решение:

$$y(x) = \frac{\sin(\pi\lambda)}{2\pi} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{f(t) dt}{\sqrt{t} (\sqrt{x} - \sqrt{t})^{1-\lambda}}.$$

$$51. \int_a^x (Ax^\lambda + Bt^\mu) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.6 при $g(x) = Ax^\lambda$, $h(t) = Bt^\mu$.

$$52. \int_a^x [1 + A(x^\lambda t^\mu - x^{\lambda+\mu})] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.13 при $g(x) = Ax^\mu$, $h(x) = x^\lambda$.

Решение:

$$y(x) = \frac{d}{dx} \left\{ \frac{x^\lambda}{\Phi(x)} \int_a^x [t^{-\lambda} f(t)]'_t \Phi(t) dt \right\}, \quad \Phi(x) = \exp\left(-\frac{A\mu}{\mu+\lambda} x^{\mu+\lambda}\right).$$

$$53. \int_a^x (Ax^\beta t^\gamma + Bx^\delta t^\lambda) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.15 при $g_1(x) = Ax^\beta$, $h_1(t) = t^\gamma$, $g_2(x) = Bx^\delta$, $h_2(t) = t^\lambda$.

$$54. \int_a^x [Ax^\lambda (t^\mu - x^\mu) + Bx^\beta (t^\gamma - x^\gamma)] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.45 при $g_1(x) = Ax^\lambda$, $h_1(x) = x^\mu$, $g_2(x) = Bx^\beta$, $h_2(x) = x^\gamma$.

$$55. \int_a^x [Ax^\lambda t^\mu + Bx^{\lambda+\beta} t^{\mu-\beta} - (A+B)x^{\lambda+\gamma} t^{\mu-\gamma}] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.47 при $g(x) = x$.

$$56. \int_a^x t^\sigma (x^\mu - t^\mu)^\lambda y(t) dt = f(x), \quad \sigma > -1, \quad \mu > 0, \quad \lambda > -1.$$

Преобразование $\tau = t^\mu$, $z = x^\mu$, $w(\tau) = t^{\sigma-\mu+1} y(t)$ приводит к уравнению вида 1.1.43:

$$\int_A^z (z - \tau)^\lambda w(\tau) d\tau = F(z),$$

где $A = a^\mu$, $F(z) = \mu f(z^{1/\mu})$.

Решение при $-1 < \lambda < 0$:

$$y(x) = -\frac{\mu \sin(\pi\lambda)}{\pi x^\sigma} \frac{d}{dx} \left[\int_a^x t^{\mu-1} (x^\mu - t^\mu)^{-1-\lambda} f(t) dt \right].$$

$$57. \int_0^x \frac{y(t) dt}{(x+t)^\mu} = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.1.58 при $\lambda = 1$, $a = b = 1$.

Преобразование

$$x = \frac{1}{2} e^{2z}, \quad t = \frac{1}{2} e^{2\tau}, \quad y(t) = e^{(\mu-2)\tau} w(\tau), \quad f(x) = e^{-\mu z} g(z)$$

приводит к уравнению с разностным ядром вида 1.9.26:

$$\int_{-\infty}^z \frac{w(\tau) d\tau}{\operatorname{ch}^\mu(z - \tau)} = g(z).$$

$$58. \int_0^x \frac{y(t) dt}{(ax^\lambda + bt^\lambda)^\mu} = f(x), \quad a > 0, \quad a + b > 0.$$

1°. Замена $t = xz$ приводит к частному случаю уравнения 3.8.45:

$$\int_0^1 \frac{y(xz) dz}{(a + bz^\lambda)^\mu} = x^{\lambda\mu-1} f(x). \quad (1)$$

2°. Для полиномиальной правой части $f(x) = \sum_{m=0}^n A_m x^m$ решение имеет вид

$$y(x) = x^{\lambda\mu-1} \sum_{m=0}^n \frac{A_m}{I_m} x^m, \quad I_m = \int_0^1 \frac{z^{m+\lambda\mu-1} dz}{(a + bz^\lambda)^\mu}.$$

Считается, что существуют интегралы I_m .

3°. Структуру решения для некоторых других правых частей интегрального уравнения можно получить исходя из (1) и результатов, приведенных для более общего уравнения 3.8.45 (см. также уравнения 3.8.26–3.8.32).

4°. При $a = b$ это уравнение, как и уравнение 1.1.57, можно свести к интегральному уравнению с разностным ядром вида 1.9.26.

$$59. \int_a^x \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{x-t})^{2\lambda} + (\sqrt{x} - \sqrt{x-t})^{2\lambda}}{2t^\lambda \sqrt{x-t}} y(t) dt = f(x).$$

Это уравнение можно записать с помощью гипергеометрической функции Гаусса в виде

$$\int_a^x (x-t)^{\gamma-1} F\left(\lambda, -\lambda, \gamma; 1 - \frac{x}{t}\right) y(t) dt = f(x), \quad \text{где } \gamma = \frac{1}{2}.$$

Решение этого уравнения см. в 1.8.86.

1.2. Уравнения, ядра которых содержат экспоненциальные функции

1.2-1. Ядра уравнений, содержащие экспоненциальные функции

$$1. \int_a^x e^{\lambda(x-t)} y(t) dt = f(x).$$

Решение: $y(x) = f'_x(x) - \lambda f(x)$.

В частном случае $a = 0$ при $f(x) = Ax$ решение дается формулой $y(x) = A(1 - \lambda x)$.

$$2. \int_a^x e^{\lambda x + \beta t} y(t) dt = f(x).$$

Решение: $y(x) = e^{-(\lambda+\beta)x} [f'_x(x) - \lambda f(x)]$.

В частном случае $a = 0$ при $f(x) = A \sin(\gamma x)$ решение дается формулой $y(x) = Ae^{-(\lambda+\beta)x} \times [\gamma \cos(\gamma x) - \lambda \sin(\gamma x)]$.

$$3. \int_a^x [e^{\lambda(x-t)} - 1] y(t) dt = f(x), \quad f(a) = f'_x(a) = 0.$$

Решение: $y(x) = \frac{1}{\lambda} f''_{xx}(x) - f'_x(x)$.

$$4. \int_a^x [e^{\lambda(x-t)} + b] y(t) dt = f(x).$$

При $b = -1$ см. уравнение 1.2.3. Дифференцируя по x , приходим к уравнению вида 2.2.1:

$$y(x) + \frac{\lambda}{b+1} \int_a^x e^{\lambda(x-t)} y(t) dt = \frac{f'_x(x)}{b+1}.$$

Решение:

$$y(x) = \frac{f'_x(x)}{b+1} - \frac{\lambda}{(b+1)^2} \int_a^x \exp\left[\frac{\lambda b}{b+1}(x-t)\right] f'_t(t) dt.$$

$$5. \int_a^x (e^{\lambda x + \beta t} + b)y(t) dt = f(x).$$

При $\beta = -\lambda$ см. уравнение 1.2.4. Частный случай уравнения 1.9.15 при $g_1(x) = e^{\lambda x}$, $h_1(t) = e^{\beta t}$, $g_2(x) = 1$, $h_2(t) = b$.

$$6. \int_a^x (e^{\lambda x} - e^{\lambda t})y(t) dt = f(x), \quad f(a) = f'_x(a) = 0.$$

Частный случай уравнения 1.9.2 при $g(x) = e^{\lambda x}$.

Решение: $y(x) = e^{-\lambda x} \left[\frac{1}{\lambda} f''_{xx}(x) - f'_x(x) \right]$.

$$7. \int_a^x (e^{\lambda x} - e^{\lambda t} + b)y(t) dt = f(x).$$

При $b = 0$ см. уравнение 1.2.6. Частный случай уравнения 1.9.3 при $g(x) = e^{\lambda x}$.

Решение:

$$y(x) = \frac{1}{b} f'_x(x) - \frac{\lambda}{b^2} e^{\lambda x} \int_a^x \exp\left(-\frac{e^{\lambda t} - e^{\lambda x}}{b}\right) f'_t(t) dt.$$

$$8. \int_a^x (Ae^{\lambda x} + Be^{\lambda t})y(t) dt = f(x).$$

При $B = -A$ см. уравнение 1.2.6. Частный случай уравнения 1.9.4 при $g(x) = e^{\lambda x}$.

Решение: $y(x) = \frac{1}{A+B} \frac{d}{dx} \left[\exp\left(-\frac{A\lambda}{A+B}x\right) \int_a^x \exp\left(-\frac{B\lambda}{A+B}t\right) f'_t(t) dt \right]$.

$$9. \int_a^x (Ae^{\lambda x} + Be^{\lambda t} + C)y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.5 при $g(x) = e^{\lambda x}$.

$$10. \int_a^x (Ae^{\lambda x} + Be^{\mu t})y(t) dt = f(x).$$

При $\lambda = \mu$ см. уравнение 1.2.8. Частный случай уравнения 1.9.6 при $g(x) = Ae^{\lambda x}$, $h(t) = Be^{\mu t}$.

$$11. \int_a^x [e^{\lambda(x-t)} - e^{\mu(x-t)}]y(t) dt = f(x), \quad f(a) = f'_x(a) = 0.$$

Решение:

$$y(x) = \frac{1}{\lambda - \mu} [f''_{xx} - (\lambda + \mu)f'_x + \lambda \mu f], \quad f = f(x).$$

$$12. \int_a^x [Ae^{\lambda(x-t)} + Be^{\mu(x-t)}]y(t) dt = f(x).$$

При $B = -A$ см. уравнение 1.2.11. Частный случай уравнения 1.9.15 при $g_1(x) = Ae^{\lambda x}$, $h_1(t) = e^{-\lambda t}$, $g_2(x) = Be^{\mu x}$, $h_2(t) = e^{-\mu t}$.

Решение:

$$y(x) = \frac{e^{\lambda x}}{A+B} \frac{d}{dx} \left\{ e^{(\mu-\lambda)x} \Phi(x) \int_a^x \left[\frac{f(t)}{e^{\mu t}} \right]'_t \frac{dt}{\Phi(t)} \right\}, \quad \Phi(x) = \exp\left[\frac{B(\lambda-\mu)}{A+B}x\right].$$

$$13. \int_a^x [Ae^{\lambda(x-t)} + Be^{\mu(x-t)} + C]y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.2.14 при $\beta = 0$.

$$14. \int_a^x [Ae^{\lambda(x-t)} + Be^{\mu(x-t)} + Ce^{\beta(x-t)}] y(t) dt = f(x).$$

Дифференцируя уравнение по x , имеем

$$(A + B + C)y(x) + \int_a^x [A\lambda e^{\lambda(x-t)} + B\mu e^{\mu(x-t)} + C\beta e^{\beta(x-t)}] y(t) dt = f'_x(x).$$

Исключая отсюда слагаемое с множителем $e^{\beta(x-t)}$ с помощью исходного уравнения, приходим к уравнению вида 2.2.10:

$$(A + B + C)y(x) + \int_a^x [A(\lambda - \beta)e^{\lambda(x-t)} + B(\mu - \beta)e^{\mu(x-t)}] y(t) dt = f'_x(x) - \beta f(x).$$

В частном случае $A + B + C = 0$ это уравнение вида 1.2.12.

$$15. \int_a^x [Ae^{\lambda(x-t)} + Be^{\mu(x-t)} + Ce^{\beta(x-t)} - A - B - C] y(t) dt = f(x).$$

Здесь $f(a) = f'_x(a) = 0$. Дифференцируя по x , получим уравнение вида 1.2.14:

$$\int_a^x [A\lambda e^{\lambda(x-t)} + B\mu e^{\mu(x-t)} + C\beta e^{\beta(x-t)}] y(t) dt = f'_x(x).$$

$$16. \int_a^x (e^{\lambda x + \mu t} - e^{\mu x + \lambda t}) y(t) dt = f(x), \quad f(a) = f'_x(a) = 0.$$

Частный случай уравнения 1.9.11 при $g(x) = e^{\lambda x}$, $h(t) = e^{\mu t}$.

Решение:

$$y(x) = \frac{f''_{xx} - (\lambda + \mu)f'_x(x) + \lambda\mu f(x)}{(\lambda - \mu) \exp[(\lambda + \mu)x]}.$$

$$17. \int_a^x (Ae^{\lambda x + \mu t} + Be^{\mu x + \lambda t}) y(t) dt = f(x).$$

При $B = -A$ см. уравнение 1.2.16. Частный случай уравнения 1.9.12 при $g(x) = e^{\lambda x}$, $h(t) = e^{\mu t}$.

Решение:

$$y(x) = \frac{1}{(A + B)e^{\mu x}} \frac{d}{dx} \left\{ \Phi^A(x) \int_a^x \Phi^B(t) \frac{d}{dt} \left[\frac{f(t)}{e^{\mu t}} \right] dt \right\}, \quad \Phi(x) = \exp\left(\frac{\mu - \lambda}{A + B} x\right).$$

$$18. \int_a^x (Ae^{\lambda x + \mu t} + Be^{\beta x + \gamma t}) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.15 при $g_1(x) = Ae^{\lambda x}$, $h_1(t) = e^{\mu t}$, $g_2(x) = Be^{\beta x}$, $h_2(t) = e^{\gamma t}$.

$$19. \int_a^x (Ae^{2\lambda x} + Be^{2\beta t} + Ce^{\lambda x} + De^{\beta t} + E) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.6 при $g(x) = Ae^{2\lambda x} + Ce^{\lambda x}$, $h(t) = Be^{2\beta t} + De^{\beta t} + E$.

$$20. \int_a^x (Ae^{\lambda x + \beta t} + Be^{2\beta t} + Ce^{\lambda x} + De^{\beta t} + E) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.15 при $g_1(x) = e^{\lambda x}$, $h_1(t) = Ae^{\beta t} + C$, $g_2(x) = 1$, $h_2(t) = Be^{2\beta t} + De^{\beta t} + E$.

$$21. \int_a^x (Ae^{2\lambda x} + Be^{\lambda x + \beta t} + Ce^{\lambda x} + De^{\beta t} + E) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.15 при $g_1(x) = Be^{\lambda x} + D$, $h_1(t) = e^{\beta t}$, $g_2(x) = Ae^{2\lambda x} + Ce^{\lambda x} + E$, $h_2(t) = 1$.

$$22. \int_a^x [1 + Ae^{\lambda x} (e^{\mu t} - e^{\mu x})] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.13 при $g(x) = e^{\mu x}$, $h(x) = Ae^{\lambda x}$.

Решение:

$$y(x) = \frac{d}{dx} \left\{ e^{\lambda x} \Phi(x) \int_a^x \left[\frac{f(t)}{e^{\lambda t}} \right]'_t \frac{dt}{\Phi(t)} \right\}, \quad \Phi(x) = \exp \left[\frac{A\mu}{\lambda + \mu} e^{(\lambda + \mu)x} \right].$$

$$23. \int_a^x [Ae^{\lambda x} (e^{\mu x} - e^{\mu t}) + Be^{\beta x} (e^{\gamma x} - e^{\gamma t})] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.45 при $g_1(x) = Ae^{\lambda x}$, $h_1(t) = -e^{\mu t}$, $g_2(x) = Be^{\beta x}$, $h_2(t) = -e^{\gamma t}$.

$$24. \int_a^x \{ A \exp(\lambda x + \mu t) + B \exp[(\lambda + \beta)x + (\mu - \beta)t] - \\ - (A + B) \exp[(\lambda + \gamma)x + (\mu - \gamma)t] \} y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.47 при $g_1(x) = e^x$.

$$25. \int_a^x (e^{\lambda x} - e^{\lambda t})^n y(t) dt = f(x), \quad n = 1, 2, \dots$$

Решение:

$$y(x) = \frac{1}{\lambda^n n!} e^{\lambda x} \left(\frac{1}{e^{\lambda x}} \frac{d}{dx} \right)^{n+1} f(x).$$

$$26. \int_a^x \sqrt{e^{\lambda x} - e^{\lambda t}} y(t) dt = f(x), \quad \lambda > 0.$$

Решение:

$$y(x) = \frac{2}{\pi} e^{\lambda x} \left(e^{-\lambda x} \frac{d}{dx} \right)^2 \int_a^x \frac{e^{\lambda t} f(t) dt}{\sqrt{e^{\lambda x} - e^{\lambda t}}}.$$

$$27. \int_a^x \frac{y(t) dt}{\sqrt{e^{\lambda x} - e^{\lambda t}}} = f(x), \quad \lambda > 0.$$

Решение:

$$y(x) = \frac{\lambda}{\pi} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{e^{\lambda t} f(t) dt}{\sqrt{e^{\lambda x} - e^{\lambda t}}}.$$

$$28. \int_a^x (e^{\lambda x} - e^{\lambda t})^\mu y(t) dt = f(x), \quad \lambda > 0, \quad 0 < \mu < 1.$$

Решение:

$$y(x) = k e^{\lambda x} \left(e^{-\lambda x} \frac{d}{dx} \right)^2 \int_a^x \frac{e^{\lambda t} f(t) dt}{(e^{\lambda x} - e^{\lambda t})^\mu}, \quad k = \frac{\sin(\pi\mu)}{\pi\mu}.$$

$$29. \int_a^x \frac{y(t) dt}{(e^{\lambda x} - e^{\lambda t})^\mu} = f(x), \quad \lambda > 0, \quad 0 < \mu < 1.$$

Решение:

$$y(x) = \frac{\lambda \sin(\pi\mu)}{\pi} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{e^{\lambda t} f(t) dt}{(e^{\lambda x} - e^{\lambda t})^{1-\mu}}.$$

1.2-2. Ядра уравнений, содержащие экспоненциальные и степенные функции

$$30. \int_a^x [A(x - t) + Be^{\lambda(x-t)}] y(t) dt = f(x).$$

Дифференцируя по x , получим уравнение вида 2.2.4:

$$By(x) + \int_a^x [A + B\lambda e^{\lambda(x-t)}] y(t) dt = f'_x(x).$$

$$31. \int_a^x (x-t)e^{\lambda(x-t)}y(t) dt = f(x), \quad f(a) = f'_x(a) = 0.$$

Решение: $y(x) = f''_{xx}(x) - 2\lambda f'_x(x) + \lambda^2 f(x)$.

$$32. \int_a^x (Ax + Bt + C)e^{\lambda(x-t)}y(t) dt = f(x).$$

Замена $u(x) = e^{-\lambda x}y(x)$ приводит к уравнению вида 1.1.3:

$$\int_a^x (Ax + Bt + C)u(t) dt = e^{-\lambda x}f(x).$$

$$33. \int_a^x (Axe^{\lambda t} + Bte^{\mu x})y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.15 при $g_1(x) = Ax$, $h_1(t) = e^{\lambda t}$, $g_2(x) = Be^{\mu x}$, $h_2(t) = t$.

$$34. \int_a^x [Axe^{\lambda(x-t)} + Bte^{\mu(x-t)}]y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.15 при $g_1(x) = Axe^{\lambda x}$, $h_1(t) = e^{-\lambda t}$, $g_2(x) = Be^{\mu x}$, $h_2(t) = te^{-\mu t}$.

$$35. \int_a^x (x-t)^2 e^{\lambda(x-t)}y(t) dt = f(x), \quad f(a) = f'_x(a) = f''_{xx}(a) = 0.$$

Решение: $y(x) = \frac{1}{2} [f'''_{xxx}(x) - 3\lambda f''_{xx}(x) + 3\lambda^2 f'_x(x) - \lambda^3 f(x)]$.

$$36. \int_a^x (x-t)^n e^{\lambda(x-t)}y(t) dt = f(x), \quad n = 1, 2, \dots$$

Считается, что выполнены условия $f(a) = f'_x(a) = \dots = f^{(n)}_x(a) = 0$.

Решение: $y(x) = \frac{1}{n!} e^{\lambda x} \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} [e^{-\lambda x} f(x)]$.

$$37. \int_a^x (Ax^\beta + Be^{\lambda t})y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.6 при $g(x) = Ax^\beta$, $h(t) = Be^{\lambda t}$.

$$38. \int_a^x (Ae^{\lambda x} + Bt^\beta)y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.6 при $g(x) = Ae^{\lambda x}$, $h(t) = Bt^\beta$.

$$39. \int_a^x (Ax^\beta e^{\lambda t} + Bt^\gamma e^{\mu x})y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.15 при $g_1(x) = Ax^\beta$, $h_1(t) = e^{\lambda t}$, $g_2(x) = Be^{\mu x}$, $h_2(t) = t^\gamma$.

$$40. \int_a^x e^{\lambda(x-t)}\sqrt{x-t}y(t) dt = f(x).$$

Решение:

$$y(x) = \frac{2}{\pi} e^{\lambda x} \frac{d^2}{dx^2} \int_a^x \frac{e^{-\lambda t} f(t) dt}{\sqrt{x-t}}.$$

$$41. \int_a^x \frac{e^{\lambda(x-t)}}{\sqrt{x-t}}y(t) dt = f(x).$$

Решение:

$$y(x) = \frac{1}{\pi} e^{\lambda x} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{e^{-\lambda t} f(t) dt}{\sqrt{x-t}}.$$

$$42. \int_a^x (x-t)^\lambda e^{\mu(x-t)} y(t) dt = f(x), \quad 0 < \lambda < 1.$$

Решение:

$$y(x) = k e^{\mu x} \frac{d^2}{dx^2} \int_a^x \frac{e^{-\mu t} f(t) dt}{(x-t)^\lambda}, \quad k = \frac{\sin(\pi\lambda)}{\pi\lambda}.$$

$$43. \int_a^x \frac{e^{\lambda(x-t)}}{(x-t)^\mu} y(t) dt = f(x), \quad 0 < \mu < 1.$$

Решение:

$$y(x) = \frac{\sin(\pi\mu)}{\pi} e^{\lambda x} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{e^{-\lambda t} f(t)}{(x-t)^{1-\mu}} dt.$$

$$44. \int_a^x (\sqrt{x} - \sqrt{t})^\lambda e^{\mu(x-t)} y(t) dt = f(x), \quad 0 < \lambda < 1.$$

Замена $u(x) = e^{-\mu x} y(x)$ приводит к уравнению вида 1.1.49:

$$\int_a^x (\sqrt{x} - \sqrt{t})^\lambda u(t) dt = e^{-\mu x} f(x).$$

$$45. \int_a^x \frac{e^{\mu(x-t)} y(t) dt}{(\sqrt{x} - \sqrt{t})^\lambda} = f(x), \quad 0 < \lambda < 1.$$

Замена $u(x) = e^{-\mu x} y(x)$ приводит к уравнению вида 1.1.50:

$$\int_a^x \frac{u(t) dt}{(\sqrt{x} - \sqrt{t})^\lambda} = e^{-\mu x} f(x).$$

$$46. \int_a^x \frac{e^{\lambda(x-t)}}{\sqrt{x^2 - t^2}} y(t) dt = f(x).$$

Решение: $y = \frac{2}{\pi} e^{\lambda x} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{t e^{-\lambda t}}{\sqrt{x^2 - t^2}} f(t) dt.$

$$47. \int_a^x \exp[\lambda(x^2 - t^2)] y(t) dt = f(x).$$

Решение: $y(x) = f'_x(x) - 2\lambda x f(x).$

$$48. \int_a^x [\exp(\lambda x^2) - \exp(\lambda t^2)] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.2 при $g(x) = \exp(\lambda x^2).$

Решение: $y(x) = \frac{1}{2\lambda} \frac{d}{dx} \left[\frac{f'_x(x)}{x \exp(\lambda x^2)} \right].$

$$49. \int_a^x [A \exp(\lambda x^2) + B \exp(\lambda t^2) + C] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.5 при $g(x) = \exp(\lambda x^2).$

$$50. \int_a^x [A \exp(\lambda x^2) + B \exp(\mu t^2)] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.6 при $g(x) = A \exp(\lambda x^2), h(t) = B \exp(\mu t^2).$

$$51. \int_a^x \sqrt{x-t} \exp[\lambda(x^2 - t^2)] y(t) dt = f(x).$$

Решение:

$$y(x) = \frac{2}{\pi} \exp(\lambda x^2) \frac{d^2}{dx^2} \int_a^x \frac{\exp(-\lambda t^2)}{\sqrt{x-t}} f(t) dt.$$

$$52. \int_a^x \frac{\exp[\lambda(x^2 - t^2)]}{\sqrt{x-t}} y(t) dt = f(x).$$

Решение:

$$y(x) = \frac{1}{\pi} \exp(\lambda x^2) \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{\exp(-\lambda t^2)}{\sqrt{x-t}} f(t) dt.$$

$$53. \int_a^x (x-t)^\lambda \exp[\mu(x^2 - t^2)] y(t) dt = f(x), \quad 0 < \lambda < 1.$$

Решение:

$$y(x) = k \exp(\mu x^2) \frac{d^2}{dx^2} \int_a^x \frac{\exp(-\mu t^2)}{(x-t)^\lambda} f(t) dt, \quad k = \frac{\sin(\pi\lambda)}{\pi\lambda}.$$

$$54. \int_a^x \exp[\lambda(x^\beta - t^\beta)] y(t) dt = f(x).$$

Решение: $y(x) = f'_x(x) - \lambda\beta x^{\beta-1} f(x).$

1.3. Уравнения, ядра которых содержат гиперболические функции

1.3-1. Ядра уравнений, содержащие гиперболический косинус

$$1. \int_a^x \operatorname{ch}[\lambda(x-t)] y(t) dt = f(x).$$

Решение: $y(x) = f'_x(x) - \lambda^2 \int_a^x f(x) dx.$

$$2. \int_a^x \{ \operatorname{ch}[\lambda(x-t)] - 1 \} y(t) dt = f(x), \quad f(a) = f'_x(a) = f''_{xx}(x) = 0.$$

Решение: $y(x) = \frac{1}{\lambda^2} f'''_{xxx}(x) - f'_x(x).$

$$3. \int_a^x \{ \operatorname{ch}[\lambda(x-t)] + b \} y(t) dt = f(x).$$

При $b = 0$ см. уравнение 1.3.1. При $b = -1$ см. уравнение 1.3.2. При $\lambda = 0$ см. уравнение 1.1.1. Дифференцируя уравнение по x , приходим к уравнению вида 2.3.16:

$$y(x) + \frac{\lambda}{b+1} \int_a^x \operatorname{sh}[\lambda(x-t)] y(t) dt = \frac{f'_x(x)}{b+1}.$$

1°. Решение при $b(b+1) < 0$:

$$y(x) = \frac{f'_x(x)}{b+1} - \frac{\lambda^2}{k(b+1)^2} \int_a^x \sin[k(x-t)] f'_t(t) dt, \quad \text{где } k = \lambda \sqrt{\frac{-b}{b+1}}.$$

2°. Решение при $b(b+1) > 0$:

$$y(x) = \frac{f'_x(x)}{b+1} - \frac{\lambda^2}{k(b+1)^2} \int_a^x \operatorname{sh}[k(x-t)] f'_t(t) dt, \quad \text{где } k = \lambda \sqrt{\frac{b}{b+1}}.$$

$$4. \int_a^x \operatorname{ch}(\lambda x + \beta t) y(t) dt = f(x).$$

При $\beta = -\lambda$ см. уравнение 1.3.1.Дифференцируя уравнение два раза по x , получим

$$\operatorname{ch}[(\lambda + \beta)x] y(x) + \lambda \int_a^x \operatorname{sh}(\lambda x + \beta t) y(t) dt = f'_x(x), \quad (1)$$

$$\{ \operatorname{ch}[(\lambda + \beta)x] y(x) \}'_x + \lambda \operatorname{sh}[(\lambda + \beta)x] y(x) + \lambda^2 \int_a^x \operatorname{ch}(\lambda x + \beta t) y(t) dt = f''_{xx}(x). \quad (2)$$

Исключая из равенства (2) интегральное слагаемое с помощью исходного уравнения, приходим к линейному обыкновенному дифференциальному уравнению первого порядка

$$w'_x + \lambda \operatorname{th}[(\lambda + \beta)x]w = f''_{xx}(x) - \lambda^2 f(x), \quad w = \operatorname{ch}[(\lambda + \beta)x]y(x). \quad (3)$$

Полагая $x = a$ в равенстве (1), имеем начальное условие $w(a) = f'_x(a)$. Решив уравнение (3) с этим условием, после некоторых преобразований получим решение исходного интегрального уравнения в виде

$$y(x) = \frac{1}{\operatorname{ch}[(\lambda + \beta)x]} f'_x(x) - \frac{\lambda \operatorname{sh}[(\lambda + \beta)x]}{\operatorname{ch}^2[(\lambda + \beta)x]} f(x) + \\ + \frac{\lambda \beta}{\operatorname{ch}^{k+1}[(\lambda + \beta)x]} \int_a^x f(t) \operatorname{ch}^{k-2}[(\lambda + \beta)t] dt, \quad k = \frac{\lambda}{\lambda + \beta}.$$

5. $\int_a^x [\operatorname{ch}(\lambda x) - \operatorname{ch}(\lambda t)] y(t) dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.2 при $g(x) = \operatorname{ch}(\lambda x)$.

Решение: $y(x) = \frac{1}{\lambda} \frac{d}{dx} \left[\frac{f'_x(x)}{\operatorname{sh}(\lambda x)} \right].$

6. $\int_a^x [A \operatorname{ch}(\lambda x) + B \operatorname{ch}(\lambda t)] y(t) dt = f(x).$

При $B = -A$ см. уравнение 1.3.5. Частный случай уравнения 1.9.4 при $g(x) = \operatorname{ch}(\lambda x)$.

Решение: $y(x) = \frac{1}{A+B} \frac{d}{dx} \left\{ [\operatorname{ch}(\lambda x)]^{-\frac{A}{A+B}} \int_a^x [\operatorname{ch}(\lambda t)]^{-\frac{B}{A+B}} f'_t(t) dt \right\}.$

7. $\int_a^x [A \operatorname{ch}(\lambda x) + B \operatorname{ch}(\mu t) + C] y(t) dt = f(x).$

Частный случай уравнения 1.9.6 при $g(x) = A \operatorname{ch}(\lambda x)$, $h(t) = B \operatorname{ch}(\mu t) + C$.

8. $\int_a^x \{A_1 \operatorname{ch}[\lambda_1(x-t)] + A_2 \operatorname{ch}[\lambda_2(x-t)]\} y(t) dt = f(x).$

Это уравнение эквивалентно уравнению вида 1.3.49:

$$\int_a^x \{B_1 \operatorname{sh}[\lambda_1(x-t)] + B_2 \operatorname{sh}[\lambda_2(x-t)]\} y(t) dt = F(x), \\ B_1 = \frac{A_1}{\lambda_1}, \quad B_2 = \frac{A_2}{\lambda_2}, \quad F(x) = \int_a^x f(t) dt,$$

(Дифференцируя это уравнение, получим исходное интегральное уравнение.)

9. $\int_a^x \operatorname{ch}^2[\lambda(x-t)] y(t) dt = f(x).$

Дифференцируя, приходим к уравнению вида 2.3.16:

$$y(x) + \lambda \int_a^x \operatorname{sh}[2\lambda(x-t)] y(t) dt = f'_x(x).$$

Решение:

$$y(x) = f'_x(x) - \frac{2\lambda^2}{k} \int_a^x \operatorname{sh}[k(x-t)] f'_t(t) dt, \quad \text{где } k = \lambda\sqrt{2}.$$

10. $\int_a^x [\operatorname{ch}^2(\lambda x) - \operatorname{ch}^2(\lambda t)] y(t) dt = f(x), \quad f(a) = f'_x(a) = 0.$

Решение: $y(x) = \frac{1}{\lambda} \frac{d}{dx} \left[\frac{f'_x(x)}{\operatorname{sh}(2\lambda x)} \right].$

$$11. \int_a^x [A \operatorname{ch}^2(\lambda x) + B \operatorname{ch}^2(\lambda t)] y(t) dt = f(x).$$

При $B = -A$ см. уравнение 1.3.10. Частный случай уравнения 1.9.4 при $g(x) = \operatorname{ch}^2(\lambda x)$.
Решение:

$$y(x) = \frac{1}{A+B} \frac{d}{dx} \left\{ [\operatorname{ch}(\lambda x)]^{-\frac{2A}{A+B}} \int_a^x [\operatorname{ch}(\lambda t)]^{-\frac{2B}{A+B}} f'_t(t) dt \right\}.$$

$$12. \int_a^x [A \operatorname{ch}^2(\lambda x) + B \operatorname{ch}^2(\mu t) + C] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.6 при $g(x) = A \operatorname{ch}^2(\lambda x)$, $h(t) = B \operatorname{ch}^2(\mu t) + C$.

$$13. \int_a^x \operatorname{ch}[\lambda(x-t)] \operatorname{ch}[\lambda(x+t)] y(t) dt = f(x).$$

Используя формулу

$$\operatorname{ch}(\alpha - \beta) \operatorname{ch}(\alpha + \beta) = \frac{1}{2} [\cos(2\alpha) + \cos(2\beta)], \quad \alpha = \lambda x, \quad \beta = \lambda t,$$

преобразуем исходное уравнение к уравнению вида 1.3.6 при $A = B = 1$:

$$\int_a^x [\operatorname{ch}(2\lambda x) + \operatorname{ch}(2\lambda t)] y(t) dt = 2f(x).$$

Решение:

$$y(x) = \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch}(2\lambda x)}} \int_a^x \frac{f'_t(t) dt}{\sqrt{\operatorname{ch}(2\lambda t)}} \right].$$

$$14. \int_a^x [\operatorname{ch}(\lambda x) \operatorname{ch}(\mu t) + \operatorname{ch}(\beta x) \operatorname{ch}(\gamma t)] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.15 при $g_1(x) = \operatorname{ch}(\lambda x)$, $h_1(t) = \operatorname{ch}(\mu t)$, $g_2(x) = \operatorname{ch}(\beta x)$, $h_2(t) = \operatorname{ch}(\gamma t)$.

$$15. \int_a^x \operatorname{ch}^3[\lambda(x-t)] y(t) dt = f(x).$$

Используя формулу $\operatorname{ch}^3 \beta = \frac{1}{4} \operatorname{ch} 3\beta + \frac{3}{4} \operatorname{ch} \beta$, приходим к уравнению вида 1.3.8:

$$\int_a^x \left\{ \frac{1}{4} \operatorname{ch}[3\lambda(x-t)] + \frac{3}{4} \operatorname{ch}[\lambda(x-t)] \right\} y(t) dt = f(x).$$

$$16. \int_a^x [\operatorname{ch}^3(\lambda x) - \operatorname{ch}^3(\lambda t)] y(t) dt = f(x), \quad f(a) = f'_x(a) = 0.$$

Решение: $y(x) = \frac{1}{3\lambda} \frac{d}{dx} \left[\frac{f'_x(x)}{\operatorname{sh}(\lambda x) \operatorname{ch}^2(\lambda x)} \right].$

$$17. \int_a^x [A \operatorname{ch}^3(\lambda x) + B \operatorname{ch}^3(\lambda t)] y(t) dt = f(x).$$

При $B = -A$ см. уравнение 1.3.16. Частный случай уравнения 1.9.4 при $g(x) = \operatorname{ch}^3(\lambda x)$.
Решение:

$$y(x) = \frac{1}{A+B} \frac{d}{dx} \left\{ [\operatorname{ch}(\lambda x)]^{-\frac{3A}{A+B}} \int_a^x [\operatorname{ch}(\lambda t)]^{-\frac{3B}{A+B}} f'_t(t) dt \right\}.$$

$$18. \int_a^x [A \operatorname{ch}^2(\lambda x) \operatorname{ch}(\mu t) + B \operatorname{ch}(\beta x) \operatorname{ch}^2(\gamma t)] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.15 при $g_1(x) = A \operatorname{ch}^2(\lambda x)$, $h_1(t) = \operatorname{ch}(\mu t)$, $g_2(x) = B \operatorname{ch}(\beta x)$, $h_2(t) = \operatorname{ch}^2(\gamma t)$.

$$19. \int_a^x \operatorname{ch}^4[\lambda(x-t)]y(t) dt = f(x).$$

Преобразуем ядро интегрального уравнения с помощью формулы

$$\operatorname{ch}^4 \beta = \frac{1}{8} \operatorname{ch} 4\beta + \frac{1}{2} \operatorname{ch} 2\beta + \frac{3}{8}, \quad \text{где } \beta = \lambda(x-t),$$

а затем продифференцируем уравнение по x . В результате приходим к уравнению вида 2.3.18:

$$y(x) + \lambda \int_a^x \left\{ \frac{1}{2} \operatorname{sh}[4\lambda(x-t)] + \operatorname{sh}[2\lambda(x-t)] \right\} y(t) dt = f'_x(x).$$

$$20. \int_a^x [\operatorname{ch}(\lambda x) - \operatorname{ch}(\lambda t)]^n y(t) dt = f(x), \quad n = 1, 2, \dots$$

Считается, что правая часть интегрального уравнения удовлетворяет следующим условиям:

$$f(a) = f'_x(a) = \dots = f_x^{(n)}(a) = 0.$$

$$\text{Решение: } y(x) = \frac{\operatorname{sh}(\lambda x)}{\lambda^n n!} \left[\frac{1}{\operatorname{sh}(\lambda x)} \frac{d}{dx} \right]^{n+1} f(x).$$

$$21. \int_a^x \sqrt{\operatorname{ch} x - \operatorname{ch} t} y(t) dt = f(x).$$

Решение:

$$y(x) = \frac{2}{\pi} \operatorname{sh} x \left(\frac{1}{\operatorname{sh} x} \frac{d}{dx} \right)^2 \int_a^x \frac{\operatorname{sh} t f(t) dt}{\sqrt{\operatorname{ch} x - \operatorname{ch} t}}.$$

$$22. \int_a^x \frac{y(t) dt}{\sqrt{\operatorname{ch} x - \operatorname{ch} t}} = f(x).$$

Решение:

$$y(x) = \frac{1}{\pi} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{\operatorname{sh} t f(t) dt}{\sqrt{\operatorname{ch} x - \operatorname{ch} t}}.$$

$$23. \int_a^x (\operatorname{ch} x - \operatorname{ch} t)^\lambda y(t) dt = f(x), \quad 0 < \lambda < 1.$$

Решение:

$$y(x) = k \operatorname{sh} x \left(\frac{1}{\operatorname{sh} x} \frac{d}{dx} \right)^2 \int_a^x \frac{\operatorname{sh} t f(t) dt}{(\operatorname{ch} x - \operatorname{ch} t)^\lambda}, \quad k = \frac{\sin(\pi\lambda)}{\pi\lambda}.$$

$$24. \int_a^x (\operatorname{ch}^\mu x - \operatorname{ch}^\mu t) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.2 при $g(x) = \operatorname{ch}^\mu x$.

$$\text{Решение: } y(x) = \frac{1}{\mu} \frac{d}{dx} \left[\frac{f'_x(x)}{\operatorname{sh} x \operatorname{ch}^{\mu-1} x} \right].$$

$$25. \int_a^x (A \operatorname{ch}^\mu x + B \operatorname{ch}^\mu t) y(t) dt = f(x).$$

При $B = -A$ см. уравнение 1.3.24. Частный случай уравнения 1.9.4 при $g(x) = \operatorname{ch}^\mu x$.

Решение:

$$y(x) = \frac{1}{A+B} \frac{d}{dx} \left\{ [\operatorname{ch}(\lambda x)]^{-\frac{A\mu}{A+B}} \int_a^x [\operatorname{ch}(\lambda t)]^{-\frac{B\mu}{A+B}} f'_t(t) dt \right\}.$$

$$26. \int_a^x \frac{y(t) dt}{(\operatorname{ch} x - \operatorname{ch} t)^\lambda} = f(x), \quad 0 < \lambda < 1.$$

Решение:

$$y(x) = \frac{\sin(\pi\lambda)}{\pi} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{\operatorname{sh} t f(t) dt}{(\operatorname{ch} x - \operatorname{ch} t)^{1-\lambda}}.$$

$$27. \int_a^x (x-t) \operatorname{ch}[\lambda(x-t)] y(t) dt = f(x), \quad f(a) = f'_x(a) = 0.$$

Дифференцируя уравнение дважды, имеем

$$y(x) + 2\lambda \int_a^x \operatorname{sh}[\lambda(x-t)] y(t) dt + \lambda^2 \int_a^x (x-t) \operatorname{ch}[\lambda(x-t)] y(t) dt = f''_{xx}(x).$$

Исключая отсюда третье слагаемое в правой части с помощью исходного уравнения, приходим к уравнению вида 2.3.16:

$$y(x) + 2\lambda \int_a^x \operatorname{sh}[\lambda(x-t)] y(t) dt = f''_{xx}(x) - \lambda^2 f(x).$$

$$28. \int_a^x \frac{\operatorname{ch}[\lambda(x-t)]}{\sqrt{x-t}} y(t) dt = f(x), \quad f(a) = f'_x(a) = 0.$$

Решение:

$$y(x) = \frac{2}{\pi\lambda} \int_a^x \frac{\operatorname{ch}[\lambda(x-t)]}{\sqrt{x-t}} [f''_{tt}(t) - \lambda^2 f(t)] dt.$$

⊙ Литература: А. Р. Prudnikov, Ю. А. Brychkov, О. I. Marichev (1992, стр. 436).

$$29. \int_a^x \sqrt{x-t} \operatorname{ch}(\lambda\sqrt{x-t}) y(t) dt = f(x).$$

Решение:

$$y(x) = \frac{1}{\pi} \int_a^x \frac{\cos(\lambda\sqrt{x-t})}{\sqrt{x-t}} f'_t(t) dt.$$

⊙ Литература: А. Р. Prudnikov, Ю. А. Brychkov, О. I. Marichev (1992, стр. 437).

$$30. \int_a^x \frac{\operatorname{ch}(\lambda\sqrt{x-t})}{\sqrt{x-t}} y(t) dt = f(x).$$

Решение:

$$y(x) = \frac{1}{\pi} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{\cos(\lambda\sqrt{x-t})}{\sqrt{x-t}} f(t) dt.$$

$$31. \int_x^\infty \frac{\operatorname{ch}(\lambda\sqrt{t-x})}{\sqrt{t-x}} y(t) dt = f(x).$$

Решение:

$$y(x) = -\frac{1}{\pi} \frac{d}{dx} \int_x^\infty \frac{\cos(\lambda\sqrt{t-x})}{\sqrt{t-x}} f(t) dt.$$

⊙ Литература: А. Р. Prudnikov, Ю. А. Brychkov, О. I. Marichev (1992, стр. 439).

$$32. \int_0^x \frac{\operatorname{ch}(\lambda\sqrt{x^2-t^2})}{\sqrt{x^2-t^2}} y(t) dt = f(x).$$

Решение:

$$y(x) = \frac{2}{\pi} \frac{d}{dx} \int_0^x t \frac{\cos(\lambda\sqrt{x^2-t^2})}{\sqrt{x^2-t^2}} f(t) dt.$$

$$33. \int_x^\infty \frac{\operatorname{ch}(\lambda\sqrt{t^2-x^2})}{\sqrt{t^2-x^2}} y(t) dt = f(x).$$

Решение:

$$y(x) = -\frac{2}{\pi} \frac{d}{dx} \int_x^\infty t \frac{\cos(\lambda\sqrt{t^2-x^2})}{\sqrt{t^2-x^2}} f(t) dt.$$

$$34. \int_0^x \frac{\operatorname{ch}(\lambda\sqrt{xt-t^2})}{\sqrt{x-t}} y(t) dt = f(x).$$

Решение:

$$y(x) = \frac{1}{\pi x} \int_0^x \frac{\cos(\lambda\sqrt{x^2-xt})}{\sqrt{x-t}} [f(t)/2 + t f'_t(t)] dt.$$

⊙ Литература: А. Р. Prudnikov, Ю. А. Brychkov, О. I. Marichev (1992, стр. 438).

$$35. \int_0^x \frac{\operatorname{ch}(\lambda \sqrt{x^2 - xt})}{\sqrt{x-t}} y(t) dt = f(x).$$

Решение:

$$y(x) = \frac{\sqrt{x}}{\pi} \frac{d}{dx} \left[\sqrt{x} \int_0^x \frac{\cos(\lambda \sqrt{xt - t^2})}{\sqrt{x-t}} f(t) dt \right].$$

⊙ Литература: А. Р. Prudnikov, Yu. A. Brychkov, O. I. Marichev (1992, стр. 438).

$$36. \int_a^x \frac{\operatorname{ch}[\lambda \sqrt{(x-t)(x-t+\gamma)}]}{\sqrt{x-t}} y(t) dt = f(x).$$

Считается, что выполнены условия $f(a) = f'_x(a) = f''_{xx}(a) = f'''_{xxx}(a) = 0$.

Решение:

$$y(x) = \frac{2}{\pi \lambda^2} \int_a^x \frac{\operatorname{sh}[\lambda \sqrt{(x-t)(x-t-\gamma)}]}{\sqrt{x-t-\gamma}} \int_a^t \operatorname{sh}[\lambda(t-s)] \left(\frac{d^2}{ds^2} - \lambda^2 \right)^2 f(s) ds dt.$$

⊙ Литература: А. Р. Prudnikov, Yu. A. Brychkov, O. I. Marichev (1992, стр. 438).

$$37. \int_a^x [Ax^\beta + B \operatorname{ch}^\gamma(\lambda t) + C] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.6 при $g(x) = Ax^\beta$, $h(t) = B \operatorname{ch}^\gamma(\lambda t) + C$.

$$38. \int_a^x [A \operatorname{ch}^\gamma(\lambda x) + Bt^\beta + C] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.6 при $g(x) = A \operatorname{ch}^\gamma(\lambda x)$, $h(t) = Bt^\beta + C$.

$$39. \int_a^x (Ax^\lambda \operatorname{ch}^\mu t + Bt^\beta \operatorname{ch}^\gamma x) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.15 при $g_1(x) = Ax^\lambda$, $h_1(t) = \operatorname{ch}^\mu t$, $g_2(x) = B \operatorname{ch}^\gamma x$, $h_2(t) = t^\beta$.

1.3-2. Ядра уравнений, содержащие гиперболический синус

$$40. \int_a^x \operatorname{sh}[\lambda(x-t)] y(t) dt = f(x), \quad f(a) = f'_x(a) = 0.$$

Решение: $y(x) = \frac{1}{\lambda} f''_{xx}(x) - \lambda f(x)$.

$$41. \int_a^x \frac{\operatorname{sh}[\lambda(x-t)]}{\sqrt{x-t}} y(t) dt = f(x), \quad f(a) = f'_x(a) = 0.$$

Решение:

$$y(x) = \frac{2}{\pi \lambda} \int_a^x \frac{\operatorname{sh}[\lambda(x-t)]}{\sqrt{x-t}} [f''_{tt}(t) - \lambda^2 f(t)] dt.$$

⊙ Литература: А. Р. Prudnikov, Yu. A. Brychkov, O. I. Marichev (1992, стр. 436).

$$42. \int_a^x \frac{\operatorname{sh}[\lambda(x-t)]}{(x-t)^{3/2}} y(t) dt = f(x), \quad f(a) = f'_x(a) = 0.$$

Решение:

$$y(x) = \frac{2}{\pi \lambda} \int_a^x \frac{\operatorname{sh}[\lambda(x-t)]}{\sqrt{x-t}} \left[f''_{tt}(t) - \lambda^2 f(t) + \frac{f'(t)}{x-t} \right] dt.$$

⊙ Литература: А. Р. Prudnikov, Yu. A. Brychkov, O. I. Marichev (1992, стр. 437).

$$43. \int_a^x \{\operatorname{sh}[\lambda(x-t)] + b\} y(t) dt = f(x).$$

Дифференцируя уравнение по x , приходим к уравнению вида 2.3.3:

$$y(x) + \frac{\lambda}{b} \int_a^x \operatorname{ch}[\lambda(x-t)] y(t) dt = \frac{1}{b} f'_x(x).$$

Решение:

$$y(x) = \frac{1}{b} f'_x(x) + \int_a^x R(x-t) f'_t(t) dt,$$

$$R(x) = \frac{\lambda}{b^2} \exp\left(-\frac{\lambda x}{2b}\right) \left[\frac{\lambda}{2bk} \operatorname{sh}(kx) - \operatorname{ch}(kx) \right], \quad k = \frac{\lambda\sqrt{1+4b^2}}{2b}.$$

$$44. \int_a^x \operatorname{sh}(\lambda x + \beta t) y(t) dt = f(x).$$

При $\beta = -\lambda$ см. уравнение 1.3.40. Пусть $\beta \neq -\lambda$.

Дифференцируя уравнение два раза по x , получим

$$\operatorname{sh}[(\lambda + \beta)x] y(x) + \lambda \int_a^x \operatorname{ch}(\lambda x + \beta t) y(t) dt = f'_x(x), \quad (1)$$

$$\{\operatorname{sh}[(\lambda + \beta)x] y(x)\}'_x + \lambda \operatorname{ch}[(\lambda + \beta)x] y(x) + \lambda^2 \int_a^x \operatorname{sh}(\lambda x + \beta t) y(t) dt = f''_{xx}(x). \quad (2)$$

Исключая из равенства (2) интегральное слагаемое с помощью исходного уравнения, приходим к линейному обыкновенному дифференциальному уравнению первого порядка

$$w'_x + \lambda \operatorname{cth}[(\lambda + \beta)x] w = f''_{xx}(x) - \lambda^2 f(x), \quad w = \operatorname{sh}[(\lambda + \beta)x] y(x). \quad (3)$$

Полагая $x = a$ в равенстве (1), имеем начальное условие $w(a) = f'_x(a)$. Решив уравнение (3) с этим условием, после некоторых преобразований получим решение исходного интегрального уравнения в виде

$$y(x) = \frac{1}{\operatorname{sh}[(\lambda + \beta)x]} f'_x(x) - \frac{\lambda \operatorname{ch}[(\lambda + \beta)x]}{\operatorname{sh}^2[(\lambda + \beta)x]} f(x) - \\ - \frac{\lambda \beta}{\operatorname{sh}^{k+1}[(\lambda + \beta)x]} \int_a^x f(t) \operatorname{sh}^{k-2}[(\lambda + \beta)t] dt, \quad k = \frac{\lambda}{\lambda + \beta}.$$

$$45. \int_a^x [\operatorname{sh}(\lambda x) - \operatorname{sh}(\lambda t)] y(t) dt = f(x), \quad f(a) = f'_x(a) = 0.$$

Частный случай уравнения 1.9.2 при $g(x) = \operatorname{sh}(\lambda x)$.

Решение: $y(x) = \frac{1}{\lambda} \frac{d}{dx} \left[\frac{f'_x(x)}{\operatorname{ch}(\lambda x)} \right].$

$$46. \int_a^x [A \operatorname{sh}(\lambda x) + B \operatorname{sh}(\lambda t)] y(t) dt = f(x).$$

При $B = -A$ см. уравнение 1.3.45. Частный случай уравнения 1.9.4 при $g(x) = \operatorname{sh}(\lambda x)$.

Решение: $y(x) = \frac{1}{A+B} \frac{d}{dx} \left\{ [\operatorname{sh}(\lambda x)]^{-\frac{A}{A+B}} \int_a^x [\operatorname{sh}(\lambda t)]^{-\frac{B}{A+B}} f'_t(t) dt \right\}.$

$$47. \int_a^x [A \operatorname{sh}(\lambda x) + B \operatorname{sh}(\mu t)] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.6 при $g(x) = A \operatorname{sh}(\lambda x)$, $h(t) = B \operatorname{sh}(\mu t)$.

$$48. \int_a^x \{\mu \operatorname{sh}[\lambda(x-t)] - \lambda \operatorname{sh}[\mu(x-t)]\} y(t) dt = f(x).$$

Считается, что выполнены условия $f(a) = f'_x(a) = f''_{xx}(a) = f'''_{xxx}(a) = 0$.

Решение:

$$y(x) = \frac{f'''_{xxx} - (\lambda^2 + \mu^2) f''_{xx} + \lambda^2 \mu^2 f}{\mu \lambda^3 - \lambda \mu^3}, \quad f = f(x).$$

$$49. \int_a^x \{A_1 \operatorname{sh}[\lambda_1(x-t)] + A_2 \operatorname{sh}[\lambda_2(x-t)]\} y(t) dt = f(x), \quad f(a) = f'_x(a) = 0.$$

1°. Введем обозначения

$$I_1 = \int_a^x \operatorname{sh}[\lambda_1(x-t)] y(t) dt, \quad I_2 = \int_a^x \operatorname{sh}[\lambda_2(x-t)] y(t) dt,$$

$$J_1 = \int_a^x \operatorname{ch}[\lambda_1(x-t)] y(t) dt, \quad J_2 = \int_a^x \operatorname{ch}[\lambda_2(x-t)] y(t) dt.$$

Продифференцируем последовательно интегральное уравнение четыре раза. В результате имеем (первым записано исходное уравнение)

$$A_1 I_1 + A_2 I_2 = f, \quad f = f(x), \quad (1)$$

$$A_1 \lambda_1 J_1 + A_2 \lambda_2 J_2 = f'_x, \quad (2)$$

$$(A_1 \lambda_1 + A_2 \lambda_2) y + A_1 \lambda_1^2 I_1 + A_2 \lambda_2^2 I_2 = f''_{xx}, \quad (3)$$

$$(A_1 \lambda_1 + A_2 \lambda_2) y'_x + A_1 \lambda_1^3 J_1 + A_2 \lambda_2^3 J_2 = f'''_{xxx}, \quad (4)$$

$$(A_1 \lambda_1 + A_2 \lambda_2) y''_{xx} + (A_1 \lambda_1^3 + A_2 \lambda_2^3) y + A_1 \lambda_1^4 I_1 + A_2 \lambda_2^4 I_2 = f''''_{xxxx}. \quad (5)$$

Исключая из равенств (1), (3), (5) величины I_1 и I_2 , приходим к линейному обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка с постоянными коэффициентами

$$(A_1 \lambda_1 + A_2 \lambda_2) y''_{xx} - \lambda_1 \lambda_2 (A_1 \lambda_2 + A_2 \lambda_1) y = f''''_{xxxx} - (\lambda_1^2 + \lambda_2^2) f''_{xx} + \lambda_1^2 \lambda_2^2 f. \quad (6)$$

Подставляя значение $x = a$ в равенства (3) и (4), получим начальные условия

$$(A_1 \lambda_1 + A_2 \lambda_2) y(a) = f''_{xx}(a), \quad (A_1 \lambda_1 + A_2 \lambda_2) y'_x(a) = f'''_{xxx}(a). \quad (7)$$

Решение дифференциального уравнения (6) с условиями (7) позволяет найти решение интегрального уравнения.

2°. Обозначим

$$\Delta = \lambda_1 \lambda_2 \frac{A_1 \lambda_2 + A_2 \lambda_1}{A_1 \lambda_1 + A_2 \lambda_2}.$$

2.1. Решение при $\Delta > 0$:

$$(A_1 \lambda_1 + A_2 \lambda_2) y(x) = f''_{xx}(x) + B f(x) + C \int_a^x \operatorname{sh}[k(x-t)] f(t) dt,$$

$$k = \sqrt{\Delta}, \quad B = \Delta - \lambda_1^2 - \lambda_2^2, \quad C = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} [\Delta^2 - (\lambda_1^2 + \lambda_2^2) \Delta + \lambda_1^2 \lambda_2^2].$$

2.2. Решение при $\Delta < 0$:

$$(A_1 \lambda_1 + A_2 \lambda_2) y(x) = f''_{xx}(x) + B f(x) + C \int_a^x \sin[k(x-t)] f(t) dt,$$

$$k = \sqrt{-\Delta}, \quad B = \Delta - \lambda_1^2 - \lambda_2^2, \quad C = \frac{1}{\sqrt{-\Delta}} [\Delta^2 - (\lambda_1^2 + \lambda_2^2) \Delta + \lambda_1^2 \lambda_2^2].$$

2.3. Решение при $\Delta = 0$:

$$(A_1 \lambda_1 + A_2 \lambda_2) y(x) = f''_{xx}(x) - (\lambda_1^2 + \lambda_2^2) f(x) + \lambda_1^2 \lambda_2^2 \int_a^x (x-t) f(t) dt.$$

2.4. Решение при $\Delta = \infty$:

$$y(x) = \frac{f''''_{xxxx} - (\lambda_1^2 + \lambda_2^2) f''_{xx} + \lambda_1^2 \lambda_2^2 f}{A_1 \lambda_1^3 + A_2 \lambda_2^3}, \quad f = f(x).$$

В последнем случае выполняется равенство $A_1 \lambda_1 + A_2 \lambda_2 = 0$ и правая часть интегрального уравнения удовлетворяет условиям $f(a) = f'_x(a) = f''_{xx}(a) = f'''_{xxx}(a) = 0$.

$$50. \int_a^x \{A \operatorname{sh}[\lambda(x-t)] + B \operatorname{sh}[\mu(x-t)] + C \operatorname{sh}[\beta(x-t)]\} y(t) dt = f(x).$$

Считается, что выполнены условия $f(a) = f'_x(a) = 0$. Продифференцируем интегральное уравнение два раза. В результате имеем

$$(A\lambda + B\mu + C\beta)y(x) + \int_a^x \{A\lambda^2 \operatorname{sh}[\lambda(x-t)] + B\mu^2 \operatorname{sh}[\mu(x-t)]\} y(t) dt + \\ + C\beta^2 \int_a^x \operatorname{sh}[\beta(x-t)] y(t) dt = f''_{xx}(x).$$

Исключая отсюда последний интеграл с помощью исходного уравнения, приходим к уравнению вида 2.3.18:

$$(A\lambda + B\mu + C\beta)y(x) + \int_a^x \{A(\lambda^2 - \beta^2) \operatorname{sh}[\lambda(x-t)] + B(\mu^2 - \beta^2) \operatorname{sh}[\mu(x-t)]\} y(t) dt = f''_{xx}(x) - \beta^2 f(x).$$

В частном случае $A\lambda + B\mu + C\beta = 0$ это уравнение вида 1.3.49.

$$51. \int_a^x \operatorname{sh}^2[\lambda(x-t)] y(t) dt = f(x), \quad f(a) = f'_x(a) = f''_{xx}(a) = 0.$$

Дифференцируя, приходим к уравнению вида 1.3.40:

$$\int_a^x \operatorname{sh}[2\lambda(x-t)] y(t) dt = \frac{1}{\lambda} f'_x(x).$$

$$\text{Решение: } y(x) = \frac{1}{2} \lambda^{-2} f'''_{xxx}(x) - 2f'_x(x).$$

$$52. \int_a^x [\operatorname{sh}^2(\lambda x) - \operatorname{sh}^2(\lambda t)] y(t) dt = f(x), \quad f(a) = f'_x(a) = 0.$$

$$\text{Решение: } y(x) = \frac{1}{\lambda} \frac{d}{dx} \left[\frac{f'_x(x)}{\operatorname{sh}(2\lambda x)} \right].$$

$$53. \int_a^x [A \operatorname{sh}^2(\lambda x) + B \operatorname{sh}^2(\lambda t)] y(t) dt = f(x).$$

При $B = -A$ см. уравнение 1.3.52. Частный случай уравнения 1.9.4 при $g(x) = \operatorname{sh}^2(\lambda x)$.

Решение:

$$y(x) = \frac{1}{A+B} \frac{d}{dx} \left\{ [\operatorname{sh}(\lambda x)]^{-\frac{2A}{A+B}} \int_a^x [\operatorname{sh}(\lambda t)]^{-\frac{2B}{A+B}} f'_t(t) dt \right\}.$$

$$54. \int_a^x [A \operatorname{sh}^2(\lambda x) + B \operatorname{sh}^2(\mu t)] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.6 при $g(x) = A \operatorname{sh}^2(\lambda x)$, $h(t) = B \operatorname{sh}^2(\mu t)$.

$$55. \int_a^x \operatorname{sh}[\lambda(x-t)] \operatorname{sh}[\lambda(x+t)] y(t) dt = f(x).$$

Используя формулу

$$\operatorname{sh}(\alpha - \beta) \operatorname{sh}(\alpha + \beta) = \frac{1}{2} [\operatorname{ch}(2\alpha) - \operatorname{ch}(2\beta)], \quad \alpha = \lambda x, \quad \beta = \lambda t,$$

преобразуем исходное уравнение к уравнению вида 1.3.5:

$$\int_a^x [\operatorname{ch}(2\lambda x) - \operatorname{ch}(2\lambda t)] y(t) dt = 2f(x).$$

$$\text{Решение: } y(x) = \frac{1}{\lambda} \frac{d}{dx} \left[\frac{f'_x(x)}{\operatorname{sh}(2\lambda x)} \right].$$

$$56. \int_a^x [A \operatorname{sh}(\lambda x) \operatorname{sh}(\mu t) + B \operatorname{sh}(\beta x) \operatorname{sh}(\gamma t)] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.15 при $g_1(x) = A \operatorname{sh}(\lambda x)$, $h_1(t) = \operatorname{sh}(\mu t)$, $g_2(x) = B \operatorname{sh}(\beta x)$, $h_2(t) = \operatorname{sh}(\gamma t)$.

$$57. \int_a^x \operatorname{sh}^3[\lambda(x-t)] y(t) dt = f(x), \quad f(a) = f'_x(a) = f''_{xx}(a) = f'''_{xxx}(a) = 0.$$

Используя формулу $\operatorname{sh}^3 \beta = \frac{1}{4} \operatorname{sh} 3\beta - \frac{3}{4} \operatorname{sh} \beta$, приходим к уравнению вида 1.3.49:

$$\int_a^x \left\{ \frac{1}{4} \operatorname{sh}[3\lambda(x-t)] - \frac{3}{4} \operatorname{sh}[\lambda(x-t)] \right\} y(t) dt = f(x).$$

$$58. \int_a^x [\operatorname{sh}^3(\lambda x) - \operatorname{sh}^3(\lambda t)] y(t) dt = f(x), \quad f(a) = f'_x(a) = 0.$$

Частный случай уравнения 1.9.2 при $g(x) = \operatorname{sh}^3(\lambda x)$.

$$59. \int_a^x [A \operatorname{sh}^3(\lambda x) + B \operatorname{sh}^3(\lambda t)] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.4 при $g(x) = \operatorname{sh}^3(\lambda x)$.

Решение:

$$y(x) = \frac{1}{A+B} \frac{d}{dx} \left\{ [\operatorname{sh}(\lambda x)]^{-\frac{3A}{A+B}} \int_a^x [\operatorname{sh}(\lambda t)]^{-\frac{3B}{A+B}} f'_t(t) dt \right\}.$$

$$60. \int_a^x [A \operatorname{sh}^2(\lambda x) \operatorname{sh}(\mu t) + B \operatorname{sh}(\beta x) \operatorname{sh}^2(\gamma t)] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.15 при $g_1(x) = A \operatorname{sh}^2(\lambda x)$, $h_1(t) = \operatorname{sh}(\mu t)$, $g_2(x) = B \operatorname{sh}(\beta x)$, $h_2(t) = \operatorname{sh}^2(\gamma t)$.

$$61. \int_a^x \operatorname{sh}^4[\lambda(x-t)] y(t) dt = f(x).$$

Здесь $f(a) = f'_x(a) = \dots = f''''_{xxx}(a) = 0$.

Преобразуем ядро интегрального уравнения с помощью формулы

$$\operatorname{sh}^4 \beta = \frac{1}{8} \operatorname{ch} 4\beta - \frac{1}{2} \operatorname{ch} 2\beta + \frac{3}{8}, \quad \text{где } \beta = \lambda(x-t),$$

а затем продифференцируем уравнение по x . В результате приходим к уравнению вида 1.3.49:

$$\lambda \int_a^x \left\{ \frac{1}{2} \operatorname{sh}[4\lambda(x-t)] - \operatorname{sh}[2\lambda(x-t)] \right\} y(t) dt = f'_x(x).$$

$$62. \int_a^x \operatorname{sh}^n[\lambda(x-t)] y(t) dt = f(x), \quad n = 2, 3, \dots$$

Считается, что выполнены условия $f(a) = f'_x(a) = \dots = f^{(n)}_x(a) = 0$.

Продифференцируем дважды уравнение по x . Преобразуем ядро полученного интегрального уравнения с помощью равенства $\operatorname{ch}^2 \beta = 1 + \operatorname{sh}^2 \beta$, где $\beta = \lambda(x-t)$. В результате имеем

$$\lambda^2 n^2 \int_a^x \operatorname{sh}^n[\lambda(x-t)] y(t) dt + \lambda^2 n(n-1) \int_a^x \operatorname{sh}^{n-2}[\lambda(x-t)] y(t) dt = f''_{xx}(x).$$

Исключая отсюда первое слагаемое в левой части с помощью исходного уравнения, получим

$$\int_a^x \operatorname{sh}^{n-2}[\lambda(x-t)] y(t) dt = \frac{1}{\lambda^2 n(n-1)} [f''_{xx}(x) - \lambda^2 n^2 f(x)].$$

Это уравнение такого же вида, что и исходное; при этом степень, характеризующая ядро преобразованного уравнения, уменьшилась на две единицы.

Используя указанный прием достаточное число раз, в итоге можно прийти к простейшим интегральным уравнениям вида 1.1.1 (при четном n) или 1.3.40 (при нечетном n).

$$63. \int_a^x \operatorname{sh}(\lambda \sqrt{x-t}) y(t) dt = f(x).$$

Решение:

$$y(x) = \frac{2}{\pi \lambda} \frac{d^2}{dx^2} \int_a^x \frac{\cos(\lambda \sqrt{x-t})}{\sqrt{x-t}} f(t) dt.$$

$$64. \int_a^x \sqrt{\operatorname{sh} x - \operatorname{sh} t} y(t) dt = f(x).$$

Решение:

$$y(x) = \frac{2}{\pi} \operatorname{ch} x \left(\frac{1}{\operatorname{ch} x} \frac{d}{dx} \right)^2 \int_a^x \frac{\operatorname{ch} t f(t) dt}{\sqrt{\operatorname{sh} x - \operatorname{sh} t}}.$$

$$65. \int_a^x \frac{y(t) dt}{\sqrt{\operatorname{sh} x - \operatorname{sh} t}} = f(x).$$

Решение:

$$y(x) = \frac{1}{\pi} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{\operatorname{ch} t f(t) dt}{\sqrt{\operatorname{sh} x - \operatorname{sh} t}}.$$

$$66. \int_a^x (\operatorname{sh} x - \operatorname{sh} t)^\lambda y(t) dt = f(x), \quad 0 < \lambda < 1.$$

Решение:

$$y(x) = k \operatorname{ch} x \left(\frac{1}{\operatorname{ch} x} \frac{d}{dx} \right)^2 \int_a^x \frac{\operatorname{ch} t f(t) dt}{(\operatorname{sh} x - \operatorname{sh} t)^\lambda}, \quad k = \frac{\sin(\pi\lambda)}{\pi\lambda}.$$

$$67. \int_a^x (\operatorname{sh}^\mu x - \operatorname{sh}^\mu t) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.2 при $g(x) = \operatorname{sh}^\mu x$.

Решение: $y(x) = \frac{1}{\mu} \frac{d}{dx} \left[\frac{f'_x(x)}{\operatorname{ch} x \operatorname{sh}^{\mu-1} x} \right].$

$$68. \int_a^x [A \operatorname{sh}^\mu(\lambda x) + B \operatorname{sh}^\mu(\lambda t)] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.4 при $g(x) = \operatorname{sh}^\mu(\lambda x)$.

Решение при $B \neq -A$:

$$y(x) = \frac{1}{A+B} \frac{d}{dx} \left\{ [\operatorname{sh}(\lambda x)]^{-\frac{A\mu}{A+B}} \int_a^x [\operatorname{sh}(\lambda t)]^{-\frac{B\mu}{A+B}} f'_t(t) dt \right\}.$$

$$69. \int_a^x \frac{y(t) dt}{(\operatorname{sh} x - \operatorname{sh} t)^\lambda} = f(x), \quad 0 < \lambda < 1.$$

Решение:

$$y(x) = \frac{\sin(\pi\lambda)}{\pi} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{\operatorname{ch} t f(t) dt}{(\operatorname{sh} x - \operatorname{sh} t)^{1-\lambda}}.$$

$$70. \int_a^x (x-t) \operatorname{sh}[\lambda(x-t)] y(t) dt = f(x), \quad f(a) = f'_x(a) = f''_{xx}(a) = 0.$$

Дифференцируя дважды, получим

$$2\lambda \int_a^x \operatorname{ch}[\lambda(x-t)] y(t) dt + \lambda^2 \int_a^x (x-t) \operatorname{sh}[\lambda(x-t)] y(t) dt = f''_{xx}(x).$$

Исключая второй интеграл в левой части этого выражения с помощью исходного уравнения, приходим к уравнению вида 1.3.1:

$$\int_a^x \operatorname{ch}[\lambda(x-t)] y(t) dt = \frac{1}{2\lambda} [f''_{xx}(x) - \lambda^2 f(x)].$$

Решение:

$$y(x) = \frac{1}{2\lambda} f'''_{xxx}(x) - \lambda f'_x(x) + \frac{1}{2} \lambda^3 \int_a^x f(t) dt.$$

$$71. \int_a^x \frac{\operatorname{sh}[\lambda(x-t)]}{\sqrt{x-t}} y(t) dt = f(x), \quad f(a) = f'_x(a) = 0.$$

Решение:

$$y(x) = \frac{2}{\pi\lambda} \int_a^x \frac{\operatorname{sh}[\lambda(x-t)]}{\sqrt{x-t}} [f''_{tt}(t) - \lambda^2 f(t)] dt.$$

$$72. \int_a^x \frac{\operatorname{sh}[\lambda(x-t)]}{(x-t)^{3/2}} y(t) dt = f(x), \quad f(a) = f'_x(a) = 0.$$

Решение:

$$y(x) = \frac{2}{\pi\lambda} \int_a^x \frac{\operatorname{sh}[\lambda(x-t)]}{\sqrt{x-t}} \left[f''_{tt}(t) - \lambda^2 f(t) + \frac{f'(t)}{x-t} \right] dt.$$

⊙ Литература: А. Р. Prudnikov, Yu. A. Brychkov, O. I. Marichev (1992, стр. 437).

$$73. \int_a^x \frac{\operatorname{sh}[\lambda\sqrt{(x-t)(x-t+\gamma)}]}{\sqrt{x-t}} y(t) dt = f(x).$$

Считается, что выполнены условия $f(a) = f'_x(a) = f''_{xx}(a) = f'''_{xxx}(a) = 0$.

Решение:

$$y(x) = \frac{2}{\pi\lambda^2} \int_a^x \frac{\operatorname{ch}[\lambda\sqrt{(x-t)(x-t-\gamma)}]}{\sqrt{x-t}} \int_a^t \operatorname{sh}[\lambda(t-s)] \left(\frac{d^2}{ds^2} + \lambda^2 \right)^2 f(s) ds dt.$$

⊙ Литература: А. Р. Prudnikov, Yu. A. Brychkov, O. I. Marichev (1992, стр. 438).

$$74. \int_a^x [Ax^\beta + B \operatorname{sh}^\gamma(\lambda t) + C] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.6 при $g(x) = Ax^\beta$, $h(t) = B \operatorname{sh}^\gamma(\lambda t) + C$.

$$75. \int_a^x [A \operatorname{sh}^\gamma(\lambda x) + Bt^\beta + C] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.6 при $g(x) = A \operatorname{sh}^\gamma(\lambda x)$, $h(t) = Bt^\beta + C$.

$$76. \int_a^x (Ax^\lambda \operatorname{sh}^\mu t + Bt^\beta \operatorname{sh}^\gamma x) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.15 при $g_1(x) = Ax^\lambda$, $h_1(t) = \operatorname{sh}^\mu t$, $g_2(x) = B \operatorname{sh}^\gamma x$, $h_2(t) = t^\beta$.

1.3-3. Ядра уравнений, содержащие гиперболический тангенс

$$77. \int_a^x [\operatorname{th}(\lambda x) - \operatorname{th}(\lambda t)] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.2 при $g(x) = \operatorname{th}(\lambda x)$.

Решение: $y(x) = \frac{1}{\lambda} [\operatorname{ch}^2(\lambda x) f'_x(x)]'_x$.

$$78. \int_a^x [A \operatorname{th}(\lambda x) + B \operatorname{th}(\lambda t)] y(t) dt = f(x).$$

При $B = -A$ см. уравнение 1.3.77. Частный случай уравнения 1.9.4 при $g(x) = \operatorname{th}(\lambda x)$.

Решение: $y(x) = \frac{1}{A+B} \frac{d}{dx} \left\{ [\operatorname{th}(\lambda x)]^{-\frac{A}{A+B}} \int_a^x [\operatorname{th}(\lambda t)]^{-\frac{B}{A+B}} f'_t(t) dt \right\}$.

$$79. \int_a^x [A \operatorname{th}(\lambda x) + B \operatorname{th}(\mu t) + C] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.6 при $g(x) = A \operatorname{th}(\lambda x)$, $h(t) = B \operatorname{th}(\mu t) + C$.

$$80. \int_a^x [\operatorname{th}^2(\lambda x) - \operatorname{th}^2(\lambda t)] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.2 при $g(x) = \operatorname{th}^2(\lambda x)$.

Решение: $y(x) = \frac{d}{dx} \left[\frac{\operatorname{ch}^3(\lambda x) f'_x(x)}{2\lambda \operatorname{sh}(\lambda x)} \right]$.

$$81. \int_a^x [A \operatorname{th}^2(\lambda x) + B \operatorname{th}^2(\lambda t)] y(t) dt = f(x).$$

При $B = -A$ см. уравнение 1.3.80. Частный случай уравнения 1.9.4 при $g(x) = \operatorname{th}^2(\lambda x)$.

Решение: $y(x) = \frac{1}{A+B} \frac{d}{dx} \left\{ [\operatorname{th}(\lambda x)]^{-\frac{2A}{A+B}} \int_a^x [\operatorname{th}(\lambda t)]^{-\frac{2B}{A+B}} f'_t(t) dt \right\}.$

$$82. \int_a^x [A \operatorname{th}^2(\lambda x) + B \operatorname{th}^2(\mu t) + C] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.6 при $g(x) = A \operatorname{th}^2(\lambda x)$, $h(t) = B \operatorname{th}^2(\mu t) + C$.

$$83. \int_a^x [\operatorname{th}(\lambda x) - \operatorname{th}(\lambda t)]^n y(t) dt = f(x), \quad n = 1, 2, \dots$$

Считается, что правая часть интегрального уравнения удовлетворяет следующим условиям:

$$f(a) = f'_x(a) = \dots = f_x^{(n)}(a) = 0.$$

Решение: $y(x) = \frac{1}{\lambda^n n! \operatorname{ch}^2(\lambda x)} \left[\operatorname{ch}^2(\lambda x) \frac{d}{dx} \right]^{n+1} f(x).$

$$84. \int_a^x \sqrt{\operatorname{th} x - \operatorname{th} t} y(t) dt = f(x).$$

Решение:

$$y(x) = \frac{2}{\pi \operatorname{ch}^2 x} \left(\operatorname{ch}^2 x \frac{d}{dx} \right)^2 \int_a^x \frac{f(t) dt}{\operatorname{ch}^2 t \sqrt{\operatorname{th} x - \operatorname{th} t}}.$$

$$85. \int_a^x \frac{y(t) dt}{\sqrt{\operatorname{th} x - \operatorname{th} t}} = f(x).$$

Решение:

$$y(x) = \frac{1}{\pi} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{f(t) dt}{\operatorname{ch}^2 t \sqrt{\operatorname{th} x - \operatorname{th} t}}.$$

$$86. \int_a^x (\operatorname{th} x - \operatorname{th} t)^\lambda y(t) dt = f(x), \quad 0 < \lambda < 1.$$

Решение:

$$y(x) = \frac{\sin(\pi \lambda)}{\pi \lambda \operatorname{ch}^2 x} \left(\operatorname{ch}^2 x \frac{d}{dx} \right)^2 \int_a^x \frac{f(t) dt}{\operatorname{ch}^2 t (\operatorname{th} x - \operatorname{th} t)^\lambda}.$$

$$87. \int_a^x (\operatorname{th}^\mu x - \operatorname{th}^\mu t) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.2 при $g(x) = \operatorname{th}^\mu x$.

Решение: $y(x) = \frac{1}{\mu} \frac{d}{dx} \left[\frac{\operatorname{ch}^{\mu+1} x f'_x(x)}{\operatorname{sh}^{\mu-1} x} \right].$

$$88. \int_a^x (A \operatorname{th}^\mu x + B \operatorname{th}^\mu t) y(t) dt = f(x).$$

При $B = -A$ см. уравнение 1.3.87. Частный случай уравнения 1.9.4 при $g(x) = \operatorname{th}^\mu x$.

Решение:

$$y(x) = \frac{1}{A+B} \frac{d}{dx} \left\{ [\operatorname{th}(\lambda x)]^{-\frac{A\mu}{A+B}} \int_a^x [\operatorname{th}(\lambda t)]^{-\frac{B\mu}{A+B}} f'_t(t) dt \right\}.$$

$$89. \int_a^x \frac{y(t) dt}{[\operatorname{th}(\lambda x) - \operatorname{th}(\lambda t)]^\mu} = f(x), \quad 0 < \mu < 1.$$

Частный случай уравнения 1.9.42 при $g(x) = \operatorname{th}(\lambda x)$, $h(x) \equiv 1$.

Решение:

$$y(x) = \frac{\lambda \sin(\pi \mu)}{\pi} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{f(t) dt}{\operatorname{ch}^2(\lambda t) [\operatorname{th}(\lambda x) - \operatorname{th}(\lambda t)]^{1-\mu}}.$$

$$90. \int_a^x [Ax^\beta + B \operatorname{th}^\gamma(\lambda t) + C] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.6 при $g(x) = Ax^\beta$, $h(t) = B \operatorname{th}^\gamma(\lambda t) + C$.

$$91. \int_a^x [A \operatorname{th}^\gamma(\lambda x) + Bt^\beta + C] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.6 при $g(x) = A \operatorname{th}^\gamma(\lambda x)$, $h(t) = Bt^\beta + C$.

$$92. \int_a^x (Ax^\lambda \operatorname{th}^\mu t + Bt^\beta \operatorname{th}^\gamma x) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.15 при $g_1(x) = Ax^\lambda$, $h_1(t) = \operatorname{th}^\mu t$, $g_2(x) = B \operatorname{th}^\gamma x$, $h_2(t) = t^\beta$.

1.3-4. Ядра уравнений, содержащие гиперболический котангенс

$$93. \int_a^x [\operatorname{cth}(\lambda x) - \operatorname{cth}(\lambda t)] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.2 при $g(x) = \operatorname{cth}(\lambda x)$.

Решение: $y(x) = -\frac{1}{\lambda} \frac{d}{dx} [\operatorname{sh}^2(\lambda x) f'_x(x)]$.

$$94. \int_a^x [A \operatorname{cth}(\lambda x) + B \operatorname{cth}(\lambda t)] y(t) dt = f(x).$$

При $B = -A$ см. уравнение 1.3.93. Частный случай уравнения 1.9.4 при $g(x) = \operatorname{cth}(\lambda x)$.

Решение: $y(x) = \frac{1}{A+B} \frac{d}{dx} \left\{ [\operatorname{th}(\lambda x)]^{\frac{A}{A+B}} \int_a^x [\operatorname{th}(\lambda t)]^{\frac{B}{A+B}} f'_t(t) dt \right\}$.

$$95. \int_a^x [A \operatorname{cth}(\lambda x) + B \operatorname{cth}(\mu t) + C] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.6 при $g(x) = A \operatorname{cth}(\lambda x)$, $h(t) = B \operatorname{cth}(\mu t) + C$.

$$96. \int_a^x [\operatorname{cth}^2(\lambda x) - \operatorname{cth}^2(\lambda t)] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.2 при $g(x) = \operatorname{cth}^2(\lambda x)$.

Решение: $y(x) = -\frac{d}{dx} \left[\frac{\operatorname{sh}^3(\lambda x) f'_x(x)}{2\lambda \operatorname{ch}(\lambda x)} \right]$.

$$97. \int_a^x [A \operatorname{cth}^2(\lambda x) + B \operatorname{cth}^2(\lambda t)] y(t) dt = f(x).$$

При $B = -A$ см. уравнение 1.3.96. Частный случай уравнения 1.9.4 при $g(x) = \operatorname{cth}^2(\lambda x)$.

Решение: $y(x) = \frac{1}{A+B} \frac{d}{dx} \left\{ [\operatorname{th}(\lambda x)]^{\frac{2A}{A+B}} \int_a^x [\operatorname{th}(\lambda t)]^{\frac{2B}{A+B}} f'_t(t) dt \right\}$.

$$98. \int_a^x [A \operatorname{cth}^2(\lambda x) + B \operatorname{cth}^2(\mu t) + C] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.6 при $g(x) = A \operatorname{cth}^2(\lambda x)$, $h(t) = B \operatorname{cth}^2(\mu t) + C$.

$$99. \int_a^x [\operatorname{cth}(\lambda x) - \operatorname{cth}(\lambda t)]^n y(t) dt = f(x), \quad n = 1, 2, \dots$$

Считается, что правая часть интегрального уравнения удовлетворяет следующим условиям:

$f(a) = f'_x(a) = \dots = f_x^{(n)}(a) = 0$.

Решение: $y(x) = \frac{(-1)^n}{\lambda^n n! \operatorname{sh}^2(\lambda x)} \left[\operatorname{sh}^2(\lambda x) \frac{d}{dx} \right]^{n+1} f(x)$.

$$100. \int_a^x (\operatorname{cth}^\mu x - \operatorname{cth}^\mu t) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.2 при $g(x) = \operatorname{cth}^\mu x$.

$$\text{Решение: } y(x) = -\frac{1}{\mu} \frac{d}{dx} \left[\frac{\operatorname{sh}^{\mu+1} x f'_x(x)}{\operatorname{ch}^{\mu-1} x} \right].$$

$$101. \int_a^x (A \operatorname{cth}^\mu x + B \operatorname{cth}^\mu t) y(t) dt = f(x).$$

При $B = -A$ см. уравнение 1.3.100. Частный случай уравнения 1.9.4 при $g(x) = \operatorname{cth}^\mu x$.

Решение:

$$y(x) = \frac{1}{A+B} \frac{d}{dx} \left\{ |\operatorname{th} x|^{\frac{A\mu}{A+B}} \int_a^x |\operatorname{th} t|^{\frac{B\mu}{A+B}} f'_t(t) dt \right\}.$$

$$102. \int_a^x [Ax^\beta + B \operatorname{cth}^\gamma(\lambda t) + C] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.6 при $g(x) = Ax^\beta$, $h(t) = B \operatorname{cth}^\gamma(\lambda t) + C$.

$$103. \int_a^x [A \operatorname{cth}^\gamma(\lambda x) + Bt^\beta + C] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.6 при $g(x) = A \operatorname{cth}^\gamma(\lambda x)$, $h(t) = Bt^\beta + C$.

$$104. \int_a^x (Ax^\lambda \operatorname{cth}^\mu t + Bt^\beta \operatorname{cth}^\gamma x) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.15 при $g_1(x) = Ax^\lambda$, $h_1(t) = \operatorname{cth}^\mu t$, $g_2(x) = B \operatorname{cth}^\gamma x$, $h_2(t) = t^\beta$.

1.3-5. Ядра уравнений, содержащие комбинации гиперболических функций

$$105. \int_a^x \{ \operatorname{ch}[\lambda(x-t)] + A \operatorname{sh}[\mu(x-t)] \} y(t) dt = f(x).$$

Продифференцируем уравнение по x , а затем исключим интеграл с гиперболическим косинусом. В результате приходим к уравнению вида 2.3.16:

$$y(x) + (\lambda - A^2 \mu) \int_a^x \operatorname{sh}[\mu(x-t)] y(t) dt = f'_x(x) - A \mu f(x).$$

$$106. \int_a^x [A \operatorname{ch}(\lambda x) + B \operatorname{sh}(\mu t) + C] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.6 при $g(x) = A \operatorname{ch}(\lambda x)$, $h(t) = B \operatorname{sh}(\mu t) + C$.

$$107. \int_a^x [A \operatorname{ch}^2(\lambda x) + B \operatorname{sh}^2(\mu t) + C] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.6 при $g(x) = A \operatorname{ch}^2(\lambda x)$, $h(t) = B \operatorname{sh}^2(\mu t) + C$.

$$108. \int_a^x \operatorname{sh}[\lambda(x-t)] \operatorname{ch}[\lambda(x+t)] y(t) dt = f(x).$$

Используя формулу

$$\operatorname{sh}(\alpha - \beta) \operatorname{ch}(\alpha + \beta) = \frac{1}{2} [\operatorname{sh}(2\alpha) - \operatorname{sh}(2\beta)], \quad \alpha = \lambda x, \quad \beta = \lambda t,$$

преобразуем исходное уравнение к уравнению вида 1.3.45:

$$\int_a^x [\operatorname{sh}(2\lambda x) - \operatorname{sh}(2\lambda t)] y(t) dt = 2f(x).$$

$$\text{Решение: } y(x) = \frac{1}{\lambda} \frac{d}{dx} \left[\frac{f'_x(x)}{\operatorname{ch}(2\lambda x)} \right].$$

$$109. \int_a^x \operatorname{ch}[\lambda(x-t)] \operatorname{sh}[\lambda(x+t)] y(t) dt = f(x).$$

Используя формулу

$$\operatorname{ch}(\alpha - \beta) \operatorname{sh}(\alpha + \beta) = \frac{1}{2} [\operatorname{sh}(2\alpha) + \operatorname{sh}(2\beta)], \quad \alpha = \lambda x, \quad \beta = \lambda t,$$

преобразуем исходное уравнение к уравнению вида 1.3.46 при $A = B = 1$:

$$\int_a^x [\operatorname{sh}(2\lambda x) + \operatorname{sh}(2\lambda t)] y(t) dt = 2f(x).$$

$$110. \int_a^x [A \operatorname{ch}(\lambda x) \operatorname{sh}(\mu t) + B \operatorname{ch}(\beta x) \operatorname{sh}(\gamma t)] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.15 при $g_1(x) = A \operatorname{ch}(\lambda x)$, $h_1(t) = \operatorname{sh}(\mu t)$, $g_2(x) = B \operatorname{ch}(\beta x)$, $h_2(t) = \operatorname{sh}(\gamma t)$.

$$111. \int_a^x [\operatorname{sh}(\lambda x) \operatorname{ch}(\mu t) + \operatorname{sh}(\beta x) \operatorname{ch}(\gamma t)] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.15 при $g_1(x) = \operatorname{sh}(\lambda x)$, $h_1(t) = \operatorname{ch}(\mu t)$, $g_2(x) = \operatorname{sh}(\beta x)$, $h_2(t) = \operatorname{ch}(\gamma t)$.

$$112. \int_a^x [\operatorname{ch}(\lambda x) \operatorname{ch}(\mu t) + \operatorname{sh}(\beta x) \operatorname{sh}(\gamma t)] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.15 при $g_1(x) = \operatorname{ch}(\lambda x)$, $h_1(t) = \operatorname{ch}(\mu t)$, $g_2(x) = \operatorname{sh}(\beta x)$, $h_2(t) = \operatorname{sh}(\gamma t)$.

$$113. \int_a^x [A \operatorname{ch}^\beta(\lambda x) + B \operatorname{sh}^\gamma(\mu t)] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.6 при $g(x) = A \operatorname{ch}^\beta(\lambda x)$, $h(t) = B \operatorname{sh}^\gamma(\mu t)$.

$$114. \int_a^x [A \operatorname{sh}^\beta(\lambda x) + B \operatorname{ch}^\gamma(\mu t)] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.6 при $g(x) = A \operatorname{sh}^\beta(\lambda x)$, $h(t) = B \operatorname{ch}^\gamma(\mu t)$.

$$115. \int_a^x (Ax^\lambda \operatorname{ch}^\mu t + Bt^\beta \operatorname{sh}^\gamma x) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.15 при $g_1(x) = Ax^\lambda$, $h_1(t) = \operatorname{ch}^\mu t$, $g_2(x) = B \operatorname{sh}^\gamma x$, $h_2(t) = t^\beta$.

$$116. \int_a^x \{ (x-t) \operatorname{sh}[\lambda(x-t)] - \lambda(x-t)^2 \operatorname{ch}[\lambda(x-t)] \} y(t) dt = f(x).$$

Решение:

$$y(x) = \int_a^x g(t) dt,$$

где

$$g(t) = \sqrt{\frac{\pi}{2\lambda}} \frac{1}{64\lambda^5} \left(\frac{d^2}{dt^2} - \lambda^2 \right)^6 \int_a^t (t-\tau)^{\frac{5}{2}} I_{\frac{5}{2}}[\lambda(t-\tau)] f(\tau) d\tau.$$

$$117. \int_a^x \left\{ \frac{\operatorname{sh}[\lambda(x-t)]}{x-t} - \lambda \operatorname{ch}[\lambda(x-t)] \right\} y(t) dt = f(x).$$

Решение:

$$y(x) = \frac{1}{2\lambda^4} \left(\frac{d^2}{dx^2} - \lambda^2 \right)^3 \int_a^x \operatorname{sh}[\lambda(x-t)] f(t) dt.$$

$$118. \int_a^x [\operatorname{sh}(\lambda\sqrt{x-t}) - \lambda\sqrt{x-t} \operatorname{ch}(\lambda\sqrt{x-t})] y(t) dt = f(x), \quad f(a) = f'_x(a) = 0.$$

Решение:

$$y(x) = -\frac{4}{\pi\lambda^3} \frac{d^3}{dx^3} \int_a^x \frac{\cos(\lambda\sqrt{x-t})}{\sqrt{x-t}} f(t) dt.$$

$$119. \int_a^x (Ax^\lambda \operatorname{sh}^\mu t + Bt^\beta \operatorname{ch}^\gamma x) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.15 при $g_1(x) = Ax^\lambda$, $h_1(t) = \operatorname{sh}^\mu t$, $g_2(x) = B \operatorname{ch}^\gamma x$, $h_2(t) = t^\beta$.

$$120. \int_a^x [A \operatorname{th}(\lambda x) + B \operatorname{cth}(\mu t) + C] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.6 при $g(x) = A \operatorname{th}(\lambda x)$, $h(t) = B \operatorname{cth}(\mu t) + C$.

$$121. \int_a^x [A \operatorname{th}^2(\lambda x) + B \operatorname{cth}^2(\mu t)] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.6 при $g(x) = A \operatorname{th}^2(\lambda x)$, $h(t) = B \operatorname{cth}^2(\mu t)$.

$$122. \int_a^x [\operatorname{th}(\lambda x) \operatorname{cth}(\mu t) + \operatorname{th}(\beta x) \operatorname{cth}(\gamma t)] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.15 при $g_1(x) = \operatorname{th}(\lambda x)$, $h_1(t) = \operatorname{cth}(\mu t)$, $g_2(x) = \operatorname{th}(\beta x)$, $h_2(t) = \operatorname{cth}(\gamma t)$.

$$123. \int_a^x [\operatorname{cth}(\lambda x) \operatorname{th}(\mu t) + \operatorname{cth}(\beta x) \operatorname{th}(\gamma t)] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.15 при $g_1(x) = \operatorname{cth}(\lambda x)$, $h_1(t) = \operatorname{th}(\mu t)$, $g_2(x) = \operatorname{cth}(\beta x)$, $h_2(t) = \operatorname{th}(\gamma t)$.

$$124. \int_a^x [\operatorname{th}(\lambda x) \operatorname{th}(\mu t) + \operatorname{cth}(\beta x) \operatorname{cth}(\gamma t)] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.15 при $g_1(x) = \operatorname{th}(\lambda x)$, $h_1(t) = \operatorname{th}(\mu t)$, $g_2(x) = \operatorname{cth}(\beta x)$, $h_2(t) = \operatorname{cth}(\gamma t)$.

$$125. \int_a^x [A \operatorname{th}^\beta(\lambda x) + B \operatorname{cth}^\gamma(\mu t)] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.6 при $g(x) = A \operatorname{th}^\beta(\lambda x)$, $h(t) = B \operatorname{cth}^\gamma(\mu t)$.

$$126. \int_a^x [A \operatorname{cth}^\beta(\lambda x) + B \operatorname{th}^\gamma(\mu t)] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.6 при $g(x) = A \operatorname{cth}^\beta(\lambda x)$, $h(t) = B \operatorname{th}^\gamma(\mu t)$.

$$127. \int_a^x (Ax^\lambda \operatorname{th}^\mu t + Bt^\beta \operatorname{cth}^\gamma x) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.15 при $g_1(x) = Ax^\lambda$, $h_1(t) = \operatorname{th}^\mu t$, $g_2(x) = B \operatorname{cth}^\gamma x$, $h_2(t) = t^\beta$.

$$128. \int_a^x (Ax^\lambda \operatorname{cth}^\mu t + Bt^\beta \operatorname{th}^\gamma x) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.15 при $g_1(x) = Ax^\lambda$, $h_1(t) = \operatorname{cth}^\mu t$, $g_2(x) = B \operatorname{th}^\gamma x$, $h_2(t) = t^\beta$.

1.4. Уравнения, ядра которых содержат логарифмические функции

1.4-1. Ядра уравнений, содержащие логарифмические функции

$$1. \int_a^x (\ln x - \ln t) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.2 при $g(x) = \ln x$.

Решение: $y(x) = x f''_{xx}(x) + f'_x(x)$.

$$2. \int_0^x \ln(x-t)y(t) dt = f(x).$$

Решение:

$$y(x) = - \int_0^x f_{tt}''(t) dt \int_0^\infty \frac{(x-t)^z e^{-Cz}}{\Gamma(z+1)} dz - f'_x(0) \int_0^\infty \frac{x^z e^{-Cz}}{\Gamma(z+1)} dz,$$

где $C = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{k+1} - \ln k\right) = 0.5772 \dots$ — постоянная Эйлера, $\Gamma(z)$ — гамма-функция.

⊙ Литература: М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко (1968, стр. 62), А. Г. Бутковский (1979, стр. 190).

$$3. \int_a^x [\ln(x-t) + A]y(t) dt = f(x).$$

Решение:

$$y(x) = - \frac{d}{dx} \int_a^x \nu_A(x-t)f(t) dt, \quad \nu_A(x) = \frac{d}{dx} \int_0^\infty \frac{x^z e^{(A-C)z}}{\Gamma(z+1)} dz,$$

где $C = 0.5772 \dots$ — постоянная Эйлера, $\Gamma(z)$ — гамма-функция.

При $a = 0$ решение можно записать в виде

$$y(x) = - \int_0^x f_{tt}''(t) dt \int_0^\infty \frac{(x-t)^z e^{(A-C)z}}{\Gamma(z+1)} dz - f'_x(0) \int_0^\infty \frac{x^z e^{(A-C)z}}{\Gamma(z+1)} dz.$$

⊙ Литература: С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев (1987, стр. 483).

$$4. \int_a^x (A \ln x + B \ln t)y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.4 при $g(x) = \ln x$. При $B = -A$ см. уравнение 1.4.1.

Решение:

$$y(x) = \frac{\text{sign}(\ln x)}{A+B} \frac{d}{dx} \left\{ |\ln x|^{-\frac{A}{A+B}} \int_a^x |\ln t|^{-\frac{B}{A+B}} f'_t(t) dt \right\}.$$

$$5. \int_a^x (A \ln x + B \ln t + C)y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.5 при $g(x) = x$.

$$6. \int_a^x [\ln^2(\lambda x) - \ln^2(\lambda t)]y(t) dt = f(x), \quad f(a) = f'_x(a) = 0.$$

Решение: $y(x) = \frac{d}{dx} \left[\frac{x f'_x(x)}{2 \ln(\lambda x)} \right].$

$$7. \int_a^x [A \ln^2(\lambda x) + B \ln^2(\lambda t)]y(t) dt = f(x).$$

При $B = -A$ см. уравнение 1.4.6. Частный случай уравнения 1.9.4 при $g(x) = \ln^2(\lambda x)$.

Решение:

$$y(x) = \frac{1}{A+B} \frac{d}{dx} \left\{ |\ln(\lambda x)|^{-\frac{2A}{A+B}} \int_a^x |\ln(\lambda t)|^{-\frac{2B}{A+B}} f'_t(t) dt \right\}.$$

$$8. \int_a^x [A \ln^2(\lambda x) + B \ln^2(\mu t) + C]y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.6 при $g(x) = A \ln^2(\lambda x)$, $h(t) = B \ln^2(\mu t) + C$.

$$9. \int_a^x [\ln(x/t)]^n y(t) dt = f(x), \quad n = 1, 2, \dots$$

Считается, что правая часть интегрального уравнения удовлетворяет следующим условиям:

$$f(a) = f'_x(a) = \dots = f_x^{(n)}(a) = 0.$$

Решение: $y(x) = \frac{1}{n!x} \left(x \frac{d}{dx} \right)^{n+1} f(x).$

$$10. \int_a^x (\ln^2 x - \ln^2 t)^n y(t) dt = f(x), \quad n = 1, 2, \dots$$

Считается, что правая часть интегрального уравнения удовлетворяет следующим условиям:

$$f(a) = f'_x(a) = \dots = f^{(n)}_x(a) = 0.$$

$$\text{Решение: } y(x) = \frac{\ln x}{2^n n! x} \left(\frac{x}{\ln x} \frac{d}{dx} \right)^{n+1} f(x).$$

$$11. \int_a^x \ln \left(\frac{x+b}{t+b} \right) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.2 при $g(x) = \ln(x+b)$.

$$\text{Решение: } y(x) = (x+b) f''_{xx}(x) + f'_x(x).$$

$$12. \int_a^x \sqrt{\ln(x/t)} y(t) dt = f(x).$$

Решение:

$$y(x) = \frac{2}{\pi x} \left(x \frac{d}{dx} \right)^2 \int_a^x \frac{f(t) dt}{t \sqrt{\ln(x/t)}}.$$

$$13. \int_a^x \frac{y(t) dt}{\sqrt{\ln(x/t)}} = f(x).$$

Решение:

$$y(x) = \frac{1}{\pi} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{f(t) dt}{t \sqrt{\ln(x/t)}}.$$

$$14. \int_a^x [\ln^\mu(\lambda x) - \ln^\mu(\lambda t)] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.2 при $g(x) = \ln^\mu(\lambda x)$.

$$\text{Решение: } y(x) = \frac{1}{\mu} \frac{d}{dx} [x \ln^{1-\mu}(\lambda x) f'_x(x)].$$

$$15. \int_a^x [A \ln^\beta(\lambda x) + B \ln^\gamma(\mu t) + C] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.6 при $g(x) = A \ln^\beta(\lambda x)$, $h(t) = B \ln^\gamma(\mu t) + C$.

$$16. \int_a^x [\ln(x/t)]^\lambda y(t) dt = f(x), \quad 0 < \lambda < 1.$$

Решение:

$$y(x) = \frac{k}{x} \left(x \frac{d}{dx} \right)^2 \int_a^x \frac{f(t) dt}{t [\ln(x/t)]^\lambda}, \quad k = \frac{\sin(\pi\lambda)}{\pi\lambda}.$$

$$17. \int_a^x \frac{y(t) dt}{[\ln(x/t)]^\lambda} = f(x), \quad 0 < \lambda < 1.$$

Частный случай уравнения 1.9.42 при $g(x) = \ln x$, $h(x) \equiv 1$.

Решение:

$$y(x) = \frac{\sin(\pi\lambda)}{\pi} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{f(t) dt}{t [\ln(x/t)]^{1-\lambda}}.$$

1.4-2. Ядра уравнений, содержащие степенные и логарифмические функции

$$18. \int_a^x (x-t) [\ln(x-t) + A] y(t) dt = f(x).$$

Решение:

$$y(x) = -\frac{d^2}{dx^2} \int_a^x \nu_A(x-t) f(t) dt, \quad \nu_A(x) = \frac{d}{dx} \int_0^\infty \frac{x^z e^{(A-C)z}}{\Gamma(z+1)} dz,$$

где $C = 0.5772 \dots$ — постоянная Эйлера, $\Gamma(z)$ — гамма-функция.

⊙ Литература: С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев (1987, стр. 483).

$$19. \int_a^x \frac{\ln(x-t) + A}{(x-t)^\lambda} y(t) dt = f(x), \quad 0 < \lambda < 1.$$

Решение:

$$y(x) = -\frac{\sin(\pi\lambda)}{\pi} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{F(t) dt}{(x-t)^{1-\lambda}}, \quad F(x) = \int_a^x \nu_h(x-t) f(t) dt, \\ \nu_h(x) = \frac{d}{dx} \int_0^\infty \frac{x^z e^{hz}}{\Gamma(z+1)} dz, \quad h = A + \psi(1-\lambda),$$

где $\Gamma(z)$ — гамма-функция, $\psi(z) = [\Gamma(z)]'_z$ — логарифмическая производная гамма-функции.

⊙ Литература: С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев (1987, стр. 483).

$$20. \int_a^x (t^\beta \ln^\lambda x - x^\beta \ln^\lambda t) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.11 при $g(x) = \ln^\lambda x$, $h(t) = t^\beta$.

$$21. \int_a^x (At^\beta \ln^\lambda x + Bx^\mu \ln^\gamma t) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.15 при $g_1(x) = A \ln^\lambda x$, $h_1(t) = t^\beta$, $g_2(x) = Bx^\mu$, $h_2(t) = \ln^\gamma t$.

$$22. \int_a^x \ln\left(\frac{x^\mu + b}{ct^\lambda + s}\right) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.6 при $g(x) = \ln(x^\mu + b)$, $h(t) = -\ln(ct^\lambda + s)$.

1.5. Уравнения, ядра которых содержат тригонометрические функции

1.5-1. Ядра уравнений, содержащие косинус

$$1. \int_a^x \cos[\lambda(x-t)] y(t) dt = f(x).$$

Решение: $y(x) = f'_x(x) + \lambda^2 \int_a^x f(x) dx$.

$$2. \int_a^x \{\cos[\lambda(x-t)] - 1\} y(t) dt = f(x), \quad f(a) = f'_x(a) = f''_{xx}(x) = 0.$$

Решение: $y(x) = -\frac{1}{\lambda^2} f'''_{xxx}(x) - f'_x(x)$.

$$3. \int_a^x \{\cos[\lambda(x-t)] + b\} y(t) dt = f(x).$$

При $b=0$ см. уравнение 1.5.1. При $b=-1$ см. уравнение 1.5.2. При $\lambda=0$ см. уравнение 1.1.1. Дифференцируя уравнение по x , приходим к уравнению вида 2.5.16:

$$y(x) - \frac{\lambda}{b+1} \int_a^x \sin[\lambda(x-t)] y(t) dt = \frac{f'_x(x)}{b+1}.$$

1°. Решение при $b(b+1) > 0$:

$$y(x) = \frac{f'_x(x)}{b+1} + \frac{\lambda^2}{k(b+1)^2} \int_a^x \sin[k(x-t)] f'_t(t) dt, \quad \text{где } k = \lambda \sqrt{\frac{b}{b+1}}.$$

2°. Решение при $b(b+1) < 0$:

$$y(x) = \frac{f'_x(x)}{b+1} + \frac{\lambda^2}{k(b+1)^2} \int_a^x \operatorname{sh}[k(x-t)] f'_t(t) dt, \quad \text{где } k = \lambda \sqrt{\frac{-b}{b+1}}.$$

$$4. \int_a^x \cos(\lambda x + \beta t) y(t) dt = f(x).$$

Дифференцируя уравнение два раза по x , получим

$$\cos[(\lambda + \beta)x]y(x) - \lambda \int_a^x \sin(\lambda x + \beta t)y(t) dt = f'_x(x), \quad (1)$$

$$\{\cos[(\lambda + \beta)x]y(x)\}'_x - \lambda \sin[(\lambda + \beta)x]y(x) - \lambda^2 \int_a^x \cos(\lambda x + \beta t)y(t) dt = f''_{xx}(x). \quad (2)$$

Исключая из равенства (2) интегральное слагаемое с помощью исходного уравнения, приходим к линейному обыкновенному дифференциальному уравнению первого порядка

$$w'_x - \lambda \operatorname{tg}[(\lambda + \beta)x]w = f''_{xx}(x) + \lambda^2 f(x), \quad w = \cos[(\lambda + \beta)x]y(x). \quad (3)$$

Полагая $x = a$ в равенстве (1), имеем начальное условие $w(a) = f'_x(a)$. Решив уравнение (3) с этим условием, после некоторых преобразований получим решение исходного интегрального уравнения в виде

$$y(x) = \frac{1}{\cos[(\lambda + \beta)x]} f'_x(x) + \frac{\lambda \sin[(\lambda + \beta)x]}{\cos^2[(\lambda + \beta)x]} f(x) - \frac{\lambda \beta}{\cos^{k+1}[(\lambda + \beta)x]} \int_a^x f(t) \cos^{k-2}[(\lambda + \beta)t] dt, \quad k = \frac{\lambda}{\lambda + \beta}.$$

$$5. \int_a^x [\cos(\lambda x) - \cos(\lambda t)] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.2 при $g(x) = \cos(\lambda x)$.

Решение: $y(x) = -\frac{1}{\lambda} \frac{d}{dx} \left[\frac{f'_x(x)}{\sin(\lambda x)} \right]$.

$$6. \int_a^x [A \cos(\lambda x) + B \cos(\lambda t)] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.4 при $g(x) = \cos(\lambda x)$. При $B = -A$ см. уравнение 1.5.5.

Решение при $B \neq -A$:

$$y(x) = \frac{\operatorname{sign} \cos(\lambda x)}{A + B} \frac{d}{dx} \left\{ |\cos(\lambda x)|^{-\frac{A}{A+B}} \int_a^x |\cos(\lambda t)|^{-\frac{B}{A+B}} f'_t(t) dt \right\}.$$

$$7. \int_a^x [A \cos(\lambda x) + B \cos(\mu t) + C] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.6 при $g(x) = A \cos(\lambda x)$, $h(t) = B \cos(\mu t) + C$.

$$8. \int_a^x \{A_1 \cos[\lambda_1(x - t)] + A_2 \cos[\lambda_2(x - t)]\} y(t) dt = f(x).$$

Это уравнение эквивалентно уравнению вида 1.5.49:

$$\int_a^x \{B_1 \sin[\lambda_1(x - t)] + B_2 \sin[\lambda_2(x - t)]\} y(t) dt = F(x),$$

$$B_1 = \frac{A_1}{\lambda_1}, \quad B_2 = \frac{A_2}{\lambda_2}, \quad F(x) = \int_a^x f(t) dt.$$

(Дифференцируя это уравнение, получим исходное интегральное уравнение.)

$$9. \int_a^x \cos^2[\lambda(x - t)] y(t) dt = f(x).$$

Дифференцируя, приходим к уравнению вида 2.5.16:

$$y(x) - \lambda \int_a^x \sin[2\lambda(x - t)] y(t) dt = f'_x(x).$$

Решение:

$$y(x) = f'_x(x) + \frac{2\lambda^2}{k} \int_a^x \sin[k(x - t)] f'_t(t) dt, \quad \text{где } k = \lambda\sqrt{2}.$$

$$10. \int_a^x [\cos^2(\lambda x) - \cos^2(\lambda t)] y(t) dt = f(x), \quad f(a) = f'_x(a) = 0.$$

Решение: $y(x) = -\frac{1}{\lambda} \frac{d}{dx} \left[\frac{f'_x(x)}{\sin(2\lambda x)} \right].$

$$11. \int_a^x [A \cos^2(\lambda x) + B \cos^2(\lambda t)] y(t) dt = f(x).$$

При $B = -A$ см. уравнение 1.5.10. Частный случай уравнения 1.9.4 при $g(x) = \cos^2(\lambda x)$.

Решение:

$$y(x) = \frac{1}{A+B} \frac{d}{dx} \left\{ [\cos(\lambda x)]^{-\frac{2A}{A+B}} \int_a^x [\cos(\lambda t)]^{-\frac{2B}{A+B}} f'_t(t) dt \right\}.$$

$$12. \int_a^x [A \cos^2(\lambda x) + B \cos^2(\mu t) + C] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.6 при $g(x) = A \cos^2(\lambda x)$, $h(t) = B \cos^2(\mu t) + C$.

$$13. \int_a^x \cos[\lambda(x-t)] \cos[\lambda(x+t)] y(t) dt = f(x).$$

Используя тригонометрическую формулу

$$\cos(\alpha - \beta) \cos(\alpha + \beta) = \frac{1}{2} [\cos(2\alpha) + \cos(2\beta)], \quad \alpha = \lambda x, \quad \beta = \lambda t,$$

преобразуем исходное уравнение к уравнению вида 1.5.6 при $A = B = 1$:

$$\int_a^x [\cos(2\lambda x) + \cos(2\lambda t)] y(t) dt = 2f(x).$$

Решение при $\cos(2\lambda x) > 0$:

$$y(x) = \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{\sqrt{\cos(2\lambda x)}} \int_a^x \frac{f'_t(t) dt}{\sqrt{\cos(2\lambda t)}} \right].$$

$$14. \int_a^x \cos[\lambda(x-t)] \cos[\mu(x-t)] y(t) dt = f(x), \quad f(a) = f'_x(a) = 0.$$

Решение:

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 - \mu^2}} \left[\frac{d^2}{dx^2} + (\lambda + \mu)^2 \right] \left[\frac{d^2}{dx^2} + (\lambda - \mu)^2 \right] \int_a^x \int_a^t \sin[\sqrt{\lambda^2 + \mu^2} (t-s)] f(s) ds dt.$$

⊙ Литература: А. Р. Prudnikov, Yu. А. Brychkov, O. I. Marichev (1992, стр. 444).

$$15. \int_a^x [A \cos(\lambda x) \cos(\mu t) + B \cos(\beta x) \cos(\gamma t)] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.15 при $g_1(x) = A \cos(\lambda x)$, $h_1(t) = \cos(\mu t)$, $g_2(x) = B \cos(\beta x)$, $h_2(t) = \cos(\gamma t)$.

$$16. \int_a^x \cos^3[\lambda(x-t)] y(t) dt = f(x).$$

Используя формулу $\cos^3 \beta = \frac{1}{4} \cos 3\beta + \frac{3}{4} \cos \beta$, приходим к уравнению вида 1.5.8:

$$\int_a^x \left\{ \frac{1}{4} \cos[3\lambda(x-t)] + \frac{3}{4} \cos[\lambda(x-t)] \right\} y(t) dt = f(x).$$

$$17. \int_a^x [\cos^3(\lambda x) - \cos^3(\lambda t)] y(t) dt = f(x), \quad f(a) = f'_x(a) = 0.$$

Решение: $y(x) = -\frac{1}{3\lambda} \frac{d}{dx} \left[\frac{f'_x(x)}{\sin(\lambda x) \cos^2(\lambda x)} \right].$

$$18. \int_a^x [A \cos^3(\lambda x) + B \cos^3(\lambda t)] y(t) dt = f(x).$$

При $B = -A$ см. уравнение 1.5.17. Частный случай уравнения 1.9.4 при $g(x) = \cos^3(\lambda x)$.
Решение:

$$y(x) = \frac{1}{A+B} \frac{d}{dx} \left\{ [\cos(\lambda x)]^{-\frac{3A}{A+B}} \int_a^x [\cos(\lambda t)]^{-\frac{3B}{A+B}} f'_t(t) dt \right\}.$$

$$19. \int_a^x [\cos^2(\lambda x) \cos(\mu t) + \cos(\beta x) \cos^2(\gamma t)] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.15 при $g_1(x) = \cos^2(\lambda x)$, $h_1(t) = \cos(\mu t)$, $g_2(x) = \cos(\beta x)$, $h_2(t) = \cos^2(\gamma t)$.

$$20. \int_a^x \cos^4[\lambda(x-t)] y(t) dt = f(x).$$

Преобразуем ядро интегрального уравнения с помощью тригонометрической формулы $\cos^4 \beta = \frac{1}{8} \cos 4\beta + \frac{1}{2} \cos 2\beta + \frac{3}{8}$, где $\beta = \lambda(x-t)$, а затем продифференцируем уравнение по x . В результате приходим к уравнению вида 2.5.18:

$$y(x) - \lambda \int_a^x \left\{ \frac{1}{2} \sin[4\lambda(x-t)] + \sin[2\lambda(x-t)] \right\} y(t) dt = f'_x(x).$$

$$21. \int_a^x [\cos(\lambda x) - \cos(\lambda t)]^n y(t) dt = f(x), \quad n = 1, 2, \dots$$

Считается, что правая часть интегрального уравнения удовлетворяет следующим условиям:
 $f(a) = f'_x(a) = \dots = f_x^{(n)}(a) = 0$.

Решение: $y(x) = \frac{(-1)^n}{\lambda^n n!} \sin(\lambda x) \left[\frac{1}{\sin(\lambda x)} \frac{d}{dx} \right]^{n+1} f(x).$

$$22. \int_a^x \sqrt{\cos t - \cos x} y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.38 при $g(x) = 1 - \cos x$.

Решение:

$$y(x) = \frac{2}{\pi} \sin x \left(\frac{1}{\sin x} \frac{d}{dx} \right)^2 \int_a^x \frac{\sin t f(t) dt}{\sqrt{\cos t - \cos x}}.$$

$$23. \int_a^x \frac{y(t) dt}{\sqrt{\cos t - \cos x}} = f(x).$$

Решение:

$$y(x) = \frac{1}{\pi} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{\sin t f(t) dt}{\sqrt{\cos t - \cos x}}.$$

$$24. \int_a^x (\cos t - \cos x)^\lambda y(t) dt = f(x), \quad 0 < \lambda < 1.$$

Решение:

$$y(x) = k \sin x \left(\frac{1}{\sin x} \frac{d}{dx} \right)^2 \int_a^x \frac{\sin t f(t) dt}{(\cos t - \cos x)^\lambda}, \quad k = \frac{\sin(\pi\lambda)}{\pi\lambda}.$$

$$25. \int_a^x (\cos^\mu x - \cos^\mu t) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.2 при $g(x) = \cos^\mu x$.

Решение: $y(x) = -\frac{1}{\mu} \frac{d}{dx} \left[\frac{f'_x(x)}{\sin x \cos^{\mu-1} x} \right].$

$$26. \int_a^x (A \cos^\mu x + B \cos^\mu t) y(t) dt = f(x).$$

При $B = -A$ см. уравнение 1.5.25. Частный случай уравнения 1.9.4 при $g(x) = \cos^\mu x$.
Решение:

$$y(x) = \frac{1}{A+B} \frac{d}{dx} \left\{ |\cos x|^{-\frac{A\mu}{A+B}} \int_a^x |\cos t|^{-\frac{B\mu}{A+B}} f'_t(t) dt \right\}.$$

$$27. \int_a^x \frac{y(t) dt}{(\cos t - \cos x)^\lambda} = f(x), \quad 0 < \lambda < 1.$$

Решение:

$$y(x) = \frac{\sin(\pi\lambda)}{\pi} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{\sin t f(t) dt}{(\cos t - \cos x)^{1-\lambda}}.$$

$$28. \int_a^x (x-t) \cos[\lambda(x-t)] y(t) dt = f(x), \quad f(a) = f'_x(a) = 0.$$

Дифференцируя уравнение дважды, имеем

$$y(x) - 2\lambda \int_a^x \sin[\lambda(x-t)] y(t) dt - \lambda^2 \int_a^x (x-t) \cos[\lambda(x-t)] y(t) dt = f''_{xx}(x).$$

Исключая отсюда третье слагаемое в левой части с помощью исходного уравнения, приходим к уравнению вида 2.5.16:

$$y(x) - 2\lambda \int_a^x \sin[\lambda(x-t)] y(t) dt = f''_{xx}(x) + \lambda^2 f(x).$$

$$29. \int_a^x \frac{\cos[\lambda(x-t)]}{\sqrt{x-t}} y(t) dt = f(x), \quad f(a) = f'_x(a) = 0.$$

Решение:

$$y(x) = \frac{2}{\pi\lambda} \int_a^x \frac{\sin[\lambda(x-t)]}{\sqrt{x-t}} [f''_{tt}(t) + \lambda^2 f(t)] dt.$$

⊙ Литература: А. Р. Prudnikov, Ю. А. Brychkov, О. И. Marichev (1992, стр. 445).

$$30. \int_a^x \sqrt{x-t} \cos(\lambda\sqrt{x-t}) y(t) dt = f(x).$$

Решение:

$$y(x) = \frac{1}{\pi} \int_a^x \frac{\operatorname{ch}(\lambda\sqrt{x-t})}{\sqrt{x-t}} f'_t(t) dt.$$

⊙ Литература: А. Р. Prudnikov, Ю. А. Brychkov, О. И. Marichev (1992, стр. 446).

$$31. \int_a^x \frac{\cos(\lambda\sqrt{x-t})}{\sqrt{x-t}} y(t) dt = f(x).$$

Решение:

$$y(x) = \frac{1}{\pi} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{\operatorname{ch}(\lambda\sqrt{x-t})}{\sqrt{x-t}} f(t) dt.$$

$$32. \int_x^\infty \frac{\cos(\lambda\sqrt{t-x})}{\sqrt{t-x}} y(t) dt = f(x).$$

Решение:

$$y(x) = -\frac{1}{\pi} \frac{d}{dx} \int_x^\infty \frac{\operatorname{ch}(\lambda\sqrt{t-x})}{\sqrt{t-x}} f(t) dt.$$

⊙ Литература: А. Р. Prudnikov, Ю. А. Brychkov, О. И. Marichev (1992, стр. 448).

$$33. \int_0^x \frac{\cos(\lambda\sqrt{x^2-t^2})}{\sqrt{x^2-t^2}} y(t) dt = f(x).$$

Решение:

$$y(x) = \frac{2}{\pi} \frac{d}{dx} \int_0^x t \frac{\operatorname{ch}(\lambda\sqrt{x^2-t^2})}{\sqrt{x^2-t^2}} f(t) dt.$$

$$34. \int_x^\infty \frac{\cos(\lambda\sqrt{t^2 - x^2})}{\sqrt{t^2 - x^2}} y(t) dt = f(x).$$

Решение:

$$y(x) = -\frac{2}{\pi} \frac{d}{dx} \int_x^\infty t \frac{\operatorname{ch}(\lambda\sqrt{t^2 - x^2})}{\sqrt{t^2 - x^2}} f(t) dt.$$

$$35. \int_0^x \frac{\cos(\lambda\sqrt{xt - t^2})}{\sqrt{x - t}} y(t) dt = f(x).$$

Решение:

$$y(x) = \frac{1}{\pi x} \int_0^x \frac{\operatorname{ch}(\lambda\sqrt{x^2 - xt})}{\sqrt{x - t}} [f(t)/2 + t f'_t(t)] dt.$$

⊙ Литература: А. Р. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев (1992, стр. 446).

$$36. \int_0^x \frac{\cos(\lambda\sqrt{x^2 - xt})}{\sqrt{x - t}} y(t) dt = f(x).$$

Решение:

$$y(x) = \frac{\sqrt{x}}{\pi} \frac{d}{dx} \left[\sqrt{x} \int_0^x \frac{\operatorname{ch}(\lambda\sqrt{xt - t^2})}{\sqrt{x - t}} f(t) dt \right].$$

⊙ Литература: А. Р. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев (1992, стр. 446).

$$37. \int_a^x \frac{\cos[\lambda\sqrt{(x-t)(x-t+\gamma)}]}{\sqrt{x-t}} y(t) dt = f(x).$$

Считается, что выполнены условия $f(a) = f'_x(a) = f''_{xx}(a) = f'''_{xxx}(a) = 0$.

Решение:

$$y(x) = \frac{2}{\pi\lambda^2} \int_a^x \frac{\sin[\lambda\sqrt{(x-t)(x-t-\gamma)}]}{\sqrt{x-t-\gamma}} \int_a^t \sin[\lambda(t-s)] \left(\frac{d^2}{ds^2} + \lambda^2 \right)^2 f(s) ds dt.$$

⊙ Литература: А. Р. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев (1992, стр. 447).

$$38. \int_a^x [Ax^\beta + B \cos^\gamma(\lambda t) + C] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.6 при $g(x) = Ax^\beta$, $h(t) = B \cos^\gamma(\lambda t) + C$.

$$39. \int_a^x [A \cos^\gamma(\lambda x) + Bt^\beta + C] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.6 при $g(x) = A \cos^\gamma(\lambda x)$, $h(t) = Bt^\beta + C$.

$$40. \int_a^x (Ax^\lambda \cos^\mu t + Bt^\beta \cos^\gamma x) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.15 при $g_1(x) = Ax^\lambda$, $h_1(t) = \cos^\mu t$, $g_2(x) = B \cos^\gamma x$, $h_2(t) = t^\beta$.

1.5-2. Ядра уравнений, содержащие синус

$$41. \int_a^x \sin[\lambda(x-t)] y(t) dt = f(x), \quad f(a) = f'_x(a) = 0.$$

Решение: $y(x) = \frac{1}{\lambda} f''_{xx}(x) + \lambda f(x)$.

$$42. \int_x^\infty \sin[\lambda(t-x)] y(t) dt = f(x).$$

Решение:

$$y(x) = \frac{2}{\pi\lambda} \frac{d^2}{dx^2} \int_x^\infty \frac{\cos(\lambda\sqrt{t-x})}{\sqrt{t-x}} dt.$$

⊙ Литература: А. Р. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев (1992, стр. 447).

$$43. \int_a^x \{\sin[\lambda(x-t)] + b\} y(t) dt = f(x).$$

Дифференцируя уравнение по x , приходим к уравнению вида 2.5.3:

$$y(x) + \frac{\lambda}{b} \int_a^x \cos[\lambda(x-t)] y(t) dt = \frac{1}{b} f'_x(x).$$

$$44. \int_a^x \sin(\lambda x + \beta t) y(t) dt = f(x).$$

При $\beta = -\lambda$ см. уравнение 1.5.41. Пусть $\beta \neq -\lambda$.

Дифференцируя уравнение два раза по x , получим

$$\sin[(\lambda + \beta)x] y(x) + \lambda \int_a^x \cos(\lambda x + \beta t) y(t) dt = f'_x(x), \quad (1)$$

$$\{\sin[(\lambda + \beta)x] y(x)\}'_x + \lambda \cos[(\lambda + \beta)x] y(x) - \lambda^2 \int_a^x \sin(\lambda x + \beta t) y(t) dt = f''_{xx}(x). \quad (2)$$

Исключая из равенства (2) интегральное слагаемое с помощью исходного уравнения, приходим к линейному обыкновенному дифференциальному уравнению первого порядка

$$w'_x + \lambda \operatorname{ctg}[(\lambda + \beta)x] w = f''_{xx}(x) + \lambda^2 f(x), \quad w = \sin[(\lambda + \beta)x] y(x). \quad (3)$$

Полагая $x = a$ в равенстве (1), имеем начальное условие $w(a) = f'_x(a)$. Решив уравнение (3) с этим условием, после некоторых преобразований получим решение исходного интегрального уравнения в виде

$$y(x) = \frac{1}{\sin[(\lambda + \beta)x]} f'_x(x) - \frac{\lambda \cos[(\lambda + \beta)x]}{\sin^2[(\lambda + \beta)x]} f(x) - \frac{\lambda \beta}{\sin^{k+1}[(\lambda + \beta)x]} \int_a^x f(t) \sin^{k-2}[(\lambda + \beta)t] dt, \quad k = \frac{\lambda}{\lambda + \beta}.$$

$$45. \int_a^x [\sin(\lambda x) - \sin(\lambda t)] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.2 при $g(x) = \sin(\lambda x)$.

Решение: $y(x) = \frac{1}{\lambda} \frac{d}{dx} \left[\frac{f'_x(x)}{\cos(\lambda x)} \right]$.

$$46. \int_a^x [A \sin(\lambda x) + B \sin(\lambda t)] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.4 при $g(x) = \sin(\lambda x)$. При $B = -A$ см. уравнение 1.5.45.

Решение при $B \neq -A$:

$$y(x) = \frac{\operatorname{sign} \sin(\lambda x)}{A + B} \frac{d}{dx} \left\{ |\sin(\lambda x)|^{-\frac{A}{A+B}} \int_a^x |\sin(\lambda t)|^{-\frac{B}{A+B}} f'_t(t) dt \right\}.$$

$$47. \int_a^x [A \sin(\lambda x) + B \sin(\mu t) + C] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.6 при $g(x) = A \sin(\lambda x)$, $h(t) = B \sin(\mu t) + C$.

$$48. \int_a^x \{\mu \sin[\lambda(x-t)] - \lambda \sin[\mu(x-t)]\} y(t) dt = f(x).$$

Считается, что выполнены условия $f(a) = f'_x(a) = f''_{xx}(a) = f'''_{xxx}(a) = 0$.

Решение:

$$y(x) = \frac{f'''_{xxx} + (\lambda^2 + \mu^2) f''_{xx} + \lambda^2 \mu^2 f}{\lambda \mu^3 - \lambda^3 \mu}, \quad f = f(x).$$

$$49. \int_a^x \{A_1 \sin[\lambda_1(x-t)] + A_2 \sin[\lambda_2(x-t)]\} y(t) dt = f(x), \quad f(a) = f'_x(a) = 0.$$

Это уравнение решается таким же методом, что и уравнение 1.3.49, т. е. путем сведения к линейному обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка с постоянными коэффициентами.

Обозначим

$$\Delta = -\lambda_1 \lambda_2 \frac{A_1 \lambda_2 + A_2 \lambda_1}{A_1 \lambda_1 + A_2 \lambda_2}.$$

1°. Решение при $\Delta > 0$:

$$(A_1 \lambda_1 + A_2 \lambda_2) y(x) = f''_{xx}(x) + B f(x) + C \int_a^x \operatorname{sh}[k(x-t)] f(t) dt,$$

$$k = \sqrt{\Delta}, \quad B = \Delta + \lambda_1^2 + \lambda_2^2, \quad C = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} [\Delta^2 + (\lambda_1^2 + \lambda_2^2) \Delta + \lambda_1^2 \lambda_2^2].$$

2°. Решение при $\Delta < 0$:

$$(A_1 \lambda_1 + A_2 \lambda_2) y(x) = f''_{xx}(x) + B f(x) + C \int_a^x \sin[k(x-t)] f(t) dt,$$

$$k = \sqrt{-\Delta}, \quad B = \Delta + \lambda_1^2 + \lambda_2^2, \quad C = \frac{1}{\sqrt{-\Delta}} [\Delta^2 + (\lambda_1^2 + \lambda_2^2) \Delta + \lambda_1^2 \lambda_2^2].$$

3°. Решение при $\Delta = 0$:

$$(A_1 \lambda_1 + A_2 \lambda_2) y(x) = f''_{xx}(x) + (\lambda_1^2 + \lambda_2^2) f(x) + \lambda_1^2 \lambda_2^2 \int_a^x (x-t) f(t) dt.$$

4°. Решение при $\Delta = \infty$:

$$y(x) = -\frac{f''''_{xxxx} + (\lambda_1^2 + \lambda_2^2) f''_{xx} + \lambda_1^2 \lambda_2^2 f}{A_1 \lambda_1^3 + A_2 \lambda_2^3}, \quad f = f(x).$$

В последнем случае выполняется равенство $A_1 \lambda_1 + A_2 \lambda_2 = 0$ и правая часть интегрального уравнения должна удовлетворять следующим условиям: $f(a) = f'_x(a) = f''_{xx}(a) = f'''_{xxx}(a) = 0$.

Замечание. Решение можно получить из решения уравнения 1.3.49, заменив в нем параметры по правилу $\lambda_k \rightarrow i\lambda_k$, $A_k \rightarrow -iA_k$, $i^2 = -1$ ($k = 1, 2$).

$$50. \int_a^x \{A \sin[\lambda(x-t)] + B \sin[\mu(x-t)] + C \sin[\beta(x-t)]\} y(t) dt = f(x).$$

Считается, что выполнены условия $f(a) = f'_x(a) = 0$. Продифференцируем интегральное уравнение два раза. В результате имеем

$$(A\lambda + B\mu + C\beta) y(x) - \int_a^x \{A\lambda^2 \sin[\lambda(x-t)] + B\mu^2 \sin[\mu(x-t)]\} y(t) dt -$$

$$- C\beta^2 \int_a^x \sin[\beta(x-t)] y(t) dt = f''_{xx}(x).$$

Исключая отсюда последний интеграл с помощью исходного уравнения, приходим к уравнению вида 2.5.18:

$$(A\lambda + B\mu + C\beta) y(x) + \int_a^x \{A(\beta^2 - \lambda^2) \sin[\lambda(x-t)] +$$

$$+ B(\beta^2 - \mu^2) \sin[\mu(x-t)]\} y(t) dt = f''_{xx}(x) + \beta^2 f(x).$$

В частном случае $A\lambda + B\mu + C\beta = 0$ это уравнение вида 1.5.49.

$$51. \int_a^x \sin^2[\lambda(x-t)] y(t) dt = f(x), \quad f(a) = f'_x(a) = f''_{xx}(a) = 0.$$

Дифференцируя, приходим к уравнению вида 1.5.41:

$$\int_a^x \sin[2\lambda(x-t)] y(t) dt = \frac{1}{\lambda} f'_x(x).$$

Решение: $y(x) = \frac{1}{2} \lambda^{-2} f'''_{xxx}(x) + 2f'_x(x)$.

$$52. \int_a^x [\sin^2(\lambda x) - \sin^2(\lambda t)] y(t) dt = f(x), \quad f(a) = f'_x(a) = 0.$$

Решение: $y(x) = \frac{1}{\lambda} \frac{d}{dx} \left[\frac{f'_x(x)}{\sin(2\lambda x)} \right].$

$$53. \int_a^x [A \sin^2(\lambda x) + B \sin^2(\lambda t)] y(t) dt = f(x).$$

При $B = -A$ см. уравнение 1.5.52. Частный случай уравнения 1.9.4 при $g(x) = \sin^2(\lambda x)$.
Решение:

$$y(x) = \frac{1}{A+B} \frac{d}{dx} \left\{ |\sin(\lambda x)|^{-\frac{2A}{A+B}} \int_a^x |\sin(\lambda t)|^{-\frac{2B}{A+B}} f'_t(t) dt \right\}.$$

$$54. \int_a^x [A \sin^2(\lambda x) + B \sin^2(\mu t) + C] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.6 при $g(x) = A \sin^2(\lambda x)$, $h(t) = B \sin^2(\mu t) + C$.

$$55. \int_a^x \sin[\lambda(x-t)] \sin[\lambda(x+t)] y(t) dt = f(x), \quad f(a) = f'_x(a) = 0.$$

Используя тригонометрическую формулу

$$\sin(\alpha - \beta) \sin(\alpha + \beta) = \frac{1}{2} [\cos(2\beta) - \cos(2\alpha)], \quad \alpha = \lambda x, \quad \beta = \lambda t,$$

преобразуем исходное уравнение к уравнению вида 1.5.5:

$$\int_a^x [\cos(2\lambda x) - \cos(2\lambda t)] y(t) dt = -2f(x).$$

Решение: $y(x) = \frac{1}{\lambda} \frac{d}{dx} \left[\frac{f'_x(x)}{\sin(2\lambda x)} \right].$

$$56. \int_a^x \sin[\lambda(x-t)] \sin[\mu(x-t)] y(t) dt = f(x), \quad f(a) = f'_x(a) = f''_{xx}(a) = 0.$$

Решение:

$$y(x) = \left[\frac{d^2}{dx^2} + (\lambda + \mu)^2 \right] \left[\frac{d^2}{dx^2} + (\lambda - \mu)^2 \right] \frac{1}{2\lambda\mu} \int_a^x f(t) dt.$$

⊙ Литература: А. Р. Prudnikov, Yu. А. Brychkov, О. I. Marichev (1992, стр. 443).

$$57. \int_a^x [\sin(\lambda x) \sin(\mu t) + \sin(\beta x) \sin(\gamma t)] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.15 при $g_1(x) = \sin(\lambda x)$, $h_1(t) = \sin(\mu t)$, $g_2(x) = \sin(\beta x)$, $h_2(t) = \sin(\gamma t)$.

$$58. \int_a^x \sin^3[\lambda(x-t)] y(t) dt = f(x).$$

Считается, что выполнены условия $f(a) = f'_x(a) = f''_{xx}(a) = f'''_{xxx}(a) = 0$.

Используя формулу $\sin^3 \beta = -\frac{1}{4} \sin 3\beta + \frac{3}{4} \sin \beta$, приходим к уравнению вида 1.5.49:

$$\int_a^x \left\{ -\frac{1}{4} \sin[3\lambda(x-t)] + \frac{3}{4} \sin[\lambda(x-t)] \right\} y(t) dt = f(x).$$

$$59. \int_a^x [\sin^3(\lambda x) - \sin^3(\lambda t)] y(t) dt = f(x), \quad f(a) = f'_x(a) = 0.$$

Частный случай уравнения 1.9.2 при $g(x) = \sin^3(\lambda x)$.

$$60. \int_a^x [A \sin^3(\lambda x) + B \sin^3(\lambda t)] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.4 при $g(x) = \sin^3(\lambda x)$.

Решение:

$$y(x) = \frac{\operatorname{sign} \sin(\lambda x)}{A+B} \frac{d}{dx} \left\{ |\sin(\lambda x)|^{-\frac{3A}{A+B}} \int_a^x |\sin(\lambda t)|^{-\frac{3B}{A+B}} f'_t(t) dt \right\}.$$

$$61. \int_a^x [\sin^2(\lambda x) \sin(\mu t) + \sin(\beta x) \sin^2(\gamma t)] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.15 при $g_1(x) = \sin^2(\lambda x)$, $h_1(t) = \sin(\mu t)$, $g_2(x) = \sin(\beta x)$, $h_2(t) = \sin^2(\gamma t)$.

$$62. \int_a^x \sin^4[\lambda(x-t)] y(t) dt = f(x).$$

Считается, что выполнены условия $f(a) = f'_x(a) = \dots = f''''_{xxx}(a) = 0$.

Преобразуем ядро интегрального уравнения с помощью тригонометрической формулы $\sin^4 \beta = \frac{1}{8} \cos 4\beta - \frac{1}{2} \cos 2\beta + \frac{3}{8}$, где $\beta = \lambda(x-t)$, а затем продифференцируем уравнение по x . В результате приходим к уравнению вида 1.5.49:

$$\lambda \int_a^x \left\{ -\frac{1}{2} \sin[4\lambda(x-t)] + \sin[2\lambda(x-t)] \right\} y(t) dt = f'_x(x).$$

$$63. \int_a^x \sin^n[\lambda(x-t)] y(t) dt = f(x), \quad n = 2, 3, \dots$$

Считается, что выполнены условия $f(a) = f'_x(a) = \dots = f^{(n)}_x(a) = 0$.

Продифференцируем дважды уравнение по x . Преобразуем ядро полученного интегрального уравнения с помощью равенства $\cos^2 \beta = 1 - \sin^2 \beta$, где $\beta = \lambda(x-t)$. В результате имеем

$$-\lambda^2 n^2 \int_a^x \sin^n[\lambda(x-t)] y(t) dt + \lambda^2 n(n-1) \int_a^x \sin^{n-2}[\lambda(x-t)] y(t) dt = f''_{xx}(x).$$

Исключая отсюда первое слагаемое в левой части с помощью исходного уравнения, получим

$$\int_a^x \sin^{n-2}[\lambda(x-t)] y(t) dt = \frac{1}{\lambda^2 n(n-1)} [f''_{xx}(x) + \lambda^2 n^2 f(x)].$$

Это уравнение такого же вида, что и исходное; при этом степень, характеризующая ядро преобразованного уравнения, уменьшилась на две единицы.

Используя указанный прием достаточное число раз, в итоге можно прийти к простейшим интегральным уравнениям вида 1.1.1 (при четном n) или 1.5.41 (при нечетном n).

Решение:

$$y(x) = \frac{1}{\lambda^n n!} \left(\frac{d}{dx} \right)^{1-\alpha} \prod_{k=1}^{\beta} \left[\frac{d^2}{dx^2} + (2k + \alpha) \lambda^2 \right] f(x),$$

где $\alpha = n - 2[n/2]$, $\beta = [(n+1)/2]$, $[a]$ обозначает целую часть числа a .

⊙ Литература: А. Р. Prudnikov, Yu. А. Brychkov, O. I. Marichev (1992, стр. 443).

$$64. \int_a^x (x-t) \sin[\lambda(x-t)] y(t) dt = f(x), \quad f(a) = f'_x(a) = f''_{xx}(a) = 0.$$

Решение:

$$y(x) = \frac{1}{2\lambda} \left(\frac{d^2}{dx^2} + \lambda^2 \right)^2 \int_a^x f(t) dt.$$

$$65. \int_a^x \sin(\lambda \sqrt{x-t}) y(t) dt = f(x).$$

Решение:

$$y(x) = \frac{2}{\pi \lambda} \frac{d^2}{dx^2} \int_a^x \frac{\operatorname{ch}(\lambda \sqrt{x-t})}{\sqrt{x-t}} f(t) dt.$$

$$66. \int_a^x \frac{\sin[\lambda(x-t)]}{\sqrt{x-t}} y(t) dt = f(x), \quad f(a) = f'_x(a) = 0.$$

Решение:

$$y(x) = \frac{2}{\pi\lambda} \int_a^x \frac{\cos[\lambda(x-t)]}{\sqrt{x-t}} [f''_{tt}(t) + \lambda^2 f(t)] dt.$$

● Литература: А. Р. Prudnikov, Yu. А. Brychkov, O. I. Marichev (1992, стр. 445).

$$67. \int_a^x \frac{\sin[\lambda(x-t)]}{(x-t)^{3/2}} y(t) dt = f(x), \quad f(a) = f'_x(a) = 0.$$

Решение:

$$y(x) = \frac{2}{\pi\lambda} \int_a^x \frac{\sin[\lambda(x-t)]}{\sqrt{x-t}} \left[f''_{tt}(t) + \lambda^2 f(t) + \frac{f'(t)}{x-t} \right] dt.$$

● Литература: А. Р. Prudnikov, Yu. А. Brychkov, O. I. Marichev (1992, стр. 445).

$$68. \int_a^x \frac{\sin[\lambda\sqrt{(x-t)(x-t+\gamma)}]}{\sqrt{x-t+\gamma}} y(t) dt = f(x).$$

Считается, что выполнены условия $f(a) = f'_x(a) = f''_{xx}(a) = f'''_{xxx}(a) = 0$.

Решение:

$$y(x) = \frac{2}{\pi\lambda^2} \int_a^x \frac{\cos[\lambda\sqrt{(x-t)(x-t-\gamma)}]}{\sqrt{x-t}} \int_a^t \sin[\lambda(t-s)] \left(\frac{d^2}{ds^2} + \lambda^2 \right)^2 f(s) ds dt.$$

● Литература: А. Р. Prudnikov, Yu. А. Brychkov, O. I. Marichev (1992, стр. 447).

$$69. \int_a^x \sqrt{\sin x - \sin t} y(t) dt = f(x).$$

Решение:

$$y(x) = \frac{2}{\pi} \cos x \left(\frac{1}{\cos x} \frac{d}{dx} \right)^2 \int_a^x \frac{\cos t f(t) dt}{\sqrt{\sin x - \sin t}}.$$

$$70. \int_a^x \frac{y(t) dt}{\sqrt{\sin x - \sin t}} = f(x).$$

Решение:

$$y(x) = \frac{1}{\pi} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{\cos t f(t) dt}{\sqrt{\sin x - \sin t}}.$$

$$71. \int_a^x (\sin x - \sin t)^\lambda y(t) dt = f(x), \quad 0 < \lambda < 1.$$

Решение:

$$y(x) = k \cos x \left(\frac{1}{\cos x} \frac{d}{dx} \right)^2 \int_a^x \frac{\cos t f(t) dt}{(\sin x - \sin t)^\lambda}, \quad k = \frac{\sin(\pi\lambda)}{\pi\lambda}.$$

$$72. \int_a^x (\sin^\mu x - \sin^\mu t) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.2 при $g(x) = \sin^\mu x$.

Решение: $y(x) = \frac{1}{\mu} \frac{d}{dx} \left[\frac{f'_x(x)}{\cos x \sin^{\mu-1} x} \right]$.

$$73. \int_a^x \{A|\sin(\lambda x)|^\mu + B|\sin(\lambda t)|^\mu\} y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.4 при $g(x) = |\sin(\lambda x)|^\mu$.

Решение:

$$y(x) = \frac{1}{A+B} \frac{d}{dx} \left\{ |\sin(\lambda x)|^{-\frac{A\mu}{A+B}} \int_a^x |\sin(\lambda t)|^{-\frac{B\mu}{A+B}} f'_t(t) dt \right\}.$$

$$74. \int_a^x \frac{y(t) dt}{[\sin(\lambda x) - \sin(\lambda t)]^\mu} = f(x), \quad 0 < \mu < 1.$$

Частный случай уравнения 1.9.42 при $g(x) = \sin(\lambda x)$, $h(x) \equiv 1$.

Решение:

$$y(x) = \frac{\lambda \sin(\pi\mu)}{\pi} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{\cos(\lambda t) f(t) dt}{[\sin(\lambda x) - \sin(\lambda t)]^{1-\mu}}.$$

$$75. \int_a^x (x-t) \sin[\lambda(x-t)] y(t) dt = f(x), \quad f(a) = f'_x(a) = f''_{xx}(a) = 0.$$

Дифференцируя дважды, получим

$$2\lambda \int_a^x \cos[\lambda(x-t)] y(t) dt - \lambda^2 \int_a^x (x-t) \sin[\lambda(x-t)] y(t) dt = f''_{xx}(x).$$

Исключая второй интеграл в левой части этого выражения с помощью исходного уравнения, приходим к уравнению вида 1.5.1:

$$\int_a^x \cos[\lambda(x-t)] y(t) dt = \frac{1}{2\lambda} [f''_{xx}(x) + \lambda^2 f(x)].$$

Решение:

$$y(x) = \frac{1}{2\lambda} f'''_{xxx}(x) + \lambda f'_x(x) + \frac{1}{2} \lambda^3 \int_a^x f(t) dt.$$

$$76. \int_a^x |\sin[\lambda(x-t)]| y(t) dt = f(x), \quad f(a) = f'_x(a) = f''_{xx}(a) = 0.$$

Решение:

$$y(x) = \frac{1}{\lambda} \int_a^x (-1)^{[\lambda(x-t)/\pi]} [f'''_{ttt}(t) + \lambda^2 f'_t(t)] dt,$$

где $[a]$ обозначает целую часть числа a .

● Литература: А. Р. Prudnikov, Yu. А. Brychkov, O. I. Marichev (1992, стр. 443).

$$77. \int_a^x [Ax^\beta + B \sin^\gamma(\lambda t) + C] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.6 при $g(x) = Ax^\beta$, $h(t) = B \sin^\gamma(\lambda t) + C$.

$$78. \int_a^x [A \sin^\gamma(\lambda x) + Bt^\beta + C] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.6 при $g(x) = A \sin^\gamma(\lambda x)$, $h(t) = Bt^\beta + C$.

$$79. \int_a^x (Ax^\lambda \sin^\mu t + Bt^\beta \sin^\gamma x) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.15 при $g_1(x) = Ax^\lambda$, $h_1(t) = \sin^\mu t$, $g_2(x) = B \sin^\gamma x$, $h_2(t) = t^\beta$.

1.5-3. Ядра уравнений, содержащие тангенс

$$80. \int_a^x [\operatorname{tg}(\lambda x) - \operatorname{tg}(\lambda t)] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.2 при $g(x) = \operatorname{tg}(\lambda x)$.

Решение: $y(x) = \frac{1}{\lambda} \frac{d}{dx} [\cos^2(\lambda x) f'_x(x)]$.

$$81. \int_a^x [A \operatorname{tg}(\lambda x) + B \operatorname{tg}(\lambda t)] y(t) dt = f(x).$$

При $B = -A$ см. уравнение 1.5.80. Частный случай уравнения 1.9.4 при $g(x) = \operatorname{tg}(\lambda x)$.

Решение: $y(x) = \frac{1}{A+B} \frac{d}{dx} \left\{ [\operatorname{tg}(\lambda x)]^{-\frac{A}{A+B}} \int_a^x [\operatorname{tg}(\lambda t)]^{-\frac{B}{A+B}} f'_t(t) dt \right\}$.

$$82. \int_a^x [A \operatorname{tg}(\lambda x) + B \operatorname{tg}(\mu t) + C] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.6 при $g(x) = A \operatorname{tg}(\lambda x)$, $h(t) = B \operatorname{tg}(\mu t) + C$.

$$83. \int_a^x [\operatorname{tg}^2(\lambda x) - \operatorname{tg}^2(\lambda t)] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.2 при $g(x) = \operatorname{tg}^2(\lambda x)$.

Решение: $y(x) = \frac{d}{dx} \left[\frac{\cos^3(\lambda x) f'_x(x)}{2\lambda \sin(\lambda x)} \right]$.

$$84. \int_a^x [A \operatorname{tg}^2(\lambda x) + B \operatorname{tg}^2(\lambda t)] y(t) dt = f(x).$$

При $B = -A$ см. уравнение 1.5.83. Частный случай уравнения 1.9.4 при $g(x) = \operatorname{tg}^2(\lambda x)$.

Решение: $y(x) = \frac{1}{A+B} \frac{d}{dx} \left\{ |\operatorname{tg}(\lambda x)|^{-\frac{2A}{A+B}} \int_a^x |\operatorname{tg}(\lambda t)|^{-\frac{2B}{A+B}} f'_t(t) dt \right\}$.

$$85. \int_a^x [A \operatorname{tg}^2(\lambda x) + B \operatorname{tg}^2(\mu t) + C] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.6 при $g(x) = A \operatorname{tg}^2(\lambda x)$, $h(t) = B \operatorname{tg}^2(\mu t) + C$.

$$86. \int_a^x [\operatorname{tg}(\lambda x) - \operatorname{tg}(\lambda t)]^n y(t) dt = f(x), \quad n = 1, 2, \dots$$

Считается, что правая часть интегрального уравнения удовлетворяет следующим условиям:

$f(a) = f'_x(a) = \dots = f_x^{(n)}(a) = 0$.

Решение: $y(x) = \frac{1}{\lambda^n n! \cos^2(\lambda x)} \left[\cos^2(\lambda x) \frac{d}{dx} \right]^{n+1} f(x)$.

$$87. \int_a^x \sqrt{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} t} y(t) dt = f(x).$$

Решение:

$$y(x) = \frac{2}{\pi \cos^2 x} \left(\cos^2 x \frac{d}{dx} \right)^2 \int_a^x \frac{f(t) dt}{\cos^2 t \sqrt{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} t}}.$$

$$88. \int_a^x \frac{y(t) dt}{\sqrt{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} t}} = f(x).$$

Решение:

$$y(x) = \frac{1}{\pi} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{f(t) dt}{\cos^2 t \sqrt{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} t}}.$$

$$89. \int_a^x (\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} t)^\lambda y(t) dt = f(x), \quad 0 < \lambda < 1.$$

Решение:

$$y(x) = \frac{\sin(\pi \lambda)}{\pi \lambda \cos^2 x} \left(\cos^2 x \frac{d}{dx} \right)^2 \int_a^x \frac{f(t) dt}{\cos^2 t (\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} t)^\lambda}.$$

$$90. \int_a^x (\operatorname{tg}^\mu x - \operatorname{tg}^\mu t) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.2 при $g(x) = \operatorname{tg}^\mu x$.

Решение: $y(x) = \frac{1}{\mu} \frac{d}{dx} \left[\frac{\cos^{\mu+1} x f'_x(x)}{\sin^{\mu-1} x} \right]$.

$$91. \int_a^x (A \operatorname{tg}^\mu x + B \operatorname{tg}^\mu t) y(t) dt = f(x).$$

При $B = -A$ см. уравнение 1.5.90. Частный случай уравнения 1.9.4 при $g(x) = \operatorname{tg}^\mu x$.
Решение:

$$y(x) = \frac{1}{A+B} \frac{d}{dx} \left\{ [\operatorname{tg}(\lambda x)]^{-\frac{A\mu}{A+B}} \int_a^x [\operatorname{tg}(\lambda t)]^{-\frac{B\mu}{A+B}} f'_t(t) dt \right\}.$$

$$92. \int_a^x \frac{y(t) dt}{[\operatorname{tg}(\lambda x) - \operatorname{tg}(\lambda t)]^\mu} = f(x), \quad 0 < \mu < 1.$$

Частный случай уравнения 1.9.42 при $g(x) = \operatorname{tg}(\lambda x)$, $h(x) \equiv 1$.

Решение:

$$y(x) = \frac{\lambda \sin(\pi\mu)}{\pi} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{f(t) dt}{\cos^2(\lambda t) [\operatorname{tg}(\lambda x) - \operatorname{tg}(\lambda t)]^{1-\mu}}.$$

$$93. \int_a^x [Ax^\beta + B \operatorname{tg}^\gamma(\lambda t) + C] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.6 при $g(x) = Ax^\beta$, $h(t) = B \operatorname{tg}^\gamma(\lambda t) + C$.

$$94. \int_a^x [A \operatorname{tg}^\gamma(\lambda x) + Bt^\beta + C] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.6 при $g(x) = A \operatorname{tg}^\gamma(\lambda x)$, $h(t) = Bt^\beta + C$.

$$95. \int_a^x (Ax^\lambda \operatorname{tg}^\mu t + Bt^\beta \operatorname{tg}^\gamma x) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.15 при $g_1(x) = Ax^\lambda$, $h_1(t) = \operatorname{tg}^\mu t$, $g_2(x) = B \operatorname{tg}^\gamma x$, $h_2(t) = t^\beta$.

1.5-4. Ядра уравнений, содержащие котангенс

$$96. \int_a^x [\operatorname{ctg}(\lambda x) - \operatorname{ctg}(\lambda t)] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.2 при $g(x) = \operatorname{ctg}(\lambda x)$.

Решение: $y(x) = -\frac{1}{\lambda} \frac{d}{dx} [\sin^2(\lambda x) f'_x(x)]$.

$$97. \int_a^x [A \operatorname{ctg}(\lambda x) + B \operatorname{ctg}(\lambda t)] y(t) dt = f(x).$$

При $B = -A$ см. уравнение 1.5.96. Частный случай уравнения 1.9.4 при $g(x) = \operatorname{ctg}(\lambda x)$.

Решение: $y(x) = \frac{1}{A+B} \frac{d}{dx} \left\{ [\operatorname{tg}(\lambda x)]^{\frac{A}{A+B}} \int_a^x [\operatorname{tg}(\lambda t)]^{\frac{B}{A+B}} f'_t(t) dt \right\}$.

$$98. \int_a^x [A \operatorname{ctg}(\lambda x) + B \operatorname{ctg}(\mu t) + C] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.6 при $g(x) = A \operatorname{ctg}(\lambda x)$, $h(t) = B \operatorname{ctg}(\mu t) + C$.

$$99. \int_a^x [\operatorname{ctg}^2(\lambda x) - \operatorname{ctg}^2(\lambda t)] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.2 при $g(x) = \operatorname{ctg}^2(\lambda x)$.

Решение: $y(x) = -\frac{d}{dx} \left[\frac{\sin^3(\lambda x) f'_x(x)}{2\lambda \cos(\lambda x)} \right]$.

$$100. \int_a^x [A \operatorname{ctg}^2(\lambda x) + B \operatorname{ctg}^2(\lambda t)] y(t) dt = f(x).$$

При $B = -A$ см. уравнение 1.5.99. Частный случай уравнения 1.9.4 при $g(x) = \operatorname{ctg}^2(\lambda x)$.

Решение: $y(x) = \frac{1}{A+B} \frac{d}{dx} \left\{ |\operatorname{tg}(\lambda x)|^{\frac{2A}{A+B}} \int_a^x |\operatorname{tg}(\lambda t)|^{\frac{2B}{A+B}} f'_t(t) dt \right\}$.

$$101. \int_a^x [A \operatorname{ctg}^2(\lambda x) + B \operatorname{ctg}^2(\mu t) + C] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.6 при $g(x) = A \operatorname{ctg}^2(\lambda x)$, $h(t) = B \operatorname{ctg}^2(\mu t) + C$.

$$102. \int_a^x [\operatorname{ctg}(\lambda x) - \operatorname{ctg}(\lambda t)]^n y(t) dt = f(x), \quad n = 1, 2, \dots$$

Считается, что правая часть интегрального уравнения удовлетворяет следующим условиям:
 $f(a) = f'_x(a) = \dots = f_x^{(n)}(a) = 0$.

$$\text{Решение: } y(x) = \frac{(-1)^n}{\lambda^n n! \sin^2(\lambda x)} \left[\sin^2(\lambda x) \frac{d}{dx} \right]^{n+1} f(x).$$

$$103. \int_a^x (\operatorname{ctg}^\mu x - \operatorname{ctg}^\mu t) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.2 при $g(x) = \operatorname{ctg}^\mu x$.

$$\text{Решение: } y(x) = -\frac{1}{\mu} \frac{d}{dx} \left[\frac{\sin^{\mu+1} x f'_x(x)}{\cos^{\mu-1} x} \right].$$

$$104. \int_a^x (A \operatorname{ctg}^\mu x + B \operatorname{ctg}^\mu t) y(t) dt = f(x).$$

При $B = -A$ см. уравнение 1.5.103. Частный случай уравнения 1.9.4 при $g(x) = \operatorname{ctg}^\mu x$.

Решение:

$$y(x) = \frac{1}{A+B} \frac{d}{dx} \left\{ |\operatorname{tg} x|^{\frac{A\mu}{A+B}} \int_a^x |\operatorname{tg} t|^{\frac{B\mu}{A+B}} f'_t(t) dt \right\}.$$

$$105. \int_a^x [Ax^\beta + B \operatorname{ctg}^\gamma(\lambda t) + C] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.6 при $g(x) = Ax^\beta$, $h(t) = B \operatorname{ctg}^\gamma(\lambda t) + C$.

$$106. \int_a^x [A \operatorname{ctg}^\gamma(\lambda x) + Bt^\beta + C] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.6 при $g(x) = A \operatorname{ctg}^\gamma(\lambda x)$, $h(t) = Bt^\beta + C$.

$$107. \int_a^x (Ax^\lambda \operatorname{ctg}^\mu t + Bt^\beta \operatorname{ctg}^\gamma x) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.15 при $g_1(x) = Ax^\lambda$, $h_1(t) = \operatorname{ctg}^\mu t$, $g_2(x) = B \operatorname{ctg}^\gamma x$, $h_2(t) = t^\beta$.

1.5-5. Ядра уравнений, содержащие комбинации тригонометрических функций

$$108. \int_a^x \{ \cos[\lambda(x-t)] + A \sin[\mu(x-t)] \} y(t) dt = f(x).$$

Продифференцируем уравнение по x , а затем исключим интеграл с косинусом. В результате приходим к уравнению вида 2.3.16:

$$y(x) - (\lambda + A^2 \mu) \int_a^x \sin[\mu(x-t)] y(t) dt = f'_x(x) - A \mu f(x).$$

$$109. \int_a^x [A \cos(\lambda x) + B \sin(\mu t) + C] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.6 при $g(x) = A \cos(\lambda x)$, $h(t) = B \sin(\mu t) + C$.

$$110. \int_a^x [A \sin(\lambda x) + B \cos(\mu t) + C] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.6 при $g(x) = A \sin(\lambda x)$, $h(t) = B \cos(\mu t) + C$.

$$111. \int_a^x [A \cos^2(\lambda x) + B \sin^2(\mu t)] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.6 при $g(x) = A \cos^2(\lambda x)$, $h(t) = B \sin^2(\mu t)$.

$$112. \int_a^x \sin[\lambda(x-t)] \cos[\lambda(x+t)] y(t) dt = f(x), \quad f(a) = f'_x(a) = 0.$$

Используя тригонометрическую формулу

$$\sin(\alpha - \beta) \cos(\alpha + \beta) = \frac{1}{2} [\sin(2\alpha) - \sin(2\beta)], \quad \alpha = \lambda x, \quad \beta = \lambda t,$$

преобразуем исходное уравнение к уравнению вида 1.5.45:

$$\int_a^x [\sin(2\lambda x) - \sin(2\lambda t)] y(t) dt = 2f(x).$$

Решение: $y(x) = \frac{1}{\lambda} \frac{d}{dx} \left[\frac{f'_x(x)}{\cos(2\lambda x)} \right].$

$$113. \int_a^x \cos[\lambda(x-t)] \sin[\lambda(x+t)] y(t) dt = f(x).$$

Используя тригонометрическую формулу

$$\cos(\alpha - \beta) \sin(\alpha + \beta) = \frac{1}{2} [\sin(2\alpha) + \sin(2\beta)], \quad \alpha = \lambda x, \quad \beta = \lambda t,$$

преобразуем исходное уравнение к уравнению вида 1.5.46 при $A = B = 1$:

$$\int_a^x [\sin(2\lambda x) + \sin(2\lambda t)] y(t) dt = 2f(x).$$

Решение при $\sin(2\lambda x) > 0$:

$$y(x) = \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{\sqrt{\sin(2\lambda x)}} \int_a^x \frac{f'_t(t) dt}{\sqrt{\sin(2\lambda t)}} \right].$$

$$114. \int_a^x \sin[\lambda(x-t)] \cos[\mu(x-t)] y(t) dt = f(x), \quad f(a) = f'_x(a) = f''_{xx}(a) = 0.$$

Решение при $\mu < \lambda$:

$$y(x) = \frac{1}{\lambda \sqrt{\lambda^2 - \mu^2}} \left[\frac{d^2}{dx^2} + (\lambda + \mu)^2 \right] \left[\frac{d^2}{dx^2} + (\lambda - \mu)^2 \right] \int_a^x \sin[\sqrt{\lambda^2 - \mu^2}(x-t)] f(t) dt.$$

Решение при $\mu > \lambda$:

$$y(x) = \frac{1}{\lambda \sqrt{\lambda^2 - \mu^2}} \left[\frac{d^2}{dx^2} + (\lambda + \mu)^2 \right] \left[\frac{d^2}{dx^2} + (\lambda - \mu)^2 \right] \int_a^x \operatorname{sh}[\sqrt{\mu^2 - \lambda^2}(x-t)] f(t) dt.$$

● Литература: А. Р. Prudnikov, Yu. А. Brychkov, O. I. Marichev (1992, стр. 444).

$$115. \int_a^x [A \cos(\lambda x) \sin(\mu t) + B \cos(\beta x) \sin(\gamma t)] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.15 при $g_1(x) = A \cos(\lambda x)$, $h_1(t) = \sin(\mu t)$, $g_2(x) = B \cos(\beta x)$, $h_2(t) = \sin(\gamma t)$.

$$116. \int_a^x [A \sin(\lambda x) \cos(\mu t) + B \sin(\beta x) \cos(\gamma t)] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.15 при $g_1(x) = A \sin(\lambda x)$, $h_1(t) = \cos(\mu t)$, $g_2(x) = B \sin(\beta x)$, $h_2(t) = \cos(\gamma t)$.

$$117. \int_a^x [A \cos(\lambda x) \cos(\mu t) + B \sin(\beta x) \sin(\gamma t)] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.15 при $g_1(x) = A \cos(\lambda x)$, $h_1(t) = \cos(\mu t)$, $g_2(x) = B \sin(\beta x)$, $h_2(t) = \sin(\gamma t)$.

$$118. \int_a^x [A \cos^\beta(\lambda x) + B \sin^\gamma(\mu t)] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.6 при $g(x) = A \cos^\beta(\lambda x)$, $h(t) = B \sin^\gamma(\mu t)$.

$$119. \int_a^x [A \sin^\beta(\lambda x) + B \cos^\gamma(\mu t)] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.6 при $g(x) = A \sin^\beta(\lambda x)$, $h(t) = B \cos^\gamma(\mu t)$.

$$120. \int_a^x (Ax^\lambda \cos^\mu t + Bt^\beta \sin^\gamma x) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.15 при $g_1(x) = Ax^\lambda$, $h_1(t) = \cos^\mu t$, $g_2(x) = B \sin^\gamma x$, $h_2(t) = t^\beta$.

$$121. \int_a^x (Ax^\lambda \sin^\mu t + Bt^\beta \cos^\gamma x) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.15 при $g_1(x) = Ax^\lambda$, $h_1(t) = \sin^\mu t$, $g_2(x) = B \cos^\gamma x$, $h_2(t) = t^\beta$.

$$122. \int_a^x \{ (x-t) \sin[\lambda(x-t)] - \lambda(x-t)^2 \cos[\lambda(x-t)] \} y(t) dt = f(x).$$

Решение:

$$y(x) = \int_a^x g(t) dt,$$

где

$$g(t) = \sqrt{\frac{\pi}{2\lambda}} \frac{1}{64\lambda^5} \left(\frac{d^2}{dt^2} + \lambda^2 \right)^6 \int_a^t (t-\tau)^{5/2} J_{5/2}[\lambda(t-\tau)] f(\tau) d\tau.$$

$$123. \int_a^x \left\{ \frac{\sin[\lambda(x-t)]}{x-t} - \lambda \cos[\lambda(x-t)] \right\} y(t) dt = f(x).$$

Решение:

$$y(x) = \frac{1}{2\lambda^4} \left(\frac{d^2}{dx^2} + \lambda^2 \right)^3 \int_a^x \sin[\lambda(x-t)] f(t) dt.$$

$$124. \int_a^x [\sin(\lambda\sqrt{x-t}) - \lambda\sqrt{x-t} \cos(\lambda\sqrt{x-t})] y(t) dt = f(x).$$

Правая часть уравнения удовлетворяет условиям $f(a) = f'_x(a) = 0$.

Решение:

$$y(x) = \frac{4}{\pi\lambda^3} \frac{d^3}{dx^3} \int_a^x \frac{\operatorname{ch}(\lambda\sqrt{x-t})}{\sqrt{x-t}} f(t) dt.$$

$$125. \int_a^x [A \operatorname{tg}(\lambda x) + B \operatorname{ctg}(\mu t) + C] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.6 при $g(x) = A \operatorname{tg}(\lambda x)$, $h(t) = B \operatorname{ctg}(\mu t) + C$.

$$126. \int_a^x [A \operatorname{tg}^2(\lambda x) + B \operatorname{ctg}^2(\mu t)] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.6 при $g(x) = A \operatorname{tg}^2(\lambda x)$, $h(t) = B \operatorname{ctg}^2(\mu t)$.

$$127. \int_a^x [\operatorname{tg}(\lambda x) \operatorname{ctg}(\mu t) + \operatorname{tg}(\beta x) \operatorname{ctg}(\gamma t)] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.15 при $g_1(x) = \operatorname{tg}(\lambda x)$, $h_1(t) = \operatorname{ctg}(\mu t)$, $g_2(x) = \operatorname{tg}(\beta x)$, $h_2(t) = \operatorname{ctg}(\gamma t)$.

$$128. \int_a^x [\operatorname{ctg}(\lambda x) \operatorname{tg}(\mu t) + \operatorname{ctg}(\beta x) \operatorname{tg}(\gamma t)] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.15 при $g_1(x) = \operatorname{ctg}(\lambda x)$, $h_1(t) = \operatorname{tg}(\mu t)$, $g_2(x) = \operatorname{ctg}(\beta x)$, $h_2(t) = \operatorname{tg}(\gamma t)$.

$$129. \int_a^x [\operatorname{tg}(\lambda x) \operatorname{tg}(\mu t) + \operatorname{ctg}(\beta x) \operatorname{ctg}(\gamma t)] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.15 при $g_1(x) = \operatorname{tg}(\lambda x)$, $h_1(t) = \operatorname{tg}(\mu t)$, $g_2(x) = \operatorname{ctg}(\beta x)$, $h_2(t) = \operatorname{ctg}(\gamma t)$.

$$130. \int_a^x [A \operatorname{tg}^\beta(\lambda x) + B \operatorname{ctg}^\gamma(\mu t)] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.6 при $g(x) = A \operatorname{tg}^\beta(\lambda x)$, $h(t) = B \operatorname{ctg}^\gamma(\mu t)$.

$$131. \int_a^x [A \operatorname{ctg}^\beta(\lambda x) + B \operatorname{tg}^\gamma(\mu t)] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.6 при $g(x) = A \operatorname{ctg}^\beta(\lambda x)$, $h(t) = B \operatorname{tg}^\gamma(\mu t)$.

$$132. \int_a^x (Ax^\lambda \operatorname{tg}^\mu t + Bt^\beta \operatorname{ctg}^\gamma x) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.15 при $g_1(x) = Ax^\lambda$, $h_1(t) = \operatorname{tg}^\mu t$, $g_2(x) = B \operatorname{ctg}^\gamma x$, $h_2(t) = t^\beta$.

$$133. \int_a^x (Ax^\lambda \operatorname{ctg}^\mu t + Bt^\beta \operatorname{tg}^\gamma x) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.15 при $g_1(x) = Ax^\lambda$, $h_1(t) = \operatorname{ctg}^\mu t$, $g_2(x) = B \operatorname{tg}^\gamma x$, $h_2(t) = t^\beta$.

1.6. Уравнения, ядра которых содержат обратные тригонометрические функции

1.6-1. Ядра уравнений, содержащие арккосинус

$$1. \int_a^x [\arccos(\lambda x) - \arccos(\lambda t)] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.2 при $g(x) = \arccos(\lambda x)$.

Решение: $y(x) = -\frac{1}{\lambda} \frac{d}{dx} \left[\sqrt{1 - \lambda^2 x^2} f'_x(x) \right]$.

$$2. \int_a^x [A \arccos(\lambda x) + B \arccos(\lambda t)] y(t) dt = f(x).$$

При $B = -A$ см. уравнение 1.6.1. Частный случай уравнения 1.9.4 при $g(x) = \arccos(\lambda x)$.

Решение:

$$y(x) = \frac{1}{A+B} \frac{d}{dx} \left\{ [\arccos(\lambda x)]^{-\frac{A}{A+B}} \int_a^x [\arccos(\lambda t)]^{-\frac{B}{A+B}} f'_t(t) dt \right\}.$$

$$3. \int_a^x [A \arccos(\lambda x) + B \arccos(\mu t) + C] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.6 при $g(x) = A \arccos(\lambda x)$, $h(t) = B \arccos(\mu t) + C$.

$$4. \int_a^x [\arccos(\lambda x) - \arccos(\lambda t)]^n y(t) dt = f(x), \quad n = 1, 2, \dots$$

Считается, что правая часть интегрального уравнения удовлетворяет следующим условиям:

$$f(a) = f'_x(a) = \dots = f_x^{(n)}(a) = 0.$$

Решение:

$$y(x) = \frac{(-1)^n}{\lambda^n n! \sqrt{1 - \lambda^2 x^2}} \left(\sqrt{1 - \lambda^2 x^2} \frac{d}{dx} \right)^{n+1} f(x).$$

$$5. \int_a^x \sqrt{\arccos(\lambda t) - \arccos(\lambda x)} y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.38 при $g(x) = 1 - \arccos(\lambda x)$.

Решение:

$$y(x) = \frac{2}{\pi} \varphi(x) \left(\frac{1}{\varphi(x)} \frac{d}{dx} \right)^2 \int_a^x \frac{\varphi(t) f(t) dt}{\sqrt{\arccos(\lambda t) - \arccos(\lambda x)}}, \quad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - \lambda^2 x^2}}.$$

$$6. \int_a^x \frac{y(t) dt}{\sqrt{\arccos(\lambda t) - \arccos(\lambda x)}} = f(x).$$

Решение:

$$y(x) = \frac{\lambda}{\pi} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{\varphi(t) f(t) dt}{\sqrt{\arccos(\lambda t) - \arccos(\lambda x)}}, \quad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - \lambda^2 x^2}}.$$

$$7. \int_a^x [\arccos(\lambda t) - \arccos(\lambda x)]^\mu y(t) dt = f(x), \quad 0 < \mu < 1.$$

Решение:

$$y(x) = k \varphi(x) \left(\frac{1}{\varphi(x)} \frac{d}{dx} \right)^2 \int_a^x \frac{\varphi(t) f(t) dt}{[\arccos(\lambda t) - \arccos(\lambda x)]^\mu},$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - \lambda^2 x^2}}, \quad k = \frac{\sin(\pi \mu)}{\pi \mu}.$$

$$8. \int_a^x [\arccos^\mu(\lambda x) - \arccos^\mu(\lambda t)] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.2 при $g(x) = \arccos^\mu(\lambda x)$.

Решение: $y(x) = -\frac{1}{\lambda \mu} \frac{d}{dx} \left[\frac{f'_x(x) \sqrt{1 - \lambda^2 x^2}}{\arccos^{\mu-1}(\lambda x)} \right]$.

$$9. \int_a^x \frac{y(t) dt}{[\arccos(\lambda t) - \arccos(\lambda x)]^\mu} = f(x), \quad 0 < \mu < 1.$$

Решение:

$$y(x) = \frac{\lambda \sin(\pi \mu)}{\pi} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{\varphi(t) f(t) dt}{[\arccos(\lambda t) - \arccos(\lambda x)]^{1-\mu}}, \quad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - \lambda^2 x^2}}.$$

$$10. \int_a^x [A \arccos^\beta(\lambda x) + B \arccos^\gamma(\mu t) + C] y(t) dt = f(x).$$

См. уравнение 1.9.6 при $g(x) = A \arccos^\beta(\lambda x)$, $h(t) = B \arccos^\gamma(\mu t) + C$.

1.6-2. Ядра уравнений, содержащие арксинус

$$11. \int_a^x [\arcsin(\lambda x) - \arcsin(\lambda t)] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.2 при $g(x) = \arcsin(\lambda x)$.

Решение: $y(x) = \frac{1}{\lambda} \frac{d}{dx} \left[\sqrt{1 - \lambda^2 x^2} f'_x(x) \right]$.

$$12. \int_a^x [A \arcsin(\lambda x) + B \arcsin(\lambda t)] y(t) dt = f(x).$$

При $B = -A$ см. уравнение 1.6.11. Частный случай уравнения 1.9.4 при $g(x) = \arcsin(\lambda x)$.

Решение:

$$y(x) = \frac{\operatorname{sign} x}{A+B} \frac{d}{dx} \left\{ |\arcsin(\lambda x)|^{-\frac{A}{A+B}} \int_a^x |\arcsin(\lambda t)|^{-\frac{B}{A+B}} f'_t(t) dt \right\}.$$

$$13. \int_a^x [A \arcsin(\lambda x) + B \arcsin(\mu t) + C] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.6 при $g(x) = A \arcsin(\lambda x)$, $h(t) = B \arcsin(\mu t) + C$.

$$14. \int_a^x [\arcsin(\lambda x) - \arcsin(\lambda t)]^n y(t) dt = f(x), \quad n = 1, 2, \dots$$

Считается, что правая часть интегрального уравнения удовлетворяет следующим условиям:

$$f(a) = f'_x(a) = \dots = f_x^{(n)}(a) = 0.$$

Решение:

$$y(x) = \frac{1}{\lambda^n n! \sqrt{1 - \lambda^2 x^2}} \left(\sqrt{1 - \lambda^2 x^2} \frac{d}{dx} \right)^{n+1} f(x).$$

$$15. \int_a^x \sqrt{\arcsin(\lambda x) - \arcsin(\lambda t)} y(t) dt = f(x).$$

Решение:

$$y(x) = \frac{2}{\pi} \varphi(x) \left(\frac{1}{\varphi(x)} \frac{d}{dx} \right)^2 \int_a^x \frac{\varphi(t) f(t) dt}{\sqrt{\arcsin(\lambda x) - \arcsin(\lambda t)}}, \quad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - \lambda^2 x^2}}.$$

$$16. \int_a^x \frac{y(t) dt}{\sqrt{\arcsin(\lambda x) - \arcsin(\lambda t)}} = f(x).$$

Решение:

$$y(x) = \frac{\lambda}{\pi} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{\varphi(t) f(t) dt}{\sqrt{\arcsin(\lambda x) - \arcsin(\lambda t)}}, \quad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - \lambda^2 x^2}}.$$

$$17. \int_a^x [\arcsin(\lambda x) - \arcsin(\lambda t)]^\mu y(t) dt = f(x), \quad 0 < \mu < 1.$$

Решение:

$$y(x) = k \varphi(x) \left(\frac{1}{\varphi(x)} \frac{d}{dx} \right)^2 \int_a^x \frac{\varphi(t) f(t) dt}{[\arcsin(\lambda x) - \arcsin(\lambda t)]^\mu},$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - \lambda^2 x^2}}, \quad k = \frac{\sin(\pi \mu)}{\pi \mu}.$$

$$18. \int_a^x [\arcsin^\mu(\lambda x) - \arcsin^\mu(\lambda t)] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.2 при $g(x) = \arcsin^\mu(\lambda x)$.

Решение: $y(x) = \frac{1}{\lambda \mu} \frac{d}{dx} \left[\frac{f'_x(x) \sqrt{1 - \lambda^2 x^2}}{\arcsin^{\mu-1}(\lambda x)} \right].$

$$19. \int_a^x \frac{y(t) dt}{[\arcsin(\lambda x) - \arcsin(\lambda t)]^\mu} = f(x), \quad 0 < \mu < 1.$$

Решение:

$$y(x) = \frac{\lambda \sin(\pi \mu)}{\pi} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{\varphi(t) f(t) dt}{[\arcsin(\lambda x) - \arcsin(\lambda t)]^{1-\mu}}, \quad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - \lambda^2 x^2}}.$$

$$20. \int_a^x [A \arcsin^\beta(\lambda x) + B \arcsin^\gamma(\mu t) + C] y(t) dt = f(x).$$

См. уравнение 1.9.6 при $g(x) = A \arcsin^\beta(\lambda x)$, $h(t) = B \arcsin^\gamma(\mu t) + C$.

1.6-3. Ядра уравнений, содержащие арктангенс

$$21. \int_a^x [\operatorname{arctg}(\lambda x) - \operatorname{arctg}(\lambda t)] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.2 при $g(x) = \operatorname{arctg}(\lambda x)$.

Решение: $y(x) = \frac{1}{\lambda} \frac{d}{dx} [(1 + \lambda^2 x^2) f'_x(x)].$

$$22. \int_a^x [A \operatorname{arctg}(\lambda x) + B \operatorname{arctg}(\lambda t)] y(t) dt = f(x).$$

При $B = -A$ см. уравнение 1.6.21. Частный случай уравнения 1.9.4 при $g(x) = \operatorname{arctg}(\lambda x)$.
Решение:

$$y(x) = \frac{\operatorname{sign} x}{A+B} \frac{d}{dx} \left\{ |\operatorname{arctg}(\lambda x)|^{-\frac{A}{A+B}} \int_a^x |\operatorname{arctg}(\lambda t)|^{-\frac{B}{A+B}} f'_t(t) dt \right\}.$$

$$23. \int_a^x [A \operatorname{arctg}(\lambda x) + B \operatorname{arctg}(\mu t) + C] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.6 при $g(x) = A \operatorname{arctg}(\lambda x)$, $h(t) = B \operatorname{arctg}(\mu t) + C$.

$$24. \int_a^x [\operatorname{arctg}(\lambda x) - \operatorname{arctg}(\lambda t)]^n y(t) dt = f(x), \quad n = 1, 2, \dots$$

Считается, что правая часть интегрального уравнения удовлетворяет следующим условиям:
 $f(a) = f'_x(a) = \dots = f_x^{(n)}(a) = 0$.

Решение:

$$y(x) = \frac{1}{\lambda^n n! (1 + \lambda^2 x^2)} \left((1 + \lambda^2 x^2) \frac{d}{dx} \right)^{n+1} f(x).$$

$$25. \int_a^x \sqrt{\operatorname{arctg}(\lambda x) - \operatorname{arctg}(\lambda t)} y(t) dt = f(x).$$

Решение:

$$y(x) = \frac{2}{\pi} \varphi(x) \left(\frac{1}{\varphi(x)} \frac{d}{dx} \right)^2 \int_a^x \frac{\varphi(t) f(t) dt}{\sqrt{\operatorname{arctg}(\lambda x) - \operatorname{arctg}(\lambda t)}}, \quad \varphi(x) = \frac{1}{1 + \lambda^2 x^2}.$$

$$26. \int_a^x \frac{y(t) dt}{\sqrt{\operatorname{arctg}(\lambda x) - \operatorname{arctg}(\lambda t)}} = f(x).$$

Решение:

$$y(x) = \frac{\lambda}{\pi} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{\varphi(t) f(t) dt}{\sqrt{\operatorname{arctg}(\lambda x) - \operatorname{arctg}(\lambda t)}}, \quad \varphi(x) = \frac{1}{1 + \lambda^2 x^2}.$$

$$27. \int_a^x \sqrt{t} \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{x-t}{t}} \right) y(t) dt = f(x).$$

Это уравнение можно записать с помощью гипергеометрической функции Гаусса в виде

$$\int_a^x (x-t)^{\gamma-1} F\left(\alpha, \beta, \gamma; 1 - \frac{x}{t}\right) y(t) dt = f(x), \quad \text{где } \alpha = \frac{1}{2}, \quad \beta = 1, \quad \gamma = \frac{3}{2}.$$

Решение этого уравнения см. в 1.8.86.

$$28. \int_a^x [\operatorname{arctg}(\lambda x) - \operatorname{arctg}(\lambda t)]^\mu y(t) dt = f(x), \quad 0 < \mu < 1.$$

Решение:

$$y(x) = k \varphi(x) \left(\frac{1}{\varphi(x)} \frac{d}{dx} \right)^2 \int_a^x \frac{\varphi(t) f(t) dt}{[\operatorname{arctg}(\lambda x) - \operatorname{arctg}(\lambda t)]^\mu},$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{1 + \lambda^2 x^2}, \quad k = \frac{\sin(\pi \mu)}{\pi \mu}.$$

$$29. \int_a^x [\operatorname{arctg}^\mu(\lambda x) - \operatorname{arctg}^\mu(\lambda t)] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.2 при $g(x) = \operatorname{arctg}^\mu(\lambda x)$.

Решение: $y(x) = \frac{1}{\lambda \mu} \frac{d}{dx} \left[\frac{(1 + \lambda^2 x^2) f'_x(x)}{\operatorname{arctg}^{\mu-1}(\lambda x)} \right]$.

$$30. \int_a^x \frac{y(t) dt}{[\operatorname{arctg}(\lambda x) - \operatorname{arctg}(\lambda t)]^\mu} = f(x), \quad 0 < \mu < 1.$$

Решение:

$$y(x) = \frac{\lambda \sin(\pi\mu)}{\pi} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{\varphi(t)f(t) dt}{[\operatorname{arctg}(\lambda x) - \operatorname{arctg}(\lambda t)]^{1-\mu}}, \quad \varphi(x) = \frac{1}{1 + \lambda^2 x^2}.$$

$$31. \int_a^x [A \operatorname{arctg}^\beta(\lambda x) + B \operatorname{arctg}^\gamma(\mu t) + C] y(t) dt = f(x).$$

См. уравнение 1.9.6 при $g(x) = A \operatorname{arctg}^\beta(\lambda x)$, $h(t) = B \operatorname{arctg}^\gamma(\mu t) + C$.

1.6-4. Ядра уравнений, содержащие арккотангенс

$$32. \int_a^x [\operatorname{arccctg}(\lambda x) - \operatorname{arccctg}(\lambda t)] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.2 при $g(x) = \operatorname{arccctg}(\lambda x)$.

Решение: $y(x) = -\frac{1}{\lambda} \frac{d}{dx} [(1 + \lambda^2 x^2) f'_x(x)]$.

$$33. \int_a^x [A \operatorname{arccctg}(\lambda x) + B \operatorname{arccctg}(\lambda t)] y(t) dt = f(x).$$

При $B = -A$ см. уравнение 1.6.32. Частный случай уравнения 1.9.4 при $g(x) = \operatorname{arccctg}(\lambda x)$.

Решение:

$$y(x) = \frac{1}{A+B} \frac{d}{dx} \left\{ [\operatorname{arccctg}(\lambda x)]^{-\frac{A}{A+B}} \int_a^x [\operatorname{arccctg}(\lambda t)]^{-\frac{B}{A+B}} f'_t(t) dt \right\}.$$

$$34. \int_a^x [A \operatorname{arccctg}(\lambda x) + B \operatorname{arccctg}(\mu t) + C] y(t) dt = f(x).$$

См. уравнение 1.9.6 при $g(x) = A \operatorname{arccctg}(\lambda x)$, $h(t) = B \operatorname{arccctg}(\mu t) + C$.

$$35. \int_a^x [\operatorname{arccctg}(\lambda x) - \operatorname{arccctg}(\lambda t)]^n y(t) dt = f(x), \quad n = 1, 2, \dots$$

Считается, что правая часть интегрального уравнения удовлетворяет следующим условиям:
 $f(a) = f'_x(a) = \dots = f_x^{(n)}(a) = 0$.

Решение:

$$y(x) = \frac{(-1)^n}{\lambda^n n! (1 + \lambda^2 x^2)} \left((1 + \lambda^2 x^2) \frac{d}{dx} \right)^{n+1} f(x).$$

$$36. \int_a^x \sqrt{\operatorname{arccctg}(\lambda t) - \operatorname{arccctg}(\lambda x)} y(t) dt = f(x).$$

Решение:

$$y(x) = \frac{2}{\pi} \varphi(x) \left(\frac{1}{\varphi(x)} \frac{d}{dx} \right)^2 \int_a^x \frac{\varphi(t)f(t) dt}{\sqrt{\operatorname{arccctg}(\lambda t) - \operatorname{arccctg}(\lambda x)}}, \quad \varphi(x) = \frac{1}{1 + \lambda^2 x^2}.$$

$$37. \int_a^x \frac{y(t) dt}{\sqrt{\operatorname{arccctg}(\lambda t) - \operatorname{arccctg}(\lambda x)}} = f(x).$$

Решение:

$$y(x) = \frac{\lambda}{\pi} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{\varphi(t)f(t) dt}{\sqrt{\operatorname{arccctg}(\lambda t) - \operatorname{arccctg}(\lambda x)}}, \quad \varphi(x) = \frac{1}{1 + \lambda^2 x^2}.$$

$$38. \int_a^x [\operatorname{arctg}(\lambda t) - \operatorname{arctg}(\lambda x)]^\mu y(t) dt = f(x), \quad 0 < \mu < 1.$$

Решение:

$$y(x) = k\varphi(x) \left(\frac{1}{\varphi(x)} \frac{d}{dx} \right)^2 \int_a^x \frac{\varphi(t)f(t) dt}{[\operatorname{arctg}(\lambda t) - \operatorname{arctg}(\lambda x)]^\mu},$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{1 + \lambda^2 x^2}, \quad k = \frac{\sin(\pi\mu)}{\pi\mu}.$$

$$39. \int_a^x [\operatorname{arctg}^\mu(\lambda x) - \operatorname{arctg}^\mu(\lambda t)] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.2 при $g(x) = \operatorname{arctg}^\mu(\lambda x)$.

Решение: $y(x) = -\frac{1}{\lambda\mu} \frac{d}{dx} \left[\frac{(1 + \lambda^2 x^2) f'_x(x)}{\operatorname{arctg}^{\mu-1}(\lambda x)} \right].$

$$40. \int_a^x \frac{y(t) dt}{[\operatorname{arctg}(\lambda t) - \operatorname{arctg}(\lambda x)]^\mu} = f(x), \quad 0 < \mu < 1.$$

Решение:

$$y(x) = \frac{\lambda \sin(\pi\mu)}{\pi} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{\varphi(t)f(t) dt}{[\operatorname{arctg}(\lambda t) - \operatorname{arctg}(\lambda x)]^{1-\mu}}, \quad \varphi(x) = \frac{1}{1 + \lambda^2 x^2}.$$

$$41. \int_a^x [A \operatorname{arctg}^\beta(\lambda x) + B \operatorname{arctg}^\gamma(\mu t) + C] y(t) dt = f(x).$$

См. уравнение 1.9.6 при $g(x) = A \operatorname{arctg}^\beta(\lambda x)$, $h(t) = B \operatorname{arctg}^\gamma(\mu t) + C$.

1.7. Уравнения, ядра которых содержат комбинации элементарных функций

1.7-1. Ядра уравнений, содержащие экспоненциальные и гиперболические функции

$$1. \int_a^x e^{\mu(x-t)} \{A_1 \operatorname{ch}[\lambda_1(x-t)] + A_2 \operatorname{ch}[\lambda_2(x-t)]\} y(t) dt = f(x).$$

Замена $u(x) = e^{-\mu x} y(x)$ приводит к уравнению вида 1.3.8:

$$\int_a^x \{A_1 \operatorname{ch}[\lambda_1(x-t)] + A_2 \operatorname{ch}[\lambda_2(x-t)]\} w(t) dt = e^{-\mu x} f(x).$$

$$2. \int_a^x e^{\mu(x-t)} \operatorname{ch}^2[\lambda(x-t)] y(t) dt = f(x).$$

Решение:

$$y(x) = \varphi(x) - \frac{2\lambda^2}{k} \int_a^x e^{\mu(x-t)} \operatorname{sh}[k(x-t)] \varphi(x) dt, \quad k = \lambda\sqrt{2}, \quad \varphi(x) = f'_x(x) - \mu f(x).$$

$$3. \int_a^x e^{\mu(x-t)} \operatorname{ch}^3[\lambda(x-t)] y(t) dt = f(x).$$

Замена $w(x) = e^{-\mu x} y(x)$ приводит к уравнению вида 1.3.15:

$$\int_a^x \operatorname{ch}^3[\lambda(x-t)] w(t) dt = e^{-\mu x} f(x).$$

$$4. \int_a^x e^{\mu(x-t)} \operatorname{ch}^4[\lambda(x-t)] y(t) dt = f(x).$$

Замена $w(x) = e^{-\mu x} y(x)$ приводит к уравнению вида 1.3.19:

$$\int_a^x \operatorname{ch}^4[\lambda(x-t)] w(t) dt = e^{-\mu x} f(x).$$

$$5. \int_a^x e^{\mu(x-t)} [\operatorname{ch}(\lambda x) - \operatorname{ch}(\lambda t)]^n y(t) dt = f(x), \quad n = 1, 2, \dots$$

Решение:

$$y(x) = \frac{1}{\lambda^n n!} e^{\mu x} \operatorname{sh}(\lambda x) \left[\frac{1}{\operatorname{sh}(\lambda x)} \frac{d}{dx} \right]^{n+1} F_\mu(x), \quad F_\mu(x) = e^{-\mu x} f(x).$$

$$6. \int_a^x e^{\mu(x-t)} \sqrt{\operatorname{ch} x - \operatorname{ch} t} y(t) dt = f(x), \quad f(a) = 0.$$

Решение:

$$y(x) = \frac{2}{\pi} e^{\mu x} \operatorname{sh} x \left(\frac{1}{\operatorname{sh} x} \frac{d}{dx} \right)^2 \int_a^x \frac{e^{-\mu t} \operatorname{sh} t f(t) dt}{\sqrt{\operatorname{ch} x - \operatorname{ch} t}}.$$

$$7. \int_a^x \frac{e^{\mu(x-t)} y(t) dt}{\sqrt{\operatorname{ch} x - \operatorname{ch} t}} = f(x).$$

Решение:

$$y(x) = \frac{1}{\pi} e^{\mu x} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{e^{-\mu t} \operatorname{sh} t f(t) dt}{\sqrt{\operatorname{ch} x - \operatorname{ch} t}}.$$

$$8. \int_a^x e^{\mu(x-t)} (\operatorname{ch} x - \operatorname{ch} t)^\lambda y(t) dt = f(x), \quad 0 < \lambda < 1.$$

Замена $w(x) = e^{-\mu x} y(x)$ приводит к уравнению вида 1.3.23:

$$\int_a^x (\operatorname{ch} x - \operatorname{ch} t)^\lambda w(t) dt = e^{-\mu x} f(x).$$

$$9. \int_a^x [A e^{\mu(x-t)} + B \operatorname{ch}^\lambda x] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.15 при $g_1(x) = A e^{\mu x}$, $h_1(t) = e^{-\mu t}$, $g_2(x) = B \operatorname{ch}^\lambda x$, $h_2(t) = 1$.

$$10. \int_a^x [A e^{\mu(x-t)} + B \operatorname{ch}^\lambda t] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.15 при $g_1(x) = A e^{\mu x}$, $h_1(t) = e^{-\mu t}$, $g_2(x) = B$, $h_2(t) = \operatorname{ch}^\lambda t$.

$$11. \int_a^x e^{\mu(x-t)} (\operatorname{ch}^\lambda x - \operatorname{ch}^\lambda t) y(t) dt = f(x).$$

Замена $w(x) = e^{-\mu x} y(x)$ приводит к уравнению вида 1.3.24:

$$\int_a^x (\operatorname{ch}^\lambda x - \operatorname{ch}^\lambda t) w(t) dt = e^{-\mu x} f(x).$$

$$12. \int_a^x e^{\mu(x-t)} (A \operatorname{ch}^\lambda x + B \operatorname{ch}^\lambda t) y(t) dt = f(x).$$

Замена $w(x) = e^{-\mu x} y(x)$ приводит к уравнению вида 1.3.25:

$$\int_a^x (A \operatorname{ch}^\lambda x + B \operatorname{ch}^\lambda t) w(t) dt = e^{-\mu x} f(x).$$

$$13. \int_a^x \frac{e^{\mu(x-t)} y(t) dt}{(\operatorname{ch} x - \operatorname{ch} t)^\lambda} = f(x), \quad 0 < \lambda < 1.$$

Решение:

$$y(x) = \frac{\sin(\pi\lambda)}{\pi} e^{\mu x} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{e^{-\mu t} \operatorname{sh} t f(t) dt}{(\operatorname{ch} x - \operatorname{ch} t)^{1-\lambda}}.$$

$$14. \int_a^x e^{\mu(x-t)} \{A_1 \operatorname{sh}[\lambda_1(x-t)] + A_2 \operatorname{sh}[\lambda_2(x-t)]\} y(t) dt = f(x).$$

Замена $w(x) = e^{-\mu x} y(x)$ приводит к уравнению вида 1.3.49:

$$\int_a^x \{A_1 \operatorname{sh}[\lambda_1(x-t)] + A_2 \operatorname{sh}[\lambda_2(x-t)]\} w(t) dt = e^{-\mu x} f(x).$$

$$15. \int_a^x e^{\mu(x-t)} \operatorname{sh}^2[\lambda(x-t)] y(t) dt = f(x).$$

Замена $w(x) = e^{-\mu x} y(x)$ приводит к уравнению вида 1.3.51:

$$\int_a^x \operatorname{sh}^2[\lambda(x-t)] w(t) dt = e^{-\mu x} f(x).$$

$$16. \int_a^x e^{\mu(x-t)} \operatorname{sh}^3[\lambda(x-t)] y(t) dt = f(x).$$

Замена $w(x) = e^{-\mu x} y(x)$ приводит к уравнению вида 1.3.57:

$$\int_a^x \operatorname{sh}^3[\lambda(x-t)] w(t) dt = e^{-\mu x} f(x).$$

$$17. \int_a^x e^{\mu(x-t)} \operatorname{sh}^n[\lambda(x-t)] y(t) dt = f(x), \quad n = 2, 3, \dots$$

Замена $w(x) = e^{-\mu x} y(x)$ приводит к уравнению вида 1.3.62:

$$\int_a^x \operatorname{sh}^n[\lambda(x-t)] w(t) dt = e^{-\mu x} f(x).$$

$$18. \int_a^x e^{\mu(x-t)} \operatorname{sh}(k\sqrt{x-t}) y(t) dt = f(x).$$

Решение:

$$y(x) = \frac{2}{\pi k} e^{\mu x} \frac{d^2}{dx^2} \int_a^x \frac{e^{-\mu t} \cos(k\sqrt{x-t})}{\sqrt{x-t}} f(t) dt.$$

$$19. \int_a^x e^{\mu(x-t)} \sqrt{\operatorname{sh} x - \operatorname{sh} t} y(t) dt = f(x).$$

Решение:

$$y(x) = \frac{2}{\pi} e^{\mu x} \operatorname{ch} x \left(\frac{1}{\operatorname{ch} x} \frac{d}{dx} \right)^2 \int_a^x \frac{e^{-\mu t} \operatorname{ch} t f(t) dt}{\sqrt{\operatorname{sh} x - \operatorname{sh} t}}.$$

$$20. \int_a^x \frac{e^{\mu(x-t)} y(t) dt}{\sqrt{\operatorname{sh} x - \operatorname{sh} t}} = f(x).$$

Решение:

$$y(x) = \frac{1}{\pi} e^{\mu x} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{e^{-\mu t} \operatorname{ch} t f(t) dt}{\sqrt{\operatorname{sh} x - \operatorname{sh} t}}.$$

$$21. \int_a^x e^{\mu(x-t)} (\operatorname{sh} x - \operatorname{sh} t)^\lambda y(t) dt = f(x), \quad 0 < \lambda < 1.$$

Замена $w(x) = e^{-\mu x} y(x)$ приводит к уравнению вида 1.3.66:

$$\int_a^x (\operatorname{sh} x - \operatorname{sh} t)^\lambda w(t) dt = e^{-\mu x} f(x).$$

$$22. \int_a^x e^{\mu(x-t)} (\operatorname{sh}^\lambda x - \operatorname{sh}^\lambda t) y(t) dt = f(x).$$

Замена $w(x) = e^{-\mu x} y(x)$ приводит к уравнению вида 1.3.67:

$$\int_a^x (\operatorname{sh}^\lambda x - \operatorname{sh}^\lambda t) w(t) dt = e^{-\mu x} f(x).$$

$$23. \int_a^x e^{\mu(x-t)} (A \operatorname{sh}^\lambda x + B \operatorname{sh}^\lambda t) y(t) dt = f(x).$$

Замена $w(x) = e^{-\mu x} y(x)$ приводит к уравнению вида 1.3.68:

$$\int_a^x (A \operatorname{sh}^\lambda x + B \operatorname{sh}^\lambda t) w(t) dt = e^{-\mu x} f(x).$$

$$24. \int_a^x [Ae^{\mu(x-t)} + B \operatorname{sh}^\lambda x] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.15 при $g_1(x) = Ae^{\mu x}$, $h_1(t) = e^{-\mu t}$, $g_2(x) = B \operatorname{sh}^\lambda x$, $h_2(t) = 1$.

$$25. \int_a^x [Ae^{\mu(x-t)} + B \operatorname{sh}^\lambda t] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.15 при $g_1(x) = Ae^{\mu x}$, $h_1(t) = e^{-\mu t}$, $g_2(x) = B$, $h_2(t) = \operatorname{sh}^\lambda t$.

$$26. \int_a^x \frac{e^{\mu(x-t)} y(t) dt}{(\operatorname{sh} x - \operatorname{sh} t)^\lambda} = f(x), \quad 0 < \lambda < 1.$$

Решение:

$$y(x) = \frac{\sin(\pi\lambda)}{\pi} e^{\mu x} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{e^{-\mu t} \operatorname{ch} t f(t) dt}{(\operatorname{sh} x - \operatorname{sh} t)^{1-\lambda}}.$$

$$27. \int_a^x e^{\mu(x-t)} (A \operatorname{th}^\lambda x + B \operatorname{th}^\lambda t) y(t) dt = f(x).$$

Замена $w(x) = e^{-\mu x} y(x)$ приводит к уравнению вида 1.3.88:

$$\int_a^x (A \operatorname{th}^\lambda x + B \operatorname{th}^\lambda t) w(t) dt = e^{-\mu x} f(x).$$

$$28. \int_a^x e^{\mu(x-t)} (A \operatorname{th}^\lambda x + B \operatorname{th}^\beta t + C) y(t) dt = f(x).$$

Замена $w(x) = e^{-\mu x} y(x)$ приводит к уравнению вида 1.9.6 при $g(x) = A \operatorname{th}^\lambda x$, $h(t) = B \operatorname{th}^\beta t + C$:

$$\int_a^x (A \operatorname{th}^\lambda x + B \operatorname{th}^\beta t + C) w(t) dt = e^{-\mu x} f(x).$$

$$29. \int_a^x [Ae^{\mu(x-t)} + B \operatorname{th}^\lambda x] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.15 при $g_1(x) = Ae^{\mu x}$, $h_1(t) = e^{-\mu t}$, $g_2(x) = B \operatorname{th}^\lambda x$, $h_2(t) = 1$.

$$30. \int_a^x [Ae^{\mu(x-t)} + B \operatorname{th}^\lambda t] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.15 при $g_1(x) = Ae^{\mu x}$, $h_1(t) = e^{-\mu t}$, $g_2(x) = B$, $h_2(t) = \operatorname{th}^\lambda t$.

$$31. \int_a^x e^{\mu(x-t)} (A \operatorname{cth}^\lambda x + B \operatorname{cth}^\lambda t) y(t) dt = f(x).$$

Замена $w(x) = e^{-\mu x} y(x)$ приводит к уравнению вида 1.3.101:

$$\int_a^x (A \operatorname{cth}^\lambda x + B \operatorname{cth}^\lambda t) w(t) dt = e^{-\mu x} f(x).$$

$$32. \int_a^x e^{\mu(x-t)} (A \operatorname{cth}^\lambda x + B \operatorname{cth}^\beta t + C) y(t) dt = f(x).$$

Замена $w(x) = e^{-\mu x} y(x)$ приводит к уравнению вида 1.9.6 при $g(x) = A \operatorname{cth}^\lambda x$, $h(t) = B \operatorname{cth}^\beta t + C$:

$$\int_a^x (A \operatorname{cth}^\lambda x + B \operatorname{cth}^\beta t + C) w(t) dt = e^{-\mu x} f(x).$$

$$33. \int_a^x [Ae^{\mu(x-t)} + B \operatorname{cth}^\lambda x] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.15 при $g_1(x) = Ae^{\mu x}$, $h_1(t) = e^{-\mu t}$, $g_2(x) = B \operatorname{cth}^\lambda x$, $h_2(t) = 1$.

$$34. \int_a^x [Ae^{\mu(x-t)} + B \operatorname{cth}^\lambda t] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.15 при $g_1(x) = Ae^{\mu x}$, $h_1(t) = e^{-\mu t}$, $g_2(x) = B$, $h_2(t) = \operatorname{cth}^\lambda t$.

1.7-2. Ядра уравнений, содержащие экспоненциальные и логарифмические функции

$$35. \int_a^x e^{\lambda(x-t)} (\ln x - \ln t) y(t) dt = f(x).$$

Решение:

$$y(x) = e^{\lambda x} [x \varphi''_{xx}(x) + \varphi'_x(x)], \quad \varphi(x) = e^{-\lambda x} f(x).$$

$$36. \int_0^x e^{\lambda(x-t)} \ln(x-t) y(t) dt = f(x).$$

Замена $w(x) = e^{-\lambda x} y(x)$ приводит к уравнению вида 1.4.2:

$$\int_0^x \ln(x-t) w(t) dt = e^{-\lambda x} f(x).$$

$$37. \int_a^x e^{\lambda(x-t)} (A \ln x + B \ln t) y(t) dt = f(x).$$

Замена $w(x) = e^{-\lambda x} y(x)$ приводит к уравнению вида 1.4.4:

$$\int_a^x (A \ln x + B \ln t) w(t) dt = e^{-\lambda x} f(x).$$

$$38. \int_a^x e^{\mu(x-t)} [A \ln^2(\lambda x) + B \ln^2(\lambda t)] y(t) dt = f(x).$$

Замена $w(x) = e^{-\lambda x} y(x)$ приводит к уравнению вида 1.4.7:

$$\int_a^x [A \ln^2(\lambda x) + B \ln^2(\lambda t)] w(t) dt = e^{-\lambda x} f(x).$$

$$39. \int_a^x e^{\lambda(x-t)} [\ln(x/t)]^n y(t) dt = f(x), \quad n = 1, 2, \dots$$

Решение:

$$y(x) = \frac{1}{n! x} e^{\lambda x} \left(x \frac{d}{dx} \right)^{n+1} F_\lambda(x), \quad F_\lambda(x) = e^{-\lambda x} f(x).$$

$$40. \int_a^x e^{\lambda(x-t)} \sqrt{\ln(x/t)} y(t) dt = f(x).$$

Решение:

$$y(x) = \frac{2e^{\lambda x}}{\pi x} \left(x \frac{d}{dx} \right)^2 \int_a^x \frac{e^{-\lambda t} f(t) dt}{t \sqrt{\ln(x/t)}}.$$

$$41. \int_a^x \frac{e^{\lambda(x-t)}}{\sqrt{\ln(x/t)}} y(t) dt = f(x).$$

Решение:

$$y(x) = \frac{1}{\pi} e^{\lambda x} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{e^{-\lambda t} f(t) dt}{t \sqrt{\ln(x/t)}}.$$

$$42. \int_a^x [Ae^{\mu(x-t)} + B \ln^\nu(\lambda x)] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.15 при $g_1(x) = Ae^{\mu x}$, $h_1(t) = e^{-\mu t}$, $g_2(x) = B \ln^\nu(\lambda x)$, $h_2(t) = 1$.

$$43. \int_a^x [Ae^{\mu(x-t)} + B \ln^\nu(\lambda t)] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.15 при $g_1(x) = Ae^{\mu x}$, $h_1(t) = e^{-\mu t}$, $g_2(x) = B$, $h_2(t) = \ln^\nu(\lambda t)$.

$$44. \int_a^x e^{\mu(x-t)} [\ln(x/t)]^\lambda y(t) dt = f(x), \quad 0 < \lambda < 1.$$

Замена $w(x) = e^{-\mu x} y(x)$ приводит к уравнению вида 1.4.16:

$$\int_a^x [\ln(x/t)]^\lambda w(t) dt = e^{-\mu x} f(x).$$

$$45. \int_a^x \frac{e^{\mu(x-t)}}{[\ln(x/t)]^\lambda} y(t) dt = f(x), \quad 0 < \lambda < 1.$$

Решение:

$$y(x) = \frac{\sin(\pi\lambda)}{\pi} e^{\mu x} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{f(t) dt}{te^{\mu t} [\ln(x/t)]^{1-\lambda}}.$$

1.7-3. Ядра уравнений, содержащие экспоненциальные и тригонометрические функции

$$46. \int_a^x e^{\mu(x-t)} \cos[\lambda(x-t)] y(t) dt = f(x).$$

Решение: $y(x) = f'_x(x) - \mu f(x) + \lambda^2 \int_a^x e^{\mu(x-t)} f(t) dt$.

$$47. \int_a^x e^{\mu(x-t)} \{A_1 \cos[\lambda_1(x-t)] + A_2 \cos[\lambda_2(x-t)]\} y(t) dt = f(x).$$

Замена $w(x) = e^{-\mu x} y(x)$ приводит к уравнению вида 1.5.8:

$$\int_a^x \{A_1 \cos[\lambda_1(x-t)] + A_2 \cos[\lambda_2(x-t)]\} w(t) dt = e^{-\mu x} f(x).$$

$$48. \int_a^x e^{\mu(x-t)} \cos^2[\lambda(x-t)] y(t) dt = f(x).$$

Замена $w(x) = e^{-\mu x} y(x)$ приводит к уравнению вида 1.5.9.

Решение:

$$y(x) = \varphi(x) + \frac{2\lambda^2}{k} \int_a^x e^{\mu(x-t)} \sin[k(x-t)] \varphi(t) dt, \quad k = \lambda\sqrt{2}, \quad \varphi(x) = f'_x(x) - \mu f(x).$$

$$49. \int_a^x e^{\mu(x-t)} \cos^3[\lambda(x-t)] y(t) dt = f(x).$$

Замена $w(x) = e^{-\mu x} y(x)$ приводит к уравнению вида 1.5.16:

$$\int_a^x \cos^3[\lambda(x-t)] w(t) dt = e^{-\mu x} f(x).$$

$$50. \int_a^x e^{\mu(x-t)} \cos^4[\lambda(x-t)] y(t) dt = f(x).$$

Замена $w(x) = e^{-\mu x} y(x)$ приводит к уравнению вида 1.5.20:

$$\int_a^x \cos^4[\lambda(x-t)] w(t) dt = e^{-\mu x} f(x).$$

$$51. \int_a^x e^{\mu(x-t)} [\cos(\lambda x) - \cos(\lambda t)]^n y(t) dt = f(x), \quad n = 1, 2, \dots$$

Считается, что правая часть интегрального уравнения удовлетворяет следующим условиям:

$$f(a) = f'_x(a) = \dots = f_x^{(n)}(a) = 0.$$

Решение:

$$y(x) = \frac{(-1)^n}{\lambda^n n!} e^{\mu x} \sin(\lambda x) \left[\frac{1}{\sin(\lambda x)} \frac{d}{dx} \right]^{n+1} F_\mu(x), \quad F_\mu(x) = e^{-\mu x} f(x).$$

$$52. \int_a^x e^{\mu(x-t)} \sqrt{\cos t - \cos x} y(t) dt = f(x).$$

Решение:

$$y(x) = \frac{2}{\pi} e^{\mu x} \sin x \left(\frac{1}{\sin x} \frac{d}{dx} \right)^2 \int_a^x \frac{e^{-\mu t} \sin t f(t) dt}{\sqrt{\cos t - \cos x}}.$$

$$53. \int_a^x \frac{e^{\mu(x-t)} y(t) dt}{\sqrt{\cos t - \cos x}} = f(x).$$

Решение:

$$y(x) = \frac{1}{\pi} e^{\mu x} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{e^{-\mu t} \sin t f(t) dt}{\sqrt{\cos t - \cos x}}.$$

$$54. \int_a^x e^{\mu(x-t)} (\cos t - \cos x)^\lambda y(t) dt = f(x), \quad 0 < \lambda < 1.$$

Решение:

$$y(x) = k e^{\mu x} \sin x \left(\frac{1}{\sin x} \frac{d}{dx} \right)^2 \int_a^x \frac{e^{-\mu t} \sin t f(t) dt}{(\cos t - \cos x)^\lambda}, \quad k = \frac{\sin(\pi\lambda)}{\pi\lambda}.$$

$$55. \int_a^x e^{\mu(x-t)} (\cos^\lambda x - \cos^\lambda t) y(t) dt = f(x).$$

Замена $w(x) = e^{-\mu x} y(x)$ приводит к уравнению вида 1.5.25:

$$\int_a^x (\cos^\lambda x - \cos^\lambda t) w(t) dt = e^{-\mu x} f(x).$$

$$56. \int_a^x e^{\mu(x-t)} (A \cos^\lambda x + B \cos^\lambda t) y(t) dt = f(x).$$

Замена $w(x) = e^{-\mu x} y(x)$ приводит к уравнению вида 1.5.26:

$$\int_a^x (A \cos^\lambda x + B \cos^\lambda t) w(t) dt = e^{-\mu x} f(x).$$

$$57. \int_a^x \frac{e^{\mu(x-t)} y(t) dt}{(\cos t - \cos x)^\lambda} = f(x), \quad 0 < \lambda < 1.$$

Замена $w(x) = e^{-\mu x} y(x)$ приводит к уравнению вида 1.5.27:

$$\int_a^x \frac{w(t) dt}{(\cos t - \cos x)^\lambda} = e^{-\mu x} f(x).$$

$$58. \int_a^x [A e^{\mu(x-t)} + B \cos^\nu(\lambda x)] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.15 при $g_1(x) = A e^{\mu x}$, $h_1(t) = e^{-\mu t}$, $g_2(x) = B \cos^\nu(\lambda x)$, $h_2(t) = 1$.

$$59. \int_a^x [A e^{\mu(x-t)} + B \cos^\nu(\lambda t)] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.15 при $g_1(x) = A e^{\mu x}$, $h_1(t) = e^{-\mu t}$, $g_2(x) = B$, $h_2(t) = \cos^\nu(\lambda t)$.

$$60. \int_a^x e^{\mu(x-t)} \sin[\lambda(x-t)] y(t) dt = f(x), \quad f(a) = f'_x(a) = 0.$$

Решение: $y(x) = \frac{1}{\lambda} [f''_{xx}(x) - 2\mu f'_x(x) + (\lambda^2 + \mu^2) f(x)]$.

$$61. \int_a^x e^{\mu(x-t)} \{A_1 \sin[\lambda_1(x-t)] + A_2 \sin[\lambda_2(x-t)]\} y(t) dt = f(x).$$

Замена $w(x) = e^{-\mu x} y(x)$ приводит к уравнению вида 1.5.58:

$$\int_a^x \{A_1 \sin[\lambda_1(x-t)] + A_2 \sin[\lambda_2(x-t)]\} w(t) dt = e^{-\mu x} f(x).$$

$$62. \int_a^x e^{\mu(x-t)} \sin^2[\lambda(x-t)] y(t) dt = f(x).$$

Замена $w(x) = e^{-\mu x} y(x)$ приводит к уравнению вида 1.5.60:

$$\int_a^x \sin^2[\lambda(x-t)] w(t) dt = e^{-\mu x} f(x).$$

$$63. \int_a^x e^{\mu(x-t)} \sin^3[\lambda(x-t)] y(t) dt = f(x).$$

Замена $w(x) = e^{-\mu x} y(x)$ приводит к уравнению вида 1.5.58:

$$\int_a^x \sin^3[\lambda(x-t)] w(t) dt = e^{-\mu x} f(x).$$

$$64. \int_a^x e^{\mu(x-t)} \sin^n[\lambda(x-t)] y(t) dt = f(x), \quad n = 2, 3, \dots$$

Замена $w(x) = e^{-\mu x} y(x)$ приводит к уравнению вида 1.5.63:

$$\int_a^x \sin^n[\lambda(x-t)] w(t) dt = e^{-\mu x} f(x).$$

$$65. \int_a^x e^{\mu(x-t)} \sin(k\sqrt{x-t}) y(t) dt = f(x).$$

Решение:

$$y(x) = \frac{2}{\pi k} e^{\mu x} \frac{d^2}{dx^2} \int_a^x \frac{e^{-\mu t} \operatorname{ch}(k\sqrt{x-t})}{\sqrt{x-t}} f(t) dt.$$

$$66. \int_a^x e^{\mu(x-t)} \sqrt{\sin x - \sin t} y(t) dt = f(x).$$

Решение:

$$y(x) = \frac{2}{\pi} e^{\mu x} \cos x \left(\frac{1}{\cos x} \frac{d}{dx} \right)^2 \int_a^x \frac{e^{-\mu t} \cos t f(t) dt}{\sqrt{\sin x - \sin t}}.$$

$$67. \int_a^x \frac{e^{\mu(x-t)} y(t) dt}{\sqrt{\sin x - \sin t}} = f(x).$$

Решение:

$$y(x) = \frac{1}{\pi} e^{\mu x} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{e^{-\mu t} \cos t f(t) dt}{\sqrt{\sin x - \sin t}}.$$

$$68. \int_a^x e^{\mu(x-t)} (\sin x - \sin t)^\lambda y(t) dt = f(x), \quad 0 < \lambda < 1.$$

Решение:

$$y(x) = k e^{\mu x} \cos x \left(\frac{1}{\cos x} \frac{d}{dx} \right)^2 \int_a^x \frac{e^{-\mu t} \cos t f(t) dt}{(\sin x - \sin t)^\lambda}, \quad k = \frac{\sin(\pi\lambda)}{\pi\lambda}.$$

$$69. \int_a^x e^{\mu(x-t)} (\sin^\lambda x - \sin^\lambda t) y(t) dt = f(x).$$

Замена $w(x) = e^{-\mu x} y(x)$ приводит к уравнению вида 1.5.86:

$$\int_a^x (\sin^\lambda x - \sin^\lambda t) w(t) dt = e^{-\mu x} f(x).$$

$$70. \int_a^x e^{\mu(x-t)} (A \sin^\lambda x + B \sin^\lambda t) y(t) dt = f(x).$$

Замена $w(x) = e^{-\mu x} y(x)$ приводит к уравнению вида 1.9.4 при $g(x) = \sin^\lambda x$:

$$\int_a^x (A \sin^\lambda x + B \sin^\lambda t) w(t) dt = e^{-\mu x} f(x).$$

$$71. \int_a^x \frac{e^{\mu(x-t)} y(t) dt}{(\sin x - \sin t)^\lambda} = f(x), \quad 0 < \lambda < 1.$$

Замена $w(x) = e^{-\mu x} y(x)$ приводит к уравнению вида 1.5.88:

$$\int_a^x \frac{w(t) dt}{(\sin x - \sin t)^\lambda} = e^{-\mu x} f(x).$$

$$72. \int_a^x [A e^{\mu(x-t)} + B \sin^\nu(\lambda x)] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.15 при $g_1(x) = A e^{\mu x}$, $h_1(t) = e^{-\mu t}$, $g_2(x) = B \sin^\nu(\lambda x)$, $h_2(t) = 1$.

$$73. \int_a^x [A e^{\mu(x-t)} + B \sin^\nu(\lambda t)] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.15 при $g_1(x) = A e^{\mu x}$, $h_1(t) = e^{-\mu t}$, $g_2(x) = B$, $h_2(t) = \sin^\nu(\lambda t)$.

$$74. \int_a^x e^{\mu(x-t)} (A \operatorname{tg}^\lambda x + B \operatorname{tg}^\lambda t) y(t) dt = f(x).$$

Замена $w(x) = e^{-\mu x} y(x)$ приводит к уравнению вида 1.5.105:

$$\int_a^x (A \operatorname{tg}^\lambda x + B \operatorname{tg}^\lambda t) w(t) dt = e^{-\mu x} f(x).$$

$$75. \int_a^x e^{\mu(x-t)} (A \operatorname{tg}^\lambda x + B \operatorname{tg}^\beta t + C) y(t) dt = f(x).$$

Замена $w(x) = e^{-\mu x} y(x)$ приводит к уравнению вида 1.9.6:

$$\int_a^x (A \operatorname{tg}^\lambda x + B \operatorname{tg}^\beta t + C) w(t) dt = e^{-\mu x} f(x).$$

$$76. \int_a^x [A e^{\mu(x-t)} + B \operatorname{tg}^\nu(\lambda x)] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.15 при $g_1(x) = A e^{\mu x}$, $h_1(t) = e^{-\mu t}$, $g_2(x) = B \operatorname{tg}^\nu(\lambda x)$, $h_2(t) = 1$.

$$77. \int_a^x [A e^{\mu(x-t)} + B \operatorname{tg}^\nu(\lambda t)] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.15 при $g_1(x) = A e^{\mu x}$, $h_1(t) = e^{-\mu t}$, $g_2(x) = B$, $h_2(t) = \operatorname{tg}^\nu(\lambda t)$.

$$78. \int_a^x e^{\mu(x-t)} (A \operatorname{ctg}^\lambda x + B \operatorname{ctg}^\lambda t) y(t) dt = f(x).$$

Замена $w(x) = e^{-\mu x} y(x)$ приводит к уравнению вида 1.5.104:

$$\int_a^x (A \operatorname{ctg}^\lambda x + B \operatorname{ctg}^\lambda t) w(t) dt = e^{-\mu x} f(x).$$

$$79. \int_a^x e^{\mu(x-t)} (A \operatorname{ctg}^\lambda x + B \operatorname{ctg}^\beta t + C) y(t) dt = f(x).$$

Замена $w(x) = e^{-\mu x} y(x)$ приводит к уравнению вида 1.9.6:

$$\int_a^x (A \operatorname{ctg}^\lambda x + B \operatorname{ctg}^\beta t + C) w(t) dt = e^{-\mu x} f(x).$$

$$80. \int_a^x [A e^{\mu(x-t)} + B \operatorname{ctg}^\nu(\lambda x)] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.15 при $g_1(x) = A e^{\mu x}$, $h_1(t) = e^{-\mu t}$, $g_2(x) = B \operatorname{ctg}^\nu(\lambda x)$, $h_2(t) = 1$.

$$81. \int_a^x [A e^{\mu(x-t)} + B \operatorname{ctg}^\nu(\lambda t)] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.15 при $g_1(x) = A e^{\mu x}$, $h_1(t) = e^{-\mu t}$, $g_2(x) = B$, $h_2(t) = \operatorname{ctg}^\nu(\lambda t)$.

1.7-4. Ядра уравнений, содержащие гиперболические и логарифмические функции

$$82. \int_a^x [A \operatorname{ch}^\beta(\lambda x) + B \ln^\gamma(\mu t) + C] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.6 при $g(x) = A \operatorname{ch}^\beta(\lambda x)$, $h(t) = B \ln^\gamma(\mu t) + C$.

$$83. \int_a^x [A \operatorname{ch}^\beta(\lambda t) + B \ln^\gamma(\mu x) + C] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.6 при $g(x) = B \ln^\gamma(\mu x) + C$, $h(t) = A \operatorname{ch}^\beta(\lambda t)$.

$$84. \int_a^x [A \operatorname{sh}^\beta(\lambda x) + B \ln^\gamma(\mu t) + C] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.6 при $g(x) = A \operatorname{sh}^\beta(\lambda x)$, $h(t) = B \ln^\gamma(\mu t) + C$.

$$85. \int_a^x [A \operatorname{sh}^\beta(\lambda t) + B \ln^\gamma(\mu x) + C] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.6 при $g(x) = B \ln^\gamma(\mu x)$, $h(t) = A \operatorname{sh}^\beta(\lambda t) + C$.

$$86. \int_a^x [A \operatorname{th}^\beta(\lambda x) + B \ln^\gamma(\mu t) + C] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.6 при $g(x) = A \operatorname{th}^\beta(\lambda x)$, $h(t) = B \ln^\gamma(\mu t) + C$.

$$87. \int_a^x [A \operatorname{th}^\beta(\lambda t) + B \ln^\gamma(\mu x) + C] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.6 при $g(x) = B \ln^\gamma(\mu x)$, $h(t) = A \operatorname{th}^\beta(\lambda t) + C$.

$$88. \int_a^x [A \operatorname{cth}^\beta(\lambda x) + B \ln^\gamma(\mu t) + C] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.6 при $g(x) = A \operatorname{cth}^\beta(\lambda x)$, $h(t) = B \ln^\gamma(\mu t) + C$.

$$89. \int_a^x [A \operatorname{cth}^\beta(\lambda t) + B \ln^\gamma(\mu x) + C] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.6 при $g(x) = B \ln^\gamma(\mu x)$, $h(t) = A \operatorname{cth}^\beta(\lambda t) + C$.

1.7-5. Ядра уравнений, содержащие гиперболические и тригонометрические функции

$$90. \int_a^x [A \operatorname{ch}^\beta(\lambda x) + B \cos^\gamma(\mu t) + C] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.6 при $g(x) = A \operatorname{ch}^\beta(\lambda x)$, $h(t) = B \cos^\gamma(\mu t) + C$.

$$91. \int_a^x [A \operatorname{ch}^\beta(\lambda t) + B \sin^\gamma(\mu x) + C] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.6 при $g(x) = B \sin^\gamma(\mu x) + C$, $h(t) = A \operatorname{ch}^\beta(\lambda t)$.

$$92. \int_a^x [A \operatorname{ch}^\beta(\lambda x) + B \operatorname{tg}^\gamma(\mu t) + C] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.6 при $g(x) = A \operatorname{ch}^\beta(\lambda x)$, $h(t) = B \operatorname{tg}^\gamma(\mu t) + C$.

$$93. \int_a^x [A \operatorname{sh}^\beta(\lambda x) + B \cos^\gamma(\mu t) + C] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.6 при $g(x) = A \operatorname{sh}^\beta(\lambda x)$, $h(t) = B \cos^\gamma(\mu t) + C$.

$$94. \int_a^x [A \operatorname{sh}^\beta(\lambda t) + B \sin^\gamma(\mu x) + C] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.6 при $g(x) = B \sin^\gamma(\mu x)$, $h(t) = A \operatorname{sh}^\beta(\lambda t) + C$.

$$95. \int_a^x [A \operatorname{sh}^\beta(\lambda x) + B \operatorname{tg}^\gamma(\mu t) + C] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.6 при $g(x) = A \operatorname{sh}^\beta(\lambda x)$, $h(t) = B \operatorname{tg}^\gamma(\mu t) + C$.

$$96. \int_a^x [A \operatorname{th}^\beta(\lambda x) + B \cos^\gamma(\mu t) + C] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.6 при $g(x) = A \operatorname{th}^\beta(\lambda x)$, $h(t) = B \cos^\gamma(\mu t) + C$.

$$97. \int_a^x [A \operatorname{th}^\beta(\lambda x) + B \sin^\gamma(\mu t) + C] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.6 при $g(x) = A \operatorname{th}^\beta(\lambda x)$, $h(t) = B \sin^\gamma(\mu t) + C$.

$$98. \int_a^x \operatorname{sh}[\lambda(x-t)] - \sin[\lambda(x-t)] y(t) dt = f(x).$$

Считается, что выполнены условия $f(a) = f'_x(a) = f''_{xx}(a) = f'''_{xxx}(a) = 0$.

Решение:

$$y(x) = \frac{1}{2\lambda^3} \left(\frac{d^4}{dx^4} - \lambda^4 \right) f(x).$$

⊙ Литература: А. Р. Prudnikov, Ю. А. Brychkov, О. И. Marichev (1992, стр. 449).

$$99. \int_a^x \operatorname{sh}[\lambda(x-t)] \sin[\lambda(x-t)] y(t) dt = f(x), \quad f(a) = f'_x(a) = f''_{xx}(a) = 0.$$

Решение:

$$y(x) = \frac{1}{2\lambda^2} \left(\frac{d^4}{dx^4} + 4\lambda^4 \right) \int_a^x f(t) dt.$$

⊙ Литература: А. Р. Prudnikov, Ю. А. Brychkov, О. И. Marichev (1992, стр. 449).

$$100. \int_a^x \operatorname{sh}[\lambda(x-t)] \cos[\lambda(x-t)] y(t) dt = f(x).$$

Считается, что выполнены условия $f(a) = f'_x(a) = f''_{xx}(a) = f'''_{xxx}(a) = 0$.

Решение:

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{2}\lambda^2} \left(\frac{d^4}{dx^4} + 4\lambda^4 \right) \int_a^x \operatorname{sh}[\sqrt{2}\lambda(x-t)] f(t) dt.$$

● Литература: А. Р. Prudnikov, Yu. А. Brychkov, O. I. Marichev (1992, стр. 449).

$$101. \int_a^x \operatorname{ch}[\lambda(x-t)] \sin[\lambda(x-t)] y(t) dt = f(x).$$

Считается, что выполнены условия $f(a) = f'_x(a) = f''_{xx}(a) = f'''_{xxx}(a) = 0$.

Решение:

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{2}\lambda^2} \left(\frac{d^4}{dx^4} + 4\lambda^4 \right) \int_a^x \sin[\sqrt{2}\lambda(x-t)] f(t) dt.$$

● Литература: А. Р. Prudnikov, Yu. А. Brychkov, O. I. Marichev (1992, стр. 450).

$$102. \int_a^x \operatorname{ch}[\lambda(x-t)] \cos[\lambda(x-t)] y(t) dt = f(x), \quad f(a) = 0.$$

Решение:

$$y(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{d^4}{dx^4} + 4\lambda^4 \right) \int_a^x (x-t)^2 f(t) dt.$$

● Литература: А. Р. Prudnikov, Yu. А. Brychkov, O. I. Marichev (1992, стр. 450).

1.7-6. Ядра уравнений, содержащие логарифмические и тригонометрические функции

$$103. \int_a^x [A \cos^\beta(\lambda x) + B \ln^\gamma(\mu t) + C] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.6 при $g(x) = A \cos^\beta(\lambda x)$, $h(t) = B \ln^\gamma(\mu t) + C$.

$$104. \int_a^x [A \cos^\beta(\lambda t) + B \ln^\gamma(\mu x) + C] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.6 при $g(x) = B \ln^\gamma(\mu x) + C$, $h(t) = A \cos^\beta(\lambda t)$.

$$105. \int_a^x [A \sin^\beta(\lambda x) + B \ln^\gamma(\mu t) + C] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.6 при $g(x) = A \sin^\beta(\lambda x)$, $h(t) = B \ln^\gamma(\mu t) + C$.

$$106. \int_a^x [A \sin^\beta(\lambda t) + B \ln^\gamma(\mu x) + C] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.6 при $g(x) = B \ln^\gamma(\mu x)$, $h(t) = A \sin^\beta(\lambda t) + C$.

1.8. Уравнения, ядра которых содержат специальные функции

1.8-1. Ядра уравнений, содержащие функции Бесселя

$$1. \int_a^x J_0[\lambda(x-t)] y(t) dt = f(x).$$

Решение:

$$y(x) = \frac{1}{\lambda} \left(\frac{d^2}{dx^2} + \lambda^2 \right)^2 \int_a^x (x-t) J_1[\lambda(x-t)] f(t) dt.$$

В частном случае $\lambda = 1$ при $f(x) = A \sin x$ решение дается формулой $y(x) = A J_0(x)$.

$$2. \int_a^x [J_0(\lambda x) - J_0(\lambda t)] y(t) dt = f(x).$$

Решение: $y(x) = -\frac{d}{dx} \left[\frac{f'_x(x)}{\lambda J_1(\lambda x)} \right].$

$$3. \int_a^x [AJ_0(\lambda x) + BJ_0(\lambda t)] y(t) dt = f(x).$$

При $B = -A$ см. уравнение 1.8.2. Рассматриваем область $[a, x]$, в которой функция $J_0(\lambda x)$ не меняет знака.

Решение при $B \neq -A$:

$$y(x) = \pm \frac{1}{A+B} \frac{d}{dx} \left\{ |J_0(\lambda x)|^{-\frac{A}{A+B}} \int_a^x |J_0(\lambda t)|^{-\frac{B}{A+B}} f'_t(t) dt \right\}.$$

Берется тот же знак, который имеет функция $J_0(\lambda x)$.

$$4. \int_a^x (x-t) J_0[\lambda(x-t)] y(t) dt = f(x).$$

Решение:

$$y(x) = \int_a^x g(t) dt,$$

где

$$g(t) = \frac{1}{\lambda} \left(\frac{d^2}{dt^2} + \lambda^2 \right)^3 \int_a^t (t-\tau) J_1[\lambda(t-\tau)] f(\tau) d\tau.$$

$$5. \int_a^x (x-t) J_1[\lambda(x-t)] y(t) dt = f(x).$$

Решение:

$$y(x) = \frac{1}{3\lambda^3} \left(\frac{d^2}{dx^2} + \lambda^2 \right)^4 \int_a^x (x-t)^2 J_2[\lambda(x-t)] f(t) dt.$$

$$6. \int_a^x (x-t)^2 J_1[\lambda(x-t)] y(t) dt = f(x).$$

Решение:

$$y(x) = \int_a^x g(t) dt,$$

где

$$g(t) = \frac{1}{9\lambda^3} \left(\frac{d^2}{dt^2} + \lambda^2 \right)^5 \int_a^t (t-\tau)^2 J_2[\lambda(t-\tau)] f(\tau) d\tau.$$

$$7. \int_a^x (x-t)^n J_n[\lambda(x-t)] y(t) dt = f(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Решение:

$$y(x) = A \left(\frac{d^2}{dx^2} + \lambda^2 \right)^{2n+2} \int_a^x (x-t)^{n+1} J_{n+1}[\lambda(x-t)] f(t) dt,$$

$$A = \left(\frac{2}{\lambda} \right)^{2n+1} \frac{n!(n+1)!}{(2n)!(2n+2)!}.$$

Если правая часть уравнения дифференцируема достаточное число раз и выполняются условия $f(a) = f'_x(a) = \dots = f_x^{(2n+1)}(a) = 0$, то решение интегрального уравнения можно записать в виде

$$y(x) = A \int_a^x (x-t)^{2n+1} J_{2n+1}[\lambda(x-t)] F(t) dt, \quad F(t) = \left(\frac{d^2}{dt^2} + \lambda^2 \right)^{2n+2} f(t) dt.$$

$$8. \int_a^x (x-t)^{n+1} J_n[\lambda(x-t)] y(t) dt = f(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Решение:

$$y(x) = \int_a^x g(t) dt,$$

где

$$g(t) = A \left(\frac{d^2}{dt^2} + \lambda^2 \right)^{2n+3} \int_a^t (t-\tau)^{n+1} J_{n+1}[\lambda(t-\tau)] f(\tau) d\tau,$$

$$A = \left(\frac{2}{\lambda} \right)^{2n+1} \frac{n! (n+1)!}{(2n+1)! (2n+2)!}.$$

Если правая часть уравнения дифференцируема достаточное число раз и выполняются условия $f(a) = f'_x(a) = \dots = f_x^{(2n+2)}(a) = 0$, то функцию $g(t)$, определяющую решение, можно записать в виде

$$g(t) = A \int_a^t (t-\tau)^{n-\nu-2} J_{n-\nu-2}[\lambda(t-\tau)] F(\tau) d\tau, \quad F(\tau) = \left(\frac{d^2}{d\tau^2} + \lambda^2 \right)^{2n+2} f(\tau).$$

$$9. \int_a^x (x-t)^{1/2} J_{1/2}[\lambda(x-t)] y(t) dt = f(x).$$

Решение:

$$y(x) = \frac{\pi}{4\lambda^2} \left(\frac{d^2}{dx^2} + \lambda^2 \right)^3 \int_a^x (x-t)^{3/2} J_{3/2}[\lambda(x-t)] f(t) dt.$$

$$10. \int_a^x (x-t)^{3/2} J_{1/2}[\lambda(x-t)] y(t) dt = f(x).$$

Решение:

$$y(x) = \int_a^x g(t) dt,$$

где

$$g(t) = \frac{\pi}{8\lambda^2} \left(\frac{d^2}{dt^2} + \lambda^2 \right)^4 \int_a^t (t-\tau)^{3/2} J_{3/2}[\lambda(t-\tau)] f(\tau) d\tau.$$

$$11. \int_a^x (x-t)^{3/2} J_{3/2}[\lambda(x-t)] y(t) dt = f(x).$$

Решение:

$$y(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{3/2} \lambda^{5/2}} \left(\frac{d^2}{dx^2} + \lambda^2 \right)^3 \int_a^x \sin[\lambda(x-t)] f(t) dt.$$

$$12. \int_a^x (x-t)^{5/2} J_{3/2}[\lambda(x-t)] y(t) dt = f(x).$$

Решение:

$$y(x) = \int_a^x g(t) dt,$$

где

$$g(t) = \frac{\pi}{128\lambda^4} \left(\frac{d^2}{dt^2} + \lambda^2 \right)^6 \int_a^t (t-\tau)^{5/2} J_{5/2}[\lambda(t-\tau)] f(\tau) d\tau.$$

$$13. \int_a^x (x-t)^{\frac{2n-1}{2}} J_{\frac{2n-1}{2}}[\lambda(x-t)] y(t) dt = f(x), \quad n = 2, 3, \dots$$

Решение:

$$y(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2} \lambda^{\frac{2n+1}{2}} (2n-2)!!} \left(\frac{d^2}{dx^2} + \lambda^2 \right)^n \int_a^x \sin[\lambda(x-t)] f(t) dt.$$

$$14. \int_a^x [J_\nu(\lambda x) - J_\nu(\lambda t)] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.2 при $g(x) = J_\nu(\lambda x)$.

Решение: $y(x) = \frac{d}{dx} \left[\frac{x f'_x(x)}{\nu J_\nu(\lambda x) - \lambda x J_{\nu+1}(\lambda x)} \right].$

$$15. \int_a^x [A J_\nu(\lambda x) + B J_\nu(\lambda t)] y(t) dt = f(x).$$

При $B = -A$ см. уравнение 1.8.14. Рассматриваем область $[a, x]$, в которой функция $J_\nu(\lambda x)$ не меняет знака.

Решение при $B \neq -A$:

$$y(x) = \pm \frac{1}{A+B} \frac{d}{dx} \left\{ |J_\nu(\lambda x)|^{-\frac{A}{A+B}} \int_a^x |J_\nu(\lambda t)|^{-\frac{B}{A+B}} f'_t(t) dt \right\}.$$

Берется тот же знак, который имеет функция $J_\nu(\lambda x)$.

$$16. \int_a^x [A J_\nu(\lambda x) + B J_\mu(\beta t)] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.6 при $g(x) = A J_\nu(\lambda x)$, $h(t) = B J_\mu(\beta t)$.

$$17. \int_a^x (x-t)^\nu J_\nu[\lambda(x-t)] y(t) dt = f(x).$$

Решение:

$$y(x) = A \left(\frac{d^2}{dx^2} + \lambda^2 \right)^n \int_a^x (x-t)^{n-\nu-1} J_{n-\nu-1}[\lambda(x-t)] f(t) dt,$$

$$A = \left(\frac{2}{\lambda} \right)^{n-1} \frac{\Gamma(\nu+1) \Gamma(n-\nu)}{\Gamma(2\nu+1) \Gamma(2n-2\nu-1)},$$

где $-\frac{1}{2} < \nu < \frac{n-1}{2}$, $n = 1, 2, \dots$

Если правая часть уравнения дифференцируема достаточное число раз и выполняются условия $f(a) = f'_x(a) = \dots = f_x^{(n-1)}(a) = 0$, то решение интегрального уравнения можно записать в виде

$$y(x) = A \int_a^x (x-t)^{n-\nu-1} J_{n-\nu-1}[\lambda(x-t)] F(t) dt, \quad F(t) = \left(\frac{d^2}{dt^2} + \lambda^2 \right)^n f(t).$$

● Литература: С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев (1987, стр. 530).

$$18. \int_a^x (x-t)^{\nu+1} J_\nu[\lambda(x-t)] y(t) dt = f(x).$$

Решение:

$$y(x) = \int_a^x g(t) dt,$$

где

$$g(t) = A \left(\frac{d^2}{dt^2} + \lambda^2 \right)^n \int_a^t (t-\tau)^{n-\nu-2} J_{n-\nu-2}[\lambda(t-\tau)] f(\tau) d\tau,$$

$$A = \left(\frac{2}{\lambda} \right)^{n-2} \frac{\Gamma(\nu+1) \Gamma(n-\nu-1)}{\Gamma(2\nu+2) \Gamma(2n-2\nu-3)},$$

где $-1 < \nu < \frac{n}{2} - 1$, $n = 1, 2, \dots$

Если правая часть уравнения дифференцируема достаточное число раз и выполняются условия $f(a) = f'_x(a) = \dots = f_x^{(n-1)}(a) = 0$, то функцию $g(t)$, определяющую решение, можно записать в виде

$$g(t) = A \int_a^t (t-\tau)^{n-\nu-2} J_{n-\nu-2}[\lambda(t-\tau)] F(\tau) d\tau, \quad F(\tau) = \left(\frac{d^2}{d\tau^2} + \lambda^2 \right)^n f(\tau).$$

● Литература: С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев (1987, стр. 530).

$$19. \int_a^x J_0(\lambda\sqrt{x-t}) y(t) dt = f(x).$$

Решение:

$$y(x) = \frac{d^2}{dx^2} \int_a^x I_0(\lambda\sqrt{x-t}) f(t) dt.$$

$$20. \int_a^x [AJ_\nu(\lambda\sqrt{x}) + BJ_\nu(\lambda\sqrt{t})] y(t) dt = f(x).$$

Рассматриваем область $[a, x]$, в которой функция $J_\nu(\lambda\sqrt{x})$ не меняет знака.

Решение при $B \neq -A$:

$$y(x) = \pm \frac{1}{A+B} \frac{d}{dx} \left\{ |J_\nu(\lambda\sqrt{x})|^{-\frac{A}{A+B}} \int_a^x |J_\nu(\lambda\sqrt{t})|^{-\frac{B}{A+B}} f'_t(t) dt \right\}.$$

Берется тот же знак, который имеет функция $J_\nu(\lambda\sqrt{x})$.

$$21. \int_a^x [AJ_\nu(\lambda\sqrt{x}) + BJ_\mu(\beta\sqrt{t})] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.6 при $g(x) = AJ_\nu(\lambda\sqrt{x})$, $h(t) = BJ_\mu(\beta\sqrt{t})$.

$$22. \int_a^x \sqrt{x-t} J_1(\lambda\sqrt{x-t}) y(t) dt = f(x).$$

Решение:

$$y(x) = \frac{2}{\lambda} \frac{d^3}{dx^3} \int_a^x I_0(\lambda\sqrt{x-t}) f(t) dt.$$

$$23. \int_a^x (x-t)^{1/4} J_{1/2}(\lambda\sqrt{x-t}) y(t) dt = f(x).$$

Решение:

$$y(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi\lambda}} \frac{d^2}{dx^2} \int_a^x \frac{\text{ch}(\lambda\sqrt{x-t})}{\sqrt{x-t}} f(t) dt.$$

$$24. \int_a^x (x-t)^{3/4} J_{3/2}(\lambda\sqrt{x-t}) y(t) dt = f(x).$$

Решение:

$$y(x) = \frac{2^{3/2}}{\sqrt{\pi}\lambda^{3/2}} \frac{d^3}{dx^3} \int_a^x \frac{\text{ch}(\lambda\sqrt{x-t})}{\sqrt{x-t}} f(t) dt.$$

$$25. \int_a^x (x-t)^{n/2} J_n(\lambda\sqrt{x-t}) y(t) dt = f(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Решение:

$$y(x) = \left(\frac{2}{\lambda}\right)^n \frac{d^{n+2}}{dx^{n+2}} \int_a^x I_0(\lambda\sqrt{x-t}) f(t) dt.$$

$$26. \int_a^x (x-t)^{\frac{2n-3}{4}} J_{\frac{2n-3}{2}}(\lambda\sqrt{x-t}) y(t) dt = f(x), \quad n = 1, 2, \dots$$

Решение:

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{2}{\lambda}\right)^{\frac{2n-3}{2}} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x \frac{\text{ch}(\lambda\sqrt{x-t})}{\sqrt{x-t}} f(t) dt.$$

$$27. \int_a^x (x-t)^{-1/4} J_{-1/2}(\lambda\sqrt{x-t}) y(t) dt = f(x).$$

Решение:

$$y(x) = \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi}} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{\text{ch}(\lambda\sqrt{x-t})}{\sqrt{x-t}} f(t) dt.$$

$$28. \int_a^x (x-t)^{\nu/2} J_\nu(\lambda\sqrt{x-t}) y(t) dt = f(x).$$

Решение:

$$y(x) = \left(\frac{2}{\lambda}\right)^{n-2} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x (x-t)^{\frac{n-\nu-2}{2}} I_{n-\nu-2}(\lambda\sqrt{x-t}) f(t) dt,$$

где $-1 < \nu < n-1$, $n = 1, 2, \dots$

Если правая часть уравнения дифференцируема достаточное число раз и выполняются условия $f(a) = f'_x(a) = \dots = f_x^{(n-1)}(a) = 0$, то решение интегрального уравнения можно записать в виде

$$y(x) = \left(\frac{2}{\lambda}\right)^{n-2} \int_a^x (x-t)^{\frac{n-\nu-2}{2}} I_{n-\nu-2}(\lambda\sqrt{x-t}) f_t^{(n)}(t) dt.$$

$$29. \int_0^x (x^2 - t^2)^{-1/4} J_{-1/2}(\lambda\sqrt{x^2 - t^2}) y(t) dt = f(x).$$

Решение:

$$y(x) = \sqrt{\frac{2\lambda}{\pi}} \frac{d}{dx} \int_0^x t \frac{\operatorname{ch}(\lambda\sqrt{x^2 - t^2})}{\sqrt{x^2 - t^2}} f(t) dt.$$

● Литература: С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев (1987, стр. 535).

$$30. \int_x^\infty (t^2 - x^2)^{-1/4} J_{-1/2}(\lambda\sqrt{t^2 - x^2}) y(t) dt = f(x).$$

Решение:

$$y(x) = -\sqrt{\frac{2\lambda}{\pi}} \frac{d}{dx} \int_x^\infty t \frac{\operatorname{ch}(\lambda\sqrt{t^2 - x^2})}{\sqrt{t^2 - x^2}} f(t) dt.$$

$$31. \int_0^x (x^2 - t^2)^{\nu/2} J_\nu(\lambda\sqrt{x^2 - t^2}) y(t) dt = f(x), \quad -1 < \nu < 0.$$

Решение:

$$y(x) = \lambda \frac{d}{dx} \int_0^x t (x^2 - t^2)^{-(\nu+1)/2} I_{-\nu-1}(\lambda\sqrt{x^2 - t^2}) f(t) dt.$$

● Литература: С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев (1987, стр. 535).

$$32. \int_x^\infty (t^2 - x^2)^{\nu/2} J_\nu(\lambda\sqrt{t^2 - x^2}) y(t) dt = f(x), \quad -1 < \nu < 0.$$

Решение:

$$y(x) = -\lambda \frac{d}{dx} \int_x^\infty t (t^2 - x^2)^{-(\nu+1)/2} I_{-\nu-1}(\lambda\sqrt{t^2 - x^2}) f(t) dt.$$

● Литература: С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев (1987, стр. 535).

$$33. \int_a^x [At^k J_\nu(\lambda x) + Bx^m J_\mu(\lambda t)] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.15 при $g_1(x) = AJ_\nu(\lambda x)$, $h_1(t) = t^k$, $g_2(x) = Bx^m$, $h_2(t) = J_\mu(\lambda t)$.

$$34. \int_a^x [AJ_\nu^2(\lambda x) + BJ_\mu^2(\lambda t)] y(t) dt = f(x).$$

Решение при $B \neq -A$:

$$y(x) = \frac{1}{A+B} \frac{d}{dx} \left\{ |J_\nu(\lambda x)|^{-\frac{2A}{A+B}} \int_a^x |J_\nu(\lambda t)|^{-\frac{2B}{A+B}} f'_t(t) dt \right\}.$$

$$35. \int_a^x [AJ_\nu^k(\lambda x) + BJ_\mu^m(\beta t)] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.6 при $g(x) = AJ_\nu^k(\lambda x)$, $h(t) = BJ_\mu^m(\beta t)$.

$$36. \int_a^x [Y_0(\lambda x) - Y_0(\lambda t)] y(t) dt = f(x).$$

Решение: $y(x) = -\frac{d}{dx} \left[\frac{f'_x(x)}{\lambda Y_1(\lambda x)} \right].$

$$37. \int_a^x [Y_\nu(\lambda x) - Y_\nu(\lambda t)] y(t) dt = f(x).$$

Решение: $y(x) = \frac{d}{dx} \left[\frac{x f'_x(x)}{\nu Y_\nu(\lambda x) - \lambda x Y_{\nu+1}(\lambda x)} \right].$

$$38. \int_a^x [A Y_\nu(\lambda x) + B Y_\nu(\lambda t)] y(t) dt = f(x).$$

При $B = -A$ см. уравнение 1.8.37. Рассматриваем область $[a, x]$, в которой функция $Y_\nu(\lambda x)$ не меняет знака.

Решение при $B \neq -A$:

$$y(x) = \pm \frac{1}{A+B} \frac{d}{dx} \left\{ |Y_\nu(\lambda x)|^{-\frac{A}{A+B}} \int_a^x |Y_\nu(\lambda t)|^{-\frac{B}{A+B}} f'_t(t) dt \right\}.$$

Берется тот же знак, который имеет функция $Y_\nu(\lambda x)$.

$$39. \int_a^x [A t^k Y_\nu(\lambda x) + B x^m Y_\mu(\lambda t)] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.15 при $g_1(x) = A Y_\nu(\lambda x)$, $h_1(t) = t^k$, $g_2(x) = B x^m$, $h_2(t) = Y_\mu(\lambda t)$.

$$40. \int_a^x [A J_\nu(\lambda x) Y_\mu(\beta t) + B J_\nu(\lambda t) Y_\mu(\beta x)] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.15 при $g_1(x) = A J_\nu(\lambda x)$, $h_1(t) = Y_\mu(\beta t)$, $g_2(x) = B Y_\mu(\beta x)$, $h_2(t) = J_\nu(\lambda t)$.

1.8-2. Ядра уравнений, содержащие модифицированные функции Бесселя

$$41. \int_a^x I_0[\lambda(x-t)] y(t) dt = f(x).$$

Решение:

$$y(x) = \frac{1}{\lambda} \left(\frac{d^2}{dx^2} - \lambda^2 \right)^2 \int_a^x (x-t) I_1[\lambda(x-t)] f(t) dt.$$

$$42. \int_a^x [I_0(\lambda x) - I_0(\lambda t)] y(t) dt = f(x), \quad f(a) = f'_x(a) = 0.$$

Решение: $y(x) = \frac{d}{dx} \left[\frac{f'_x(x)}{\lambda I_1(\lambda x)} \right].$

$$43. \int_a^x [A I_0(\lambda x) + B I_0(\lambda t)] y(t) dt = f(x).$$

При $B = -A$ см. уравнение 1.8.42. Решение при $B \neq -A$:

$$y(x) = \pm \frac{1}{A+B} \frac{d}{dx} \left\{ |I_0(\lambda x)|^{-\frac{A}{A+B}} \int_a^x |I_0(\lambda t)|^{-\frac{B}{A+B}} f'_t(t) dt \right\}.$$

Берется тот же знак, который имеет функция $I_\nu(\lambda x)$.

$$44. \int_a^x (x-t) I_0[\lambda(x-t)] y(t) dt = f(x).$$

Решение:

$$y(x) = \int_a^x g(t) dt,$$

где

$$g(t) = \frac{1}{\lambda} \left(\frac{d^2}{dt^2} - \lambda^2 \right)^3 \int_a^t (t-\tau) I_1[\lambda(t-\tau)] f(\tau) d\tau.$$

$$45. \int_a^x (x-t) I_1[\lambda(x-t)] y(t) dt = f(x).$$

Решение:

$$y(x) = \frac{1}{3\lambda^3} \left(\frac{d^2}{dx^2} - \lambda^2 \right)^4 \int_a^x (x-t)^2 I_2[\lambda(x-t)] f(t) dt.$$

$$46. \int_a^x (x-t)^2 I_1[\lambda(x-t)] y(t) dt = f(x).$$

Решение:

$$y(x) = \int_a^x g(t) dt,$$

где

$$g(t) = \frac{1}{9\lambda^3} \left(\frac{d^2}{dt^2} - \lambda^2 \right)^5 \int_a^t (t-\tau)^2 I_2[\lambda(t-\tau)] f(\tau) d\tau.$$

$$47. \int_a^x (x-t)^n I_n[\lambda(x-t)] y(t) dt = f(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Решение:

$$y(x) = A \left(\frac{d^2}{dx^2} - \lambda^2 \right)^{2n+2} \int_a^x (x-t)^{n+1} I_{n+1}[\lambda(x-t)] f(t) dt,$$

$$A = \left(\frac{2}{\lambda} \right)^{2n+1} \frac{n! (n+1)!}{(2n)! (2n+2)!}.$$

Если правая часть уравнения дифференцируема достаточное число раз и выполняются условия $f(a) = f'_x(a) = \dots = f_x^{(2n+1)}(a) = 0$, то решение интегрального уравнения можно записать в виде

$$y(x) = A \int_a^x (x-t)^{2n+1} I_{2n+1}[\lambda(x-t)] F(t) dt, \quad F(t) = \left(\frac{d^2}{dt^2} - \lambda^2 \right)^{2n+2} f(t).$$

$$48. \int_a^x (x-t)^{n+1} I_n[\lambda(x-t)] y(t) dt = f(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Решение:

$$y(x) = \int_a^x g(t) dt,$$

где

$$g(t) = A \left(\frac{d^2}{dt^2} - \lambda^2 \right)^{2n+3} \int_a^t (t-\tau)^{n+1} I_{n+1}[\lambda(t-\tau)] f(\tau) d\tau,$$

$$A = \left(\frac{2}{\lambda} \right)^{2n+1} \frac{n! (n+1)!}{(2n+1)! (2n+2)!}.$$

Если правая часть уравнения дифференцируема достаточное число раз и выполняются условия $f(a) = f'_x(a) = \dots = f_x^{(2n+2)}(a) = 0$, то функцию $g(t)$, определяющую решение, можно записать в виде

$$g(t) = A \int_a^t (t-\tau)^{n-\nu-2} I_{n-\nu-2}[\lambda(t-\tau)] F(\tau) d\tau, \quad F(\tau) = \left(\frac{d^2}{d\tau^2} - \lambda^2 \right)^{2n+2} f(\tau).$$

$$49. \int_a^x (x-t)^{1/2} I_{1/2}[\lambda(x-t)] y(t) dt = f(x).$$

Решение:

$$y(x) = \frac{\pi}{4\lambda^2} \left(\frac{d^2}{dx^2} - \lambda^2 \right)^3 \int_a^x (x-t)^{3/2} I_{3/2}[\lambda(x-t)] f(t) dt.$$

$$50. \int_a^x (x-t)^{3/2} I_{1/2}[\lambda(x-t)] y(t) dt = f(x).$$

Решение:

$$y(x) = \int_a^x g(t) dt,$$

где

$$g(t) = \frac{\pi}{8\lambda^2} \left(\frac{d^2}{dt^2} - \lambda^2 \right)^4 \int_a^t (t-\tau)^{3/2} I_{3/2}[\lambda(t-\tau)] f(\tau) d\tau.$$

$$51. \int_a^x (x-t)^{3/2} I_{3/2}[\lambda(x-t)] y(t) dt = f(x).$$

Решение:

$$y(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{3/2} \lambda^{5/2}} \left(\frac{d^2}{dx^2} - \lambda^2 \right)^3 \int_a^x \operatorname{sh}[\lambda(x-t)] f(t) dt.$$

$$52. \int_a^x (x-t)^{5/2} I_{3/2}[\lambda(x-t)] y(t) dt = f(x).$$

Решение:

$$y(x) = \int_a^x g(t) dt,$$

где

$$g(t) = \frac{\pi}{128\lambda^4} \left(\frac{d^2}{dt^2} - \lambda^2 \right)^6 \int_a^t (t-\tau)^{5/2} I_{5/2}[\lambda(t-\tau)] f(\tau) d\tau.$$

$$53. \int_a^x (x-t)^{\frac{2n-1}{2}} I_{\frac{2n-1}{2}}[\lambda(x-t)] y(t) dt = f(x), \quad n = 2, 3, \dots$$

Решение:

$$y(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2} \lambda^{\frac{2n+1}{2}} (2n-2)!!} \left(\frac{d^2}{dx^2} - \lambda^2 \right)^n \int_a^x \operatorname{sh}[\lambda(x-t)] f(t) dt.$$

$$54. \int_a^x [I_\nu(\lambda x) - I_\nu(\lambda t)] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.2 при $g(x) = I_\nu(\lambda x)$.

$$55. \int_a^x [AI_\nu(\lambda x) + BI_\nu(\lambda t)] y(t) dt = f(x).$$

Решение при $B \neq -A$:

$$y(x) = \frac{1}{A+B} \frac{d}{dx} \left\{ [I_\nu(\lambda x)]^{-\frac{A}{A+B}} \int_a^x [I_\nu(\lambda t)]^{-\frac{B}{A+B}} f'_t(t) dt \right\}.$$

$$56. \int_a^x [AI_\nu(\lambda x) + BI_\mu(\beta t)] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.6 при $g(x) = AI_\nu(\lambda x)$, $h(t) = BI_\mu(\beta t)$.

$$57. \int_a^x (x-t)^\nu I_\nu[\lambda(x-t)]y(t) dt = f(x).$$

Решение:

$$y(x) = A \left(\frac{d^2}{dx^2} - \lambda^2 \right)^n \int_a^x (x-t)^{n-\nu-1} I_{n-\nu-1}[\lambda(x-t)] f(t) dt,$$

$$A = \left(\frac{2}{\lambda} \right)^{n-1} \frac{\Gamma(\nu+1) \Gamma(n-\nu)}{\Gamma(2\nu+1) \Gamma(2n-2\nu-1)},$$

где $-\frac{1}{2} < \nu < \frac{n-1}{2}$, $n = 1, 2, \dots$

Если правая часть уравнения дифференцируема достаточное число раз и выполняются условия $f(a) = f'_x(a) = \dots = f_x^{(n-1)}(a) = 0$, то решение интегрального уравнения можно записать в виде

$$y(x) = A \int_a^x (x-t)^{n-\nu-1} I_{n-\nu-1}[\lambda(x-t)] F(t) dt, \quad F(t) = \left(\frac{d^2}{dt^2} - \lambda^2 \right)^n f(t).$$

⊙ Литература: С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев (1987).

$$58. \int_a^x (x-t)^{\nu+1} I_\nu[\lambda(x-t)]y(t) dt = f(x).$$

Решение:

$$y(x) = \int_a^x g(t) dt,$$

где

$$g(t) = A \left(\frac{d^2}{dt^2} - \lambda^2 \right)^n \int_a^t (t-\tau)^{n-\nu-2} I_{n-\nu-2}[\lambda(t-\tau)] f(\tau) d\tau,$$

$$A = \left(\frac{2}{\lambda} \right)^{n-2} \frac{\Gamma(\nu+1) \Gamma(n-\nu-1)}{\Gamma(2\nu+2) \Gamma(2n-2\nu-3)},$$

где $-1 < \nu < \frac{n}{2} - 1$, $n = 1, 2, \dots$

Если правая часть уравнения дифференцируема достаточное число раз и выполняются условия $f(a) = f'_x(a) = \dots = f_x^{(n-1)}(a) = 0$, то функцию $g(t)$, определяющую решение можно записать в виде

$$g(t) = A \int_a^t (t-\tau)^{n-\nu-2} I_{n-\nu-2}[\lambda(t-\tau)] F(\tau) d\tau, \quad F(\tau) = \left(\frac{d^2}{d\tau^2} - \lambda^2 \right)^n f(\tau).$$

⊙ Литература: С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев (1987).

$$59. \int_a^x I_0(\lambda\sqrt{x-t})y(t) dt = f(x).$$

Решение:

$$y(x) = \frac{d^2}{dx^2} \int_a^x J_0(\lambda\sqrt{x-t}) f(t) dt.$$

$$60. \int_a^x [AI_\nu(\lambda\sqrt{x}) + BI_\nu(\lambda\sqrt{t})]y(t) dt = f(x).$$

Решение при $B \neq -A$:

$$y(x) = \frac{1}{A+B} \frac{d}{dx} \left\{ [I_\nu(\lambda\sqrt{x})]^{-\frac{A}{A+B}} \int_a^x [I_\nu(\lambda\sqrt{t})]^{-\frac{B}{A+B}} f'_t(t) dt \right\}.$$

$$61. \int_a^x [AI_\nu(\lambda\sqrt{x}) + BI_\mu(\beta\sqrt{t})]y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.6 при $g(x) = AI_\nu(\lambda\sqrt{x})$, $h(t) = BI_\mu(\beta\sqrt{t})$.

$$62. \int_a^x \sqrt{x-t} I_1(\lambda\sqrt{x-t})y(t) dt = f(x).$$

Решение:

$$y(x) = \frac{2}{\lambda} \frac{d^3}{dx^3} \int_a^x J_0(\lambda\sqrt{x-t}) f(t) dt.$$

$$63. \int_a^x (x-t)^{1/4} I_{1/2}(\lambda\sqrt{x-t}) y(t) dt = f(x).$$

Решение:

$$y(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi\lambda}} \frac{d^2}{dx^2} \int_a^x \frac{\cos(\lambda\sqrt{x-t})}{\sqrt{x-t}} f(t) dt.$$

$$64. \int_a^x (x-t)^{3/4} I_{3/2}(\lambda\sqrt{x-t}) y(t) dt = f(x).$$

Решение:

$$y(x) = \frac{2^{3/2}}{\sqrt{\pi}\lambda^{3/2}} \frac{d^3}{dx^3} \int_a^x \frac{\cos(\lambda\sqrt{x-t})}{\sqrt{x-t}} f(t) dt.$$

$$65. \int_a^x (x-t)^{n/2} I_n(\lambda\sqrt{x-t}) y(t) dt = f(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Решение:

$$y(x) = \left(\frac{2}{\lambda}\right)^n \frac{d^{n+2}}{dx^{n+2}} \int_a^x J_0(\lambda\sqrt{x-t}) f(t) dt,$$

$$66. \int_a^x (x-t)^{\frac{2n-3}{4}} I_{\frac{2n-3}{2}}(\lambda\sqrt{x-t}) y(t) dt = f(x), \quad n = 1, 2, \dots$$

Решение:

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{2}{\lambda}\right)^{\frac{2n-3}{2}} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x \frac{\cos(\lambda\sqrt{x-t})}{\sqrt{x-t}} f(t) dt,$$

$$67. \int_a^x (x-t)^{-1/4} I_{-1/2}(\lambda\sqrt{x-t}) y(t) dt = f(x).$$

Решение:

$$y(x) = \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi}} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{\cos(\lambda\sqrt{x-t})}{\sqrt{x-t}} f(t) dt.$$

$$68. \int_a^x (x-t)^{\nu/2} I_\nu(\lambda\sqrt{x-t}) y(t) dt = f(x).$$

Решение:

$$y(x) = \left(\frac{2}{\lambda}\right)^{n-2} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x (x-t)^{\frac{n-\nu-2}{2}} J_{n-\nu-2}(\lambda\sqrt{x-t}) f(t) dt,$$

где $-1 < \nu < n-1$, $n = 1, 2, \dots$

Если правая часть уравнения дифференцируема достаточное число раз и выполняются условия $f(a) = f'_x(a) = \dots = f_x^{(n-1)}(a) = 0$, то решение интегрального уравнения можно записать в виде

$$y(x) = \left(\frac{2}{\lambda}\right)^{n-2} \int_a^x (x-t)^{\frac{n-\nu-2}{2}} J_{n-\nu-2}(\lambda\sqrt{x-t}) f_t^{(n)}(t) dt.$$

⊙ Литература: С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев (1987).

$$69. \int_0^x (x^2 - t^2)^{-1/4} I_{-1/2}(\lambda\sqrt{x^2 - t^2}) y(t) dt = f(x).$$

Решение:

$$y(x) = \sqrt{\frac{2\lambda}{\pi}} \frac{d}{dx} \int_0^x t \frac{\cos(\lambda\sqrt{x^2 - t^2})}{\sqrt{x^2 - t^2}} f(t) dt.$$

$$70. \int_x^\infty (t^2 - x^2)^{-1/4} I_{-1/2}(\lambda\sqrt{t^2 - x^2}) y(t) dt = f(x).$$

Решение:

$$y(x) = -\sqrt{\frac{2\lambda}{\pi}} \frac{d}{dx} \int_x^\infty t \frac{\cos(\lambda\sqrt{t^2 - x^2})}{\sqrt{t^2 - x^2}} f(t) dt.$$

$$71. \int_0^x (x^2 - t^2)^{\nu/2} I_\nu(\lambda\sqrt{x^2 - t^2}) y(t) dt = f(x), \quad -1 < \nu < 0.$$

Решение:

$$y(x) = \lambda \frac{d}{dx} \int_0^x t (x^2 - t^2)^{-(\nu+1)/2} J_{-\nu-1}(\lambda\sqrt{x^2 - t^2}) f(t) dt.$$

⊙ Литература: С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев (1987).

$$72. \int_x^\infty (t^2 - x^2)^{\nu/2} I_\nu(\lambda\sqrt{t^2 - x^2}) y(t) dt = f(x), \quad -1 < \nu < 0.$$

Решение:

$$y(x) = -\lambda \frac{d}{dx} \int_x^\infty t (t^2 - x^2)^{-(\nu+1)/2} J_{-\nu-1}(\lambda\sqrt{t^2 - x^2}) f(t) dt.$$

⊙ Литература: С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев (1987).

$$73. \int_a^x [At^k I_\nu(\lambda x) + Bx^s I_\mu(\lambda t)] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.15 при $g_1(x) = AI_\nu(\lambda x)$, $h_1(t) = t^k$, $g_2(x) = Bx^s$, $h_2(t) = I_\mu(\lambda t)$.

$$74. \int_a^x [AI_\nu^2(\lambda x) + BI_\mu^2(\lambda t)] y(t) dt = f(x).$$

Решение при $B \neq -A$:

$$y(x) = \frac{1}{A+B} \frac{d}{dx} \left\{ |I_\nu(\lambda x)|^{-\frac{2A}{A+B}} \int_a^x |I_\nu(\lambda t)|^{-\frac{2B}{A+B}} f'_t(t) dt \right\}.$$

$$75. \int_a^x [AI_\nu^k(\lambda x) + BI_\mu^s(\beta t)] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.6 при $g(x) = AI_\nu^k(\lambda x)$, $h(t) = BI_\mu^s(\beta t)$.

$$76. \int_a^x [K_0(\lambda x) - K_0(\lambda t)] y(t) dt = f(x).$$

Решение: $y(x) = -\frac{d}{dx} \left[\frac{f'_x(x)}{\lambda K_1(\lambda x)} \right]$.

$$77. \int_a^x [K_\nu(\lambda x) - K_\nu(\lambda t)] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.2 при $g(x) = K_\nu(\lambda x)$.

$$78. \int_a^x [AK_\nu(\lambda x) + BK_\nu(\lambda t)] y(t) dt = f(x).$$

Решение при $B \neq -A$:

$$y(x) = \frac{1}{A+B} \frac{d}{dx} \left\{ [K_\nu(\lambda x)]^{-\frac{A}{A+B}} \int_a^x [K_\nu(\lambda t)]^{-\frac{B}{A+B}} f'_t(t) dt \right\}.$$

$$79. \int_a^x [At^k K_\nu(\lambda x) + Bx^s K_\mu(\lambda t)] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.15 при $g_1(x) = AK_\nu(\lambda x)$, $h_1(t) = t^k$, $g_2(x) = Bx^s$, $h_2(t) = K_\mu(\lambda t)$.

$$80. \int_a^x [AI_\nu(\lambda x) K_\mu(\beta t) + BI_\nu(\lambda t) K_\mu(\beta x)] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.15 при $g_1(x) = AI_\nu(\lambda x)$, $h_1(t) = K_\mu(\beta t)$, $g_2(x) = BK_\mu(\beta x)$, $h_2(t) = I_\nu(\lambda t)$.

1.8-3. Ядра уравнений, содержащие присоединенные функции Лежандра

$$81. \int_a^x (x^2 - t^2)^{-\mu/2} P_\nu^\mu\left(\frac{x}{t}\right) y(t) dt = f(x), \quad 0 < a < \infty.$$

Здесь $P_\nu^\mu(x)$ — присоединенная функция Лежандра.

Решение:

$$y(x) = x^{n+\mu-1} \frac{d^n}{dx^n} \left[x^{1-\mu} \int_a^x (x^2 - t^2)^{\frac{n+\mu-2}{2}} t^{-n} P_\nu^{2-n-\mu}\left(\frac{t}{x}\right) f(t) dt \right],$$

где $\mu < 1$, $\nu \geq -\frac{1}{2}$, $n = 1, 2, \dots$

⊙ Литература: С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев (1987, стр. 510).

$$82. \int_a^x (x^2 - t^2)^{-\mu/2} P_\nu^\mu\left(\frac{t}{x}\right) y(t) dt = f(x), \quad 0 < a < \infty.$$

Здесь $P_\nu^\mu(x)$ — присоединенная функция Лежандра.

Решение:

$$y(x) = \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x (x^2 - t^2)^{\frac{n+\mu-2}{2}} P_\nu^{2-n-\mu}\left(\frac{x}{t}\right) f(t) dt,$$

где $\mu < 1$, $\nu \geq -\frac{1}{2}$, $n = 1, 2, \dots$

⊙ Литература: С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев (1987, стр. 510).

$$83. \int_x^b (t^2 - x^2)^{-\mu/2} P_\nu^\mu\left(\frac{x}{t}\right) y(t) dt = f(x), \quad 0 < b < \infty.$$

Здесь $P_\nu^\mu(x)$ — присоединенная функция Лежандра.

Решение:

$$y(x) = (-1)^n x^{n+\mu-1} \frac{d^n}{dx^n} \left[x^{1-\mu} \int_x^b (t^2 - x^2)^{\frac{n+\mu-2}{2}} t^{-n} P_\nu^{2-n-\mu}\left(\frac{t}{x}\right) f(t) dt \right],$$

где $\mu < 1$, $\nu \geq -\frac{1}{2}$, $n = 1, 2, \dots$

⊙ Литература: С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев (1987, стр. 510).

$$84. \int_x^b (t^2 - x^2)^{-\mu/2} P_\nu^\mu\left(\frac{t}{x}\right) y(t) dt = f(x), \quad 0 < b < \infty.$$

Здесь $P_\nu^\mu(x)$ — присоединенная функция Лежандра.

Решение:

$$y(x) = (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} \int_x^b (t^2 - x^2)^{\frac{n+\mu-2}{2}} P_\nu^{2-n-\mu}\left(\frac{x}{t}\right) f(t) dt,$$

где $\mu < 1$, $\nu \geq -\frac{1}{2}$, $n = 1, 2, \dots$

⊙ Литература: С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев (1987, стр. 510).

1.8-4. Ядра уравнений, содержащие гипергеометрические функции

$$85. \int_s^x (x - t)^{b-1} \Phi(a, b; \lambda(x - t)) y(t) dt = f(x).$$

Здесь $\Phi(a, b; z)$ — вырожденная гипергеометрическая функция.

Решение:

$$y(x) = \frac{d^n}{dx^n} \int_s^x \frac{(x - t)^{n-b-1}}{\Gamma(b)\Gamma(n-b)} \Phi(-a, n-b; \lambda(x - t)) f(t) dt,$$

где $0 < b < n$, $n = 1, 2, \dots$

Если правая часть уравнения дифференцируема достаточное число раз и выполняются условия $f(s) = f'_x(s) = \dots = f_x^{(n-1)}(s) = 0$, то решение интегрального уравнения можно записать в виде

$$y(x) = \int_s^x \frac{(x - t)^{n-b-1}}{\Gamma(b)\Gamma(n-b)} \Phi(-a, n-b; \lambda(x - t)) f_t^{(n)}(t) dt.$$

⊙ Литература: С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев (1987, стр. 530).

$$86. \int_s^x (x-t)^{c-1} F\left(a, b, c; 1 - \frac{x}{t}\right) y(t) dt = f(x).$$

Здесь $F(a, b, c; z)$ — гипергеометрическая функция Гаусса.

Решение:

$$y(x) = x^{-a} \frac{d^n}{dx^n} \left\{ x^a \int_s^x \frac{(x-t)^{n-c-1}}{\Gamma(c)\Gamma(n-c)} F\left(-a, n-b, n-c; 1 - \frac{t}{x}\right) f(t) dt \right\},$$

где $0 < c < n, n = 1, 2, \dots$

Если правая часть уравнения дифференцируема достаточное число раз и выполняются условия $f(s) = f'_x(s) = \dots = f_x^{(n-1)}(s) = 0$, то решение интегрального уравнения можно записать в виде

$$y(x) = \int_s^x \frac{(x-t)^{n-c-1}}{\Gamma(c)\Gamma(n-c)} F\left(-a, -b, n-c; 1 - \frac{t}{x}\right) f_t^{(n)}(t) dt.$$

⊙ Литература: С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев (1987, стр. 508).

1.9. Уравнения, ядра которых содержат произвольные функции

1.9-1. Уравнения с вырожденным ядром $K(x, t) = g_1(x)h_1(t) + g_2(x)h_2(t)$

$$1. \int_a^x g(x)h(t)y(t) dt = f(x).$$

$$\text{Решение: } y = \frac{1}{h(x)} \frac{d}{dx} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{1}{g(x)h(x)} f'_x(x) - \frac{g'_x(x)}{g^2(x)h(x)} f(x).$$

$$2. \int_a^x [g(x) - g(t)]y(t) dt = f(x).$$

Считается, что выполнены условия $f(a) = f'_x(a) = 0, f'_x/g'_x \neq \text{const.}$

$$\text{Решение: } y(x) = \frac{d}{dx} \left[\frac{f'_x(x)}{g'_x(x)} \right].$$

$$3. \int_a^x [g(x) - g(t) + b]y(t) dt = f(x).$$

Дифференцируя по x , приходим к уравнению вида 2.9.2:

$$y(x) + \frac{1}{b} g'_x(x) \int_a^x y(t) dt = \frac{1}{b} f'_x(x).$$

Решение:

$$y(x) = \frac{1}{b} f'_x(x) - \frac{1}{b^2} g'_x(x) \int_a^x \exp\left[\frac{g(t) - g(x)}{b}\right] f'_t(t) dt.$$

$$4. \int_a^x [Ag(x) + Bg(t)]y(t) dt = f(x).$$

При $B = -A$ см. уравнение 1.9.2.

Решение при $B \neq -A$:

$$y(x) = \frac{\text{sign } g(x)}{A+B} \frac{d}{dx} \left\{ |g(x)|^{-\frac{A}{A+B}} \int_a^x |g(t)|^{-\frac{B}{A+B}} f'_t(t) dt \right\}.$$

$$5. \int_a^x [Ag(x) + Bg(t) + C]y(t) dt = f(x).$$

При $B = -A$ см. уравнение 1.9.3. Пусть $B \neq -A$ и $(A+B)g(x) + C > 0$.

Решение:

$$y(x) = \frac{d}{dx} \left\{ |(A+B)g(x) + C|^{-\frac{A}{A+B}} \int_a^x |(A+B)g(t) + C|^{-\frac{B}{A+B}} f'_t(t) dt \right\}.$$

$$6. \int_a^x [g(x) + h(t)]y(t) dt = f(x).$$

Решение:

$$y(x) = \frac{d}{dx} \left[\frac{\Phi(x)}{g(x) + h(x)} \int_a^x \frac{f'_t(t) dt}{\Phi(t)} \right], \quad \Phi(x) = \exp \left[\int_a^x \frac{h'_t(t) dt}{g(t) + h(t)} \right].$$

$$7. \int_a^x [g(x) + (x - t)h(x)]y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.15 при $g_1(x) = g(x) + xh(x)$, $h_1(t) = 1$, $g_2(x) = h(x)$, $h_2(t) = -t$.

Решение:

$$y(x) = \frac{d}{dx} \left\{ \Phi(x) \frac{h(x)}{g(x)} \int_a^x \left[\frac{f(t)}{h(t)} \right]'_t \frac{dt}{\Phi(t)} \right\}, \quad \Phi(t) = \exp \left[- \int_a^x \frac{h(t)}{g(t)} dt \right].$$

$$8. \int_a^x [g(t) + (x - t)h(t)]y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.15 при $g_1(x) = x$, $h_1(t) = h(t)$, $g_2(x) = 1$, $h_2(t) = g(t) - h(t)t$.

$$9. \int_a^x [g(x) + (Ax^\lambda + Bt^\mu)h(x)]y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.15 при $g_1(x) = g(x) + Ax^\lambda h(x)$, $h_1(t) = 1$, $g_2(x) = h(x)$, $h_2(t) = Bt^\mu$.

$$10. \int_a^x [g(t) + (Ax^\lambda + Bt^\mu)h(t)]y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.15 при $g_1(x) = Ax^\lambda$, $h_1(t) = h(t)$, $g_2(x) = 1$, $h_2(t) = g(t) + Bt^\mu h(t)$.

$$11. \int_a^x [g(x)h(t) - h(x)g(t)]y(t) dt = f(x), \quad f(a) = f'_x(a) = 0.$$

При $g = \text{const}$ или $h = \text{const}$ см. уравнение 1.9.2.

Решение:

$$y(x) = \frac{1}{h} \frac{d}{dx} \left[\frac{(f/h)'_x}{(g/h)'_x} \right], \quad \text{где } f = f(x), \quad g = g(x), \quad h = h(x).$$

Здесь $Af + Bg + Ch \neq 0$, где A , B и C — некоторые постоянные.

$$12. \int_a^x [Ag(x)h(t) + Bg(t)h(x)]y(t) dt = f(x).$$

При $B = -A$ см. уравнение 1.9.11.

Решение при $B \neq -A$:

$$y(x) = \frac{1}{(A+B)h(x)} \frac{d}{dx} \left\{ \left[\frac{h(x)}{g(x)} \right]^{\frac{A}{A+B}} \int_a^x \left[\frac{h(t)}{g(t)} \right]^{\frac{B}{A+B}} \frac{d}{dt} \left[\frac{f(t)}{h(t)} \right] dt \right\}.$$

$$13. \int_a^x \{1 + [g(t) - g(x)]h(x)\}y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.15 при $g_1(x) = 1 - g(x)h(x)$, $h_1(t) = 1$, $g_2(x) = h(x)$, $h_2(t) = g(t)$.

Решение:

$$y(x) = \frac{d}{dx} \left\{ h(x)\Phi(x) \int_a^x \left[\frac{f(t)}{h(t)} \right]'_t \frac{dt}{\Phi(t)} \right\}, \quad \Phi(x) = \exp \left[\int_a^x g'_t(t)h(t) dt \right].$$

$$14. \int_a^x \{e^{-\lambda(x-t)} + [e^{\lambda x} g(t) - e^{\lambda t} g(x)] h(x)\} y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.15 при $g_1(x) = e^{\lambda x} h(x)$, $h_1(t) = g(t)$, $g_2(x) = e^{-\lambda x} - g(x)h(x)$, $h_2(t) = e^{\lambda t}$.

$$15. \int_a^x [g_1(x)h_1(t) + g_2(x)h_2(t)] y(t) dt = f(x).$$

При $g_2/g_1 = \text{const}$ или $h_2/h_1 = \text{const}$ см. уравнение 1.9.1.

1°. Решение при $g_1(x)h_1(x) + g_2(x)h_2(x) \neq 0$ и $f(x) \neq \text{const}$ $g_2(x)$:

$$y(x) = \frac{1}{h_1(x)} \frac{d}{dx} \left\{ \frac{g_2(x)h_1(x)\Phi(x)}{g_1(x)h_1(x) + g_2(x)h_2(x)} \int_a^x \left[\frac{f(t)}{g_2(t)} \right]'_t \frac{dt}{\Phi(t)} \right\}, \quad (1)$$

где

$$\Phi(x) = \exp \left\{ \int_a^x \left[\frac{h_2(t)}{h_1(t)} \right]'_t \frac{g_2(t)h_1(t) dt}{g_1(t)h_1(t) + g_2(t)h_2(t)} \right\}. \quad (2)$$

Если $f(x) \equiv \text{const}$ $g_2(x)$, то решение уравнения дается формулами (1) и (2), в которых индекс 1 заменяется индексом 2 и наоборот.

2°. Решение при $g_1(x)h_1(x) + g_2(x)h_2(x) \equiv 0$:

$$y(x) = \frac{1}{h_1} \frac{d}{dx} \left[\frac{(f/g_2)'_x}{(g_1/g_2)'_x} \right] = -\frac{1}{h_1} \frac{d}{dx} \left[\frac{(f/g_2)'_x}{(h_2/h_1)'_x} \right],$$

где $f = f(x)$, $g_2 = g_2(x)$, $h_1 = h_1(x)$, $h_2 = h_2(x)$.

1.9-2. Уравнения с разностным ядром: $K(x, t) = K(x - t)$

$$16. \int_a^x K(x - t) y(t) dt = f(x).$$

1°. Пусть $K(0) = 1$ и $f(a) = 0$. Дифференцируя уравнение по x , приходим к уравнению Вольтерра второго рода

$$y(x) + \int_a^x K'_x(x - t) y(t) dt = f'_x(x).$$

Решение этого уравнения можно представить в виде

$$y(x) = f'_x(x) + \int_a^x R(x - t) f'_t(t) dt. \quad (1)$$

Здесь резольвента $R(x)$ определяется через ядро исходного уравнения $K(x)$ по формуле

$$R(x) = \mathfrak{L}^{-1} \left[\frac{1}{p\tilde{K}(p)} - 1 \right], \quad \tilde{K}(p) = \mathfrak{L}[K(x)],$$

где \mathfrak{L} и \mathfrak{L}^{-1} — прямое и обратное преобразования Лапласа:

$$\tilde{K}(p) = \mathfrak{L}[K(x)] = \int_0^\infty e^{-px} K(x) dx, \quad R(x) = \mathfrak{L}^{-1}[\tilde{R}(p)] = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{px} \tilde{R}(p) dp.$$

2°. Пусть $K(x)$ имеет интегрируемую степенную особенность при $x = 0$. Обозначим через $w = w(x)$ решение вспомогательного более простого (чем исходное) уравнения при $a = 0$ и постоянной правой части $f \equiv 1$:

$$\int_0^x K(x - t) w(t) dt = 1. \quad (2)$$

Тогда решение исходного интегрального уравнения при произвольной правой части выражается через решение вспомогательного уравнения (2) по формуле

$$y(x) = \frac{d}{dx} \int_a^x w(x - t) f(t) dt = f(a)w(x - a) + \int_a^x w(x - t) f'_t(t) dt.$$

$$17. \int_{-\infty}^x K(x-t)y(t) dt = Ax^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Частный случай уравнения 1.9.19 при $\lambda = 0$.

1°. Решение при $n = 0$:

$$y(x) = \frac{A}{B}, \quad B = \int_0^\infty K(z) dz.$$

2°. Решение при $n = 1$:

$$y(x) = \frac{A}{B}x + \frac{AC}{B^2}, \quad B = \int_0^\infty K(z) dz, \quad C = \int_0^\infty zK(z) dz.$$

3°. Решение при $n = 2$:

$$y_2(x) = \frac{A}{B}x^2 + 2\frac{AC}{B^2}x + 2\frac{AC^2}{B^3} - \frac{AD}{B^2},$$

$$B = \int_0^\infty K(z) dz, \quad C = \int_0^\infty zK(z) dz, \quad D = \int_0^\infty z^2K(z) dz.$$

4°. Решение при $n = 3, 4, \dots$ определяется по формулам

$$y_n(x) = A \left\{ \frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} \left[\frac{e^{\lambda x}}{B(\lambda)} \right] \right\}_{\lambda=0}, \quad B(\lambda) = \int_0^\infty K(z)e^{-\lambda z} dz.$$

$$18. \int_{-\infty}^x K(x-t)y(t) dt = Ae^{\lambda x}.$$

Решение:

$$y(x) = \frac{A}{B}e^{\lambda x}, \quad B = \int_0^\infty K(z)e^{-\lambda z} dz = \mathfrak{L}\{K(z), \lambda\}.$$

$$19. \int_{-\infty}^x K(x-t)y(t) dt = Ax^n e^{\lambda x}, \quad n = 1, 2, \dots$$

1°. Решение при $n = 1$:

$$y_1(x) = \frac{A}{B}xe^{\lambda x} + \frac{AC}{B^2}e^{\lambda x},$$

$$B = \int_0^\infty K(z)e^{-\lambda z} dz, \quad C = \int_0^\infty zK(z)e^{-\lambda z} dz.$$

Коэффициенты B и C удобно вычислять, используя таблицы преобразований Лапласа, по формулам $B = \mathfrak{L}\{K(z), \lambda\}$, $C = \mathfrak{L}\{zK(z), \lambda\}$.

2°. Решение при $n = 2$:

$$y_2(x) = \frac{A}{B}x^2 e^{\lambda x} + 2\frac{AC}{B^2}xe^{\lambda x} + \left(2\frac{AC^2}{B^3} - \frac{AD}{B^2}\right)e^{\lambda x},$$

$$B = \int_0^\infty K(z)e^{-\lambda z} dz, \quad C = \int_0^\infty zK(z)e^{-\lambda z} dz, \quad D = \int_0^\infty z^2K(z)e^{-\lambda z} dz.$$

3°. Решение при $n = 3, 4, \dots$:

$$y_n(x) = \frac{\partial}{\partial \lambda} y_{n-1}(x) = A \frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} \left[\frac{e^{\lambda x}}{B(\lambda)} \right], \quad B(\lambda) = \int_0^\infty K(z)e^{-\lambda z} dz.$$

$$20. \int_{-\infty}^x K(x-t)y(t) dt = A \operatorname{ch}(\lambda x).$$

Решение:

$$y(x) = \frac{A}{2B_-}e^{\lambda x} + \frac{A}{2B_+}e^{-\lambda x} = \frac{1}{2} \left(\frac{A}{B_-} + \frac{A}{B_+} \right) \operatorname{ch}(\lambda x) + \frac{1}{2} \left(\frac{A}{B_-} - \frac{A}{B_+} \right) \operatorname{sh}(\lambda x),$$

$$B_- = \int_0^\infty K(z)e^{-\lambda z} dz, \quad B_+ = \int_0^\infty K(z)e^{\lambda z} dz.$$

$$21. \int_{-\infty}^x K(x-t)y(t) dt = A \operatorname{sh}(\lambda x).$$

Решение:

$$y(x) = \frac{A}{2B_-} e^{\lambda x} - \frac{A}{2B_+} e^{-\lambda x} = \frac{1}{2} \left(\frac{A}{B_-} - \frac{A}{B_+} \right) \operatorname{ch}(\lambda x) + \frac{1}{2} \left(\frac{A}{B_-} + \frac{A}{B_+} \right) \operatorname{sh}(\lambda x),$$

$$B_- = \int_0^\infty K(z) e^{-\lambda z} dz, \quad B_+ = \int_0^\infty K(z) e^{\lambda z} dz.$$

$$22. \int_{-\infty}^x K(x-t)y(t) dt = A \cos(\lambda x).$$

Решение:

$$y(x) = \frac{A}{B_c^2 + B_s^2} [B_c \cos(\lambda x) - B_s \sin(\lambda x)],$$

$$B_c = \int_0^\infty K(z) \cos(\lambda z) dz, \quad B_s = \int_0^\infty K(z) \sin(\lambda z) dz.$$

$$23. \int_{-\infty}^x K(x-t)y(t) dt = A \sin(\lambda x).$$

Решение:

$$y(x) = \frac{A}{B_c^2 + B_s^2} [B_c \sin(\lambda x) + B_s \cos(\lambda x)],$$

$$B_c = \int_0^\infty K(z) \cos(\lambda z) dz, \quad B_s = \int_0^\infty K(z) \sin(\lambda z) dz.$$

$$24. \int_{-\infty}^x K(x-t)y(t) dt = A e^{\mu x} \cos(\lambda x).$$

Решение:

$$y(x) = \frac{A}{B_c^2 + B_s^2} e^{\mu x} [B_c \cos(\lambda x) - B_s \sin(\lambda x)],$$

$$B_c = \int_0^\infty K(z) e^{-\mu z} \cos(\lambda z) dz, \quad B_s = \int_0^\infty K(z) e^{-\mu z} \sin(\lambda z) dz.$$

$$25. \int_{-\infty}^x K(x-t)y(t) dt = A e^{\mu x} \sin(\lambda x).$$

Решение:

$$y(x) = \frac{A}{B_c^2 + B_s^2} e^{\mu x} [B_c \sin(\lambda x) + B_s \cos(\lambda x)],$$

$$B_c = \int_0^\infty K(z) e^{-\mu z} \cos(\lambda z) dz, \quad B_s = \int_0^\infty K(z) e^{-\mu z} \sin(\lambda z) dz.$$

$$26. \int_{-\infty}^x K(x-t)y(t) dt = f(x).$$

1°. Для полиномиальной правой части уравнения $f(x) = \sum_{k=0}^n A_k x^k$ решение имеет вид

$$y(x) = \sum_{k=0}^n B_k x^k,$$

где постоянные B_k определяются методом неопределенных коэффициентов. Решение также можно получить по формуле, приведенной в 1.9.17 (см. п. 4°).

2°. Для правой части $f(x) = e^{\lambda x} \sum_{k=0}^n A_k x^k$ решение уравнения имеет вид

$$y(x) = e^{\lambda x} \sum_{k=0}^n B_k x^k,$$

где постоянные B_k определяются методом неопределенных коэффициентов. Решение также можно получить по формуле, приведенной в 1.9.19 (см. п. 3°).

3°. Для правой части $f(x) = \sum_{k=0}^n A_k \exp(\lambda_k x)$ решение уравнения имеет вид

$$y(x) = \sum_{k=0}^n \frac{A_k}{B_k} \exp(\lambda_k x), \quad B_k = \int_0^\infty K(z) \exp(-\lambda_k z) dz.$$

4°. Для правой части $f(x) = \cos(\lambda x) \sum_{k=0}^n A_k x^k$ решение уравнения имеет вид

$$y(x) = \cos(\lambda x) \sum_{k=0}^n B_k x^k + \sin(\lambda x) \sum_{k=0}^n C_k x^k,$$

где постоянные B_k и C_k определяются методом неопределенных коэффициентов.

5°. Для правой части $f(x) = \sin(\lambda x) \sum_{k=0}^n A_k x^k$ решение уравнения имеет вид

$$y(x) = \cos(\lambda x) \sum_{k=0}^n B_k x^k + \sin(\lambda x) \sum_{k=0}^n C_k x^k,$$

где постоянные B_k и C_k определяются методом неопределенных коэффициентов.

6°. Для правой части $f(x) = \sum_{k=0}^n A_k \cos(\lambda_k x)$ решение уравнения имеет вид

$$y(x) = \sum_{k=0}^n \frac{A_k}{B_{ck}^2 + B_{sk}^2} [B_{ck} \cos(\lambda_k x) - B_{sk} \sin(\lambda_k x)],$$

$$B_{ck} = \int_0^\infty K(z) \cos(\lambda_k z) dz, \quad B_{sk} = \int_0^\infty K(z) \sin(\lambda_k z) dz.$$

7°. Для правой части $f(x) = \sum_{k=0}^n A_k \sin(\lambda_k x)$ решение уравнения имеет вид

$$y(x) = \sum_{k=0}^n \frac{A_k}{B_{ck}^2 + B_{sk}^2} [B_{ck} \sin(\lambda_k x) + B_{sk} \cos(\lambda_k x)],$$

$$B_{ck} = \int_0^\infty K(z) \cos(\lambda_k z) dz, \quad B_{sk} = \int_0^\infty K(z) \sin(\lambda_k z) dz.$$

$$27. \int_x^\infty K(x-t)y(t) dt = Ax^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Частный случай уравнения 1.9.29 при $\lambda = 0$.

1°. Решение при $n = 0$:

$$y(x) = \frac{A}{B}, \quad B = \int_0^\infty K(-z) dz.$$

2°. Решение при $n = 1$:

$$y(x) = \frac{A}{B}x - \frac{AC}{B^2}, \quad B = \int_0^\infty K(-z) dz, \quad C = \int_0^\infty zK(-z) dz.$$

3°. Решение при $n = 2$:

$$y_2(x) = \frac{A}{B}x^2 - 2\frac{AC}{B^2}x + 2\frac{AC^2}{B^3} - \frac{AD}{B^2},$$

$$B = \int_0^\infty K(-z) dz, \quad C = \int_0^\infty zK(-z) dz, \quad D = \int_0^\infty z^2K(-z) dz.$$

4°. Решение при $n = 3, 4, \dots$ определяется по формулам

$$y_n(x) = A \left\{ \frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} \left[\frac{e^{\lambda x}}{B(\lambda)} \right] \right\}_{\lambda=0}, \quad B(\lambda) = \int_0^\infty K(-z) e^{\lambda z} dz.$$

28. $\int_x^\infty K(x-t)y(t) dt = A e^{\lambda x}.$

Решение:

$$y(x) = \frac{A}{B} e^{\lambda x}, \quad B = \int_0^\infty K(-z) e^{\lambda z} dz.$$

Выражение для коэффициента B представляет собой преобразование Лапласа с параметром $p = -\lambda$ от функции $K(-z)$ и может вычисляться с помощью таблиц преобразований Лапласа, приведенных, например, в книгах: Г. Бейтмен, А. Эрдейи (1969), В. А. Диткин, А. П. Прудников (1965, 1974).

29. $\int_x^\infty K(x-t)y(t) dt = A x^n e^{\lambda x}, \quad n = 1, 2, \dots$

1°. Решение при $n = 1$:

$$y_1(x) = \frac{A}{B} x e^{\lambda x} - \frac{AC}{B^2} e^{\lambda x},$$

$$B = \int_0^\infty K(-z) e^{\lambda z} dz, \quad C = \int_0^\infty z K(-z) e^{\lambda z} dz.$$

Коэффициенты B и C удобно вычислять, используя таблицы преобразований Лапласа с параметром $p = -\lambda$.

2°. Решение при $n = 2$:

$$y_2(x) = \frac{A}{B} x^2 e^{\lambda x} - 2 \frac{AC}{B^2} x e^{\lambda x} + \left(2 \frac{AC^2}{B^3} - \frac{AD}{B^2} \right) e^{\lambda x},$$

$$B = \int_0^\infty K(-z) e^{\lambda z} dz, \quad C = \int_0^\infty z K(-z) e^{\lambda z} dz, \quad D = \int_0^\infty z^2 K(-z) e^{\lambda z} dz.$$

3°. Решение при $n = 3, 4, \dots$ определяется по формулам

$$y_n(x) = \frac{\partial}{\partial \lambda} y_{n-1}(x) = A \frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} \left[\frac{e^{\lambda x}}{B(\lambda)} \right], \quad B(\lambda) = \int_0^\infty K(-z) e^{\lambda z} dz.$$

30. $\int_x^\infty K(x-t)y(t) dt = A \operatorname{ch}(\lambda x).$

Решение:

$$y(x) = \frac{A}{2B_+} e^{\lambda x} + \frac{A}{2B_-} e^{-\lambda x} = \frac{1}{2} \left(\frac{A}{B_+} + \frac{A}{B_-} \right) \operatorname{ch}(\lambda x) + \frac{1}{2} \left(\frac{A}{B_+} - \frac{A}{B_-} \right) \operatorname{sh}(\lambda x),$$

$$B_+ = \int_0^\infty K(-z) e^{\lambda z} dz, \quad B_- = \int_0^\infty K(-z) e^{-\lambda z} dz.$$

31. $\int_x^\infty K(x-t)y(t) dt = A \operatorname{sh}(\lambda x).$

Решение:

$$y(x) = \frac{A}{2B_+} e^{\lambda x} - \frac{A}{2B_-} e^{-\lambda x} = \frac{1}{2} \left(\frac{A}{B_+} - \frac{A}{B_-} \right) \operatorname{ch}(\lambda x) + \frac{1}{2} \left(\frac{A}{B_+} + \frac{A}{B_-} \right) \operatorname{sh}(\lambda x),$$

$$B_+ = \int_0^\infty K(-z) e^{\lambda z} dz, \quad B_- = \int_0^\infty K(-z) e^{-\lambda z} dz.$$

32. $\int_x^\infty K(x-t)y(t) dt = A \cos(\lambda x).$

Решение:

$$y(x) = \frac{A}{B_c^2 + B_s^2} [B_c \cos(\lambda x) + B_s \sin(\lambda x)],$$

$$B_c = \int_0^\infty K(-z) \cos(\lambda z) dz, \quad B_s = \int_0^\infty K(-z) \sin(\lambda z) dz.$$

$$33. \int_x^\infty K(x-t)y(t) dt = A \sin(\lambda x).$$

Решение:

$$y(x) = \frac{A}{B_c^2 + B_s^2} [B_c \sin(\lambda x) - B_s \cos(\lambda x)],$$

$$B_c = \int_0^\infty K(-z) \cos(\lambda z) dz, \quad B_s = \int_0^\infty K(-z) \sin(\lambda z) dz.$$

$$34. \int_x^\infty K(x-t)y(t) dt = A e^{\mu x} \cos(\lambda x).$$

Решение:

$$y(x) = \frac{A}{B_c^2 + B_s^2} e^{\mu x} [B_c \cos(\lambda x) + B_s \sin(\lambda x)],$$

$$B_c = \int_0^\infty K(-z) e^{\mu z} \cos(\lambda z) dz, \quad B_s = \int_0^\infty K(-z) e^{\mu z} \sin(\lambda z) dz.$$

$$35. \int_x^\infty K(x-t)y(t) dt = A e^{\mu x} \sin(\lambda x).$$

Решение:

$$y(x) = \frac{A}{B_c^2 + B_s^2} e^{\mu x} [B_c \sin(\lambda x) - B_s \cos(\lambda x)],$$

$$B_c = \int_0^\infty K(-z) e^{\mu z} \cos(\lambda z) dz, \quad B_s = \int_0^\infty K(-z) e^{\mu z} \sin(\lambda z) dz.$$

$$36. \int_x^\infty K(x-t)y(t) dt = f(x).$$

1°. Для полиномиальной правой части уравнения $f(x) = \sum_{k=0}^n A_k x^k$ решение имеет вид

$$y(x) = \sum_{k=0}^n B_k x^k,$$

где постоянные B_k определяются методом неопределенных коэффициентов. Решение также можно получить по формуле, приведенной в 1.9.27 (см. п. 4°).

2°. Для правой части $f(x) = e^{\lambda x} \sum_{k=0}^n A_k x^k$ решение уравнения имеет вид

$$y(x) = e^{\lambda x} \sum_{k=0}^n B_k x^k,$$

где постоянные B_k определяются методом неопределенных коэффициентов. Решение также можно получить по формуле, приведенной в 1.9.29 (см. п. 3°).

3°. Для правой части $f(x) = \sum_{k=0}^n A_k \exp(\lambda_k x)$ решение уравнения имеет вид

$$y(x) = \sum_{k=0}^n \frac{A_k}{B_k} \exp(\lambda_k x), \quad B_k = \int_0^\infty K(-z) \exp(\lambda_k z) dz.$$

4°. Для правой части $f(x) = \cos(\lambda x) \sum_{k=0}^n A_k x^k$ решение уравнения имеет вид

$$y(x) = \cos(\lambda x) \sum_{k=0}^n B_k x^k + \sin(\lambda x) \sum_{k=0}^n C_k x^k,$$

где постоянные B_k и C_k определяются методом неопределенных коэффициентов.

5°. Для правой части $f(x) = \sin(\lambda x) \sum_{k=0}^n A_k x^k$ решение уравнения имеет вид

$$y(x) = \cos(\lambda x) \sum_{k=0}^n B_k x^k + \sin(\lambda x) \sum_{k=0}^n C_k x^k,$$

где постоянные B_k и C_k определяются методом неопределенных коэффициентов.

6°. Для правой части $f(x) = \sum_{k=0}^n A_k \cos(\lambda_k x)$ решение уравнения имеет вид

$$y(x) = \sum_{k=0}^n \frac{A_k}{B_{ck}^2 + B_{sk}^2} [B_{ck} \cos(\lambda_k x) + B_{sk} \sin(\lambda_k x)],$$

$$B_{ck} = \int_0^\infty K(-z) \cos(\lambda_k z) dz, \quad B_{sk} = \int_0^\infty K(-z) \sin(\lambda_k z) dz.$$

7°. Для правой части $f(x) = \sum_{k=0}^n A_k \sin(\lambda_k x)$ решение уравнения имеет вид

$$y(x) = \sum_{k=0}^n \frac{A_k}{B_{ck}^2 + B_{sk}^2} [B_{ck} \sin(\lambda_k x) - B_{sk} \cos(\lambda_k x)],$$

$$B_{ck} = \int_0^\infty K(-z) \cos(\lambda_k z) dz, \quad B_{sk} = \int_0^\infty K(-z) \sin(\lambda_k z) dz.$$

8°. Для произвольной правой части $f = f(x)$ решение интегрального уравнения можно определять по формуле

$$y(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\tilde{f}(p)}{k(-p)} e^{px} dp,$$

$$\tilde{f}(p) = \int_0^\infty f(x) e^{-px} dx, \quad \tilde{k}(-p) = \int_0^\infty K(-z) e^{pz} dz.$$

Для вычисления $\tilde{f}(p)$, $\tilde{k}(-p)$ удобно использовать таблицы преобразований Лапласа, а для определения $y(x)$ — таблицы обратных преобразований Лапласа.

1.9-3. Другие уравнения

$$37. \int_a^x [g(x) - g(t)]^n y(t) dt = f(x), \quad n = 1, 2, \dots$$

Считается, что правая часть интегрального уравнения удовлетворяет следующим условиям:

$$f(a) = f'_x(a) = \dots = f_x^{(n)}(a) = 0.$$

$$\text{Решение: } y(x) = \frac{1}{n!} g'_x(x) \left(\frac{1}{g'_x(x)} \frac{d}{dx} \right)^{n+1} f(x).$$

$$38. \int_a^x \sqrt{g(x) - g(t)} y(t) dt = f(x), \quad f(a) = 0.$$

Решение:

$$y(x) = \frac{2}{\pi} g'_x(x) \left(\frac{1}{g'_x(x)} \frac{d}{dx} \right)^2 \int_a^x \frac{f(t) g'_t(t) dt}{\sqrt{g(x) - g(t)}}.$$

$$39. \int_a^x \frac{y(t) dt}{\sqrt{g(x) - g(t)}} = f(x), \quad g'_x > 0.$$

Решение:

$$y(x) = \frac{1}{\pi} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{f(t) g'_t(t) dt}{\sqrt{g(x) - g(t)}}.$$

$$40. \int_a^x \frac{e^{\lambda(x-t)} y(t) dt}{\sqrt{g(x) - g(t)}} = f(x), \quad g'_x > 0.$$

Решение:

$$y(x) = \frac{1}{\pi} e^{\lambda x} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{e^{-\lambda t} f(t) g'_t(t)}{\sqrt{g(x) - g(t)}} dt.$$

$$41. \int_a^x [g(x) - g(t)]^\lambda y(t) dt = f(x), \quad f(a) = 0, \quad 0 < \lambda < 1.$$

Решение:

$$y(x) = k g'_x(x) \left(\frac{1}{g'_x(x)} \frac{d}{dx} \right)^2 \int_a^x \frac{g'_t(t) f(t) dt}{[g(x) - g(t)]^\lambda}, \quad k = \frac{\sin(\pi\lambda)}{\pi\lambda}.$$

$$42. \int_a^x \frac{h(t) y(t) dt}{[g(x) - g(t)]^\lambda} = f(x), \quad g'_x > 0, \quad 0 < \lambda < 1.$$

Решение:

$$y(x) = \frac{\sin(\pi\lambda)}{\pi h(x)} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{f(t) g'_t(t) dt}{[g(x) - g(t)]^{1-\lambda}}.$$

$$43. \int_0^x K\left(\frac{t}{x}\right) y(t) dt = Ax^\lambda + Bx^\mu.$$

Решение:

$$y(x) = \frac{A}{I_\lambda} x^{\lambda-1} + \frac{B}{I_\mu} x^{\mu-1}, \quad I_\lambda = \int_0^1 K(z) z^{\lambda-1} dz, \quad I_\mu = \int_0^1 K(z) z^{\mu-1} dz.$$

$$44. \int_0^x K\left(\frac{t}{x}\right) y(t) dt = P_n(x), \quad P_n(x) = x^\lambda \sum_{m=0}^n A_m x^m.$$

Решение:

$$y(x) = x^\lambda \sum_{m=0}^n \frac{A_m}{I_m} x^{m-1}, \quad I_m = \int_0^1 K(z) z^{\lambda+m-1} dz.$$

Предполагается, что существует интеграл I_0 .

$$45. \int_a^x \{g_1(x)[h_1(t) - h_1(x)] + g_2(x)[h_2(t) - h_2(x)]\} y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.50 при $g_3(x) = -g_1(x)h_1(x) - g_2(x)h_2(x)$, $h_3(t) = 1$.

Замена $Y(x) = \int_a^x y(t) dt$ с последующим интегрированием по частям приводит к интегральному уравнению вида 1.9.15:

$$\int_a^x \left\{ g_1(x)[h_1(t)]'_t + g_2(x)[h_2(t)]'_t \right\} Y(t) dt = -f(x).$$

$$46. \int_a^x \{g_1(x)[h_1(t) - e^{\lambda(x-t)} h_1(x)] + g_2(x)[h_2(t) - e^{\lambda(x-t)} h_2(x)]\} y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.50 при $g_3(x) = -e^{\lambda x} [g_1(x)h_1(x) + g_2(x)h_2(x)]$, $h_3(t) = e^{-\lambda t}$.

Замена $Y(x) = \int_a^x e^{-\lambda t} y(t) dt$ с последующим интегрированием по частям приводит к интегральному уравнению вида 1.9.15:

$$\int_a^x \left\{ g_1(x)[e^{\lambda t} h_1(t)]'_t + g_2(x)[e^{\lambda t} h_2(t)]'_t \right\} Y(t) dt = -f(x).$$

$$47. \int_a^x [Ag^\lambda(x)g^\mu(t) + Bg^{\lambda+\beta}(x)g^{\mu-\beta}(t) - (A+B)g^{\lambda+\gamma}(x)g^{\mu-\gamma}(t)] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.50 при $g_1(x) = Ag^\lambda(x)$, $h_1(t) = g^\mu(t)$, $g_2(x) = Bg^{\lambda+\beta}(x)$, $h_2(t) = g^{\mu-\beta}(t)$, $g_3(x) = -(A+B)g^{\lambda+\gamma}(x)$, $h_3(t) = g^{\mu-\gamma}(t)$.

$$48. \int_a^x [Ag^\lambda(x)h(x)g^\mu(t) + Bg^{\lambda+\beta}(x)h(x)g^{\mu-\beta}(t) - (A+B)g^{\lambda+\gamma}(x)g^{\mu-\gamma}(t)h(t)]y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.50 при $g_1(x) = Ag^\lambda(x)h(x)$, $h_1(t) = g^\mu(t)$, $g_2(x) = Bg^{\lambda+\beta}(x)h(x)$, $h_2(t) = g^{\mu-\beta}(t)$, $g_3(x) = -(A+B)g^{\lambda+\gamma}(x)$, $h_3(t) = g^{\mu-\gamma}(t)h(t)$.

$$49. \int_a^x [Ag^\lambda(x)h(x)g^\mu(t) + Bg^{\lambda+\beta}(x)h(t)g^{\mu-\beta}(t) - (A+B)g^{\lambda+\gamma}(x)g^{\mu-\gamma}(t)h(t)]y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 1.9.50 при $g_1(x) = Ag^\lambda(x)h(x)$, $h_1(t) = g^\mu(t)$, $g_2(x) = Bg^{\lambda+\beta}(x)$, $h_2(t) = g^{\mu-\beta}(t)h(t)$, $g_3(x) = -(A+B)g^{\lambda+\gamma}(x)$, $h_3(t) = g^{\mu-\gamma}(t)h(t)$.

$$50. \int_a^x [g_1(x)h_1(t) + g_2(x)h_2(t) + g_3(x)h_3(t)]y(t) dt = f(x),$$

где $g_1(x)h_1(x) + g_2(x)h_2(x) + g_3(x)h_3(x) \equiv 0$.

Замена $Y(x) = \int_a^x h_3(t)y(t) dt$ с последующим интегрированием по частям приводит к интегральному уравнению вида 1.9.15:

$$\int_a^x \left\{ g_1(x) \left[\frac{h_1(t)}{h_3(t)} \right]' + g_2(x) \left[\frac{h_2(t)}{h_3(t)} \right]' \right\} Y(t) dt = -f(x).$$

$$51. \int_{-\infty}^x Q(x-t)e^{\alpha t}y(\xi) dt = Ae^{p x}, \quad \xi = e^{\beta t}g(x-t).$$

Решение:

$$y(\xi) = \frac{A}{q} \xi^{\frac{p-\alpha}{\beta}}, \quad q = \int_0^\infty Q(z)[g(z)]^{\frac{p-\alpha}{\beta}} e^{-p z} dz.$$

1.10. Некоторые формулы и преобразования

1. Пусть решение интегрального уравнения

$$\int_a^x K(x,t)y(t) dt = f(x) \quad (1)$$

имеет вид

$$y(x) = \mathcal{F}[f(x)], \quad (2)$$

где \mathcal{F} — некоторый линейный оператор (который образован с помощью операций интегрирования и дифференцирования). Тогда решение более сложного интегрального уравнения

$$\int_a^x K(x,t)g(x)h(t)y(t) dt = f(x) \quad (3)$$

дается формулой

$$y(x) = \frac{1}{h(x)} \mathcal{F} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]. \quad (4)$$

Ниже приведены формулы для определения решений интегральных уравнений вида (3) для некоторых конкретных функций $g(x)$ и $h(t)$. Во всех случаях считается, что решение уравнения (1) известно и определяется выражением (2).

1) Решение уравнения

$$\int_a^x K(x,t)(x/t)^\lambda y(t) dt = f(x)$$

дается формулой

$$y(x) = x^\lambda \mathcal{F}[x^{-\lambda} f(x)].$$

2) Решение уравнения

$$\int_a^x K(x,t)e^{\lambda(x-t)}y(t) dt = f(x)$$

дается формулой

$$y(x) = e^{\lambda x} \mathcal{F}[e^{-\lambda x} f(x)].$$

2. Пусть решение интегрального уравнения (1) имеет вид

$$y(x) = L_1\left(x, \frac{d}{dx}\right)f(x) + L_2\left(x, \frac{d}{dx}\right)\int_a^x R(x, t)f(t) dt, \quad (5)$$

где L_1 и L_2 — некоторые линейные дифференциальные операторы.

Тогда решение более сложного интегрального уравнения

$$\int_a^x K(\varphi(x), \varphi(t))y(t) dt = f(x), \quad (6)$$

где $\varphi(x)$ — произвольная монотонная (дифференцируемая достаточное число раз, $\varphi'_x > 0$) функция определяется по формуле

$$\begin{aligned} y(x) = & \varphi'_x(x)L_1\left(\varphi(x), \frac{1}{\varphi'_x(x)}\frac{d}{dx}\right)f(x) + \\ & + \varphi'_x(x)L_2\left(\varphi(x), \frac{1}{\varphi'_x(x)}\frac{d}{dx}\right)\int_a^x R(\varphi(x), \varphi(t))\varphi'_t(t)f(t) dt. \end{aligned}$$

Ниже приведены формулы для определения решений интегральных уравнений вида (6) для некоторых конкретных функций $\varphi(x)$. Во всех случаях считается, что решение уравнения (1) известно и дается выражением (5).

1) При $\varphi(x) = x^\lambda$ имеем

$$y(x) = \lambda x^{\lambda-1}L_1\left(x^\lambda, \frac{1}{\lambda x^{\lambda-1}}\frac{d}{dx}\right)f(x) + \lambda^2 x^{\lambda-1}L_2\left(x^\lambda, \frac{1}{\lambda x^{\lambda-1}}\frac{d}{dx}\right)\int_a^x R(x^\lambda, t^\lambda)t^{\lambda-1}f(t) dt.$$

2) При $\varphi(x) = e^{\lambda x}$ имеем

$$y(x) = \lambda e^{\lambda x}L_1\left(e^{\lambda x}, \frac{1}{\lambda e^{\lambda x}}\frac{d}{dx}\right)f(x) + \lambda^2 e^{\lambda x}L_2\left(e^{\lambda x}, \frac{1}{\lambda e^{\lambda x}}\frac{d}{dx}\right)\int_a^x R(e^{\lambda x}, e^{\lambda t})e^{\lambda t}f(t) dt.$$

3) При $\varphi(x) = \ln(\lambda x)$ имеем

$$y(x) = \frac{1}{x}L_1\left(\ln(\lambda x), x\frac{d}{dx}\right)f(x) + \frac{1}{x}L_2\left(\ln(\lambda x), x\frac{d}{dx}\right)\int_a^x \frac{1}{t}R(\ln(\lambda x), \ln(\lambda t))f(t) dt.$$

4) При $\varphi(x) = \cos(\lambda x)$ имеем

$$\begin{aligned} y(x) = & -\lambda \sin(\lambda x)L_1\left(\cos(\lambda x), \frac{-1}{\lambda \sin(\lambda x)}\frac{d}{dx}\right)f(x) + \\ & + \lambda^2 \sin(\lambda x)L_2\left(\cos(\lambda x), \frac{-1}{\lambda \sin(\lambda x)}\frac{d}{dx}\right)\int_a^x R(\cos(\lambda x), \cos(\lambda t))\sin(\lambda t)f(t) dt. \end{aligned}$$

5) При $\varphi(x) = \sin(\lambda x)$ имеем

$$\begin{aligned} y(x) = & \lambda \cos(\lambda x)L_1\left(\sin(\lambda x), \frac{1}{\lambda \cos(\lambda x)}\frac{d}{dx}\right)f(x) + \\ & + \lambda^2 \cos(\lambda x)L_2\left(\sin(\lambda x), \frac{1}{\lambda \cos(\lambda x)}\frac{d}{dx}\right)\int_a^x R(\sin(\lambda x), \sin(\lambda t))\cos(\lambda t)f(t) dt. \end{aligned}$$

2. Линейные уравнения второго рода с переменным пределом интегрирования

► **Обозначения:** $f = f(x)$, $g = g(x)$, $h = h(x)$, $K = K(x)$, $M = M(x)$ — произвольные функции (вместо x у функций может быть сложный аргумент, зависящий от двух переменных x и t); $A, B, C, D, E, a, b, c, \alpha, \beta, \gamma, \lambda, \mu$ — свободные параметры; m, n — целые неотрицательные числа.

2.1. Уравнения, ядра которых содержат степенные функции

2.1-1. Ядра уравнений линейны по аргументам x, t

1. $y(x) - \lambda \int_a^x y(t) dt = f(x).$

Решение:

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^x e^{\lambda(x-t)} f(t) dt.$$

2. $y(x) + \lambda x \int_a^x y(t) dt = f(x).$

Решение:

$$y(x) = f(x) - \lambda \int_a^x x \exp\left[\frac{1}{2}\lambda(t^2 - x^2)\right] f(t) dt.$$

3. $y(x) + \lambda \int_a^x ty(t) dt = f(x).$

Решение:

$$y(x) = f(x) - \lambda \int_a^x t \exp\left[\frac{1}{2}\lambda(t^2 - x^2)\right] f(t) dt.$$

4. $y(x) + \lambda \int_a^x (x - t)y(t) dt = f(x).$

Частный случай уравнения 2.1.34 при $n = 1$.

1°. Решение при $\lambda > 0$:

$$y(x) = f(x) - k \int_a^x \sin[k(x - t)] f(t) dt, \quad k = \sqrt{\lambda}.$$

2°. Решение при $\lambda < 0$:

$$y(x) = f(x) + k \int_a^x \operatorname{sh}[k(x - t)] f(t) dt, \quad k = \sqrt{-\lambda}.$$

5. $y(x) + \int_a^x [A + B(x - t)]y(t) dt = f(x).$

1°. Решение при $A^2 > 4B$:

$$y(x) = f(x) - \int_a^x R(x - t) f(t) dt,$$

$$R(x) = \exp\left(-\frac{1}{2}Ax\right) \left[A \operatorname{ch}(\beta x) + \frac{2B - A^2}{2\beta} \operatorname{sh}(\beta x) \right], \quad \beta = \sqrt{\frac{1}{4}A^2 - B}.$$

2°. Решение при $A^2 < 4B$:

$$y(x) = f(x) - \int_a^x R(x - t) f(t) dt,$$

$$R(x) = \exp\left(-\frac{1}{2}Ax\right) \left[A \cos(\beta x) + \frac{2B - A^2}{2\beta} \sin(\beta x) \right], \quad \beta = \sqrt{B - \frac{1}{4}A^2}.$$

3°. Решение при $A^2 = 4B$:

$$y(x) = f(x) - \int_a^x R(x-t)f(t) dt, \quad R(x) = \exp\left(-\frac{1}{2}Ax\right)\left(A - \frac{1}{4}A^2x\right).$$

6. $y(x) - \int_a^x (Ax + Bt + C)y(t) dt = f(x).$

При $B = -A$ см. уравнение 2.1.5. Частный случай уравнения 2.9.6 при $g(x) = -Ax$, $h(t) = -Bt - C$.

Исходное интегральное уравнение путем дифференцирования с последующей заменой $Y(x) = \int_a^x y(t) dt$ сводится к линейному обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка

$$Y_{xx}'' - [(A+B)x + C]Y_x' - AY = f_x'(x) \quad (1)$$

с начальными условиями

$$Y(a) = 0, \quad Y_x'(a) = f(a). \quad (2)$$

Фундаментальная система решений однородного уравнения (1) при $f \equiv 0$ имеет вид

$$Y_1(x) = \Phi\left(\alpha, \frac{1}{2}; kz^2\right), \quad Y_2(x) = \Psi\left(\alpha, \frac{1}{2}; kz^2\right), \\ \alpha = \frac{A}{2(A+B)}, \quad k = \frac{A+B}{2}, \quad z = x + \frac{C}{A+B},$$

где $\Phi(\alpha, \beta; x)$ и $\Psi(\alpha, \beta; x)$ — вырожденные гипергеометрические функции.

Решение неоднородного уравнения (1) с граничными условиями (2) для произвольной функции $f = f(x)$ с учетом равенства $y(x) = Y_x'(x)$ приводит к решению интегрального уравнения в виде

$$y(x) = f(x) - \int_a^x R(x,t)f(t) dt, \\ R(x,t) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} \left[\frac{Y_1(x)Y_2(t) - Y_2(x)Y_1(t)}{W(t)} \right], \quad W(t) = \frac{2\sqrt{\pi k}}{\Gamma(\alpha)} \exp\left[k\left(t + \frac{C}{A+B}\right)^2\right].$$

2.1-2. Ядра уравнений квадратичны по аргументам x, t

7. $y(x) + A \int_a^x x^2 y(t) dt = f(x).$

Частный случай уравнения 2.1.50 при $\lambda = 2, \mu = 0$.

Решение:

$$y(x) = f(x) - A \int_a^x x^2 \exp\left[\frac{1}{3}A(t^3 - x^3)\right] f(t) dt.$$

8. $y(x) + A \int_a^x xty(t) dt = f(x).$

Частный случай уравнения 2.1.50 при $\lambda = 1, \mu = 1$.

Решение:

$$y(x) = f(x) - A \int_a^x xt \exp\left[\frac{1}{3}A(t^3 - x^3)\right] f(t) dt.$$

9. $y(x) + A \int_a^x t^2 y(t) dt = f(x).$

Частный случай уравнения 2.1.50 при $\lambda = 0, \mu = 2$.

Решение:

$$y(x) = f(x) - A \int_a^x t^2 \exp\left[\frac{1}{3}A(t^3 - x^3)\right] f(t) dt.$$

$$10. \quad y(x) + \lambda \int_a^x (x-t)^2 y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.1.34 при $n = 2$.

Решение:

$$y(x) = f(x) - \int_a^x R(x-t)f(t) dt,$$

$$R(x) = \frac{2}{3}ke^{-2kx} - \frac{2}{3}ke^{kx} \left[\cos(\sqrt{3}kx) - \sqrt{3} \sin(\sqrt{3}kx) \right], \quad k = \left(\frac{1}{4}\lambda\right)^{1/3}.$$

$$11. \quad y(x) + A \int_a^x (x^2 - t^2)y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.9.5 при $g(x) = Ax^2$.

Решение:

$$y(x) = f(x) + \frac{1}{W} \int_a^x [u'_1(x)u'_2(t) - u'_2(x)u'_1(t)] f(t) dt,$$

где штрихи обозначают производные по аргументам, указанным в круглых скобках, $u_1(x)$, $u_2(x)$ — фундаментальная система решений линейного однородного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка $u''_{xx} + 2Axy = 0$, причем функции $u_1(x)$ и $u_2(x)$ выражаются через функции Бесселя или модифицированные функции Бесселя в зависимости от знака параметра A .

При $A > 0$ имеем

$$W = 3/\pi, \quad u_1(x) = \sqrt{x} J_{1/3} \left(\sqrt{\frac{8}{9}Ax^{3/2}} \right), \quad u_2(x) = \sqrt{x} Y_{1/3} \left(\sqrt{\frac{8}{9}Ax^{3/2}} \right).$$

При $A < 0$ имеем

$$W = -\frac{3}{2}, \quad u_1(x) = \sqrt{x} I_{1/3} \left(\sqrt{\frac{8}{9}|A|x^{3/2}} \right), \quad u_2(x) = \sqrt{x} K_{1/3} \left(\sqrt{\frac{8}{9}|A|x^{3/2}} \right).$$

$$12. \quad y(x) + A \int_a^x (xt - t^2)y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.9.4 при $g(t) = At$. Решение:

$$y(x) = f(x) + \frac{A}{W} \int_a^x t[y_1(x)y_2(t) - y_2(x)y_1(t)] f(t) dt,$$

где $y_1(x)$, $y_2(x)$ — фундаментальная система решений линейного однородного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка $y''_{xx} + Axy = 0$, причем функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ выражаются через функции Бесселя или модифицированные функции Бесселя в зависимости от знака параметра A .

При $A > 0$ имеем

$$W = 3/\pi, \quad y_1(x) = \sqrt{x} J_{1/3} \left(\frac{2}{3}\sqrt{A}x^{3/2} \right), \quad y_2(x) = \sqrt{x} Y_{1/3} \left(\frac{2}{3}\sqrt{A}x^{3/2} \right).$$

При $A < 0$ имеем

$$W = -\frac{3}{2}, \quad y_1(x) = \sqrt{x} I_{1/3} \left(\frac{2}{3}\sqrt{|A|x^{3/2}} \right), \quad y_2(x) = \sqrt{x} K_{1/3} \left(\frac{2}{3}\sqrt{|A|x^{3/2}} \right).$$

$$13. \quad y(x) + A \int_a^x (x^2 - xt)y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.9.3 при $g(x) = Ax$. Решение:

$$y(x) = f(x) + \frac{A}{W} \int_a^x x[y_1(x)y_2(t) - y_2(x)y_1(t)] f(t) dt,$$

где $y_1(x)$, $y_2(x)$ — фундаментальная система решений линейного однородного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка $y''_{xx} + Axy = 0$, причем функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ выражаются через функции Бесселя или модифицированные функции Бесселя в зависимости от знака параметра A .

При $A > 0$ имеем

$$W = 3/\pi, \quad y_1(x) = \sqrt{x} J_{1/3} \left(\frac{2}{3}\sqrt{A}x^{3/2} \right), \quad y_2(x) = \sqrt{x} Y_{1/3} \left(\frac{2}{3}\sqrt{A}x^{3/2} \right).$$

При $A < 0$ имеем

$$W = -\frac{3}{2}, \quad y_1(x) = \sqrt{x} I_{1/3} \left(\frac{2}{3}\sqrt{|A|x^{3/2}} \right), \quad y_2(x) = \sqrt{x} K_{1/3} \left(\frac{2}{3}\sqrt{|A|x^{3/2}} \right).$$

$$14. \quad y(x) + A \int_a^x (t^2 - 3x^2)y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.1.55 при $\lambda = 1, \mu = 2$.

$$15. \quad y(x) + A \int_a^x (2xt - 3x^2)y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.1.55 при $\lambda = 2, \mu = 1$.

$$16. \quad y(x) - \int_a^x (ABxt - ABx^2 + Ax + B)y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.9.16 при $g(x) = Ax, h(x) = B$.

Решение:

$$y(x) = f(x) + \int_a^x R(x, t)f(t) dt,$$

$$R(x, t) = (Ax + B) \exp\left[\frac{1}{2}A(x^2 - t^2)\right] + B^2 \int_t^x \exp\left[\frac{1}{2}A(s^2 - t^2) + B(x - s)\right] ds.$$

$$17. \quad y(x) + \int_a^x (Ax^2 - At^2 + Bx - Ct + D)y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.9.6 при $g(x) = Ax^2 + Bx + D, h(t) = -At^2 - Ct$.

Решение:

$$y(x) = f(x) + \int_a^x \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} \left[\frac{Y_1(x)Y_2(t) - Y_2(x)Y_1(t)}{W(t)} \right] f(t) dt.$$

Здесь $Y_1(x), Y_2(x)$ — фундаментальная система решений однородного дифференциального уравнения второго порядка $Y''_{xx} + [(B - C)x + D]Y'_x + (2Ax + B)Y = 0$ (об этом уравнении см. В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин, 1995):

$$Y_1(x) = \exp(-kx)\Phi\left(\alpha, \frac{1}{2}; \frac{1}{2}(C - B)z^2\right), \quad Y_2(x) = \exp(-kx)\Psi\left(\alpha, \frac{1}{2}; \frac{1}{2}(C - B)z^2\right),$$

$$W(x) = -\frac{\sqrt{2\pi(C - B)}}{\Gamma(\alpha)} \exp\left[\frac{1}{2}(C - B)z^2 - 2kx\right], \quad k = \frac{2A}{B - C},$$

$$\alpha = -\frac{4A^2 + 2AD(C - B) + B(C - B)^2}{2(C - B)^3}, \quad z = x - \frac{4A + (C - B)D}{(C - B)^2},$$

где $\Phi(\alpha, \beta; x)$ и $\Psi(\alpha, \beta; x)$ — вырожденные гипергеометрические функции, $\Gamma(\alpha)$ — гамма-функция.

$$18. \quad y(x) - \int_a^x [Ax + B + (Cx + D)(x - t)]y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.9.11 при $g(x) = Ax + B, h(x) = Cx + D$.

Решение при $A \neq 0$:

$$y(x) = f(x) + \int_a^x [Y_2''(x)Y_1(t) - Y_1''(x)Y_2(t)] \frac{f(t)}{W(t)} dt.$$

Здесь $Y_1(x), Y_2(x)$ — фундаментальная система решений однородного дифференциального уравнения второго порядка $Y''_{xx} - (Ax + B)Y'_x - (Cx + D)Y = 0$ (об этом уравнении см. А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев, 1995):

$$Y_1(x) = \exp(-kx)\Phi\left(\alpha, \frac{1}{2}; \frac{1}{2}Az^2\right), \quad Y_2(x) = \exp(-kx)\Psi\left(\alpha, \frac{1}{2}; \frac{1}{2}Az^2\right),$$

$$W(x) = -\sqrt{2\pi A} [\Gamma(\alpha)]^{-1} \exp\left(\frac{1}{2}Az^2 - 2kx\right), \quad k = C/A,$$

$$\alpha = \frac{1}{2}(A^2D - ABC - C^2)A^{-3}, \quad z = x + (AB + 2C)A^{-2},$$

где $\Phi(\alpha, \beta; x)$ и $\Psi(\alpha, \beta; x)$ — вырожденные гипергеометрические функции, $\Gamma(\alpha)$ — гамма-функция.

$$19. \quad y(x) + \int_a^x [At + B + (Ct + D)(t - x)]y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.9.12 при $g(t) = -At - B$, $h(t) = -Ct - D$.

Решение при $A \neq 0$:

$$y(x) = f(x) - \int_a^x [Y_1(x)Y_2''(t) - Y_1''(t)Y_2(x)] \frac{f(t)}{W(x)} dt,$$

Здесь $Y_1(x)$, $Y_2(x)$ — фундаментальная система решений однородного дифференциального уравнения второго порядка $Y_{xx}'' - (Ax + B)Y_x' - (Cx + D)Y = 0$ (об этом уравнении см. А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев, 1995):

$$Y_1(x) = \exp(-kx)\Phi(\alpha, \frac{1}{2}; \frac{1}{2}Az^2), \quad Y_2(x) = \exp(-kx)\Psi(\alpha, \frac{1}{2}; \frac{1}{2}Az^2),$$

$$W(x) = -\sqrt{2\pi A} [\Gamma(\alpha)]^{-1} \exp(\frac{1}{2}Az^2 - 2kx), \quad k = C/A,$$

$$\alpha = \frac{1}{2}(A^2D - ABC - C^2)A^{-3}, \quad z = x + (AB + 2C)A^{-2},$$

где $\Phi(\alpha, \beta; x)$ и $\Psi(\alpha, \beta; x)$ — вырожденные гипергеометрические функции, $\Gamma(\alpha)$ — гамма-функция.

2.1-3. Ядра уравнений в виде кубических полиномов по аргументам x, t

$$20. \quad y(x) + A \int_a^x x^3 y(t) dt = f(x).$$

Решение:

$$y(x) = f(x) - A \int_a^x x^3 \exp[\frac{1}{4}A(t^4 - x^4)]f(t) dt.$$

$$21. \quad y(x) + A \int_a^x x^2 t y(t) dt = f(x).$$

Решение:

$$y(x) = f(x) - A \int_a^x x^2 t \exp[\frac{1}{4}A(t^4 - x^4)]f(t) dt.$$

$$22. \quad y(x) + A \int_a^x x t^2 y(t) dt = f(x).$$

Решение:

$$y(x) = f(x) - A \int_a^x x t^2 \exp[\frac{1}{4}A(t^4 - x^4)]f(t) dt.$$

$$23. \quad y(x) + A \int_a^x t^3 y(t) dt = f(x).$$

Решение:

$$y(x) = f(x) - A \int_a^x t^3 \exp[\frac{1}{4}A(t^4 - x^4)]f(t) dt.$$

$$24. \quad y(x) + \lambda \int_a^x (x - t)^3 y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.1.34 при $n = 3$.

Решение:

$$y(x) = f(x) - \int_a^x R(x - t)f(t) dt,$$

где

$$R(x) = \begin{cases} k [\operatorname{ch}(kx) \sin(kx) - \operatorname{sh}(kx) \cos(kx)], & k = (\frac{3}{2}\lambda)^{1/4} \text{ при } \lambda > 0, \\ \frac{1}{2}s [\sin(sx) - \operatorname{sh}(sx)], & s = (-6\lambda)^{1/4} \text{ при } \lambda < 0. \end{cases}$$

$$25. \quad y(x) + A \int_a^x (x^3 - t^3)y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.1.52 при $\lambda = 3$.

$$26. \quad y(x) - A \int_a^x (4x^3 - t^3) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.1.55 при $\lambda = 1, \mu = 3$.

$$27. \quad y(x) + A \int_a^x (xt^2 - t^3) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.1.49 при $\lambda = 2$.

$$28. \quad y(x) + A \int_a^x (x^2 t - t^3) y(t) dt = f(x).$$

Преобразование $z = x^2, \tau = t^2, y(x) = w(z)$ приводит к уравнению вида 2.1.4:

$$w(z) + \frac{1}{2} A \int_{a^2}^z (z - \tau) w(\tau) d\tau = F(z), \quad F(z) = f(x).$$

$$29. \quad y(x) + \int_a^x (Ax^2 t + Bt^3) y(t) dt = f(x).$$

Преобразование $z = x^2, \tau = t^2, y(x) = w(z)$ приводит к уравнению вида 2.1.6:

$$w(z) + \int_{a^2}^z \left(\frac{1}{2} Az + \frac{1}{2} B\tau \right) w(\tau) d\tau = F(z), \quad F(z) = f(x).$$

$$30. \quad y(x) + B \int_a^x (2x^3 - xt^2) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.1.55 при $\lambda = 2, \mu = 2, B = -2A$.

$$31. \quad y(x) - A \int_a^x (4x^3 - 3x^2 t) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.1.55 при $\lambda = 3, \mu = 1$.

$$32. \quad y(x) + \int_a^x (ABx^3 - ABx^2 t - Ax^2 - B) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.9.7 при $g(x) = Ax^2, \lambda = B$.

Решение:

$$y(x) = f(x) + \int_a^x R(x-t) f(t) dt,$$

$$R(x, t) = (Ax^2 + B) \exp\left[\frac{1}{3} A(x^3 - t^3)\right] + B^2 \int_t^x \exp\left[\frac{1}{3} A(s^3 - t^3) + B(x-s)\right] ds.$$

$$33. \quad y(x) + \int_a^x (ABxt^2 - ABt^3 + At^2 + B) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.9.8 при $g(t) = At^2, \lambda = B$.

Решение:

$$y(x) = f(x) + \int_a^x R(x-t) f(t) dt,$$

$$R(x, t) = -(At^2 + B) \exp\left[\frac{1}{3} A(t^3 - x^3)\right] + B^2 \int_t^x \exp\left[\frac{1}{3} A(s^3 - x^3) + B(t-s)\right] ds.$$

2.1-4. Ядра уравнений в виде полиномов с более высокой степенью

$$34. \quad y(x) + A \int_a^x (x-t)^n y(t) dt = f(x), \quad n = 1, 2, \dots$$

1°. Дифференцируя уравнение $n+1$ раз по x , для функции $y = y(x)$ получим линейное обыкновенное дифференциальное уравнение $(n+1)$ -го порядка с постоянными коэффициентами

$$y_x^{(n+1)} + An! y = f_x^{(n+1)}(x).$$

Это уравнение с начальными условиями $y(a) = f(a), y'_x(a) = f'_x(a), \dots, y_x^{(n)}(a) = f_x^{(n)}(a)$ определяет решение исходного интегрального уравнения.

2°. Решение:

$$y(x) = f(x) + \int_a^x R(x-t)f(t) dt,$$

$$R(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \exp(\sigma_k x) [\sigma_k \cos(\beta_k x) - \beta_k \sin(\beta_k x)],$$

где коэффициенты σ_k и β_k вычисляются по формулам

$$\sigma_k = |An!|^{\frac{1}{n+1}} \cos\left(\frac{2\pi k}{n+1}\right), \quad \beta_k = |An!|^{\frac{1}{n+1}} \sin\left(\frac{2\pi k}{n+1}\right) \quad \text{при } A < 0,$$

$$\sigma_k = |An!|^{\frac{1}{n+1}} \cos\left(\frac{2\pi k + \pi}{n+1}\right), \quad \beta_k = |An!|^{\frac{1}{n+1}} \sin\left(\frac{2\pi k + \pi}{n+1}\right) \quad \text{при } A > 0.$$

$$35. \quad y(x) + A \int_x^\infty (t-x)^n y(t) dt = f(x), \quad n = 1, 2, \dots$$

Уравнение Пикара — Гурса.

Частный случай уравнения 2.9.62 при $K(z) = A(-z)^n$.

1°. Решение однородного уравнения при $f \equiv 0$:

$$y(x) = Ce^{-\lambda x}, \quad \lambda = (-An!)^{\frac{1}{n+1}},$$

где C — произвольная постоянная, $A < 0$. Это решение единственно при $n = 0, 1, 2, 3$.

Общее решение однородного уравнения при произвольном знаке A имеет вид

$$y(x) = \sum_{k=1}^s C_k \exp(-\lambda_k x). \quad (1)$$

Здесь C_k — произвольные постоянные, λ_k — корни алгебраического уравнения $\lambda^{n+1} + An! = 0$, удовлетворяющие условию $\operatorname{Re} \lambda_k > 0$. Количество слагаемых в (1) определяется на основании неравенства $s \leq 2\left[\frac{n}{4}\right] + 1$, где $[a]$ обозначает целую часть числа a .

2°. Для правой части $f(x) = \sum_{k=1}^m a_k \exp(-\beta_k x)$, где $\beta_k > 0$, решение уравнения имеет вид

$$y(x) = \sum_{k=1}^m \frac{a_k \beta_k^{n+1}}{\beta_k^{n+1} + An!} \exp(-\beta_k x), \quad (2)$$

где $\beta_k^{n+1} + An! \neq 0$. При $A > 0$ эта формула может использоваться также для любых функций $f(x)$, которые разлагаются в сходящийся экспоненциальный ряд (что соответствует $m = \infty$).

3°. Для правой части $f(x) = e^{-\beta x} \sum_{k=1}^m a_k x^k$, где $\beta > 0$, решение уравнения имеет вид

$$y(x) = e^{-\beta x} \sum_{k=0}^m B_k x^k, \quad (3)$$

где постоянные B_k определяются методом неопределенных коэффициентов. Решение также можно построить с помощью формулы, приведенной в п. 3° уравнения 2.9.55.

4°. Для правой части $f(x) = \cos(\beta x) \sum_{k=1}^m a_k \exp(-\mu_k x)$ решение уравнения имеет вид

$$y(x) = \cos(\beta x) \sum_{k=1}^m B_k \exp(-\mu_k x) + \sin(\beta x) \sum_{k=1}^m C_k \exp(-\mu_k x), \quad (4)$$

где постоянные B_k и C_k определяются методом неопределенных коэффициентов. Решение также можно построить с помощью формул, приведенных в решении уравнения 2.9.60.

5°. Для правой части $f(x) = \sin(\beta x) \sum_{k=1}^m a_k \exp(-\mu_k x)$ решение уравнения имеет вид

$$y(x) = \cos(\beta x) \sum_{k=1}^m B_k \exp(-\mu_k x) + \sin(\beta x) \sum_{k=1}^m C_k \exp(-\mu_k x), \quad (5)$$

где постоянные B_k и C_k определяются методом неопределенных коэффициентов. Решение также можно построить с помощью формул, приведенных в решении уравнения 2.9.61.

6°. Для получения общего решения в пп. 2°–5° к правым частям выражений (2)–(5) следует прибавить решение однородного уравнения (1).

$$36. \quad y(x) + A \int_a^x (x-t)t^n y(t) dt = f(x), \quad n = 1, 2, \dots$$

Частный случай уравнения 2.1.49 при $\lambda = n$.

$$37. \quad y(x) + A \int_a^x (x^n - t^n) y(t) dt = f(x), \quad n = 1, 2, \dots$$

Частный случай уравнения 2.1.52 при $\lambda = n$.

$$38. \quad y(x) + \int_a^x (ABx^{n+1} - ABx^n t - Ax^n - B) y(t) dt = f(x), \quad n = 1, 2, \dots$$

Частный случай уравнения 2.9.7 при $g(x) = Ax^n$, $\lambda = B$.

Решение:

$$y(x) = f(x) + \int_a^x R(x-t)f(t) dt,$$

где

$$R(x, t) = (Ax^n + B) \exp\left[\frac{A}{n+1}(x^{n+1} - t^{n+1})\right] + \\ + B^2 \int_t^x \exp\left[\frac{A}{n+1}(s^{n+1} - t^{n+1}) + B(x-s)\right] ds.$$

$$39. \quad y(x) + \int_a^x (ABxt^n - ABt^{n+1} + At^n + B) y(t) dt = f(x), \quad n = 1, 2, \dots$$

Частный случай уравнения 2.9.8 при $g(t) = At^n$, $\lambda = B$.

Решение:

$$y(x) = f(x) + \int_a^x R(x-t)f(t) dt,$$

где

$$R(x, t) = -(At^n + B) \exp\left[\frac{A}{n+1}(t^{n+1} - x^{n+1})\right] + \\ + B^2 \int_t^x \exp\left[\frac{A}{n+1}(s^{n+1} - x^{n+1}) + B(t-s)\right] ds.$$

2.1-5. Ядра уравнений, содержащие рациональные функции

$$40. \quad y(x) + x^{-3} \int_a^x t[2Ax + (1-A)t] y(t) dt = f(x).$$

Это уравнение получается путем дифференцирования уравнения вида 1.1.17:

$$\int_a^x [Ax^2 t + (1-A)xt^2] y(t) dt = F(x), \quad F(x) = \int_a^x t^3 f(t) dt.$$

Решение:

$$y(x) = \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left[x^{-A} \int_a^x t^{A-1} \varphi'_t(t) dt \right], \quad \varphi(x) = \frac{1}{x} \int_a^x t^3 f(t) dt.$$

$$41. \quad y(x) - \lambda \int_0^x \frac{y(t) dt}{x+t} = f(x).$$

Уравнение Диксона (А. С. Dixon). Частный случай уравнения 2.1.62 при $a = b = 1$, $\mu = 0$.

1°. Решение однородного уравнения ($f \equiv 0$) имеет вид

$$y(x) = Cx^\beta \quad (\beta > -1, \lambda > 0). \quad (1)$$

Здесь C — произвольная постоянная, а $\beta = \beta(\lambda)$ определяется из следующего трансцендентного уравнения:

$$\lambda I(\beta) = 1, \quad \text{где} \quad I(\beta) = \int_0^1 \frac{z^\beta dz}{1+z}. \quad (2)$$

2°. Для правой части полиномиального вида

$$f(x) = \sum_{n=0}^N A_n x^n$$

ограниченное в нуле решение интегрального уравнения дается формулами

$$y(x) = \begin{cases} \sum_{n=0}^N \frac{A_n}{1-(\lambda/\lambda_n)} x^n & \text{при } \lambda < \lambda_0, \\ \sum_{n=0}^N \frac{A_n}{1-(\lambda/\lambda_n)} x^n + Cx^\beta & \text{при } \lambda > \lambda_0, \lambda \neq \lambda_n, \end{cases}$$

$$\lambda_n = \frac{1}{I(n)}, \quad I(n) = (-1)^n \left[\ln 2 + \sum_{m=1}^n \frac{(-1)^m}{m} \right],$$

где C — произвольная постоянная, а зависимость $\beta = \beta(\lambda)$ определяется из трансцендентного уравнения (2).

При специальных значениях параметра $\lambda = \lambda_n$ ($n = 1, 2, \dots$) решение отличается одним слагаемым и имеет вид

$$y(x) = \sum_{m=0}^{n-1} \frac{A_m}{1-(\lambda_n/\lambda_m)} x^m + \sum_{m=n+1}^N \frac{A_m}{1-(\lambda_n/\lambda_m)} x^m - A_n \frac{\bar{\lambda}_n}{\lambda_n} x^n \ln x + Cx^n,$$

где $\bar{\lambda}_n = (-1)^{n+1} \left[\frac{\pi^2}{12} + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k^2} \right]^{-1}$.

Замечание. Для произвольной правой части $f(x)$, разлагающейся в степенной ряд, можно использовать формулы п. 2°, в которых следует положить $N = \infty$. При этом радиус сходимости полученного решения $y(x)$ будет равен радиусу сходимости ряда для функции $f(x)$.

3°. Для правой части логарифмически-полиномиального вида

$$f(x) = \ln x \left(\sum_{n=0}^N A_n x^n \right)$$

решение интегрального уравнения с логарифмической особенностью в нуле определяется формулами

$$y(x) = \begin{cases} \ln x \sum_{n=0}^N \frac{A_n}{1-(\lambda/\lambda_n)} x^n + \sum_{n=0}^N \frac{A_n D_n \lambda}{[1-(\lambda/\lambda_n)]^2} x^n & \text{при } \lambda < \lambda_0, \\ \ln x \sum_{n=0}^N \frac{A_n}{1-(\lambda/\lambda_n)} x^n + \sum_{n=0}^N \frac{A_n D_n \lambda}{[1-(\lambda/\lambda_n)]^2} x^n + Cx^\beta & \text{при } \lambda > \lambda_0, \lambda \neq \lambda_n, \end{cases}$$

$$\lambda_n = \frac{1}{I(n)}, \quad I(n) = (-1)^n \left[\ln 2 + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k} \right], \quad D_n = (-1)^{n+1} \left[\frac{\pi^2}{12} + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k^2} \right].$$

4°. Для произвольной правой части $f(x)$ преобразование

$$x = \frac{1}{2} e^{2z}, \quad t = \frac{1}{2} e^{2\tau}, \quad y(x) = e^{-z} w(z), \quad f(x) = e^{-z} g(z)$$

приводит к интегральному уравнению с разностным ядром вида 2.9.51:

$$w(z) - \lambda \int_{-\infty}^z \frac{w(\tau) d\tau}{\operatorname{ch}(z-\tau)} = g(z).$$

$$42. \quad y(x) - \lambda \int_a^x \frac{x+b}{t+b} y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.9.1 при $g(x) = x + b$.

Решение:

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^x \frac{x+b}{t+b} e^{\lambda(x-t)} f(t) dt.$$

$$43. \quad y(x) = \frac{2}{(1-\lambda^2)x^2} \int_{\lambda x}^x \frac{t}{1+t} y(t) dt.$$

Это уравнение встречается в ядерной физике и описывает замедление нейтронов в веществе.

1°. Решение при $\lambda = 0$:

$$y(x) = \frac{C}{(1+x)^2},$$

где C — произвольная постоянная.

2°. При $\lambda \neq 0$ решение интегрального уравнения можно найти в виде ряда

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n.$$

⊙ Литература: И. Снеддон (1955).

2.1-6. Ядра уравнений, содержащие квадратные корни и дробные степени

$$44. \quad y(x) + A \int_a^x (x-t) \sqrt{t} y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.1.49 при $\lambda = \frac{1}{2}$.

$$45. \quad y(x) + A \int_a^x (\sqrt{x} - \sqrt{t}) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.1.52 при $\lambda = \frac{1}{2}$.

$$46. \quad y(x) + \lambda \int_a^x \frac{y(t) dt}{\sqrt{x-t}} = f(x).$$

Уравнение Абеля второго рода. Это уравнение встречается в задачах тепло- и массопереноса.

Решение:

$$y(x) = F(x) + \pi \lambda^2 \int_a^x \exp[\pi \lambda^2 (x-t)] F(t) dt,$$

где

$$F(x) = f(x) - \lambda \int_a^x \frac{f(t) dt}{\sqrt{x-t}}.$$

⊙ Литература: Н. Brakhage, К. Nickel, Р. Rieder (1965), Ю. И. Бабенко (1986, стр. 14).

$$47. \quad y(x) - \lambda \int_0^x \frac{y(t) dt}{\sqrt{ax^2 + bt^2}} = f(x), \quad a > 0, \quad b > 0.$$

1°. Решение однородного уравнения ($f \equiv 0$) имеет вид

$$y(x) = C x^\beta \quad (\beta > -1, \quad \lambda > 0). \quad (1)$$

Здесь C — произвольная постоянная, а $\beta = \beta(\lambda)$ определяется из трансцендентного уравнения

$$\lambda I(\beta) = 1, \quad \text{где} \quad I(\beta) = \int_0^1 \frac{z^\beta dz}{\sqrt{a + bz^2}}. \quad (2)$$

2°. Для правой части полиномиального вида

$$f(x) = \sum_{n=0}^N A_n x^n$$

ограниченное в нуле решение интегрального уравнения определяется формулами

$$y(x) = \begin{cases} \sum_{n=0}^N \frac{A_n}{1 - (\lambda/\lambda_n)} x^n & \text{при } \lambda < \lambda_0, \\ \sum_{n=0}^N \frac{A_n}{1 - (\lambda/\lambda_n)} x^n + Cx^\beta & \text{при } \lambda > \lambda_0, \lambda \neq \lambda_n, \end{cases}$$

$$\lambda_0 = \frac{\sqrt{b}}{\operatorname{Arsh}(\sqrt{b/a})}, \quad \lambda_n = \frac{1}{I(n)}, \quad I(n) = \int_0^1 \frac{z^n dz}{\sqrt{a + bz^2}}.$$

Здесь C — произвольная постоянная, а зависимость $\beta = \beta(\lambda)$ определяется из трансцендентного уравнения (2).

3°. При специальных значениях параметра $\lambda = \lambda_n$ ($n = 1, 2, \dots$) решение отличается одним слагаемым и имеет вид

$$y(x) = \sum_{m=0}^{n-1} \frac{A_m}{1 - (\lambda_n/\lambda_m)} x^m + \sum_{m=n+1}^N \frac{A_m}{1 - (\lambda_n/\lambda_m)} x^m - A_n \frac{\bar{\lambda}_n}{\lambda_n} x^n \ln x + Cx^n,$$

где $\bar{\lambda}_n = \left[\int_0^1 \frac{z^n \ln z dz}{\sqrt{a + bz^2}} \right]^{-1}$.

4°. Для произвольной части $f(x)$, разлагающейся в степенной ряд, можно использовать формулы п. 2°, в которых следует положить $N = \infty$. При этом радиус сходимости полученного решения $y(x)$ будет равен радиусу сходимости ряда для функции $f(x)$.

48. $y(x) + \lambda \int_a^x \frac{y(t) dt}{(x-t)^{3/4}} = f(x).$

Это уравнение допускает решение в квадратурах (см. уравнение 2.1.60).

2.1-7. Ядра уравнений, содержащие произвольные степени

49. $y(x) + A \int_a^x (x-t)t^\lambda y(t) dt = f(x).$

Частный случай уравнения 2.9.4 при $g(t) = At^\lambda$.

Решение:

$$y(x) = f(x) + \frac{A}{W} \int_a^x [y_1(x)y_2(t) - y_2(x)y_1(t)] t^\lambda f(t) dt,$$

где $y_1(x), y_2(x)$ — фундаментальная система решений линейного однородного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка $y''_{xx} + Ax^\lambda y = 0$, причем функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ выражаются через функции Бесселя или модифицированные функции Бесселя в зависимости от знака параметра A .

При $A > 0$ имеем

$$W = \frac{2q}{\pi}, \quad y_1(x) = \sqrt{x} J_{\frac{1}{2q}} \left(\frac{\sqrt{A}}{q} x^q \right), \quad y_2(x) = \sqrt{x} Y_{\frac{1}{2q}} \left(\frac{\sqrt{A}}{q} x^q \right), \quad q = \frac{\lambda + 2}{2}.$$

При $A < 0$ имеем

$$W = -q, \quad y_1(x) = \sqrt{x} I_{\frac{1}{2q}} \left(\frac{\sqrt{|A|}}{q} x^q \right), \quad y_2(x) = \sqrt{x} K_{\frac{1}{2q}} \left(\frac{\sqrt{|A|}}{q} x^q \right), \quad q = \frac{\lambda + 2}{2}.$$

50. $y(x) + A \int_a^x x^\lambda t^\mu y(t) dt = f(x).$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x) = -Ax^\lambda, h(t) = t^\mu$ (λ, μ — любые).

Решение:

$$y(x) = f(x) - \int_a^x R(x, t) f(t) dt,$$

$$R(x, t) = \begin{cases} Ax^\lambda t^\mu \exp \left[\frac{A}{\lambda + \mu + 1} (t^{\lambda + \mu + 1} - x^{\lambda + \mu + 1}) \right] & \text{при } \lambda + \mu + 1 \neq 0, \\ Ax^{\lambda - A} t^{\mu + A} & \text{при } \lambda + \mu + 1 = 0. \end{cases}$$

$$51. \quad y(x) + A \int_a^x (x-t)x^\lambda t^\mu y(t) dt = f(x).$$

Замена $u(x) = x^{-\lambda}y(x)$ приводит к уравнению вида 2.1.49:

$$u(x) + A \int_a^x (x-t)t^{\lambda+\mu}u(t) dt = f(x)x^{-\lambda}.$$

$$52. \quad y(x) + A \int_a^x (x^\lambda - t^\lambda)y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.9.5 при $g(x) = Ax^\lambda$.

Решение:

$$y(x) = f(x) + \frac{1}{W} \int_a^x [u'_1(x)u'_2(t) - u'_2(x)u'_1(t)] f(t) dt,$$

где штрихи обозначают производные по аргументам, указанным в скобках, $u_1(x), u_2(x)$ — фундаментальная система решений линейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка $u''_{xx} + A\lambda x^{\lambda-1}u = 0$, которая выражается через функции Бесселя или модифицированные функции Бесселя в зависимости от знака произведения $A\lambda$.

При $A\lambda > 0$ имеем

$$W = \frac{2q}{\pi}, \quad u_1(x) = \sqrt{x} J_{\frac{1}{2q}} \left(\frac{\sqrt{A\lambda}}{q} x^q \right), \quad u_2(x) = \sqrt{x} Y_{\frac{1}{2q}} \left(\frac{\sqrt{A\lambda}}{q} x^q \right), \quad q = \frac{\lambda+1}{2}.$$

При $A\lambda < 0$ имеем

$$W = -q, \quad u_1(x) = \sqrt{x} I_{\frac{1}{2q}} \left(\frac{\sqrt{|A\lambda|}}{q} x^q \right), \quad u_2(x) = \sqrt{x} K_{\frac{1}{2q}} \left(\frac{\sqrt{|A\lambda|}}{q} x^q \right), \quad q = \frac{\lambda+1}{2}.$$

$$53. \quad y(x) - \int_a^x (Ax^\lambda t^{\lambda-1} + Bt^{2\lambda-1})y(t) dt = f(x).$$

Преобразование

$$z = x^\lambda, \quad \tau = t^\lambda, \quad y(x) = Y(z)$$

приводит к уравнению вида 2.1.6:

$$Y(z) - \int_b^z \left(\frac{A}{\lambda} z + \frac{B}{\lambda} \tau \right) Y(\tau) d\tau = F(z), \quad F(z) = f(x), \quad b = a^\lambda.$$

$$54. \quad y(x) - \int_a^x (Ax^{\lambda+\mu} t^{\lambda-\mu-1} + Bx^\mu t^{2\lambda-\mu-1})y(t) dt = f(x).$$

Замена $y(x) = x^\mu w(x)$ приводит к уравнению вида 2.1.53:

$$w(x) - \int_a^x (Ax^\lambda t^{\lambda-1} + Bt^{2\lambda-1})w(t) dt = x^{-\mu} f(x).$$

$$55. \quad y(x) + A \int_a^x [\lambda x^{\lambda-1} t^\mu - (\lambda + \mu)x^{\lambda+\mu-1}]y(t) dt = f(x).$$

Это уравнение получается путем дифференцирования уравнения 1.1.51:

$$\int_a^x [1 + A(x^\lambda t^\mu - x^{\lambda+\mu})]y(t) dt = F(x), \quad F(x) = \int_a^x f(x) dx.$$

Решение:

$$y(x) = \frac{d}{dx} \left\{ \frac{x^\lambda}{\Phi(x)} \int_a^x [t^{-\lambda} F(t)]'_t \Phi(t) dt \right\}, \quad \Phi(x) = \exp \left(-\frac{A\mu}{\mu+\lambda} x^{\mu+\lambda} \right).$$

$$56. \quad y(x) + \int_a^x (ABx^{\lambda+1} - ABx^\lambda t - Ax^\lambda - B)y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.9.7.

Решение:

$$y(x) = f(x) + \int_a^x R(x-t)f(t) dt,$$

где

$$R(x, t) = (Ax^\lambda + B) \exp\left[\frac{A}{\lambda+1}(x^{\lambda+1} - t^{\lambda+1})\right] + B^2 \int_t^x \exp\left[\frac{A}{\lambda+1}(s^{\lambda+1} - t^{\lambda+1}) + B(x-s)\right] ds.$$

$$57. \quad y(x) + \int_a^x (ABxt^\lambda - ABt^{\lambda+1} + At^\lambda + B)y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.9.8.

Решение:

$$y(x) = f(x) + \int_a^x R(x-t)f(t) dt,$$

где

$$R(x, t) = -(At^\lambda + B) \exp\left[\frac{A}{\lambda+1}(t^{\lambda+1} - x^{\lambda+1})\right] + B^2 \int_t^x \exp\left[\frac{A}{\lambda+1}(s^{\lambda+1} - x^{\lambda+1}) + B(t-s)\right] ds.$$

$$58. \quad y(x) - \lambda \int_a^x \left(\frac{x+b}{t+b}\right)^\mu y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.9.1 при $g(x) = (x+b)^\mu$.

Решение:

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^x \left(\frac{x+b}{t+b}\right)^\mu e^{\lambda(x-t)} f(t) dt.$$

$$59. \quad y(x) - \lambda \int_a^x \frac{x^\mu + b}{t^\mu + b} y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.9.1 при $g(x) = x^\mu + b$.

Решение:

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^x \frac{x^\mu + b}{t^\mu + b} e^{\lambda(x-t)} f(t) dt.$$

$$60. \quad y(x) - \lambda \int_0^x \frac{y(t) dt}{(x-t)^\alpha} = f(x), \quad 0 < \alpha < 1.$$

Обобщенное уравнение Абеля второго рода.

1°. Пусть число α может быть представлено в виде правильной дроби:

$$\alpha = 1 - \frac{m}{n}, \quad \text{где } m = 1, 2, \dots, \quad n = 2, 3, \dots \quad (m < n).$$

В этом случае решение обобщенного уравнения Абеля второго рода может быть представлено в замкнутом виде (в виде квадратур):

$$y(x) = f(x) + \int_0^x R(x-t)f(t) dt,$$

где

$$R(x) = \sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{\lambda^\nu \Gamma^\nu(m/n)}{\Gamma(\nu m/n)} x^{(\nu m/n)-1} + \frac{b}{m} \sum_{\mu=0}^{m-1} \varepsilon_\mu \exp(\varepsilon_\mu b x) +$$

$$+ \frac{b}{m} \sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{\lambda^\nu \Gamma^\nu(m/n)}{\Gamma(\nu m/n)} \left[\sum_{\mu=0}^{m-1} \varepsilon_\mu \exp(\varepsilon_\mu b x) \int_0^x t^{(\nu m/n)-1} \exp(-\varepsilon_\mu b t) dt \right],$$

$$b = \lambda^{n/m} \Gamma^{n/m}(m/n), \quad \varepsilon_\mu = \exp\left(\frac{2\pi\mu i}{m}\right), \quad i^2 = -1, \quad \mu = 0, 1, \dots, m-1.$$

2°. Решение при любых $0 < \alpha < 1$:

$$y(x) = f(x) + \int_0^x R(x-t)f(t) dt, \quad \text{где } R(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[\lambda \Gamma(1-\alpha)x^{1-\alpha}]^n}{x \Gamma[n(1-\alpha)]}.$$

⊙ Литература: Н. Brakhage, К. Nickel, Р. Rieder (1965), В. И. Смирнов (1974, стр. 155, 156).

$$61. \quad y(x) - \frac{\lambda}{x^\alpha} \int_0^x \frac{y(t) dt}{(x-t)^{1-\alpha}} = f(x), \quad 0 < \alpha \leq 1.$$

1°. Решение однородного уравнения ($f \equiv 0$) имеет вид

$$y(x) = Cx^\beta \quad (\beta > -1, \lambda > 0). \quad (1)$$

Здесь C — произвольная постоянная, а $\beta = \beta(\lambda)$ определяется из трансцендентного уравнения

$$\lambda B(\alpha, \beta + 1) = 1, \quad (2)$$

где $B(p, q) = \int_0^1 z^{p-1}(1-z)^{q-1} dz$ — бета-функция.

2°. Для правой части полиномиального вида

$$f(x) = \sum_{n=0}^N A_n x^n$$

ограниченное в нуле решение интегрального уравнения определяется формулами

$$y(x) = \begin{cases} \sum_{n=0}^N \frac{A_n}{1 - (\lambda/\lambda_n)} x^n & \text{при } \lambda < \alpha, \\ \sum_{n=0}^N \frac{A_n}{1 - (\lambda/\lambda_n)} x^n + Cx^\beta & \text{при } \lambda > \alpha, \lambda \neq \lambda_n, \end{cases}$$

$$\lambda_n = \frac{(\alpha)_{n+1}}{n!}, \quad (\alpha)_{n+1} = \alpha(\alpha+1) \dots (\alpha+n).$$

Здесь C — произвольная постоянная, а зависимость $\beta = \beta(\lambda)$ определяется из трансцендентного уравнения (2).

При специальных значениях параметра $\lambda = \lambda_n$ ($n = 1, 2, \dots$) решение отличается одним слагаемым и имеет вид

$$y(x) = \sum_{m=0}^{n-1} \frac{A_m}{1 - (\lambda_n/\lambda_m)} x^m + \sum_{m=n+1}^N \frac{A_m}{1 - (\lambda_n/\lambda_m)} x^m - A_n \frac{\bar{\lambda}_n}{\lambda_n} x^n \ln x + Cx^n,$$

где $\bar{\lambda}_n = \left[\int_0^1 (1-z)^{\alpha-1} z^n \ln z dz \right]^{-1}$.

3°. Для произвольной части $f(x)$, разлагающейся в степенной ряд, можно использовать формулы п. 2°, в которых следует положить $N = \infty$. При этом радиус сходимости полученного решения $y(x)$ будет равен радиусу сходимости ряда для функции $f(x)$.

4°. Для правой части интегрального уравнения

$$f(x) = \ln(kx) \sum_{n=0}^N A_n x^n$$

решение имеет вид

$$y(x) = \ln(kx) \sum_{n=0}^N B_n x^n + \sum_{n=0}^N D_n x^n,$$

где значения постоянных B_n и D_n определяются методом неопределенных коэффициентов. Для получения общего решения интегрального уравнения к полученным частным решениям следует прибавить решение однородного уравнения (1).

В работе Л. Г. Михайлова (1966, стр. 29, 30) были исследованы условия разрешимости рассматриваемого интегрального уравнения для различных классов функций $f(x)$.

$$62. \quad y(x) - \frac{\lambda}{x^\mu} \int_0^x \frac{y(t) dt}{(ax + bt)^{1-\mu}} = f(x).$$

Здесь $a > 0$, $b > 0$, а μ — произвольное число.

1°. Решение однородного уравнения ($f \equiv 0$) имеет вид

$$y(x) = Cx^\beta \quad (\beta > -1, \lambda > 0). \quad (1)$$

Здесь C — произвольная постоянная, а $\beta = \beta(\lambda)$ определяется из трансцендентного уравнения

$$\lambda I(\beta) = 1, \quad \text{где} \quad I(\beta) = \int_0^1 z^\beta (a + bz)^{\mu-1} dz. \quad (2)$$

2°. Для правой части полиномиального вида

$$f(x) = \sum_{n=0}^N A_n x^n$$

ограниченное в нуле решение интегрального уравнения определяется формулами

$$y(x) = \begin{cases} \sum_{n=0}^N \frac{A_n}{1 - (\lambda/\lambda_n)} x^n & \text{при } \lambda < \lambda_0, \\ \sum_{n=0}^N \frac{A_n}{1 - (\lambda/\lambda_n)} x^n + Cx^\beta & \text{при } \lambda > \lambda_0, \lambda \neq \lambda_n, \end{cases}$$

$$\lambda_n = \frac{1}{I(n)}, \quad I(n) = \int_0^1 z^n (a + bz)^{\mu-1} dz.$$

Здесь C — произвольная постоянная, а зависимость $\beta = \beta(\lambda)$ определяется из трансцендентного уравнения (2).

3°. При специальных значениях параметра $\lambda = \lambda_n$ ($n = 1, 2, \dots$) решение отличается одним слагаемым и имеет вид

$$y(x) = \sum_{m=0}^{n-1} \frac{A_m}{1 - (\lambda_n/\lambda_m)} x^m + \sum_{m=n+1}^N \frac{A_m}{1 - (\lambda_n/\lambda_m)} x^m - A_n \frac{\bar{\lambda}_n}{\lambda_n} x^n \ln x + Cx^n,$$

где $\bar{\lambda}_n = \left[\int_0^1 z^n (a + bz)^{\mu-1} \ln z dz \right]^{-1}.$

4°. Для произвольной части $f(x)$, разлагающейся в степенной ряд, можно использовать формулы п. 2°, в которых следует положить $N = \infty$. При этом радиус сходимости полученного решения $y(x)$ будет равен радиусу сходимости ряда для функции $f(x)$.

2.2. Уравнения, ядра которых содержат экспоненциальные функции

2.2-1. Ядра уравнений, содержащие экспоненциальные функции

1. $y(x) + A \int_a^x e^{\lambda(x-t)} y(t) dt = f(x).$

Решение:

$$y(x) = f(x) - A \int_a^x e^{(\lambda-A)(x-t)} f(t) dt.$$

2. $y(x) + A \int_a^x e^{\lambda x + \beta t} y(t) dt = f(x).$

В случае $\beta = -\lambda$ см. уравнение 2.2.1. Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x) = -Ae^{\lambda x}$, $h(t) = e^{\beta t}$.

Решение:

$$y(x) = f(x) - \int_a^x R(x, t) f(t) dt, \quad R(x, t) = Ae^{\lambda x + \beta t} \exp \left\{ \frac{A}{\lambda + \beta} [e^{(\lambda + \beta)t} - e^{(\lambda + \beta)x}] \right\}.$$

$$3. \quad y(x) + A \int_a^x [e^{\lambda(x-t)} - 1] y(t) dt = f(x).$$

1°. Решение при $D \equiv \lambda(\lambda - 4A) > 0$:

$$y(x) = f(x) - \frac{2A\lambda}{\sqrt{D}} \int_a^x R(x-t) f(t) dt, \quad R(x) = \exp\left(\frac{1}{2}\lambda x\right) \operatorname{sh}\left(\frac{1}{2}\sqrt{D}x\right).$$

2°. Решение при $D \equiv \lambda(\lambda - 4A) < 0$:

$$y(x) = f(x) - \frac{2A\lambda}{\sqrt{|D|}} \int_a^x R(x-t) f(t) dt, \quad R(x) = \exp\left(\frac{1}{2}\lambda x\right) \sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{|D|x}\right).$$

3°. Решение при $\lambda = 4A$:

$$y(x) = f(x) - 4A^2 \int_a^x (x-t) \exp[2A(x-t)] f(t) dt.$$

$$4. \quad y(x) + \int_a^x [Ae^{\lambda(x-t)} + B] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.2.10 при $A_1 = A$, $A_2 = B$, $\lambda_1 = \lambda$, $\lambda_2 = 0$.

1°. Структура решения интегрального уравнения зависит от знака дискриминанта

$$D \equiv (A - B - \lambda)^2 + 4AB \quad (1)$$

квадратного уравнения

$$\mu^2 + (A + B - \lambda)\mu - B\lambda = 0. \quad (2)$$

2°. В случае $D > 0$ квадратное уравнение (2) имеет действительные (и различные) корни μ_1 и μ_2 :

$$\mu_1 = \frac{1}{2}(\lambda - A - B) + \frac{1}{2}\sqrt{D}, \quad \mu_2 = \frac{1}{2}(\lambda - A - B) - \frac{1}{2}\sqrt{D}.$$

При этом решение исходного интегрального уравнения имеет вид

$$y(x) = f(x) + \int_a^x [E_1 e^{\mu_1(x-t)} + E_2 e^{\mu_2(x-t)}] f(t) dt,$$

где

$$E_1 = A \frac{\mu_1}{\mu_2 - \mu_1} + B \frac{\mu_1 - \lambda}{\mu_2 - \mu_1}, \quad E_2 = A \frac{\mu_2}{\mu_1 - \mu_2} + B \frac{\mu_2 - \lambda}{\mu_1 - \mu_2}.$$

3°. В случае $D < 0$ квадратное уравнение (2) имеет комплексно сопряженные корни

$$\mu_1 = \sigma + i\beta, \quad \mu_2 = \sigma - i\beta, \quad \sigma = \frac{1}{2}(\lambda - A - B), \quad \beta = \frac{1}{2}\sqrt{-D}.$$

При этом решение исходного интегрального уравнения имеет вид

$$y(x) = f(x) + \int_a^x \left\{ E_1 e^{\sigma(x-t)} \cos[\beta(x-t)] + E_2 e^{\sigma(x-t)} \sin[\beta(x-t)] \right\} f(t) dt,$$

где

$$E_1 = -A - B, \quad E_2 = \frac{1}{\beta}(-A\sigma - B\sigma + B\lambda).$$

$$5. \quad y(x) + A \int_a^x (e^{\lambda x} - e^{\lambda t}) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.9.5 при $g(x) = Ae^{\lambda x}$.

Решение:

$$y(x) = f(x) + \frac{1}{W} \int_a^x [u'_1(x)u'_2(t) - u'_2(x)u'_1(t)] f(t) dt,$$

где штрихи обозначают производные по аргументам, указанным в круглых скобках, $u_1(x)$, $u_2(x)$ — фундаментальная система решений линейного однородного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка $u''_{xx} + A\lambda e^{\lambda x}u = 0$, которая выражается через функции Бесселя или модифицированные функции Бесселя в зависимости от знака произведения $A\lambda$.

При $A\lambda > 0$ имеем

$$W = \frac{\lambda}{\pi}, \quad u_1(x) = J_0\left(\frac{2\sqrt{A\lambda}}{\lambda}e^{\lambda x/2}\right), \quad u_2(x) = Y_0\left(\frac{2\sqrt{A\lambda}}{\lambda}e^{\lambda x/2}\right).$$

При $A\lambda < 0$ имеем

$$W = -\frac{\lambda}{2}, \quad u_1(x) = I_0\left(\frac{2\sqrt{|A\lambda|}}{\lambda}e^{\lambda x/2}\right), \quad u_2(x) = K_0\left(\frac{2\sqrt{|A\lambda|}}{\lambda}e^{\lambda x/2}\right).$$

$$6. \quad y(x) + \int_a^x (Ae^{\lambda x} + Be^{\lambda t})y(t) dt = f(x).$$

При $B = -A$ см. уравнение 2.2.5. Частный случай уравнения 2.9.6 при $g(x) = Ae^{\lambda x}$, $h(t) = Be^{\lambda t}$.

Исходное интегральное уравнение путем дифференцирования с последующей заменой $Y(x) = \int_a^x y(t) dt$ сводится к линейному обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка

$$Y''_{xx} + (A+B)e^{\lambda x}Y'_x + Ae^{\lambda x}Y = f'_x(x) \quad (1)$$

с начальными условиями

$$Y(a) = 0, \quad Y'_x(a) = f(a). \quad (2)$$

Фундаментальная система решений однородного уравнения (1) при $f \equiv 0$ имеет вид

$$Y_1(x) = \Phi\left(\frac{A}{m}, 1; -\frac{m}{\lambda}e^{\lambda x}\right), \quad Y_2(x) = \Psi\left(\frac{A}{m}, 1; -\frac{m}{\lambda}e^{\lambda x}\right), \quad m = A+B,$$

где $\Phi(\alpha, \beta; x)$ и $\Psi(\alpha, \beta; x)$ — вырожденные гипергеометрические функции.

Решение неоднородного уравнения (1) с граничными условиями (2) для произвольной функции $f = f(x)$ с учетом равенства $y(x) = Y'_x(x)$ приводит к решению интегрального уравнения в виде

$$y(x) = f(x) - \int_a^x R(x, t)f(t) dt, \\ R(x, t) = \frac{\Gamma(A/m)}{\lambda} \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} \left\{ \exp\left(\frac{m}{\lambda}e^{\lambda t}\right) [Y_1(x)Y_2(t) - Y_2(x)Y_1(t)] \right\}.$$

$$7. \quad y(x) + A \int_a^x [e^{\lambda(x+t)} - e^{2\lambda t}]y(t) dt = f(x).$$

Преобразование $z = e^{\lambda x}$, $\tau = e^{\lambda t}$ приводит к уравнению вида 2.1.4.

1°. Решение при $A\lambda > 0$:

$$y(x) = f(x) - \lambda k \int_a^x e^{\lambda t} \sin[k(e^{\lambda x} - e^{\lambda t})]f(t) dt, \quad k = \sqrt{A/\lambda}.$$

2°. Решение при $A\lambda < 0$:

$$y(x) = f(x) + \lambda k \int_a^x e^{\lambda t} \operatorname{sh}[k(e^{\lambda x} - e^{\lambda t})]f(t) dt, \quad k = \sqrt{|A/\lambda|}.$$

$$8. \quad y(x) + A \int_a^x [e^{\lambda x + \mu t} - e^{(\lambda + \mu)t}]y(t) dt = f(x).$$

Преобразование $z = e^{\mu x}$, $\tau = e^{\mu t}$, $Y(z) = y(x)$ приводит к уравнению вида 2.1.52:

$$Y(z) + \frac{A}{\mu} \int_b^z (z^k - \tau^k)Y(\tau) d\tau = F(z), \quad F(z) = f(x),$$

где $k = \lambda/\mu$, $b = e^{\mu a}$.

$$9. \quad y(x) + A \int_a^x [\lambda e^{\lambda x + \mu t} - (\lambda + \mu)e^{(\lambda + \mu)x}]y(t) dt = f(x).$$

Это уравнение получается путем дифференцирования уравнения вида 1.2.22:

$$\int_a^x [1 + Ae^{\lambda x}(e^{\mu t} - e^{\mu x})]y(t) dt = F(x), \quad F(x) = \int_a^x f(t) dt.$$

Решение:

$$y(x) = \frac{d}{dx} \left\{ e^{\lambda x} \Phi(x) \int_a^x \left[\frac{F(t)}{e^{\lambda t}} \right]'_t \frac{dt}{\Phi(t)} \right\}, \quad \Phi(x) = \exp \left[\frac{A\mu}{\lambda + \mu} e^{(\lambda + \mu)x} \right].$$

$$10. \quad y(x) + \int_a^x [A_1 e^{\lambda_1(x-t)} + A_2 e^{\lambda_2(x-t)}] y(t) dt = f(x).$$

1°. Введем обозначения

$$I_1 = \int_a^x e^{\lambda_1(x-t)} y(t) dt, \quad I_2 = \int_a^x e^{\lambda_2(x-t)} y(t) dt.$$

Продифференцируем дважды интегральное уравнение. В результате имеем (первым записано исходное уравнение)

$$y + A_1 I_1 + A_2 I_2 = f, \quad f = f(x), \quad (1)$$

$$y'_x + (A_1 + A_2)y + A_1 \lambda_1 I_1 + A_2 \lambda_2 I_2 = f'_x, \quad (2)$$

$$y''_{xx} + (A_1 + A_2)y'_x + (A_1 \lambda_1 + A_2 \lambda_2)y + A_1 \lambda_1^2 I_1 + A_2 \lambda_2^2 I_2 = f''_{xx}. \quad (3)$$

Исключая отсюда величины I_1 и I_2 , приходим к линейному обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка с постоянными коэффициентами

$$y''_{xx} + (A_1 + A_2 - \lambda_1 - \lambda_2)y'_x + (\lambda_1 \lambda_2 - A_1 \lambda_2 - A_2 \lambda_1)y = f''_{xx} - (\lambda_1 + \lambda_2)f'_x + \lambda_1 \lambda_2 f. \quad (4)$$

Подставляя значение $x = a$ в равенства (1) и (2), получим начальные условия

$$y(a) = f(a), \quad y'_x(a) = f'_x(a) - (A_1 + A_2)f(a). \quad (5)$$

Решение дифференциального уравнения (4) с условиями (5) позволяет найти решение интегрального уравнения.

2°. Рассмотрим характеристическое уравнение

$$\mu^2 + (A_1 + A_2 - \lambda_1 - \lambda_2)\mu + \lambda_1 \lambda_2 - A_1 \lambda_2 - A_2 \lambda_1 = 0, \quad (6)$$

которое соответствует однородному дифференциальному уравнению (4) при $f(x) \equiv 0$. Структура решения интегрального уравнения зависит от знака дискриминанта квадратного уравнения (6)

$$D \equiv (A_1 - A_2 - \lambda_1 + \lambda_2)^2 + 4A_1 A_2.$$

В случае $D > 0$ квадратное уравнение (6) имеет действительные (и различные) корни μ_1 и μ_2 :

$$\mu_1 = \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2 - A_1 - A_2) + \frac{1}{2}\sqrt{D}, \quad \mu_2 = \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2 - A_1 - A_2) - \frac{1}{2}\sqrt{D}.$$

При этом решение исходного интегрального уравнения имеет вид

$$y(x) = f(x) + \int_a^x [B_1 e^{\mu_1(x-t)} + B_2 e^{\mu_2(x-t)}] f(t) dt,$$

где

$$B_1 = A_1 \frac{\mu_1 - \lambda_2}{\mu_2 - \mu_1} + A_2 \frac{\mu_1 - \lambda_1}{\mu_2 - \mu_1}, \quad B_2 = A_1 \frac{\mu_2 - \lambda_2}{\mu_1 - \mu_2} + A_2 \frac{\mu_2 - \lambda_1}{\mu_1 - \mu_2}.$$

В случае $D < 0$ квадратное уравнение (6) имеет комплексно сопряженные корни

$$\mu_1 = \sigma + i\beta, \quad \mu_2 = \sigma - i\beta, \quad \sigma = \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2 - A_1 - A_2), \quad \beta = \frac{1}{2}\sqrt{-D}.$$

При этом решение исходного интегрального уравнения имеет вид

$$y(x) = f(x) + \int_a^x \{B_1 e^{\sigma(x-t)} \cos[\beta(x-t)] + B_2 e^{\sigma(x-t)} \sin[\beta(x-t)]\} f(t) dt.$$

где

$$B_1 = -A_1 - A_2, \quad B_2 = \frac{1}{\beta} [A_1(\lambda_2 - \sigma) + A_2(\lambda_1 - \sigma)].$$

$$11. \quad y(x) + \int_a^x [Ae^{\lambda(x+t)} - Ae^{2\lambda t} + Be^{\lambda t}] y(t) dt = f(x).$$

Преобразование $z = e^{\lambda x}$, $\tau = e^{\lambda t}$, $Y(z) = y(x)$ приводит к уравнению вида 2.1.5:

$$Y(z) + \int_b^z [B_1(z - \tau) + A_1] Y(\tau) d\tau = F(z), \quad F(z) = f(x),$$

где $A_1 = B/\lambda$, $B_1 = A/\lambda$, $b = e^{\lambda a}$.

$$12. \quad y(x) + \int_a^x [Ae^{\lambda(x+t)} + Be^{2\lambda t} + Ce^{\lambda t}]y(t) dt = f(x).$$

Преобразование $z = e^{\lambda x}$, $\tau = e^{\lambda t}$, $Y(z) = y(x)$ приводит к уравнению вида 2.1.6:

$$Y(z) - \int_b^z (A_1 z + B_1 \tau + C_1) Y(\tau) d\tau = F(z), \quad F(z) = f(x),$$

где $A_1 = -A/\lambda$, $B_1 = -B/\lambda$, $C_1 = -C/\lambda$, $b = e^{\lambda a}$.

$$13. \quad y(x) + \int_a^x [\lambda e^{\lambda(x-t)} + A(\mu e^{\mu x + \lambda t} - \lambda e^{\lambda x + \mu t})]y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.9.23 при $h(t) = A$.

Решение:

$$y(x) = \frac{1}{e^{\lambda x}} \frac{d}{dx} \left\{ \Phi(x) \int_a^x \left[\frac{F(t)}{e^{\lambda t}} \right]'_t \frac{e^{2\lambda t}}{\Phi(t)} dt \right\},$$

$$\Phi(x) = \exp \left[A \frac{\lambda - \mu}{\lambda + \mu} e^{(\lambda + \mu)x} \right], \quad F(x) = \int_a^x f(t) dt.$$

$$14. \quad y(x) - \int_a^x [\lambda e^{-\lambda(x-t)} + A(\mu e^{\lambda x + \mu t} - \lambda e^{\mu x + \lambda t})]y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.9.24 при $h(x) = A$.

Считаем, что $f(a) = 0$. Решение:

$$y(x) = \int_a^x w(t) dt, \quad w(x) = e^{-\lambda x} \frac{d}{dx} \left\{ \frac{e^{2\lambda x}}{\Phi(x)} \int_a^x \left[\frac{f(t)}{e^{\lambda t}} \right]'_t \Phi(t) dt \right\},$$

$$\Phi(x) = \exp \left[A \frac{\lambda - \mu}{\lambda + \mu} e^{(\lambda + \mu)x} \right].$$

$$15. \quad y(x) + \int_a^x [\lambda e^{\lambda(x-t)} + Ae^{\beta t}(\mu e^{\mu x + \lambda t} - \lambda e^{\lambda x + \mu t})]y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.9.23 при $h(t) = Ae^{\beta t}$.

Решение:

$$y(x) = e^{-(\lambda + \beta)x} \frac{d}{dx} \left\{ \Phi(x) \int_a^x \left[\frac{F(t)}{e^{\lambda t}} \right]'_t \frac{e^{(2\lambda + \beta)t}}{\Phi(t)} dt \right\},$$

$$\Phi(x) = \exp \left[A \frac{\lambda - \mu}{\lambda + \mu + \beta} e^{(\lambda + \mu + \beta)x} \right], \quad F(x) = \int_a^x f(t) dt.$$

$$16. \quad y(x) - \int_a^x [\lambda e^{-\lambda(x-t)} + Ae^{\beta x}(\mu e^{\lambda x + \mu t} - \lambda e^{\mu x + \lambda t})]y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.9.24 при $h(x) = Ae^{\beta x}$.

Считаем, что $f(a) = 0$. Решение:

$$y(x) = \int_a^x w(t) dt, \quad w(x) = e^{-\lambda x} \frac{d}{dx} \left\{ \frac{e^{(2\lambda + \beta)x}}{\Phi(x)} \int_a^x \left[\frac{f(t)}{e^{(\lambda + \beta)t}} \right]'_t \Phi(t) dt \right\},$$

$$\Phi(x) = \exp \left[A \frac{\lambda - \mu}{\lambda + \mu + \beta} e^{(\lambda + \mu + \beta)x} \right].$$

$$17. \quad y(x) + \int_a^x [ABe^{(\lambda+1)x+t} - AB e^{\lambda x + 2t} - Ae^{\lambda x + t} - Be^t]y(t) dt = f(x).$$

Преобразование $z = e^x$, $\tau = e^t$, $Y(z) = y(x)$ приводит к уравнению вида 2.1.56:

$$Y(z) + \int_b^z (ABz^{\lambda+1} - ABz^{\lambda}\tau - Az^{\lambda} - B)Y(\tau) d\tau = F(z),$$

где $F(z) = f(x)$, $b = e^a$.

$$18. \quad y(x) + \int_a^x [ABe^{x+\lambda t} - ABe^{(\lambda+1)t} + Ae^{\lambda t} + Be^t] y(t) dt = f(x).$$

Преобразование $z = e^x$, $\tau = e^t$, $Y(z) = y(x)$ приводит к уравнению вида 2.1.57 (в котором параметр λ переобозначен на $\lambda - 1$):

$$Y(z) + \int_b^z (ABz\tau^{\lambda-1} - AB\tau^\lambda + A\tau^{\lambda-1} + B)Y(\tau) d\tau = F(z),$$

где $F(z) = f(x)$, $b = e^a$.

$$19. \quad y(x) + \int_a^x \left[\sum_{k=1}^n A_k e^{\lambda_k(x-t)} \right] y(t) dt = f(x).$$

1°. Это интегральное уравнение можно привести к линейному неоднородному обыкновенному дифференциальному уравнению n -го порядка с постоянными коэффициентами. Обозначим

$$I_k(x) = \int_a^x e^{\lambda_k(x-t)} y(t) dt. \quad (1)$$

Продифференцируем (1) по x . В результате имеем

$$I'_k = y(x) + \lambda_k \int_a^x e^{\lambda_k(x-t)} y(t) dt, \quad (2)$$

где штрих обозначает производную по x . Из сопоставления формул (1) и (2) получим связь между I'_k и I_k :

$$I'_k = y(x) + \lambda_k I_k, \quad I_k = I_k(x). \quad (3)$$

Теперь интегральное уравнение можно записать в виде

$$y(x) + \sum_{k=1}^n A_k I_k = f(x). \quad (4)$$

Дифференцируя (4) по x , с учетом равенств (3) имеем

$$y'_x(x) + \sigma_n y(x) + \sum_{k=1}^n A_k \lambda_k I_k = f'_x(x), \quad \sigma_n = \sum_{k=1}^n A_k. \quad (5)$$

Исключая интеграл I_n из (4) и (5), получим

$$y'_x(x) + (\sigma_n - \lambda_n) y(x) + \sum_{k=1}^{n-1} A_k (\lambda_k - \lambda_n) I_k = f'_x(x) - \lambda_n f(x). \quad (6)$$

Дифференцируя это равенство по x и исключая интеграл I_{n-1} из полученного выражения с помощью (6), придем к аналогичному равенству, в левой части которого будет стоять линейный дифференциальный оператор второго порядка с постоянными коэффициентами (действующий на y) и сумма $\sum_{k=1}^{n-2} A_k I_k$. Продолжая далее с помощью дифференцирования и формулы (3) последовательно исключать слагаемые $I_{n-2}, I_{n-3}, \dots, I_1$, придем в итоге к линейному неоднородному обыкновенному дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами порядка n .

Граничные условия для функции $y(x)$ находятся в результате подстановки значения $x = a$ в интегральное уравнение и все его следствия, полученные с помощью дифференцирования.

2°. Решение уравнения можно представить в виде

$$y(x) = f(x) + \int_a^x \left[\sum_{k=1}^n B_k e^{\mu_k(x-t)} \right] f(t) dt. \quad (7)$$

Неизвестные постоянные μ_k являются корнями алгебраического уравнения

$$\sum_{k=1}^n \frac{A_k}{z - \lambda_k} + 1 = 0, \quad (8)$$

которое после приведения к общему знаменателю сводится к задаче об определении корней характеристического многочлена n -й степени.

Коэффициенты B_k находятся после определения μ_k из системы линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{k=1}^n \frac{B_k}{\lambda_m - \mu_k} + 1 = 0, \quad m = 1, \dots, n. \quad (9)$$

Другой способ определения коэффициентов B_k описан ниже в п. 3°.

Если все корни μ_k уравнения (8) действительны и различны, то формула (7) дает решение исходного интегрального уравнения.

Паре комплексно сопряженных корней $\mu_{k,k+1} = \alpha \pm i\beta$ характеристического многочлена (8) отвечает пара комплексно сопряженных коэффициентов $B_{k,k+1}$ в уравнениях (9). В этом случае в решении (7) соответствующую пару слагаемых $B_k e^{\mu_k(x-t)} + B_{k+1} e^{\mu_{k+1}(x-t)}$ можно представить в виде $\bar{B}_k e^{\alpha(x-t)} [\cos \beta(x-t)] + \bar{B}_{k+1} e^{\alpha(x-t)} [\sin \beta(x-t)]$, где \bar{B}_k и \bar{B}_{k+1} — действительные коэффициенты.

3°. При $a = 0$ решение исходного интегрального уравнения можно получить по формуле

$$y(x) = f(x) - \int_0^x R(x-t)f(t) dt, \quad R(x) = \mathfrak{L}^{-1}[\bar{R}(p)], \quad (10)$$

где $\mathfrak{L}^{-1}[\bar{R}(p)]$ — обратное преобразование Лапласа следующей функции:

$$\bar{R}(p) = \frac{\bar{K}(p)}{1 + \bar{K}(p)}, \quad \bar{K}(p) = \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{p - \lambda_k}. \quad (11)$$

Образ резольвенты $\bar{R}(p)$ можно представить в виде правильной дробно-рациональной функции

$$\bar{R}(p) = \frac{Q(p)}{P(p)}, \quad P(p) = (p - \mu_1)(p - \mu_2) \dots (p - \mu_n),$$

где $Q(p)$ — полином относительно p , степень которого меньше n . Корни μ_k полинома $P(p)$ совпадают с корнями уравнения (8). Если все корни μ_k действительны и различны, то резольвента в решении (10) определяется по формуле

$$R(x) = \sum_{k=1}^n B_k e^{\mu_k x}, \quad B_k = \frac{Q(\mu_k)}{P'(\mu_k)},$$

где штрих обозначает производную.

2.2-2. Ядра уравнений, содержащие степенные и экспоненциальные функции

20. $y(x) + A \int_a^x x e^{\lambda(x-t)} y(t) dt = f(x).$

Решение:

$$y(x) = f(x) - A \int_a^x x \exp\left[\frac{1}{2}A(t^2 - x^2) + \lambda(x-t)\right] f(t) dt.$$

21. $y(x) + A \int_a^x t e^{\lambda(x-t)} y(t) dt = f(x).$

Решение:

$$y(x) = f(x) - A \int_a^x t \exp\left[\frac{1}{2}A(t^2 - x^2) + \lambda(x-t)\right] f(t) dt.$$

22. $y(x) + A \int_a^x (x-t) e^{\lambda t} y(t) dt = f(x).$

Частный случай уравнения 2.9.4 при $g(t) = A e^{\lambda t}$.

Решение:

$$y(x) = f(x) + \frac{A}{W} \int_a^x [u_1(x)u_2(t) - u_2(x)u_1(t)] e^{\lambda t} f(t) dt,$$

где $u_1(x), u_2(x)$ — фундаментальная система решений линейного однородного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка $u''_{xx} + Ae^{\lambda x}u = 0$, которая выражается через функции Бесселя или модифицированные функции Бесселя в зависимости от знака параметра A :

$$W = \frac{\lambda}{\pi}, \quad u_1(x) = J_0\left(\frac{2\sqrt{A}}{\lambda}e^{\lambda x/2}\right), \quad u_2(x) = Y_0\left(\frac{2\sqrt{A}}{\lambda}e^{\lambda x/2}\right) \quad \text{при } A > 0,$$

$$W = -\frac{\lambda}{2}, \quad u_1(x) = I_0\left(\frac{2\sqrt{|A|}}{\lambda}e^{\lambda x/2}\right), \quad u_2(x) = K_0\left(\frac{2\sqrt{|A|}}{\lambda}e^{\lambda x/2}\right) \quad \text{при } A < 0.$$

23. $y(x) + A \int_a^x (x-t)e^{\lambda(x-t)}y(t) dt = f(x).$

1°. Решение при $A > 0$:

$$y(x) = f(x) - k \int_a^x e^{\lambda(x-t)} \sin[k(x-t)]f(t) dt, \quad k = \sqrt{A}.$$

2°. Решение при $A < 0$:

$$y(x) = f(x) + k \int_a^x e^{\lambda(x-t)} \operatorname{sh}[k(x-t)]f(t) dt, \quad k = \sqrt{-A}.$$

24. $y(x) + A \int_a^x (x-t)e^{\lambda x + \mu t}y(t) dt = f(x).$

Замена $u(x) = e^{-\lambda x}y(x)$ приводит к уравнению вида 2.2.22:

$$u(x) + A \int_a^x (x-t)e^{(\lambda+\mu)t}u(t) dt = f(x)e^{-\lambda x}.$$

25. $y(x) - \int_a^x (Ax + Bt + C)e^{\lambda(x-t)}y(t) dt = f(x).$

Замена $u(x) = e^{-\lambda x}y(x)$ приводит к уравнению вида 2.1.6:

$$u(x) - \int_a^x (Ax + Bt + C)u(t) dt = f(x)e^{-\lambda x}.$$

26. $y(x) + A \int_a^x x^2 e^{\lambda(x-t)}y(t) dt = f(x).$

Решение:

$$y(x) = f(x) - A \int_a^x x^2 \exp\left[\frac{1}{3}A(t^3 - x^3) + \lambda(x-t)\right]f(t) dt.$$

27. $y(x) + A \int_a^x xte^{\lambda(x-t)}y(t) dt = f(x).$

Решение:

$$y(x) = f(x) - A \int_a^x xt \exp\left[\frac{1}{3}A(t^3 - x^3) + \lambda(x-t)\right]f(t) dt.$$

28. $y(x) + A \int_a^x t^2 e^{\lambda(x-t)}y(t) dt = f(x).$

Решение:

$$y(x) = f(x) - A \int_a^x t^2 \exp\left[\frac{1}{3}A(t^3 - x^3) + \lambda(x-t)\right]f(t) dt.$$

29. $y(x) + A \int_a^x (x-t)^2 e^{\lambda(x-t)}y(t) dt = f(x).$

Решение:

$$y(x) = f(x) - \int_a^x R(x-t)f(t) dt,$$

$$R(x) = \frac{2}{3}ke^{(\lambda-2k)x} - \frac{2}{3}ke^{(\lambda+k)x}[\cos(\sqrt{3}kx) - \sqrt{3}\sin(\sqrt{3}kx)], \quad k = \left(\frac{1}{4}A\right)^{1/3}.$$

$$30. \quad y(x) + A \int_0^x (x^2 - t^2) e^{\lambda(x-t)} y(t) dt = f(x).$$

Замена $u(x) = e^{-\lambda x} y(x)$ приводит к уравнению вида 2.1.11:

$$u(x) + A \int_0^x (x^2 - t^2) u(t) dt = f(x) e^{-\lambda x}.$$

$$31. \quad y(x) + A \int_a^x (x-t)^n e^{\lambda(x-t)} y(t) dt = f(x), \quad n = 1, 2, \dots$$

Решение:

$$y(x) = f(x) + \int_a^x R(x-t) f(t) dt,$$

$$R(x) = \frac{1}{n+1} e^{\lambda x} \sum_{k=0}^n \exp(\sigma_k x) [\sigma_k \cos(\beta_k x) - \beta_k \sin(\beta_k x)],$$

где

$$\sigma_k = |An!|^{\frac{1}{n+1}} \cos\left(\frac{2\pi k}{n+1}\right), \quad \beta_k = |An!|^{\frac{1}{n+1}} \sin\left(\frac{2\pi k}{n+1}\right) \quad \text{при } A < 0,$$

$$\sigma_k = |An!|^{\frac{1}{n+1}} \cos\left(\frac{2\pi k + \pi}{n+1}\right), \quad \beta_k = |An!|^{\frac{1}{n+1}} \sin\left(\frac{2\pi k + \pi}{n+1}\right) \quad \text{при } A > 0.$$

$$32. \quad y(x) + b \int_a^x \frac{\exp[\lambda(x-t)]}{\sqrt{x-t}} y(t) dt = f(x).$$

Решение:

$$y(x) = e^{\lambda x} \left\{ F(x) + \pi b^2 \int_a^x \exp[\pi b^2(x-t)] F(t) dt \right\},$$

где

$$F(x) = e^{-\lambda x} f(x) - b \int_a^x \frac{e^{-\lambda t} f(t)}{\sqrt{x-t}} dt.$$

$$33. \quad y(x) + A \int_a^x (x-t) t^k e^{\lambda(x-t)} y(t) dt = f(x).$$

Замена $u(x) = e^{-\lambda x} y(x)$ приводит к уравнению вида 2.1.49:

$$u(x) + A \int_a^x (x-t) t^k u(t) dt = f(x) e^{-\lambda x}.$$

$$34. \quad y(x) + A \int_a^x (x^k - t^k) e^{\lambda(x-t)} y(t) dt = f(x).$$

Замена $u(x) = e^{-\lambda x} y(x)$ приводит к уравнению вида 2.1.52:

$$u(x) + A \int_a^x (x^k - t^k) u(t) dt = f(x) e^{-\lambda x}.$$

$$35. \quad y(x) - \lambda \int_0^x \frac{e^{\mu(x-t)}}{(x-t)^\alpha} y(t) dt = f(x), \quad 0 < \alpha < 1.$$

Решение:

$$y(x) = f(x) + \int_0^x R(x-t) f(t) dt, \quad \text{где } R(x) = e^{\mu x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[\lambda \Gamma(1-\alpha) x^{1-\alpha}]^n}{x \Gamma[n(1-\alpha)]}.$$

$$36. \quad y(x) + A \int_a^x \exp[\lambda(x^2 - t^2)] y(t) dt = f(x).$$

Решение:

$$y(x) = f(x) - A \int_a^x \exp[\lambda(x^2 - t^2) - A(x-t)] f(t) dt.$$

$$37. \quad y(x) + A \int_a^x \exp(\lambda x^2 + \beta t^2) y(t) dt = f(x).$$

При $\beta = -\lambda$ см. уравнение 2.2.36. Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x) = -A \exp(\lambda x^2)$, $h(t) = \exp(\beta t^2)$.

$$38. \quad y(x) + A \int_x^\infty \exp(-\lambda \sqrt{t-x}) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.9.62 при $K(x) = A \exp(-\lambda \sqrt{-x})$.

$$39. \quad y(x) + A \int_a^x \exp[\lambda(x^\mu - t^\mu)] y(t) dt = f(x), \quad \mu > 0.$$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x) = -A \exp(\lambda x^\mu)$, $h(t) = \exp(-\lambda t^\mu)$.

Решение:

$$y(x) = f(x) - A \int_a^x \exp[\lambda(x^\mu - t^\mu) - A(x-t)] f(t) dt.$$

$$40. \quad y(x) + k \int_0^x \frac{1}{x} \exp\left(-\lambda \frac{t}{x}\right) y(t) dt = g(x).$$

Частный случай уравнения 2.9.71 при $f(z) = k e^{-\lambda z}$.

Для правой части полиномиального вида $g(x) = \sum_{n=0}^N A_n x^n$ решение интегрального уравнения определяется по формуле

$$y(x) = \sum_{n=0}^N \frac{A_n}{1 + k B_n} x^n, \quad B_n = \frac{n!}{\lambda^{n+1}} - e^{-\lambda} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!} \frac{1}{\lambda^{n-k+1}}.$$

2.3. Уравнения, ядра которых содержат гиперболические функции

2.3-1. Ядра уравнений, содержащие гиперболический косинус

$$1. \quad y(x) - A \int_a^x \operatorname{ch}(\lambda x) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x) = A \operatorname{ch}(\lambda x)$, $h(t) = 1$.

Решение:

$$y(x) = f(x) + A \int_a^x \operatorname{ch}(\lambda x) \exp\left\{\frac{A}{\lambda} [\operatorname{sh}(\lambda x) - \operatorname{sh}(\lambda t)]\right\} f(t) dt.$$

$$2. \quad y(x) - A \int_a^x \operatorname{ch}(\lambda t) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x) = A$, $h(t) = \operatorname{ch}(\lambda t)$.

Решение:

$$y(x) = f(x) + A \int_a^x \operatorname{ch}(\lambda t) \exp\left\{\frac{A}{\lambda} [\operatorname{sh}(\lambda x) - \operatorname{sh}(\lambda t)]\right\} f(t) dt.$$

$$3. \quad y(x) + A \int_a^x \operatorname{ch}[\lambda(x-t)] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.9.28 при $g(t) = A$. Поэтому решение данного интегрального уравнения сводится к решению линейного неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

$$y''_{xx} + A y'_x - \lambda^2 y = f'_{xx} - \lambda^2 f, \quad f = f(x),$$

которое следует дополнить начальными условиями

$$y(a) = f(a), \quad y'_x(a) = f'_x(a) - A f(a).$$

Решение:

$$y(x) = f(x) + \int_a^x R(x-t)f(t) dt,$$

$$R(x) = \exp\left(-\frac{1}{2}Ax\right) \left[\frac{A^2}{2k} \operatorname{sh}(kx) - A \operatorname{ch}(kx) \right], \quad k = \sqrt{\lambda^2 + \frac{1}{4}A^2}.$$

$$4. \quad y(x) + \int_a^x \left\{ \sum_{k=1}^n A_k \operatorname{ch}[\lambda_k(x-t)] \right\} y(t) dt = f(x).$$

Это уравнение приводится к уравнению вида 2.2.19 путем замены гиперболических функций на экспоненциальные с помощью формулы $\operatorname{ch} z = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z})$. Поэтому рассматриваемое интегральное уравнение можно свести к линейному неоднородному обыкновенному дифференциальному уравнению $2n$ -го порядка с постоянными коэффициентами.

$$5. \quad y(x) - A \int_a^x \frac{\operatorname{ch}(\lambda x)}{\operatorname{ch}(\lambda t)} y(t) dt = f(x).$$

Решение:

$$y(x) = f(x) + A \int_a^x e^{A(x-t)} \frac{\operatorname{ch}(\lambda x)}{\operatorname{ch}(\lambda t)} f(t) dt.$$

$$6. \quad y(x) - A \int_a^x \frac{\operatorname{ch}(\lambda t)}{\operatorname{ch}(\lambda x)} y(t) dt = f(x).$$

Решение:

$$y(x) = f(x) + A \int_a^x e^{A(x-t)} \frac{\operatorname{ch}(\lambda t)}{\operatorname{ch}(\lambda x)} f(t) dt.$$

$$7. \quad y(x) - A \int_a^x \operatorname{ch}^k(\lambda x) \operatorname{ch}^m(\mu t) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x) = A \operatorname{ch}^k(\lambda x)$, $h(t) = \operatorname{ch}^m(\mu t)$.

$$8. \quad y(x) + A \int_a^x t \operatorname{ch}[\lambda(x-t)] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.9.28 при $g(t) = At$.

$$9. \quad y(x) + A \int_a^x t^k \operatorname{ch}^m(\lambda x) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x) = -A \operatorname{ch}^m(\lambda x)$, $h(t) = t^k$.

$$10. \quad y(x) + A \int_a^x x^k \operatorname{ch}^m(\lambda t) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x) = -Ax^k$, $h(t) = \operatorname{ch}^m(\lambda t)$.

$$11. \quad y(x) - \int_a^x [A \operatorname{ch}(kx) + B - AB(x-t) \operatorname{ch}(kx)] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.9.7 при $\lambda = B$, $g(x) = A \operatorname{ch}(kx)$.

Решение:

$$y(x) = f(x) + \int_a^x R(x,t)f(t) dt,$$

$$R(x,t) = [A \operatorname{ch}(kx) + B] \frac{G(x)}{G(t)} + \frac{B^2}{G(t)} \int_t^x e^{B(x-s)} G(s) ds, \quad G(x) = \exp\left[\frac{A}{k} \operatorname{sh}(kx)\right].$$

$$12. \quad y(x) + \int_a^x [A \operatorname{ch}(kt) + B + AB(x-t) \operatorname{ch}(kt)] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.9.8 при $\lambda = B$, $g(t) = A \operatorname{ch}(kt)$.

Решение:

$$y(x) = f(x) + \int_a^x R(x, t) f(t) dt,$$

$$R(x, t) = -[A \operatorname{ch}(kt) + B] \frac{G(t)}{G(x)} + \frac{B^2}{G(x)} \int_t^x e^{B(t-s)} G(s) ds, \quad G(x) = \exp\left[\frac{A}{k} \operatorname{sh}(kx)\right].$$

$$13. \quad y(x) + A \int_x^\infty \operatorname{ch}(\lambda\sqrt{t-x}) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.9.62 при $K(x) = A \operatorname{ch}(\lambda\sqrt{-x})$.

2.3-2. Ядра уравнений, содержащие гиперболический синус

$$14. \quad y(x) - A \int_a^x \operatorname{sh}(\lambda x) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x) = A \operatorname{sh}(\lambda x)$, $h(t) = 1$.

Решение:

$$y(x) = f(x) + A \int_a^x \operatorname{sh}(\lambda x) \exp\left\{\frac{A}{\lambda} [\operatorname{ch}(\lambda x) - \operatorname{ch}(\lambda t)]\right\} f(t) dt.$$

$$15. \quad y(x) - A \int_a^x \operatorname{sh}(\lambda t) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x) = A$, $h(t) = \operatorname{sh}(\lambda t)$.

Решение:

$$y(x) = f(x) + A \int_a^x \operatorname{sh}(\lambda t) \exp\left\{\frac{A}{\lambda} [\operatorname{ch}(\lambda x) - \operatorname{ch}(\lambda t)]\right\} f(t) dt.$$

$$16. \quad y(x) + A \int_a^x \operatorname{sh}[\lambda(x-t)] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.9.30 при $g(x) = A$.

1°. Решение при $\lambda(A - \lambda) > 0$:

$$y(x) = f(x) - \frac{A\lambda}{k} \int_a^x \sin[k(x-t)] f(t) dt, \quad \text{где } k = \sqrt{\lambda(A - \lambda)}.$$

2°. Решение при $\lambda(A - \lambda) < 0$:

$$y(x) = f(x) - \frac{A\lambda}{k} \int_a^x \operatorname{sh}[k(x-t)] f(t) dt, \quad \text{где } k = \sqrt{\lambda(\lambda - A)}.$$

3°. Решение при $A = \lambda$:

$$y(x) = f(x) - \lambda^2 \int_a^x (x-t) f(t) dt.$$

$$17. \quad y(x) + A \int_a^x \operatorname{sh}^3[\lambda(x-t)] y(t) dt = f(x).$$

Используя формулу $\operatorname{sh}^3 \beta = \frac{1}{4} \operatorname{sh} 3\beta - \frac{3}{4} \operatorname{sh} \beta$, приходим к уравнению вида 2.3.18:

$$y(x) + \int_a^x \left\{ \frac{1}{4} A \operatorname{sh}[3\lambda(x-t)] - \frac{3}{4} A \operatorname{sh}[\lambda(x-t)] \right\} y(t) dt = f(x).$$

$$18. \quad y(x) + \int_a^x \{A_1 \operatorname{sh}[\lambda_1(x-t)] + A_2 \operatorname{sh}[\lambda_2(x-t)]\} y(t) dt = f(x).$$

1°. Введем обозначения

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_a^x \operatorname{sh}[\lambda_1(x-t)] y(t) dt, & I_2 &= \int_a^x \operatorname{sh}[\lambda_2(x-t)] y(t) dt, \\ J_1 &= \int_a^x \operatorname{ch}[\lambda_1(x-t)] y(t) dt, & J_2 &= \int_a^x \operatorname{ch}[\lambda_2(x-t)] y(t) dt. \end{aligned}$$

Продифференцируем последовательно интегральное уравнение четыре раза. В результате имеем (первым записано исходное уравнение)

$$y + A_1 I_1 + A_2 I_2 = f, \quad f = f(x), \quad (1)$$

$$y'_x + A_1 \lambda_1 J_1 + A_2 \lambda_2 J_2 = f'_x, \quad (2)$$

$$y''_{xx} + (A_1 \lambda_1 + A_2 \lambda_2) y + A_1 \lambda_1^2 I_1 + A_2 \lambda_2^2 I_2 = f''_{xx}, \quad (3)$$

$$y'''_{xxx} + (A_1 \lambda_1 + A_2 \lambda_2) y'_x + A_1 \lambda_1^3 J_1 + A_2 \lambda_2^3 J_2 = f'''_{xxx}, \quad (4)$$

$$y''''_{xxxx} + (A_1 \lambda_1 + A_2 \lambda_2) y''_{xx} + (A_1 \lambda_1^3 + A_2 \lambda_2^3) y + A_1 \lambda_1^4 I_1 + A_2 \lambda_2^4 I_2 = f''''_{xxxx}. \quad (5)$$

Исключая из равенств (1), (3), (5) величины I_1 и I_2 , приходим к линейному обыкновенному дифференциальному уравнению четвертого порядка с постоянными коэффициентами

$$\begin{aligned} y''''_{xxxx} - (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 - A_1 \lambda_1 - A_2 \lambda_2) y''_{xx} + (\lambda_1^2 \lambda_2^2 - A_1 \lambda_1 \lambda_2^2 - A_2 \lambda_1^2 \lambda_2) y = \\ f''''_{xxxx} - (\lambda_1^2 + \lambda_2^2) f''_{xx} + \lambda_1^2 \lambda_2^2 f. \end{aligned} \quad (6)$$

Подставляя значение $x = a$ в равенства (1)–(4), получим начальные условия

$$\begin{aligned} y(a) &= f(a), & y'_x(a) &= f'_x(a), \\ y''_{xx}(a) &= f''_{xx}(a) - (A_1 \lambda_1 + A_2 \lambda_2) f(a), \\ y'''_{xxx}(a) &= f'''_{xxx}(a) - (A_1 \lambda_1 + A_2 \lambda_2) f'_x(a). \end{aligned} \quad (7)$$

Решение дифференциального уравнения (6) с условиями (7) позволяет найти решение интегрального уравнения.

2°. Рассмотрим характеристическое уравнение

$$z^2 - (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 - A_1 \lambda_1 - A_2 \lambda_2) z + \lambda_1^2 \lambda_2^2 - A_1 \lambda_1 \lambda_2^2 - A_2 \lambda_1^2 \lambda_2 = 0, \quad (8)$$

корни которого z_1 и z_2 определяют структуру решения интегрального уравнения.

Будем считать, что дискриминант уравнения (8) положителен:

$$D \equiv (A_1 \lambda_1 - A_2 \lambda_2 - \lambda_1^2 + \lambda_2^2)^2 + 4A_1 A_2 \lambda_1 \lambda_2 > 0.$$

В этом случае квадратное уравнение (8) имеет действительные (и различные) корни z_1 и z_2 :

$$z_1 = \frac{1}{2} (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 - A_1 \lambda_1 - A_2 \lambda_2) + \frac{1}{2} \sqrt{D}, \quad z_2 = \frac{1}{2} (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 - A_1 \lambda_1 - A_2 \lambda_2) - \frac{1}{2} \sqrt{D}.$$

В зависимости от знаков корней z_1 и z_2 возможны три ситуации.

Случай 1. При $z_1 > 0$ и $z_2 > 0$ решение интегрального уравнения имеет следующий вид ($i = 1, 2$):

$$y(x) = f(x) + \int_a^x \{B_1 \operatorname{sh}[\mu_1(x-t)] + B_2 \operatorname{sh}[\mu_2(x-t)]\} f(t) dt, \quad \mu_i = \sqrt{z_i},$$

где коэффициенты B_1 и B_2 определяются по формулам

$$B_1 = A_1 \frac{\lambda_1(\mu_1^2 - \lambda_2^2)}{\mu_1(\mu_2^2 - \mu_1^2)} + A_2 \frac{\lambda_2(\mu_1^2 - \lambda_1^2)}{\mu_1(\mu_2^2 - \mu_1^2)}, \quad B_2 = A_1 \frac{\lambda_1(\mu_2^2 - \lambda_2^2)}{\mu_2(\mu_1^2 - \mu_2^2)} + A_2 \frac{\lambda_2(\mu_2^2 - \lambda_1^2)}{\mu_2(\mu_1^2 - \mu_2^2)}.$$

Случай 2. При $z_1 < 0$ и $z_2 < 0$ решение интегрального уравнения имеет вид

$$y(x) = f(x) + \int_a^x \{B_1 \sin[\mu_1(x-t)] + B_2 \sin[\mu_2(x-t)]\} f(t) dt, \quad \mu_i = \sqrt{|z_i|},$$

где коэффициенты B_1 и B_2 определяются путем решения системы линейных алгебраических уравнений

$$\frac{B_1 \mu_1}{\lambda_1^2 + \mu_1^2} + \frac{B_2 \mu_2}{\lambda_1^2 + \mu_2^2} + 1 = 0, \quad \frac{B_1 \mu_1}{\lambda_2^2 + \mu_1^2} + \frac{B_2 \mu_2}{\lambda_2^2 + \mu_2^2} + 1 = 0.$$

Случай 3. При $z_1 > 0$ и $z_2 < 0$ решение интегрального уравнения имеет вид

$$y(x) = f(x) + \int_a^x \{B_1 \operatorname{sh}[\mu_1(x-t)] + B_2 \sin[\mu_2(x-t)]\} f(t) dt, \quad \mu_i = \sqrt{|z_i|},$$

где коэффициенты B_1 и B_2 определяются путем решения системы линейных алгебраических уравнений

$$\frac{B_1 \mu_1}{\lambda_1^2 - \mu_1^2} + \frac{B_2 \mu_2}{\lambda_1^2 + \mu_2^2} + 1 = 0, \quad \frac{B_1 \mu_1}{\lambda_2^2 - \mu_1^2} + \frac{B_2 \mu_2}{\lambda_2^2 + \mu_2^2} + 1 = 0.$$

$$19. \quad y(x) + \int_a^x \left\{ \sum_{k=1}^n A_k \operatorname{sh}[\lambda_k(x-t)] \right\} y(t) dt = f(x).$$

1°. Это уравнение приводится к уравнению вида 2.2.19 путем замены гиперболических функций на экспоненциальные по формуле $\operatorname{sh} z = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z})$. Поэтому рассматриваемое интегральное уравнение можно привести к линейному неоднородному обыкновенному дифференциальному уравнению $2n$ -го порядка с постоянными коэффициентами.

2°. Найдем корни z_k алгебраического уравнения

$$\sum_{k=1}^n \frac{\lambda_k A_k}{z - \lambda_k^2} + 1 = 0, \quad (1)$$

которое после приведения к общему знаменателю сводится к задаче об определении корней характеристического многочлена n -й степени.

Пусть все корни z_k уравнения (1) действительны, различны и не равны нулю. Все корни в зависимости от их знака разобьем на две группы:

$$\begin{aligned} z_1 > 0, \quad z_2 > 0, \quad \dots, \quad z_s > 0 & \quad (\text{положительные корни}); \\ z_{s+1} < 0, \quad z_{s+2} < 0, \quad \dots, \quad z_n < 0 & \quad (\text{отрицательные корни}). \end{aligned}$$

Решение интегрального уравнения можно представить в виде

$$y(x) = f(x) + \int_a^x \left\{ \sum_{k=1}^s B_k \operatorname{sh}[\mu_k(x-t)] + \sum_{k=s+1}^n C_k \sin[\mu_k(x-t)] \right\} f(t) dt, \quad \mu_k = \sqrt{|z_k|}. \quad (2)$$

Коэффициенты B_k и C_k находятся из системы линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{k=0}^s \frac{B_k \mu_k}{\lambda_m^2 - \mu_k^2} + \sum_{k=s+1}^n \frac{C_k \mu_k}{\lambda_m^2 + \mu_k^2} + 1 = 0, \quad \mu_k = \sqrt{|z_k|}, \quad m = 1, \dots, n. \quad (3)$$

Случай с нулевым корнем $z_s = 0$ рассматривается с помощью введения новой постоянной $D = B_s \mu_s$ и предельного перехода $\mu_s \rightarrow 0$. В результате в решении (2) вместо члена $B_s \operatorname{sh}[\mu_s(x-t)]$ возникает слагаемое $D(x-t)$, а в системе (3) появляются соответствующие слагаемые $D\lambda_m^{-2}$.

$$20. \quad y(x) - A \int_a^x \frac{\operatorname{sh}(\lambda x)}{\operatorname{sh}(\lambda t)} y(t) dt = f(x).$$

Решение:

$$y(x) = f(x) + A \int_a^x e^{A(x-t)} \frac{\operatorname{sh}(\lambda x)}{\operatorname{sh}(\lambda t)} f(t) dt.$$

$$21. \quad y(x) - A \int_a^x \frac{\operatorname{sh}(\lambda t)}{\operatorname{sh}(\lambda x)} y(t) dt = f(x).$$

Решение:

$$y(x) = f(x) + A \int_a^x e^{A(x-t)} \frac{\operatorname{sh}(\lambda t)}{\operatorname{sh}(\lambda x)} f(t) dt.$$

$$22. \quad y(x) - A \int_a^x \operatorname{sh}^k(\lambda x) \operatorname{sh}^m(\mu t) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x) = A \operatorname{sh}^k(\lambda x)$, $h(t) = \operatorname{sh}^m(\mu t)$.

$$23. \quad y(x) + A \int_a^x t \operatorname{sh}[\lambda(x-t)] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.9.30 при $g(t) = At$.

Решение:

$$y(x) = f(x) + \frac{A\lambda}{W} \int_a^x t [u_1(x)u_2(t) - u_2(x)u_1(t)] f(t) dt,$$

где $u_1(x)$, $u_2(x)$ — фундаментальная система решений линейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка $u''_{xx} + \lambda(Ax - \lambda)u = 0$, а W — определитель Вронского. Функции $u_1(x)$, $u_2(x)$ в зависимости от знака произведения $A\lambda$ выражаются через функции Бесселя или модифицированные функции Бесселя.

При $A\lambda > 0$ имеем

$$u_1(x) = \xi^{1/2} J_{1/3}\left(\frac{2}{3}\sqrt{A\lambda}\xi^{3/2}\right), \quad u_2(x) = \xi^{1/2} Y_{1/3}\left(\frac{2}{3}\sqrt{A\lambda}\xi^{3/2}\right), \\ W = 3/\pi, \quad \xi = x - (\lambda/A).$$

При $A\lambda < 0$ имеем

$$u_1(x) = \xi^{1/2} I_{1/3}\left(\frac{2}{3}\sqrt{-A\lambda}\xi^{3/2}\right), \quad u_2(x) = \xi^{1/2} K_{1/3}\left(\frac{2}{3}\sqrt{-A\lambda}\xi^{3/2}\right), \\ W = -\frac{3}{2}, \quad \xi = x - (\lambda/A).$$

$$24. \quad y(x) + A \int_a^x x \operatorname{sh}[\lambda(x-t)] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.9.31 при $g(x) = Ax$, $h(t) = 1$.

Решение:

$$y(x) = f(x) + \frac{A\lambda}{W} \int_a^x x [u_1(x)u_2(t) - u_2(x)u_1(t)] f(t) dt,$$

где $u_1(x)$, $u_2(x)$ — фундаментальная система решений линейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка $u''_{xx} + \lambda(Ax - \lambda)u = 0$, а W — определитель Вронского.

Функции $u_1(x)$, $u_2(x)$ и W указаны в 2.3.23.

$$25. \quad y(x) + A \int_a^x t^k \operatorname{sh}^m(\lambda x) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x) = -A \operatorname{sh}^m(\lambda x)$, $h(t) = t^k$.

$$26. \quad y(x) + A \int_a^x x^k \operatorname{sh}^m(\lambda t) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x) = -Ax^k$, $h(t) = \operatorname{sh}^m(\lambda t)$.

$$27. \quad y(x) - \int_a^x [A \operatorname{sh}(kx) + B - AB(x-t) \operatorname{sh}(kx)] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.9.7 при $\lambda = B$, $g(x) = A \operatorname{sh}(kx)$.

Решение:

$$y(x) = f(x) + \int_a^x R(x, t) f(t) dt, \\ R(x, t) = [A \operatorname{sh}(kx) + B] \frac{G(x)}{G(t)} + \frac{B^2}{G(t)} \int_t^x e^{B(x-s)} G(s) ds, \quad G(x) = \exp\left[\frac{A}{k} \operatorname{ch}(kx)\right].$$

$$28. \quad y(x) + \int_a^x [A \operatorname{sh}(kt) + B + AB(x-t) \operatorname{sh}(kt)] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.9.8 при $\lambda = B$, $g(t) = A \operatorname{sh}(kt)$.

Решение:

$$y(x) = f(x) + \int_a^x R(x, t) f(t) dt, \\ R(x, t) = -[\operatorname{sh}(kt) + B] \frac{G(t)}{G(x)} + \frac{B^2}{G(x)} \int_t^x e^{B(t-s)} G(s) ds, \quad G(x) = \exp\left[\frac{A}{k} \operatorname{ch}(kx)\right].$$

$$29. \quad y(x) + A \int_x^\infty \operatorname{sh}(\lambda\sqrt{t-x}) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.9.62 при $K(x) = A \operatorname{sh}(\lambda\sqrt{-x})$.

2.3-3. Ядра уравнений, содержащие гиперболический тангенс

$$30. \quad y(x) - A \int_a^x \operatorname{th}(\lambda x) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x) = A \operatorname{th}(\lambda x)$, $h(t) = 1$.

Решение:

$$y(x) = f(x) + A \int_a^x \operatorname{th}(\lambda x) \left[\frac{\operatorname{ch}(\lambda x)}{\operatorname{ch}(\lambda t)} \right]^{A/\lambda} f(t) dt.$$

$$31. \quad y(x) - A \int_a^x \operatorname{th}(\lambda t) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x) = A$, $h(t) = \operatorname{th}(\lambda t)$.

Решение:

$$y(x) = f(x) + A \int_a^x \operatorname{th}(\lambda t) \left[\frac{\operatorname{ch}(\lambda x)}{\operatorname{ch}(\lambda t)} \right]^{A/\lambda} f(t) dt.$$

$$32. \quad y(x) + A \int_a^x [\operatorname{th}(\lambda x) - \operatorname{th}(\lambda t)] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.9.5 при $g(x) = A \operatorname{th}(\lambda x)$.

Решение:

$$y(x) = f(x) + \frac{1}{W} \int_a^x [Y_1'(x) Y_2'(t) - Y_2'(x) Y_1'(t)] f(t) dt,$$

где $Y_1(x)$, $Y_2(x)$ — фундаментальная система решений линейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка $\operatorname{ch}^2(\lambda x) Y_{xx}'' + A \lambda Y = 0$, W — определитель Вронского, штрихи обозначают производные по аргументам, указанным в круглых скобках.

Из книг А. Д. Полянина, В. Ф. Зайцева (1995, 1997) следует, что $Y_1(x)$, $Y_2(x)$ можно представить в виде

$$Y_1(x) = F\left(\alpha, \beta, 1; \frac{e^{\lambda x}}{1 + e^{\lambda x}}\right), \quad Y_2(x) = Y_1(x) \int_a^x \frac{d\xi}{Y_1^2(\xi)}, \quad W = 1,$$

где $F(\alpha, \beta, \gamma; z)$ — гипергеометрическая функция, параметры α, β которой определяются путем решения системы алгебраических уравнений: $\alpha + \beta = 1$, $\alpha\beta = -A/\lambda$.

$$33. \quad y(x) - A \int_a^x \frac{\operatorname{th}(\lambda x)}{\operatorname{th}(\lambda t)} y(t) dt = f(x).$$

Решение:

$$y(x) = f(x) + A \int_a^x e^{A(x-t)} \frac{\operatorname{th}(\lambda x)}{\operatorname{th}(\lambda t)} f(t) dt.$$

$$34. \quad y(x) - A \int_a^x \frac{\operatorname{th}(\lambda t)}{\operatorname{th}(\lambda x)} y(t) dt = f(x).$$

Решение:

$$y(x) = f(x) + A \int_a^x e^{A(x-t)} \frac{\operatorname{th}(\lambda t)}{\operatorname{th}(\lambda x)} f(t) dt.$$

$$35. \quad y(x) - A \int_a^x \operatorname{th}^k(\lambda x) \operatorname{th}^m(\mu t) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x) = A \operatorname{th}^k(\lambda x)$, $h(t) = \operatorname{th}^m(\mu t)$.

$$36. \quad y(x) + A \int_a^x t^k \operatorname{th}^m(\lambda x) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x) = -A \operatorname{th}^m(\lambda x)$, $h(t) = t^k$.

$$37. \quad y(x) + A \int_a^x x^k \operatorname{th}^m(\lambda t) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x) = -Ax^k$, $h(t) = \operatorname{th}^m(\lambda t)$.

$$38. \quad y(x) + A \int_x^\infty \operatorname{th}[\lambda(t-x)] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.9.62 при $K(z) = A \operatorname{th}(-\lambda z)$.

$$39. \quad y(x) + A \int_x^\infty \operatorname{th}(\lambda \sqrt{t-x}) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.9.62 при $K(z) = A \operatorname{th}(\lambda \sqrt{-z})$.

$$40. \quad y(x) - \int_a^x [A \operatorname{th}(kx) + B - AB(x-t) \operatorname{th}(kx)] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.9.7 при $\lambda = B$, $g(x) = A \operatorname{th}(kx)$.

$$41. \quad y(x) + \int_a^x [A \operatorname{th}(kt) + B + AB(x-t) \operatorname{th}(kt)] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.9.8 при $\lambda = B$, $g(t) = A \operatorname{th}(kt)$.

2.3-4. Ядра уравнений, содержащие гиперболический котангенс

$$42. \quad y(x) - A \int_a^x \operatorname{cth}(\lambda x) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x) = A \operatorname{cth}(\lambda x)$, $h(t) = 1$.

Решение:

$$y(x) = f(x) + A \int_a^x \operatorname{cth}(\lambda x) \left[\frac{\operatorname{sh}(\lambda x)}{\operatorname{sh}(\lambda t)} \right]^{A/\lambda} f(t) dt.$$

$$43. \quad y(x) - A \int_a^x \operatorname{cth}(\lambda t) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x) = A$, $h(t) = \operatorname{cth}(\lambda t)$.

Решение:

$$y(x) = f(x) + A \int_a^x \operatorname{cth}(\lambda t) \left[\frac{\operatorname{sh}(\lambda x)}{\operatorname{sh}(\lambda t)} \right]^{A/\lambda} f(t) dt.$$

$$44. \quad y(x) - A \int_a^x \frac{\operatorname{cth}(\lambda t)}{\operatorname{cth}(\lambda x)} y(t) dt = f(x).$$

Решение:

$$y(x) = f(x) + A \int_a^x e^{A(x-t)} \frac{\operatorname{cth}(\lambda t)}{\operatorname{cth}(\lambda x)} f(t) dt.$$

$$45. \quad y(x) - A \int_a^x \frac{\operatorname{cth}(\lambda x)}{\operatorname{cth}(\lambda t)} y(t) dt = f(x).$$

Решение:

$$y(x) = f(x) + A \int_a^x e^{A(x-t)} \frac{\operatorname{cth}(\lambda x)}{\operatorname{cth}(\lambda t)} f(t) dt.$$

$$46. \quad y(x) - A \int_a^x \operatorname{cth}^k(\lambda x) \operatorname{cth}^m(\mu t) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x) = A \operatorname{cth}^k(\lambda x)$, $h(t) = \operatorname{cth}^m(\mu t)$.

$$47. \quad y(x) + A \int_a^x t^k \operatorname{cth}^m(\lambda x) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x) = -A \operatorname{cth}^m(\lambda x)$, $h(t) = t^k$.

$$48. \quad y(x) + A \int_a^x x^k \operatorname{cth}^m(\lambda t) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x) = -Ax^k$, $h(t) = \operatorname{cth}^m(\lambda t)$.

$$49. \quad y(x) + A \int_x^\infty \operatorname{cth}[\lambda(t-x)] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.9.62 при $K(z) = A \operatorname{cth}(-\lambda z)$.

$$50. \quad y(x) + A \int_x^\infty \operatorname{cth}(\lambda \sqrt{t-x}) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.9.62 при $K(z) = A \operatorname{cth}(\lambda \sqrt{-z})$.

$$51. \quad y(x) - \int_a^x [A \operatorname{cth}(kx) + B - AB(x-t) \operatorname{cth}(kx)] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.9.7 при $\lambda = B$, $g(x) = A \operatorname{cth}(kx)$.

$$52. \quad y(x) + \int_a^x [A \operatorname{cth}(kt) + B + AB(x-t) \operatorname{cth}(kt)] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.9.8 при $\lambda = B$, $g(t) = A \operatorname{cth}(kt)$.

2.3-5. Ядра уравнений, содержащие комбинации гиперболических функций

$$53. \quad y(x) - A \int_a^x \operatorname{ch}^k(\lambda x) \operatorname{sh}^m(\mu t) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x) = A \operatorname{ch}^k(\lambda x)$, $h(t) = \operatorname{sh}^m(\mu t)$.

$$54. \quad y(x) - \int_a^x \{A + B \operatorname{ch}(\lambda x) + B(x-t)[\lambda \operatorname{sh}(\lambda x) - A \operatorname{ch}(\lambda x)]\} y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.9.32 при $b = B$, $g(x) = A$.

$$55. \quad y(x) - \int_a^x \{A + B \operatorname{sh}(\lambda x) + B(x-t)[\lambda \operatorname{ch}(\lambda x) - A \operatorname{sh}(\lambda x)]\} y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.9.33 при $b = B$, $g(x) = A$.

$$56. \quad y(x) - A \int_a^x \operatorname{th}^k(\lambda x) \operatorname{cth}^m(\mu t) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x) = A \operatorname{th}^k(\lambda x)$, $h(t) = \operatorname{cth}^m(\mu t)$.

2.4. Уравнения, ядра которых содержат логарифмические функции

2.4-1. Ядра уравнений, содержащие логарифмические функции

$$1. \quad y(x) - A \int_a^x \ln(\lambda x) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x) = A \ln(\lambda x)$, $h(t) = 1$.

Решение:

$$y(x) = f(x) + A \int_a^x \ln(\lambda x) e^{-A(x-t)} \frac{(\lambda x)^{Ax}}{(\lambda t)^{At}} f(t) dt.$$

$$2. \quad y(x) - A \int_a^x \ln(\lambda t) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x) = A$, $h(t) = \ln(\lambda t)$.

Решение:

$$y(x) = f(x) + A \int_a^x \ln(\lambda t) e^{-A(x-t)} \frac{(\lambda x)^{Ax}}{(\lambda t)^{At}} f(t) dt.$$

$$3. \quad y(x) + A \int_a^x (\ln x - \ln t) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.9.5 при $g(x) = A \ln x$.

Решение:

$$y(x) = f(x) + \frac{1}{W} \int_a^x [u'_1(x)u'_2(t) - u'_2(x)u'_1(t)] f(t) dt,$$

где штрихи обозначают производные по аргументам, указанным в круглых скобках, $u_1(x)$, $u_2(x)$ — фундаментальная система решений линейного однородного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка $u''_{xx} + Ax^{-1}u = 0$, которая выражается через функции Бесселя или модифицированные функции Бесселя в зависимости от знака параметра A :

$$\begin{aligned} W = \frac{1}{\pi}, \quad u_1(x) = \sqrt{x} J_1(2\sqrt{Ax}), \quad u_2(x) = \sqrt{x} Y_1(2\sqrt{Ax}) & \quad \text{при } A > 0, \\ W = -\frac{1}{2}, \quad u_1(x) = \sqrt{x} I_1(2\sqrt{-Ax}), \quad u_2(x) = \sqrt{x} K_1(2\sqrt{-Ax}) & \quad \text{при } A < 0. \end{aligned}$$

$$4. \quad y(x) - A \int_a^x \frac{\ln(\lambda x)}{\ln(\lambda t)} y(t) dt = f(x).$$

Решение:

$$y(x) = f(x) + A \int_a^x e^{A(x-t)} \frac{\ln(\lambda x)}{\ln(\lambda t)} f(t) dt.$$

$$5. \quad y(x) - A \int_a^x \frac{\ln(\lambda t)}{\ln(\lambda x)} y(t) dt = f(x).$$

Решение:

$$y(x) = f(x) + A \int_a^x e^{A(x-t)} \frac{\ln(\lambda t)}{\ln(\lambda x)} f(t) dt.$$

$$6. \quad y(x) - A \int_a^x \ln^k(\lambda x) \ln^m(\mu t) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x) = A \ln^k(\lambda x)$, $h(t) = \ln^m(\mu t)$.

$$7. \quad y(x) + a \int_x^\infty \ln(t-x) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.9.62 при $K(x) = a \ln(-x)$.

Для правой части $f(x) = \sum_{k=1}^m A_k \exp(-\lambda_k x)$, где $\lambda_k > 0$, решение уравнения имеет вид

$$y(x) = \sum_{k=1}^m \frac{A_k}{B_k} \exp(-\lambda_k x), \quad B_k = 1 - \frac{a}{\lambda_k} (\ln \lambda_k + C),$$

где $C = 0.5772 \dots$ — постоянная Эйлера.

$$8. \quad y(x) + a \int_x^\infty \ln^2(t-x) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.9.62 при $K(x) = a \ln^2(-x)$.

Для правой части $f(x) = \sum_{k=1}^m A_k \exp(-\lambda_k x)$, где $\lambda_k > 0$, решение уравнения имеет вид

$$y(x) = \sum_{k=1}^m \frac{A_k}{B_k} \exp(-\lambda_k x), \quad B_k = 1 + \frac{a}{\lambda_k} \left[\frac{1}{6} \pi^2 + (\ln \lambda_k + C)^2 \right],$$

где $C = 0.5772 \dots$ — постоянная Эйлера.

2.4-2. Ядра уравнений, содержащие степенные и логарифмические функции

$$9. \quad y(x) - A \int_a^x x^k \ln^m(\lambda t) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x) = Ax^k$, $h(t) = \ln^m(\lambda t)$.

$$10. \quad y(x) - A \int_a^x t^k \ln^m(\lambda x) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x) = A \ln^m(\lambda x)$, $h(t) = t^k$.

$$11. \quad y(x) - \int_a^x [A \ln(kx) + B - AB(x-t) \ln(kx)] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.9.7 при $\lambda = B$, $g(x) = A \ln(kx)$.

$$12. \quad y(x) + \int_a^x [A \ln(kt) + B + AB(x-t) \ln(kt)] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.9.8 при $\lambda = B$, $g(t) = A \ln(kt)$.

$$13. \quad y(x) + a \int_x^\infty (t-x)^n \ln(t-x) y(t) dt = f(x), \quad n = 1, 2, \dots$$

Для правой части $f(x) = \sum_{k=1}^m A_k \exp(-\lambda_k x)$, где $\lambda_k > 0$, решение уравнения имеет вид

$$y(x) = \sum_{k=1}^m \frac{A_k}{B_k} \exp(-\lambda_k x), \quad B_k = 1 + \frac{an!}{\lambda_k^{n+1}} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln \lambda_k - C\right),$$

где $C = 0.5772 \dots$ — постоянная Эйлера.

$$14. \quad y(x) + a \int_x^\infty \frac{\ln(t-x)}{\sqrt{t-x}} y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.9.62 при $K(-x) = ax^{-1/2} \ln x$.

Для правой части $f(x) = \sum_{k=1}^m A_k \exp(-\lambda_k x)$, где $\lambda_k > 0$, решение уравнения имеет вид

$$y(x) = \sum_{k=1}^m \frac{A_k}{B_k} \exp(-\lambda_k x), \quad B_k = 1 - a \sqrt{\frac{\pi}{\lambda_k}} [\ln(4\lambda_k) + C],$$

где $C = 0.5772 \dots$ — постоянная Эйлера.

2.5. Уравнения, ядра которых содержат тригонометрические функции

2.5-1. Ядра уравнений, содержащие косинус

$$1. \quad y(x) - A \int_a^x \cos(\lambda x) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x) = A \cos(\lambda x)$, $h(t) = 1$.

Решение:

$$y(x) = f(x) + A \int_a^x \cos(\lambda x) \exp\left\{\frac{A}{\lambda} [\sin(\lambda x) - \sin(\lambda t)]\right\} f(t) dt.$$

$$2. \quad y(x) - A \int_a^x \cos(\lambda t) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x) = A$, $h(t) = \cos(\lambda t)$.

Решение:

$$y(x) = f(x) + A \int_a^x \cos(\lambda t) \exp\left\{\frac{A}{\lambda} [\sin(\lambda x) - \sin(\lambda t)]\right\} f(t) dt.$$

$$3. \quad y(x) + A \int_a^x \cos[\lambda(x-t)] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.9.34 при $g(t) = A$. Поэтому решение данного интегрального уравнения сводится к решению линейного неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

$$y''_{xx} + A y'_x + \lambda^2 y = f''_{xx} + \lambda^2 f, \quad f = f(x),$$

которое следует дополнить начальными условиями

$$y(a) = f(a), \quad y'_x(a) = f'_x(a) - A f(a).$$

1°. Решение при $|A| > 2|\lambda|$:

$$y(x) = f(x) + \int_a^x R(x-t) f(t) dt,$$

$$R(x) = \exp\left(-\frac{1}{2} Ax\right) \left[\frac{A^2}{2k} \operatorname{sh}(kx) - A \operatorname{ch}(kx) \right], \quad k = \sqrt{\frac{1}{4} A^2 - \lambda^2}.$$

2°. Решение при $|A| < 2|\lambda|$:

$$y(x) = f(x) + \int_a^x R(x-t) f(t) dt,$$

$$R(x) = \exp\left(-\frac{1}{2} Ax\right) \left[\frac{A^2}{2k} \sin(kx) - A \cos(kx) \right], \quad k = \sqrt{\lambda^2 - \frac{1}{4} A^2}.$$

3°. Решение при $\lambda = \pm \frac{1}{2} A$:

$$y(x) = f(x) + \int_a^x R(x-t) f(t) dt, \quad R(x) = \exp\left(-\frac{1}{2} Ax\right) \left(\frac{1}{2} A^2 x - A \right).$$

$$4. \quad y(x) + \int_a^x \left\{ \sum_{k=1}^n A_k \cos[\lambda_k(x-t)] \right\} y(t) dt = f(x).$$

Это интегральное уравнение приводится к линейному неоднородному обыкновенному дифференциальному уравнению $2n$ -го порядка с постоянными коэффициентами. Обозначим

$$I_k(x) = \int_a^x \cos[\lambda_k(x-t)] y(t) dt. \quad (1)$$

Продифференцируем (1) дважды по x . В результате имеем (штрихи обозначают производные по x)

$$\begin{aligned} I'_k &= y(x) - \lambda_k \int_a^x \sin[\lambda_k(x-t)] y(t) dt, \\ I''_k &= y'_x(x) - \lambda_k^2 \int_a^x \cos[\lambda_k(x-t)] y(t) dt. \end{aligned} \quad (2)$$

Из сопоставления формул (1) и (2) получим связь между I'_k и I_k :

$$I''_k = y'_x(x) - \lambda_k^2 I_k, \quad I_k = I_k(x). \quad (3)$$

Интегральное уравнение с помощью (1) можно записать в виде

$$y(x) + \sum_{k=1}^n A_k I_k = f(x). \quad (4)$$

Дифференцируя (4) дважды по x , с учетом равенств (3) имеем

$$y''_{xx}(x) + \sigma_n y'_x(x) - \sum_{k=1}^n A_k \lambda_k^2 I_k = f''_{xx}(x), \quad \sigma_n = \sum_{k=1}^n A_k. \quad (5)$$

Исключая интеграл I_n из (4) и (5), получим

$$y''_{xx}(x) + \sigma_n y'_x(x) + \lambda_n^2 y(x) + \sum_{k=1}^{n-1} A_k (\lambda_n^2 - \lambda_k^2) I_k = f''_{xx}(x) + \lambda_n^2 f(x). \quad (6)$$

Продифференцировав равенство (6) дважды по x и исключив интеграл I_{n-1} из полученного выражения с помощью (6), придем к аналогичному равенству, в левой части которого будет стоять линейный дифференциальный оператор четвертого порядка с постоянными коэффициентами (действующий на y) и сумма $\sum_{k=1}^{n-2} B_k I_k$. Продолжая далее с помощью двукратного дифференцирования и формулы (3) последовательно исключать слагаемые I_{n-2}, I_{n-3}, \dots , придем в итоге к линейному неоднородному обыкновенному дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами порядка $2n$.

Граничные условия для функции $y(x)$ находятся в результате подстановки значения $x = a$ в интегральное уравнение и все его следствия, полученные с помощью дифференцирования.

5. $y(x) - A \int_a^x \frac{\cos(\lambda x)}{\cos(\lambda t)} y(t) dt = f(x).$

Решение:

$$y(x) = f(x) + A \int_a^x e^{A(x-t)} \frac{\cos(\lambda x)}{\cos(\lambda t)} f(t) dt.$$

6. $y(x) - A \int_a^x \frac{\cos(\lambda t)}{\cos(\lambda x)} y(t) dt = f(x).$

Решение:

$$y(x) = f(x) + A \int_a^x e^{A(x-t)} \frac{\cos(\lambda t)}{\cos(\lambda x)} f(t) dt.$$

7. $y(x) - A \int_a^x \cos^k(\lambda x) \cos^m(\mu t) y(t) dt = f(x).$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x) = A \cos^k(\lambda x)$, $h(t) = \cos^m(\mu t)$.

8. $y(x) + A \int_a^x t \cos[\lambda(x-t)] y(t) dt = f(x).$

Частный случай уравнения 2.9.34 при $g(t) = At$.

9. $y(x) + A \int_a^x t^k \cos^m(\lambda x) y(t) dt = f(x).$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x) = -A \cos^m(\lambda x)$, $h(t) = t^k$.

10. $y(x) + A \int_a^x x^k \cos^m(\lambda t) y(t) dt = f(x).$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x) = -Ax^k$, $h(t) = \cos^m(\lambda t)$.

11. $y(x) - \int_a^x [A \cos(kx) + B - AB(x-t) \cos(kx)] y(t) dt = f(x).$

Частный случай уравнения 2.9.7 при $\lambda = B$, $g(x) = A \cos(kx)$.

Решение:

$$y(x) = f(x) + \int_a^x R(x, t) f(t) dt,$$

$$R(x, t) = [A \cos(kx) + B] \frac{G(x)}{G(t)} + \frac{B^2}{G(t)} \int_t^x e^{B(x-s)} G(s) ds, \quad G(x) = \exp\left[\frac{A}{k} \sin(kx)\right].$$

$$12. \quad y(x) + \int_a^x [A \cos(kt) + B + AB(x-t) \cos(kt)] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.9.8 при $\lambda = B$, $g(t) = A \cos(kt)$.

Решение:

$$y(x) = f(x) + \int_a^x R(x, t) f(t) dt,$$

$$R(x, t) = -[A \cos(kt) + B] \frac{G(t)}{G(x)} + \frac{B^2}{G(x)} \int_t^x e^{B(t-s)} G(s) ds, \quad G(x) = \exp \left[\frac{A}{k} \sin(kx) \right].$$

$$13. \quad y(x) + A \int_x^\infty \cos(\lambda \sqrt{t-x}) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.9.62 при $K(x) = A \cos(\lambda \sqrt{-x})$.

2.5-2. Ядра уравнений, содержащие синус

$$14. \quad y(x) - A \int_a^x \sin(\lambda x) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x) = A \sin(\lambda x)$, $h(t) = 1$.

Решение:

$$y(x) = f(x) + A \int_a^x \sin(\lambda x) \exp \left\{ \frac{A}{\lambda} [\cos(\lambda t) - \cos(\lambda x)] \right\} f(t) dt.$$

$$15. \quad y(x) - A \int_a^x \sin(\lambda t) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x) = A$, $h(t) = \sin(\lambda t)$.

Решение:

$$y(x) = f(x) + A \int_a^x \sin(\lambda t) \exp \left\{ \frac{A}{\lambda} [\cos(\lambda t) - \cos(\lambda x)] \right\} f(t) dt.$$

$$16. \quad y(x) + A \int_a^x \sin[\lambda(x-t)] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.9.36 при $g(t) = A$.

1°. Решение при $\lambda(A + \lambda) > 0$:

$$y(x) = f(x) - \frac{A\lambda}{k} \int_a^x \sin[k(x-t)] f(t) dt, \quad \text{где } k = \sqrt{\lambda(A + \lambda)}.$$

2°. Решение при $\lambda(A + \lambda) < 0$:

$$y(x) = f(x) - \frac{A\lambda}{k} \int_a^x \operatorname{sh}[k(x-t)] f(t) dt, \quad \text{где } k = \sqrt{-\lambda(\lambda + A)}.$$

3°. Решение при $A = -\lambda$:

$$y(x) = f(x) + \lambda^2 \int_a^x (x-t) f(t) dt.$$

$$17. \quad y(x) + A \int_a^x \sin^3[\lambda(x-t)] y(t) dt = f(x).$$

Используя формулу $\sin^3 \beta = -\frac{1}{4} \sin 3\beta + \frac{3}{4} \sin \beta$, приходим к уравнению вида 2.5.18:

$$y(x) + \int_a^x \left\{ -\frac{1}{4} A \sin[3\lambda(x-t)] + \frac{3}{4} A \sin[\lambda(x-t)] \right\} y(t) dt = f(x).$$

$$18. \quad y(x) + \int_a^x \{A_1 \sin[\lambda_1(x-t)] + A_2 \sin[\lambda_2(x-t)]\} y(t) dt = f(x).$$

Это уравнение решается таким же методом, что и уравнение 2.3.18, — путем сведения к линейному обыкновенному дифференциальному уравнению четвертого порядка с постоянными коэффициентами.

Рассмотрим характеристическое уравнение

$$z^2 + (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + A_1\lambda_1 + A_2\lambda_2)z + \lambda_1^2\lambda_2^2 + A_1\lambda_1\lambda_2^2 + A_2\lambda_1^2\lambda_2 = 0, \quad (1)$$

корни которого z_1 и z_2 определяют структуру решения интегрального уравнения.

Будем считать, что дискриминант уравнения (1) положителен:

$$D \equiv (A_1\lambda_1 - A_2\lambda_2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2)^2 + 4A_1A_2\lambda_1\lambda_2 > 0.$$

В этом случае квадратное уравнение (1) имеет действительные (и различные) корни z_1 и z_2 :

$$z_1 = -\frac{1}{2}(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + A_1\lambda_1 + A_2\lambda_2) + \frac{1}{2}\sqrt{D}, \quad z_2 = -\frac{1}{2}(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + A_1\lambda_1 + A_2\lambda_2) - \frac{1}{2}\sqrt{D}.$$

В зависимости от знаков корней z_1 и z_2 возможны три ситуации.

Случай 1. При $z_1 > 0$ и $z_2 > 0$ решение интегрального уравнения имеет следующий вид ($i = 1, 2$):

$$y(x) = f(x) + \int_a^x \{B_1 \operatorname{sh}[\mu_1(x-t)] + B_2 \operatorname{sh}[\mu_2(x-t)]\} f(t) dt, \quad \mu_i = \sqrt{z_i},$$

где коэффициенты B_1 и B_2 определяются путем решения системы линейных алгебраических уравнений

$$\frac{B_1\mu_1}{\lambda_1^2 + \mu_1^2} + \frac{B_2\mu_2}{\lambda_2^2 + \mu_2^2} - 1 = 0, \quad \frac{B_1\mu_1}{\lambda_2^2 + \mu_1^2} + \frac{B_2\mu_2}{\lambda_1^2 + \mu_2^2} - 1 = 0.$$

Случай 2. При $z_1 < 0$ и $z_2 < 0$ решение интегрального уравнения имеет вид

$$y(x) = f(x) + \int_a^x \{B_1 \sin[\mu_1(x-t)] + B_2 \sin[\mu_2(x-t)]\} f(t) dt, \quad \mu_i = \sqrt{|z_i|},$$

где коэффициенты B_1 и B_2 определяются путем решения системы линейных алгебраических уравнений

$$\frac{B_1\mu_1}{\lambda_1^2 - \mu_1^2} + \frac{B_2\mu_2}{\lambda_2^2 - \mu_2^2} - 1 = 0, \quad \frac{B_1\mu_1}{\lambda_2^2 - \mu_1^2} + \frac{B_2\mu_2}{\lambda_1^2 - \mu_2^2} - 1 = 0.$$

Случай 3. При $z_1 > 0$ и $z_2 < 0$ решение интегрального уравнения имеет вид

$$y(x) = f(x) + \int_a^x \{B_1 \operatorname{sh}[\mu_1(x-t)] + B_2 \sin[\mu_2(x-t)]\} f(t) dt, \quad \mu_i = \sqrt{|z_i|},$$

где коэффициенты B_1 и B_2 определяются путем решения системы линейных алгебраических уравнений

$$\frac{B_1\mu_1}{\lambda_1^2 + \mu_1^2} + \frac{B_2\mu_2}{\lambda_1^2 - \mu_2^2} - 1 = 0, \quad \frac{B_1\mu_1}{\lambda_2^2 + \mu_1^2} + \frac{B_2\mu_2}{\lambda_2^2 - \mu_2^2} - 1 = 0.$$

Замечание. Решение исходного интегрального уравнения можно получить из решения уравнения 2.3.18, заменив в нем параметры по правилу

$$\lambda_k \rightarrow i\lambda_k, \quad \mu_k \rightarrow i\mu_k, \quad A_k \rightarrow -iA_k, \quad B_k \rightarrow -iB_k, \quad i^2 = -1 \quad (k = 1, 2).$$

$$19. \quad y(x) + \int_a^x \left\{ \sum_{k=1}^n A_k \sin[\lambda_k(x-t)] \right\} y(t) dt = f(x).$$

1°. Это интегральное уравнение можно свести к линейному неоднородному обыкновенному дифференциальному уравнению $2n$ -го порядка с постоянными коэффициентами. Обозначим

$$I_k(x) = \int_a^x \sin[\lambda_k(x-t)] y(t) dt. \quad (1)$$

Продифференцируем (1) дважды по x . В результате имеем (штрихи обозначают производные по x)

$$I'_k = \lambda_k \int_a^x \cos[\lambda_k(x-t)] y(t) dt, \quad I''_k = \lambda_k y(x) - \lambda_k^2 \int_a^x \sin[\lambda_k(x-t)] y(t) dt. \quad (2)$$

Из сопоставления формул (1) и (2) получим связь между I_k'' и I_k :

$$I_k'' = \lambda_k y(x) - \lambda_k^2 I_k, \quad I_k = I_k(x). \quad (3)$$

Интегральное уравнение с помощью (1) можно записать в виде

$$y(x) + \sum_{k=1}^n A_k I_k = f(x). \quad (4)$$

Дифференцируя (4) дважды по x , с учетом равенств (3) имеем

$$y_{xx}''(x) + \sigma_n y(x) - \sum_{k=1}^n A_k \lambda_k^2 I_k = f_{xx}''(x), \quad \sigma_n = \sum_{k=1}^n A_k \lambda_k. \quad (5)$$

Исключая интеграл I_n из (4) и (5), получим

$$y_{xx}''(x) + (\sigma_n + \lambda_n^2) y(x) + \sum_{k=1}^{n-1} A_k (\lambda_n^2 - \lambda_k^2) I_k = f_{xx}''(x) + \lambda_n^2 f(x). \quad (6)$$

Дифференцируя равенство (6) дважды по x и исключая интеграл I_{n-1} из полученного выражения с помощью (6), придем к аналогичному равенству, в левой части которого будет стоять линейный дифференциальный оператор четвертого порядка с постоянными коэффициентами (действующий на y) и сумма вида $\sum_{k=1}^{n-2} B_k I_k$. Продолжая далее с помощью двукратного дифференцирования и соотношения (3) последовательно исключать слагаемые I_{n-2}, I_{n-3}, \dots , придем в итоге к линейному неоднородному обыкновенному дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами порядка $2n$.

Начальные условия для функции $y(x)$ находятся в результате подстановки значения $x = a$ в интегральное уравнение и все его следствия, полученные с помощью дифференцирования.

2°. Найдем корни z_k алгебраического уравнения

$$\sum_{k=1}^n \frac{\lambda_k A_k}{z + \lambda_k^2} + 1 = 0, \quad (7)$$

которое после приведения к общему знаменателю сводится к задаче об определении корней характеристического многочлена n -й степени.

Пусть все корни z_k уравнения (7) действительны, различны и не равны нулю. Все корни в зависимости от их знака разобьем на две группы:

$$\begin{aligned} z_1 > 0, \quad z_2 > 0, \quad \dots, \quad z_s > 0 & \quad (\text{положительные корни}); \\ z_{s+1} < 0, \quad z_{s+2} < 0, \quad \dots, \quad z_n < 0 & \quad (\text{отрицательные корни}). \end{aligned}$$

Решение интегрального уравнения можно представить в виде

$$y(x) = f(x) + \int_a^x \left\{ \sum_{k=1}^s B_k \operatorname{sh}[\mu_k(x-t)] + \sum_{k=s+1}^n C_k \sin[\mu_k(x-t)] \right\} f(t) dt, \quad \mu_k = \sqrt{|z_k|}. \quad (8)$$

Коэффициенты B_k и C_k находятся из системы линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{k=0}^s \frac{B_k \mu_k}{\lambda_m^2 + \mu_k^2} + \sum_{k=s+1}^n \frac{C_k \mu_k}{\lambda_m^2 - \mu_k^2} - 1 = 0, \quad \mu_k = \sqrt{|z_k|}, \quad m = 1, 2, \dots, n. \quad (9)$$

Случай с нулевым корнем $z_s = 0$ рассматривается с помощью введения новой постоянной $D = B_s \mu_s$ и предельного перехода $\mu_s \rightarrow 0$. В результате в решении (8) вместо члена $B_s \operatorname{sh}[\mu_s(x-t)]$ возникает слагаемое $D(x-t)$, а в системе (9) появляются соответствующие слагаемые $D \lambda_m^{-2}$.

20. $y(x) - A \int_a^x \frac{\sin(\lambda x)}{\sin(\lambda t)} y(t) dt = f(x).$

Решение:

$$y(x) = f(x) + A \int_a^x e^{A(x-t)} \frac{\sin(\lambda x)}{\sin(\lambda t)} f(t) dt.$$

$$21. \quad y(x) - A \int_a^x \frac{\sin(\lambda t)}{\sin(\lambda x)} y(t) dt = f(x).$$

Решение:

$$y(x) = f(x) + A \int_a^x e^{A(x-t)} \frac{\sin(\lambda t)}{\sin(\lambda x)} f(t) dt.$$

$$22. \quad y(x) - A \int_a^x \sin^k(\lambda x) \sin^m(\mu t) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x) = A \sin^k(\lambda x)$, $h(t) = \sin^m(\mu t)$.

$$23. \quad y(x) + A \int_a^x t \sin[\lambda(x-t)] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.9.36 при $g(t) = At$.

Решение:

$$y(x) = f(x) + \frac{A\lambda}{W} \int_a^x t [u_1(x)u_2(t) - u_2(x)u_1(t)] f(t) dt,$$

где $u_1(x)$, $u_2(x)$ — фундаментальная система решений линейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка $u''_{xx} + \lambda(Ax + \lambda)u = 0$, а W — определитель Вронского. Функции $u_1(x)$, $u_2(x)$ в зависимости от знака произведения $A\lambda$ выражаются через функции Бесселя или модифицированные функции Бесселя.

При $A\lambda > 0$ имеем

$$u_1(x) = \xi^{1/2} J_{1/3}(\tfrac{2}{3} \sqrt{A\lambda} \xi^{3/2}), \quad u_2(x) = \xi^{1/2} Y_{1/3}(\tfrac{2}{3} \sqrt{A\lambda} \xi^{3/2}), \\ W = 3/\pi, \quad \xi = x + (\lambda/A).$$

При $A\lambda < 0$ имеем

$$u_1(x) = \xi^{1/2} I_{1/3}(\tfrac{2}{3} \sqrt{-A\lambda} \xi^{3/2}), \quad u_2(x) = \xi^{1/2} K_{1/3}(\tfrac{2}{3} \sqrt{-A\lambda} \xi^{3/2}), \\ W = -\tfrac{3}{2}, \quad \xi = x + (\lambda/A).$$

$$24. \quad y(x) + A \int_a^x x \sin[\lambda(x-t)] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.9.37 при $g(x) = Ax$, $h(t) = 1$.

Решение:

$$y(x) = f(x) + \frac{A\lambda}{W} \int_a^x x [u_1(x)u_2(t) - u_2(x)u_1(t)] f(t) dt,$$

где $u_1(x)$, $u_2(x)$ — фундаментальная система решений линейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка $u''_{xx} + \lambda(Ax + \lambda)u = 0$, а W — определитель Вронского.

Функции $u_1(x)$, $u_2(x)$ и W указаны в 2.5.23.

$$25. \quad y(x) + A \int_a^x t^k \sin^m(\lambda x) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x) = -A \sin^m(\lambda x)$, $h(t) = t^k$.

$$26. \quad y(x) + A \int_a^x x^k \sin^m(\lambda t) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x) = -Ax^k$, $h(t) = \sin^m(\lambda t)$.

$$27. \quad y(x) - \int_a^x [A \sin(kx) + B - AB(x-t) \sin(kx)] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.9.7 при $\lambda = B$, $g(x) = A \sin(kx)$.

Решение:

$$y(x) = f(x) + \int_a^x R(x,t) f(t) dt, \\ R(x,t) = [A \sin(kx) + B] \frac{G(x)}{G(t)} + \frac{B^2}{G(t)} \int_t^x e^{B(x-s)} G(s) ds, \quad G(x) = \exp\left[-\frac{A}{k} \cos(kx)\right].$$

$$28. \quad y(x) + \int_a^x [A \sin(kt) + B + AB(x-t) \sin(kt)] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.9.8 при $\lambda = B$, $g(t) = A \sin(kt)$.

Решение:

$$y(x) = f(x) + \int_a^x R(x, t) f(t) dt,$$

$$R(x, t) = -[A \sin(kt) + B] \frac{G(t)}{G(x)} + \frac{B^2}{G(x)} \int_t^x e^{B(t-s)} G(s) ds, \quad G(x) = \exp\left[-\frac{A}{k} \cos(kx)\right].$$

$$29. \quad y(x) + A \int_x^\infty \sin(\lambda \sqrt{t-x}) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.9.62 при $K(x) = A \sin(\lambda \sqrt{-x})$.

2.5-3. Ядра уравнений, содержащие тангенс

$$30. \quad y(x) - A \int_a^x \operatorname{tg}(\lambda x) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x) = A \operatorname{tg}(\lambda x)$, $h(t) = 1$.

Решение:

$$y(x) = f(x) + A \int_a^x \operatorname{tg}(\lambda x) \left| \frac{\cos(\lambda t)}{\cos(\lambda x)} \right|^{A/\lambda} f(t) dt.$$

$$31. \quad y(x) - A \int_a^x \operatorname{tg}(\lambda t) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x) = A$, $h(t) = \operatorname{tg}(\lambda t)$.

Решение:

$$y(x) = f(x) + A \int_a^x \operatorname{th}(\lambda t) \left| \frac{\cos(\lambda t)}{\cos(\lambda x)} \right|^{A/\lambda} f(t) dt.$$

$$32. \quad y(x) + A \int_a^x [\operatorname{tg}(\lambda x) - \operatorname{tg}(\lambda t)] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.9.5 при $g(x) = A \operatorname{tg}(\lambda x)$.

Решение:

$$y(x) = f(x) + \frac{1}{W} \int_a^x [Y_1'(x) Y_2'(t) - Y_2'(x) Y_1'(t)] f(t) dt,$$

где $Y_1(x)$, $Y_2(x)$ — фундаментальная система решений линейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка $\cos^2(\lambda x) Y_{xx}'' + A \lambda Y = 0$, W — определитель Вронского, штрихи обозначают производные по аргументам, указанным в круглых скобках.

Из книги В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (1995) следует, что $Y_1(x)$, $Y_2(x)$ можно выразить через гипергеометрические функции.

$$33. \quad y(x) - A \int_a^x \frac{\operatorname{tg}(\lambda x)}{\operatorname{tg}(\lambda t)} y(t) dt = f(x).$$

Решение:

$$y(x) = f(x) + A \int_a^x e^{A(x-t)} \frac{\operatorname{tg}(\lambda x)}{\operatorname{tg}(\lambda t)} f(t) dt.$$

$$34. \quad y(x) - A \int_a^x \frac{\operatorname{tg}(\lambda t)}{\operatorname{tg}(\lambda x)} y(t) dt = f(x).$$

Решение:

$$y(x) = f(x) + A \int_a^x e^{A(x-t)} \frac{\operatorname{tg}(\lambda t)}{\operatorname{tg}(\lambda x)} f(t) dt.$$

$$35. \quad y(x) - A \int_a^x \operatorname{tg}^k(\lambda x) \operatorname{tg}^m(\mu t) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x) = A \operatorname{tg}^k(\lambda x)$, $h(t) = \operatorname{tg}^m(\mu t)$.

$$36. \quad y(x) + A \int_a^x t^k \operatorname{tg}^m(\lambda x) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x) = -A \operatorname{tg}^m(\lambda x)$, $h(t) = t^k$.

$$37. \quad y(x) + A \int_a^x x^k \operatorname{tg}^m(\lambda t) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x) = -Ax^k$, $h(t) = \operatorname{tg}^m(\lambda t)$.

$$38. \quad y(x) - \int_a^x [A \operatorname{tg}(kx) + B - AB(x-t) \operatorname{tg}(kx)] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.9.7 при $\lambda = B$, $g(x) = A \operatorname{tg}(kx)$.

$$39. \quad y(x) + \int_a^x [A \operatorname{tg}(kt) + B + AB(x-t) \operatorname{tg}(kt)] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.9.8 при $\lambda = B$, $g(t) = A \operatorname{tg}(kt)$.

2.5-4. Ядра уравнений, содержащие котангенс

$$40. \quad y(x) - A \int_a^x \operatorname{ctg}(\lambda x) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x) = A \operatorname{ctg}(\lambda x)$, $h(t) = 1$.

Решение:

$$y(x) = f(x) + A \int_a^x \operatorname{ctg}(\lambda x) \left| \frac{\sin(\lambda x)}{\sin(\lambda t)} \right|^{A/\lambda} f(t) dt.$$

$$41. \quad y(x) - A \int_a^x \operatorname{ctg}(\lambda t) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x) = A$, $h(t) = \operatorname{ctg}(\lambda t)$.

Решение:

$$y(x) = f(x) + A \int_a^x \operatorname{cth}(\lambda t) \left| \frac{\sin(\lambda x)}{\sin(\lambda t)} \right|^{A/\lambda} f(t) dt.$$

$$42. \quad y(x) - A \int_a^x \frac{\operatorname{ctg}(\lambda x)}{\operatorname{ctg}(\lambda t)} y(t) dt = f(x).$$

Решение:

$$y(x) = f(x) + A \int_a^x e^{A(x-t)} \frac{\operatorname{ctg}(\lambda x)}{\operatorname{ctg}(\lambda t)} f(t) dt.$$

$$43. \quad y(x) - A \int_a^x \frac{\operatorname{ctg}(\lambda t)}{\operatorname{ctg}(\lambda x)} y(t) dt = f(x).$$

Решение:

$$y(x) = f(x) + A \int_a^x e^{A(x-t)} \frac{\operatorname{ctg}(\lambda t)}{\operatorname{ctg}(\lambda x)} f(t) dt.$$

$$44. \quad y(x) + A \int_a^x t^k \operatorname{ctg}^m(\lambda x) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x) = -A \operatorname{ctg}^m(\lambda x)$, $h(t) = t^k$.

$$45. \quad y(x) + A \int_a^x x^k \operatorname{ctg}^m(\lambda t) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x) = -Ax^k$, $h(t) = \operatorname{ctg}^m(\lambda t)$.

$$46. \quad y(x) - \int_a^x [A \operatorname{ctg}(kx) + B - AB(x-t) \operatorname{ctg}(kx)] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.9.7 при $\lambda = B$, $g(x) = A \operatorname{ctg}(kx)$.

$$47. \quad y(x) + \int_a^x [A \operatorname{ctg}(kt) + B + AB(x-t) \operatorname{ctg}(kt)] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.9.8 при $\lambda = B$, $g(t) = A \operatorname{ctg}(kt)$.

2.5-5. Ядра уравнений, содержащие комбинации тригонометрических функций

$$48. \quad y(x) - A \int_a^x \cos^k(\lambda x) \sin^m(\mu t) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x) = A \cos^k(\lambda x)$, $h(t) = \sin^m(\mu t)$.

$$49. \quad y(x) - \int_a^x \{A + B \cos(\lambda x) - B(x-t)[\lambda \sin(\lambda x) + A \cos(\lambda x)]\} y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.9.38 при $b = B$, $g(x) = A$.

$$50. \quad y(x) - \int_a^x \{A + B \sin(\lambda x) + B(x-t)[\lambda \cos(\lambda x) - A \sin(\lambda x)]\} y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.9.39 при $b = B$, $g(x) = A$.

$$51. \quad y(x) - A \int_a^x \operatorname{tg}^k(\lambda x) \operatorname{ctg}^m(\mu t) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x) = A \operatorname{tg}^k(\lambda x)$, $h(t) = \operatorname{ctg}^m(\mu t)$.

2.6. Уравнения, ядра которых содержат обратные тригонометрические функции

2.6-1. Ядра уравнений, содержащие арккосинус

$$1. \quad y(x) - A \int_a^x \arccos(\lambda x) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x) = A \arccos(\lambda x)$, $h(t) = 1$.

$$2. \quad y(x) - A \int_a^x \arccos(\lambda t) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x) = A$, $h(t) = \arccos(\lambda t)$.

$$3. \quad y(x) - A \int_a^x \frac{\arccos(\lambda x)}{\arccos(\lambda t)} y(t) dt = f(x).$$

Решение:

$$y(x) = f(x) + A \int_a^x e^{A(x-t)} \frac{\arccos(\lambda x)}{\arccos(\lambda t)} f(t) dt.$$

$$4. \quad y(x) - A \int_a^x \frac{\arccos(\lambda t)}{\arccos(\lambda x)} y(t) dt = f(x).$$

Решение:

$$y(x) = f(x) + A \int_a^x e^{A(x-t)} \frac{\arccos(\lambda t)}{\arccos(\lambda x)} f(t) dt.$$

$$5. \quad y(x) - \int_a^x [A \arccos(kx) + B - AB(x-t) \arccos(kx)] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.9.7 при $\lambda = B$, $g(x) = A \arccos(kx)$.

$$6. \quad y(x) + \int_a^x [A \arccos(kt) + B + AB(x-t) \arccos(kt)] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.9.8 при $\lambda = B$, $g(t) = A \arccos(kt)$.

2.6-2. Ядра уравнений, содержащие арксинус

$$7. \quad y(x) - A \int_a^x \arcsin(\lambda x) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x) = A \arcsin(\lambda x)$, $h(t) = 1$.

$$8. \quad y(x) - A \int_a^x \arcsin(\lambda t) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x) = A$, $h(t) = \arcsin(\lambda t)$.

$$9. \quad y(x) - A \int_a^x \frac{\arcsin(\lambda x)}{\arcsin(\lambda t)} y(t) dt = f(x).$$

Решение:

$$y(x) = f(x) + A \int_a^x e^{A(x-t)} \frac{\arcsin(\lambda x)}{\arcsin(\lambda t)} f(t) dt.$$

$$10. \quad y(x) - A \int_a^x \frac{\arcsin(\lambda t)}{\arcsin(\lambda x)} y(t) dt = f(x).$$

Решение:

$$y(x) = f(x) + A \int_a^x e^{A(x-t)} \frac{\arcsin(\lambda t)}{\arcsin(\lambda x)} f(t) dt.$$

$$11. \quad y(x) - \int_a^x [A \arcsin(kx) + B - AB(x-t) \arcsin(kx)] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.9.7 при $\lambda = B$, $g(x) = A \arcsin(kx)$.

$$12. \quad y(x) + \int_a^x [A \arcsin(kt) + B + AB(x-t) \arcsin(kt)] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.9.8 при $\lambda = B$, $g(t) = A \arcsin(kt)$.

2.6-3. Ядра уравнений, содержащие арктангенс

$$13. \quad y(x) - A \int_a^x \arctg(\lambda x) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x) = A \arctg(\lambda x)$, $h(t) = 1$.

$$14. \quad y(x) - A \int_a^x \arctg(\lambda t) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x) = A$, $h(t) = \arctg(\lambda t)$.

$$15. \quad y(x) - A \int_a^x \frac{\arctg(\lambda x)}{\arctg(\lambda t)} y(t) dt = f(x).$$

Решение:

$$y(x) = f(x) + A \int_a^x e^{A(x-t)} \frac{\arctg(\lambda x)}{\arctg(\lambda t)} f(t) dt.$$

$$16. \quad y(x) - A \int_a^x \frac{\operatorname{arctg}(\lambda t)}{\operatorname{arctg}(\lambda x)} y(t) dt = f(x).$$

Решение:

$$y(x) = f(x) + A \int_a^x e^{A(x-t)} \frac{\operatorname{arctg}(\lambda t)}{\operatorname{arctg}(\lambda x)} f(t) dt.$$

$$17. \quad y(x) + A \int_x^\infty \operatorname{arctg}[\lambda(t-x)] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.9.62 при $K(x) = A \operatorname{arctg}(-\lambda x)$.

$$18. \quad y(x) - \int_a^x [A \operatorname{arctg}(kx) + B - AB(x-t) \operatorname{arctg}(kx)] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.9.7 при $\lambda = B$, $g(x) = A \operatorname{arctg}(kx)$.

$$19. \quad y(x) + \int_a^x [A \operatorname{arctg}(kt) + B + AB(x-t) \operatorname{arctg}(kt)] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.9.8 при $\lambda = B$, $g(t) = A \operatorname{arctg}(kt)$.

2.6-4. Ядра уравнений, содержащие арккотангенс

$$20. \quad y(x) - A \int_a^x \operatorname{arcctg}(\lambda x) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x) = A \operatorname{arcctg}(\lambda x)$, $h(t) = 1$.

$$21. \quad y(x) - A \int_a^x \operatorname{arcctg}(\lambda t) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x) = A$, $h(t) = \operatorname{arcctg}(\lambda t)$.

$$22. \quad y(x) - A \int_a^x \frac{\operatorname{arcctg}(\lambda x)}{\operatorname{arcctg}(\lambda t)} y(t) dt = f(x).$$

Решение:

$$y(x) = f(x) + A \int_a^x e^{A(x-t)} \frac{\operatorname{arcctg}(\lambda x)}{\operatorname{arcctg}(\lambda t)} f(t) dt.$$

$$23. \quad y(x) - A \int_a^x \frac{\operatorname{arcctg}(\lambda t)}{\operatorname{arcctg}(\lambda x)} y(t) dt = f(x).$$

Решение:

$$y(x) = f(x) + A \int_a^x e^{A(x-t)} \frac{\operatorname{arcctg}(\lambda t)}{\operatorname{arcctg}(\lambda x)} f(t) dt.$$

$$24. \quad y(x) + A \int_x^\infty \operatorname{arcctg}[\lambda(t-x)] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.9.62 при $K(x) = A \operatorname{arcctg}(-\lambda x)$.

$$25. \quad y(x) - \int_a^x [A \operatorname{arcctg}(kx) + B - AB(x-t) \operatorname{arcctg}(kx)] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.9.7 при $\lambda = B$, $g(x) = A \operatorname{arcctg}(kx)$.

$$26. \quad y(x) + \int_a^x [A \operatorname{arcctg}(kt) + B + AB(x-t) \operatorname{arcctg}(kt)] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.9.8 при $\lambda = B$, $g(t) = A \operatorname{arcctg}(kt)$.

2.7. Уравнения, ядра которых содержат комбинации элементарных функций

2.7-1. Ядра уравнений, содержащие экспоненциальные и гиперболические функции

$$1. \quad y(x) + A \int_a^x e^{\mu(x-t)} \operatorname{ch}[\lambda(x-t)] y(t) dt = f(x).$$

Решение:

$$y(x) = f(x) + \int_a^x R(x-t) f(t) dt,$$

$$R(x) = \exp\left[\left(\mu - \frac{1}{2}A\right)x\right] \left[\frac{A^2}{2k} \operatorname{sh}(kx) - A \operatorname{ch}(kx)\right], \quad k = \sqrt{\lambda^2 + \frac{1}{4}A^2}.$$

$$2. \quad y(x) + A \int_a^x e^{\mu(x-t)} \operatorname{sh}[\lambda(x-t)] y(t) dt = f(x).$$

1°. Решение при $\lambda(A - \lambda) > 0$:

$$y(x) = f(x) - \frac{A\lambda}{k} \int_a^x e^{\mu(x-t)} \sin[k(x-t)] f(t) dt, \quad \text{где } k = \sqrt{\lambda(A - \lambda)}.$$

2°. Решение при $\lambda(A - \lambda) < 0$:

$$y(x) = f(x) - \frac{A\lambda}{k} \int_a^x e^{\mu(x-t)} \operatorname{sh}[k(x-t)] f(t) dt, \quad \text{где } k = \sqrt{\lambda(\lambda - A)}.$$

3°. Решение при $A = \lambda$:

$$y(x) = f(x) - \lambda^2 \int_a^x (x-t) e^{\mu(x-t)} f(t) dt.$$

$$3. \quad y(x) + \int_a^x e^{\mu(x-t)} \{A_1 \operatorname{sh}[\lambda_1(x-t)] + A_2 \operatorname{sh}[\lambda_2(x-t)]\} y(t) dt = f(x).$$

Замена $w(x) = e^{-\mu x} y(x)$ приводит к уравнению вида 2.3.18:

$$w(x) + \int_a^x \{A_1 \operatorname{sh}[\lambda_1(x-t)] + A_2 \operatorname{sh}[\lambda_2(x-t)]\} w(t) dt = e^{-\mu x} f(x).$$

$$4. \quad y(x) + A \int_a^x t e^{\mu(x-t)} \operatorname{sh}[\lambda(x-t)] y(t) dt = f(x).$$

Замена $w(x) = e^{-\mu x} y(x)$ приводит к уравнению вида 2.3.23:

$$w(x) + A \int_a^x t \operatorname{sh}[\lambda(x-t)] w(t) dt = e^{-\mu x} f(x).$$

2.7-2. Ядра уравнений, содержащие экспоненциальные и логарифмические функции

$$5. \quad y(x) - A \int_a^x e^{\mu t} \ln(\lambda x) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x) = A \ln(\lambda x)$, $h(t) = e^{\mu t}$.

$$6. \quad y(x) - A \int_a^x e^{\mu x} \ln(\lambda t) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x) = A e^{\mu x}$, $h(t) = \ln(\lambda t)$.

$$7. \quad y(x) - A \int_a^x e^{\mu(x-t)} \ln(\lambda x) y(t) dt = f(x).$$

Решение:

$$y(x) = f(x) + A \int_a^x e^{(\mu-A)(x-t)} \ln(\lambda x) \frac{(\lambda x)^{Ax}}{(\lambda t)^{At}} f(t) dt.$$

$$8. \quad y(x) - A \int_a^x e^{\mu(x-t)} \ln(\lambda t) y(t) dt = f(x).$$

Решение:

$$y(x) = f(x) + A \int_a^x e^{(\mu-A)(x-t)} \ln(\lambda t) \frac{(\lambda x)^{Ax}}{(\lambda t)^{At}} f(t) dt.$$

$$9. \quad y(x) + A \int_a^x e^{\mu(x-t)} (\ln x - \ln t) y(t) dt = f(x).$$

Решение:

$$y(x) = f(x) + \frac{1}{W} \int_a^x e^{\mu(x-t)} [u'_1(x)u'_2(t) - u'_2(x)u'_1(t)] f(t) dt,$$

где штрихи обозначают производные по аргументам, указанным в круглых скобках, $u_1(x)$, $u_2(x)$ — фундаментальная система решений линейного однородного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка $u''_{xx} + Ax^{-1}u = 0$, которая выражается через функции Бесселя или модифицированные функции Бесселя в зависимости от знака параметра A :

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{\pi}, & u_1(x) &= \sqrt{x} J_1(2\sqrt{Ax}), & u_2(x) &= \sqrt{x} Y_1(2\sqrt{Ax}) & \text{при } A > 0, \\ W &= -\frac{1}{2}, & u_1(x) &= \sqrt{x} I_1(2\sqrt{-Ax}), & u_2(x) &= \sqrt{x} K_1(2\sqrt{-Ax}) & \text{при } A < 0. \end{aligned}$$

$$10. \quad y(x) + a \int_x^\infty e^{\lambda(x-t)} \ln(t-x) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.9.62 при $K(x) = ae^{\lambda x} \ln(-x)$.

2.7-3. Ядра уравнений, содержащие экспоненциальные и тригонометрические функции

$$11. \quad y(x) - A \int_a^x e^{\mu t} \cos(\lambda x) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x) = A \cos(\lambda x)$, $h(t) = e^{\mu t}$.

$$12. \quad y(x) - A \int_a^x e^{\mu x} \cos(\lambda t) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x) = Ae^{\mu x}$, $h(t) = \cos(\lambda t)$.

$$13. \quad y(x) + A \int_a^x e^{\mu(x-t)} \cos[\lambda(x-t)] y(t) dt = f(x).$$

1°. Решение при $|A| > 2|\lambda|$:

$$\begin{aligned} y(x) &= f(x) + \int_a^x R(x-t) f(t) dt, \\ R(x) &= \exp\left[\left(\mu - \frac{1}{2}A\right)x\right] \left[\frac{A^2}{2k} \operatorname{sh}(kx) - A \operatorname{ch}(kx)\right], \quad k = \sqrt{\frac{1}{4}A^2 - \lambda^2}. \end{aligned}$$

2°. Решение при $|A| < 2|\lambda|$:

$$\begin{aligned} y(x) &= f(x) + \int_a^x R(x-t) f(t) dt, \\ R(x) &= \exp\left[\left(\mu - \frac{1}{2}A\right)x\right] \left[\frac{A^2}{2k} \sin(kx) - A \cos(kx)\right], \quad k = \sqrt{\lambda^2 - \frac{1}{4}A^2}. \end{aligned}$$

3°. Решение при $\lambda = \pm \frac{1}{2}A$:

$$y(x) = f(x) + \int_a^x R(x-t) f(t) dt, \quad R(x) = \left(\frac{1}{2}A^2 x - A\right) \exp\left[\left(\mu - \frac{1}{2}A\right)x\right].$$

$$14. \quad y(x) - \int_a^x e^{\mu(x-t)} [A \cos(kx) + B - AB(x-t) \cos(kx)] y(t) dt = f(x).$$

Решение:

$$y(x) = f(x) + \int_a^x e^{\mu(x-t)} M(x, t) f(t) dt,$$

$$M(x, t) = [A \cos(kx) + B] \frac{G(x)}{G(t)} + \frac{B^2}{G(t)} \int_t^x e^{B(x-s)} G(s) ds, \quad G(x) = \exp \left[\frac{A}{k} \sin(kx) \right].$$

$$15. \quad y(x) + \int_a^x e^{\mu(x-t)} [A \cos(kt) + B + AB(x-t) \cos(kt)] y(t) dt = f(x).$$

Решение:

$$y(x) = f(x) + \int_a^x e^{\mu(x-t)} M(x, t) f(t) dt,$$

$$M(x, t) = -[A \cos(kt) + B] \frac{G(t)}{G(x)} + \frac{B^2}{G(x)} \int_t^x e^{B(t-s)} G(s) ds, \quad G(x) = \exp \left[\frac{A}{k} \sin(kx) \right].$$

$$16. \quad y(x) - A \int_a^x e^{\mu t} \sin(\lambda x) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x) = A \sin(\lambda x)$, $h(t) = e^{\mu t}$.

$$17. \quad y(x) - A \int_a^x e^{\mu x} \sin(\lambda t) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x) = Ae^{\mu x}$, $h(t) = \sin(\lambda t)$.

$$18. \quad y(x) + A \int_a^x e^{\mu(x-t)} \sin[\lambda(x-t)] y(t) dt = f(x).$$

1°. Решение при $\lambda(A + \lambda) > 0$:

$$y(x) = f(x) - \frac{A\lambda}{k} \int_a^x e^{\mu(x-t)} \sin[k(x-t)] f(t) dt, \quad \text{где } k = \sqrt{\lambda(A + \lambda)}.$$

2°. Решение при $\lambda(A + \lambda) < 0$:

$$y(x) = f(x) - \frac{A\lambda}{k} \int_a^x e^{\mu(x-t)} \operatorname{sh}[k(x-t)] f(t) dt, \quad \text{где } k = \sqrt{-\lambda(\lambda + A)}.$$

3°. Решение при $A = -\lambda$:

$$y(x) = f(x) + \lambda^2 \int_a^x (x-t) e^{\mu(x-t)} f(t) dt.$$

$$19. \quad y(x) + A \int_a^x e^{\mu(x-t)} \sin^3[\lambda(x-t)] y(t) dt = f(x).$$

Замена $w(x) = e^{-\mu x} y(x)$ приводит к уравнению вида 2.5.17:

$$w(x) + A \int_a^x \sin^3[\lambda(x-t)] w(t) dt = e^{-\mu x} f(x).$$

$$20. \quad y(x) + \int_a^x e^{\mu(x-t)} \{A_1 \sin[\lambda_1(x-t)] + A_2 \sin[\lambda_2(x-t)]\} y(t) dt = f(x).$$

Замена $w(x) = e^{-\mu x} y(x)$ приводит к уравнению вида 2.5.18:

$$w(x) + \int_a^x \{A_1 \sin[\lambda_1(x-t)] + A_2 \sin[\lambda_2(x-t)]\} w(t) dt = e^{-\mu x} f(x).$$

$$21. \quad y(x) + \int_a^x e^{\mu(x-t)} \left\{ \sum_{k=1}^n A_k \sin[\lambda_k(x-t)] \right\} y(t) dt = f(x).$$

Замена $w(x) = e^{-\mu x} y(x)$ приводит к уравнению вида 2.5.19:

$$w(x) + \int_a^x \left\{ \sum_{k=1}^n A_k \sin[\lambda_k(x-t)] \right\} w(t) dt = e^{-\mu x} f(x).$$

$$22. \quad y(x) + A \int_a^x t e^{\mu(x-t)} \sin[\lambda(x-t)] y(t) dt = f(x).$$

Решение:

$$y(x) = f(x) + \frac{A\lambda}{W} \int_a^x t e^{\mu(x-t)} [u_1(x)u_2(t) - u_2(x)u_1(t)] f(t) dt,$$

где $u_1(x)$, $u_2(x)$ — фундаментальная система решений линейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка $u''_{xx} + \lambda(Ax + \lambda)u = 0$, а W — определитель Вронского. Функции $u_1(x)$, $u_2(x)$ в зависимости от знака произведения $A\lambda$ выражаются через функции Бесселя или модифицированные функции Бесселя.

При $A\lambda > 0$ имеем

$$u_1(x) = \xi^{1/2} J_{1/3}\left(\frac{2}{3}\sqrt{A\lambda}\xi^{3/2}\right), \quad u_2(x) = \xi^{1/2} Y_{1/3}\left(\frac{2}{3}\sqrt{A\lambda}\xi^{3/2}\right), \\ W = 3/\pi, \quad \xi = x + (\lambda/A).$$

При $A\lambda < 0$ имеем

$$u_1(x) = \xi^{1/2} I_{1/3}\left(\frac{2}{3}\sqrt{-A\lambda}\xi^{3/2}\right), \quad u_2(x) = \xi^{1/2} K_{1/3}\left(\frac{2}{3}\sqrt{-A\lambda}\xi^{3/2}\right), \\ W = -\frac{3}{2}, \quad \xi = x + (\lambda/A).$$

$$23. \quad y(x) + A \int_a^x x e^{\mu(x-t)} \sin[\lambda(x-t)] y(t) dt = f(x).$$

Решение:

$$y(x) = f(x) + \frac{A\lambda}{W} \int_a^x x e^{\mu(x-t)} [u_1(x)u_2(t) - u_2(x)u_1(t)] f(t) dt,$$

где $u_1(x)$, $u_2(x)$ — фундаментальная система решений линейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка $u''_{xx} + \lambda(Ax + \lambda)u = 0$, а W — определитель Вронского.

Функции $u_1(x)$, $u_2(x)$ и W указаны в 2.7.22.

$$24. \quad y(x) + A \int_x^\infty e^{\mu(t-x)} \sin(\lambda\sqrt{t-x}) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.9.62 при $K(x) = Ae^{-\mu x} \sin(\lambda\sqrt{-x})$.

$$25. \quad y(x) - \int_a^x e^{\mu(x-t)} [A \sin(kx) + B - AB(x-t) \sin(kx)] y(t) dt = f(x).$$

Решение:

$$y(x) = f(x) + \int_a^x e^{\mu(x-t)} M(x, t) f(t) dt, \\ M(x, t) = [A \sin(kx) + B] \frac{G(x)}{G(t)} + \frac{B^2}{G(t)} \int_t^x e^{B(x-s)} G(s) ds, \quad G(x) = \exp\left[-\frac{A}{k} \cos(kx)\right].$$

$$26. \quad y(x) + \int_a^x e^{\mu(x-t)} [A \sin(kt) + B + AB(x-t) \sin(kt)] y(t) dt = f(x).$$

Решение:

$$y(x) = f(x) + \int_a^x e^{\mu(x-t)} M(x, t) f(t) dt, \\ M(x, t) = -[A \sin(kt) + B] \frac{G(t)}{G(x)} + \frac{B^2}{G(x)} \int_t^x e^{B(t-s)} G(s) ds, \quad G(x) = \exp\left[-\frac{A}{k} \cos(kx)\right].$$

$$27. \quad y(x) - A \int_a^x e^{\mu t} \operatorname{tg}(\lambda x) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x) = A \operatorname{tg}(\lambda x)$, $h(t) = e^{\mu t}$.

$$28. \quad y(x) - A \int_a^x e^{\mu x} \operatorname{tg}(\lambda t) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x) = Ae^{\mu x}$, $h(t) = \operatorname{tg}(\lambda t)$.

$$29. \quad y(x) + A \int_a^x e^{\mu(x-t)} [\operatorname{tg}(\lambda x) - \operatorname{tg}(\lambda t)] y(t) dt = f(x).$$

Замена $w(x) = e^{-\mu x} y(x)$ приводит к уравнению вида 2.5.32:

$$w(x) + A \int_a^x [\operatorname{tg}(\lambda x) - \operatorname{tg}(\lambda t)] w(t) dt = e^{-\mu x} f(x).$$

$$30. \quad y(x) - \int_a^x e^{\mu(x-t)} [A \operatorname{tg}(kx) + B - AB(x-t) \operatorname{tg}(kx)] y(t) dt = f(x).$$

Замена $w(x) = e^{-\mu x} y(x)$ приводит к уравнению вида 2.9.7 при $\lambda = B$, $g(x) = A \operatorname{tg}(kx)$:

$$w(x) - \int_a^x [A \operatorname{tg}(kx) + B - AB(x-t) \operatorname{tg}(kx)] w(t) dt = e^{-\mu x} f(x).$$

$$31. \quad y(x) + \int_a^x e^{\mu(x-t)} [A \operatorname{tg}(kt) + B + AB(x-t) \operatorname{tg}(kt)] y(t) dt = f(x).$$

Замена $w(x) = e^{-\mu x} y(x)$ приводит к уравнению вида 2.9.8 при $\lambda = B$, $g(t) = A \operatorname{tg}(kt)$:

$$w(x) + \int_a^x [A \operatorname{tg}(kt) + B + AB(x-t) \operatorname{tg}(kt)] w(t) dt = e^{-\mu x} f(x).$$

$$32. \quad y(x) - A \int_a^x e^{\mu t} \operatorname{ctg}(\lambda x) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x) = A \operatorname{ctg}(\lambda x)$, $h(t) = e^{\mu t}$.

$$33. \quad y(x) - A \int_a^x e^{\mu x} \operatorname{ctg}(\lambda t) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x) = Ae^{\mu x}$, $h(t) = \operatorname{ctg}(\lambda t)$.

2.7-4. Ядра уравнений, содержащие гиперболические и логарифмические функции

$$34. \quad y(x) - A \int_a^x \operatorname{ch}^k(\lambda x) \ln^m(\mu t) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x) = A \operatorname{ch}^k(\lambda x)$, $h(t) = \ln^m(\mu t)$.

$$35. \quad y(x) - A \int_a^x \operatorname{ch}^k(\lambda t) \ln^m(\mu x) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x) = A \ln^m(\mu x)$, $h(t) = \operatorname{ch}^k(\lambda t)$.

$$36. \quad y(x) - A \int_a^x \operatorname{sh}^k(\lambda x) \ln^m(\mu t) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x) = A \operatorname{sh}^k(\lambda x)$, $h(t) = \ln^m(\mu t)$.

$$37. \quad y(x) - A \int_a^x \operatorname{sh}^k(\lambda t) \ln^m(\mu x) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x) = A \ln^m(\mu x)$, $h(t) = \operatorname{sh}^k(\lambda t)$.

$$38. \quad y(x) - A \int_a^x \operatorname{th}^k(\lambda x) \ln^m(\mu t) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x) = A \operatorname{th}^k(\lambda x)$, $h(t) = \ln^m(\mu t)$.

$$39. \quad y(x) - A \int_a^x \operatorname{th}^k(\lambda t) \ln^m(\mu x) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x) = A \ln^m(\mu x)$, $h(t) = \operatorname{th}^k(\lambda t)$.

$$40. \quad y(x) - A \int_a^x \operatorname{cth}^k(\lambda x) \ln^m(\mu t) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x) = A \operatorname{cth}^k(\lambda x)$, $h(t) = \ln^m(\mu t)$.

$$41. \quad y(x) - A \int_a^x \operatorname{cth}^k(\lambda t) \ln^m(\mu x) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x) = A \ln^m(\mu x)$, $h(t) = \operatorname{cth}^k(\lambda t)$.

2.7-5. Ядра уравнений, содержащие гиперболические и тригонометрические функции

$$42. \quad y(x) - A \int_a^x \operatorname{ch}^k(\lambda x) \cos^m(\mu t) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x) = A \operatorname{ch}^k(\lambda x)$, $h(t) = \cos^m(\mu t)$.

$$43. \quad y(x) - A \int_a^x \operatorname{ch}^k(\lambda t) \cos^m(\mu x) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x) = A \cos^m(\mu x)$, $h(t) = \operatorname{ch}^k(\lambda t)$.

$$44. \quad y(x) - A \int_a^x \operatorname{ch}^k(\lambda x) \sin^m(\mu t) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x) = A \operatorname{ch}^k(\lambda x)$, $h(t) = \sin^m(\mu t)$.

$$45. \quad y(x) - A \int_a^x \operatorname{ch}^k(\lambda t) \sin^m(\mu x) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x) = A \sin^m(\mu x)$, $h(t) = \operatorname{ch}^k(\lambda t)$.

$$46. \quad y(x) - A \int_a^x \operatorname{sh}^k(\lambda x) \cos^m(\mu t) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x) = A \operatorname{sh}^k(\lambda x)$, $h(t) = \cos^m(\mu t)$.

$$47. \quad y(x) - A \int_a^x \operatorname{sh}^k(\lambda t) \cos^m(\mu x) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x) = A \cos^m(\mu x)$, $h(t) = \operatorname{sh}^k(\lambda t)$.

$$48. \quad y(x) - A \int_a^x \operatorname{sh}^k(\lambda x) \sin^m(\mu t) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x) = A \operatorname{sh}^k(\lambda x)$, $h(t) = \sin^m(\mu t)$.

$$49. \quad y(x) - A \int_a^x \operatorname{sh}^k(\lambda t) \sin^m(\mu x) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x) = A \sin^m(\mu x)$, $h(t) = \operatorname{sh}^k(\lambda t)$.

$$50. \quad y(x) - A \int_a^x \operatorname{th}^k(\lambda x) \cos^m(\mu t) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x) = A \operatorname{th}^k(\lambda x)$, $h(t) = \cos^m(\mu t)$.

$$51. \quad y(x) - A \int_a^x \operatorname{th}^k(\lambda t) \cos^m(\mu x) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x) = A \cos^m(\mu x)$, $h(t) = \operatorname{th}^k(\lambda t)$.

$$52. \quad y(x) - A \int_a^x \operatorname{th}^k(\lambda x) \sin^m(\mu t) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x) = A \operatorname{th}^k(\lambda x)$, $h(t) = \sin^m(\mu t)$.

$$53. \quad y(x) - A \int_a^x \operatorname{th}^k(\lambda t) \sin^m(\mu x) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x) = A \sin^m(\mu x)$, $h(t) = \operatorname{th}^k(\lambda t)$.

2.7-6. Ядра уравнений, содержащие логарифмические и тригонометрические функции

$$54. \quad y(x) - A \int_a^x \cos^k(\lambda x) \ln^m(\mu t) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x) = A \cos^k(\lambda x)$, $h(t) = \ln^m(\mu t)$.

$$55. \quad y(x) - A \int_a^x \cos^k(\lambda t) \ln^m(\mu x) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x) = A \ln^m(\mu x)$, $h(t) = \cos^k(\lambda t)$.

$$56. \quad y(x) - A \int_a^x \sin^k(\lambda x) \ln^m(\mu t) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x) = A \sin^k(\lambda x)$, $h(t) = \ln^m(\mu t)$.

$$57. \quad y(x) - A \int_a^x \sin^k(\lambda t) \ln^m(\mu x) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x) = A \ln^m(\mu x)$, $h(t) = \sin^k(\lambda t)$.

$$58. \quad y(x) - A \int_a^x \operatorname{tg}^k(\lambda x) \ln^m(\mu t) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x) = A \operatorname{tg}^k(\lambda x)$, $h(t) = \ln^m(\mu t)$.

$$59. \quad y(x) - A \int_a^x \operatorname{tg}^k(\lambda t) \ln^m(\mu x) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x) = A \ln^m(\mu x)$, $h(t) = \operatorname{tg}^k(\lambda t)$.

$$60. \quad y(x) - A \int_a^x \operatorname{ctg}^k(\lambda x) \ln^m(\mu t) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x) = A \operatorname{ctg}^k(\lambda x)$, $h(t) = \ln^m(\mu t)$.

$$61. \quad y(x) - A \int_a^x \operatorname{ctg}^k(\lambda t) \ln^m(\mu x) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x) = A \ln^m(\mu x)$, $h(t) = \operatorname{ctg}^k(\lambda t)$.

2.8. Уравнения, ядра которых содержат специальные функции

2.8-1. Ядра уравнений, содержащие функции Бесселя

$$1. \quad y(x) - \lambda \int_0^x J_0(x-t) y(t) dt = f(x).$$

Решение:

$$y(x) = f(x) + \int_0^x R(x-t) f(t) dt,$$

где

$$R(x) = \lambda \cos(\sqrt{1 - \lambda^2} x) + \frac{\lambda^2}{\sqrt{1 - \lambda^2}} \sin(\sqrt{1 - \lambda^2} x) + \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \lambda^2}} \int_0^x \sin[\sqrt{1 - \lambda^2}(x - t)] \frac{J_1(t)}{t} dt.$$

⊙ Литература: В. И. Смирнов (1974, стр. 153, 154).

2. $y(x) - A \int_a^x J_\nu(\lambda x) y(t) dt = f(x).$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x) = AJ_\nu(\lambda x)$, $h(t) = 1$.

3. $y(x) - A \int_a^x J_\nu(\lambda t) y(t) dt = f(x).$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x) = A$, $h(t) = J_\nu(\lambda t)$.

4. $y(x) - A \int_a^x \frac{J_\nu(\lambda x)}{J_\nu(\lambda t)} y(t) dt = f(x).$

Решение:

$$y(x) = f(x) + A \int_a^x e^{A(x-t)} \frac{J_\nu(\lambda x)}{J_\nu(\lambda t)} f(t) dt.$$

5. $y(x) - A \int_a^x \frac{J_\nu(\lambda t)}{J_\nu(\lambda x)} y(t) dt = f(x).$

Решение:

$$y(x) = f(x) + A \int_a^x e^{A(x-t)} \frac{J_\nu(\lambda t)}{J_\nu(\lambda x)} f(t) dt.$$

6. $y(x) + A \int_x^\infty J_\nu[\lambda(t - x)] y(t) dt = f(x).$

Частный случай уравнения 2.9.62 при $K(x) = AJ_\nu(-\lambda x)$.

7. $y(x) - \int_a^x [AJ_\nu(kx) + B - AB(x - t)J_\nu(kx)] y(t) dt = f(x).$

Частный случай уравнения 2.9.7 при $\lambda = B$, $g(x) = AJ_\nu(kx)$.

8. $y(x) + \int_a^x [AJ_\nu(kt) + B + AB(x - t)J_\nu(kt)] y(t) dt = f(x).$

Частный случай уравнения 2.9.8 при $\lambda = B$, $g(t) = AJ_\nu(kt)$.

9. $y(x) - \lambda \int_0^x e^{\mu(x-t)} J_0(x - t) y(t) dt = f(x).$

Решение:

$$y(x) = f(x) + \int_0^x R(x - t) f(t) dt,$$

где

$$R(x) = e^{\mu x} \left\{ \lambda \cos(\sqrt{1 - \lambda^2} x) + \frac{\lambda^2}{\sqrt{1 - \lambda^2}} \sin(\sqrt{1 - \lambda^2} x) + \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \lambda^2}} \int_0^x \sin[\sqrt{1 - \lambda^2}(x - t)] \frac{J_1(t)}{t} dt \right\}.$$

10. $y(x) - A \int_a^x Y_\nu(\lambda x) y(t) dt = f(x).$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x) = AY_\nu(\lambda x)$, $h(t) = 1$.

$$11. \quad y(x) - A \int_a^x Y_\nu(\lambda t) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x) = A$, $h(t) = Y_\nu(\lambda t)$.

$$12. \quad y(x) - A \int_a^x \frac{Y_\nu(\lambda x)}{Y_\nu(\lambda t)} y(t) dt = f(x).$$

Решение:

$$y(x) = f(x) + A \int_a^x e^{A(x-t)} \frac{Y_\nu(\lambda x)}{Y_\nu(\lambda t)} f(t) dt.$$

$$13. \quad y(x) - A \int_a^x \frac{Y_\nu(\lambda t)}{Y_\nu(\lambda x)} y(t) dt = f(x).$$

Решение:

$$y(x) = f(x) + A \int_a^x e^{A(x-t)} \frac{Y_\nu(\lambda t)}{Y_\nu(\lambda x)} f(t) dt.$$

$$14. \quad y(x) + A \int_x^\infty Y_\nu[\lambda(t-x)] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.9.62 при $K(x) = AY_\nu(-\lambda x)$.

$$15. \quad y(x) - \int_a^x [AY_\nu(kx) + B - AB(x-t)Y_\nu(kx)] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.9.7 при $\lambda = B$, $g(x) = AY_\nu(kx)$.

$$16. \quad y(x) + \int_a^x [AY_\nu(kt) + B + AB(x-t)Y_\nu(kt)] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.9.8 при $\lambda = B$, $g(t) = AY_\nu(kt)$.

2.8-2. Ядра уравнений, содержащие модифицированные функции Бесселя

$$17. \quad y(x) - A \int_a^x I_\nu(\lambda x) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x) = AI_\nu(\lambda x)$, $h(t) = 1$.

$$18. \quad y(x) - A \int_a^x I_\nu(\lambda t) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x) = A$, $h(t) = I_\nu(\lambda t)$.

$$19. \quad y(x) - A \int_a^x \frac{I_\nu(\lambda x)}{I_\nu(\lambda t)} y(t) dt = f(x).$$

Решение:

$$y(x) = f(x) + A \int_a^x e^{A(x-t)} \frac{I_\nu(\lambda x)}{I_\nu(\lambda t)} f(t) dt.$$

$$20. \quad y(x) - A \int_a^x \frac{I_\nu(\lambda t)}{I_\nu(\lambda x)} y(t) dt = f(x).$$

Решение:

$$y(x) = f(x) + A \int_a^x e^{A(x-t)} \frac{I_\nu(\lambda t)}{I_\nu(\lambda x)} f(t) dt.$$

$$21. \quad y(x) + A \int_x^\infty I_\nu[\lambda(t-x)] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.9.62 при $K(x) = AI_\nu(-\lambda x)$.

$$22. \quad y(x) - \int_a^x [AI_\nu(kx) + B - AB(x-t)I_\nu(kx)]y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.9.7 при $\lambda = B$, $g(x) = AI_\nu(kx)$.

$$23. \quad y(x) + \int_a^x [AI_\nu(kt) + B + AB(x-t)I_\nu(kt)]y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.9.8 при $\lambda = B$, $g(t) = AI_\nu(kt)$.

$$24. \quad y(x) - A \int_a^x K_\nu(\lambda x)y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x) = AK_\nu(\lambda x)$, $h(t) = 1$.

$$25. \quad y(x) - A \int_a^x K_\nu(\lambda t)y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.9.2 при $g(x) = A$, $h(t) = K_\nu(\lambda t)$.

$$26. \quad y(x) - A \int_a^x \frac{K_\nu(\lambda x)}{K_\nu(\lambda t)} y(t) dt = f(x).$$

Решение:

$$y(x) = f(x) + A \int_a^x e^{A(x-t)} \frac{K_\nu(\lambda x)}{K_\nu(\lambda t)} f(t) dt.$$

$$27. \quad y(x) - A \int_a^x \frac{K_\nu(\lambda t)}{K_\nu(\lambda x)} y(t) dt = f(x).$$

Решение:

$$y(x) = f(x) + A \int_a^x e^{A(x-t)} \frac{K_\nu(\lambda t)}{K_\nu(\lambda x)} f(t) dt.$$

$$28. \quad y(x) + A \int_x^\infty K_\nu[\lambda(t-x)]y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.9.62 при $K(x) = AK_\nu(-\lambda x)$.

$$29. \quad y(x) - \int_a^x [AK_\nu(kx) + B - AB(x-t)K_\nu(kx)]y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.9.7 при $\lambda = B$, $g(x) = AK_\nu(kx)$.

$$30. \quad y(x) + \int_a^x [AK_\nu(kt) + B + AB(x-t)K_\nu(kt)]y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.9.8 при $\lambda = B$, $g(t) = AK_\nu(kt)$.

2.9. Уравнения, ядра которых содержат произвольные функции

2.9-1. Уравнения с ядром вида $K(x, t) = g_1(x)h_1(t) + \dots + g_n(x)h_n(t)$

$$1. \quad y(x) - \lambda \int_a^x \frac{g(x)}{g(t)} y(t) dt = f(x).$$

Решение:

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^x e^{\lambda(x-t)} \frac{g(x)}{g(t)} f(t) dt.$$

$$2. \quad y(x) - \int_a^x g(x)h(t)y(t) dt = f(x).$$

Решение:

$$y(x) = f(x) + \int_a^x R(x, t)f(t) dt, \quad \text{где } R(x, t) = g(x)h(t) \exp \left[\int_t^x g(s)h(s) ds \right].$$

$$3. \quad y(x) + \int_a^x (x-t)g(x)y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.9.11.

1°. Решение:

$$y(x) = f(x) + \frac{1}{W} \int_a^x [Y_1(x)Y_2(t) - Y_2(x)Y_1(t)]g(x)f(t) dt, \quad (1)$$

где $Y_1 = Y_1(x)$ и $Y_2 = Y_2(x)$ — два линейно независимых ($Y_1/Y_2 \neq \text{const}$) решения линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка $Y''_{xx} + g(x)Y = 0$. В данном случае детерминант Вронского является постоянной величиной: $W = Y_1(Y_2)'_x - Y_2(Y_1)'_x \equiv \text{const}$.

2°. Если известно только одно нетривиальное решение $Y_1 = Y_1(x)$ линейного однородного дифференциального уравнения $Y''_{xx} + g(x)Y = 0$, то решение интегрального уравнения можно найти по формуле (1), в которой следует положить

$$W = 1, \quad Y_2(x) = Y_1(x) \int_b^x \frac{d\xi}{Y_1^2(\xi)},$$

где b — любое.

$$4. \quad y(x) + \int_a^x (x-t)g(t)y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.9.12.

1°. Решение:

$$y(x) = f(x) + \frac{1}{W} \int_a^x [Y_1(x)Y_2(t) - Y_2(x)Y_1(t)]g(t)f(t) dt, \quad (1)$$

где $Y_1 = Y_1(x)$ и $Y_2 = Y_2(x)$ — два линейно независимых ($Y_1/Y_2 \neq \text{const}$) решения линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка $Y''_{xx} + g(x)Y = 0$. В данном случае детерминант Вронского является постоянной величиной: $W = Y_1(Y_2)'_x - Y_2(Y_1)'_x \equiv \text{const}$.

2°. Если известно только одно нетривиальное решение $Y_1 = Y_1(x)$ линейного однородного дифференциального уравнения $Y''_{xx} + g(x)Y = 0$, то решение интегрального уравнения можно найти по формуле (1), в которой следует положить

$$W = 1, \quad Y_2(x) = Y_1(x) \int_b^x \frac{d\xi}{Y_1^2(\xi)},$$

где b — любое.

$$5. \quad y(x) + \int_a^x [g(x) - g(t)]y(t) dt = f(x).$$

1°. Продифференцируем уравнение по x :

$$y'_x(x) + g'_x(x) \int_a^x y(t) dt = f'_x(x). \quad (1)$$

Введем новую переменную $Y(x) = \int_a^x y(t) dt$. В результате получим линейное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка

$$Y''_{xx} + g'_x(x)Y = f'_x(x), \quad (2)$$

которое следует дополнить начальными условиями

$$Y(a) = 0, \quad Y'_x(a) = f(a). \quad (3)$$

Эти условия являются следствием исходного уравнения и способа определения новой переменной $Y(x)$.

Точные решения линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка (2) для различных функций $f(x)$ см. в книгах Э. Камке (1976), В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (1995, 1997).

2°. Пусть $Y_1 = Y_1(x)$ и $Y_2 = Y_2(x)$ — два линейно независимых ($Y_1/Y_2 \neq \text{const}$) решения однородного дифференциального уравнения $Y''_{xx} + g'_x(x)Y = 0$, которое получается из (2) при $f(x) \equiv 0$. В данном случае детерминант Вронского является постоянной величиной

$$W = Y_1(Y_2)'_x - Y_2(Y_1)'_x \equiv \text{const}.$$

Решение неоднородного уравнения (2) с начальными условиями (3) для произвольной функции $f = f(x)$ с учетом равенства $y(x) = Y'_x(x)$ приводит к решению рассматриваемого интегрального уравнения в виде

$$y(x) = f(x) + \frac{1}{W} \int_a^x [Y'_1(x)Y'_2(t) - Y'_2(x)Y'_1(t)]f(t) dt, \quad (4)$$

где штрихи обозначают производные по аргументам, указанным в круглых скобках.

3°. Если известно только одно нетривиальное решение $Y_1 = Y_1(x)$ линейного однородного дифференциального уравнения $Y''_{xx} + g'_x(x)Y = 0$, то решение неоднородного уравнения (2) с начальными условиями (3) можно найти по формуле (4), в которой следует положить

$$W = 1, \quad Y_2(x) = Y_1(x) \int_b^x \frac{d\xi}{Y_1^2(\xi)},$$

где b — любое.

$$6. \quad y(x) + \int_a^x [g(x) + h(t)]y(t) dt = f(x).$$

1°. Проинтегрируем уравнение по x :

$$y'_x(x) + [g(x) + h(x)]y(x) + g'_x(x) \int_a^x y(t) dt = f'_x(x).$$

Введем новую переменную $Y(x) = \int_a^x y(t) dt$. В результате получим линейное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка:

$$Y''_{xx} + [g(x) + h(x)]Y'_x + g'_x(x)Y = f'_x(x), \quad (1)$$

которое следует дополнить начальными условиями

$$Y(a) = 0, \quad Y'_x(a) = f(a). \quad (2)$$

Эти условия являются следствием исходного уравнения и способа определения новой переменной $Y(x)$.

Точные решения линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка (1) для различных функций $f(x)$ см. в книгах Э. Камке (1976), В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (1995, 1997).

2°. Пусть $Y_1 = Y_1(x)$ и $Y_2 = Y_2(x)$ — два линейно независимых решения однородного дифференциального уравнения $Y''_{xx} + [g(x) + h(x)]Y'_x + g'_x(x)Y = 0$, которое получается из (1) при $f(x) \equiv 0$.

Решение неоднородного уравнения (1) с начальными условиями (2) для произвольной функции $f = f(x)$ с учетом равенства $y(x) = Y'_x(x)$ приводит к решению интегрального уравнения

$$y(x) = f(x) + \int_a^x R(x, t)f(t) dt, \\ R(x, t) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} \left[\frac{Y_1(x)Y_2(t) - Y_2(x)Y_1(t)}{W(t)} \right], \quad W(x) = Y_1(x)Y'_2(x) - Y_2(x)Y'_1(x),$$

где $W(x)$ — детерминант Вронского, штрихи обозначают производные по аргументам, указанным в круглых скобках.

$$7. \quad y(x) - \int_a^x [g(x) + \lambda - \lambda(x - t)g(x)]y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.9.16 при $h(x) = \lambda$.

Решение:

$$y(x) = f(x) + \int_a^x R(x, t)f(t) dt, \\ R(x, t) = [g(x) + \lambda] \frac{G(x)}{G(t)} + \frac{\lambda^2}{G(t)} \int_t^x e^{\lambda(x-s)} G(s) ds, \quad G(x) = \exp \left[\int_a^x g(s) ds \right].$$

$$8. \quad y(x) + \int_a^x [g(t) + \lambda + \lambda(x-t)g(t)]y(t) dt = f(x).$$

Решение:

$$y(x) = f(x) + \int_a^x R(x,t)f(t) dt,$$

$$R(x,t) = -[g(t) + \lambda] \frac{G(t)}{G(x)} + \frac{\lambda^2}{G(x)} \int_t^x e^{\lambda(t-s)} G(s) ds, \quad G(x) = \exp \left[\int_a^x g(s) ds \right].$$

$$9. \quad y(x) - \int_a^x [g_1(x) + g_2(x)t]y(t) dt = f(x).$$

Это уравнение можно записать в виде уравнения 2.9.11 при $g_1(x) = g(x) + xh(x)$, $g_2(x) = -h(x)$.

$$10. \quad y(x) - \int_a^x [g_1(t) + g_2(t)x]y(t) dt = f(x).$$

Это уравнение можно записать в виде уравнения 2.9.12 при $g_1(t) = g(t) + h(t)t$, $g_2(t) = -h(t)$.

$$11. \quad y(x) - \int_a^x [g(x) + h(x)(x-t)]y(t) dt = f(x).$$

1°. Решение интегрального уравнения можно представить в виде $y(x) = Y''_{xx}$, где $Y = Y(x)$ — решение линейного неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка

$$Y''_{xx} - g(x)Y'_x - h(x)Y = f(x), \quad (1)$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$Y(a) = Y'_x(a) = 0. \quad (2)$$

2°. Пусть $Y_1 = Y_1(x)$ и $Y_2 = Y_2(x)$ — два нетривиальных линейно независимых частных решения однородного обыкновенного дифференциального уравнения $Y''_{xx} - g(x)Y'_x - h(x)Y = 0$, которое получается из (1) при $f \equiv 0$. Тогда решение неоднородного дифференциального уравнения (1), удовлетворяющее условиям (2), дается формулой

$$Y(x) = \int_a^x [Y_2(x)Y_1(t) - Y_1(x)Y_2(t)] \frac{f(t)}{W(t)} dt, \quad W(t) = Y_1(t)Y'_2(t) - Y_2(t)Y'_1(t), \quad (3)$$

где $W(t)$ — детерминант Вронского, штрихами обозначены производные.

Подставляя выражение (3) в формулу (1), получим решение исходного интегрального уравнения в виде

$$y(x) = f(x) + \int_a^x R(x,t)f(t) dt, \quad R(x,t) = \frac{1}{W(t)} [Y''_2(x)Y_1(t) - Y''_1(x)Y_2(t)]. \quad (4)$$

3°. Пусть $Y_1 = Y_1(x)$ — нетривиальное частное решение однородного дифференциального уравнения (1) при $f \equiv 0$, удовлетворяющее условию $Y_1(a) \neq 0$. Тогда другим нетривиальным решением однородного уравнения является функция

$$Y_2(x) = Y_1(x) \int_a^x \frac{W(t)}{[Y_1(t)]^2} dt, \quad W(x) = \exp \left[\int_a^x g(s) ds \right]. \quad (5)$$

Подставляя выражение (5) в формулу (4), получим решение исходного интегрального уравнения в виде

$$y(x) = f(x) + \int_a^x R(x,t)f(t) dt,$$

$$R(x,t) = g(x) \frac{W(x)}{Y_1(x)} \frac{Y_1(t)}{W(t)} + [g(x)Y'_1(x) + h(x)Y_1(x)] \frac{Y_1(t)}{W(t)} \int_t^x \frac{W(s)}{[Y_1(s)]^2} ds,$$

где $W(x) = \exp \left[\int_a^x g(s) ds \right]$.

$$12. \quad y(x) - \int_a^x [g(t) + h(t)(t-x)]y(t) dt = f(x).$$

Решение:

$$y(x) = f(x) + \int_a^x R(x,t)f(t) dt,$$

$$R(x,t) = g(t) \frac{Y(x)W(x)}{Y(t)W(t)} + Y(x)W(x)[g(t)Y'_t(t) + h(t)Y(t)] \int_x^t \frac{ds}{W(s)[Y(s)]^2},$$

$$W(t) = \exp \left[\int_b^t g(t) dt \right],$$

где $Y = Y(x)$ — любое нетривиальное решение однородного дифференциального уравнения второго порядка

$$Y''_{xx} + g(x)Y'_x + h(x)Y = 0,$$

удовлетворяющее условию $Y(a) \neq 0$.

$$13. \quad y(x) + \int_a^x (x-t)g(x)h(t)y(t) dt = f(x).$$

Замена $y(x) = g(x)u(x)$ приводит к уравнению вида 2.9.4:

$$u(x) + \int_a^x (x-t)g(t)h(t)u(t) dt = f(x)/g(x).$$

$$14. \quad y(x) - \int_a^x \{g(x) + \lambda x^n + \lambda(x-t)x^{n-1}[n - xg(x)]\}y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.9.16 при $h(x) = \lambda x^n$.

Решение:

$$y(x) = f(x) + \int_a^x R(x,t)f(t) dt,$$

$$R(x,t) = [g(x) + \lambda x^n] \frac{G(x)}{G(t)} + \lambda(\lambda x^{2n} + nx^{n-1}) \frac{H(x)}{G(t)} \int_t^x \frac{G(s)}{H(s)} ds,$$

где $G(x) = \exp \left[\int_a^x g(s) ds \right]$, $H(x) = \exp \left(\frac{\lambda}{n+1} x^{n+1} \right)$.

$$15. \quad y(x) - \int_a^x \{g(x) + \lambda + (x-t)[g'_x(x) - \lambda g(x)]\}y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.9.16.

Решение:

$$y(x) = f(x) + \int_a^x R(x,t)f(t) dt,$$

$$R(x,t) = [g(x) + \lambda]e^{\lambda(x-t)} + \{[g(x)]^2 + g'_x(x)\}G(x) \int_t^x \frac{e^{\lambda(s-t)}}{G(s)} ds,$$

где $G(x) = \exp \left[\int_a^x g(s) ds \right]$.

$$16. \quad y(x) - \int_a^x \{g(x) + h(x) + (x-t)[h'_x(x) - g(x)h(x)]\}y(t) dt = f(x).$$

Решение:

$$y(x) = f(x) + \int_a^x R(x,t)f(t) dt,$$

$$R(x,t) = [g(x) + h(x)] \frac{G(x)}{G(t)} + \{[h(x)]^2 + h'_x(x)\} \frac{H(x)}{G(t)} \int_t^x \frac{G(s)}{H(s)} ds,$$

где $G(x) = \exp \left[\int_a^x g(s) ds \right]$, $H(x) = \exp \left[\int_a^x h(s) ds \right]$.

$$17. \quad y(x) + \int_a^x \left\{ \frac{\varphi'_x(x)}{\varphi(t)} + [\varphi(t)g'_x(x) - \varphi'_x(x)g(t)]h(t) \right\} y(t) dt = f(x).$$

1°. Это уравнение эквивалентно уравнению

$$\int_a^x \left\{ \frac{\varphi(x)}{\varphi(t)} + [\varphi(t)g(x) - \varphi(x)g(t)]h(t) \right\} y(t) dt = F(x), \quad F(x) = \int_a^x f(x) dx, \quad (1)$$

из которого получается путем дифференцирования по x . Уравнение (1) является частным случаем уравнения 1.9.15 при

$$g_1(x) = g(x), \quad h_1(t) = \varphi(t)h(t), \quad g_2(x) = \varphi(x), \quad h_2(t) = \frac{1}{\varphi(t)} - g(t)h(t).$$

2°. Решение:

$$y(x) = \frac{1}{\varphi(x)h(x)} \frac{d}{dx} \left\{ \Xi(x) \int_a^x \left[\frac{F(t)}{\varphi(t)} \right]'_t \frac{\varphi^2(t)h(t)}{\Xi(t)} dt \right\},$$

$$F(x) = \int_a^x f(x) dx, \quad \Xi(x) = \exp \left\{ - \int_a^x \left[\frac{g(t)}{\varphi(t)} \right]'_t \varphi^2(t)h(t) dt \right\}.$$

$$18. \quad y(x) - \int_a^x \left\{ \frac{\varphi'_t(t)}{\varphi(x)} + [\varphi(x)g'_t(t) - \varphi'_t(t)g(x)]h(x) \right\} y(t) dt = f(x).$$

1°. Случай $f(a) = 0$. Замена

$$y(x) = \int_a^x w(t) dt \quad (1)$$

с последующим интегрированием по частям приводит к уравнению

$$\int_a^x \left\{ \frac{\varphi(t)}{\varphi(x)} + [\varphi(x)g(t) - \varphi(t)g(x)]h(x) \right\} w(t) dt = f(x), \quad (2)$$

которое является частным случаем уравнения 1.9.15 при

$$g_1(x) = \frac{1}{\varphi(x)} - g(x)h(x), \quad h_1(t) = \varphi(t), \quad g_2(x) = \varphi(x)h(x), \quad h_2(t) = g(t).$$

Решение уравнения (2) определяется по формуле

$$y(x) = \frac{1}{\varphi(x)} \frac{d}{dx} \left\{ \varphi^2(x)h(x)\Phi(x) \int_a^x \left[\frac{f(t)}{\varphi(t)h(t)} \right]'_t \frac{dt}{\Phi(t)} \right\},$$

$$\Phi(x) = \exp \left\{ \int_a^x \left[\frac{g(t)}{\varphi(t)} \right]'_t \varphi^2(t)h(t) dt \right\}.$$

2°. Случай $f(a) \neq 0$. Замена $y(x) = \bar{y}(x) + f(a)$ приводит к интегральному уравнению для функции $\bar{y}(x)$ с правой частью $\bar{f}(x)$, удовлетворяющей условию $\bar{f}(a) = 0$. Об этом уравнении см. в п. 1°.

$$19. \quad y(x) - \int_a^x \left[\sum_{k=1}^n g_k(x)(x-t)^{k-1} \right] y(t) dt = f(x).$$

Решение можно представить в виде

$$y(x) = f(x) + \int_a^x R(x,t)f(t) dt. \quad (1)$$

Здесь резольвента $R(x,t)$ определяется выражением

$$R(x,t) = w_x^{(n)}, \quad w_x^{(n)} = \frac{d^n w}{dx^n}, \quad (2)$$

где w — решение линейного однородного обыкновенного дифференциального уравнения n -го порядка

$$w_x^{(n)} - g_1(x)w_x^{(n-1)} - g_2(x)w_x^{(n-2)} - 2g_3(x)w_x^{(n-3)} - \dots - (n-1)!g_n(x)w = 0, \quad (3)$$

удовлетворяющее следующим начальным условиями при $x = t$:

$$w|_{x=t} = w'_x|_{x=t} = \dots = w_x^{(n-2)}|_{x=t} = 0, \quad w_x^{(n-1)}|_{x=t} = 1. \quad (4)$$

Отметим, что дифференциальное уравнение (3) неявно зависит от переменной t через начальные условия (4).

● Литература: Э. Гурса (1934), А. Ф. Верлань, В. С. Сизиков (1986).

$$20. \quad y(x) - \int_a^x \left[\sum_{k=1}^n g_k(t)(t-x)^{k-1} \right] y(t) dt = f(x).$$

Решение можно представить в виде

$$y(x) = f(x) + \int_a^x R(x, t) f(t) dt. \quad (1)$$

Здесь резольвента $R(x, t)$ определяется выражением

$$R(x, t) = -u_t^{(n)}, \quad u_t^{(n)} = \frac{d^n u}{dt^n}, \quad (2)$$

где u — решение линейного однородного обыкновенного дифференциального уравнения n -го порядка

$$u_t^{(n)} + g_1(t)u_t^{(n-1)} + g_2(t)u_t^{(n-2)} + 2g_3(t)u_t^{(n-3)} + \dots + (n-1)!g_n(t)u = 0, \quad (3)$$

удовлетворяющее следующим начальным условиями при $t = x$:

$$u|_{t=x} = u'_t|_{t=x} = \dots = u_t^{(n-2)}|_{t=x} = 0, \quad u_t^{(n-1)}|_{t=x} = 1. \quad (4)$$

Отметим, что дифференциальное уравнение (3) неявно зависит от переменной x через начальные условия (4).

⊙ Литература: Э. Гурса (1934), А. Ф. Верлань, В. С. Сизиков (1986).

$$21. \quad y(x) + \int_a^x (e^{\lambda x + \mu t} - e^{\mu x + \lambda t}) g(t) y(t) dt = f(x).$$

Продифференцируем интегральное уравнение дважды, а затем исключим из полученных равенств и исходного уравнения интегральные члены. В результате приходим к линейному обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка

$$y''_{xx} - (\lambda + \mu)y'_x + [(\lambda - \mu)e^{(\lambda + \mu)x}g(x) + \lambda\mu]y = f''_{xx}(x) - (\lambda + \mu)f'_x(x) + \lambda\mu f(x),$$

которое надо дополнить начальными условиями $y(a) = f(a)$, $y'_x(a) = f'_x(a)$.

$$22. \quad y(x) + \int_a^x [e^{\lambda x}g(t) + e^{\mu x}h(t)]y(t) dt = f(x).$$

Продифференцируем интегральное уравнение дважды, а затем исключим из полученных равенств и исходного уравнения интегральные члены. В результате приходим к линейному обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка

$$y''_{xx} + [e^{\lambda x}g(x) + e^{\mu x}h(x) - \lambda - \mu]y'_x + [e^{\lambda x}g'_x(x) + e^{\mu x}h'_x(x) + (\lambda - \mu)e^{\lambda x}g(x) + (\mu - \lambda)e^{\mu x}h(x) + \lambda\mu]y = f''_{xx}(x) - (\lambda + \mu)f'_x(x) + \lambda\mu f(x),$$

которое надо дополнить начальными условиями

$$y(a) = f(a), \quad y'_x(a) = f'_x(a) - [e^{\lambda a}g(a) + e^{\mu a}h(a)]f(a).$$

Частный случай. В теории вязкоупругости стареющих тел встречается уравнение

$$y(x) - \int_a^x \varphi(t) \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{1}{\varphi(t)} + \psi(t) [1 - e^{-\lambda(x-t)}] \right\} y(t) dt = f(x).$$

Его решение имеет вид

$$y(x) = f(x) - \int_a^x \frac{1}{\varphi(t)} \frac{\partial}{\partial t} [\varphi(t) - \lambda\psi(t)\varphi^2(t)e^{\eta(t)} \int_t^x e^{-\eta(s)} ds] f(t) dt,$$

где

$$\eta(x) = \int_a^x \left\{ \lambda [1 + \psi(t)\varphi(t)] - \frac{\varphi'_t(t)}{\varphi(t)} \right\} dt.$$

⊙ Литература: Н. Х. Арутюнян (1952).

$$23. \quad y(x) + \int_a^x [\lambda e^{\lambda(x-t)} + (\mu e^{\mu x + \lambda t} - \lambda e^{\lambda x + \mu t}) h(t)] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.9.17 при $\varphi(x) = e^{\lambda x}$, $g(x) = e^{\mu x}$.

Решение:

$$y(x) = \frac{1}{e^{\lambda x} h(x)} \frac{d}{dx} \left\{ \Phi(x) \int_a^x \left[\frac{F(t)}{e^{\lambda t}} \right]'_t \frac{e^{2\lambda t} h(t)}{\Phi(t)} dt \right\},$$

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt, \quad \Phi(x) = \exp \left[(\lambda - \mu) \int_a^x e^{(\lambda + \mu)t} h(t) dt \right].$$

$$24. \quad y(x) - \int_a^x [\lambda e^{-\lambda(x-t)} + (\mu e^{\lambda x + \mu t} - \lambda e^{\mu x + \lambda t}) h(x)] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.9.18 при $\varphi(x) = e^{\lambda x}$, $g(x) = e^{\mu x}$.

Считаем, что $f(a) = 0$. Решение:

$$y(x) = \int_a^x w(t) dt, \quad w(x) = e^{-\lambda x} \frac{d}{dx} \left\{ \frac{e^{2\lambda x} h(x)}{\Phi(x)} \int_a^x \left[\frac{f(t)}{e^{\lambda t} h(t)} \right]'_t \Phi(t) dt \right\},$$

$$\Phi(x) = \exp \left[(\lambda - \mu) \int_a^x e^{(\lambda + \mu)t} h(t) dt \right].$$

$$25. \quad y(x) - \int_a^x \{g(x) + b e^{\lambda x} + b(x-t) e^{\lambda x} [\lambda - g(x)]\} y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.9.16 при $h(x) = b e^{\lambda x}$.

Решение:

$$y(x) = f(x) + \int_a^x R(x, t) f(t) dt,$$

$$R(x, t) = [g(x) + b e^{\lambda x}] \frac{G(x)}{G(t)} + (b^2 e^{2\lambda x} + b \lambda e^{\lambda x}) \frac{H(x)}{G(t)} \int_t^x \frac{G(s)}{H(s)} ds,$$

где $G(x) = \exp \left[\int_a^x g(s) ds \right]$, $H(x) = \exp \left(\frac{b}{\lambda} e^{\lambda x} \right)$.

$$26. \quad y(x) + \int_a^x \{ \lambda e^{\lambda(x-t)} + [e^{\lambda t} g'_x(x) - \lambda e^{\lambda x} g(t)] h(t) \} y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.9.17 при $\varphi(x) = e^{\lambda x}$.

$$27. \quad y(x) - \int_a^x \{ \lambda e^{-\lambda(x-t)} + [e^{\lambda x} g'_t(t) - \lambda e^{\lambda t} g(x)] h(x) \} y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.9.18 при $\varphi(x) = e^{\lambda x}$.

$$28. \quad y(x) + \int_a^x \operatorname{ch}[\lambda(x-t)] g(t) y(t) dt = f(x).$$

Дифференцируя уравнение два раза по x , получим

$$y'_x(x) + g(x) y(x) + \lambda \int_a^x \operatorname{sh}[\lambda(x-t)] g(t) y(t) dt = f'_x(x), \quad (1)$$

$$y''_{xx}(x) + [g(x) y(x)]'_x + \lambda^2 \int_a^x \operatorname{ch}[\lambda(x-t)] g(t) y(t) dt = f''_{xx}(x). \quad (2)$$

Исключая из равенства (2) интегральное слагаемое с помощью исходного уравнения, приходим к линейному обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка

$$y''_{xx} + [g(x) y]'_x - \lambda^2 y = f''_{xx}(x) - \lambda^2 f(x). \quad (3)$$

Полагая $x = a$ в исходном уравнении и равенстве (1), имеем следующие начальные условия для функции $y = y(x)$:

$$y(a) = f(a), \quad y'_x(a) = f'_x(a) - f(a) g(a). \quad (4)$$

Уравнение (3) с условиями (4) определяет решение исходного интегрального уравнения.

$$29. \quad y(x) + \int_a^x \operatorname{ch}[\lambda(x-t)]g(x)h(t)y(t) dt = f(x).$$

Замена $y(x) = g(x)u(x)$ приводит к уравнению вида 2.9.28:

$$u(x) + \int_a^x \operatorname{ch}[\lambda(x-t)]g(t)h(t)u(t) dt = f(x)/g(x).$$

$$30. \quad y(x) + \int_a^x \operatorname{sh}[\lambda(x-t)]g(t)y(t) dt = f(x).$$

1°. Дифференцируя уравнение два раза по x , получим

$$y'_x(x) + \lambda \int_a^x \operatorname{ch}[\lambda(x-t)]g(t)y(t) dt = f'_x(x), \quad (1)$$

$$y''_{xx}(x) + \lambda g(x)y(x) + \lambda^2 \int_a^x \operatorname{sh}[\lambda(x-t)]g(t)y(t) dt = f''_{xx}(x). \quad (2)$$

Исключая из равенства (2) интегральное слагаемое с помощью исходного уравнения, приходим к линейному обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка

$$y''_{xx} + \lambda[g(x) - \lambda]y = f''_{xx}(x) - \lambda^2 f(x). \quad (3)$$

Полагая $x = a$ в исходном уравнении и равенстве (1), имеем следующие начальные условия для функции $y = y(x)$:

$$y(a) = f(a), \quad y'_x(a) = f'_x(a). \quad (4)$$

Точные решения линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка вида (3) для различных функций $g(x)$ см. в книгах Э. Камке (1976), В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (1995, 1997).

2°. Пусть $y_1 = y_1(x)$ и $y_2 = y_2(x)$ — два линейно независимых ($y_1/y_2 \neq \text{const}$) решения однородного дифференциального уравнения $y''_{xx} + \lambda[g(x) - \lambda]y = 0$, которое получается из (3) при $f(x) \equiv 0$. В данном случае детерминант Вронского является постоянной величиной:

$$W = y_1(y_2)'_x - y_2(y_1)'_x \equiv \text{const}.$$

Решение неоднородного уравнения (3) с начальными условиями (4) для произвольной функции $f = f(x)$ имеет вид

$$y(x) = f(x) + \frac{\lambda}{W} \int_a^x [y_1(x)y_2(t) - y_2(x)y_1(t)]g(t)f(t) dt \quad (5)$$

и определяет решение исходного интегрального уравнения.

3°. Если известно только одно нетривиальное решение $y_1 = y_1(x)$ линейного однородного дифференциального уравнения $y''_{xx} + \lambda[g(x) - \lambda]y = 0$, то решение неоднородного уравнения (3) с начальными условиями (4) можно найти по формуле (5), в которой следует положить

$$W = 1, \quad y_2(x) = y_1(x) \int_b^x \frac{d\xi}{y_1^2(\xi)},$$

где b — любое.

$$31. \quad y(x) + \int_a^x \operatorname{sh}[\lambda(x-t)]g(x)h(t)y(t) dt = f(x).$$

Замена $y(x) = g(x)u(x)$ приводит к уравнению вида 2.9.30:

$$u(x) + \int_a^x \operatorname{sh}[\lambda(x-t)]g(t)h(t)u(t) dt = f(x)/g(x).$$

$$32. \quad y(x) - \int_a^x \{g(x) + b \operatorname{ch}(\lambda x) + b(x-t)[\lambda \operatorname{sh}(\lambda x) - \operatorname{ch}(\lambda x)g(x)]\}y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.9.16 при $h(x) = b \operatorname{ch}(\lambda x)$.

Решение:

$$y(x) = f(x) + \int_a^x R(x,t)f(t) dt,$$

$$R(x,t) = [g(x) + b \operatorname{ch}(\lambda x)] \frac{G(x)}{G(t)} + [b^2 \operatorname{ch}^2(\lambda x) + b\lambda \operatorname{sh}(\lambda x)] \frac{H(x)}{G(t)} \int_t^x \frac{G(s)}{H(s)} ds,$$

где $G(x) = \exp\left[\int_a^x g(s) ds\right]$, $H(x) = \exp\left[\frac{b}{\lambda} \operatorname{sh}(\lambda x)\right]$.

$$33. \quad y(x) - \int_a^x \{g(x) + b \operatorname{sh}(\lambda x) + b(x-t)[\lambda \operatorname{ch}(\lambda x) - \operatorname{sh}(\lambda x)g(x)]\} y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.9.16 при $h(x) = b \operatorname{sh}(\lambda x)$.

Решение:

$$y(x) = f(x) + \int_a^x R(x, t) f(t) dt,$$

$$R(x, t) = [g(x) + b \operatorname{sh}(\lambda x)] \frac{G(x)}{G(t)} + [b^2 \operatorname{sh}^2(\lambda x) + b\lambda \operatorname{ch}(\lambda x)] \frac{H(x)}{G(t)} \int_t^x \frac{G(s)}{H(s)} ds,$$

где $G(x) = \exp\left[\int_a^x g(s) ds\right]$, $H(x) = \exp\left[\frac{b}{\lambda} \operatorname{ch}(\lambda x)\right]$.

$$34. \quad y(x) + \int_a^x \cos[\lambda(x-t)]g(t)y(t) dt = f(x).$$

Дифференцируя уравнение два раза по x , получим

$$y'_x(x) + g(x)y(x) - \lambda \int_a^x \sin[\lambda(x-t)]g(t)y(t) dt = f'_x(x), \quad (1)$$

$$y''_{xx}(x) + [g(x)y(x)]'_x - \lambda^2 \int_a^x \cos[\lambda(x-t)]g(t)y(t) dt = f''_{xx}(x). \quad (2)$$

Исключая из равенства (2) интегральное слагаемое с помощью исходного уравнения, приходим к линейному обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка

$$y''_{xx} + [g(x)y]'_x + \lambda^2 y = f''_{xx}(x) + \lambda^2 f(x). \quad (3)$$

Полагая $x = a$ в исходном уравнении и равенстве (1), имеем следующие начальные условия для функции $y = y(x)$:

$$y(a) = f(a), \quad y'_x(a) = f'_x(a) - f(a)g(a). \quad (4)$$

$$35. \quad y(x) + \int_a^x \cos[\lambda(x-t)]g(x)h(t)y(t) dt = f(x).$$

Замена $y(x) = g(x)u(x)$ приводит к уравнению вида 2.9.34:

$$u(x) + \int_a^x \cos[\lambda(x-t)]g(t)h(t)u(t) dt = f(x)/g(x).$$

$$36. \quad y(x) + \int_a^x \sin[\lambda(x-t)]g(t)y(t) dt = f(x).$$

1°. Дифференцируя уравнение два раза по x , получим

$$y'_x(x) + \lambda \int_a^x \cos[\lambda(x-t)]g(t)y(t) dt = f'_x(x), \quad (1)$$

$$y''_{xx}(x) + \lambda g(x)y(x) - \lambda^2 \int_a^x \sin[\lambda(x-t)]g(t)y(t) dt = f''_{xx}(x). \quad (2)$$

Исключая из равенства (2) интегральное слагаемое с помощью исходного уравнения, приходим к линейному обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка

$$y''_{xx} + \lambda[g(x) + \lambda]y = f''_{xx}(x) + \lambda^2 f(x). \quad (3)$$

Полагая $x = a$ в исходном уравнении и равенстве (1), имеем следующие начальные условия для функции $y = y(x)$:

$$y(a) = f(a), \quad y'_x(a) = f'_x(a). \quad (4)$$

Точные решения линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка вида (3) для различных функций $f(x)$ см. в книгах Э. Камке (1976), В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (1995, 1997).

2°. Пусть $y_1 = y_1(x)$ и $y_2 = y_2(x)$ — два линейно независимых ($y_1/y_2 \not\equiv \text{const}$) решения однородного дифференциального уравнения $y''_{xx} + \lambda[g(x) + \lambda]y = 0$, которое получается из (3) при $f(x) \equiv 0$. В данном случае детерминант Вронского является постоянной величиной:

$$W = y_1(y_2)'_x - y_2(y_1)'_x \equiv \text{const}.$$

Решение неоднородного уравнения (3) с начальными условиями (4) для произвольной функции $f = f(x)$ имеет вид

$$y(x) = f(x) + \frac{\lambda}{W} \int_a^x [y_1(x)y_2(t) - y_2(x)y_1(t)]g(t)f(t) dt \quad (5)$$

и определяет решение исходного интегрального уравнения.

3°. Если известно только одно нетривиальное решение $y_1 = y_1(x)$ линейного однородного дифференциального уравнения $y''_{xx} + \lambda[g(x) + \lambda]y = 0$, то решение неоднородного уравнения (3) с начальными условиями (4) можно найти по формуле (5), в которой следует положить

$$W = 1, \quad y_2(x) = y_1(x) \int_b^x \frac{d\xi}{y_1^2(\xi)},$$

где b — любое.

$$37. \quad y(x) + \int_a^x \sin[\lambda(x-t)]g(x)h(t)y(t) dt = f(x).$$

Замена $y(x) = g(x)u(x)$ приводит к уравнению вида 2.9.36:

$$u(x) + \int_a^x \sin[\lambda(x-t)]g(t)h(t)u(t) dt = f(x)/g(x).$$

$$38. \quad y(x) - \int_a^x \{g(x) + b \cos(\lambda x) + b(t-x)[\lambda \sin(\lambda x) + \cos(\lambda x)g(x)]\}y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.9.16 при $h(x) = b \cos(\lambda x)$.

Решение:

$$y(x) = f(x) + \int_a^x R(x,t)f(t) dt,$$

$$R(x,t) = [g(x) + b \cos(\lambda x)] \frac{G(x)}{G(t)} + [b^2 \cos^2(\lambda x) - b\lambda \sin(\lambda x)] \frac{H(x)}{G(t)} \int_t^x \frac{G(s)}{H(s)} ds,$$

где $G(x) = \exp\left[\int_a^x g(s) ds\right]$, $H(x) = \exp\left[\frac{b}{\lambda} \sin(\lambda x)\right]$.

$$39. \quad y(x) - \int_a^x \{g(x) + b \sin(\lambda x) + b(x-t)[\lambda \cos(\lambda x) - \sin(\lambda x)g(x)]\}y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 2.9.16 при $h(x) = b \sin(\lambda x)$.

Решение:

$$y(x) = f(x) + \int_a^x R(x,t)f(t) dt,$$

$$R(x,t) = [g(x) + b \sin(\lambda x)] \frac{G(x)}{G(t)} + [b^2 \sin^2(\lambda x) + b\lambda \cos(\lambda x)] \frac{H(x)}{G(t)} \int_t^x \frac{G(s)}{H(s)} ds,$$

где $G(x) = \exp\left[\int_a^x g(s) ds\right]$, $H(x) = \exp\left[-\frac{b}{\lambda} \cos(\lambda x)\right]$.

2.9-2. Уравнения с разностным ядром: $K(x,t) = K(x-t)$

$$40. \quad y(x) + \int_a^x K(x-t)y(t) dt = f(x).$$

Уравнение восстановления.

1°. Для решения этого интегрального уравнения используют прямое и обратное преобразования Лапласа.

Решение можно представить в виде

$$y(x) = f(x) - \int_a^x R(x-t)f(t) dt. \quad (1)$$

Здесь резольвента $R(x)$ определяется через ядро исходного уравнения $K(x)$ по формулам

$$R(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \tilde{R}(p)e^{px} dp, \\ \tilde{R}(p) = \frac{\tilde{K}(p)}{1 + \tilde{K}(p)}, \quad \tilde{K}(p) = \int_0^\infty K(x)e^{-px} dx.$$

⊙ *Литература:* Р. Беллман, К. Кук (1967), М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко (1968), В. И. Смирнов (1974, стр. 146).

2°. Пусть $w = w(x)$ — решение вспомогательного более простого (чем исходное) уравнения при $a = 0$ и постоянной правой части $f \equiv 1$:

$$w(x) + \int_0^x K(x-t)w(t) dt = 1. \quad (2)$$

Тогда решение исходного интегрального уравнения при произвольной правой части $f = f(x)$ выражается через решение вспомогательного уравнения (2) по формуле

$$y(x) = \frac{d}{dx} \int_a^x w(x-t)f(t) dt = f(a)w(x-a) + \int_a^x w(x-t)f'_t(t) dt.$$

⊙ *Литература:* Р. Беллман, К. Кук (1967).

$$41. \quad y(x) + \int_{-\infty}^x K(x-t)y(t) dt = 0.$$

Вид собственных функций этого интегрального уравнения определяется корнями следующего трансцендентного (алгебраического) уравнения относительно параметра λ :

$$\int_0^\infty K(z)e^{-\lambda z} dz = -1. \quad (1)$$

Левая часть уравнения представляет собой преобразование Лапласа от ядра интегрального уравнения.

1°. Действительным (однократным) корням λ_k уравнения (1) отвечают собственные функции

$$y_k(x) = \exp(\lambda_k x).$$

2°. Действительным корням λ_k кратности r отвечают r собственных функций

$$y_{k1}(x) = \exp(\lambda_k x), \quad y_{k2}(x) = x \exp(\lambda_k x), \quad \dots, \quad y_{kr}(x) = x^{r-1} \exp(\lambda_k x).$$

3°. Комплексным (однократным) корням $\lambda_k = \alpha_k + i\beta_k$ уравнения (1) отвечает пара собственных функций

$$y_k^{(1)}(x) = \exp(\alpha_k x) \cos(\beta_k x), \quad y_k^{(2)}(x) = \exp(\alpha_k x) \sin(\beta_k x).$$

4°. Комплексным корням $\lambda_k = \alpha_k + i\beta_k$ кратности r отвечают r пар собственных функций

$$\begin{aligned} y_{k1}^{(1)}(x) &= \exp(\alpha_k x) \cos(\beta_k x), & y_{k1}^{(2)}(x) &= \exp(\alpha_k x) \sin(\beta_k x), \\ y_{k2}^{(1)}(x) &= x \exp(\alpha_k x) \cos(\beta_k x), & y_{k2}^{(2)}(x) &= x \exp(\alpha_k x) \sin(\beta_k x), \\ &\dots & \dots & \\ y_{kr}^{(1)}(x) &= x^{r-1} \exp(\alpha_k x) \cos(\beta_k x), & y_{kr}^{(2)}(x) &= x^{r-1} \exp(\alpha_k x) \sin(\beta_k x). \end{aligned}$$

Общее решение однородного уравнения 2.9.41 представляет собой линейную комбинацию (с произвольными постоянными) собственных функций этого уравнения.

► Для уравнений 2.9.42–2.9.51 приведены только частные решения. Общие решения этих уравнений можно получить, прибавив к частным решениям уравнений общее решение однородного уравнения 2.9.41.

$$42. \quad y(x) + \int_{-\infty}^x K(x-t)y(t) dt = Ax^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Частный случай уравнения 2.9.44 при $\lambda = 0$.

1°. Решение при $n = 0$:

$$y(x) = \frac{A}{B}, \quad B = 1 + \int_0^\infty K(z) dz.$$

2°. Решение при $n = 1$:

$$y(x) = \frac{A}{B}x + \frac{AC}{B^2}, \quad B = 1 + \int_0^\infty K(z) dz, \quad C = \int_0^\infty zK(z) dz.$$

3°. Решение при $n = 2$:

$$y_2(x) = \frac{A}{B}x^2 + 2\frac{AC}{B^2}x + 2\frac{AC^2}{B^3} - \frac{AD}{B^2},$$

$$B = 1 + \int_0^\infty K(z) dz, \quad C = \int_0^\infty zK(z) dz, \quad D = \int_0^\infty z^2K(z) dz.$$

4°. Решения при $n = 3, 4, \dots$ определяются по формулам

$$y_n(x) = A \left\{ \frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} \left[\frac{e^{\lambda x}}{B(\lambda)} \right] \right\}_{\lambda=0}, \quad B(\lambda) = 1 + \int_0^\infty K(z)e^{-\lambda z} dz.$$

$$43. \quad y(x) + \int_{-\infty}^x K(x-t)y(t) dt = Ae^{\lambda x}.$$

Решение:

$$y(x) = \frac{A}{B}e^{\lambda x}, \quad B = 1 + \int_0^\infty K(z)e^{-\lambda z} dz.$$

Интегральное слагаемое в выражении для коэффициента B представляет собой преобразование Лапласа от функции $K(z)$ и может вычисляться с помощью таблиц преобразований Лапласа, приведенных, например, в книгах: Г. Бейтмен, А. Эрдейи (т. 1, 1973), В. А. Диткин, А. П. Прудников (1974).

$$44. \quad y(x) + \int_{-\infty}^x K(x-t)y(t) dt = Ax^n e^{\lambda x}, \quad n = 1, 2, \dots$$

1°. Решение при $n = 1$:

$$y_1(x) = \frac{A}{B}xe^{\lambda x} + \frac{AC}{B^2}e^{\lambda x},$$

$$B = 1 + \int_0^\infty K(z)e^{-\lambda z} dz, \quad C = \int_0^\infty zK(z)e^{-\lambda z} dz.$$

Коэффициенты B и C удобно вычислять, используя таблицы преобразований Лапласа.

2°. Решение при $n = 2$:

$$y_2(x) = \frac{A}{B}x^2 e^{\lambda x} + 2\frac{AC}{B^2}xe^{\lambda x} + \left(2\frac{AC^2}{B^3} - \frac{AD}{B^2}\right)e^{\lambda x},$$

$$B = 1 + \int_0^\infty K(z)e^{-\lambda z} dz, \quad C = \int_0^\infty zK(z)e^{-\lambda z} dz, \quad D = \int_0^\infty z^2K(z)e^{-\lambda z} dz.$$

3°. Решения при $n = 3, 4, \dots$ определяются по формулам

$$y_n(x) = \frac{\partial}{\partial \lambda} y_{n-1}(x) = A \frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} \left[\frac{e^{\lambda x}}{B(\lambda)} \right], \quad B(\lambda) = 1 + \int_0^\infty K(z)e^{-\lambda z} dz.$$

$$45. \quad y(x) + \int_{-\infty}^x K(x-t)y(t) dt = A \operatorname{ch}(\lambda x).$$

Решение:

$$y(x) = \frac{A}{2B_-} e^{\lambda x} + \frac{A}{2B_+} e^{-\lambda x} = \frac{1}{2} \left(\frac{A}{B_-} + \frac{A}{B_+} \right) \operatorname{ch}(\lambda x) + \frac{1}{2} \left(\frac{A}{B_-} - \frac{A}{B_+} \right) \operatorname{sh}(\lambda x),$$

$$B_- = 1 + \int_0^\infty K(z) e^{-\lambda z} dz, \quad B_+ = 1 + \int_0^\infty K(z) e^{\lambda z} dz.$$

$$46. \quad y(x) + \int_{-\infty}^x K(x-t)y(t) dt = A \operatorname{sh}(\lambda x).$$

Решение:

$$y(x) = \frac{A}{2B_-} e^{\lambda x} - \frac{A}{2B_+} e^{-\lambda x} = \frac{1}{2} \left(\frac{A}{B_-} - \frac{A}{B_+} \right) \operatorname{ch}(\lambda x) + \frac{1}{2} \left(\frac{A}{B_-} + \frac{A}{B_+} \right) \operatorname{sh}(\lambda x),$$

$$B_- = 1 + \int_0^\infty K(z) e^{-\lambda z} dz, \quad B_+ = 1 + \int_0^\infty K(z) e^{\lambda z} dz.$$

$$47. \quad y(x) + \int_{-\infty}^x K(x-t)y(t) dt = A \cos(\lambda x).$$

Решение:

$$y(x) = \frac{A}{B_c^2 + B_s^2} [B_c \cos(\lambda x) - B_s \sin(\lambda x)],$$

$$B_c = 1 + \int_0^\infty K(z) \cos(\lambda z) dz, \quad B_s = \int_0^\infty K(z) \sin(\lambda z) dz.$$

$$48. \quad y(x) + \int_{-\infty}^x K(x-t)y(t) dt = A \sin(\lambda x).$$

Решение:

$$y(x) = \frac{A}{B_c^2 + B_s^2} [B_c \sin(\lambda x) + B_s \cos(\lambda x)],$$

$$B_c = 1 + \int_0^\infty K(z) \cos(\lambda z) dz, \quad B_s = \int_0^\infty K(z) \sin(\lambda z) dz.$$

$$49. \quad y(x) + \int_{-\infty}^x K(x-t)y(t) dt = A e^{\mu x} \cos(\lambda x).$$

Решение:

$$y(x) = \frac{A}{B_c^2 + B_s^2} e^{\mu x} [B_c \cos(\lambda x) - B_s \sin(\lambda x)],$$

$$B_c = 1 + \int_0^\infty K(z) e^{-\mu z} \cos(\lambda z) dz, \quad B_s = \int_0^\infty K(z) e^{-\mu z} \sin(\lambda z) dz.$$

$$50. \quad y(x) + \int_{-\infty}^x K(x-t)y(t) dt = A e^{\mu x} \sin(\lambda x).$$

Решение:

$$y(x) = \frac{A}{B_c^2 + B_s^2} e^{\mu x} [B_c \sin(\lambda x) + B_s \cos(\lambda x)],$$

$$B_c = 1 + \int_0^\infty K(z) e^{-\mu z} \cos(\lambda z) dz, \quad B_s = \int_0^\infty K(z) e^{-\mu z} \sin(\lambda z) dz.$$

$$51. \quad y(x) + \int_{-\infty}^x K(x-t)y(t) dt = f(x).$$

1°. Для полиномиальной правой части уравнения $f(x) = \sum_{k=0}^n A_k x^k$ решение имеет вид

$$y(x) = \sum_{k=0}^n B_k x^k,$$

где постоянные B_k определяются методом неопределенных коэффициентов. Для построения решения можно также воспользоваться формулой, приведенной в п. 4° уравнения 2.9.42.

2°. Для правой части $f(x) = e^{\lambda x} \sum_{k=0}^n A_k x^k$ решение уравнения имеет вид

$$y(x) = e^{\lambda x} \sum_{k=0}^n B_k x^k,$$

где постоянные B_k определяются методом неопределенных коэффициентов. Для построения решения можно также воспользоваться формулой, приведенной в п. 3° уравнения 2.9.44.

3°. Для правой части $f(x) = \sum_{k=0}^n A_k \exp(\lambda_k x)$ решение уравнения имеет вид

$$y(x) = \sum_{k=0}^n \frac{A_k}{B_k} \exp(\lambda_k x), \quad B_k = 1 + \int_0^\infty K(z) \exp(-\lambda_k z) dz.$$

4°. Для правой части $f(x) = \cos(\lambda x) \sum_{k=0}^n A_k x^k$ решение уравнения имеет вид

$$y(x) = \cos(\lambda x) \sum_{k=0}^n B_k x^k + \sin(\lambda x) \sum_{k=0}^n C_k x^k,$$

где постоянные B_k и C_k определяются методом неопределенных коэффициентов.

5°. Для правой части $f(x) = \sin(\lambda x) \sum_{k=0}^n A_k x^k$ решение уравнения имеет вид

$$y(x) = \cos(\lambda x) \sum_{k=0}^n B_k x^k + \sin(\lambda x) \sum_{k=0}^n C_k x^k,$$

где постоянные B_k и C_k определяются методом неопределенных коэффициентов.

6°. Для правой части $f(x) = \sum_{k=0}^n A_k \cos(\lambda_k x)$ решение уравнения имеет вид

$$y(x) = \sum_{k=0}^n \frac{A_k}{B_{ck}^2 + B_{sk}^2} [B_{ck} \cos(\lambda_k x) - B_{sk} \sin(\lambda_k x)],$$

$$B_{ck} = 1 + \int_0^\infty K(z) \cos(\lambda_k z) dz, \quad B_{sk} = \int_0^\infty K(z) \sin(\lambda_k z) dz.$$

7°. Для правой части $f(x) = \sum_{k=0}^n A_k \sin(\lambda_k x)$ решение уравнения имеет вид

$$y(x) = \sum_{k=0}^n \frac{A_k}{B_{ck}^2 + B_{sk}^2} [B_{ck} \sin(\lambda_k x) + B_{sk} \cos(\lambda_k x)],$$

$$B_{ck} = 1 + \int_0^\infty K(z) \cos(\lambda_k z) dz, \quad B_{sk} = \int_0^\infty K(z) \sin(\lambda_k z) dz.$$

8°. Для правой части $f(x) = \cos(\lambda x) \sum_{k=0}^n A_k \exp(\mu_k x)$ решение уравнения имеет вид

$$y(x) = \cos(\lambda x) \sum_{k=0}^n \frac{A_k B_{ck}}{B_{ck}^2 + B_{sk}^2} \exp(\mu_k x) - \sin(\lambda x) \sum_{k=0}^n \frac{A_k B_{sk}}{B_{ck}^2 + B_{sk}^2} \exp(\mu_k x),$$

$$B_{ck} = 1 + \int_0^\infty K(z) \exp(-\mu_k z) \cos(\lambda z) dz, \quad B_{sk} = \int_0^\infty K(z) \exp(-\mu_k z) \sin(\lambda z) dz.$$

9°. Для правой части $f(x) = \sin(\lambda x) \sum_{k=0}^n A_k \exp(\mu_k x)$ решение уравнения имеет вид

$$y(x) = \sin(\lambda x) \sum_{k=0}^n \frac{A_k B_{ck}}{B_{ck}^2 + B_{sk}^2} \exp(\mu_k x) + \cos(\lambda x) \sum_{k=0}^n \frac{A_k B_{sk}}{B_{ck}^2 + B_{sk}^2} \exp(\mu_k x),$$

$$B_{ck} = 1 + \int_0^\infty K(z) \exp(-\mu_k z) \cos(\lambda z) dz, \quad B_{sk} = \int_0^\infty K(z) \exp(-\mu_k z) \sin(\lambda z) dz.$$

$$52. \quad y(x) + \int_x^\infty K(x-t)y(t) dt = 0.$$

Вид собственных функций этого интегрального уравнения определяется корнями следующего трансцендентного (алгебраического) уравнения относительно параметра λ :

$$\int_0^\infty K(-z)e^{\lambda z} dz = -1. \quad (1)$$

Левая часть уравнения представляет собой преобразование Лапласа с параметром $-\lambda$ от функции $K(-z)$.

1°. Действительным (однократным) корням λ_k уравнения (1) отвечают собственные функции

$$y_k(x) = \exp(\lambda_k x).$$

2°. Действительным корням λ_k кратности r отвечают r собственных функций

$$y_{k1}(x) = \exp(\lambda_k x), \quad y_{k2}(x) = x \exp(\lambda_k x), \quad \dots, \quad y_{kr}(x) = x^{r-1} \exp(\lambda_k x).$$

3°. Комплексным (однократным) корням $\lambda_k = \alpha_k + i\beta_k$ уравнения (1) отвечает пара собственных функций

$$y_k^{(1)}(x) = \exp(\alpha_k x) \cos(\beta_k x), \quad y_k^{(2)}(x) = \exp(\alpha_k x) \sin(\beta_k x).$$

4°. Комплексным корням $\lambda_k = \alpha_k + i\beta_k$ кратности r отвечают r пар собственных функций

$$\begin{aligned} y_{k1}^{(1)}(x) &= \exp(\alpha_k x) \cos(\beta_k x), & y_{k1}^{(2)}(x) &= \exp(\alpha_k x) \sin(\beta_k x), \\ y_{k2}^{(1)}(x) &= x \exp(\alpha_k x) \cos(\beta_k x), & y_{k2}^{(2)}(x) &= x \exp(\alpha_k x) \sin(\beta_k x), \\ &\dots\dots\dots & &\dots\dots\dots \\ y_{kr}^{(1)}(x) &= x^{r-1} \exp(\alpha_k x) \cos(\beta_k x), & y_{kr}^{(2)}(x) &= x^{r-1} \exp(\alpha_k x) \sin(\beta_k x). \end{aligned}$$

Общее решение однородного уравнения 2.9.52 представляет собой линейную комбинацию (с произвольными постоянными) собственных функций этого уравнения.

► Для уравнений 2.9.53–2.9.62 приведены только частные решения. Общие решения этих уравнений можно получить, прибавив к частным решениям уравнений общее решение однородного уравнения 2.9.52.

$$53. \quad y(x) + \int_x^\infty K(x-t)y(t) dt = Ax^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Частный случай уравнения 2.9.55 при $\lambda = 0$.

1°. Решение при $n = 0$:

$$y(x) = \frac{A}{B}, \quad B = 1 + \int_0^\infty K(-z) dz.$$

2°. Решение при $n = 1$:

$$y(x) = \frac{A}{B}x - \frac{AC}{B^2}, \quad B = 1 + \int_0^\infty K(-z) dz, \quad C = \int_0^\infty zK(-z) dz.$$

3°. Решение при $n = 2$:

$$\begin{aligned} y_2(x) &= \frac{A}{B}x^2 - 2\frac{AC}{B^2}x + 2\frac{AC^2}{B^3} - \frac{AD}{B^2}, \\ B &= 1 + \int_0^\infty K(-z) dz, \quad C = \int_0^\infty zK(-z) dz, \quad D = \int_0^\infty z^2K(-z) dz. \end{aligned}$$

4°. Решения при $n = 3, 4, \dots$ определяются по формулам

$$y_n(x) = A \left\{ \frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} \left[\frac{e^{\lambda x}}{B(\lambda)} \right] \right\}_{\lambda=0}, \quad B(\lambda) = 1 + \int_0^\infty K(-z)e^{\lambda z} dz.$$

$$54. \quad y(x) + \int_x^\infty K(x-t)y(t) dt = Ae^{\lambda x}.$$

Решение:

$$y(x) = \frac{A}{B}e^{\lambda x}, \quad B = 1 + \int_0^\infty K(-z)e^{\lambda z} dz = 1 + \mathfrak{L}\{K(-z), -\lambda\}.$$

Интегральное слагаемое в выражении для коэффициента B представляет собой преобразование Лапласа с параметром $-\lambda$ от функции $K(-z)$ и может быть вычислено с помощью таблиц преобразований Лапласа, приведенных, например, в книгах: Г. Бейтмен, А. Эрдейи (т. 1, 1973), В. А. Диткин, А. П. Прудников (1974).

$$55. \quad y(x) + \int_x^\infty K(x-t)y(t) dt = Ax^n e^{\lambda x}, \quad n = 1, 2, \dots$$

1°. Решение при $n = 1$:

$$y_1(x) = \frac{A}{B}xe^{\lambda x} - \frac{AC}{B^2}e^{\lambda x},$$

$$B = 1 + \int_0^\infty K(-z)e^{\lambda z} dz, \quad C = \int_0^\infty zK(-z)e^{\lambda z} dz.$$

Коэффициенты B и C удобно вычислять, используя таблицы преобразований Лапласа (при $p = -\lambda$).

2°. Решение при $n = 2$:

$$y_2(x) = \frac{A}{B}x^2e^{\lambda x} - 2\frac{AC}{B^2}xe^{\lambda x} + \left(2\frac{AC^2}{B^3} - \frac{AD}{B^2}\right)e^{\lambda x},$$

$$B = 1 + \int_0^\infty K(-z)e^{\lambda z} dz, \quad C = \int_0^\infty zK(-z)e^{\lambda z} dz, \quad D = \int_0^\infty z^2K(-z)e^{\lambda z} dz.$$

3°. Решения при $n = 3, 4, \dots$ определяются по формулам

$$y_n(x) = \frac{\partial}{\partial \lambda} y_{n-1}(x) = A \frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} \left[\frac{e^{\lambda x}}{B(\lambda)} \right], \quad B(\lambda) = 1 + \int_0^\infty K(-z)e^{\lambda z} dz.$$

$$56. \quad y(x) + \int_x^\infty K(x-t)y(t) dt = A \operatorname{ch}(\lambda x).$$

Решение:

$$y(x) = \frac{A}{2B_+}e^{\lambda x} + \frac{A}{2B_-}e^{-\lambda x} = \frac{1}{2} \left(\frac{A}{B_+} + \frac{A}{B_-} \right) \operatorname{ch}(\lambda x) + \frac{1}{2} \left(\frac{A}{B_+} - \frac{A}{B_-} \right) \operatorname{sh}(\lambda x),$$

$$B_+ = 1 + \int_0^\infty K(-z)e^{\lambda z} dz, \quad B_- = 1 + \int_0^\infty K(-z)e^{-\lambda z} dz.$$

$$57. \quad y(x) + \int_x^\infty K(x-t)y(t) dt = A \operatorname{sh}(\lambda x).$$

Решение:

$$y(x) = \frac{A}{2B_+}e^{\lambda x} - \frac{A}{2B_-}e^{-\lambda x} = \frac{1}{2} \left(\frac{A}{B_+} - \frac{A}{B_-} \right) \operatorname{ch}(\lambda x) + \frac{1}{2} \left(\frac{A}{B_+} + \frac{A}{B_-} \right) \operatorname{sh}(\lambda x),$$

$$B_+ = 1 + \int_0^\infty K(-z)e^{\lambda z} dz, \quad B_- = 1 + \int_0^\infty K(-z)e^{-\lambda z} dz.$$

$$58. \quad y(x) + \int_x^\infty K(x-t)y(t) dt = A \cos(\lambda x).$$

Решение:

$$y(x) = \frac{A}{B_c^2 + B_s^2} [B_c \cos(\lambda x) + B_s \sin(\lambda x)],$$

$$B_c = 1 + \int_0^\infty K(-z) \cos(\lambda z) dz, \quad B_s = \int_0^\infty K(-z) \sin(\lambda z) dz.$$

$$59. \quad y(x) + \int_x^\infty K(x-t)y(t) dt = A \sin(\lambda x).$$

Решение:

$$y(x) = \frac{A}{B_c^2 + B_s^2} [B_c \sin(\lambda x) - B_s \cos(\lambda x)],$$

$$B_c = 1 + \int_0^\infty K(-z) \cos(\lambda z) dz, \quad B_s = \int_0^\infty K(-z) \sin(\lambda z) dz.$$

$$60. \quad y(x) + \int_x^\infty K(x-t)y(t) dt = A e^{\mu x} \cos(\lambda x).$$

Решение:

$$y(x) = \frac{A}{B_c^2 + B_s^2} e^{\mu x} [B_c \cos(\lambda x) + B_s \sin(\lambda x)],$$

$$B_c = 1 + \int_0^\infty K(-z) e^{\mu z} \cos(\lambda z) dz, \quad B_s = \int_0^\infty K(-z) e^{\mu z} \sin(\lambda z) dz.$$

$$61. \quad y(x) + \int_x^\infty K(x-t)y(t) dt = A e^{\mu x} \sin(\lambda x).$$

Решение:

$$y(x) = \frac{A}{B_c^2 + B_s^2} e^{\mu x} [B_c \sin(\lambda x) - B_s \cos(\lambda x)],$$

$$B_c = 1 + \int_0^\infty K(-z) e^{\mu z} \cos(\lambda z) dz, \quad B_s = \int_0^\infty K(-z) e^{\mu z} \sin(\lambda z) dz.$$

$$62. \quad y(x) + \int_x^\infty K(x-t)y(t) dt = f(x).$$

1°. Для полиномиальной правой части уравнения $f(x) = \sum_{k=0}^n A_k x^k$ решение имеет вид

$$y(x) = \sum_{k=0}^n B_k x^k,$$

где постоянные B_k определяются методом неопределенных коэффициентов. Для построения решения можно также воспользоваться формулой, приведенной в п. 4° уравнения 2.9.53.

2°. Для правой части $f(x) = e^{\lambda x} \sum_{k=0}^n A_k x^k$ решение уравнения имеет вид

$$y(x) = e^{\lambda x} \sum_{k=0}^n B_k x^k,$$

где постоянные B_k определяются методом неопределенных коэффициентов. Для построения решения можно также воспользоваться формулой, приведенной в п. 3° уравнения 2.9.55.

3°. Для правой части $f(x) = \sum_{k=0}^n A_k \exp(\lambda_k x)$ решение уравнения имеет вид

$$y(x) = \sum_{k=0}^n \frac{A_k}{B_k} \exp(\lambda_k x), \quad B_k = 1 + \int_0^\infty K(-z) \exp(\lambda_k z) dz.$$

4°. Для правой части $f(x) = \cos(\lambda x) \sum_{k=0}^n A_k x^k$ решение уравнения имеет вид

$$y(x) = \cos(\lambda x) \sum_{k=0}^n B_k x^k + \sin(\lambda x) \sum_{k=0}^n C_k x^k,$$

где постоянные B_k и C_k определяются методом неопределенных коэффициентов.

5°. Для правой части $f(x) = \sin(\lambda x) \sum_{k=0}^n A_k x^k$ решение уравнения имеет вид

$$y(x) = \cos(\lambda x) \sum_{k=0}^n B_k x^k + \sin(\lambda x) \sum_{k=0}^n C_k x^k,$$

где постоянные B_k и C_k определяются методом неопределенных коэффициентов.

6°. Для правой части $f(x) = \sum_{k=0}^n A_k \cos(\lambda_k x)$ решение уравнения имеет вид

$$y(x) = \sum_{k=0}^n \frac{A_k}{B_{ck}^2 + B_{sk}^2} [B_{ck} \cos(\lambda_k x) + B_{sk} \sin(\lambda_k x)],$$

$$B_{ck} = 1 + \int_0^\infty K(-z) \cos(\lambda_k z) dz, \quad B_{sk} = \int_0^\infty K(-z) \sin(\lambda_k z) dz.$$

7°. Для правой части $f(x) = \sum_{k=0}^n A_k \sin(\lambda_k x)$ решение уравнения имеет вид

$$y(x) = \sum_{k=0}^n \frac{A_k}{B_{ck}^2 + B_{sk}^2} [B_{ck} \sin(\lambda_k x) - B_{sk} \cos(\lambda_k x)],$$

$$B_{ck} = 1 + \int_0^\infty K(-z) \cos(\lambda_k z) dz, \quad B_{sk} = \int_0^\infty K(-z) \sin(\lambda_k z) dz.$$

8°. Для правой части $f(x) = \cos(\lambda x) \sum_{k=0}^n A_k \exp(\mu_k x)$ решение уравнения имеет вид

$$y(x) = \cos(\lambda x) \sum_{k=0}^n \frac{A_k B_{ck}}{B_{ck}^2 + B_{sk}^2} \exp(\mu_k x) + \sin(\lambda x) \sum_{k=0}^n \frac{A_k B_{sk}}{B_{ck}^2 + B_{sk}^2} \exp(\mu_k x),$$

$$B_{ck} = 1 + \int_0^\infty K(-z) \exp(\mu_k z) \cos(\lambda z) dz, \quad B_{sk} = \int_0^\infty K(-z) \exp(\mu_k z) \sin(\lambda z) dz.$$

9°. Для правой части $f(x) = \sin(\lambda x) \sum_{k=0}^n A_k \exp(\mu_k x)$ решение уравнения имеет вид

$$y(x) = \sin(\lambda x) \sum_{k=0}^n \frac{A_k B_{ck}}{B_{ck}^2 + B_{sk}^2} \exp(\mu_k x) - \cos(\lambda x) \sum_{k=0}^n \frac{A_k B_{sk}}{B_{ck}^2 + B_{sk}^2} \exp(\mu_k x),$$

$$B_{ck} = 1 + \int_0^\infty K(-z) \exp(\mu_k z) \cos(\lambda z) dz, \quad B_{sk} = \int_0^\infty K(-z) \exp(\mu_k z) \sin(\lambda z) dz.$$

10°. В общем случае для произвольной правой части $f = f(x)$ решение интегрального уравнения можно представить в виде

$$y(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\tilde{f}(p)}{1 + \tilde{k}(-p)} e^{px} dp, \quad \tilde{f}(p) = \int_0^\infty f(x) e^{-px} dx, \quad \tilde{k}(-p) = \int_0^\infty K(-z) e^{pz} dz.$$

Для вычисления $\tilde{f}(p)$, $\tilde{k}(-p)$ удобно использовать таблицы преобразований Лапласа, а для определения $y(x)$ — таблицы обратных преобразований Лапласа.

2.9-3. Другие уравнения

63. $y(x) + \int_0^x \frac{1}{x} f\left(\frac{t}{x}\right) y(t) dt = 0.$

Вид собственных функций этого интегрального уравнения определяется корнями следующего трансцендентного (алгебраического) уравнения относительно параметра λ :

$$\int_0^1 f(z) z^\lambda dz = -1. \quad (1)$$

1°. Действительным (однократным) корням λ_k уравнения (1) отвечают собственные функции

$$y_k(x) = x^{\lambda_k}.$$

2°. Действительным корням λ_k кратности r отвечают r собственных функций

$$y_{k1}(x) = x^{\lambda_k}, \quad y_{k2}(x) = x^{\lambda_k} \ln x, \quad \dots, \quad y_{kr}(x) = x^{\lambda_k} \ln^{r-1} x.$$

3°. Комплексным (однократным) корням $\lambda_k = \alpha_k + i\beta_k$ уравнения (1) отвечает пара собственных функций

$$y_k^{(1)}(x) = x^{\alpha_k} \cos(\beta_k \ln x), \quad y_k^{(2)}(x) = x^{\alpha_k} \sin(\beta_k \ln x).$$

4°. Комплексным корням $\lambda_k = \alpha_k + i\beta_k$ кратности r отвечают r пар собственных функций

$$\begin{aligned} y_{k1}^{(1)}(x) &= x^{\alpha_k} \cos(\beta_k \ln x), & y_{k1}^{(2)}(x) &= x^{\alpha_k} \sin(\beta_k \ln x), \\ y_{k2}^{(1)}(x) &= x^{\alpha_k} \ln x \cos(\beta_k \ln x), & y_{k2}^{(2)}(x) &= x^{\alpha_k} \ln x \sin(\beta_k \ln x), \\ &\dots\dots\dots & &\dots\dots\dots \\ y_{kr}^{(1)}(x) &= x^{\alpha_k} \ln^{r-1} x \cos(\beta_k \ln x), & y_{kr}^{(2)}(x) &= x^{\alpha_k} \ln^{r-1} x \sin(\beta_k \ln x). \end{aligned}$$

Общее решение однородного уравнения 2.9.63 представляет собой линейную комбинацию (с произвольными постоянными) собственных функций этого уравнения.

► Для уравнений 2.9.64–2.9.71 приведены только частные решения. Общие решения этих уравнений можно получить, прибавив к частным решениям уравнений общее решение однородного уравнения 2.9.63.

$$64. \quad y(x) + \int_0^x \frac{1}{x} f\left(\frac{t}{x}\right) y(t) dt = Ax + B.$$

$$\text{Решение: } y(x) = \frac{A}{1+I_1}x + \frac{B}{1+I_0}, \quad I_0 = \int_0^1 f(t) dt, \quad I_1 = \int_0^1 t f(t) dt.$$

$$65. \quad y(x) + \int_0^x \frac{1}{x} f\left(\frac{t}{x}\right) y(t) dt = Ax^\beta.$$

$$\text{Решение: } y(x) = \frac{A}{B}x^\beta, \quad B = 1 + \int_0^1 f(t)t^\beta dt.$$

$$66. \quad y(x) + \int_0^x \frac{1}{x} f\left(\frac{t}{x}\right) y(t) dt = A \ln x + B.$$

Решение:

$$y(x) = p \ln x + q,$$

где

$$p = \frac{A}{1+I_0}, \quad q = \frac{B}{1+I_0} - \frac{AI_1}{(1+I_0)^2}, \quad I_0 = \int_0^1 f(t) dt, \quad I_1 = \int_0^1 f(t) \ln t dt.$$

$$67. \quad y(x) + \int_0^x \frac{1}{x} f\left(\frac{t}{x}\right) y(t) dt = Ax^\beta \ln x.$$

Решение:

$$y(x) = px^\beta \ln x + qx^\beta,$$

где

$$p = \frac{A}{1+I_1}, \quad q = -\frac{AI_2}{(1+I_1)^2}, \quad I_1 = \int_0^1 f(t)t^\beta dt, \quad I_2 = \int_0^1 f(t)t^\beta \ln t dt.$$

$$68. \quad y(x) + \int_0^x \frac{1}{x} f\left(\frac{t}{x}\right) y(t) dt = A \cos(\ln x).$$

Решение:

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{AI_c}{I_c^2 + I_s^2} \cos(\ln x) + \frac{AI_s}{I_c^2 + I_s^2} \sin(\ln x), \\ I_c &= 1 + \int_0^1 f(t) \cos(\ln t) dt, \quad I_s = \int_0^1 f(t) \sin(\ln t) dt. \end{aligned}$$

$$69. \quad y(x) + \int_0^x \frac{1}{x} f\left(\frac{t}{x}\right) y(t) dt = A \sin(\ln x).$$

Решение:

$$y(x) = -\frac{AI_s}{I_c^2 + I_s^2} \cos(\ln x) + \frac{AI_c}{I_c^2 + I_s^2} \sin(\ln x),$$

$$I_c = 1 + \int_0^1 f(t) \cos(\ln t) dt, \quad I_s = \int_0^1 f(t) \sin(\ln t) dt.$$

$$70. \quad y(x) + \int_0^x \frac{1}{x} f\left(\frac{t}{x}\right) y(t) dt = Ax^\beta \cos(\ln x) + Bx^\beta \sin(\ln x).$$

Решение:

$$y(x) = px^\beta \cos(\ln x) + qx^\beta \sin(\ln x),$$

где

$$p = \frac{AI_c - BI_s}{I_c^2 + I_s^2}, \quad q = \frac{AI_s + BI_c}{I_c^2 + I_s^2}, \quad I_c = 1 + \int_0^1 f(t)t^\beta \cos(\ln t) dt, \quad I_s = \int_0^1 f(t)t^\beta \sin(\ln t) dt.$$

$$71. \quad y(x) + \int_0^x \frac{1}{x} f\left(\frac{t}{x}\right) y(t) dt = g(x).$$

1°. Для правой части полиномиального вида

$$g(x) = \sum_{n=0}^N A_n x^n$$

ограниченное в нуле решение интегрального уравнения определяется формулами

$$y(x) = \sum_{n=0}^N \frac{A_n}{1 + f_n} x^n, \quad f_n = \int_0^1 f(z) z^n dz.$$

Считается, что $f_0 < \infty$, $f_n \neq -1$ ($n = 0, 1, 2, \dots$).

Если при каком-нибудь значении n имеет место равенство $f_n = -1$, то решение отличается одним слагаемым и имеет вид

$$y(x) = \sum_{m=0}^{n-1} \frac{A_m}{1 + f_m} x^m + \sum_{m=n+1}^N \frac{A_m}{1 + f_m} x^m + \frac{A_n}{\bar{f}_n} x^n \ln x, \quad \bar{f}_n = \int_0^1 f(z) z^n \ln z dz.$$

Для произвольной правой части $g(x)$, разлагающейся в степенной ряд, можно использовать формулы п. 1°, в которых следует положить $N = \infty$. При этом радиус сходимости полученного решения $y(x)$ будет равен радиусу сходимости ряда для функции $g(x)$.

2°. Для правой части уравнения $g(x) = \ln x \sum_{k=0}^n A_k x^k$ решение имеет вид

$$y(x) = \ln x \sum_{k=0}^n B_k x^k + \sum_{k=0}^n C_k x^k,$$

где постоянные B_k и C_k определяются методом неопределенных коэффициентов.

3°. Для правой части $g(x) = \sum_{k=0}^n A_k (\ln x)^k$ решение уравнения имеет вид

$$y(x) = \sum_{k=0}^n B_k (\ln x)^k,$$

где постоянные B_k определяются методом неопределенных коэффициентов.

4°. Для правой части $g(x) = \sum_{k=1}^n A_k \cos(\lambda_k \ln x)$ решение уравнения имеет вид

$$y(x) = \sum_{k=1}^n B_k \cos(\lambda_k \ln x) + \sum_{k=1}^n C_k \sin(\lambda_k \ln x),$$

где постоянные B_k и C_k определяются методом неопределенных коэффициентов.

5°. Для правой части $g(x) = \sum_{k=1}^n A_k \sin(\lambda_k \ln x)$ решение уравнения имеет вид

$$y(x) = \sum_{k=1}^n B_k \cos(\lambda_k \ln x) + \sum_{k=1}^n C_k \sin(\lambda_k \ln x),$$

где постоянные B_k и C_k определяются методом неопределенных коэффициентов.

6°. Для произвольной правой части $g(x)$ преобразование

$$x = e^{-z}, \quad t = e^{-\tau}, \quad y(x) = e^z w(z), \quad f(\xi) = F(\ln \xi), \quad g(x) = e^z G(z)$$

приводит к уравнению с разностным ядром вида 2.9.62:

$$w(z) + \int_z^\infty F(z - \tau) w(\tau) d\tau = G(z).$$

7°. Для произвольной правой части $g(x)$ решение интегрального уравнения можно выразить с помощью обратного преобразования Меллина.

2.10. Некоторые формулы

Пусть решение интегрального уравнения

$$y(x) + \int_a^x K(x, t) y(t) dt = f(x)$$

дается формулой

$$y(x) = f(x) + \int_a^x R(x, t) f(t) dt.$$

Тогда решение более сложного интегрального уравнения

$$y(x) + \int_a^x K(x, t) \frac{g(x)}{g(t)} y(t) dt = f(x) \quad (1)$$

дается формулой

$$y(x) = f(x) + \int_a^x R(x, t) \frac{g(x)}{g(t)} f(t) dt. \quad (2)$$

Часто встречаются уравнения вида (1) при $g(x) = e^{\lambda x}$ и $g(x) = x^\lambda$.

Ниже приведены формулы для определения решений интегральных уравнений вида (3) для некоторых конкретных функций $g(x)$. Во всех случаях считается, что решение уравнения (1) известно и дается выражением (2).

1°. Решение уравнения

$$y(x) + \int_a^x K(x, t) (x/t)^\lambda y(t) dt = f(x)$$

имеет вид

$$y(x) = f(x) + \int_a^x R(x, t) (x/t)^\lambda f(t) dt.$$

2°. Решение уравнения

$$y(x) + \int_a^x K(x, t) e^{\lambda(x-t)} y(t) dt = f(x)$$

имеет вид

$$y(x) = f(x) + \int_a^x R(x, t) e^{\lambda(x-t)} f(t) dt.$$

3. Линейные уравнения первого рода с постоянными пределами интегрирования

► **Обозначения:** $f = f(x)$, $g = g(x)$, $h = h(x)$, $K = K(x)$, $M = M(x)$ — произвольные функции (вместо x у функций может быть сложный аргумент, зависящий от двух переменных x и t); $A, B, C, a, b, c, k, \alpha, \beta, \gamma, \lambda, \mu$ — свободные параметры; n — целое неотрицательное число.

3.1. Уравнения, ядра которых содержат степенные функции

3.1-1. Ядра уравнений линейны по аргументам x, t

$$1. \int_0^1 |x - t| y(t) dt = f(x).$$

1°. Раскроем модуль в подынтегральном выражении. В результате получим

$$\int_0^x (x - t)y(t) dt + \int_x^1 (t - x)y(t) dt = f(x). \quad (1)$$

Дифференцируя (1) по x , имеем

$$\int_0^x y(t) dt - \int_x^1 y(t) dt = f'_x(x). \quad (2)$$

Дифференцируя (2), находим решение

$$y(x) = \frac{1}{2} f''_{xx}(x). \quad (3)$$

2°. Покажем, что правая часть интегрального уравнения $f(x)$ должна удовлетворять определенным соотношениям. Полагая в (1) $x = 0$ и $x = 1$, имеем два следствия: $\int_0^1 ty(t) dt = f(0)$, $\int_0^1 (1 - t)y(t) dt = f(1)$, которые можно записать в виде

$$\int_0^1 ty(t) dt = f(0), \quad \int_0^1 y(t) dt = f(0) + f(1). \quad (4)$$

Подставим в эти равенства функцию $y(x)$ из (3). После интегрирования по частям получим соотношения: $f'_x(1) = f(1) + f(0)$, $f'_x(1) - f'_x(0) = 2f(1) + 2f(0)$. Отсюда имеем искомые условия для функции $f(x)$:

$$f'_x(1) = f(0) + f(1), \quad f'_x(0) + f'_x(1) = 0. \quad (5)$$

Условия (5) позволяют найти допустимый общий вид правой части интегрального уравнения

$$f(x) = F(x) + Ax + B, \\ A = -\frac{1}{2} [F'_x(1) + F'_x(0)], \quad B = \frac{1}{2} [F'_x(1) - F(1) - F(0)],$$

где $F(x)$ — произвольная ограниченная дважды дифференцируемая функция с ограниченной первой производной.

В разд. 3.1 ядра рассматриваемых интегральных уравнений могут содержать как степенные функции, так и модули степенных функций.

$$2. \int_a^b |x - t| y(t) dt = f(x), \quad 0 \leq a < b < \infty.$$

Частный случай уравнения 3.8.3 при $g(x) = x$.

Решение:

$$y(x) = \frac{1}{2} f''_{xx}(x).$$

Правая часть интегрального уравнения $f(x)$ должна удовлетворять определенным соотношениям. Общий вид правой части имеет вид

$$f(x) = F(x) + Ax + B, \\ A = -\frac{1}{2} [F'_x(a) + F'_x(b)], \quad B = \frac{1}{2} [aF'_x(a) + bF'_x(b) - F(a) - F(b)],$$

где $F(x)$ — произвольная ограниченная дважды дифференцируемая функция (с ограниченной первой производной).

$$3. \int_0^a |\lambda x - t| y(t) dt = f(x), \quad \lambda > 0.$$

Здесь $0 \leq x \leq a, 0 \leq t \leq a$.

1°. Раскроем модуль в подынтегральном выражении. В результате получим

$$\int_0^{\lambda x} (\lambda x - t) y(t) dt + \int_{\lambda x}^a (t - \lambda x) y(t) dt = f(x). \quad (1)$$

Дифференцируя (1) по x , имеем

$$\lambda \int_0^{\lambda x} y(t) dt - \lambda \int_{\lambda x}^a y(t) dt = f'_x(x). \quad (2)$$

Дифференцируя (2), получим $2\lambda^2 y(\lambda x) = f''_{xx}(x)$. Отсюда находим решение

$$y(x) = \frac{1}{2\lambda^2} f''_{xx}\left(\frac{x}{\lambda}\right). \quad (3)$$

2°. Покажем, что правая часть интегрального уравнения $f(x)$ должна удовлетворять определенным соотношениям. Полагая в (1) и (2) $x = 0$, имеем два следствия:

$$\int_0^a t y(t) dt = f(0), \quad \lambda \int_0^a y(t) dt = -f'_x(0). \quad (4)$$

Подставим в эти равенства функцию $y(x)$ из (3). После интегрирования по частям получим искомые условия для функции $f(x)$:

$$(a/\lambda) f'_x(a/\lambda) = f(0) + f(a/\lambda), \quad f'_x(0) + f'_x(a/\lambda) = 0. \quad (5)$$

Условия (5) позволяют найти допустимый общий вид правой части интегрального уравнения:

$$f(x) = F(z) + Az + B, \quad z = \lambda x; \\ A = -\frac{1}{2} [F'_z(a) + F'_z(0)], \quad B = \frac{1}{2} [aF'_z(a) - F(a) - F(0)],$$

где $F(z)$ — произвольная ограниченная дважды дифференцируемая функция (с ограниченной первой производной).

$$4. \int_0^a |x - \lambda t| y(t) dt = f(x), \quad \lambda > 0.$$

Здесь $0 \leq x \leq a, 0 \leq t \leq a$.

Решение:

$$y(x) = \frac{1}{2} \lambda f''_{xx}(\lambda x).$$

Правая часть интегрального уравнения $f(x)$ должна удовлетворять следующим соотношениям:

$$a\lambda f'_x(a\lambda) = f(0) + f(a\lambda), \quad f'_x(0) + f'_x(a\lambda) = 0.$$

Отсюда находим допустимый общий вид правой части

$$f(x) = F(x) + Ax + B, \quad A = -\frac{1}{2} [F'_x(\lambda a) + F'_x(0)], \quad B = \frac{1}{2} [a\lambda F'_x(a\lambda) - F(\lambda a) - F(0)],$$

где $F(x)$ — произвольная ограниченная дважды дифференцируемая функция (с ограниченной первой производной).

3.1-2. Ядра уравнений квадратичны по аргументам x, t

$$5. \int_0^a |Ax + Bx^2 - t| y(t) dt = f(x), \quad A > 0, \quad B > 0.$$

Частный случай уравнения 3.8.5 при $g(x) = Ax + Bx^2$.

$$6. \int_0^a |x - At - Bt^2| y(t) dt = f(x), \quad A > 0, \quad B > 0.$$

Частный случай уравнения 3.8.6 при $g(x) = At + Bt^2$.

$$7. \int_a^b |xt - t^2| y(t) dt = f(x), \quad 0 \leq a < b < \infty.$$

Замена $w(t) = ty(t)$ приводит к уравнению вида 3.1.2:

$$\int_a^b |x - t| w(t) dt = f(x).$$

$$8. \int_a^b |x^2 - t^2| y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 3.8.3 при $g(x) = x^2$.

Решение: $y(x) = \frac{d}{dx} \left[\frac{f'_x(x)}{4x} \right]$. Правая часть уравнения $f(x)$ должна удовлетворять определенным соотношениям, указанным в 3.8.3.

$$9. \int_0^a |x^2 - \beta t^2| y(t) dt = f(x), \quad \beta > 0.$$

Частный случай уравнения 3.8.4 при $g(x) = x^2, \beta = \lambda^2$.

$$10. \int_0^a |Ax + Bx^2 - \lambda t - B\lambda^2 t^2| y(t) dt = f(x), \quad \lambda > 0.$$

Частный случай уравнения 3.8.4 при $g(x) = Ax + Bx^2$.

3.1-3. Ядра уравнений, содержащие целые степени аргументов x, t

$$11. \int_a^b |x - t|^3 y(t) dt = f(x).$$

Раскроем модуль в подынтегральном выражении. В результате получим

$$\int_a^x (x - t)^3 y(t) dt + \int_x^b (t - x)^3 y(t) dt = f(x). \quad (1)$$

Дифференцируя (1) дважды, имеем

$$6 \int_a^x (x - t) y(t) dt + 6 \int_x^b (t - x) y(t) dt = f''_{xx}(x).$$

Это уравнение можно записать в виде 3.1.2:

$$\int_a^b |x - t| y(t) dt = \frac{1}{6} f''_{xx}(x). \quad (2)$$

Поэтому его решение интегрального уравнения дается формулой

$$y(x) = \frac{1}{12} y'''_{xxx}(x). \quad (3)$$

Правая часть интегрального уравнения должна удовлетворять определенным условиям, которые получаются из (1) при $x = a$ и $x = b$ и из (2) при $x = a$ и $x = b$ в результате подстановки в них решения (3) с последующим интегрированием по частям.

$$12. \int_a^b |x^3 - t^3| y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 3.8.3 при $g(x) = x^3$.

$$13. \int_a^b |xt^2 - t^3| y(t) dt = f(x) \quad 0 \leq a < b < \infty.$$

Замена $w(t) = t^2 y(t)$ приводит к уравнению вида 3.1.2:

$$\int_a^b |x - t| w(t) dt = f(x).$$

$$14. \int_a^b |x^2 t - t^3| y(t) dt = f(x).$$

Замена $w(t) = |t| y(t)$ приводит к уравнению вида 3.1.8:

$$\int_a^b |x^2 - t^2| w(t) dt = f(x).$$

$$15. \int_0^a |x^3 - \beta t^3| y(t) dt = f(x), \quad \beta > 0.$$

Частный случай уравнения 3.8.4 при $g(x) = x^3$, $\beta = \lambda^3$.

$$16. \int_a^b |x - t|^{2n+1} y(t) dt = f(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Решение:

$$y(x) = \frac{1}{2(2n+1)!} f_x^{(2n+2)}(x). \quad (1)$$

Правая часть интегрального уравнения $f(x)$ должна удовлетворять определенным условиям, которые получаются в результате подстановки решения (1) в равенства (с последующим интегрированием по частям)

$$\int_a^b (t-a)^{2n+1} y(t) dt = f(a), \quad \int_a^b (t-a)^{2n-k} y(t) dt = \frac{(-1)^{k+1}}{A_k} f_x^{(k+1)}(a),$$

$$A_k = (2n+1)(2n) \dots (2n+1-k); \quad k = 0, 1, \dots, 2n.$$

3.1-4. Ядро уравнения, содержащее рациональную функцию

$$17. \int_0^\infty \frac{y(t) dt}{x+t} = f(x).$$

Левая часть этого уравнения представляет собой преобразование Стильтеса.

Решение:

$$y(x) = \frac{1}{2\pi^2 i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} x^{-s} \sin(\pi s) \hat{f}(s) ds, \quad \hat{f}(s) = \int_0^\infty x^{s-1} f(x) dx, \quad i^2 = -1, \quad 0 < c < 1,$$

где $\hat{f}(s)$ — преобразование Меллина функции $f(x)$.

⊙ Литература: А. Р. Prudnikov, Yu. А. Brychkov, O. I. Marichev (1992, стр. 428).

1°. Положим

$$x = e^z, \quad t = e^\tau, \quad y(t) = e^{-\tau/2} w(\tau), \quad f(x) = e^{-z/2} g(z).$$

В результате получим интегральное уравнение с разностным ядром вида 3.8.15:

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{w(\tau) d\tau}{2 \operatorname{ch} [\frac{1}{2}(z-\tau)]} = g(z),$$

решение которого дается формулой

$$w(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi^3}} \int_{-\infty}^\infty \operatorname{ch}(\pi u) \tilde{g}(u) e^{iux} du, \quad \tilde{g}(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty g(z) e^{-iuz} dz.$$

⊙ Литература: П. П. Забрёйко, А. И. Кошелев и др. (1968, стр. 30).

2°. При некоторых допущениях решение исходного уравнения можно представить в виде (вещественное обращение преобразования Стильтьеса):

$$y(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{(n-1)!(n+1)!} [x^{2n+1} f_x^{(n)}(x)]_x^{(n+1)}. \quad (1)$$

Другая форма представления решения:

$$y(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{2\pi} \left(\frac{e}{n}\right)^{2n} [x^{2n} f_x^{(n)}(x)]_x^{(n)}. \quad (2)$$

Решение в форме ряда:

$$y(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{x}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} (\pi x)^{2n} [\sqrt{x} f(x)]^{(2n)}. \quad (3)$$

Для получения приближенного решения интегрального уравнения в формулах (1), (2) и (3) ограничиваются заданием конкретного значения n .

© Литература: И. И. Хиршман, Д. В. Уиддер (1958), А. Р. Prudnikov, Yu. A. Brychkov, O. I. Marichev (1992, стр. 428).

3.1-5. Ядра уравнений, содержащие квадратные корни

18. $\int_0^a |\sqrt{x} - \sqrt{t}| y(t) dt = f(x), \quad 0 < a < \infty.$

Частный случай уравнения 3.8.3 при $g(x) = \sqrt{x}$.

Решение:

$$y(x) = \frac{d}{dx} [\sqrt{x} f'_x(x)].$$

Правая часть интегрального уравнения $f(x)$ должна удовлетворять определенным соотношениям. Общий вид правой части имеет вид

$$f(x) = F(x) + Ax + B, \quad A = -F'_x(a), \quad B = \frac{1}{2} [aF'_x(a) - F(a) - F(0)],$$

где $F(x)$ — произвольная ограниченная дважды дифференцируемая функция (с ограниченной первой производной).

19. $\int_0^a |\sqrt{x} - \beta\sqrt{t}| y(t) dt = f(x), \quad \beta > 0.$

Частный случай уравнения 3.8.4 при $g(x) = \sqrt{x}$, $\beta = \sqrt{\lambda}$.

20. $\int_0^a |\sqrt{x} - t| y(t) dt = f(x).$

Частный случай уравнения 3.8.5 при $g(x) = \sqrt{x}$ (см. п. 3°).

21. $\int_0^a |x - \sqrt{t}| y(t) dt = f(x).$

Частный случай уравнения 3.8.6 при $g(t) = \sqrt{t}$ (см. п. 3°).

22. $\int_0^a \frac{y(t)}{\sqrt{|x-t|}} dt = f(x), \quad 0 < a \leq \infty.$

Частный случай уравнения 3.1.29 при $k = \frac{1}{2}$.

Решение:

$$y(x) = -\frac{A}{x^{1/4}} \frac{d}{dx} \left[\int_x^a \frac{dt}{(t-x)^{1/4}} \int_0^t \frac{f(s) ds}{s^{1/4}(t-s)^{1/4}} \right], \quad A = \frac{1}{\sqrt{8\pi} \Gamma^2(3/4)}.$$

$$23. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y(t)}{\sqrt{|x-t|}} dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 3.1.34 при $\lambda = \frac{1}{2}$.

Решение:

$$y(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x) - f(t)}{|x-t|^{3/2}} dt.$$

3.1-6. Ядра уравнений, содержащие произвольные степени

$$24. \int_0^a |x^k - t^k| y(t) dt = f(x), \quad 0 < k < 1, \quad 0 < a < \infty.$$

1°. Раскроем модуль в подынтегральном выражении. В результате получим

$$\int_0^x (x^k - t^k) y(t) dt + \int_x^a (t^k - x^k) y(t) dt = f(x). \quad (1)$$

Дифференцируя (1) по x , имеем

$$kx^{k-1} \int_0^x y(t) dt - kx^{k-1} \int_x^a y(t) dt = f'_x(x). \quad (2)$$

Поделим обе части (2) на kx^{k-1} и продифференцируем полученное выражение. В итоге находим решение

$$y(x) = \frac{1}{2k} \frac{d}{dx} [x^{1-k} f'_x(x)]. \quad (3)$$

2°. Покажем, что правая часть интегрального уравнения $f(x)$ должна удовлетворять определенным соотношениям. Полагая в (1) $x = 0$ и $x = a$, имеем два следствия: $\int_0^a t^k y(t) dt = f(0)$, $\int_0^a (a^k - t^k) y(t) dt = f(a)$, которые можно записать в виде

$$\int_0^a t^k y(t) dt = f(0), \quad a^k \int_0^a y(t) dt = f(0) + f(a). \quad (4)$$

Подставим в эти равенства функцию $y(x)$ из (3). После интегрирования по частям получим соотношения: $a f'_x(a) = k f(a) + k f(0)$, $a f'_x(a) = 2k f(a) + 2k f(0)$. Отсюда имеем искомые условия для функции $f(x)$:

$$f(0) + f(a) = 0, \quad f'_x(a) = 0. \quad (5)$$

Условия (5) позволяют найти допустимый общий вид правой части интегрального уравнения

$$f(x) = F(x) + Ax + B, \quad A = -F'_x(a), \quad B = \frac{1}{2} [a F'_x(a) - F(a) - F(0)],$$

где $F(x)$ — произвольная ограниченная дважды дифференцируемая функция с ограниченной первой производной. Первая производная может быть и неограниченной при $x = 0$; в этом случае должно выполняться условие: $[x^{1-k} F'_x]_{x=0} = 0$.

$$25. \int_0^a |x^k - \beta t^k| y(t) dt = f(x), \quad 0 < k < 1, \quad \beta > 0.$$

Частный случай уравнения 3.8.4 при $g(x) = x^k$, $\beta = \lambda^k$.

$$26. \int_0^a |x^k t^m - t^{k+m}| y(t) dt = f(x), \quad 0 < k < 1, \quad 0 < a < \infty.$$

Замена $w(t) = t^m y(t)$ приводит к уравнению вида 3.1.24:

$$\int_0^a |x^k - t^k| w(t) dt = f(x).$$

$$27. \int_0^1 |x^k - t^m| y(t) dt = f(x), \quad k > 0, \quad m > 0.$$

Преобразование

$$z = x^k, \quad \tau = t^m, \quad w(\tau) = \tau^{\frac{1-m}{m}} y(t)$$

приводит к уравнению вида 3.1.1:

$$\int_0^1 |z - \tau| w(\tau) d\tau = F(z), \quad F(z) = m f(z^{1/k}).$$

$$28. \int_a^b |x - t|^{1+\lambda} y(t) dt = f(x), \quad 0 \leq \lambda < 1.$$

При $\lambda = 0$ см. уравнение 3.1.2. Пусть $0 < \lambda < 1$.

1°. Раскроем модуль в подынтегральном выражении. В результате получим

$$\int_a^x (x - t)^{1+\lambda} y(t) dt + \int_x^b (t - x)^{1+\lambda} y(t) dt = f(x). \quad (1)$$

Продифференцируем (1) дважды по x , а затем поделим обе части на $\lambda(\lambda+1)$. В результате имеем

$$\int_a^x (x - t)^{\lambda-1} y(t) dt + \int_x^b (t - x)^{\lambda-1} y(t) dt = \frac{1}{\lambda(\lambda+1)} f''_{xx}(x). \quad (2)$$

Перепишем (2) в виде уравнения

$$\int_a^b \frac{y(t) dt}{|x - t|^k} = \frac{1}{\lambda(\lambda+1)} f''_{xx}(x), \quad k = 1 - \lambda, \quad (3)$$

решение которого при различных a, b см. в 3.1.29, 3.1.30.

2°. Правая часть интегрального уравнения $f(x)$ должна удовлетворять определенным соотношениям. Полагая в (1) $x = a$ и $x = b$, имеем два следствия:

$$\int_a^b (t - a)^{1+\lambda} y(t) dt = f(a), \quad \int_a^b (b - t)^{1+\lambda} y(t) dt = f(b). \quad (4)$$

Подставляя в равенства (4) решение $y(x)$ уравнения (3) и интегрируя по частям, можно получить искомые условия для функции $f(x)$.

$$29. \int_0^a \frac{y(t)}{|x - t|^k} dt = f(x), \quad 0 < k < 1, \quad 0 < a \leq \infty.$$

1°. Решение:

$$y(x) = -Ax^{\frac{k-1}{2}} \frac{d}{dx} \left[\int_x^a \frac{t^{\frac{1-2k}{2}} dt}{(t-x)^{\frac{1-k}{2}}} \int_0^t \frac{f(s) ds}{s^{\frac{1-k}{2}} (t-s)^{\frac{1-k}{2}}} \right],$$

$$A = \frac{1}{2\pi} \cos\left(\frac{\pi k}{2}\right) \Gamma(k) \left[\Gamma\left(\frac{1+k}{2}\right) \right]^{-2},$$

где $\Gamma(k)$ — гамма-функция.

2°. Преобразование $x = z^2, t = \xi^2, w(\xi) = 2\xi y(t)$ приводит к уравнению вида 3.1.31:

$$\int_0^{\sqrt{a}} \frac{w(\xi)}{|z^2 - \xi^2|^k} d\xi = f(z^2).$$

$$30. \int_a^b \frac{y(t)}{|x - t|^k} dt = f(x), \quad 0 < k < 1.$$

Считается, что $|a| + |b| < \infty$. Решение:

$$y(x) = \frac{1}{2\pi} \operatorname{ctg}\left(\frac{1}{2}\pi k\right) \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{f(t) dt}{(x-t)^{1-k}} - \frac{1}{\pi^2} \cos^2\left(\frac{1}{2}\pi k\right) \int_a^x \frac{Z(t)F(t)}{(x-t)^{1-k}} dt,$$

где

$$Z(t) = (t-a)^{\frac{1+k}{2}} (b-t)^{\frac{1-k}{2}}, \quad F(t) = \frac{d}{dt} \left[\int_a^t \frac{d\tau}{(t-\tau)^k} \int_\tau^b \frac{f(s) ds}{Z(s)(s-\tau)^{1-k}} \right].$$

⊙ Литература: Ф. Д. Гахов (1977, стр. 580).

$$31. \int_0^a \frac{y(t)}{|x^2 - t^2|^k} dt = f(x), \quad 0 < k < 1, \quad 0 < a \leq \infty.$$

Решение:

$$y(x) = -\frac{2\Gamma(k) \cos(\frac{1}{2}\pi k)}{\pi [\Gamma(\frac{1+k}{2})]^2} x^{k-1} \frac{d}{dx} \int_x^a \frac{t^{2-2k} F(t) dt}{(t^2 - x^2)^{\frac{1-k}{2}}}, \quad F(t) = \int_0^t \frac{s^k f(s) ds}{(t^2 - s^2)^{\frac{1-k}{2}}}.$$

⊙ Литература: П. П. Забрейко, А. И. Кошелев и др. (1968, стр. 34).

$$32. \int_a^b \frac{y(t)}{|x^\lambda - t^\lambda|^k} dt = f(x), \quad 0 < k < 1, \quad \lambda > 0.$$

1°. Преобразование

$$z = x^\lambda, \quad \tau = t^\lambda, \quad w(\tau) = \tau^{\frac{1-\lambda}{\lambda}} y(t)$$

приводит к уравнению вида 3.1.30:

$$\int_A^B \frac{w(\tau)}{|z - \tau|^k} d\tau = F(z),$$

где $A = a^\lambda$, $B = b^\lambda$, $F(z) = \lambda f(z^{1/\lambda})$.

2°. Решение при $a = 0$:

$$y(x) = -Ax^{\frac{\lambda(k-1)}{2}} \frac{d}{dx} \left[\int_x^b \frac{t^{\frac{\lambda(3-2k)-2}{2}} dt}{(t^\lambda - x^\lambda)^{\frac{1-k}{2}}} \int_0^t \frac{s^{\frac{\lambda(k+1)-2}{2}} f(s) ds}{(t^\lambda - s^\lambda)^{\frac{1-k}{2}}} \right],$$

$$A = \frac{\lambda^2}{2\pi} \cos\left(\frac{\pi k}{2}\right) \Gamma(k) \left[\Gamma\left(\frac{1+k}{2}\right)\right]^{-2},$$

где $\Gamma(k)$ — гамма-функция.

$$33. \int_0^1 \frac{y(t)}{|x^\lambda - t^m|^k} dt = f(x), \quad 0 < k < 1, \quad \lambda > 0, \quad m > 0.$$

Преобразование

$$z = x^\lambda, \quad \tau = t^m, \quad w(\tau) = \tau^{\frac{1-m}{m}} y(t)$$

приводит к уравнению вида 3.1.30:

$$\int_0^1 \frac{w(\tau)}{|z - \tau|^k} d\tau = F(z), \quad F(z) = mf(z^{1/\lambda}).$$

$$34. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y(t)}{|x - t|^{1-\lambda}} dt = f(x), \quad 0 < \lambda < 1.$$

Решение:

$$y(x) = \frac{\lambda}{2\pi} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi\lambda}{2}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x) - f(t)}{|x - t|^{1+\lambda}} dt.$$

Считается, что выполняется условие: $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p dx < \infty$, где $1 < p < 1/\lambda$.

⊙ Литература: С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев (1987, стр. 455).

$$35. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y(t)}{|x^3 - t|^{1-\lambda}} dt = f(x), \quad 0 < \lambda < 1.$$

Замена $z = x^3$ приводит к уравнению вида 3.1.34:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{y(t)}{|z - t|^{1-\lambda}} dt = f(z^{1/3}).$$

$$36. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y(t)}{|x^3 - t^3|^{1-\lambda}} dt = f(x), \quad 0 < \lambda < 1.$$

Преобразование

$$z = x^3, \quad \tau = t^3, \quad w(\tau) = \tau^{-2/3} y(t)$$

приводит к уравнению вида 3.1.34:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{w(\tau)}{|z - \tau|^{1-\lambda}} d\tau = F(z), \quad F(z) = 3f(z^{1/3}).$$

$$37. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sign}(x-t)}{|x-t|^{1-\lambda}} y(t) dt = f(x), \quad 0 < \lambda < 1.$$

Решение:

$$y(x) = \frac{\lambda}{2\pi} \text{ctg}\left(\frac{\pi\lambda}{2}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x) - f(t)}{|x-t|^{1+\lambda}} \text{sign}(x-t) dt.$$

⊙ Литература: С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев (1987, стр. 455).

$$38. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a + b \text{sign}(x-t)}{|x-t|^{1-\lambda}} y(t) dt = f(x), \quad 0 < \lambda < 1.$$

Решение:

$$y(x) = \frac{\lambda \sin(\pi\lambda)}{4\pi [a^2 \cos^2(\frac{1}{2}\pi\lambda) + b^2 \sin^2(\frac{1}{2}\pi\lambda)]} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a + b \text{sign}(x-t)}{|x-t|^{1+\lambda}} [f(x) - f(t)] dt.$$

⊙ Литература: С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев (1987, стр. 454).

$$39. \int_0^{\infty} \frac{y(t) dt}{(ax + bt)^k} = f(x), \quad a > 0, \quad b > 0, \quad k > 0.$$

Положим

$$x = \frac{1}{2a} e^{2z}, \quad t = \frac{1}{2b} e^{2\tau}, \quad y(t) = b e^{(k-2)\tau} w(\tau), \quad f(x) = e^{-kz} g(z).$$

В результате получим интегральное уравнение с разностным ядром вида 3.8.15:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{w(\tau) d\tau}{\text{ch}^k(z - \tau)} = g(z).$$

$$40. \int_0^{\infty} t^{z-1} y(t) dt = f(z).$$

Левая часть уравнения является преобразованием Меллина функции $y(t)$ (переменная z рассматривается в комплексной плоскости).

Решение:

$$y(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} t^{-z} f(z) dz, \quad i^2 = -1.$$

Для конкретных функций $f(z)$ для вычисления интеграла можно использовать таблицы интегральных преобразований Меллина и Лапласа.

⊙ Литература: Г. Бейтмен, А. Эрдейи (т. 2, 1974), В. А. Диткин, А. П. Прудников (1974, стр. 74).

3.1-7. Уравнения, содержащие неизвестную функцию сложного аргумента

$$41. \int_0^1 y(xt) dt = f(x).$$

Решение:

$$y(x) = x f'_x(x) + f(x).$$

Считается, что функция $f(x)$ удовлетворяет условию $[xf(x)]_{x=0} = 0$.

$$42. \int_0^1 t^\lambda y(xt) dt = f(x).$$

Замена $\xi = xt$ приводит к уравнению $\int_0^x \xi^\lambda y(\xi) d\xi = x^{\lambda+1} f(x)$. Дифференцируя по x , находим решение

$$y(x) = x f'_x(x) + (\lambda + 1) f(x).$$

Считается, что функция $f(x)$ удовлетворяет условию $[x^{\lambda+1} f(x)]_{x=0} = 0$.

$$43. \int_0^1 (Ax^k + Bt^m) y(xt) dt = f(x).$$

Замена $\xi = xt$ приводит к уравнению вида 1.1.50:

$$\int_0^x (Ax^{k+m} + B\xi^m) y(\xi) d\xi = x^{m+1} f(x).$$

$$44. \int_0^1 \frac{y(xt) dt}{\sqrt{1-t}} = f(x).$$

Замена $\xi = xt$ приводит к уравнению Абеля 1.1.36:

$$\int_0^x \frac{y(\xi) d\xi}{\sqrt{x-\xi}} = \sqrt{x} f(x).$$

$$45. \int_0^1 \frac{y(xt) dt}{(1-t)^\lambda} = f(x), \quad 0 < \lambda < 1.$$

Замена $\xi = xt$ приводит к обобщенному уравнению Абеля 1.1.46:

$$\int_0^x \frac{y(\xi) d\xi}{(x-\xi)^\lambda} = x^{1-\lambda} f(x).$$

$$46. \int_0^1 \frac{t^\mu y(xt) dt}{(1-t)^\lambda} = f(x), \quad 0 < \lambda < 1.$$

Преобразование $\xi = xt$, $w(\xi) = \xi^\mu y(\xi)$ приводит к обобщенному уравнению Абеля 1.1.46:

$$\int_0^x \frac{w(\xi) d\xi}{(x-\xi)^\lambda} = x^{1+\mu-\lambda} f(x).$$

$$47. \int_0^\infty \frac{y(x+t) - y(x-t)}{t} dt = f(x).$$

Решение:

$$y(x) = -\frac{1}{\pi^2} \int_0^\infty \frac{f(x+t) - f(x-t)}{t} dt.$$

● Литература: В. А. Диткин, А. П. Прудников (1974, стр. 92).

3.1-8. Сингулярные уравнения

В этом разделе сингулярные интегралы понимаются в смысле главного значения по Коши.

$$48. \int_{-\infty}^\infty \frac{y(t) dt}{t-x} = f(x).$$

Решение:

$$y(x) = -\frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^\infty \frac{f(t) dt}{t-x}.$$

Интегральное уравнение и выражение для его решения представляют собой преобразование Гильберта (в несимметричной форме).

● Литература: В. А. Диткин, А. П. Прудников (1974, стр. 92).

$$49. \int_0^{\infty} \frac{y(t) dt}{t-x} = f(x).$$

Решение:

$$y(x) = -\frac{\sqrt{x}}{\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{f(t)}{\sqrt{t}(t-x)} dt.$$

Интегральное уравнение и решение представляют собой прямое и обратное преобразования Гильберта на полуоси (в несимметричной форме).

● Литература: D. Hilbert (1953), A. P. Prudnikov, Yu. A. Brychkov, O. I. Marichev (1992, стр. 427).

$$50. \int_a^b \frac{y(t) dt}{t-x} = f(x).$$

Это уравнение встречается в гидродинамике в задаче об обтекании тонкого профиля потоком идеальной жидкости ($a \leq x \leq b$). Считается, что $|a| + |b| < \infty$.

1°. Решение, ограниченное на обоих концах:

$$y(x) = -\frac{1}{\pi^2} \sqrt{(x-a)(b-x)} \int_a^b \frac{f(t)}{\sqrt{(t-a)(b-t)}} \frac{dt}{t-x}.$$

При этом должно выполняться условие

$$\int_a^b \frac{f(t) dt}{\sqrt{(t-a)(b-t)}} = 0.$$

2°. Решение, ограниченное при $x = a$ и неограниченное при $x = b$:

$$y(x) = -\frac{1}{\pi^2} \sqrt{\frac{x-a}{b-x}} \int_a^b \sqrt{\frac{b-t}{t-a}} \frac{f(t)}{t-x} dt.$$

3°. Решение, неограниченное на обоих концах:

$$y(x) = -\frac{1}{\pi^2 \sqrt{(x-a)(b-x)}} \left[\int_a^b \frac{\sqrt{(t-a)(b-t)}}{t-x} f(t) dt + C \right],$$

где C — произвольная постоянная, причем $\int_a^b y(t) dt = C/\pi$.

● Литература: Ф. Д. Гахов (1977, стр. 446).

3.2. Уравнения, ядра которых содержат экспоненциальные функции

3.2-1. Ядра уравнений, содержащие экспоненциальные функции

$$1. \int_a^b e^{\lambda|x-t|} y(t) dt = f(x), \quad -\infty < a < b < \infty.$$

1°. Раскроем модуль в подынтегральном выражении. В результате получим

$$\int_a^x e^{\lambda(x-t)} y(t) dt + \int_x^b e^{\lambda(t-x)} y(t) dt = f(x). \quad (1)$$

Продифференцируем (1) дважды по x . Тогда

$$2\lambda y(x) + \lambda^2 \int_a^x e^{\lambda(x-t)} y(t) dt + \lambda^2 \int_x^b e^{\lambda(t-x)} y(t) dt = f''_{xx}(x). \quad (2)$$

Исключая из (1) и (2) интегральные слагаемые, находим решение

$$y(x) = \frac{1}{2\lambda} [f''_{xx}(x) - \lambda^2 f(x)]. \quad (3)$$

2°. Правая часть интегрального уравнения $f(x)$ должна удовлетворять определенным соотношениям. Полагая в (1) $x = a$ и $x = b$, имеем два следствия:

$$\int_a^b e^{\lambda t} y(t) dt = e^{\lambda a} f(a), \quad \int_a^b e^{-\lambda t} y(t) dt = e^{-\lambda b} f(b). \quad (4)$$

Подставим в равенства (4) решение (3). Интегрируя по частям, получим

$$\begin{aligned} e^{\lambda b} f'_x(b) - e^{\lambda a} f'_x(a) &= \lambda e^{\lambda a} f(a) + \lambda e^{\lambda b} f(b), \\ e^{-\lambda b} f'_x(b) - e^{-\lambda a} f'_x(a) &= \lambda e^{-\lambda a} f(a) + \lambda e^{-\lambda b} f(b). \end{aligned}$$

Отсюда находим искомые условия для функции $f(x)$:

$$f'_x(a) + \lambda f(a) = 0, \quad f'_x(b) - \lambda f(b) = 0. \quad (5)$$

Общий вид правой части интегрального уравнения, удовлетворяющей условиям (5), дается формулой

$$f(x) = F(x) + Ax + B,$$

$$A = \frac{1}{b\lambda - a\lambda - 2} [F'_x(a) + F'_x(b) + \lambda F(a) - \lambda F(b)], \quad B = -\frac{1}{\lambda} [F'_x(a) + \lambda F(a) + Aa\lambda + A],$$

где $F(x)$ — произвольная ограниченная дважды дифференцируемая функция.

$$2. \int_a^b (Ae^{\lambda|x-t|} + Be^{\mu|x-t|}) y(t) dt = f(x), \quad -\infty < a < b < \infty.$$

Раскроем модуль в подынтегральном выражении и продифференцируем уравнение дважды по x . В результате получим

$$2(A\lambda + B\mu)y(x) + \int_a^b (A\lambda^2 e^{\lambda|x-t|} + B\mu^2 e^{\mu|x-t|}) y(t) dt = f''_{xx}(x). \quad (1)$$

Исключая отсюда с помощью исходного уравнения интегральное слагаемое с членом $e^{\mu|x-t|}$, имеем

$$2(A\lambda + B\mu)y(x) + A(\lambda^2 - \mu^2) \int_a^b e^{\lambda|x-t|} y(t) dt = f''_{xx}(x) - \mu^2 f(x). \quad (2)$$

При $A\lambda + B\mu = 0$ это уравнение вида 3.2.1, а при $A\lambda + B\mu \neq 0$ это уравнение вида 4.2.15.

Правая часть $f(x)$ должна удовлетворять определенным соотношениям, которые получаются подстановкой $x = a$ и $x = b$ в исходное интегральное уравнение (аналогичная процедура использовалась в 3.2.1).

$$3. \int_a^b |e^{\lambda x} - e^{\lambda t}| y(t) dt = f(x), \quad \lambda > 0.$$

Частный случай уравнения 3.8.3 при $g(x) = e^{\lambda x}$.

Решение:

$$y(x) = \frac{1}{2\lambda} \frac{d}{dx} [e^{-\lambda x} f'_x(x)].$$

Правая часть интегрального уравнения $f(x)$ должна удовлетворять определенным соотношениям (см. п. 2° в уравнении 3.8.3).

$$4. \int_0^a |e^{\beta x} - e^{\mu t}| y(t) dt = f(x), \quad \beta > 0, \quad \mu > 0.$$

Частный случай уравнения 3.8.4 при $g(x) = e^{\beta x}$, $\lambda = \mu/\beta$.

$$5. \int_a^b \left[\sum_{k=1}^n A_k \exp(\lambda_k |x-t|) \right] y(t) dt = f(x), \quad -\infty < a < b < \infty.$$

1°. Раскроем модуль в одном из слагаемых в подынтегральном выражении:

$$I_k(x) = \int_a^b \exp(\lambda_k |x-t|) y(t) dt = \int_a^x \exp[\lambda_k (x-t)] y(t) dt + \int_x^b \exp[\lambda_k (t-x)] y(t) dt. \quad (1)$$

Продифференцируем (1) дважды по x . В результате имеем (штрихи обозначают производные по x)

$$\begin{aligned} I'_k &= \lambda_k \int_a^x \exp[\lambda_k (x-t)] y(t) dt - \lambda_k \int_x^b \exp[\lambda_k (t-x)] y(t) dt, \\ I''_k &= 2\lambda_k y(x) + \lambda_k^2 \int_a^x \exp[\lambda_k (x-t)] y(t) dt + \lambda_k^2 \int_x^b \exp[\lambda_k (t-x)] y(t) dt. \end{aligned} \quad (2)$$

Из сопоставления формул (1) и (2) получим связь между I_k'' и I_k :

$$I_k'' = 2\lambda_k y(x) + \lambda_k^2 I_k, \quad I_k = I_k(x). \quad (3)$$

2°. Интегральное уравнение с помощью (1) можно записать в виде

$$\sum_{k=1}^n A_k I_k = f(x). \quad (4)$$

Дифференцируя (4) дважды по x , с учетом равенств (3) имеем

$$\sigma_1 y(x) + \sum_{k=1}^n A_k \lambda_k^2 I_k = f_{xx}''(x), \quad \sigma_1 = 2 \sum_{k=1}^n A_k \lambda_k. \quad (5)$$

Исключая интеграл I_n из (4) и (5), получим

$$\sigma_1 y(x) + \sum_{k=1}^{n-1} A_k (\lambda_k^2 - \lambda_n^2) I_k = f_{xx}''(x) - \lambda_n^2 f(x). \quad (6)$$

Если продифференцировать это равенство дважды по x , а затем исключить интеграл I_{n-1} из полученного выражения с помощью (6), придем к аналогичному равенству, в левой части которого будет стоять линейный дифференциальный оператор второго порядка с постоянными коэффициентами (действующий на y) и сумма $\sum_{k=1}^{n-2} B_k I_k$. Продолжая далее с помощью двукратного дифференцирования последовательно исключать слагаемые $I_{n-2}, I_{n-3}, \dots, I_1$, придем в итоге к линейному неоднородному обыкновенному дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами порядка $2(n-1)$.

3°. Правая часть интегрального уравнения $f(x)$ должна удовлетворять определенным соотношениям. Эти соотношения находятся в результате подстановки значения $x = a$ в интегральное уравнение и все его следствия, полученные с помощью дифференцирования. (Эти соотношения можно найти, подставляя значения $x = a$ и $x = b$ в интегральное уравнение и все его следствия, полученные с помощью двукратного дифференцирования.)

$$6. \int_a^b \frac{y(t) dt}{|e^{\lambda x} - e^{\lambda t}|^k} = f(x), \quad 0 < k < 1.$$

Преобразование $z = e^{\lambda x}$, $\tau = e^{\lambda t}$, $w(\tau) = e^{-\lambda t} y(t)$ приводит к уравнению вида 3.1.30:

$$\int_A^B \frac{w(\tau) d\tau}{|z - \tau|^k} = F(z),$$

где $A = e^{\lambda a}$, $B = e^{\lambda b}$, $F(z) = \lambda f(\frac{1}{\lambda} \ln z)$.

$$7. \int_0^\infty \frac{y(t) dt}{(e^{\lambda x} + e^{\lambda t})^k} = f(x), \quad \lambda > 0, \quad k > 0.$$

Это уравнение можно записать в виде уравнения с разностным ядром 3.8.16:

$$\int_0^\infty \frac{w(t) dt}{\operatorname{ch}^k [\frac{1}{2} \lambda (x - t)]} = g(x),$$

где $w(t) = 2^{-k} \exp(-\frac{1}{2} \lambda k t) y(t)$, $g(x) = \exp(\frac{1}{2} \lambda k x) f(x)$.

$$8. \int_0^\infty e^{-zt} y(t) dt = f(z).$$

Левая часть уравнения является преобразованием Лапласа функции $y(t)$ (переменная z рассматривается в комплексной плоскости).

1°. Решение:

$$y(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{zt} f(z) dz, \quad i^2 = -1.$$

При вычислении интеграла для функций $f(z)$ конкретного вида можно воспользоваться таблицами обратного преобразования Лапласа.

2°. Для действительных $x = z$ при некоторых допущениях решение исходного уравнения можно представить в следующем виде (вещественное обращение преобразования Лапласа):

$$y(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{n}{x}\right)^{n+1} f_x^{(n)}\left(\frac{n}{x}\right).$$

Для получения приближенного решения интегрального уравнения в этой формуле вместо предела ограничиваются заданием конкретного значения n .

⊙ Литература: И. И. Хиршман, Д. В. Уиддер (1958), Г. Бейтмен, А. Эрдейи (т. 1, 1973), В. А. Диткин, А. П. Прудников (1974).

3.2-2. Ядра уравнений, содержащие степенные и экспоненциальные функции

9. $\int_0^a |ke^{\lambda x} - k - t| y(t) dt = f(x).$

Частный случай уравнения 3.8.5 при $g(x) = ke^{\lambda x} - k$.

10. $\int_0^a |x - ke^{\lambda t} - k| y(t) dt = f(x).$

Частный случай уравнения 3.8.6 при $g(t) = ke^{\lambda t} + k$.

11. $\int_a^b |\exp(\lambda x^2) - \exp(\lambda t^2)| y(t) dt = f(x), \quad \lambda > 0.$

Частный случай уравнения 3.8.3 при $g(x) = \exp(\lambda x^2)$.

Решение:

$$y(x) = \frac{1}{4\lambda} \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{x} \exp(-\lambda x^2) f'_x(x) \right].$$

Правая часть интегрального уравнения $f(x)$ должна удовлетворять определенным соотношениям (см. п. 2° уравнения 3.8.3).

12. $\frac{1}{\sqrt{\pi x}} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{t^2}{4x}\right) y(t) dt = f(x).$

Применяя к обеим частям уравнения преобразование Лапласа, для изображения получим

$$\frac{\tilde{y}(\sqrt{p})}{\sqrt{p}} = \tilde{f}(p), \quad \tilde{f}(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t) dt.$$

Заменяя p на p^2 и разрешая относительно \tilde{y} , имеем $\tilde{y}(p) = p \tilde{f}(p^2)$. Обратное преобразование Лапласа дает решение исходного интегрального уравнения

$$y(t) = \mathfrak{L}^{-1}\{p \tilde{f}(p^2)\}, \quad \mathfrak{L}^{-1}\{g(p)\} \equiv \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{pt} g(p) dp.$$

13. $\int_0^\infty \exp[-g(x)t^2] y(t) dt = f(x).$

Пусть выполняются условия $g(0) = \infty$, $g(\infty) = 0$, $g'_x < 0$.

Замена $z = \frac{1}{4g(x)}$ приводит к уравнению 3.2.12:

$$\frac{1}{\sqrt{\pi z}} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{t^2}{4z}\right) y(t) dt = F(z),$$

где зависимость $F(z)$ определяется из выражений $F = \frac{2}{\sqrt{\pi}} f(x) \sqrt{g(x)}$, $z = \frac{1}{4g(x)}$ путем исключения переменной x .

3.3. Уравнения, ядра которых содержат гиперболические функции

3.3-1. Ядра уравнений, содержащие гиперболический косинус

$$1. \int_a^b |\operatorname{ch}(\lambda x) - \operatorname{ch}(\lambda t)| y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 3.8.3 при $g(x) = \operatorname{ch}(\lambda x)$.

Решение:

$$y(x) = \frac{1}{2\lambda} \frac{d}{dx} \left[\frac{f'_x(x)}{\operatorname{sh}(\lambda x)} \right].$$

Правая часть интегрального уравнения $f(x)$ должна удовлетворять определенным соотношениям (см. п. 2° уравнения 3.8.3).

$$2. \int_0^a |\operatorname{ch}(\beta x) - \operatorname{ch}(\mu t)| y(t) dt = f(x), \quad \beta > 0, \quad \mu > 0.$$

Частный случай уравнения 3.8.4 при $g(x) = \operatorname{ch}(\beta x)$, $\lambda = \mu/\beta$.

$$3. \int_a^b |\operatorname{ch}^k x - \operatorname{ch}^k t| y(t) dt = f(x), \quad 0 < k < 1.$$

Частный случай уравнения 3.8.3 при $g(x) = \operatorname{ch}^k x$.

Решение:

$$y(x) = \frac{1}{2k} \frac{d}{dx} \left[\frac{f'_x(x)}{\operatorname{sh} x \operatorname{ch}^{k-1} x} \right].$$

Правая часть интегрального уравнения $f(x)$ должна удовлетворять определенным соотношениям (см. п. 2° уравнения 3.8.3).

$$4. \int_a^b \frac{y(t)}{|\operatorname{ch}(\lambda x) - \operatorname{ch}(\lambda t)|^k} dt = f(x), \quad 0 < k < 1.$$

Частный случай уравнения 3.8.7 при $g(x) = \operatorname{ch}(\lambda x) + \beta$, где β — любое.

3.3-2. Ядра уравнений, содержащие гиперболический синус

$$5. \int_a^b \operatorname{sh}(\lambda|x-t|) y(t) dt = f(x), \quad -\infty < a < b < \infty.$$

1°. Раскроем модуль в подынтегральном выражении. В результате получим

$$\int_a^x \operatorname{sh}[\lambda(x-t)] y(t) dt + \int_x^b \operatorname{sh}[\lambda(t-x)] y(t) dt = f(x). \quad (1)$$

Продифференцируем (1) дважды по x . Тогда

$$2\lambda y(x) + \lambda^2 \int_a^x \operatorname{sh}[\lambda(x-t)] y(t) dt + \lambda^2 \int_x^b \operatorname{sh}[\lambda(t-x)] y(t) dt = f''_{xx}(x). \quad (2)$$

Исключая из (1) и (2) интегральные слагаемые, находим решение

$$y(x) = \frac{1}{2\lambda} [f''_{xx}(x) - \lambda^2 f(x)]. \quad (3)$$

2°. Правая часть интегрального уравнения $f(x)$ должна удовлетворять определенным соотношениям. Полагая в (1) $x = a$ и $x = b$, имеем два следствия:

$$\int_a^b \operatorname{sh}[\lambda(t-a)] y(t) dt = f(a), \quad \int_a^b \operatorname{sh}[\lambda(b-t)] y(t) dt = f(b). \quad (4)$$

Подставим в равенства (4) решение (3). Интегрируя по частям, получим искомые условия для функции $f(x)$:

$$\begin{aligned} \operatorname{sh}[\lambda(b-a)] f'_x(b) - \lambda \operatorname{ch}[\lambda(b-a)] f(b) &= \lambda f(a), \\ \operatorname{sh}[\lambda(b-a)] f'_x(a) + \lambda \operatorname{ch}[\lambda(b-a)] f(a) &= -\lambda f(b). \end{aligned} \quad (5)$$

Общий вид правой части интегрального уравнения дается формулой

$$f(x) = F(x) + Ax + B, \quad (6)$$

где $F(x)$ — произвольная ограниченная дважды дифференцируемая функция, а коэффициенты A и B выражаются через величины $F(a)$, $F(b)$, $F'_x(a)$, $F'_x(b)$ и определяются в результате подстановки формулы (6) в условия (5).

$$6. \int_a^b \{A \operatorname{sh}(\lambda|x-t|) + B \operatorname{sh}(\mu|x-t|)\} y(t) dt = f(x), \quad -\infty < a < b < \infty.$$

Раскроем модуль в подынтегральном выражении и продифференцируем уравнение дважды по x . В результате получим

$$2(A\lambda + B\mu)y(x) + \int_a^b \{A\lambda^2 \operatorname{sh}(\lambda|x-t|) + B\mu^2 \operatorname{sh}(\mu|x-t|)\} y(t) dt = f''_{xx}(x). \quad (1)$$

Исключая отсюда с помощью исходного уравнения интегральное слагаемое, содержащее $\operatorname{sh}(\mu|x-t|)$, имеем

$$2(A\lambda + B\mu)y(x) + A(\lambda^2 - \mu^2) \int_a^b \operatorname{sh}(\lambda|x-t|) y(t) dt = f''_{xx}(x) - \mu^2 f(x). \quad (2)$$

При $A\lambda + B\mu = 0$ это уравнение вида 3.3.5, а при $A\lambda + B\mu \neq 0$ это уравнение вида 4.3.26.

Правая часть $f(x)$ должна удовлетворять определенным соотношениям, которые получаются подстановкой $x = a$ и $x = b$ в исходное интегральное уравнение (аналогичная процедура использовалась в 3.3.5).

$$7. \int_a^b |\operatorname{sh}(\lambda x) - \operatorname{sh}(\lambda t)| y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 3.8.3 при $g(x) = \operatorname{sh}(\lambda x)$.

Решение:

$$y(x) = \frac{1}{2\lambda} \frac{d}{dx} \left[\frac{f'_x(x)}{\operatorname{ch}(\lambda x)} \right].$$

Правая часть интегрального уравнения $f(x)$ должна удовлетворять определенным соотношениям (см. п. 2° уравнения 3.8.3).

$$8. \int_0^a |\operatorname{sh}(\beta x) - \operatorname{sh}(\mu t)| y(t) dt = f(x), \quad \beta > 0, \quad \mu > 0.$$

Частный случай уравнения 3.8.4 при $g(x) = \operatorname{sh}(\beta x)$, $\lambda = \mu/\beta$.

$$9. \int_a^b \operatorname{sh}^3(\lambda|x-t|) y(t) dt = f(x).$$

Используя формулу $\operatorname{sh}^3 \beta = \frac{1}{4} \operatorname{sh} 3\beta - \frac{3}{4} \operatorname{sh} \beta$, приходим к уравнению вида 3.3.6:

$$\int_a^b \left[\frac{1}{4} A \operatorname{sh}(3\lambda|x-t|) - \frac{3}{4} A \operatorname{sh}(\lambda|x-t|) \right] y(t) dt = f(x).$$

$$10. \int_a^b \left[\sum_{k=1}^n A_k \operatorname{sh}(\lambda_k|x-t|) \right] y(t) dt = f(x), \quad -\infty < a < b < \infty.$$

1°. Раскроем модуль в одном из слагаемых в подынтегральном выражении:

$$I_k(x) = \int_a^b \operatorname{sh}(\lambda_k|x-t|) y(t) dt = \int_a^x \operatorname{sh}[\lambda_k(x-t)] y(t) dt + \int_x^b \operatorname{sh}[\lambda_k(t-x)] y(t) dt. \quad (1)$$

Продифференцируем (1) дважды по x . В результате имеем (штрихи обозначают производные по x)

$$\begin{aligned} I'_k &= \lambda_k \int_a^x \operatorname{ch}[\lambda_k(x-t)] y(t) dt - \lambda_k \int_x^b \operatorname{ch}[\lambda_k(t-x)] y(t) dt, \\ I''_k &= 2\lambda_k y(x) + \lambda_k^2 \int_a^x \operatorname{sh}[\lambda_k(x-t)] y(t) dt + \lambda_k^2 \int_x^b \operatorname{sh}[\lambda_k(t-x)] y(t) dt. \end{aligned} \quad (2)$$

Из сопоставления формул (1) и (2) получим связь между I_k'' и I_k :

$$I_k'' = 2\lambda_k y(x) + \lambda_k^2 I_k, \quad I_k = I_k(x). \quad (3)$$

2°. Интегральное уравнение с помощью (1) можно записать в виде

$$\sum_{k=1}^n A_k I_k = f(x). \quad (4)$$

Дифференцируя (4) дважды по x , с учетом равенств (3) имеем

$$\sigma_1 y(x) + \sum_{k=1}^n A_k \lambda_k^2 I_k = f_{xx}''(x), \quad \sigma_1 = 2 \sum_{k=1}^n A_k \lambda_k. \quad (5)$$

Исключая интеграл I_n из (4) и (5), получим

$$\sigma_1 y(x) + \sum_{k=1}^{n-1} A_k (\lambda_k^2 - \lambda_n^2) I_k = f_{xx}''(x) - \lambda_n^2 f(x). \quad (6)$$

Если продифференцировать это равенство дважды по x , а затем исключить интеграл I_{n-1} из полученного выражения с помощью (6), придем к аналогичному равенству, в левой части которого будет стоять линейный дифференциальный оператор второго порядка с постоянными коэффициентами (действующий на y) и сумма $\sum_{k=1}^{n-2} B_k I_k$. Продолжая далее с помощью двукратного дифференцирования последовательно исключать слагаемые I_{n-2}, I_{n-3}, \dots , придем в итоге к линейному неоднородному обыкновенному дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами порядка $2(n-1)$.

3°. Правая часть интегрального уравнения $f(x)$ должна удовлетворять определенным соотношениям. Эти соотношения находятся в результате подстановки значения $x = a$ в интегральное уравнение и все его следствия, полученные с помощью дифференцирования. (Эти соотношения можно найти, подставляя значения $x = a$ и $x = b$ в интегральное уравнение и все его следствия, полученные с помощью двукратного дифференцирования.)

$$11. \int_0^b |\operatorname{sh}^k x - \operatorname{sh}^k t| y(t) dt = f(x), \quad 0 < k < 1.$$

Частный случай уравнения 3.8.3 при $g(x) = \operatorname{sh}^k x$.

Решение:

$$y(x) = \frac{1}{2k} \frac{d}{dx} \left[\frac{f'_x(x)}{\operatorname{ch} x \operatorname{sh}^{k-1} x} \right].$$

Правая часть интегрального уравнения $f(x)$ должна удовлетворять определенным соотношениям. Из п. 3° уравнения 3.8.3 следует, что допустимый общий вид правой части дается формулой

$$f(x) = F(x) + Ax + B, \quad A = -F'_x(b), \quad B = \frac{1}{2} [bF'_x(b) - F(0) - F(b)],$$

где $F(x)$ — произвольная ограниченная дважды дифференцируемая функция (с ограниченной первой производной).

$$12. \int_a^b \frac{y(t)}{|\operatorname{sh}(\lambda x) - \operatorname{sh}(\lambda t)|^k} dt = f(x), \quad 0 < k < 1.$$

Частный случай уравнения 3.8.7 при $g(x) = \operatorname{sh}(\lambda x) + \beta$, где β — любое.

$$13. \int_0^a |k \operatorname{sh}(\lambda x) - t| y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 3.8.5 при $g(x) = k \operatorname{sh}(\lambda x)$.

$$14. \int_0^a |x - k \operatorname{sh}(\lambda t)| y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 3.8.6 при $g(x) = k \operatorname{sh}(\lambda t)$.

3.3-3. Ядра уравнений, содержащие гиперболический тангенс

$$15. \int_a^b |\operatorname{th}(\lambda x) - \operatorname{th}(\lambda t)| y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 3.8.3 при $g(x) = \operatorname{th}(\lambda x)$.

Решение:

$$y(x) = \frac{1}{2\lambda} \frac{d}{dx} [\operatorname{ch}^2(\lambda x) f'_x(x)].$$

Правая часть интегрального уравнения $f(x)$ должна удовлетворять определенным соотношениям (см. п. 2° уравнения 3.8.3).

$$16. \int_0^a |\operatorname{th}(\beta x) - \operatorname{th}(\mu t)| y(t) dt = f(x), \quad \beta > 0, \quad \mu > 0.$$

Частный случай уравнения 3.8.4 при $g(x) = \operatorname{th}(\beta x)$, $\lambda = \mu/\beta$.

$$17. \int_0^b |\operatorname{th}^k x - \operatorname{th}^k t| y(t) dt = f(x), \quad 0 < k < 1.$$

Частный случай уравнения 3.8.3 при $g(x) = \operatorname{th}^k x$.

Решение:

$$y(x) = \frac{1}{2k} \frac{d}{dx} [\operatorname{ch}^2 x \operatorname{cth}^{k-1} x f'_x(x)].$$

Правая часть интегрального уравнения $f(x)$ должна удовлетворять определенным соотношениям. Из п. 3° уравнения 3.8.3 следует, что допустимый общий вид правой части дается формулой

$$f(x) = F(x) + Ax + B, \quad A = -F'_x(b), \quad B = \frac{1}{2} [bF'_x(b) - F(0) - F(b)],$$

где $F(x)$ — произвольная ограниченная дважды дифференцируемая функция (с ограниченной первой производной).

$$18. \int_a^b \frac{y(t)}{|\operatorname{th}(\lambda x) - \operatorname{th}(\lambda t)|^k} dt = f(x), \quad 0 < k < 1.$$

Частный случай уравнения 3.8.7 при $g(x) = \operatorname{th}(\lambda x) + \beta$, где β — любое.

$$19. \int_0^a |k \operatorname{th}(\lambda x) - t| y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 3.8.5 при $g(x) = k \operatorname{th}(\lambda x)$.

$$20. \int_0^a |x - k \operatorname{th}(\lambda t)| y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 3.8.6 при $g(x) = k \operatorname{th}(\lambda t)$.

3.3-4. Ядра уравнений, содержащие гиперболический котангенс

$$21. \int_a^b |\operatorname{cth}(\lambda x) - \operatorname{cth}(\lambda t)| y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 3.8.3 при $g(x) = \operatorname{cth}(\lambda x)$.

$$22. \int_0^b |\operatorname{cth}^k x - \operatorname{cth}^k t| y(t) dt = f(x), \quad 0 < k < 1.$$

Частный случай уравнения 3.8.3 при $g(x) = \operatorname{cth}^k x$.

3.4. Уравнения, ядра которых содержат логарифмические функции

3.4-1. Ядра уравнений, содержащие логарифмические функции

$$1. \int_a^b |\ln(x/t)| y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 3.8.3 при $g(x) = \ln x$.

Решение:

$$y(x) = \frac{1}{2} \frac{d}{dx} [x f'_x(x)].$$

Правая часть интегрального уравнения $f(x)$ должна удовлетворять определенным соотношениям (см. п. 2° уравнения 3.8.3).

$$2. \int_a^b \ln |x - t| y(t) dt = f(x).$$

Уравнение Карлемана.

1°. Решение при $b - a \neq 4$:

$$y(x) = \frac{1}{\pi^2 \sqrt{(x-a)(b-x)}} \left[\int_a^b \frac{\sqrt{(t-a)(b-t)} f'_t(t) dt}{t-x} + \frac{1}{\pi \ln[\frac{1}{4}(b-a)]} \int_a^b \frac{f(t) dt}{\sqrt{(t-a)(b-t)}} \right].$$

2°. При $b - a = 4$ для разрешимости уравнения должно выполняться условие

$$\int_a^b f(t)(t-a)^{-1/2}(b-t)^{-1/2} dt = 0.$$

В этом случае решение имеет вид

$$y(x) = \frac{1}{\pi^2 \sqrt{(x-a)(b-x)}} \left[\int_a^b \frac{\sqrt{(t-a)(b-t)} f'_t(t) dt}{t-x} + C \right],$$

где C — произвольная постоянная.

⊙ Литература: Ф. Д. Гахов (1977, стр. 591, 592).

$$3. \int_a^b (\ln |x - t| + \beta) y(t) dt = f(x).$$

Положим

$$x = e^{-\beta} z, \quad t = e^{-\beta} \tau, \quad y(t) = Y(\tau), \quad f(x) = e^{-\beta} g(z).$$

В результате получим уравнение вида 3.4.2:

$$\int_A^B \ln |z - \tau| Y(\tau) d\tau = g(z), \quad A = ae^{\beta}, \quad B = be^{\beta}.$$

$$4. \int_{-a}^a \left(\ln \frac{A}{|x - t|} \right) y(t) dt = f(x), \quad -a \leq x \leq a.$$

Частный случай уравнения 3.4.3 при $b = -a$. Решение при $0 < a < 2A$:

$$\begin{aligned} y(x) = & \frac{1}{2M'(a)} \left[\frac{d}{da} \int_{-a}^a w(t, a) f(t) dt \right] w(x, a) - \\ & - \frac{1}{2} \int_{|x|}^a w(x, \xi) \frac{d}{d\xi} \left[\frac{1}{M'(\xi)} \frac{d}{d\xi} \int_{-\xi}^{\xi} w(t, \xi) f(t) dt \right] d\xi - \\ & - \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \int_{|x|}^a \frac{w(x, \xi)}{M'(\xi)} \left[\int_{-\xi}^{\xi} w(t, \xi) df(t) \right] d\xi. \end{aligned}$$

Здесь штрих соответствует производной и использованы следующие обозначения:

$$M(\xi) = \left(\ln \frac{2A}{\xi} \right)^{-1}, \quad w(x, \xi) = \frac{M(\xi)}{\pi \sqrt{\xi^2 - x^2}}.$$

⊙ Литература: И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн (1967, стр. 245).

$$5. \int_0^a \ln \left| \frac{x+t}{x-t} \right| y(t) dt = f(x).$$

Решение:

$$y(x) = -\frac{2}{\pi^2} \frac{d}{dx} \int_x^a \frac{F(t) dt}{\sqrt{t^2 - x^2}}, \quad F(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{s f(s) ds}{\sqrt{t^2 - s^2}}.$$

⊙ Литература: П. П. Забрейко, А. И. Кошелев и др. (1968, стр. 34).

$$6. \int_a^b \ln \left| \frac{1+\lambda x}{1+\lambda t} \right| y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 3.8.3 при $g(x) = \ln(1 + \lambda x)$.

Решение:

$$y(x) = \frac{1}{2\lambda} \frac{d}{dx} [(1 + \lambda x) f'_x(x)].$$

Правая часть интегрального уравнения $f(x)$ должна удовлетворять определенным соотношениям (см. п. 2° уравнения 3.8.3).

$$7. \int_a^b |\ln^\beta x - \ln^\beta t| y(t) dt = f(x), \quad 0 < \beta < 1.$$

Частный случай уравнения 3.8.3 при $g(x) = \ln^\beta x$.

$$8. \int_a^b \frac{y(t)}{|\ln(x/t)|^\beta} dt = f(x), \quad 0 < \beta < 1.$$

Частный случай уравнения 3.8.7 при $g(x) = \ln x + A$, где A — любое.

3.4-2. Ядра уравнений, содержащие степенные и логарифмические функции

$$9. \int_0^a |k \ln(1 + \lambda x) - t| y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 3.8.5 при $g(x) = k \ln(1 + \lambda x)$.

$$10. \int_0^a |x - k \ln(1 + \lambda t)| y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 3.8.6 при $g(x) = k \ln(1 + \lambda t)$.

$$11. \int_0^\infty \frac{1}{t} \ln \left| \frac{x+t}{x-t} \right| y(t) dt = f(x).$$

Решение:

$$y(x) = \frac{x}{\pi^2} \frac{d}{dx} \int_0^\infty \frac{df(t)}{dt} \ln \left| 1 - \frac{x^2}{t^2} \right| dt.$$

⊙ Литература: П. П. Забрейко, А. И. Кошелев и др. (1968, стр. 34).

$$12. \int_0^\infty \frac{\ln x - \ln t}{x - t} y(t) dt = f(x).$$

Правая часть этого уравнения представляет собой итерированное преобразование Стилтjesа.

При некоторых допущениях решение интегрального уравнения можно представить в виде

$$y(x) = \frac{1}{4\pi^2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{e}{n} \right)^{4n} D^n x^{2n} D^{2n} x^{2n} D^n f(x), \quad D = \frac{d}{dx}.$$

Для получения приближенного решения в этой формуле вместо предела ограничиваются заданием конкретного значения n .

⊙ Литература: И. И. Хиршман, Д. В. Уиддер (1958).

$$13. \int_a^b \ln |x^\beta - t^\beta| y(t) dt = f(x), \quad \beta > 0.$$

Преобразование

$$z = x^\beta, \quad \tau = t^\beta, \quad w(\tau) = t^{1-\beta} y(t)$$

приводит к уравнению Карлемана 3.4.2:

$$\int_A^B \ln |z - \tau| w(\tau) d\tau = F(z), \quad A = a^\beta, \quad B = b^\beta,$$

где $F(z) = \beta f(z^{1/\beta})$.

$$14. \int_0^1 \ln |x^\beta - t^\mu| y(t) dt = f(x), \quad \beta > 0, \quad \mu > 0.$$

Преобразование

$$z = x^\beta, \quad \tau = t^\mu, \quad w(\tau) = t^{1-\mu} y(t)$$

приводит к уравнению вида 3.4.2:

$$\int_0^1 \ln |z - \tau| w(\tau) d\tau = F(z), \quad F(z) = \mu f(z^{1/\beta}).$$

3.4-3. Уравнение, содержащее неизвестную функцию сложного аргумента

$$15. \int_0^1 (A \ln t + B) y(xt) dt = f(x).$$

Замена $\xi = xt$ приводит к уравнению вида 1.9.3 при $g(x) = -A \ln x$:

$$\int_0^x (A \ln \xi - A \ln x + B) y(\xi) d\xi = x f(x).$$

3.5. Уравнения, ядра которых содержат тригонометрические функции

3.5-1. Ядра уравнений, содержащие косинус

$$1. \int_0^\infty \cos(xt) y(t) dt = f(x).$$

$$\text{Решение: } y(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \cos(xt) f(t) dt.$$

Исходное уравнение и выражение для его решения представляют собой прямое и обратное косинус-преобразования Фурье (в несимметричной форме).

⊙ Литература: Г. Бейтмен, А. Эрдейи (т. 1, 1973), В. А. Диткин, А. П. Прудников (1974, стр. 16).

$$2. \int_a^b |\cos(\lambda x) - \cos(\lambda t)| y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 3.8.3 при $g(x) = \cos(\lambda x)$.

Решение:

$$y(x) = -\frac{1}{2\lambda} \frac{d}{dx} \left[\frac{f'_x(x)}{\sin(\lambda x)} \right].$$

Правая часть интегрального уравнения $f(x)$ должна удовлетворять определенным соотношениям (см. п. 2° уравнения 3.8.3).

$$3. \int_0^a |\cos(\beta x) - \cos(\mu t)| y(t) dt = f(x), \quad \beta > 0, \quad \mu > 0.$$

Частный случай уравнения 3.8.4 при $g(x) = \cos(\beta x)$, $\lambda = \mu/\beta$.

$$4. \int_a^b |\cos^k x - \cos^k t| y(t) dt = f(x), \quad 0 < k < 1.$$

Частный случай уравнения 3.8.3 при $g(x) = \cos^k x$.

Решение:

$$y(x) = -\frac{1}{2k} \frac{d}{dx} \left[\frac{f'_x(x)}{\sin x \cos^{k-1} x} \right].$$

Правая часть интегрального уравнения $f(x)$ должна удовлетворять определенным соотношениям (см. п. 2° уравнения 3.8.3).

$$5. \int_a^b \frac{y(t)}{|\cos(\lambda x) - \cos(\lambda t)|^k} dt = f(x), \quad 0 < k < 1.$$

Частный случай уравнения 3.8.7 при $g(x) = \cos(\lambda x) + \beta$, где β — любое.

3.5-2. Ядра уравнений, содержащие синус

$$6. \int_0^\infty \sin(xt)y(t) dt = f(x).$$

Решение: $y(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \sin(xt)f(t) dt$.

Исходное уравнение и выражение для его решения представляют собой прямое и обратное синус-преобразования Фурье (в несимметричной форме).

⊙ Литература: Г. Бейтмен, А. Эрдейи (т. 1, 1973), В. А. Диткин, А. П. Прудников (1974, стр. 16).

$$7. \int_a^b \sin(\lambda|x-t|)y(t) dt = f(x), \quad -\infty < a < b < \infty.$$

1°. Раскроем модуль в подынтегральном выражении. В результате получим

$$\int_a^x \sin[\lambda(x-t)]y(t) dt + \int_x^b \sin[\lambda(t-x)]y(t) dt = f(x). \quad (1)$$

Продифференцируем (1) дважды по x . Тогда

$$2\lambda y(x) - \lambda^2 \int_a^x \sin[\lambda(x-t)]y(t) dt - \lambda^2 \int_x^b \sin[\lambda(t-x)]y(t) dt = f''_{xx}(x). \quad (2)$$

Исключая из (1) и (2) интегральные слагаемые, находим решение

$$y(x) = \frac{1}{2\lambda} [f''_{xx}(x) + \lambda^2 f(x)]. \quad (3)$$

2°. Правая часть интегрального уравнения $f(x)$ должна удовлетворять определенным соотношениям. Полагая в (1) $x = a$ и $x = b$, имеем два следствия:

$$\int_a^b \sin[\lambda(t-a)]y(t) dt = f(a), \quad \int_a^b \sin[\lambda(b-t)]y(t) dt = f(b). \quad (4)$$

Подставим в равенства (4) решение (3). Интегрируя по частям, получим искомые условия для функции $f(x)$:

$$\begin{aligned} \sin[\lambda(b-a)]f'_x(b) - \lambda \cos[\lambda(b-a)]f(b) &= \lambda f(a), \\ \sin[\lambda(b-a)]f'_x(a) + \lambda \cos[\lambda(b-a)]f(a) &= -\lambda f(b). \end{aligned} \quad (5)$$

Общий вид правой части интегрального уравнения дается формулой

$$f(x) = F(x) + Ax + B, \quad (6)$$

где $F(x)$ — произвольная ограниченная дважды дифференцируемая функция, а коэффициенты A и B выражаются через величины $F(a)$, $F(b)$, $F'_x(a)$, $F'_x(b)$ и определяются в результате подстановки формулы (6) в условия (5).

$$8. \int_a^b \{A \sin(\lambda|x-t|) + B \sin(\mu|x-t|)\} y(t) dt = f(x), \quad -\infty < a < b < \infty.$$

Раскроем модуль в подынтегральном выражении и продифференцируем уравнение дважды по x . В результате получим

$$2(A\lambda + B\mu)y(x) - \int_a^b \{A\lambda^2 \sin(\lambda|x-t|) + B\mu^2 \sin(\mu|x-t|)\} y(t) dt = f''_{xx}(x). \quad (1)$$

Исключая с помощью исходного уравнение интегральное слагаемое, содержащее $\sin(\mu|x-t|)$, имеем

$$2(A\lambda + B\mu)y(x) + A(\mu^2 - \lambda^2) \int_a^b \sin(\lambda|x-t|) y(t) dt = f''_{xx}(x) + \mu^2 f(x). \quad (2)$$

При $A\lambda + B\mu = 0$ это уравнение вида 3.5.7, а при $A\lambda + B\mu \neq 0$ это уравнение вида 4.5.29.

Правая часть $f(x)$ должна удовлетворять определенным соотношениям, которые получаются подстановкой $x = a$ и $x = b$ в исходное интегральное уравнение (аналогичная процедура использовалась в 3.5.7).

$$9. \int_a^b |\sin(\lambda x) - \sin(\lambda t)| y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 3.8.3 при $g(x) = \sin(\lambda x)$.

Решение:

$$y(x) = \frac{1}{2\lambda} \frac{d}{dx} \left[\frac{f'_x(x)}{\cos(\lambda x)} \right].$$

Правая часть интегрального уравнения $f(x)$ должна удовлетворять определенным соотношениям (см. п. 2° уравнения 3.8.3).

$$10. \int_0^a |\sin(\beta x) - \sin(\mu t)| y(t) dt = f(x), \quad \beta > 0, \quad \mu > 0.$$

Частный случай уравнения 3.8.4 при $g(x) = \sin(\beta x)$, $\lambda = \mu/\beta$.

$$11. \int_a^b \sin^3(\lambda|x-t|) y(t) dt = f(x).$$

Используя формулу $\sin^3 \beta = -\frac{1}{4} \sin 3\beta + \frac{3}{4} \sin \beta$, приходим к уравнению вида 3.5.8:

$$\int_a^b \left[-\frac{1}{4} A \sin(3\lambda|x-t|) + \frac{3}{4} A \sin(\lambda|x-t|) \right] y(t) dt = f(x).$$

$$12. \int_a^b \left[\sum_{k=1}^n A_k \sin(\lambda_k|x-t|) \right] y(t) dt = f(x), \quad -\infty < a < b < \infty.$$

1°. Раскроем модуль в одном из слагаемых в подынтегральном выражении:

$$I_k(x) = \int_a^b \sin(\lambda_k|x-t|) y(t) dt = \int_a^x \sin[\lambda_k(x-t)] y(t) dt + \int_x^b \sin[\lambda_k(t-x)] y(t) dt. \quad (1)$$

Продифференцируем (1) дважды по x . В результате имеем (штрихи обозначают производные по x)

$$\begin{aligned} I'_k &= \lambda_k \int_a^x \cos[\lambda_k(x-t)] y(t) dt - \lambda_k \int_x^b \cos[\lambda_k(t-x)] y(t) dt, \\ I''_k &= 2\lambda_k y(x) - \lambda_k^2 \int_a^x \sin[\lambda_k(x-t)] y(t) dt - \lambda_k^2 \int_x^b \sin[\lambda_k(t-x)] y(t) dt. \end{aligned} \quad (2)$$

Из сопоставления формул (1) и (2) получим связь между I''_k и I_k :

$$I''_k = 2\lambda_k y(x) - \lambda_k^2 I_k, \quad I_k = I_k(x). \quad (3)$$

2°. Интегральное уравнение с помощью (1) можно записать в виде

$$\sum_{k=1}^n A_k I_k = f(x). \quad (4)$$

Дифференцируя (4) дважды по x , с учетом равенств (3) имеем

$$\sigma_1 y(x) - \sum_{k=1}^n A_k \lambda_k^2 I_k = f''_{xx}(x), \quad \sigma_1 = 2 \sum_{k=1}^n A_k \lambda_k. \quad (5)$$

Исключая интеграл I_n из (4) и (5), получим

$$\sigma_1 y(x) + \sum_{k=1}^{n-1} A_k (\lambda_n^2 - \lambda_k^2) I_k = f''_{xx}(x) + \lambda_n^2 f(x). \quad (6)$$

Если продифференцировать это равенство дважды по x , а затем исключить интеграл I_{n-1} из полученного выражения с помощью (6), придем к аналогичному равенству, в левой части которого будет стоять линейный дифференциальный оператор второго порядка с постоянными коэффициентами (действующий на y) и сумма $\sum_{k=1}^{n-2} B_k I_k$. Продолжая далее с помощью двукратного

дифференцирования последовательно исключать слагаемые I_{n-2}, I_{n-3}, \dots , придем в итоге к линейному неоднородному обыкновенному дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами порядка $2(n-1)$.

3°. Правая часть интегрального уравнения $f(x)$ должна удовлетворять определенным соотношениям. Эти соотношения находятся в результате подстановки значения $x = a$ в интегральное уравнение и все его следствия, полученные с помощью дифференцирования. (Эти соотношения можно найти, подставляя значения $x = a$ и $x = b$ в интегральное уравнение и все его следствия, полученные с помощью двукратного дифференцирования.)

$$13. \int_0^b |\sin^k x - \sin^k t| y(t) dt = f(x), \quad 0 < k < 1.$$

Частный случай уравнения 3.8.3 при $g(x) = \sin^k x$.

Решение:

$$y(x) = \frac{1}{2k} \frac{d}{dx} \left[\frac{f'_x(x)}{\cos x \sin^{k-1} x} \right].$$

Правая часть интегрального уравнения $f(x)$ должна удовлетворять определенным соотношениям. Из п. 3° уравнения 3.8.3 следует, что допустимый общий вид правой части дается формулой

$$f(x) = F(x) + Ax + B, \quad A = -F'_x(b), \quad B = \frac{1}{2} [bF'_x(b) - F(0) - F(b)],$$

где $F(x)$ — произвольная ограниченная дважды дифференцируемая функция (с ограниченной первой производной).

$$14. \int_a^b \frac{y(t)}{|\sin(\lambda x) - \sin(\lambda t)|^k} dt = f(x), \quad 0 < k < 1.$$

Частный случай уравнения 3.8.7 при $g(x) = \sin(\lambda x) + \beta$, где β — любое.

$$15. \int_0^a |k \sin(\lambda x) - t| y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 3.8.5 при $g(x) = k \sin(\lambda x)$.

$$16. \int_0^a |x - k \sin(\lambda t)| y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 3.8.6 при $g(t) = k \sin(\lambda t)$.

3.5-3. Ядра уравнений, содержащие тангенс

$$17. \int_a^b |\operatorname{tg}(\lambda x) - \operatorname{tg}(\lambda t)| y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 3.8.3 при $g(x) = \operatorname{tg}(\lambda x)$.

Решение:

$$y(x) = \frac{1}{2\lambda} \frac{d}{dx} [\cos^2(\lambda x) f'_x(x)].$$

Правая часть интегрального уравнения $f(x)$ должна удовлетворять определенным соотношениям (см. п. 2° уравнения 3.8.3).

$$18. \int_0^a |\operatorname{tg}(\beta x) - \operatorname{tg}(\mu t)| y(t) dt = f(x), \quad \beta > 0, \quad \mu > 0.$$

Частный случай уравнения 3.8.4 при $g(x) = \operatorname{tg}(\beta x)$, $\lambda = \mu/\beta$.

$$19. \int_0^b |\operatorname{tg}^k x - \operatorname{tg}^k t| y(t) dt = f(x), \quad 0 < k < 1.$$

Частный случай уравнения 3.8.3 при $g(x) = \operatorname{tg}^k x$.

Решение:

$$y(x) = \frac{1}{2k} \frac{d}{dx} \left[\cos^2 x \operatorname{ctg}^{k-1} x f'_x(x) \right].$$

Правая часть интегрального уравнения $f(x)$ должна удовлетворять определенным соотношениям. Из п. 3° уравнения 3.8.3 следует, что допустимый общий вид правой части дается формулой

$$f(x) = F(x) + Ax + B, \quad A = -F'_x(b), \quad B = \frac{1}{2} [bF'_x(b) - F(0) - F(b)],$$

где $F(x)$ — произвольная ограниченная дважды дифференцируемая функция (с ограниченной первой производной).

$$20. \int_a^b \frac{y(t)}{|\operatorname{tg}(\lambda x) - \operatorname{tg}(\lambda t)|^k} dt = f(x), \quad 0 < k < 1.$$

Частный случай уравнения 3.8.7 при $g(x) = \operatorname{tg}(\lambda x) + \beta$, где β — любое.

$$21. \int_0^a |k \operatorname{tg}(\lambda x) - t| y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 3.8.5 при $g(x) = k \operatorname{tg}(\lambda x)$.

$$22. \int_0^a |x - k \operatorname{tg}(\lambda t)| y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 3.8.6 при $g(t) = k \operatorname{tg}(\lambda t)$.

3.5-4. Ядра уравнений, содержащие котангенс

$$23. \int_a^b |\operatorname{ctg}(\lambda x) - \operatorname{ctg}(\lambda t)| y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 3.8.3 при $g(x) = \operatorname{ctg}(\lambda x)$.

$$24. \int_a^b |\operatorname{ctg}^k x - \operatorname{ctg}^k t| y(t) dt = f(x), \quad 0 < k < 1.$$

Частный случай уравнения 3.8.3 при $g(x) = \operatorname{ctg}^k x$.

3.5-5. Ядра уравнений, содержащие комбинации тригонометрических функций

$$25. \int_{-\infty}^{\infty} [\cos(xt) + \sin(xt)] y(t) dt = f(x).$$

Решение:

$$y(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [\cos(xt) + \sin(xt)] f(t) dt.$$

Исходное уравнение и выражение для его решения представляют собой прямое и обратное преобразования Хартли.

● Литература: D. Zwillinger (1989).

$$26. \int_0^\infty [\sin(xt) - xt \cos(xt)] y(t) dt = f(x).$$

Это уравнение можно свести к частному случаю уравнения 3.7.1 при $\nu = \frac{3}{2}$.

Решение:

$$y(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin(xt) - xt \cos(xt)}{x^2 t^2} f(t) dt.$$

3.5-6. Уравнения, содержащие неизвестную функцию сложного аргумента

$$27. \int_0^{\pi/2} y(\xi) dt = f(x), \quad \xi = x \sin t.$$

Уравнение Шлёмилха.

Решение:

$$y(x) = \frac{2}{\pi} \left[f(0) + x \int_0^{\pi/2} f'_\xi(\xi) dt \right], \quad \xi = x \sin t.$$

⊙ Литература: Э. Уиттекер, Дж. Ватсон (1963, стр. 323), Ф. Д. Гахов (1977, стр. 602).

$$28. \int_0^{\pi/2} y(\xi) dt = f(x), \quad \xi = x \sin^k t.$$

Обобщенное уравнение Шлёмилха.

Частный случай уравнения 3.5.30 при $\lambda = 0, m = 0$.

Решение:

$$y(x) = \frac{2k}{\pi} x^{\frac{k-1}{k}} \frac{d}{dx} \left[x^{\frac{1}{k}} \int_0^x \sin t f(\xi) dt \right], \quad \xi = x \sin^k t.$$

$$29. \int_0^{\pi/2} \sin^\lambda t y(\xi) dt = f(x), \quad \xi = x \sin^k t.$$

Частный случай уравнения 3.5.30 при $m = 0$.

Решение:

$$y(x) = \frac{2k}{\pi} x^{\frac{k-\lambda-1}{k}} \frac{d}{dx} \left[x^{\frac{\lambda+1}{k}} \int_0^x \sin^{\lambda+1} t f(\xi) dt \right], \quad \xi = x \sin^k t.$$

$$30. \int_0^{\pi/2} \sin^\lambda t \cos^m t y(\xi) dt = f(x), \quad \xi = x \sin^k t.$$

1°. Пусть $\lambda > -1, m > -1, k > 0$. Преобразование

$$z = x^{\frac{2}{k}}, \quad \zeta = z \sin^2 t, \quad w(\zeta) = \zeta^{\frac{\lambda-1}{2}} y\left(\zeta^{\frac{k}{2}}\right)$$

приводит к уравнению вида 1.1.43:

$$\int_0^z (z - \zeta)^{\frac{m-1}{2}} w(\zeta) d\zeta = F(z), \quad F(z) = 2z^{\frac{\lambda+m}{2}} f\left(z^{\frac{k}{2}}\right).$$

2°. Решение при $-1 < m < 1$:

$$y(x) = \frac{2k}{\pi} \sin\left[\frac{\pi(1-m)}{2}\right] x^{\frac{k-\lambda-1}{k}} \frac{d}{dx} \left[x^{\frac{\lambda+1}{k}} \int_0^{\pi/2} \sin^{\lambda+1} t \operatorname{tg}^m t f(\xi) dt \right],$$

где $\xi = x \sin^k t$.

3.5-7. Сингулярное уравнение

$$31. \int_0^{2\pi} \operatorname{ctg}\left(\frac{t-x}{2}\right) y(t) dt = f(x), \quad 0 \leq x \leq 2\pi.$$

Здесь интеграл понимается в смысле главного значения по Коши, а правая часть удовлетворяет условию $\int_0^{2\pi} f(t) dt = 0$.

Решение:

$$y(x) = -\frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \operatorname{ctg}\left(\frac{t-x}{2}\right) f(t) dt + C,$$

где C — произвольная постоянная, причем $\int_0^{2\pi} y(t) dt = 2\pi C$.

Исходное уравнение и выражение для его решения представляют собой прямое и обратное преобразования Гильберта (в несимметричной форме).

⊙ Литература: Ф. Д. Гахов (1977).

3.6. Уравнения, ядра которых содержат комбинации элементарных функций

3.6-1. Ядра уравнений, содержащие гиперболические и логарифмические функции

$$1. \int_a^b \ln|\operatorname{ch}(\lambda x) - \operatorname{ch}(\lambda t)| y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 3.8.9 при $g(x) = \operatorname{ch}(\lambda x)$.

$$2. \int_a^b \ln|\operatorname{sh}(\lambda x) - \operatorname{sh}(\lambda t)| y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 3.8.9 при $g(x) = \operatorname{sh}(\lambda x)$.

$$3. \int_{-a}^a \ln\left[\frac{\operatorname{sh}\left(\frac{1}{2}A\right)}{2\operatorname{sh}\left(\frac{1}{2}|x-t|\right)}\right] y(t) dt = f(x), \quad -a \leq x \leq a.$$

Решение при $0 < a < A$:

$$\begin{aligned} y(x) = & \frac{1}{2M'(a)} \left[\frac{d}{da} \int_{-a}^a w(t, a) f(t) dt \right] w(x, a) - \\ & - \frac{1}{2} \int_{|x|}^a w(x, \xi) \frac{d}{d\xi} \left[\frac{1}{M'(\xi)} \frac{d}{d\xi} \int_{-\xi}^{\xi} w(t, \xi) f(t) dt \right] d\xi - \\ & - \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \int_{|x|}^a \frac{w(x, \xi)}{M'(\xi)} \left[\int_{-\xi}^{\xi} w(t, \xi) df(t) \right] d\xi, \end{aligned}$$

где штрих обозначает производную по соответствующему аргументу и

$$M(\xi) = \left[\ln\left(\frac{\operatorname{sh}\left(\frac{1}{2}A\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{1}{2}\xi\right)}\right) \right]^{-1}, \quad w(x, \xi) = \frac{\operatorname{ch}\left(\frac{1}{2}x\right)M(\xi)}{\pi\sqrt{2\operatorname{ch}\xi - 2\operatorname{ch}x}}.$$

⊙ Литература: И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн (1967, стр. 245).

$$4. \int_a^b \ln|\operatorname{th}(\lambda x) - \operatorname{th}(\lambda t)| y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 3.8.9 при $g(x) = \operatorname{th}(\lambda x)$.

$$5. \int_{-a}^a \ln[\operatorname{cth}\left(\frac{1}{4}|x-t|\right)] y(t) dt = f(x), \quad -a \leq x \leq a.$$

Решение:

$$\begin{aligned} y(x) = & \frac{1}{2M'(a)} \left[\frac{d}{da} \int_{-a}^a w(t, a) f(t) dt \right] w(x, a) - \\ & - \frac{1}{2} \int_{|x|}^a w(x, \xi) \frac{d}{d\xi} \left[\frac{1}{M'(\xi)} \frac{d}{d\xi} \int_{-\xi}^{\xi} w(t, \xi) f(t) dt \right] d\xi - \\ & - \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \int_{|x|}^a \frac{w(x, \xi)}{M'(\xi)} \left[\int_{-\xi}^{\xi} w(t, \xi) df(t) \right] d\xi, \end{aligned}$$

где штрих обозначает производную по соответствующему аргументу и

$$M(\xi) = \frac{P_{-1/2}(\operatorname{ch} \xi)}{Q_{-1/2}(\operatorname{ch} \xi)}, \quad w(x, \xi) = \frac{1}{\pi Q_{-1/2}(\operatorname{ch} \xi) \sqrt{2 \operatorname{ch} \xi - 2 \operatorname{ch} x}},$$

$P_{-1/2}(\operatorname{ch} \xi)$, $Q_{-1/2}(\operatorname{ch} \xi)$ — функции Лежандра первого и второго рода.

● Литература: И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн (1967, стр. 245).

3.6-2. Ядра уравнений, содержащие логарифмические и тригонометрические функции

$$6. \int_a^b \ln |\cos(\lambda x) - \cos(\lambda t)| y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 3.8.9 при $g(x) = \cos(\lambda x)$.

$$7. \int_a^b \ln |\sin(\lambda x) - \sin(\lambda t)| y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 3.8.9 при $g(x) = \sin(\lambda x)$.

$$8. \int_{-a}^a \ln \left[\frac{\sin(\frac{1}{2}A)}{2 \sin(\frac{1}{2}|x-t|)} \right] y(t) dt = f(x), \quad -a \leq x \leq a.$$

Решение при $0 < a < A$:

$$\begin{aligned} y(x) = & \frac{1}{2M'(a)} \left[\frac{d}{da} \int_{-a}^a w(t, a) f(t) dt \right] w(x, a) - \\ & - \frac{1}{2} \int_{|x|}^a w(x, \xi) \frac{d}{d\xi} \left[\frac{1}{M'(\xi)} \frac{d}{d\xi} \int_{-\xi}^{\xi} w(t, \xi) f(t) dt \right] d\xi - \\ & - \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \int_{|x|}^a \frac{w(x, \xi)}{M'(\xi)} \left[\int_{-\xi}^{\xi} w(t, \xi) df(t) \right] d\xi, \end{aligned}$$

где штрих обозначает производную по соответствующему аргументу и

$$M(\xi) = \left[\ln \left(\frac{\sin(\frac{1}{2}A)}{\sin(\frac{1}{2}\xi)} \right) \right]^{-1}, \quad w(x, \xi) = \frac{\cos(\frac{1}{2}\xi) M(\xi)}{\pi \sqrt{2 \cos x - 2 \cos \xi}}.$$

● Литература: И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн (1967, стр. 245).

3.7. Уравнения, ядра которых содержат специальные функции

3.7-1. Ядра уравнений, содержащие функции Бесселя

$$1. \int_0^\infty t J_\nu(xt) y(t) dt = f(x), \quad \nu > -\frac{1}{2}.$$

Здесь J_ν — функция Бесселя первого рода.

Решение:

$$y(x) = \int_0^\infty t J_\nu(xt) f(t) dt.$$

Исходное уравнение и выражение для его решения представляют собой прямое и обратное преобразования Ханкеля.

● Литература: В. А. Диткин, А. П. Прудников (1974, стр. 77).

$$2. \int_a^b |J_\nu(\lambda x) - J_\nu(\lambda t)| y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 3.8.3 при $g(x) = J_\nu(\lambda x)$, где J_ν — функция Бесселя первого рода.

$$3. \int_a^b |Y_\nu(\lambda x) - Y_\nu(\lambda t)| y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 3.8.3 при $g(x) = Y_\nu(\lambda x)$, где Y_ν — функция Бесселя второго рода.

3.7-2. Ядра уравнений, содержащие модифицированные функции Бесселя

$$4. \int_a^b |I_\nu(\lambda x) - I_\nu(\lambda t)| y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 3.8.3 при $g(x) = I_\nu(\lambda x)$, где I_ν — модифицированная функция Бесселя первого рода.

$$5. \int_a^b |K_\nu(\lambda x) - K_\nu(\lambda t)| y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 3.8.3 при $g(x) = K_\nu(\lambda x)$, где K_ν — модифицированная функция Бесселя второго рода (функция Макдональда).

$$6. \int_0^\infty \sqrt{zt} K_\nu(zt) y(t) dt = f(z).$$

Здесь K_ν — модифицированная функция Бесселя второго рода (функция Макдональда).

Левая часть этого уравнения с точностью до постоянного множителя является преобразованием Мейера функции $y(t)$ (переменная z рассматривается в комплексной плоскости).

Решение:

$$y(t) = \frac{1}{\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \sqrt{zt} I_\nu(zt) f(z) dz.$$

Для конкретных функций $f(z)$ для вычисления интеграла можно использовать таблицы интегральных преобразований Мейера.

⊙ Литература: В. А. Диткин, А. П. Прудников (1974, стр. 479).

$$7. \int_{-\infty}^\infty K_0(|x-t|) y(t) dt = f(x).$$

Здесь K_0 — модифицированная функция Бесселя второго рода.

Решение:

$$y(x) = -\frac{1}{\pi^2} \left(\frac{d^2}{dx^2} - 1 \right) \int_{-\infty}^\infty K_0(|x-t|) f(t) dt.$$

⊙ Литература: D. Zwillinger (1989).

3.7-3. Другие ядра

$$8. \int_0^a K \left(\frac{2\sqrt{xt}}{x+t} \right) \frac{y(t) dt}{x+t} = f(x).$$

Здесь $K(z) = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-z^2t^2)}}$ — полный эллиптический интеграл первого рода.

Решение:

$$y(x) = -\frac{4}{\pi^2} \frac{d}{dx} \int_x^a \frac{tF(t) dt}{\sqrt{t^2-x^2}}, \quad F(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{s f(s) ds}{\sqrt{t^2-s^2}}.$$

⊙ Литература: П. П. Забрейко, А. И. Кошелев и др. (1968, стр. 35).

$$9. \int_0^a F\left(\frac{\beta}{2}, \frac{\beta+1}{2}, \mu; \frac{4x^2t^2}{(x^2+t^2)^2}\right) \frac{y(t) dt}{(x^2+t^2)^\beta} = f(x).$$

Здесь $0 < a \leq \infty$, $0 < \beta < \mu < \beta + 1$, $F(a, b, c; z)$ — гипергеометрическая функция.

Решение:

$$y(x) = \frac{x^{2\mu-2}}{\Gamma(1+\beta-\mu)} \frac{d}{dx} \int_x^a \frac{tg(t) dt}{(t^2-x^2)^{\mu-\beta}},$$

$$g(t) = \frac{2\Gamma(\beta) \sin[(\beta-\mu)\pi]}{\pi\Gamma(\mu)} t^{1-2\beta} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{s^{2\mu-1} f(s) ds}{(t^2-s^2)^{\mu-\beta}}.$$

Если $a = \infty$ и функция $f(x)$ дифференцируема, то решение можно представить также в следующем виде:

$$y(x) = A \frac{d}{dt} \int_0^\infty \frac{(xt)^{2\mu} f'_t(t)}{(x^2+t^2)^{2\mu-\beta}} F\left(\mu - \frac{\beta}{2}, \mu + \frac{1-\beta}{2}, \mu + 1; \frac{4x^2t^2}{(x^2+t^2)^2}\right) dt,$$

где $A = \frac{\Gamma(\beta) \Gamma(2\mu - \beta) \sin[(\beta - \mu)\pi]}{\pi \Gamma(\mu) \Gamma(1 + \mu)}.$

⊙ Литература: П. П. Забрейко, А. И. Кошелев и др. (1968, стр. 34).

3.8. Уравнения, ядра которых содержат произвольные функции

3.8-1. Уравнения с вырожденным ядром

$$1. \int_a^b [g_1(x)h_1(t) + g_2(x)h_2(t)] y(t) dt = f(x).$$

Это интегральное уравнение имеет решения только тогда, когда его правая часть представима в виде

$$f(x) = A_1 g_1(x) + A_2 g_2(x), \quad A_1 = \text{const}, \quad A_2 = \text{const}. \quad (1)$$

В этом случае любая функция $y = y(x)$, удовлетворяющая условиям типа нормировки

$$\int_a^b h_1(t)y(t) dt = A_1, \quad \int_a^b h_2(t)y(t) dt = A_2, \quad (2)$$

будет решением интегрального уравнения.

Если правая часть уравнения имеет вид, отличный от (1), то интегральное уравнение не имеет решений.

$$2. \int_a^b \left[\sum_{k=0}^n g_k(x)h_k(t) \right] y(t) dt = f(x).$$

Это интегральное уравнение имеет решения только тогда, когда его правая часть представима в виде

$$f(x) = \sum_{k=0}^n A_k g_k(x), \quad (1)$$

где A_k — некоторые постоянные. В этом случае любая функция $y = y(x)$, удовлетворяющая условиям типа нормировки

$$\int_a^b h_k(t)y(t) dt = A_k \quad (k = 1, \dots, n), \quad (2)$$

будет решением интегрального уравнения.

Если правая часть уравнения имеет вид, отличный от (1), то интегральное уравнение не имеет решений.

3.8-2. Уравнения, содержащие знак модуля

$$3. \int_a^b |g(x) - g(t)| y(t) dt = f(x).$$

Пусть $a \leq x \leq b$, $a \leq t \leq b$; в пп. 1° и 2° считаем, что $0 < g'_x(x) < \infty$.

1°. Раскроем модуль в подынтегральном выражении. В результате получим

$$\int_a^x [g(x) - g(t)]y(t) dt + \int_x^b [g(t) - g(x)]y(t) dt = f(x). \quad (1)$$

Дифференцируя (1) по x , имеем

$$g'_x(x) \int_a^x y(t) dt - g'_x(x) \int_x^b y(t) dt = f'_x(x). \quad (2)$$

Поделим обе части (2) на $g'_x(x)$ и продифференцируем полученное выражение. В итоге находим решение

$$y(x) = \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \left[\frac{f'_x(x)}{g'_x(x)} \right]. \quad (3)$$

2°. Покажем, что правая часть интегрального уравнения $f(x)$ должна удовлетворять определенным соотношениям. Полагая в (1) $x = a$ и $x = b$, имеем два следствия:

$$\int_a^b [g(t) - g(a)]y(t) dt = f(a), \quad \int_a^b [g(b) - g(t)]y(t) dt = f(b). \quad (4)$$

Подставим в равенства (4) функцию $y(x)$ из (3). После интегрирования по частям получим искомые условия для функции $f(x)$:

$$\begin{aligned} [g(b) - g(a)] \frac{f'_x(b)}{g'_x(b)} &= f(a) + f(b), \\ [g(a) - g(b)] \frac{f'_x(a)}{g'_x(a)} &= f(a) + f(b). \end{aligned} \quad (5)$$

Отметим полезное следствие этих условий: $f'_x(b)g'_x(a) + f'_x(a)g'_x(b) = 0$.

Условия (5) позволяют найти допустимый общий вид правой части рассматриваемого интегрального уравнения

$$f(x) = F(x) + Ax + B, \quad (6)$$

где $F(x)$ — произвольная ограниченная дважды дифференцируемая функция (с ограниченной первой производной), а коэффициенты A и B вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} A &= -\frac{g'_x(a)F'_x(b) + g'_x(b)F'_x(a)}{g'_x(a) + g'_x(b)}, \\ B &= -\frac{1}{2}A(a+b) - \frac{1}{2}[F(a) + F(b)] - \frac{g(b) - g(a)}{2g'_x(a)}[A + F'_x(a)]. \end{aligned}$$

3°. Если вблизи границы области интегрирования для $x \rightarrow a$ функцию $g(x)$ можно представить в виде $g(x) = O(x - a)^k$ при $0 < k < 1$ (т. е. производная g'_x неограничена при $x \rightarrow a$), то решение интегрального уравнения также описывается формулой (3). При этом правая часть интегрального уравнения должна удовлетворять условиям

$$f(a) + f(b) = 0, \quad f'_x(b) = 0. \quad (7)$$

Общий вид правой части интегрального уравнения, как и ранее, определяется выражением (6), где коэффициенты A и B вычисляются по формулам

$$A = -F'_x(b), \quad B = \frac{1}{2}[(a+b)F'_x(b) - F(a) - F(b)].$$

4°. При $g'_x(a) = 0$ правая часть интегрального уравнения должна удовлетворять условиям

$$f'_x(a) = 0, \quad [g(b) - g(a)]f'_x(b) = [f(a) + f(b)]g'_x(b).$$

Общий вид правой части интегрального уравнения, как и ранее, определяется выражением (6), где коэффициенты A и B вычисляются по формулам

$$A = -F'_x(a), \quad B = \frac{1}{2}[(a+b)F'_x(a) - F(a) - F(b)] + \frac{g(b) - g(a)}{2g'_x(b)}[F'_x(b) - F'_x(a)].$$

$$4. \int_0^a |g(x) - g(\lambda t)| y(t) dt = f(x), \quad \lambda > 0.$$

Считаем, что $0 \leq x \leq a$, $0 \leq t \leq a$; $0 < g'_x(x) < \infty$.

1°. Раскроем модуль в подинтегральном выражении. В результате получим

$$\int_0^{x/\lambda} [g(x) - g(\lambda t)] y(t) dt + \int_{x/\lambda}^a [g(\lambda t) - g(x)] y(t) dt = f(x). \quad (1)$$

Дифференцируя (1) по x , имеем

$$g'_x(x) \int_0^{x/\lambda} y(t) dt - g'_x(x) \int_{x/\lambda}^a y(t) dt = f'_x(x). \quad (2)$$

Поделим обе части (2) на $g'_x(x)$ и продифференцируем полученное выражение. Имеем $y(x/\lambda) = \frac{1}{2} \lambda [f'_x(x)/g'_x(x)]'_x$. Заменяя здесь x на λx , находим решение

$$y(x) = \frac{\lambda}{2} \frac{d}{dz} \left[\frac{f'_z(z)}{g'_z(z)} \right], \quad z = \lambda x. \quad (3)$$

2°. Покажем, что правая часть интегрального уравнения $f(x)$ должна удовлетворять определенным соотношениям. Полагая в (1) и (2) $x = 0$, имеем два следствия:

$$\int_0^a [g(\lambda t) - g(0)] y(t) dt = f(0), \quad g'_x(0) \int_0^a y(t) dt = -f'_x(0). \quad (4)$$

Подставим в равенства (4) функцию $y(x)$ из (3). После интегрирования по частям получим искомые условия для функции $f(x)$:

$$\begin{aligned} f'_x(0)g'_x(\lambda a) + f'_x(\lambda a)g'_x(0) &= 0, \\ [g(\lambda a) - g(0)] \frac{f'_x(\lambda a)}{g'_x(\lambda a)} &= f(0) + f(\lambda a). \end{aligned} \quad (5)$$

Условия (5) позволяют найти допустимый общий вид правой части рассматриваемого интегрального уравнения

$$f(x) = F(x) + Ax + B, \quad (6)$$

где $F(x)$ — произвольная ограниченная дважды дифференцируемая функция (с ограниченной первой производной), а коэффициенты A и B вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} A &= -\frac{g'_x(0)F'_x(\lambda a) + g'_x(\lambda a)F'_x(0)}{g'_x(0) + g'_x(\lambda a)}, \\ B &= -\frac{1}{2}Aa\lambda - \frac{1}{2}[F(0) + F(\lambda a)] - \frac{g(\lambda a) - g(0)}{2g'_x(0)}[A + F'_x(0)]. \end{aligned}$$

3°. Если вблизи границы области интегрирования для $x \rightarrow 0$ функцию $g(x)$ можно представить в виде $g(x) = O(x^k)$ при $0 < k < 1$ (т. е. производная g'_x неограничена при $x \rightarrow 0$), то решение интегрального уравнения также описывается формулой (3). При этом правая часть интегрального уравнения должна удовлетворять условиям

$$f(0) + f(\lambda a) = 0, \quad f'_x(\lambda a) = 0. \quad (7)$$

Общий вид правой части интегрального уравнения, как и ранее, определяется выражением (6), где коэффициенты A и B вычисляются по формулам

$$A = -F'_x(\lambda a), \quad B = \frac{1}{2}[a\lambda F'_x(\lambda a) - F(0) - F(\lambda a)].$$

$$5. \int_0^a |g(x) - t| y(t) dt = f(x).$$

Считаем, что $0 \leq x \leq a$, $0 \leq t \leq a$; $g(0) = 0$, $0 < g'_x(x) < \infty$.

1°. Раскроем модуль в подинтегральном выражении. В результате получим

$$\int_0^{g(x)} [g(x) - t] y(t) dt + \int_{g(x)}^a [t - g(x)] y(t) dt = f(x). \quad (1)$$

Дифференцируя (1) по x , имеем

$$g'_x(x) \int_0^{g(x)} y(t) dt - g'_x(x) \int_{g(x)}^a y(t) dt = f'_x(x). \quad (2)$$

Поделим обе части (2) на $g'_x(x)$ и продифференцируем полученное выражение. Имеем $2g'_x(x)y(g(x)) = [f'_x(x)/g'_x(x)]'_x$. Отсюда находим решение

$$y(x) = \frac{1}{2g'_z(z)} \frac{d}{dz} \left[\frac{f'_z(z)}{g'_z(z)} \right], \quad z = g^{-1}(x), \quad (3)$$

где g^{-1} — обратная функция к g .

2°. Покажем, что правая часть интегрального уравнения $f(x)$ должна удовлетворять определенным соотношениям. Полагая в (1) и (2) $x = 0$, имеем два следствия:

$$\int_0^a ty(t) dt = f(0), \quad g'_x(0) \int_0^a y(t) dt = -f'_x(0). \quad (4)$$

Подставим в равенства (4) функцию $y(x)$ из (3). После интегрирования по частям получим искомые условия для функции $f(x)$:

$$\begin{aligned} f'_x(0)g'_x(x_a) + f'_x(x_a)g'_x(0) &= 0, \quad x_a = g^{-1}(a); \\ g(x_a) \frac{f'_x(x_a)}{g'_x(x_a)} &= f(0) + f(x_a). \end{aligned} \quad (5)$$

Условия (5) позволяют найти допустимый общий вид правой части рассматриваемого интегрального уравнения

$$f(x) = F(x) + Ax + B, \quad (6)$$

где $F(x)$ — произвольная ограниченная дважды дифференцируемая функция (с ограниченной первой производной), а коэффициенты A и B вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} A &= -\frac{g'_x(0)F'_x(x_a) + g'_x(x_a)F'_x(0)}{g'_x(0) + g'_x(x_a)}, \quad x_a = g^{-1}(a), \\ B &= -\frac{1}{2}Ax_a - \frac{1}{2}[F(0) + F(x_a)] - \frac{g(x_a)}{2g'_x(0)}[A + F'_x(0)]. \end{aligned}$$

3°. Если вблизи границы области интегрирования для $x \rightarrow 0$ функцию $g(x)$ можно представить в виде $g(x) = O(x^k)$ при $0 < k < 1$ (т. е. производная g'_x неограничена при $x \rightarrow 0$), то решение интегрального уравнения также описывается формулой (3). При этом правая часть интегрального уравнения должна удовлетворять условиям

$$f(0) + f(x_a) = 0, \quad f'_x(x_a) = 0. \quad (7)$$

Общий вид правой части интегрального уравнения, как и ранее, определяется выражением (6), где коэффициенты A и B вычисляются по формулам

$$A = -F'_x(x_a), \quad B = \frac{1}{2}[x_a F'_x(x_a) - F(0) - F(x_a)].$$

6.
$$\int_0^a |x - g(t)| y(t) dt = f(x).$$

Считаем, что $0 \leq x \leq a$, $0 \leq t \leq a$; $g(0) = 0$, $0 < g'_x(x) < \infty$.

1°. Раскроем модуль в подинтегральном выражении. В результате получим

$$\int_0^{g^{-1}(x)} [x - g(t)] y(t) dt + \int_{g^{-1}(x)}^a [g(t) - x] y(t) dt = f(x), \quad (1)$$

где g^{-1} — обратная функция к g . Дифференцируя (1) по x , имеем

$$\int_0^{g^{-1}(x)} y(t) dt - \int_{g^{-1}(x)}^a y(t) dt = f'_x(x). \quad (2)$$

Дифференцируя полученное выражение, имеем $2y(g^{-1}(x)) = g'_x(x)f''_{xx}(x)$. Отсюда находим решение

$$y(x) = \frac{1}{2}g'_z(z)f''_{zz}(z), \quad z = g(x). \quad (3)$$

2°. Покажем, что правая часть интегрального уравнения $f(x)$ должна удовлетворять определенным соотношениям. Полагая в (1) и (2) $x = 0$, имеем два следствия:

$$\int_0^a g(t)y(t) dt = f(0), \quad \int_0^a y(t) dt = -f'_x(0). \quad (4)$$

Подставим в равенства (4) функцию $y(x)$ из (3). После интегрирования по частям получим искомые условия для функции $f(x)$:

$$x_a f'_x(x_a) = f(0) + f(x_a), \quad f'_x(0) + f'_x(x_a) = 0, \quad x_a = g(a). \quad (5)$$

Условия (5) позволяют найти допустимый общий вид правой части рассматриваемого интегрального уравнения:

$$f(x) = F(x) + Ax + B, \\ A = -\frac{1}{2} [F'_x(0) + F'_x(x_a)], \quad B = \frac{1}{2} [x_a F'_x(0) - F(x_a) - F(0)], \quad x_a = g(a),$$

где $F(x)$ — произвольная ограниченная дважды дифференцируемая функция (с ограниченной первой производной).

$$7. \quad \int_a^b \frac{y(t)}{|g(x) - g(t)|^k} dt = f(x), \quad 0 < k < 1.$$

Пусть $g'_x \neq 0$. Преобразование

$$z = g(x), \quad \tau = g(t), \quad w(\tau) = \frac{1}{g'_t(t)} y(t)$$

приводит к уравнению вида 3.1.30:

$$\int_A^B \frac{w(\tau)}{|z - \tau|^k} d\tau = F(z), \quad A = g(a), \quad B = g(b),$$

где функция $F = F(z)$ получается путем исключения x из равенств $z = g(x)$, $F = f(x)$.

$$8. \quad \int_0^1 \frac{y(t)}{|g(x) - h(t)|^k} dt = f(x), \quad 0 < k < 1.$$

Пусть $g(0) = 0$, $g(1) = 1$, $g'_x > 0$; $h(0) = 0$, $h(1) = 1$, $h'_t > 0$.

Преобразование

$$z = g(x), \quad \tau = h(t), \quad w(\tau) = \frac{1}{h'_t(t)} y(t)$$

приводит к уравнению вида 3.1.29:

$$\int_0^1 \frac{w(\tau)}{|z - \tau|^k} d\tau = F(z),$$

где функция $F = F(z)$ получается путем исключения x из равенств $z = g(x)$, $F = f(x)$.

$$9. \quad \int_a^b y(t) \ln |g(x) - g(t)| dt = f(x).$$

Пусть $g'_x \neq 0$. Преобразование

$$z = g(x), \quad \tau = g(t), \quad w(\tau) = \frac{1}{g'_t(t)} y(t)$$

приводит к уравнению Карлемана 3.4.2:

$$\int_A^B \ln |z - \tau| w(\tau) d\tau = F(z), \quad A = g(a), \quad B = g(b),$$

где функция $F = F(z)$ получается путем исключения x из равенств $z = g(x)$, $F = f(x)$.

$$10. \int_0^1 y(t) \ln |g(x) - h(t)| dt = f(x).$$

Пусть $g(0) = 0$, $g(1) = 1$, $g'_x > 0$; $h(0) = 0$, $h(1) = 1$, $h'_t > 0$.

Преобразование

$$z = g(x), \quad \tau = h(t), \quad w(\tau) = \frac{1}{h'_t(t)} y(t)$$

приводит к уравнению вида 3.4.2:

$$\int_0^1 \ln |z - \tau| w(\tau) d\tau = F(z),$$

где функция $F = F(z)$ получается путем исключения x из равенств $z = g(x)$, $F = f(x)$.

3.8-3. Уравнения с разностным ядром: $K(x, t) = K(x - t)$

$$11. \int_{-\infty}^{\infty} K(x - t) y(t) dt = Ax^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

1°. Решение при $n = 0$:

$$y(x) = \frac{A}{B}, \quad B = \int_{-\infty}^{\infty} K(x) dx.$$

2°. Решение при $n = 1$:

$$y(x) = \frac{A}{B} x + \frac{AC}{B^2}, \quad B = \int_{-\infty}^{\infty} K(x) dx, \quad C = \int_{-\infty}^{\infty} x K(x) dx.$$

3°. Решение при $n \geq 2$:

$$y(x) = \left\{ \frac{d^n}{d\lambda^n} \left[\frac{A e^{\lambda x}}{B(\lambda)} \right] \right\}_{\lambda=0}, \quad B(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x) e^{-\lambda x} dx.$$

$$12. \int_{-\infty}^{\infty} K(x - t) y(t) dt = A e^{\lambda x}.$$

Решение:

$$y(x) = \frac{A}{B} e^{\lambda x}, \quad B = \int_{-\infty}^{\infty} K(x) e^{-\lambda x} dx.$$

$$13. \int_{-\infty}^{\infty} K(x - t) y(t) dt = A x^n e^{\lambda x}, \quad n = 1, 2, \dots$$

1°. Решение при $n = 1$:

$$y(x) = \frac{A}{B} x e^{\lambda x} + \frac{AC}{B^2} e^{\lambda x},$$

$$B = \int_{-\infty}^{\infty} K(x) e^{-\lambda x} dx, \quad C = \int_{-\infty}^{\infty} x K(x) e^{-\lambda x} dx.$$

2°. Решение при $n \geq 2$:

$$y(x) = \frac{d^n}{d\lambda^n} \left[\frac{A e^{\lambda x}}{B(\lambda)} \right], \quad B(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x) e^{-\lambda x} dx.$$

$$14. \int_{-\infty}^{\infty} K(x - t) y(t) dt = A \cos(\lambda x) + B \sin(\lambda x).$$

Решение:

$$y(x) = \frac{A I_c + B I_s}{I_c^2 + I_s^2} \cos(\lambda x) + \frac{B I_c - A I_s}{I_c^2 + I_s^2} \sin(\lambda x),$$

$$I_c = \int_{-\infty}^{\infty} K(z) \cos(\lambda z) dz, \quad I_s = \int_{-\infty}^{\infty} K(z) \sin(\lambda z) dz.$$

$$15. \int_{-\infty}^{\infty} K(x-t)y(t) dt = f(x).$$

Для решения этого уравнения используют преобразование Фурье.

1°. Решение:

$$y(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{f}(u)}{\tilde{K}(u)} e^{iux} du,$$

$$\tilde{f}(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-iux} dx, \quad \tilde{K}(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} K(x) e^{-iux} dx.$$

Справедливо утверждение. Пусть $f(x) \in L_2(-\infty, \infty)$, $K(x) \in L_1(-\infty, \infty)$. Тогда для того чтобы существовало решение интегрального уравнения $y(x) \in L_2(-\infty, \infty)$, необходимо и достаточно, чтобы $\tilde{f}(u)/\tilde{K}(u) \in L_2(-\infty, \infty)$.

2°. Пусть функция $P(s)$, определенная равенством

$$\frac{1}{P(s)} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} K(t) dt,$$

является полиномом степени n с вещественными корнями вида

$$P(s) = \left(1 - \frac{s}{a_1}\right) \left(1 - \frac{s}{a_2}\right) \dots \left(1 - \frac{s}{a_n}\right).$$

Тогда решение интегрального уравнения дается формулой

$$y(x) = P(D)f(x), \quad D = \frac{d}{dx}.$$

⊙ Литература: И. И. Хиршман, Д. В. Уиддер (1958), В. А. Диткин, А. П. Прудников (1974, стр. 27).

$$16. \int_0^{\infty} K(x-t)y(t) dt = f(x).$$

Уравнение Винера–Хопфа первого рода. Об этом уравнении см. п. 10.5-1 и книгу Ф. Д. Гахова, Ю. И. Черского (1978).

3.8-4. Другие уравнения вида $\int_a^b K(x,t)y(t) dt = F(x)$

$$17. \int_{-\infty}^{\infty} K(ax-t)y(t) dt = Ae^{\lambda x}.$$

Решение:

$$y(x) = \frac{A}{B} \exp\left(\frac{\lambda}{a}x\right), \quad B = \int_{-\infty}^{\infty} K(z) \exp\left(-\frac{\lambda}{a}z\right) dz.$$

$$18. \int_{-\infty}^{\infty} K(ax-t)y(t) dt = f(x).$$

Замена $z = ax$ приводит к уравнению вида 3.8.15:

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(z-t)y(t) dt = f(z/a).$$

$$19. \int_{-\infty}^{\infty} K(ax+t)y(t) dt = Ae^{\lambda x}.$$

Решение:

$$y(x) = \frac{A}{B} \exp\left(-\frac{\lambda}{a}x\right), \quad B = \int_{-\infty}^{\infty} K(z) \exp\left(-\frac{\lambda}{a}z\right) dz.$$

$$20. \int_{-\infty}^{\infty} K(ax+t)y(t) dt = f(x).$$

Преобразование $\tau = -t$, $z = ax$, $y(t) = Y(\tau)$ приводит к уравнению вида 3.8.15:

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(z-\tau)Y(\tau) dt = f(z/a).$$

$$21. \int_{-\infty}^{\infty} [e^{\beta t} K(ax + t) + e^{\mu t} M(ax - t)] y(t) dt = Ae^{\lambda x}.$$

Решение:

$$y(x) = A \frac{I_k(q)e^{px} - I_m(p)e^{qx}}{I_k(p)I_k(q) - I_m(p)I_m(q)}, \quad p = -\frac{\lambda}{a} - \beta, \quad q = \frac{\lambda}{a} - \mu,$$

где

$$I_k(q) = \int_{-\infty}^{\infty} K(z)e^{(\beta+q)z} dz, \quad I_m(q) = \int_{-\infty}^{\infty} M(z)e^{-(\mu+q)z} dz.$$

$$22. \int_0^{\infty} g(xt)y(t) dt = f(x).$$

Положим

$$x = e^z, \quad t = e^{-\tau}, \quad y(t) = e^{\tau} w(\tau), \quad g(\xi) = G(\ln \xi), \quad f(\xi) = F(\ln \xi).$$

В результате получим интегральное уравнение с разностным ядром вида 3.8.15:

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(z - \tau)w(\tau) d\tau = F(z).$$

$$23. \int_0^{\infty} g\left(\frac{x}{t}\right)y(t) dt = f(x).$$

Положим

$$x = e^z, \quad t = e^{\tau}, \quad y(t) = e^{-\tau} w(\tau), \quad g(\xi) = G(\ln \xi), \quad f(\xi) = F(\ln \xi).$$

В результате получим интегральное уравнение с разностным ядром вида 3.8.15:

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(z - \tau)w(\tau) d\tau = F(z).$$

$$24. \int_0^{\infty} g(x^{\beta}t^{\lambda})y(t) dt = f(x), \quad \beta > 0, \quad \lambda > 0.$$

Положим

$$x = e^{z/\beta}, \quad t = e^{-\tau/\lambda}, \quad y(t) = e^{\tau/\lambda} w(\tau), \quad g(\xi) = G(\ln \xi), \quad f(\xi) = \frac{1}{\lambda} F(\beta \ln \xi).$$

В результате получим интегральное уравнение с разностным ядром вида 3.8.15:

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(z - \tau)w(\tau) d\tau = F(z).$$

$$25. \int_0^{\infty} g\left(\frac{x^{\beta}}{t^{\lambda}}\right)y(t) dt = f(x), \quad \beta > 0, \quad \lambda > 0.$$

Положим

$$x = e^{z/\beta}, \quad t = e^{\tau/\lambda}, \quad y(t) = e^{-\tau/\lambda} w(\tau), \quad g(\xi) = G(\ln \xi), \quad f(\xi) = \frac{1}{\lambda} F(\beta \ln \xi).$$

В результате получим интегральное уравнение с разностным ядром вида 3.8.15:

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(z - \tau)w(\tau) d\tau = F(z).$$

3.8-5. Уравнения вида $\int_a^b K(x, t)y(\cdot \cdot) dt = F(x)$

$$26. \int_a^b f(t)y(xt) dt = Ax + B.$$

Решение:

$$y(x) = \frac{A}{I_1}x + \frac{B}{I_0}, \quad I_0 = \int_a^b f(t) dt, \quad I_1 = \int_a^b t f(t) dt.$$

$$27. \int_a^b f(t)y(xt) dt = Ax^\beta.$$

Решение: лунтон

$$y(x) = \frac{A}{B}x^\beta, \quad B = \int_a^b f(t)t^\beta dt.$$

$$28. \int_a^b f(t)y(xt) dt = A \ln x + B.$$

Решение:

$$y(x) = p \ln x + q,$$

где коэффициенты p и q вычисляются по формулам

$$p = \frac{A}{I_0}, \quad q = \frac{B}{I_0} - \frac{AI_l}{I_0^2}, \quad I_0 = \int_a^b f(t) dt, \quad I_l = \int_a^b f(t) \ln t dt.$$

$$29. \int_a^b f(t)y(xt) dt = Ax^\beta \ln x.$$

Решение:

$$y(x) = px^\beta \ln x + qx^\beta,$$

где коэффициенты p и q вычисляются по формулам

$$p = \frac{A}{I_1}, \quad q = -\frac{AI_2}{I_1^2}, \quad I_1 = \int_a^b f(t)t^\beta dt, \quad I_2 = \int_a^b f(t)t^\beta \ln t dt.$$

$$30. \int_a^b f(t)y(xt) dt = A \cos(\ln x).$$

Решение:

$$y(x) = \frac{AI_c}{I_c^2 + I_s^2} \cos(\ln x) + \frac{AI_s}{I_c^2 + I_s^2} \sin(\ln x),$$

$$I_c = \int_a^b f(t) \cos(\ln t) dt, \quad I_s = \int_a^b f(t) \sin(\ln t) dt.$$

$$31. \int_a^b f(t)y(xt) dt = A \sin(\ln x).$$

Решение:

$$y(x) = -\frac{AI_s}{I_c^2 + I_s^2} \cos(\ln x) + \frac{AI_c}{I_c^2 + I_s^2} \sin(\ln x),$$

$$I_c = \int_a^b f(t) \cos(\ln t) dt, \quad I_s = \int_a^b f(t) \sin(\ln t) dt.$$

$$32. \int_a^b f(t)y(xt) dt = Ax^\beta \cos(\ln x) + Bx^\beta \sin(\ln x).$$

Решение:

$$y(x) = px^\beta \cos(\ln x) + qx^\beta \sin(\ln x),$$

где коэффициенты p и q вычисляются по формулам

$$p = \frac{AI_c - BI_s}{I_c^2 + I_s^2}, \quad q = \frac{AI_s + BI_c}{I_c^2 + I_s^2},$$

$$I_c = \int_a^b f(t)t^\beta \cos(\ln t) dt, \quad I_s = \int_a^b f(t)t^\beta \sin(\ln t) dt.$$

$$33. \int_a^b f(t)y(x-t) dt = Ax + B.$$

Решение:

$$y(x) = px + q,$$

где коэффициенты p и q вычисляются по формулам

$$p = \frac{A}{I_0}, \quad q = \frac{AI_1}{I_0^2} + \frac{B}{I_0}, \quad I_0 = \int_a^b f(t) dt, \quad I_1 = \int_a^b tf(t) dt.$$

$$34. \int_a^b f(t)y(x-t) dt = Ae^{\lambda x}.$$

Решение:

$$y(x) = \frac{A}{B}e^{\lambda x}, \quad B = \int_a^b f(t) \exp(-\lambda t) dt.$$

$$35. \int_a^b f(t)y(x-t) dt = A \cos(\lambda x).$$

Решение:

$$y(x) = -\frac{AI_s}{I_c^2 + I_s^2} \sin(\lambda x) + \frac{AI_c}{I_c^2 + I_s^2} \cos(\lambda x),$$

$$I_c = \int_a^b f(t) \cos(\lambda t) dt, \quad I_s = \int_a^b f(t) \sin(\lambda t) dt.$$

$$36. \int_a^b f(t)y(x-t) dt = A \sin(\lambda x).$$

Решение:

$$y(x) = \frac{AI_c}{I_c^2 + I_s^2} \sin(\lambda x) + \frac{AI_s}{I_c^2 + I_s^2} \cos(\lambda x),$$

$$I_c = \int_a^b f(t) \cos(\lambda t) dt, \quad I_s = \int_a^b f(t) \sin(\lambda t) dt.$$

$$37. \int_a^b f(t)y(x-t) dt = e^{\mu x} (A \sin \lambda x + B \cos \lambda x).$$

Решение:

$$y(x) = e^{\mu x} (p \sin \lambda x + q \cos \lambda x),$$

где коэффициенты p и q вычисляются по формулам

$$p = \frac{AI_c - BI_s}{I_c^2 + I_s^2}, \quad q = \frac{AI_s + BI_c}{I_c^2 + I_s^2},$$

$$I_c = \int_a^b f(t)e^{-\mu t} \cos(\lambda t) dt, \quad I_s = \int_a^b f(t)e^{-\mu t} \sin(\lambda t) dt.$$

$$38. \int_a^b f(t)y(x-t) dt = g(x).$$

1°. Для правой части $g(x) = \sum_{k=1}^n A_k \exp(\lambda_k x)$ решение уравнения имеет вид

$$y(x) = \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{B_k} \exp(\lambda_k x), \quad B_k = \int_a^b f(t) \exp(-\lambda_k t) dt.$$

2°. Для полиномиальной правой части уравнения $g(x) = \sum_{k=0}^n A_k x^k$ решение имеет вид

$$y(x) = \sum_{k=0}^n B_k x^k,$$

где постоянные B_k определяются методом неопределенных коэффициентов.

3°. Для правой части $g(x) = e^{\lambda x} \sum_{k=0}^n A_k x^k$ решение уравнения имеет вид

$$y(x) = e^{\lambda x} \sum_{k=0}^n B_k x^k,$$

где постоянные B_k определяются методом неопределенных коэффициентов.

4°. Для правой части $g(x) = \sum_{k=1}^n A_k \cos(\lambda_k x)$ решение уравнения имеет вид

$$y(x) = \sum_{k=1}^n B_k \cos(\lambda_k x) + \sum_{k=1}^n C_k \sin(\lambda_k x),$$

где постоянные B_k и C_k определяются методом неопределенных коэффициентов.

5°. Для правой части $g(x) = \sum_{k=1}^n A_k \sin(\lambda_k x)$ решение уравнения имеет вид

$$y(x) = \sum_{k=1}^n B_k \cos(\lambda_k x) + \sum_{k=1}^n C_k \sin(\lambda_k x),$$

где постоянные B_k и C_k определяются методом неопределенных коэффициентов.

6°. Для правой части $g(x) = \cos(\lambda x) \sum_{k=0}^n A_k x^k$ решение уравнения имеет вид

$$y(x) = \cos(\lambda x) \sum_{k=0}^n B_k x^k + \sin(\lambda x) \sum_{k=0}^n C_k x^k,$$

где постоянные B_k и C_k определяются методом неопределенных коэффициентов.

7°. Для правой части $g(x) = \sin(\lambda x) \sum_{k=0}^n A_k x^k$ решение уравнения имеет вид

$$y(x) = \cos(\lambda x) \sum_{k=0}^n B_k x^k + \sin(\lambda x) \sum_{k=0}^n C_k x^k,$$

где постоянные B_k и C_k определяются методом неопределенных коэффициентов.

8°. Для правой части $g(x) = e^{\mu x} \sum_{k=1}^n A_k \cos(\lambda_k x)$ решение уравнения имеет вид

$$y(x) = e^{\mu x} \sum_{k=1}^n B_k \cos(\lambda_k x) + e^{\mu x} \sum_{k=1}^n C_k \sin(\lambda_k x),$$

где постоянные B_k и C_k определяются методом неопределенных коэффициентов.

9°. Для правой части $g(x) = e^{\mu x} \sum_{k=1}^n A_k \sin(\lambda_k x)$ решение уравнения имеет вид

$$y(x) = e^{\mu x} \sum_{k=1}^n B_k \cos(\lambda_k x) + e^{\mu x} \sum_{k=1}^n C_k \sin(\lambda_k x),$$

где постоянные B_k и C_k определяются методом неопределенных коэффициентов.

10°. Для правой части $g(x) = \cos(\lambda x) \sum_{k=1}^n A_k \exp(\mu_k x)$ решение уравнения имеет вид

$$y(x) = \cos(\lambda x) \sum_{k=1}^n B_k \exp(\mu_k x) + \sin(\lambda x) \sum_{k=1}^n C_k \exp(\mu_k x),$$

где постоянные B_k и C_k определяются методом неопределенных коэффициентов.

11°. Для правой части $g(x) = \sin(\lambda x) \sum_{k=1}^n A_k \exp(\mu_k x)$ решение уравнения имеет вид

$$y(x) = \cos(\lambda x) \sum_{k=1}^n B_k \exp(\mu_k x) + \sin(\lambda x) \sum_{k=1}^n C_k \exp(\mu_k x),$$

где постоянные B_k и C_k определяются методом неопределенных коэффициентов.

$$39. \int_a^b f(t)y(x + \beta t) dt = Ax + B.$$

Решение:

$$y(x) = px + q,$$

где коэффициенты p и q вычисляются по формулам

$$p = \frac{A}{I_0}, \quad q = \frac{B}{I_0} - \frac{AI_1\beta}{I_0^2}, \quad I_0 = \int_a^b f(t) dt, \quad I_1 = \int_a^b t f(t) dt.$$

$$40. \int_a^b f(t)y(x + \beta t) dt = Ae^{\lambda x}.$$

Решение:

$$y(x) = \frac{A}{B}e^{\lambda x}, \quad B = \int_a^b f(t) \exp(\lambda \beta t) dt.$$

$$41. \int_a^b f(t)y(x + \beta t) dt = A \sin \lambda x + B \cos \lambda x.$$

Решение:

$$y(x) = p \sin \lambda x + q \cos \lambda x,$$

где коэффициенты p и q вычисляются по формулам

$$p = \frac{AI_c + BI_s}{I_c^2 + I_s^2}, \quad q = \frac{BI_c - AI_s}{I_c^2 + I_s^2},$$

$$I_c = \int_a^b f(t) \cos(\lambda \beta t) dt, \quad I_s = \int_a^b f(t) \sin(\lambda \beta t) dt.$$

$$42. \int_0^1 y(\xi) dt = f(x), \quad \xi = g(x)t.$$

Считаем, что $g(0) = 0$, $g(1) = 1$, $g'_x \geq 0$.

1°. Замена $z = g(x)$ приводит к уравнению вида 3.1.41: $\int_0^1 y(zt) dt = F(z)$, где функция $F(z)$ находится путем исключения x из равенств $z = g(x)$, $F = f(x)$.

2°. Решение $y = y(z)$, записанное в параметрическом виде:

$$y(z) = \frac{g(x)}{g'_x(x)} f'_x(x) + f(x), \quad z = g(x).$$

$$43. \int_0^1 t^\lambda y(\xi) dt = f(x), \quad \xi = g(x)t.$$

Считаем, что $g(0) = 0$, $g(1) = 1$, $g'_x \geq 0$.

1°. Замена $z = g(x)$ приводит к уравнению вида 3.1.42: $\int_0^1 t^\lambda y(zt) dt = F(z)$, где функция $F(z)$ находится путем исключения x из равенств $z = g(x)$, $F = f(x)$.

2°. Решение $y = y(z)$, записанное в параметрическом виде:

$$y(z) = \frac{g(x)}{g'_x(x)} f'_x(x) + (\lambda + 1)f(x), \quad z = g(x).$$

$$44. \int_a^b f(t)y(\xi) dt = Ax^\beta, \quad \xi = x\varphi(t).$$

Решение:

$$y(x) = \frac{A}{B}x^\beta, \quad B = \int_a^b f(t)[\varphi(t)]^\beta dt. \quad (1)$$

$$45. \int_a^b f(t)y(\xi) dt = g(x), \quad \xi = x\varphi(t).$$

1°. Для правой части $g(x) = \sum_{k=0}^n A_k x^k$ решение уравнения имеет вид

$$y(x) = \sum_{k=0}^n \frac{A_k}{B_k} x^k, \quad B_k = \int_a^b f(t)[\varphi(t)]^k dt.$$

2°. Для правой части $g(x) = \sum_{k=0}^n A_k x^{\lambda_k}$ решение уравнения имеет вид

$$y(x) = \sum_{k=0}^n \frac{A_k}{B_k} x^{\lambda_k}, \quad B_k = \int_a^b f(t)[\varphi(t)]^{\lambda_k} dt.$$

3°. Для правой части уравнения $g(x) = \ln x \sum_{k=0}^n A_k x^k$ решение имеет вид

$$y(x) = \ln x \sum_{k=0}^n B_k x^k + \sum_{k=0}^n C_k x^k,$$

где постоянные B_k и C_k определяются методом неопределенных коэффициентов.

4°. Для правой части $g(x) = \sum_{k=0}^n A_k (\ln x)^k$ решение уравнения имеет вид

$$y(x) = \sum_{k=0}^n B_k (\ln x)^k,$$

где постоянные B_k определяются методом неопределенных коэффициентов.

5°. Для правой части $g(x) = \sum_{k=1}^n A_k \cos(\lambda_k \ln x)$ решение уравнения имеет вид

$$y(x) = \sum_{k=1}^n B_k \cos(\lambda_k \ln x) + \sum_{k=1}^n C_k \sin(\lambda_k \ln x),$$

где постоянные B_k и C_k определяются методом неопределенных коэффициентов.

6°. Для правой части $g(x) = \sum_{k=1}^n A_k \sin(\lambda_k \ln x)$ решение уравнения имеет вид

$$y(x) = \sum_{k=1}^n B_k \cos(\lambda_k \ln x) + \sum_{k=1}^n C_k \sin(\lambda_k \ln x),$$

где постоянные B_k и C_k определяются методом неопределенных коэффициентов.

$$46. \int_a^b f(t)y(\xi) dt = g(x), \quad \xi = x + \varphi(t).$$

1°. Для правой части $g(x) = \sum_{k=1}^n A_k \exp(\lambda_k x)$ решение уравнения имеет вид

$$y(x) = \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{B_k} \exp(\lambda_k x), \quad B_k = \int_a^b f(t) \exp[\lambda_k \varphi(t)] dt.$$

2°. Для полиномиальной правой части уравнения $g(x) = \sum_{k=0}^n A_k x^k$ решение имеет вид

$$y(x) = \sum_{k=0}^n B_k x^k,$$

где постоянные B_k определяются методом неопределенных коэффициентов.

3°. Для правой части $g(x) = e^{\lambda x} \sum_{k=0}^n A_k x^k$ решение уравнения имеет вид

$$y(x) = e^{\lambda x} \sum_{k=0}^n B_k x^k,$$

где постоянные B_k определяются методом неопределенных коэффициентов.

4°. Для правой части $g(x) = \sum_{k=1}^n A_k \cos(\lambda_k x)$ решение уравнения имеет вид

$$y(x) = \sum_{k=1}^n B_k \cos(\lambda_k x) + \sum_{k=1}^n C_k \sin(\lambda_k x),$$

где постоянные B_k и C_k определяются методом неопределенных коэффициентов.

5°. Для правой части $g(x) = \sum_{k=1}^n A_k \sin(\lambda_k x)$ решение уравнения имеет вид

$$y(x) = \sum_{k=1}^n B_k \cos(\lambda_k x) + \sum_{k=1}^n C_k \sin(\lambda_k x),$$

где постоянные B_k и C_k определяются методом неопределенных коэффициентов.

6°. Для правой части $g(x) = \cos(\lambda x) \sum_{k=0}^n A_k x^k$ решение уравнения имеет вид

$$y(x) = \cos(\lambda x) \sum_{k=0}^n B_k x^k + \sin(\lambda x) \sum_{k=0}^n C_k x^k,$$

где постоянные B_k и C_k определяются методом неопределенных коэффициентов.

7°. Для правой части $g(x) = \sin(\lambda x) \sum_{k=0}^n A_k x^k$ решение уравнения имеет вид

$$y(x) = \cos(\lambda x) \sum_{k=0}^n B_k x^k + \sin(\lambda x) \sum_{k=0}^n C_k x^k,$$

где постоянные B_k и C_k определяются методом неопределенных коэффициентов.

8°. Для правой части $g(x) = e^{\mu x} \sum_{k=1}^n A_k \cos(\lambda_k x)$ решение уравнения имеет вид

$$y(x) = e^{\mu x} \sum_{k=1}^n B_k \cos(\lambda_k x) + e^{\mu x} \sum_{k=1}^n C_k \sin(\lambda_k x),$$

где постоянные B_k и C_k определяются методом неопределенных коэффициентов.

9°. Для правой части $g(x) = e^{\mu x} \sum_{k=1}^n A_k \sin(\lambda_k x)$ решение уравнения имеет вид

$$y(x) = e^{\mu x} \sum_{k=1}^n B_k \cos(\lambda_k x) + e^{\mu x} \sum_{k=1}^n C_k \sin(\lambda_k x),$$

где постоянные B_k и C_k определяются методом неопределенных коэффициентов.

10°. Для правой части $g(x) = \cos(\lambda x) \sum_{k=1}^n A_k \exp(\mu_k x)$ решение уравнения имеет вид

$$y(x) = \cos(\lambda x) \sum_{k=1}^n B_k \exp(\mu_k x) + \sin(\lambda x) \sum_{k=1}^n C_k \exp(\mu_k x),$$

где постоянные B_k и C_k определяются методом неопределенных коэффициентов.

11°. Для правой части $g(x) = \sin(\lambda x) \sum_{k=1}^n A_k \exp(\mu_k x)$ решение уравнения имеет вид

$$y(x) = \cos(\lambda x) \sum_{k=1}^n B_k \exp(\mu_k x) + \sin(\lambda x) \sum_{k=1}^n C_k \exp(\mu_k x),$$

где постоянные B_k и C_k определяются методом неопределенных коэффициентов.

4. Линейные уравнения второго рода с постоянными пределами интегрирования

► **Обозначения:** $f = f(x)$, $g = g(x)$, $h = h(x)$, $v = v(x)$, $w = w(x)$, $K = K(x)$ — произвольные функции $A, B, C, D, E, a, b, c, l, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda, \mu, \nu$ — свободные параметры; n — целое неотрицательное число; i — мнимая единица.

► **Предварительные замечания.** Число λ называется *характеристическим значением* или *характеристическим числом* интегрального уравнения

$$y(x) - \lambda \int_a^b K(x, t)y(t) dt = f(x),$$

если существуют нетривиальные решения соответствующего однородного уравнения ($f(x) \equiv 0$). Сами же эти нетривиальные решения называются *собственными функциями* интегрального уравнения, соответствующими характеристическому значению λ . Если λ есть характеристическое значение, то число $1/\lambda$ называется *собственным значением* или *собственным числом* интегрального уравнения. Правильным значением параметра λ называется такое его значение, при котором упомянутое однородное уравнение имеет только тривиальное решение. Иногда характеристические значения и собственные функции интегрального уравнения Фредгольма называют характеристическими значениями и собственными функциями ядра $K(x, t)$. В приведенном выше уравнении обычно считается, что $a \leq x \leq b$.

4.1. Уравнения, ядра которых содержат степенные функции

4.1-1. Ядра уравнений линейны по аргументам x, t

1. $y(x) - \lambda \int_a^b (x - t)y(t) dt = f(x).$

Решение (при любом действительном λ):

$$y(x) = f(x) + \lambda(A_1x + A_2),$$

где постоянные A_1 и A_2 вычисляются по формулам

$$A_1 = \frac{12f_1 + 6\lambda(f_1\Delta_2 - 2f_2\Delta_1)}{\lambda^2\Delta_1^4 + 12}, \quad A_2 = \frac{-12f_2 + 2\lambda(3f_2\Delta_2 - 2f_1\Delta_3)}{\lambda^2\Delta_1^4 + 12},$$

$$f_1 = \int_a^b f(x) dx, \quad f_2 = \int_a^b xf(x) dx, \quad \Delta_n = b^n - a^n.$$

2. $y(x) - \lambda \int_a^b (x + t)y(t) dt = f(x).$

Характеристические значения уравнения:

$$\lambda_1 = \frac{6(b+a) + 4\sqrt{3(a^2+ab+b^2)}}{(a-b)^3}, \quad \lambda_2 = \frac{6(b+a) - 4\sqrt{3(a^2+ab+b^2)}}{(a-b)^3}.$$

1°. Решение при $\lambda \neq \lambda_{1,2}$:

$$y(x) = f(x) + \lambda(A_1x + A_2),$$

где постоянные A_1 и A_2 вычисляются по формулам

$$A_1 = \frac{12f_1 - 6\lambda(f_1\Delta_2 - 2f_2\Delta_1)}{12 - 12\lambda\Delta_2 - \lambda^2\Delta_1^4}, \quad A_2 = \frac{12f_2 - 2\lambda(3f_2\Delta_2 - 2f_1\Delta_3)}{12 - 12\lambda\Delta_2 - \lambda^2\Delta_1^4},$$

$$f_1 = \int_a^b f(x) dx, \quad f_2 = \int_a^b xf(x) dx, \quad \Delta_n = b^n - a^n.$$

2°. Решение при $\lambda = \lambda_1 \neq \lambda_2$ и $f_1 = f_2 = 0$:

$$y(x) = f(x) + Cy_1(x),$$

где C — произвольная постоянная, а $y_1(x)$ — собственная функция уравнения, соответствующая характеристическому значению λ_1 :

$$y_1(x) = x + \frac{1}{\lambda_1(b-a)} - \frac{b+a}{2}.$$

3°. Решение при $\lambda = \lambda_2 \neq \lambda_1$ и $f_1 = f_2 = 0$ получается из формул п. 2° заменой λ_1 и $y_1(x)$ соответственно на λ_2 и $y_2(x)$.

4°. Уравнение не имеет кратных характеристических значений.

$$3. \quad y(x) - \lambda \int_a^b (Ax + Bt)y(t) dt = f(x).$$

Характеристические значения уравнения:

$$\lambda_{1,2} = \frac{3(A+B)(b+a) \pm \sqrt{9(A-B)^2(b+a)^2 + 48AB(a^2 + ab + b^2)}}{AB(a-b)^3}.$$

1°. Решение при $\lambda \neq \lambda_{1,2}$:

$$y(x) = f(x) + \lambda(A_1x + A_2),$$

где постоянные A_1 и A_2 вычисляются по формулам

$$A_1 = \frac{12Af_1 - 6AB\lambda(f_1\Delta_2 - 2f_2\Delta_1)}{12 - 6(A+B)\lambda\Delta_2 - AB\lambda^2\Delta_1^4}, \quad A_2 = \frac{12Bf_2 - 2AB\lambda(3f_2\Delta_2 - 2f_1\Delta_3)}{12 - 6(A+B)\lambda\Delta_2 - AB\lambda^2\Delta_1^4},$$

$$f_1 = \int_a^b f(x) dx, \quad f_2 = \int_a^b xf(x) dx, \quad \Delta_n = b^n - a^n.$$

2°. Решение при $\lambda = \lambda_1 \neq \lambda_2$ и $f_1 = f_2 = 0$:

$$y(x) = f(x) + Cy_1(x),$$

где C — произвольная постоянная, а $y_1(x)$ — собственная функция уравнения, соответствующая характеристическому значению λ_1 :

$$y_1(x) = x + \frac{1}{\lambda_1 A(b-a)} - \frac{b+a}{2}.$$

3°. Решение при $\lambda = \lambda_2 \neq \lambda_1$ и $f_1 = f_2 = 0$ получается из формул п. 2° заменой λ_1 и $y_1(x)$ соответственно на λ_2 и $y_2(x)$.

4°. Решение при $\lambda = \lambda_{1,2} = \lambda_*$ и $f_1 = f_2 = 0$, где $\lambda_* = \frac{4}{(A+B)(b^2 - a^2)}$ — двукратное характеристическое значение:

$$y(x) = f(x) + Cy_*(x).$$

Здесь C — произвольная постоянная, а $y_*(x)$ — собственная функция уравнения, соответствующая λ_* :

$$y_*(x) = x - \frac{(A-B)(b+a)}{4A}.$$

$$4. \quad y(x) - \lambda \int_a^b [A + B(x-t)]y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.8 при $h(t) = 1$.

Решение:

$$y(x) = f(x) + \lambda(A_1 + A_2x),$$

где A_1 и A_2 — постоянные, которые можно определить с помощью формул, указанных в 4.9.8.

$$5. \quad y(x) - \lambda \int_a^b (Ax + Bt + C)y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.7 при $g(x) = x$, $h(t) = 1$.

Решение:

$$y(x) = f(x) + \lambda(A_1x + A_2),$$

где A_1 и A_2 — постоянные, которые можно определить с помощью формул, указанных в 4.9.7.

$$6. \quad y(x) + A \int_a^b |x - t| y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.36 при $g(t) = A$.

1°. Функция $y = y(x)$ удовлетворяет линейному неоднородному обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка с постоянными коэффициентами

$$y''_{xx} + 2Ay = f''_{xx}(x). \quad (1)$$

Граничные условия для уравнения (1) имеют следующий вид (см. 4.9.36):

$$\begin{aligned} y'_x(a) + y'_x(b) &= f'_x(a) + f'_x(b), \\ y(a) + y(b) + (b - a)y'_x(a) &= f(a) + f(b) + (b - a)f'_x(a). \end{aligned} \quad (2)$$

Уравнение (1) вместе с граничными условиями (2) описывает решение исходного интегрального уравнения.

2°. При $A < 0$ общее решение уравнения (1) дается формулой

$$y(x) = C_1 \operatorname{ch}(kx) + C_2 \operatorname{sh}(kx) + f(x) + k \int_a^x \operatorname{sh}[k(x - t)]f(t) dt, \quad k = \sqrt{-2A}, \quad (3)$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

При $A > 0$ общее решение уравнения (1) дается формулой

$$y(x) = C_1 \cos(kx) + C_2 \sin(kx) + f(x) - k \int_a^x \sin[k(x - t)]f(t) dt, \quad k = \sqrt{2A}. \quad (4)$$

Условия (2) позволяют найти постоянные интегрирования C_1, C_2 в решениях (3) и (4).

3°. В частном случае $a = 0, A > 0$ решение интегрального уравнения определяется по формуле (4), где

$$\begin{aligned} C_1 &= k \frac{I_s(1 + \cos \lambda) - I_c(\lambda + \sin \lambda)}{2 + 2 \cos \lambda + \lambda \sin \lambda}, & C_2 &= k \frac{I_s \sin \lambda + I_c(1 + \cos \lambda)}{2 + 2 \cos \lambda + \lambda \sin \lambda}, \\ k &= \sqrt{2A}, \quad \lambda = bk, \quad I_s = \int_0^b \sin[k(b - t)]f(t) dt, \quad I_c = \int_0^b \cos[k(b - t)]f(t) dt. \end{aligned}$$

4.1-2. Ядра уравнений квадратичны по аргументам x, t

$$7. \quad y(x) - \lambda \int_a^b (x^2 + t^2)y(t) dt = f(x).$$

Характеристические значения уравнения:

$$\lambda_1 = \frac{1}{\frac{1}{3}(b^3 - a^3) + \sqrt{\frac{1}{5}(b^5 - a^5)(b - a)}}, \quad \lambda_2 = \frac{1}{\frac{1}{3}(b^3 - a^3) - \sqrt{\frac{1}{5}(b^5 - a^5)(b - a)}}.$$

1°. Решение при $\lambda \neq \lambda_{1,2}$:

$$y(x) = f(x) + \lambda(A_1 x^2 + A_2),$$

где постоянные A_1 и A_2 вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{f_1 - \lambda(\frac{1}{3}f_1\Delta_3 - f_2\Delta_1)}{\lambda^2(\frac{1}{9}\Delta_3^2 - \frac{1}{5}\Delta_1\Delta_5) - \frac{2}{3}\lambda\Delta_3 + 1}, & A_2 &= \frac{f_2 - \lambda(\frac{1}{3}f_2\Delta_3 - \frac{1}{5}f_1\Delta_5)}{\lambda^2(\frac{1}{9}\Delta_3^2 - \frac{1}{5}\Delta_1\Delta_5) - \frac{2}{3}\lambda\Delta_3 + 1}, \\ f_1 &= \int_a^b f(x) dx, & f_2 &= \int_a^b x^2 f(x) dx, & \Delta_n &= b^n - a^n. \end{aligned}$$

2°. Решение при $\lambda = \lambda_1 \neq \lambda_2$ и $f_1 = f_2 = 0$:

$$y(x) = f(x) + Cy_1(x), \quad y_1(x) = x^2 + \sqrt{\frac{b^5 - a^5}{5(b - a)}},$$

где C — произвольная постоянная, а $y_1(x)$ — собственная функция уравнения, соответствующая характеристическому значению λ_1 .

3°. Решение при $\lambda = \lambda_2 \neq \lambda_1$ и $f_1 = f_2 = 0$:

$$y(x) = f(x) + Cy_2(x), \quad y_2(x) = x^2 - \sqrt{\frac{b^5 - a^5}{5(b-a)}},$$

где C — произвольная постоянная, а $y_2(x)$ — собственная функция уравнения, соответствующая характеристическому значению λ_2 .

4°. Уравнение не имеет кратных характеристических значений.

8. $y(x) - \lambda \int_a^b (x^2 - t^2)y(t) dt = f(x).$

Характеристические значения уравнения:

$$\lambda_{1,2} = \pm \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{9}(b^3 - a^3)^2 - \frac{1}{5}(b^5 - a^5)(b-a)}}.$$

1°. Решение при $\lambda \neq \lambda_{1,2}$:

$$y(x) = f(x) + \lambda(A_1x^2 + A_2),$$

где постоянные A_1 и A_2 вычисляются по формулам

$$A_1 = \frac{f_1 + \lambda(\frac{1}{3}f_1\Delta_3 - f_2\Delta_1)}{\lambda^2(\frac{1}{5}\Delta_1\Delta_5 - \frac{1}{9}\Delta_2^2) + 1}, \quad A_2 = \frac{-f_2 + \lambda(\frac{1}{3}f_2\Delta_3 - \frac{1}{5}f_1\Delta_5)}{\lambda^2(\frac{1}{5}\Delta_1\Delta_5 - \frac{1}{9}\Delta_2^2) + 1},$$

$$f_1 = \int_a^b f(x) dx, \quad f_2 = \int_a^b x^2 f(x) dx, \quad \Delta_n = b^n - a^n.$$

2°. Решение при $\lambda = \lambda_1 \neq \lambda_2$ и $f_1 = f_2 = 0$:

$$y(x) = f(x) + Cy_1(x), \quad y_1(x) = x^2 + \frac{3 - \lambda_1(b^3 - a^3)}{3\lambda_1(b-a)},$$

где C — произвольная постоянная, а $y_1(x)$ — собственная функция уравнения, соответствующая характеристическому значению λ_1 .

3°. Решение при $\lambda = \lambda_2 \neq \lambda_1$ и $f_1 = f_2 = 0$ получается из формул п. 2° заменой λ_1 и $y_1(x)$ соответственно на λ_2 и $y_2(x)$.

4°. Уравнение не имеет кратных характеристических значений.

9. $y(x) - \lambda \int_a^b (Ax^2 + Bt^2)y(t) dt = f(x).$

Характеристические значения уравнения:

$$\lambda_{1,2} = \frac{\frac{1}{3}(A+B)\Delta_3 \pm \sqrt{\frac{1}{9}(A-B)^2\Delta_3^2 + \frac{4}{5}AB\Delta_1\Delta_5}}{2AB(\frac{1}{9}\Delta_3^2 - \frac{1}{5}\Delta_1\Delta_5)}, \quad \Delta_n = b^n - a^n.$$

1°. Решение при $\lambda \neq \lambda_{1,2}$:

$$y(x) = f(x) + \lambda(A_1x^2 + A_2),$$

где постоянные A_1 и A_2 вычисляются по формулам

$$A_1 = \frac{Af_1 - AB\lambda(\frac{1}{3}f_1\Delta_3 - f_2\Delta_1)}{AB\lambda^2(\frac{1}{9}\Delta_3^2 - \frac{1}{5}\Delta_1\Delta_5) - \frac{1}{3}(A+B)\lambda\Delta_3 + 1},$$

$$A_2 = \frac{Bf_2 - AB\lambda(\frac{1}{3}f_2\Delta_3 - \frac{1}{5}f_1\Delta_5)}{AB\lambda^2(\frac{1}{9}\Delta_3^2 - \frac{1}{5}\Delta_1\Delta_5) - \frac{1}{3}(A+B)\lambda\Delta_3 + 1},$$

$$f_1 = \int_a^b f(x) dx, \quad f_2 = \int_a^b x^2 f(x) dx.$$

2°. Решение при $\lambda = \lambda_1 \neq \lambda_2$ и $f_1 = f_2 = 0$:

$$y(x) = f(x) + Cy_1(x), \quad y_1(x) = x^2 + \frac{3 - \lambda_1 A(b^3 - a^3)}{3\lambda_1 A(b-a)},$$

где C — произвольная постоянная, а $y_1(x)$ — собственная функция уравнения, соответствующая характеристическому значению λ_1 .

3°. Решение при $\lambda = \lambda_2 \neq \lambda_1$ и $f_1 = f_2 = 0$ получается из формул п. 2° заменой λ_1 и $y_1(x)$ соответственно на λ_2 и $y_2(x)$.

4°. Решение при $\lambda = \lambda_{1,2} = \lambda_*$ и $f_1 = f_2 = 0$, где $\lambda_* = \frac{6}{(A+B)(b^3-a^3)}$ — двукратное характеристическое значение:

$$y(x) = f(x) + C_1 y_*(x).$$

Здесь C_1 — произвольная постоянная, а $y_*(x)$ — собственная функция уравнения, соответствующая λ_* :

$$y_*(x) = x^2 - \frac{(A-B)(b^3-a^3)}{6A(b-a)}.$$

10. $y(x) - \lambda \int_a^b (xt - t^2)y(t) dt = f(x).$

Частный случай уравнения 4.9.8 при $A = 0, B = 1, h(t) = t$.

Решение:

$$y(x) = f(x) + \lambda(A_1 + A_2x),$$

где A_1 и A_2 — постоянные, которые можно определить с помощью формул, указанных в 4.9.8.

11. $y(x) - \lambda \int_a^b (x^2 - xt)y(t) dt = f(x).$

Частный случай уравнения 4.9.10 при $A = 0, B = 1, h(x) = x$.

Решение:

$$y(x) = f(x) + \lambda(E_1x^2 + E_2x),$$

где E_1 и E_2 — постоянные, которые можно определить с помощью формул, указанных в 4.9.10.

12. $y(x) - \lambda \int_a^b (Bxt + Ct^2)y(t) dt = f(x).$

Частный случай уравнения 4.9.9 при $A = 0, h(t) = t$.

Решение:

$$y(x) = f(x) + \lambda(A_1 + A_2x),$$

где A_1 и A_2 — постоянные, которые можно определить с помощью формул, указанных в 4.9.9.

13. $y(x) - \lambda \int_a^b (Bx^2 + Cxt)y(t) dt = f(x).$

Частный случай уравнения 4.9.11 при $A = 0, h(x) = x$.

Решение:

$$y(x) = f(x) + \lambda(A_1x^2 + A_2x),$$

где A_1 и A_2 — постоянные, которые можно определить с помощью формул, указанных в 4.9.11.

14. $y(x) - \lambda \int_a^b (Axt + Bx^2 + Cx + D)y(t) dt = f(x).$

Частный случай уравнения 4.9.18 при $g_1(x) = Bx^2 + Cx + D, h_1(t) = 1, g_2(x) = x, h_2(t) = At$.

Решение:

$$y(x) = f(x) + \lambda[A_1(Bx^2 + Cx + D) + A_2x],$$

где A_1 и A_2 — постоянные, которые можно определить с помощью формул, указанных в 4.9.18.

15. $y(x) - \lambda \int_a^b (Ax^2 + Bt^2 + Cx + Dt + E)y(t) dt = f(x).$

Частный случай уравнения 4.9.18 при $g_1(x) = Ax^2 + Cx, h_1(t) = 1, g_2(x) = 1, h_2(t) = Bt^2 + Dt + E$.

Решение:

$$y(x) = f(x) + \lambda[A_1(Ax^2 + Cx) + A_2],$$

где A_1 и A_2 — постоянные, которые можно определить с помощью формул, указанных в 4.9.18.

$$16. \quad y(x) - \lambda \int_a^b [Ax + B + (Cx + D)(x - t)]y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.18 при $g_1(x) = Cx^2 + (A+D)x + B$, $h_1(t) = 1$, $g_2(x) = Cx + D$, $h_2(t) = -t$.

Решение:

$$y(x) = f(x) + \lambda[A_1(Cx^2 + Ax + Dx + B) + A_2(Cx + D)],$$

где A_1 и A_2 — постоянные, которые можно определить с помощью формул, указанных в 4.9.18.

$$17. \quad y(x) - \lambda \int_a^b [At + B + (Ct + D)(t - x)]y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.18 при $g_1(x) = 1$, $h_1(t) = Ct^2 + (A + D)t + B$, $g_2(x) = x$, $h_2(t) = -(Ct + D)$.

Решение:

$$y(x) = f(x) + \lambda(A_1 + A_2x),$$

где A_1 и A_2 — постоянные, которые можно определить с помощью формул, указанных в 4.9.18.

$$18. \quad y(x) - \lambda \int_a^b (x - t)^2 y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.19 при $g(x) = x$, $h(t) = -t$, $m = 2$.

$$19. \quad y(x) - \lambda \int_a^b (Ax + Bt)^2 y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.19 при $g(x) = Ax$, $h(t) = Bt$, $m = 2$.

4.1-3. Ядра уравнений в виде кубических полиномов по аргументам x, t

$$20. \quad y(x) - \lambda \int_a^b (x^3 + t^3)y(t) dt = f(x).$$

Характеристические значения уравнения:

$$\lambda_1 = \frac{1}{\frac{1}{4}(b^4 - a^4) + \sqrt{\frac{1}{7}(b^7 - a^7)(b - a)}}, \quad \lambda_2 = \frac{1}{\frac{1}{4}(b^4 - a^4) - \sqrt{\frac{1}{7}(b^7 - a^7)(b - a)}}.$$

1°. Решение при $\lambda \neq \lambda_{1,2}$:

$$y(x) = f(x) + \lambda(A_1x^3 + A_2),$$

где постоянные A_1 и A_2 вычисляются по формулам

$$A_1 = \frac{f_1 - \lambda(\frac{1}{4}f_1\Delta_4 - f_2\Delta_1)}{\lambda^2(\frac{1}{16}\Delta_4^2 - \frac{1}{7}\Delta_1\Delta_7) - \frac{1}{2}\lambda\Delta_4 + 1}, \quad A_2 = \frac{f_2 - \lambda(\frac{1}{4}f_2\Delta_4 - \frac{1}{7}f_1\Delta_7)}{\lambda^2(\frac{1}{16}\Delta_4^2 - \frac{1}{7}\Delta_1\Delta_7) - \frac{1}{2}\lambda\Delta_4 + 1},$$

$$f_1 = \int_a^b f(x) dx, \quad f_2 = \int_a^b x^3 f(x) dx, \quad \Delta_n = b^n - a^n.$$

2°. Решение при $\lambda = \lambda_1 \neq \lambda_2$ и $f_1 = f_2 = 0$:

$$y(x) = f(x) + Cy_1(x), \quad y_1(x) = x^3 + \sqrt{\frac{b^7 - a^7}{7(b - a)}},$$

где C — произвольная постоянная, а $y_1(x)$ — собственная функция уравнения, соответствующая характеристическому значению λ_1 .

3°. Решение при $\lambda = \lambda_2 \neq \lambda_1$ и $f_1 = f_2 = 0$:

$$y(x) = f(x) + Cy_2(x), \quad y_2(x) = x^3 - \sqrt{\frac{b^7 - a^7}{7(b - a)}},$$

где C — произвольная постоянная, а $y_2(x)$ — собственная функция ядра, соответствующая характеристическому значению λ_2 .

4°. Уравнение не имеет кратных характеристических значений.

$$21. \quad y(x) - \lambda \int_a^b (x^3 - t^3)y(t) dt = f(x).$$

Характеристические значения уравнения:

$$\lambda_{1,2} = \pm \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}(a^4 - b^4)^2 - \frac{1}{7}(a^7 - b^7)(b - a)}}.$$

1°. Решение при $\lambda \neq \lambda_{1,2}$:

$$y(x) = f(x) + \lambda(A_1 x^3 + A_2),$$

где постоянные A_1 и A_2 вычисляются по формулам

$$A_1 = \frac{f_1 + \lambda(\frac{1}{4}f_1\Delta_4 - f_2\Delta_1)}{\lambda^2(\frac{1}{7}\Delta_1\Delta_7 - \frac{1}{16}\Delta_4^2) + 1}, \quad A_2 = \frac{-f_2 + \lambda(\frac{1}{4}f_2\Delta_4 - \frac{1}{7}f_1\Delta_7)}{\lambda^2(\frac{1}{7}\Delta_1\Delta_7 - \frac{1}{16}\Delta_4^2) + 1},$$

$$f_1 = \int_a^b f(x) dx, \quad f_2 = \int_a^b x^3 f(x) dx, \quad \Delta_n = b^n - a^n.$$

2°. Решение при $\lambda = \lambda_1 \neq \lambda_2$ и $f_1 = f_2 = 0$:

$$y(x) = f(x) + Cy_1(x), \quad y_1(x) = x^3 + \frac{4 - \lambda_1(b^4 - a^4)}{4\lambda_1(b - a)},$$

где C — произвольная постоянная, а $y_1(x)$ — собственная функция уравнения, соответствующая характеристическому значению λ_1 .

3°. Решение при $\lambda = \lambda_2 \neq \lambda_1$ и $f_1 = f_2 = 0$ получается из формул п. 2° заменой λ_1 и $y_1(x)$ соответственно на λ_2 и $y_2(x)$.

4°. Уравнение не имеет кратных характеристических значений.

$$22. \quad y(x) - \lambda \int_a^b (Ax^3 + Bt^3)y(t) dt = f(x).$$

Характеристические значения уравнения:

$$\lambda_{1,2} = \frac{\frac{1}{4}(A+B)\Delta_4 \pm \sqrt{\frac{1}{16}(A-B)^2\Delta_4^2 + \frac{4}{7}AB\Delta_1\Delta_7}}{2AB(\frac{1}{16}\Delta_4^2 - \frac{1}{7}\Delta_1\Delta_7)}, \quad \Delta_n = b^n - a^n.$$

1°. Решение при $\lambda \neq \lambda_{1,2}$:

$$y(x) = f(x) + \lambda(A_1 x^3 + A_2),$$

где постоянные A_1 и A_2 вычисляются по формулам

$$A_1 = \frac{Af_1 - AB\lambda(\frac{1}{4}f_1\Delta_4 - f_2\Delta_1)}{AB\lambda^2(\frac{1}{16}\Delta_4^2 - \frac{1}{7}\Delta_1\Delta_7) - \frac{1}{4}\lambda(A+B)\Delta_4 + 1},$$

$$A_2 = \frac{Bf_2 - AB\lambda(\frac{1}{4}f_2\Delta_4 - \frac{1}{7}f_1\Delta_7)}{AB\lambda^2(\frac{1}{16}\Delta_4^2 - \frac{1}{7}\Delta_1\Delta_7) - \frac{1}{4}\lambda(A+B)\Delta_4 + 1},$$

$$f_1 = \int_a^b f(x) dx, \quad f_2 = \int_a^b x^3 f(x) dx.$$

2°. Решение при $\lambda = \lambda_1 \neq \lambda_2$ и $f_1 = f_2 = 0$:

$$y(x) = f(x) + Cy_1(x), \quad y_1(x) = x^3 + \frac{4 - \lambda_1 A(b^4 - a^4)}{4\lambda_1 A(b - a)},$$

где C — произвольная постоянная, а $y_1(x)$ — собственная функция уравнения, соответствующая характеристическому значению λ_1 .

3°. Решение при $\lambda = \lambda_2 \neq \lambda_1$ и $f_1 = f_2 = 0$ получается из формул п. 2° заменой λ_1 и $y_1(x)$ соответственно на λ_2 и $y_2(x)$.

4°. Решение при $\lambda = \lambda_{1,2} = \lambda_*$ и $f_1 = f_2 = 0$, где $\lambda_* = \frac{8}{(A+B)(b^4 - a^4)}$ — двукратное характеристическое значение:

$$y(x) = f(x) + Cy_*(x), \quad y_*(x) = x^3 - \frac{(A-B)(b^4 - a^4)}{8A(b-a)}.$$

Здесь C — произвольная постоянная, а $y_*(x)$ — собственная функция уравнения, соответствующая λ_* .

$$23. \quad y(x) - \lambda \int_a^b (xt^2 - t^3)y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.8 при $A = 0$, $B = 1$, $h(t) = t^2$.

Решение:

$$y(x) = f(x) + \lambda(A_1 + A_2x),$$

где A_1 и A_2 — постоянные, которые можно определить с помощью формул, указанных в 4.9.8.

$$24. \quad y(x) - \lambda \int_a^b (Bxt^2 + Ct^3)y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.9 при $A = 0$, $h(t) = t^2$.

Решение:

$$y(x) = f(x) + \lambda(A_1 + A_2x),$$

где A_1 и A_2 — постоянные, которые можно определить с помощью формул, указанных в 4.9.9.

$$25. \quad y(x) - \lambda \int_a^b (Ax^2t + Bxt^2)y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.17 при $g(x) = x^2$, $h(x) = x$.

Решение:

$$y(x) = f(x) + \lambda(A_1x^2 + A_2x),$$

где A_1 и A_2 — постоянные, которые можно определить с помощью формул, указанных в 4.9.17.

$$26. \quad y(x) - \lambda \int_a^b (Ax^3 + Bxt^2)y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.18 при $g_1(x) = x^3$, $h_1(t) = A$, $g_2(x) = x$, $h_2(t) = Bt^2$.

Решение:

$$y(x) = f(x) + \lambda(A_1x^3 + A_2x),$$

где A_1 и A_2 — постоянные, которые можно определить с помощью формул, указанных в 4.9.18.

$$27. \quad y(x) - \lambda \int_a^b (Ax^3 + Bx^2t + Cx^2 + D)y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.18 при $g_1(x) = Ax^3 + Cx^2 + D$, $h_1(t) = 1$, $g_2(x) = x^2$, $h_2(t) = Bt$.

Решение:

$$y(x) = f(x) + \lambda[A_1(Ax^3 + Cx^2 + D) + A_2x^2],$$

где A_1 и A_2 — постоянные, которые можно определить с помощью формул, указанных в 4.9.18.

$$28. \quad y(x) - \lambda \int_a^b (Axt^2 + Bt^3 + Ct^2 + D)y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.18 при $h_1(t) = At^2$, $g_1(x) = x$, $h_2(t) = Bt^3 + Ct^2 + D$, $g_2(x) = 1$.

Решение:

$$y(x) = f(x) + \lambda(A_1x + A_2),$$

где A_1 и A_2 — постоянные, которые можно определить с помощью формул, указанных в 4.9.18.

$$29. \quad y(x) - \lambda \int_a^b (x - t)^3 y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.19 при $g(x) = x$, $h(t) = -t$, $m = 3$.

$$30. \quad y(x) - \lambda \int_a^b (Ax + Bt)^3 y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.19 при $g(x) = Ax$, $h(t) = Bt$, $m = 3$.

4.1-4. Ядра уравнений в виде полиномов более высокой степени

$$31. \quad y(x) - \lambda \int_a^b (x^n + t^n) y(t) dt = f(x), \quad n = 1, 2, \dots$$

Характеристические значения уравнения:

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{\Delta_n \pm \sqrt{\Delta_0 \Delta_{2n}}}, \quad \text{где } \Delta_n = \frac{1}{n+1} (b^{n+1} - a^{n+1}).$$

1°. Решение при $\lambda \neq \lambda_{1,2}$:

$$y(x) = f(x) + \lambda(A_1 x^n + A_2),$$

где постоянные A_1 и A_2 вычисляются по формулам

$$A_1 = \frac{f_1 - \lambda(f_1 \Delta_n - f_2 \Delta_0)}{\lambda^2(\Delta_n^2 - \Delta_0 \Delta_{2n}) - 2\lambda \Delta_n + 1}, \quad A_2 = \frac{f_2 - \lambda(f_2 \Delta_n - f_1 \Delta_{2n})}{\lambda^2(\Delta_n^2 - \Delta_0 \Delta_{2n}) - 2\lambda \Delta_n + 1},$$

$$f_1 = \int_a^b f(x) dx, \quad f_2 = \int_a^b x^n f(x) dx, \quad \Delta_n = \frac{1}{n+1} (b^{n+1} - a^{n+1}).$$

2°. Решение при $\lambda = \lambda_1 \neq \lambda_2$ и $f_1 = f_2 = 0$:

$$y(x) = f(x) + C y_1(x), \quad y_1(x) = x^n + \sqrt{\Delta_{2n}/\Delta_0},$$

где C — произвольная постоянная, а $y_1(x)$ — собственная функция уравнения, соответствующая характеристическому значению λ_1 .

3°. Решение при $\lambda = \lambda_2 \neq \lambda_1$ и $f_1 = f_2 = 0$:

$$y(x) = f(x) + C y_2(x), \quad y_2(x) = x^n - \sqrt{\Delta_{2n}/\Delta_0},$$

где C — произвольная постоянная, а $y_2(x)$ — собственная функция ядра, соответствующая характеристическому значению λ_2 .

4°. Уравнение не имеет кратных характеристических значений.

$$32. \quad y(x) - \lambda \int_a^b (x^n - t^n) y(t) dt = f(x), \quad n = 1, 2, \dots$$

Характеристические значения уравнения:

$$\lambda_{1,2} = \pm \left[\frac{1}{(n+1)^2} (b^{n+1} - a^{n+1})^2 - \frac{1}{2n+1} (b^{2n+1} - a^{2n+1})(b-a) \right]^{-1/2}.$$

1°. Решение при $\lambda \neq \lambda_{1,2}$:

$$y(x) = f(x) + \lambda(A_1 x^n + A_2),$$

где постоянные A_1 и A_2 вычисляются по формулам

$$A_1 = \frac{f_1 + \lambda(f_1 \Delta_n - f_2 \Delta_0)}{\lambda^2(\Delta_0 \Delta_{2n} - \Delta_n^2) + 1}, \quad A_2 = \frac{-f_2 + \lambda(f_2 \Delta_n - f_1 \Delta_{2n})}{\lambda^2(\Delta_0 \Delta_{2n} - \Delta_n^2) + 1},$$

$$f_1 = \int_a^b f(x) dx, \quad f_2 = \int_a^b x^n f(x) dx, \quad \Delta_n = \frac{1}{n+1} (b^{n+1} - a^{n+1}).$$

2°. Решение при $\lambda = \lambda_1 \neq \lambda_2$ и $f_1 = f_2 = 0$:

$$y(x) = f(x) + C y_1(x), \quad y_1(x) = x^n + \frac{1 - \lambda_1 \Delta_n}{\lambda_1 \Delta_0},$$

где C — произвольная постоянная, а $y_1(x)$ — собственная функция уравнения, соответствующая характеристическому значению λ_1 .

3°. Решение при $\lambda = \lambda_2 \neq \lambda_1$ и $f_1 = f_2 = 0$ получается из формул п. 2° заменой λ_1 и $y_1(x)$ соответственно на λ_2 и $y_2(x)$.

4°. Уравнение не имеет кратных характеристических значений.

$$33. \quad y(x) - \lambda \int_a^b (Ax^n + Bt^n)y(t) dt = f(x), \quad n = 1, 2, \dots$$

Характеристические значения уравнения:

$$\lambda_{1,2} = \frac{(A+B)\Delta_n \pm \sqrt{(A-B)^2\Delta_n^2 + 4AB\Delta_0\Delta_{2n}}}{2AB(\Delta_n^2 - \Delta_0\Delta_{2n})}, \quad \Delta_n = \frac{1}{n+1}(b^{n+1} - a^{n+1}).$$

1°. Решение при $\lambda \neq \lambda_{1,2}$:

$$y(x) = f(x) + \lambda(A_1x^n + A_2),$$

где постоянные A_1 и A_2 вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{Af_1 - AB\lambda(f_1\Delta_n - f_2\Delta_0)}{AB\lambda^2(\Delta_n^2 - \Delta_0\Delta_{2n}) - (A+B)\lambda\Delta_n + 1}, \\ A_2 &= \frac{Bf_2 - AB\lambda(f_2\Delta_n - f_1\Delta_{2n})}{AB\lambda^2(\Delta_n^2 - \Delta_0\Delta_{2n}) - (A+B)\lambda\Delta_n + 1}, \\ f_1 &= \int_a^b f(x) dx, \quad f_2 = \int_a^b x^n f(x) dx. \end{aligned}$$

2°. Решение при $\lambda = \lambda_1 \neq \lambda_2$ и $f_1 = f_2 = 0$:

$$y(x) = f(x) + Cy_1(x), \quad y_1(x) = x^n + \frac{1 - A\lambda_1\Delta_n}{A\lambda_1\Delta_0},$$

где C — произвольная постоянная, а $y_1(x)$ — собственная функция уравнения, соответствующая характеристическому значению λ_1 .

3°. Решение при $\lambda = \lambda_2 \neq \lambda_1$ и $f_1 = f_2 = 0$ получается из формул п. 2° заменой λ_1 и $y_1(x)$ соответственно на λ_2 и $y_2(x)$.

4°. Решение при $\lambda = \lambda_{1,2} = \lambda_*$ и $f_1 = f_2 = 0$, где $\lambda_* = \frac{2}{(A+B)\Delta_n}$ — двукратное характеристическое значение:

$$y(x) = f(x) + Cy_*(x), \quad y_*(x) = x^n - \frac{(A-B)\Delta_n}{2A\Delta_0}.$$

Здесь C — произвольная постоянная, а $y_*(x)$ — собственная функция уравнения, соответствующая λ_* .

$$34. \quad y(x) - \lambda \int_a^b (x-t)t^m y(t) dt = f(x), \quad m = 1, 2, \dots$$

Частный случай уравнения 4.9.8 при $A = 0$, $B = 1$, $h(t) = t^m$.

Решение:

$$y(x) = f(x) + \lambda(A_1 + A_2x),$$

где A_1 и A_2 — постоянные, которые можно определить с помощью формул, указанных в 4.9.8.

$$35. \quad y(x) - \lambda \int_a^b (x-t)x^m y(t) dt = f(x), \quad m = 1, 2, \dots$$

Частный случай уравнения 4.9.10 при $A = 0$, $B = 1$, $h(x) = x^m$.

Решение:

$$y(x) = f(x) + \lambda(A_1x^{m+1} + A_2x^m),$$

где A_1 и A_2 — постоянные, которые можно определить с помощью формул, указанных в 4.9.10.

$$36. \quad y(x) - \lambda \int_a^b (Ax^{m+1} + Bx^m t + Cx^m + D)y(t) dt = f(x), \quad m = 1, 2, \dots$$

Частный случай уравнения 4.9.18 при $g_1(x) = Ax^{m+1} + Cx^m + D$, $h_1(t) = 1$, $g_2(x) = x^m$, $h_2(t) = Bt$.

Решение:

$$y(x) = f(x) + \lambda[A_1(Ax^{m+1} + Cx^m + D) + A_2x^m],$$

где A_1 и A_2 — постоянные, которые можно определить с помощью формул, указанных в 4.9.18.

$$37. \quad y(x) - \lambda \int_a^b (Axt^m + Bt^{m+1} + Ct^m + D)y(t) dt = f(x), \quad m = 1, 2, \dots$$

Частный случай уравнения 4.9.18 при $h_1(t) = At^m$, $g_1(x) = x$, $h_2(t) = Bt^{m+1} + Ct^m + D$, $g_2(x) = 1$.

Решение:

$$y(x) = f(x) + \lambda(A_1x + A_2),$$

где A_1 и A_2 — постоянные, которые можно определить с помощью формул, указанных в 4.9.18.

$$38. \quad y(x) - \lambda \int_a^b (Ax^n t^n + Bx^m t^m)y(t) dt = f(x), \quad n, m = 1, 2, \dots, \quad n \neq m.$$

Частный случай уравнения 4.9.14 при $g(x) = x^n$, $h(t) = t^m$.

Решение:

$$y(x) = f(x) + \lambda(A_1x^n + A_2x^m),$$

где A_1 и A_2 — постоянные, которые можно определить с помощью формул, указанных в 4.9.14.

$$39. \quad y(x) - \lambda \int_a^b (Ax^n t^m + Bx^m t^n)y(t) dt = f(x), \quad n, m = 1, 2, \dots, \quad n \neq m.$$

Частный случай уравнения 4.9.17 при $g(x) = x^n$, $h(t) = t^m$.

Решение:

$$y(x) = f(x) + \lambda(A_1x^n + A_2x^m),$$

где A_1 и A_2 — постоянные, которые можно определить с помощью формул, указанных в 4.9.17.

$$40. \quad y(x) - \lambda \int_a^b (x - t)^m y(t) dt = f(x), \quad m = 1, 2, \dots$$

Частный случай уравнения 4.9.19 при $g(x) = x$, $h(t) = -t$.

$$41. \quad y(x) - \lambda \int_a^b (Ax + Bt)^m y(t) dt = f(x), \quad m = 1, 2, \dots$$

Частный случай уравнения 4.9.19 при $g(x) = Ax$, $h(t) = Bt$.

$$42. \quad y(x) + A \int_a^b |x - t|^k y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.36 при $g(t) = At^k$. Решение интегрального уравнения сводится к задаче для обыкновенного дифференциального уравнения $y''_{xx} + 2Ax^k y = f''_{xx}(x)$, общее решение которого может быть выражено через функции Бесселя или модифицированные функции Бесселя (граничные условия указаны в 4.9.36).

$$43. \quad y(x) + A \int_a^b |x - t|^{2n+1} y(t) dt = f(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

1°. Раскроем модуль в подынтегральном выражении. В результате получим

$$y(x) + A \int_a^x (x - t)^{2n+1} y(t) dt + A \int_x^b (t - x)^{2n+1} y(t) dt = f(x). \quad (1)$$

Дифференцируя (1) k раз по x , имеем

$$y_x^{(k)}(x) + AB_k \int_a^x (x - t)^{2n+1-k} y(t) dt + (-1)^k AB_k \int_x^b (t - x)^{2n+1-k} y(t) dt = f_x^{(k)}(x), \quad (2)$$

$$B_k = (2n+1)(2n) \dots (2n+2-k), \quad k = 1, 2, \dots, 2n+1.$$

Дифференцируя (2) при $k = 2n+1$, для функции $y = y(x)$ получим линейное неоднородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами

$$y_x^{(2n+2)} + 2(2n+1)! Ay = f_x^{(2n+2)}(x). \quad (3)$$

Уравнение (3) должно удовлетворять граничным условиям, которые получаются в результате подстановки значения $x = a$ в равенства (1) и (2):

$$\begin{aligned} y(a) + A \int_a^b (t-a)^{2n+1} y(t) dt &= f(a), \\ y_x^{(k)}(a) + (-1)^k AB_k \int_a^b (t-a)^{2n+1-k} y(t) dt &= f_x^{(k)}(a), \quad k = 1, 2, \dots, 2n+1. \end{aligned} \quad (4)$$

Эти условия можно преобразовать к более привычному виду, не содержащему интегралов. Для этого из уравнения (3) надо выразить y через $y_x^{(2n+2)}$ и $f_x^{(2n+2)}$ и подставить в (4), а затем проинтегрировать полученные выражения (достаточное число раз) по частям.

4.1-5. Ядра уравнений, содержащие рациональные функции

44. $y(x) - \lambda \int_a^b \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{t} \right) y(t) dt = f(x).$

Частный случай уравнения 4.9.2 при $g(x) = 1/x$.

Решение:

$$y(x) = f(x) + \lambda \left(\frac{A_1}{x} + A_2 \right),$$

где A_1 и A_2 — постоянные, которые можно определить с помощью формул, указанных в 4.9.2.

45. $y(x) - \lambda \int_a^b \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{t} \right) y(t) dt = f(x).$

Частный случай уравнения 4.9.3 при $g(x) = 1/x$.

Решение:

$$y(x) = f(x) + \lambda \left(\frac{A_1}{x} + A_2 \right),$$

где A_1 и A_2 — постоянные, которые можно определить с помощью формул, указанных в 4.9.3.

46. $y(x) - \lambda \int_a^b \left(\frac{A}{x} + \frac{B}{t} \right) y(t) dt = f(x).$

Частный случай уравнения 4.9.4 при $g(x) = 1/x$.

Решение:

$$y(x) = f(x) + \lambda \left(\frac{A_1}{x} + A_2 \right),$$

где A_1 и A_2 — постоянные, которые можно определить с помощью формул, указанных в 4.9.4.

47. $y(x) - \lambda \int_a^b \left(\frac{A}{x+\alpha} + \frac{B}{t+\beta} \right) y(t) dt = f(x).$

Частный случай уравнения 4.9.5 при $g(x) = \frac{A}{x+\alpha}$, $h(t) = \frac{B}{t+\beta}$.

Решение:

$$y(x) = f(x) + \lambda \left(A_1 \frac{A}{x+\alpha} + A_2 \right),$$

где A_1 и A_2 — постоянные, которые можно определить с помощью формул, указанных в 4.9.5.

48. $y(x) - \lambda \int_a^b \left(\frac{x}{t} - \frac{t}{x} \right) y(t) dt = f(x).$

Частный случай уравнения 4.9.16 при $g(x) = x$, $h(t) = 1/t$.

Решение:

$$y(x) = f(x) + \lambda \left(A_1 x + \frac{A_2}{x} \right),$$

где A_1 и A_2 — постоянные, которые можно определить с помощью формул, указанных в 4.9.16.

$$49. \quad y(x) - \lambda \int_a^b \left(\frac{Ax}{t} + \frac{Bt}{x} \right) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.17 при $g(x) = x$, $h(t) = 1/t$.

Решение:

$$y(x) = f(x) + \lambda \left(A_1 x + \frac{A_2}{x} \right),$$

где A_1 и A_2 — постоянные, которые можно определить с помощью формул, указанных в 4.9.17.

$$50. \quad y(x) - \lambda \int_a^b \left(A \frac{x + \alpha}{t + \beta} + B \frac{t + \alpha}{x + \beta} \right) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.17 при $g(x) = x + \alpha$, $h(t) = \frac{1}{t + \beta}$.

Решение:

$$y(x) = f(x) + \lambda \left[A_1 (x + \alpha) + \frac{A_2}{x + \beta} \right],$$

где A_1 и A_2 — постоянные, которые можно определить с помощью формул, указанных в 4.9.17.

$$51. \quad y(x) - \lambda \int_a^b \left[A \frac{(x + \alpha)^n}{(t + \beta)^m} + B \frac{(t + \alpha)^n}{(x + \beta)^m} \right] y(t) dt = f(x), \quad n, m = 0, 1, 2, \dots$$

Частный случай уравнения 4.9.17 при $g(x) = (x + \alpha)^n$, $h(t) = (t + \beta)^{-m}$.

Решение:

$$y(x) = f(x) + \lambda \left[A_1 (x + \alpha)^n + \frac{A_2}{(x + \beta)^m} \right],$$

где A_1 и A_2 — постоянные, которые можно определить с помощью формул, указанных в 4.9.17.

$$52. \quad y(x) - \lambda \int_1^\infty \frac{y(t)}{x + t} dt = f(x), \quad 1 \leq x < \infty, \quad -\infty < \pi\lambda < 1.$$

Решение:

$$y(x) = \int_0^\infty \frac{\tau \operatorname{sh}(\pi\tau) F(\tau)}{\operatorname{ch}(\pi\tau) - \pi\lambda} P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x) d\tau,$$

$$F(\tau) = \int_1^\infty f(x) P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x) dx,$$

где $P_\nu(x) = F(-\nu, \nu + 1, 1; \frac{1}{2}(1 - x))$ — сферическая функция Лежандра первого рода, для определения которой можно использовать интегральное представление:

$$P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\operatorname{ch} \alpha) = \frac{2}{\pi} \int_0^\alpha \frac{\cos(\tau s) ds}{\sqrt{2(\operatorname{ch} \alpha - \operatorname{ch} s)}} \quad (\alpha \geq 0).$$

⊙ Литература: В. А. Диткин, А. П. Прудников (1974, стр. 90)

$$53. \quad (x^2 + b^2)y(x) = \frac{\lambda}{\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{a^3 y(t)}{a^2 + (x - t)^2} dt.$$

Это уравнение встречается в атомной и ядерной физике.

Решение ищем в виде ряда

$$y(x) = \sum_{m=0}^\infty \frac{A_m x}{x^2 + (am + b)^2}, \quad (1)$$

коэффициенты которого A_m удовлетворяют следующим уравнениям:

$$mA_m \left(\frac{m + 2b}{a} \right) + \lambda A_{m-1} = 0, \quad \sum_{m=0}^\infty A_m = 0. \quad (2)$$

Разрешая первое из этих уравнений, выражая A_m через A_0 (A_0 можно выбрать произвольно) и подставляя результат во второе уравнение (2), после сокращения на A_0 получим

$$1 + \sum_{m=1}^\infty \frac{(-\lambda)^m}{m!} \frac{1}{(1 + 2b/a)(2 + 2b/a) \dots (m + 2b/a)} = 0. \quad (3)$$

Из определения функций Бесселя первого рода следует, что уравнение (3) можно записать в виде

$$\lambda^{-b/a} J_{2b/a}(2\sqrt{\lambda}) = 0. \quad (4)$$

В задачах такого типа обычно считается, что величины a и λ известны и требуется определить величину b , которая пропорциональна энергии системы. Эта величина определяется по таблицам нулей функций Бесселя. В некоторых случаях величины b и a считаются заданными, а ищется величина λ .

● Литература: И. Снеддон (1955).

$$54. \int_{-1}^1 \frac{y(x) - y(t)}{|x - t|} dt = \lambda y(x).$$

Собственные значения:

$$\lambda_0 = 0, \quad \lambda_n = 2 \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right) \quad \text{при } n = 1, 2, \dots$$

Собственные функции:

$$y_0(x) = 0, \quad y_n(x) = P_n(x) \quad \text{при } n = 1, 2, \dots,$$

где $P_n(x) = \frac{1}{n! 2^n} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$ — полиномы Лежандра.

● Литература: А. Г. Петров (1986).

4.1-6. Ядра уравнений, содержащие произвольные степени

$$55. y(x) - \lambda \int_a^b (x - t) t^\mu y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.8 при $A = 0$, $B = 1$, $h(t) = t^\mu$.

Решение:

$$y(x) = f(x) + \lambda(A_1 + A_2 x),$$

где A_1 и A_2 — постоянные, которые можно определить с помощью формул, указанных в 4.9.8.

$$56. y(x) - \lambda \int_a^b (x - t) x^\nu y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.10 при $A = 0$, $B = 1$, $h(x) = x^\nu$.

Решение:

$$y(x) = f(x) + \lambda(E_1 x^{\nu+1} + E_2 x^\nu),$$

где E_1 и E_2 — постоянные, которые можно определить с помощью формул, указанных в 4.9.10.

$$57. y(x) - \lambda \int_a^b (x^\mu - t^\mu) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.3 при $g(x) = x^\mu$.

Решение:

$$y(x) = f(x) + \lambda(A_1 x^\mu + A_2),$$

где A_1 и A_2 — постоянные, которые можно определить с помощью формул, указанных в 4.9.3.

$$58. y(x) - \lambda \int_a^b (Ax^\nu + Bt^\nu) t^\mu y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.6 при $g(x) = x^\nu$, $h(t) = t^\mu$.

Решение:

$$y(x) = f(x) + \lambda(A_1 x^\nu + A_2),$$

где A_1 и A_2 — постоянные, которые можно определить с помощью формул, указанных в 4.9.6.

$$59. \quad y(x) - \lambda \int_a^b (Dx^\nu + Et^\mu) x^\gamma y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.18 при $g_1(x) = x^{\nu+\gamma}$, $h_1(t) = D$, $g_2(x) = x^\gamma$, $h_2(t) = Et^\mu$.
Решение:

$$y(x) = f(x) + \lambda(A_1 x^{\nu+\gamma} + A_2 x^\gamma),$$

где A_1 и A_2 — постоянные, которые можно определить с помощью формул, указанных в 4.9.18.

$$60. \quad y(x) - \lambda \int_a^b (Ax^\nu t^\mu + Bx^\gamma t^\delta) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.18 при $g_1(x) = x^\nu$, $h_1(t) = At^\mu$, $g_2(x) = x^\gamma$, $h_2(t) = Bt^\delta$.
Решение:

$$y(x) = f(x) + \lambda(A_1 x^\nu + A_2 x^\gamma),$$

где A_1 и A_2 — постоянные, которые можно определить с помощью формул, указанных в 4.9.18.

$$61. \quad y(x) - \lambda \int_a^b (A + Bxt^\mu + Ct^{\mu+1}) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.9 при $h(t) = t^\mu$.
Решение:

$$y(x) = f(x) + \lambda(A_1 + A_2 x),$$

где A_1 и A_2 — постоянные, которые можно определить с помощью формул, указанных в 4.9.9.

$$62. \quad y(x) - \lambda \int_a^b (At^\alpha + Bx^\beta t^\mu + Ct^{\mu+\gamma}) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.18 при $g_1(x) = 1$, $h_1(t) = At^\alpha + Ct^{\mu+\gamma}$, $g_2(x) = x^\beta$, $h_2(t) = Bt^\mu$.
Решение:

$$y(x) = f(x) + \lambda(A_1 + A_2 x^\beta),$$

где A_1 и A_2 — постоянные, которые можно определить с помощью формул, указанных в 4.9.18.

$$63. \quad y(x) - \lambda \int_a^b (Ax^\alpha t^\gamma + Bx^\beta t^\gamma + Cx^\mu t^\nu) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.18 при $g_1(x) = Ax^\alpha + Bx^\beta$, $h_1(t) = t^\gamma$, $g_2(x) = x^\mu$, $h_2(t) = Ct^\nu$.
Решение:

$$y(x) = f(x) + \lambda[A_1(Ax^\alpha + Bx^\beta) + A_2 x^\mu],$$

где A_1 и A_2 — постоянные, которые можно определить с помощью формул, указанных в 4.9.18.

$$64. \quad y(x) - \lambda \int_a^b \left[A \frac{(x+p_1)^\beta}{(t+q_1)^\gamma} + B \frac{(x+p_2)^\mu}{(t+q_2)^\delta} \right] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.18 при $g_1(x) = (x+p_1)^\beta$, $h_1(t) = A(t+q_1)^{-\gamma}$, $g_2(x) = (x+p_2)^\mu$, $h_2(t) = B(t+q_2)^{-\delta}$.
Решение:

$$y(x) = f(x) + \lambda[A_1(x+p_1)^\beta + A_2(x+p_2)^\mu],$$

где A_1 и A_2 — постоянные, которые можно определить с помощью формул, указанных в 4.9.18.

$$65. \quad y(x) - \lambda \int_a^b \left(A \frac{x^\mu + a}{t^\nu + b} + B \frac{x^\gamma + c}{t^\delta + d} \right) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.18 при $g_1(x) = x^\mu + a$, $h_1(t) = \frac{A}{t^\nu + b}$, $g_2(x) = x^\gamma + c$, $h_2(t) = \frac{B}{t^\delta + d}$.
Решение:

$$y(x) = f(x) + \lambda[A_1(x^\mu + a) + A_2(x^\gamma + c)],$$

где A_1 и A_2 — постоянные, которые можно определить с помощью формул, указанных в 4.9.18.

4.1-7. Сингулярные уравнения

В этом разделе сингулярные интегралы понимаются в смысле главного значения по Коши.

$$66. Ay(x) + \frac{B}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{y(t) dt}{t-x} = f(x), \quad -1 < x < 1.$$

Не умаляя общности, можно считать, что $A^2 + B^2 = 1$.

1°. Решение, ограниченное на обоих концах отрезка:

$$y(x) = Af(x) - \frac{B}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{g(x)}{g(t)} \frac{f(t) dt}{t-x}, \quad g(x) = (1+x)^\alpha (1-x)^{1-\alpha}, \quad (1)$$

где α — решение тригонометрического уравнения

$$A + B \operatorname{ctg}(\pi\alpha) = 0 \quad (2)$$

на интервале $0 < \alpha < 1$. Решение $y(x)$ существует тогда и только тогда, когда $\int_{-1}^1 \frac{f(t)}{g(t)} dt = 0$.

2°. Решение, ограниченное при $x = 1$ и неограниченное при $x = -1$:

$$y(x) = Af(x) - \frac{B}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{g(x)}{g(t)} \frac{f(t) dt}{t-x}, \quad g(x) = (1+x)^\alpha (1-x)^{-\alpha}, \quad (3)$$

где α — решение тригонометрического уравнения (2) на интервале $-1 < \alpha < 0$.

3°. Решение, неограниченное на обоих концах отрезка:

$$y(x) = Af(x) - \frac{B}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{g(x)}{g(t)} \frac{f(t) dt}{t-x} + Cg(x), \quad g(x) = (1+x)^\alpha (1-x)^{-1-\alpha}, \quad (4)$$

где C — произвольная постоянная, α — решение тригонометрического уравнения (2) на интервале $-1 < \alpha < 0$.

☉ Литература: И. К. Лифанов (1995).

$$67. y(x) - \lambda \int_0^1 \left(\frac{1}{t-x} - \frac{1}{x+t-2xt} \right) y(t) dt = f(x), \quad 0 < x < 1.$$

Уравнение Трикоми.

Решение:

$$y(x) = \frac{1}{1+\lambda^2\pi^2} \left[f(x) + \int_0^1 \frac{t^\alpha(1-x)^\alpha}{x^\alpha(1-t)^\alpha} \left(\frac{1}{t-x} - \frac{1}{x+t-2xt} \right) f(t) dt \right] + \frac{C(1-x)^\beta}{x^{1+\beta}},$$

$$\alpha = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg}(\lambda\pi) \quad (-1 < \alpha < 1), \quad \operatorname{tg} \frac{\beta\pi}{2} = \lambda\pi \quad (-2 < \beta < 0),$$

где C — произвольная постоянная.

☉ Литература: Ф. Трикоми (1960), П. П. Забрейко, А. И. Кошелев и др. (1968, стр. 206).

4.2. Уравнения, ядра которых содержат экспоненциальные функции

4.2-1. Ядра уравнений, содержащие экспоненциальные функции

$$1. y(x) - \lambda \int_a^b (e^{\beta x} + e^{\beta t}) y(t) dt = f(x).$$

Характеристические значения уравнения:

$$\lambda_{1,2} = \frac{\beta}{e^{\beta b} - e^{\beta a} \pm \sqrt{\frac{1}{2}\beta(b-a)(e^{2\beta b} - e^{2\beta a})}}.$$

1°. Решение при $\lambda \neq \lambda_{1,2}$:

$$y(x) = f(x) + \lambda(A_1 e^{\beta x} + A_2),$$

где постоянные A_1 и A_2 вычисляются по формулам

$$A_1 = \frac{f_1 - \lambda[f_1\Delta_\beta - (b-a)f_2]}{\lambda^2[\Delta_\beta^2 - (b-a)\Delta_{2\beta}] - 2\lambda\Delta_\beta + 1}, \quad A_2 = \frac{f_2 - \lambda(f_2\Delta_\beta - f_1\Delta_{2\beta})}{\lambda^2[\Delta_\beta^2 - (b-a)\Delta_{2\beta}] - 2\lambda\Delta_\beta + 1},$$

$$f_1 = \int_a^b f(x) dx, \quad f_2 = \int_a^b f(x)e^{\beta x} dx, \quad \Delta_\beta = \frac{1}{\beta}(e^{\beta b} - e^{\beta a}).$$

2°. Решение при $\lambda = \lambda_1 \neq \lambda_2$ и $f_1 = f_2 = 0$:

$$y(x) = f(x) + Cy_1(x), \quad y_1(x) = e^{\beta x} + \sqrt{\frac{e^{2\beta b} - e^{2\beta a}}{2\beta(b-a)}},$$

где C — произвольная постоянная, а $y_1(x)$ — собственная функция уравнения, соответствующая характеристическому значению λ_1 .

3°. Решение при $\lambda = \lambda_2 \neq \lambda_1$ и $f_1 = f_2 = 0$:

$$y(x) = f(x) + Cy_2(x), \quad y_2(x) = e^{\beta x} - \sqrt{\frac{e^{2\beta b} - e^{2\beta a}}{2\beta(b-a)}},$$

где C — произвольная постоянная, а $y_2(x)$ — собственная функция ядра, соответствующая характеристическому значению λ_2 .

4°. Уравнение не имеет кратных характеристических значений.

2. $y(x) - \lambda \int_a^b (e^{\beta x} - e^{\beta t})y(t) dt = f(x).$

Характеристические значения уравнения:

$$\lambda_{1,2} = \pm \frac{\beta}{\sqrt{(e^{\beta b} - e^{\beta a})^2 - \frac{1}{2}\beta(b-a)(e^{2\beta b} - e^{2\beta a})}}.$$

1°. Решение при $\lambda \neq \lambda_{1,2}$:

$$y(x) = f(x) + \lambda(A_1 e^{\beta x} + A_2),$$

где постоянные A_1 и A_2 вычисляются по формулам

$$A_1 = \frac{f_1 + \lambda[f_1\Delta_\beta - (b-a)f_2]}{\lambda^2[(b-a)\Delta_{2\beta} - \Delta_\beta^2] + 1}, \quad A_2 = \frac{-f_2 + \lambda(f_2\Delta_\beta - f_1\Delta_{2\beta})}{\lambda^2[(b-a)\Delta_{2\beta} - \Delta_\beta^2] + 1},$$

$$f_1 = \int_a^b f(x) dx, \quad f_2 = \int_a^b f(x)e^{\beta x} dx, \quad \Delta_\beta = \frac{1}{\beta}(e^{\beta b} - e^{\beta a}).$$

2°. Решение при $\lambda = \lambda_1 \neq \lambda_2$ и $f_1 = f_2 = 0$:

$$y(x) = f(x) + Cy_1(x), \quad y_1(x) = e^{\beta x} + \frac{1 - \lambda_1\Delta_\beta}{\lambda_1(b-a)},$$

где C — произвольная постоянная, а $y_1(x)$ — собственная функция уравнения, соответствующая характеристическому значению λ_1 .

3°. Решение при $\lambda = \lambda_2 \neq \lambda_1$ и $f_1 = f_2 = 0$ получается из формул п. 2° заменой λ_1 и $y_1(x)$ соответственно на λ_2 и $y_2(x)$.

4°. Уравнение не имеет кратных характеристических значений.

3. $y(x) - \lambda \int_a^b (Ae^{\beta x} + Be^{\beta t})y(t) dt = f(x).$

Характеристические значения уравнения:

$$\lambda_{1,2} = \frac{(A+B)\Delta_\beta \pm \sqrt{(A-B)^2\Delta_\beta^2 + 4AB(b-a)\Delta_{2\beta}}}{2AB[\Delta_\beta^2 - (b-a)\Delta_{2\beta}]}, \quad \Delta_\beta = \frac{1}{\beta}(e^{\beta b} - e^{\beta a}).$$

1°. Решение при $\lambda \neq \lambda_{1,2}$:

$$y(x) = f(x) + \lambda(A_1 e^{\beta x} + A_2),$$

где постоянные A_1 и A_2 вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{Af_1 - AB\lambda[f_1\Delta_\beta - (b-a)f_2]}{AB\lambda^2[\Delta_\beta^2 - (b-a)\Delta_{2\beta}] - (A+B)\lambda\Delta_\beta + 1}, \\ A_2 &= \frac{Bf_2 - AB\lambda(f_2\Delta_\beta - f_1\Delta_{2\beta})}{AB\lambda^2[\Delta_\beta^2 - (b-a)\Delta_{2\beta}] - (A+B)\lambda\Delta_\beta + 1}, \\ f_1 &= \int_a^b f(x) dx, \quad f_2 = \int_a^b f(x)e^{\beta x} dx. \end{aligned}$$

2°. Решение при $\lambda = \lambda_1 \neq \lambda_2$ и $f_1 = f_2 = 0$:

$$y(x) = f(x) + Cy_1(x), \quad y_1(x) = e^{\beta x} + \frac{1 - A\lambda_1\Delta_\beta}{A(b-a)\lambda_1},$$

где C — произвольная постоянная, а $y_1(x)$ — собственная функция уравнения, соответствующая характеристическому значению λ_1 .

3°. Решение при $\lambda = \lambda_2 \neq \lambda_1$ и $f_1 = f_2 = 0$ получается из формул п. 2° заменой λ_1 и $y_1(x)$ соответственно на λ_2 и $y_2(x)$.

4°. Решение при $\lambda = \lambda_{1,2} = \lambda_*$ и $f_1 = f_2 = 0$, где $\lambda_* = \frac{2}{(A+B)\Delta_\beta}$ — двукратное характеристическое значение:

$$y(x) = f(x) + Cy_*(x), \quad y_*(x) = e^{\beta x} - \frac{(A-B)\Delta_\beta}{2A(b-a)}.$$

Здесь C — произвольная постоянная, а $y_*(x)$ — собственная функция уравнения, соответствующая λ_* .

4. $y(x) - \lambda \int_a^b [Ae^{\beta(x-t)} + B]y(t) dt = f(x).$

Частный случай уравнения 4.9.18 при $g_1(x) = e^{\beta x}$, $h_1(t) = Ae^{-\beta t}$, $g_2(x) = 1$, $h_2(t) = B$.
Решение:

$$y(x) = f(x) + \lambda(A_1e^{\beta x} + A_2),$$

где A_1 и A_2 — постоянные, которые можно определить с помощью формул, указанных в 4.9.18.

5. $y(x) - \lambda \int_a^b [Ae^{\beta x + \mu t} + Be^{(\beta + \mu)t}]y(t) dt = f(x).$

Частный случай уравнения 4.9.6 при $g(x) = e^{\beta x}$, $h(t) = e^{\mu t}$.
Решение:

$$y(x) = f(x) + \lambda(A_1e^{\beta x} + A_2),$$

где A_1 и A_2 — постоянные, которые можно определить с помощью формул, указанных в 4.9.6.

6. $y(x) - \lambda \int_a^b [Ae^{\alpha(x+t)} + Be^{\beta(x+t)}]y(t) dt = f(x).$

Частный случай уравнения 4.9.14 при $g(x) = e^{\alpha x}$, $h(t) = e^{\beta t}$.
Решение:

$$y(x) = f(x) + \lambda(A_1e^{\alpha x} + A_2e^{\beta x}),$$

где A_1 и A_2 — постоянные, которые можно определить с помощью формул, указанных в 4.9.14.

7. $y(x) - \lambda \int_a^b (Ae^{\alpha x + \beta t} + Be^{\beta x + \alpha t})y(t) dt = f(x).$

Частный случай уравнения 4.9.17 при $g(x) = e^{\alpha x}$, $h(t) = e^{\beta t}$.
Решение:

$$y(x) = f(x) + \lambda(A_1e^{\alpha x} + A_2e^{\beta x}),$$

где A_1 и A_2 — постоянные, которые можно определить с помощью формул, указанных в 4.9.17.

$$8. \quad y(x) - \lambda \int_a^b [De^{(\gamma+\mu)x} + Ee^{\nu t+\mu x}]y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.18 при $g_1(x) = e^{(\gamma+\mu)x}$, $h_1(t) = D$, $g_2(x) = e^{\mu x}$, $h_2(t) = Ee^{\nu t}$.
Решение:

$$y(x) = f(x) + \lambda[A_1 e^{(\gamma+\mu)x} + A_2 e^{\mu x}],$$

где A_1 и A_2 — постоянные, которые можно определить с помощью формул, указанных в 4.9.18.

$$9. \quad y(x) - \lambda \int_a^b (Ae^{\alpha x+\beta t} + Be^{\gamma x+\delta t})y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.18 при $g_1(x) = e^{\alpha x}$, $h_1(t) = Ae^{\beta t}$, $g_2(x) = e^{\gamma x}$, $h_2(t) = Be^{\delta t}$.
Решение:

$$y(x) = f(x) + \lambda(A_1 e^{\alpha x} + A_2 e^{\gamma x}),$$

где A_1 и A_2 — постоянные, которые можно определить с помощью формул, указанных в 4.9.18.

$$10. \quad y(x) - \lambda \int_a^b \left[\sum_{k=1}^n A_k e^{\gamma_k(x-t)} \right] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.20 при $g_k(x) = e^{\gamma_k x}$, $h_k(t) = A_k e^{-\gamma_k t}$.

$$11. \quad y(x) - \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-|x-t|} y(t) dt = Ae^{\mu x}, \quad 0 < \mu < 1.$$

Решение:

$$y(x) = C(1+x) + A\mu^{-2}[(\mu^2-1)e^{\mu x} - \mu + 1],$$

где C — произвольная постоянная.

⊙ Литература: П. П. Забрейко, А. И. Кошелев и др. (1968, стр. 307).

$$12. \quad y(x) + \lambda \int_0^\infty e^{-|x-t|} y(t) dt = f(x).$$

Решение:

$$y(x) = f(x) - \frac{\lambda}{\sqrt{1+2\lambda}} \int_0^\infty \exp(-\sqrt{1+2\lambda}|x-t|) f(t) dt + \\ + \left(1 - \frac{\lambda+1}{\sqrt{1+2\lambda}}\right) \int_0^\infty \exp[-\sqrt{1+2\lambda}(x+t)] f(t) dt,$$

где $\lambda > -\frac{1}{2}$.

⊙ Литература: Ф. Д. Гахов, Ю. И. Черский (1978, стр. 88).

$$13. \quad y(x) - \lambda \int_{-\infty}^\infty e^{-|x-t|} y(t) dt = 0, \quad \lambda > 0.$$

Уравнение Лалеско — Пикара.

Решение:

$$y(x) = \begin{cases} C_1 \exp(x\sqrt{1-2\lambda}) + C_2 \exp(-x\sqrt{1-2\lambda}) & \text{при } 0 < \lambda < \frac{1}{2}, \\ C_1 + C_2 x & \text{при } \lambda = \frac{1}{2}, \\ C_1 \cos(x\sqrt{2\lambda-1}) + C_2 \sin(x\sqrt{2\lambda-1}) & \text{при } \lambda > \frac{1}{2}, \end{cases}$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

⊙ Литература: М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко (1968, стр. 138).

$$14. \quad y(x) + \lambda \int_{-\infty}^\infty e^{-|x-t|} y(t) dt = f(x).$$

1°. Решение при $\lambda > -\frac{1}{2}$:

$$y(x) = f(x) - \frac{\lambda}{\sqrt{1+2\lambda}} \int_{-\infty}^\infty \exp(-\sqrt{1+2\lambda}|x-t|) f(t) dt.$$

2°. При условии $\lambda \leq -\frac{1}{2}$ для разрешимости уравнения необходимо выполнение условий

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos(ax) dx = 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin(ax) dx = 0,$$

где $a = \sqrt{-1 - 2\lambda}$. В этом случае решение имеет вид

$$y(x) = f(x) - \frac{a^2 + 1}{2a} \int_0^{\infty} \sin(at) f(x+t) dt, \quad (-\infty < x < \infty).$$

Если рассматривать решения, не принадлежащие $L_2(-\infty, +\infty)$, то однородное уравнение при $f = 0$ имеет нетривиальное решение. В этом случае общее решение соответствующего неоднородного уравнения при $\lambda \leq -\frac{1}{2}$ имеет вид

$$y(x) = C_1 \sin(ax) + C_2 \cos(ax) + f(x) - \frac{a^2 + 1}{4a} \int_{-\infty}^{\infty} \sin(a|x-t|) f(t) dt.$$

⊙ Литература: Ф. Д. Гахов, Ю. И. Черский (1978, стр. 48).

15. $y(x) + A \int_a^b e^{\lambda|x-t|} y(t) dt = f(x).$

Частный случай уравнения 4.9.37 при $g(t) = A$.

1°. Функция $y = y(x)$ удовлетворяет линейному неоднородному обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка с постоянными коэффициентами

$$y''_{xx} + \lambda(2A - \lambda)y = f''_{xx}(x) - \lambda^2 f(x). \quad (1)$$

Граничные условия для уравнения (1) имеют следующий вид (см. 4.9.37):

$$\begin{aligned} y'_x(a) + \lambda y(a) &= f'_x(a) + \lambda f(a), \\ y'_x(b) - \lambda y(b) &= f'_x(b) - \lambda f(b). \end{aligned} \quad (2)$$

Уравнение (1) вместе с граничными условиями (2) описывает решение исходного интегрального уравнения.

2°. При $\lambda(2A - \lambda) < 0$ общее решение уравнения (1) дается формулой

$$\begin{aligned} y(x) &= C_1 \operatorname{ch}(kx) + C_2 \operatorname{sh}(kx) + f(x) - \frac{2A\lambda}{k} \int_a^x \operatorname{sh}[k(x-t)] f(t) dt, \\ k &= \sqrt{\lambda(\lambda - 2A)}, \end{aligned} \quad (3)$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

При $\lambda(2A - \lambda) > 0$ общее решение уравнения (1) дается формулой

$$\begin{aligned} y(x) &= C_1 \cos(kx) + C_2 \sin(kx) + f(x) - \frac{2A\lambda}{k} \int_a^x \sin[k(x-t)] f(t) dt, \\ k &= \sqrt{\lambda(2A - \lambda)}. \end{aligned} \quad (4)$$

При $\lambda = 2A$ общее решение уравнения (1) дается формулой

$$y(x) = C_1 + C_2 x + f(x) - 4A^2 \int_a^x (x-t) f(t) dt. \quad (5)$$

Условия (2) позволяют найти постоянные интегрирования C_1, C_2 в решениях (3)–(5).

3°. В частном случае $a = 0, \lambda(2A - \lambda) > 0$ решение интегрального уравнения определяется по формуле (4), где

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{A(kI_c - \lambda I_s)}{(\lambda - A) \sin \mu - k \cos \mu}, \quad C_2 = -\frac{\lambda}{k} \frac{A(kI_c - \lambda I_s)}{(\lambda - A) \sin \mu - k \cos \mu}, \\ k &= \sqrt{\lambda(2A - \lambda)}, \quad \mu = bk, \quad I_s = \int_0^b \sin[k(b-t)] f(t) dt, \quad I_c = \int_0^b \cos[k(b-t)] f(t) dt. \end{aligned}$$

$$16. \quad y(x) + \int_a^b \left[\sum_{k=1}^n A_k \exp(\lambda_k |x - t|) \right] y(t) dt = f(x), \quad -\infty < a < b < \infty.$$

1°. Раскроем модуль в одном из слагаемых в подынтегральном выражении:

$$I_k(x) = \int_a^b \exp(\lambda_k |x - t|) y(t) dt = \int_a^x \exp[\lambda_k (x - t)] y(t) dt + \int_x^b \exp[\lambda_k (t - x)] y(t) dt. \quad (1)$$

Продифференцируем (1) дважды по x . В результате имеем (штрихи обозначают производные по x)

$$\begin{aligned} I'_k &= \lambda_k \int_a^x \exp[\lambda_k (x - t)] y(t) dt - \lambda_k \int_x^b \exp[\lambda_k (t - x)] y(t) dt, \\ I''_k &= 2\lambda_k y(x) + \lambda_k^2 \int_a^x \exp[\lambda_k (x - t)] y(t) dt + \lambda_k^2 \int_x^b \exp[\lambda_k (t - x)] y(t) dt. \end{aligned} \quad (2)$$

Из сопоставления формул (1) и (2) получим связь между I'_k и I_k :

$$I''_k = 2\lambda_k y(x) + \lambda_k^2 I_k, \quad I_k = I_k(x). \quad (3)$$

2°. Интегральное уравнение с помощью (1) можно записать в виде

$$y(x) + \sum_{k=1}^n A_k I_k = f(x). \quad (4)$$

Дифференцируя (4) дважды по x , с учетом равенств (3) имеем

$$y''_{xx}(x) + \sigma_n y(x) + \sum_{k=1}^n A_k \lambda_k^2 I_k = f''_{xx}(x), \quad \sigma_n = 2 \sum_{k=1}^n A_k \lambda_k. \quad (5)$$

Исключая интеграл I_n из (4) и (5), получим

$$y''_{xx}(x) + (\sigma_n - \lambda_n^2) y(x) + \sum_{k=1}^{n-1} A_k (\lambda_k^2 - \lambda_n^2) I_k = f''_{xx}(x) - \lambda_n^2 f(x). \quad (6)$$

Если продифференцировать равенство (6) дважды по x , а затем исключить интеграл I_{n-1} из полученного выражения с помощью (6), придем к аналогичному равенству, в левой части которого будет стоять линейный дифференциальный оператор четвертого порядка с постоянными коэффициентами (действующий на y) и сумма

$\sum_{k=1}^{n-2} B_k I_k$. Продолжая далее с помощью двукратного дифференцирования последовательно исключать слагаемые I_{n-2}, I_{n-3}, \dots , придем в итоге к линейному неоднородному обыкновенному дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами порядка $2n$.

3°. Граничные условия для функции $y(x)$ находятся в результате подстановки значения $x = a$ в интегральное уравнение и все его следствия, полученные с помощью дифференцирования. (Эти условия можно найти, подставляя значения $x = a$ и $x = b$ в интегральное уравнение и все его следствия, полученные с помощью двукратного дифференцирования.)

4.2-2. Ядра уравнений, содержащие экспоненциальные и степенные функции

$$17. \quad y(x) - \lambda \int_a^b (x - t) e^{\gamma t} y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.8 при $A = 0, B = 1, h(t) = e^{\gamma t}$.

$$18. \quad y(x) - \lambda \int_a^b (x - t) e^{\gamma x} y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.10 при $A = 0, B = 1, h(x) = e^{\gamma x}$.

$$19. \quad y(x) - \lambda \int_a^b (x - t) e^{\gamma x + \mu t} y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.18 при $g_1(x) = x e^{\gamma x}, h_1(t) = e^{\mu t}, g_2(x) = e^{\gamma x}, h_2(t) = -t e^{\mu t}$.

$$20. \quad y(x) - \lambda \int_a^b [A + (Bx + Ct)e^{\gamma x}]y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.11 при $h(x) = e^{\gamma x}$.

$$21. \quad y(x) - \lambda \int_0^b (x^2 + t^2)e^{\gamma(x+t)}y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.15 при $g(x) = x^2e^{\gamma x}$, $h(t) = e^{\gamma t}$.

$$22. \quad y(x) - \lambda \int_0^b (x^2 - t^2)e^{\gamma(x-t)}y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.18 при $g_1(x) = x^2e^{\gamma x}$, $h_1(t) = e^{-\gamma t}$, $g_2(x) = e^{\gamma x}$, $h_2(t) = -t^2e^{-\gamma t}$.

$$23. \quad y(x) - \lambda \int_0^b (Ax^n + Bt^n)e^{\alpha x + \beta t}y(t) dt = f(x), \quad n = 2, 3, \dots$$

Частный случай уравнения 4.9.18 при $g_1(x) = x^n e^{\alpha x}$, $h_1(t) = Ae^{\beta t}$, $g_2(x) = e^{\alpha x}$, $h_2(t) = Bt^n e^{\beta t}$.

$$24. \quad y(x) - \lambda \int_a^b \left[\sum_{k=1}^n A_k t^{\nu_k} e^{\alpha_k x + \beta_k t} \right] y(t) dt = f(x), \quad n = 2, 3, \dots$$

Частный случай уравнения 4.9.20 при $g_k(x) = e^{\alpha_k x}$, $h_k(t) = A_k t^{\nu_k} e^{\beta_k t}$.

$$25. \quad y(x) - \lambda \int_a^b \left[\sum_{k=1}^n A_k x^{\nu_k} e^{\alpha_k x + \beta_k t} \right] y(t) dt = f(x), \quad n = 2, 3, \dots$$

Частный случай уравнения 4.9.20 при $g_k(x) = A_k x^{\nu_k} e^{\alpha_k x}$, $h_k(t) = e^{\beta_k t}$.

$$26. \quad y(x) - \lambda \int_a^b (x - t)^n e^{\gamma(x-t)}y(t) dt = f(x), \quad n = 2, 3, \dots$$

Частный случай уравнения 4.9.20.

$$27. \quad y(x) - \lambda \int_a^b (x - t)^n e^{\alpha x + \beta t}y(t) dt = f(x), \quad n = 2, 3, \dots$$

Частный случай уравнения 4.9.20.

$$28. \quad y(x) - \lambda \int_a^b (Ax + Bt)^n e^{\alpha x + \beta t}y(t) dt = f(x), \quad n = 2, 3, \dots$$

Частный случай уравнения 4.9.20.

$$29. \quad y(x) + A \int_a^b t e^{\lambda|x-t|}y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.37 при $g(t) = At$. Решение интегрального уравнения может быть выражено через функции Бесселя (или модифицированные функции Бесселя) порядка $1/3$.

$$30. \quad y(x) + \int_0^\infty (a + b|x - t|) \exp(-|x - t|)y(t) dt = f(x).$$

Пусть биквадратный полином $P(k) = k^4 + 2(a - b + 1)k^2 + 2a + 2b + 1$ не имеет вещественных корней, а $k = \alpha + i\beta$ — корень уравнения $P(k) = 0$, удовлетворяющий условиям $\alpha > 0$, $\beta > 0$. Решение в этом случае имеет вид

$$\begin{aligned} y(x) = f(x) + \rho \int_0^\infty \exp(-\beta|x - t|) \cos(\theta + \alpha|x - t|)f(t) dt + \\ + \frac{[\alpha + (\beta - 1)^2]^2}{4\alpha^2\beta} \int_0^\infty \exp[-\beta(x + t)] \cos[\alpha(x - t)]f(t) dt + \\ + \frac{R}{4\alpha^2} \int_0^\infty \exp[-\beta(x + t)] \cos[\psi + \alpha(x + t)]f(t) dt, \end{aligned}$$

где параметры ρ, θ, R, ψ определяются из системы алгебраических уравнений, которая получается после отделения действительных и мнимых частей в выражениях

$$\rho e^{i\theta} = \frac{\mu}{\beta - i\alpha}, \quad Re^{i\psi} = \frac{(\beta - 1 - i\alpha)^4}{8\alpha^2(\beta - i\alpha)}.$$

⊙ Литература: Ф. Д. Гахов, Ю. И. Черский (1978, стр. 56–58).

4.3. Уравнения, ядра которых содержат гиперболические функции

4.3-1. Ядра уравнений, содержащие гиперболический косинус

1. $y(x) - \lambda \int_a^b \operatorname{ch}(\beta x) y(t) dt = f(x).$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \operatorname{ch}(\beta x)$, $h(t) = 1$.

2. $y(x) - \lambda \int_a^b \operatorname{ch}(\beta t) y(t) dt = f(x).$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = 1$, $h(t) = \operatorname{ch}(\beta t)$.

3. $y(x) - \lambda \int_a^b \operatorname{ch}[\beta(x - t)] y(t) dt = f(x).$

Частный случай уравнения 4.9.13 при $g(x) = \operatorname{ch}(\beta x)$, $h(t) = \operatorname{sh}(\beta t)$.

Решение:

$$y(x) = f(x) + \lambda [A_1 \operatorname{ch}(\beta x) + A_2 \operatorname{sh}(\beta x)],$$

где A_1 и A_2 — постоянные, которые можно определить с помощью формул, указанных в 4.9.13.

4. $y(x) - \lambda \int_a^b \operatorname{ch}[\beta(x + t)] y(t) dt = f(x).$

Частный случай уравнения 4.9.12 при $g(x) = \operatorname{ch}(\beta x)$, $h(t) = \operatorname{sh}(\beta t)$.

Решение:

$$y(x) = f(x) + \lambda [A_1 \operatorname{ch}(\beta x) + A_2 \operatorname{sh}(\beta x)],$$

где A_1 и A_2 — постоянные, которые можно определить с помощью формул, указанных в 4.9.12.

5. $y(x) - \lambda \int_a^b \left\{ \sum_{k=1}^n A_k \operatorname{ch}[\beta_k(x - t)] \right\} y(t) dt = f(x), \quad n = 1, 2, \dots$

Частный случай уравнения 4.9.20.

6. $y(x) - \lambda \int_a^b \frac{\operatorname{ch}(\beta x)}{\operatorname{ch}(\beta t)} y(t) dt = f(x).$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \operatorname{ch}(\beta x)$, $h(t) = \frac{1}{\operatorname{ch}(\beta t)}$.

7. $y(x) - \lambda \int_a^b \frac{\operatorname{ch}(\beta t)}{\operatorname{ch}(\beta x)} y(t) dt = f(x).$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \frac{1}{\operatorname{ch}(\beta x)}$, $h(t) = \operatorname{ch}(\beta t)$.

8. $y(x) - \lambda \int_a^b \operatorname{ch}^k(\beta x) \operatorname{ch}^m(\mu t) y(t) dt = f(x).$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \operatorname{ch}^k(\beta x)$, $h(t) = \operatorname{ch}^m(\mu t)$.

$$9. \quad y(x) - \lambda \int_a^b t^k \operatorname{ch}^m(\beta x) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \operatorname{ch}^m(\beta x)$, $h(t) = t^k$.

$$10. \quad y(x) - \lambda \int_a^b x^k \operatorname{ch}^m(\beta t) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = x^k$, $h(t) = \operatorname{ch}^m(\beta t)$.

$$11. \quad y(x) - \lambda \int_a^b [A + B(x - t) \operatorname{ch}(\beta x)] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.10 при $h(x) = \operatorname{ch}(\beta x)$.

$$12. \quad y(x) - \lambda \int_a^b [A + B(x - t) \operatorname{ch}(\beta t)] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.8 при $h(t) = \operatorname{ch}(\beta t)$.

$$13. \quad y(x) + \lambda \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y(t) dt}{\operatorname{ch}[b(x - t)]} = f(x).$$

Решение при $b > \pi|\lambda|$:

$$y(x) = f(x) - \frac{2\lambda b}{\sqrt{b^2 - \pi^2 \lambda^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sh}[2k(x - t)]}{\operatorname{sh}[2b(x - t)]} f(t) dt, \quad k = \frac{b}{\pi} \arccos\left(\frac{\pi \lambda}{b}\right).$$

⊙ Литература: Ф. Д. Гахов, Ю. И. Черский (1978, стр. 88).

4.3-2. Ядра уравнений, содержащие гиперболический синус

$$14. \quad y(x) - \lambda \int_a^b \operatorname{sh}(\beta x) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \operatorname{sh}(\beta x)$, $h(t) = 1$.

$$15. \quad y(x) - \lambda \int_a^b \operatorname{sh}(\beta t) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = 1$, $h(t) = \operatorname{sh}(\beta t)$.

$$16. \quad y(x) - \lambda \int_a^b \operatorname{sh}[\beta(x - t)] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.16 при $g(x) = \operatorname{sh}(\beta x)$, $h(t) = \operatorname{ch}(\beta t)$.

Решение:

$$y(x) = f(x) + \lambda [A_1 \operatorname{sh}(\beta x) + A_2 \operatorname{ch}(\beta x)],$$

где A_1 и A_2 — постоянные, которые можно определить с помощью формул, указанных в 4.9.16.

$$17. \quad y(x) - \lambda \int_a^b \operatorname{sh}[\beta(x + t)] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.15 при $g(x) = \operatorname{sh}(\beta x)$, $h(t) = \operatorname{ch}(\beta t)$.

Решение:

$$y(x) = f(x) + \lambda [A_1 \operatorname{sh}(\beta x) + A_2 \operatorname{ch}(\beta x)],$$

где A_1 и A_2 — постоянные, которые можно определить с помощью формул, указанных в 4.9.15.

$$18. \quad y(x) - \lambda \int_a^b \left\{ \sum_{k=1}^n A_k \operatorname{sh}[\beta_k(x - t)] \right\} y(t) dt = f(x), \quad n = 1, 2, \dots$$

Частный случай уравнения 4.9.20.

$$19. \quad y(x) - \lambda \int_a^b \frac{\operatorname{sh}(\beta x)}{\operatorname{sh}(\beta t)} y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \operatorname{sh}(\beta x)$, $h(t) = \frac{1}{\operatorname{sh}(\beta t)}$.

$$20. \quad y(x) - \lambda \int_a^b \frac{\operatorname{sh}(\beta t)}{\operatorname{sh}(\beta x)} y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \frac{1}{\operatorname{sh}(\beta x)}$, $h(t) = \operatorname{sh}(\beta t)$.

$$21. \quad y(x) - \lambda \int_a^b \operatorname{sh}^k(\beta x) \operatorname{sh}^m(\mu t) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \operatorname{sh}^k(\beta x)$, $h(t) = \operatorname{sh}^m(\mu t)$.

$$22. \quad y(x) - \lambda \int_a^b t^k \operatorname{sh}^m(\beta x) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \operatorname{sh}^m(\beta x)$, $h(t) = t^k$.

$$23. \quad y(x) - \lambda \int_a^b x^k \operatorname{sh}^m(\beta t) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = x^k$, $h(t) = \operatorname{sh}^m(\beta t)$.

$$24. \quad y(x) - \lambda \int_a^b [A + B(x - t) \operatorname{sh}(\beta t)] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.8 при $h(t) = \operatorname{sh}(\beta t)$.

$$25. \quad y(x) - \lambda \int_a^b [A + B(x - t) \operatorname{sh}(\beta x)] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.10 при $h(x) = \operatorname{sh}(\beta x)$.

$$26. \quad y(x) + A \int_a^b \operatorname{sh}(\lambda|x - t|) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.38 при $g(t) = A$.

1°. Функция $y = y(x)$ удовлетворяет линейному неоднородному обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка с постоянными коэффициентами

$$y''_{xx} + \lambda(2A - \lambda)y = f''_{xx}(x) - \lambda^2 f(x). \quad (1)$$

Граничные условия для уравнения (1) имеют следующий вид (см. 4.9.38):

$$\begin{aligned} \operatorname{sh}[\lambda(b - a)]\varphi'_x(b) - \lambda \operatorname{ch}[\lambda(b - a)]\varphi(b) &= \lambda\varphi(a), \\ \operatorname{sh}[\lambda(b - a)]\varphi'_x(a) + \lambda \operatorname{ch}[\lambda(b - a)]\varphi(a) &= -\lambda\varphi(b), \end{aligned} \quad \varphi(x) = y(x) - f(x). \quad (2)$$

Уравнение (1) вместе с граничными условиями (2) описывает решение исходного интегрального уравнения.

2°. При $\lambda(2A - \lambda) = -k^2 < 0$ общее решение уравнения (1) дается формулой

$$y(x) = C_1 \operatorname{ch}(kx) + C_2 \operatorname{sh}(kx) + f(x) - \frac{2A\lambda}{k} \int_a^x \operatorname{sh}[k(x - t)]f(t) dt, \quad (3)$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

При $\lambda(2A - \lambda) = k^2 > 0$ общее решение уравнения (1) дается формулой

$$y(x) = C_1 \cos(kx) + C_2 \sin(kx) + f(x) - \frac{2A\lambda}{k} \int_a^x \sin[k(x - t)]f(t) dt. \quad (4)$$

При $\lambda = 2A$ общее решение уравнения (1) дается формулой

$$y(x) = C_1 + C_2 x + f(x) - 4A^2 \int_a^x (x - t)f(t) dt. \quad (5)$$

Условия (2) позволяют найти постоянные интегрирования C_1, C_2 в решениях (3)–(5).

$$27. \quad y(x) + A \int_a^b t \operatorname{sh}(\lambda|x-t|) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.38 при $g(t) = At$. Решение интегрального уравнения может быть выражено через функции Бесселя (или модифицированные функции Бесселя) порядка $1/3$.

$$28. \quad y(x) + A \int_a^b \operatorname{sh}^3(\lambda|x-t|) y(t) dt = f(x).$$

Используя формулу $\operatorname{sh}^3 \beta = \frac{1}{4} \operatorname{sh} 3\beta - \frac{3}{4} \operatorname{sh} \beta$, приходим к уравнению вида 4.3.29 при $n = 2$:

$$y(x) + \int_a^b \left[\frac{1}{4} A \operatorname{sh}(3\lambda|x-t|) - \frac{3}{4} A \operatorname{sh}(\lambda|x-t|) \right] y(t) dt = f(x).$$

$$29. \quad y(x) + \int_a^b \left[\sum_{k=1}^n A_k \operatorname{sh}(\lambda_k|x-t|) \right] y(t) dt = f(x), \quad -\infty < a < b < \infty.$$

1°. Раскроем модуль в одном из слагаемых в подынтегральном выражении:

$$I_k(x) = \int_a^b \operatorname{sh}(\lambda_k|x-t|) y(t) dt = \int_a^x \operatorname{sh}[\lambda_k(x-t)] y(t) dt + \int_x^b \operatorname{sh}[\lambda_k(t-x)] y(t) dt. \quad (1)$$

Продифференцируем (1) дважды по x . В результате имеем (штрихи обозначают производные по x)

$$\begin{aligned} I'_k &= \lambda_k \int_a^x \operatorname{ch}[\lambda_k(x-t)] y(t) dt - \lambda_k \int_x^b \operatorname{ch}[\lambda_k(t-x)] y(t) dt, \\ I''_k &= 2\lambda_k y(x) + \lambda_k^2 \int_a^x \operatorname{sh}[\lambda_k(x-t)] y(t) dt + \lambda_k^2 \int_x^b \operatorname{sh}[\lambda_k(t-x)] y(t) dt. \end{aligned} \quad (2)$$

Из сопоставления формул (1) и (2) получим связь между I'_k и I_k :

$$I''_k = 2\lambda_k y(x) + \lambda_k^2 I_k, \quad I_k = I_k(x). \quad (3)$$

2°. Интегральное уравнение с помощью (1) можно записать в виде

$$y(x) + \sum_{k=1}^n A_k I_k = f(x). \quad (4)$$

Дифференцируя (4) дважды по x , с учетом равенств (3) имеем

$$y''_{xx}(x) + \sigma_n y(x) + \sum_{k=1}^n A_k \lambda_k^2 I_k = f''_{xx}(x), \quad \sigma_n = 2 \sum_{k=1}^n A_k \lambda_k. \quad (5)$$

Исключая интеграл I_n из (4) и (5), получим

$$y''_{xx}(x) + (\sigma_n - \lambda_n^2) y(x) + \sum_{k=1}^{n-1} A_k (\lambda_k^2 - \lambda_n^2) I_k = f''_{xx}(x) - \lambda_n^2 f(x). \quad (6)$$

Если продифференцировать равенство (6) дважды по x , а затем исключить интеграл I_{n-1} из полученного выражения с помощью (6), придем к аналогичному равенству, в левой части которого будет стоять линейный дифференциальный оператор четвертого порядка с постоянными коэффициентами (действующий на y) и сумма $\sum_{k=1}^{n-2} B_k I_k$. Продолжая далее с помощью двукратного дифференцирования последовательно исключать слагаемые I_{n-2}, I_{n-3}, \dots , придем в итоге к линейному неоднородному обыкновенному дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами порядка $2n$.

3°. Граничные условия для функции $y(x)$ находятся в результате подстановки значения $x = a$ в интегральное уравнение и все его следствия, полученные с помощью дифференцирования. (Эти условия можно найти, подставляя значения $x = a$ и $x = b$ в интегральное уравнение и все его следствия, полученные с помощью двукратного дифференцирования.)

4.3-3. Ядра уравнений, содержащие гиперболический тангенс

$$30. \quad y(x) - \lambda \int_a^b \operatorname{th}(\beta x) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \operatorname{th}(\beta x)$, $h(t) = 1$.

$$31. \quad y(x) - \lambda \int_a^b \operatorname{th}(\beta t) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = 1$, $h(t) = \operatorname{th}(\beta t)$.

$$32. \quad y(x) - \lambda \int_a^b [A \operatorname{th}(\beta x) + B \operatorname{th}(\beta t)] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.4 при $g(x) = \operatorname{th}(\beta x)$.

$$33. \quad y(x) - \lambda \int_a^b \frac{\operatorname{th}(\beta x)}{\operatorname{th}(\beta t)} y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \operatorname{th}(\beta x)$, $h(t) = \frac{1}{\operatorname{th}(\beta t)}$.

$$34. \quad y(x) - \lambda \int_a^b \frac{\operatorname{th}(\beta t)}{\operatorname{th}(\beta x)} y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \frac{1}{\operatorname{th}(\beta x)}$, $h(t) = \operatorname{th}(\beta t)$.

$$35. \quad y(x) - \lambda \int_a^b \operatorname{th}^k(\beta x) \operatorname{th}^m(\mu t) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \operatorname{th}^k(\beta x)$, $h(t) = \operatorname{th}^m(\mu t)$.

$$36. \quad y(x) - \lambda \int_a^b t^k \operatorname{th}^m(\beta x) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \operatorname{th}^m(\beta x)$, $h(t) = t^k$.

$$37. \quad y(x) - \lambda \int_a^b x^k \operatorname{th}^m(\beta t) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = x^k$, $h(t) = \operatorname{th}^m(\beta t)$.

$$38. \quad y(x) - \lambda \int_a^b [A + B(x - t) \operatorname{th}(\beta t)] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.8 при $h(t) = \operatorname{th}(\beta t)$.

$$39. \quad y(x) - \lambda \int_a^b [A + B(x - t) \operatorname{th}(\beta x)] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.10 при $h(x) = \operatorname{th}(\beta x)$.

4.3-4. Ядра уравнений, содержащие гиперболический котангенс

$$40. \quad y(x) - \lambda \int_a^b \operatorname{cth}(\beta x) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \operatorname{cth}(\beta x)$, $h(t) = 1$.

$$41. \quad y(x) - \lambda \int_a^b \operatorname{cth}(\beta t) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = 1$, $h(t) = \operatorname{cth}(\beta t)$.

$$42. \quad y(x) - \lambda \int_a^b [A \operatorname{cth}(\beta x) + B \operatorname{cth}(\beta t)] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.4 при $g(x) = \operatorname{cth}(\beta x)$.

$$43. \quad y(x) - \lambda \int_a^b \frac{\operatorname{cth}(\beta x)}{\operatorname{cth}(\beta t)} y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \operatorname{cth}(\beta x)$, $h(t) = \frac{1}{\operatorname{cth}(\beta t)}$.

$$44. \quad y(x) - \lambda \int_a^b \frac{\operatorname{cth}(\beta t)}{\operatorname{cth}(\beta x)} y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \frac{1}{\operatorname{cth}(\beta x)}$, $h(t) = \operatorname{cth}(\beta t)$.

$$45. \quad y(x) - \lambda \int_a^b \operatorname{cth}^k(\beta x) \operatorname{cth}^m(\mu t) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \operatorname{cth}^k(\beta x)$, $h(t) = \operatorname{cth}^m(\mu t)$.

$$46. \quad y(x) - \lambda \int_a^b t^k \operatorname{cth}^m(\beta x) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \operatorname{cth}^m(\beta x)$, $h(t) = t^k$.

$$47. \quad y(x) - \lambda \int_a^b x^k \operatorname{cth}^m(\beta t) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = x^k$, $h(t) = \operatorname{cth}^m(\beta t)$.

$$48. \quad y(x) - \lambda \int_a^b [A + B(x - t) \operatorname{cth}(\beta t)] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.8 при $h(t) = \operatorname{cth}(\beta t)$.

$$49. \quad y(x) - \lambda \int_a^b [A + B(x - t) \operatorname{cth}(\beta x)] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.10 при $h(x) = \operatorname{cth}(\beta x)$.

4.3-5. Ядра уравнений, содержащие комбинации гиперболических функций

$$50. \quad y(x) - \lambda \int_a^b \operatorname{ch}^k(\beta x) \operatorname{sh}^m(\mu t) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \operatorname{ch}^k(\beta x)$, $h(t) = \operatorname{sh}^m(\mu t)$.

$$51. \quad y(x) - \lambda \int_a^b [A \operatorname{sh}(\alpha x) \operatorname{ch}(\beta t) + B \operatorname{sh}(\gamma x) \operatorname{ch}(\delta t)] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.18 при $g_1(x) = \operatorname{sh}(\alpha x)$, $h_1(t) = A \operatorname{ch}(\beta t)$, $g_2(x) = \operatorname{sh}(\gamma x)$, $h_2(t) = B \operatorname{ch}(\delta t)$.

$$52. \quad y(x) - \lambda \int_a^b \operatorname{th}^k(\gamma x) \operatorname{cth}^m(\mu t) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \operatorname{th}^k(\gamma x)$, $h(t) = \operatorname{cth}^m(\mu t)$.

$$53. \quad y(x) - \lambda \int_a^b [A \operatorname{th}(\alpha x) \operatorname{cth}(\beta t) + B \operatorname{th}(\gamma x) \operatorname{cth}(\delta t)] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.18 при $g_1(x) = \operatorname{th}(\alpha x)$, $h_1(t) = A \operatorname{cth}(\beta t)$, $g_2(x) = \operatorname{th}(\gamma x)$, $h_2(t) = B \operatorname{cth}(\delta t)$.

4.4. Уравнения, ядра которых содержат логарифмические функции

4.4-1. Ядра уравнений, содержащие логарифмические функции

$$1. \quad y(x) - \lambda \int_a^b \ln(\gamma x) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \ln(\gamma x)$, $h(t) = 1$.

$$2. \quad y(x) - \lambda \int_a^b \ln(\gamma t) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = 1$, $h(t) = \ln(\gamma t)$.

$$3. \quad y(x) - \lambda \int_a^b (\ln x - \ln t) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.3 при $g(x) = \ln x$.

$$4. \quad y(x) - \lambda \int_a^b \frac{\ln(\gamma x)}{\ln(\gamma t)} y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \ln(\gamma x)$, $h(t) = \frac{1}{\ln(\gamma t)}$.

$$5. \quad y(x) - \lambda \int_a^b \frac{\ln(\gamma t)}{\ln(\gamma x)} y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \frac{1}{\ln(\gamma x)}$, $h(t) = \ln(\gamma t)$.

$$6. \quad y(x) - \lambda \int_a^b \ln^k(\gamma x) \ln^m(\mu t) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \ln^k(\gamma x)$, $h(t) = \ln^m(\mu t)$.

4.4-2. Ядра уравнений, содержащие степенные и логарифмические функции

$$7. \quad y(x) - \lambda \int_a^b t^k \ln^m(\gamma x) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \ln^m(\gamma x)$, $h(t) = t^k$.

$$8. \quad y(x) - \lambda \int_a^b x^k \ln^m(\gamma t) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = x^k$, $h(t) = \ln^m(\gamma t)$.

$$9. \quad y(x) - \lambda \int_a^b [A + B(x - t) \ln(\gamma t)] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.8 при $h(t) = \ln(\gamma t)$.

$$10. \quad y(x) - \lambda \int_a^b [A + B(x-t) \ln(\gamma x)] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.10 при $h(x) = \ln(\gamma x)$.

$$11. \quad y(x) - \lambda \int_a^b [A + (Bx + Ct) \ln(\gamma t)] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.9 при $h(t) = \ln(\gamma t)$.

$$12. \quad y(x) - \lambda \int_a^b [A + (Bx + Ct) \ln(\gamma x)] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.11 при $h(x) = \ln(\gamma x)$.

$$13. \quad y(x) - \lambda \int_a^b [At^n \ln^m(\beta x) + Bx^k \ln^l(\gamma t)] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.18 при $g_1(x) = \ln^m(\beta x)$, $h_1(t) = At^n$, $g_2(x) = x^k$, $h_2(t) = B \ln^l(\gamma t)$.

4.5. Уравнения, ядра которых содержат тригонометрические функции

4.5-1. Ядра уравнений, содержащие косинус

$$1. \quad y(x) - \lambda \int_a^b \cos(\beta x) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \cos(\beta x)$, $h(t) = 1$.

$$2. \quad y(x) - \lambda \int_a^b \cos(\beta t) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = 1$, $h(t) = \cos(\beta t)$.

$$3. \quad y(x) - \lambda \int_a^b \cos[\beta(x-t)] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.12 при $g(x) = \cos(\beta x)$, $h(t) = \sin(\beta t)$.

Решение:

$$y(x) = f(x) + \lambda [A_1 \cos(\beta x) + A_2 \sin(\beta x)],$$

где A_1 и A_2 — постоянные, которые можно определить с помощью формул, указанных в 4.9.12.

$$4. \quad y(x) - \lambda \int_a^b \cos[\beta(x+t)] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.13 при $g(x) = \cos(\beta x)$, $h(t) = \sin(\beta t)$.

Решение:

$$y(x) = f(x) + \lambda [A_1 \cos(\beta x) + A_2 \sin(\beta x)],$$

где A_1 и A_2 — постоянные, которые можно определить с помощью формул, указанных в 4.9.13.

$$5. \quad y(x) - \lambda \int_0^\infty \cos(xt) y(t) dt = 0.$$

Характеристические значения: $\lambda = \pm \sqrt{2/\pi}$. При этих значениях интегральное уравнение имеет бесконечное множество линейно независимых собственных функций.

Собственные функции при $\lambda = +\sqrt{2/\pi}$:

$$y_+(x) = f(x) + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(t) \cos(xt) dt, \quad (1)$$

где $f = f(x)$ — любая непрерывная функция, абсолютно интегрируемая на полуинтервале $[0, \infty)$.

Собственные функции при $\lambda = -\sqrt{2/\pi}$:

$$y_-(x) = f(x) - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(t) \cos(xt) dt, \quad (2)$$

где $f = f(x)$ — любая непрерывная функция, абсолютно интегрируемая на полуинтервале $[0, \infty)$.

Из формул (1), (2) при $f(x) = e^{-ax}$, в частности, получим

$$\begin{aligned} y_+(x) &= e^{-ax} + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{a^2 + x^2} & \text{при } \lambda = +\sqrt{\frac{2}{\pi}}, \\ y_-(x) &= e^{-ax} - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{a^2 + x^2} & \text{при } \lambda = -\sqrt{\frac{2}{\pi}}, \end{aligned}$$

где $a > 0$ — любое.

⊙ Литература: М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко (1968, стр. 139–141).

$$6. \quad y(x) - \lambda \int_0^\infty \cos(xt) y(t) dt = f(x).$$

Решение:

$$y(x) = \frac{f(x)}{1 - \frac{\pi}{2}\lambda^2} + \frac{\lambda}{1 - \frac{\pi}{2}\lambda^2} \int_0^\infty \cos(xt) f(t) dt,$$

где $\lambda \neq \pm\sqrt{2/\pi}$.

⊙ Литература: М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко (1968, стр. 148–150).

$$7. \quad y(x) - \lambda \int_a^b \left\{ \sum_{k=1}^n A_k \cos[\beta_k(x-t)] \right\} y(t) dt = f(x), \quad n = 1, 2, \dots$$

Это уравнение сводится к частному случаю уравнения 4.9.20. Следует использовать формулу $\cos[\beta(x-t)] = \cos(\beta x) \cos(\beta t) + \sin(\beta x) \sin(\beta t)$.

$$8. \quad y(x) - \lambda \int_a^b \frac{\cos(\beta x)}{\cos(\beta t)} y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \cos(\beta x)$, $h(t) = \frac{1}{\cos(\beta t)}$.

$$9. \quad y(x) - \lambda \int_a^b \frac{\cos(\beta t)}{\cos(\beta x)} y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \frac{1}{\cos(\beta x)}$, $h(t) = \cos(\beta t)$.

$$10. \quad y(x) - \lambda \int_a^b \cos^k(\beta x) \cos^m(\mu t) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \cos^k(\beta x)$, $h(t) = \cos^m(\mu t)$.

$$11. \quad y(x) - \lambda \int_a^b t^k \cos^m(\beta x) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \cos^m(\beta x)$, $h(t) = t^k$.

$$12. \quad y(x) - \lambda \int_a^b x^k \cos^m(\beta t) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = x^k$, $h(t) = \cos^m(\beta t)$.

$$13. \quad y(x) - \lambda \int_a^b [A + B(x-t) \cos(\beta x)] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.10 при $h(x) = \cos(\beta x)$.

$$14. \quad y(x) - \lambda \int_a^b [A + B(x-t) \cos(\beta t)] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.8 при $h(t) = \cos(\beta t)$.

4.5-2. Ядра уравнений, содержащие синус

$$15. \quad y(x) - \lambda \int_a^b \sin(\beta x) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \sin(\beta x)$, $h(t) = 1$.

$$16. \quad y(x) - \lambda \int_a^b \sin(\beta t) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = 1$, $h(t) = \sin(\beta t)$.

$$17. \quad y(x) - \lambda \int_a^b \sin[\beta(x-t)] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.16 при $g(x) = \sin(\beta x)$, $h(t) = \cos(\beta t)$.

Решение:

$$y(x) = f(x) + \lambda [A_1 \sin(\beta x) + A_2 \cos(\beta x)],$$

где A_1 и A_2 — постоянные, которые можно определить с помощью формул, указанных в 4.9.16.

$$18. \quad y(x) - \lambda \int_a^b \sin[\beta(x+t)] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.15 при $g(x) = \sin(\beta x)$, $h(t) = \cos(\beta t)$.

Решение:

$$y(x) = f(x) + \lambda [A_1 \sin(\beta x) + A_2 \cos(\beta x)],$$

где A_1 и A_2 — постоянные, которые можно определить с помощью формул, указанных в 4.9.15.

$$19. \quad y(x) - \lambda \int_0^\infty \sin(xt) y(t) dt = 0.$$

Характеристические значения: $\lambda = \pm \sqrt{2/\pi}$. При этих значениях интегральное уравнение имеет бесконечное множество линейно независимых собственных функций.

Собственные функции при $\lambda = +\sqrt{2/\pi}$:

$$y_+(x) = f(x) + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(t) \sin(xt) dt,$$

где $f = f(x)$ — любая непрерывная функция, абсолютно интегрируемая на полуинтервале $[0, \infty)$.

Собственные функции при $\lambda = -\sqrt{2/\pi}$:

$$y_-(x) = f(x) - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(t) \sin(xt) dt,$$

где $f = f(x)$ — любая непрерывная функция, абсолютно интегрируемая на полуинтервале $[0, \infty)$.

● Литература: М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко (1968, стр. 141).

$$20. \quad y(x) - \lambda \int_0^\infty \sin(xt)y(t) dt = f(x).$$

Решение:

$$y(x) = \frac{f(x)}{1 - \frac{\pi}{2}\lambda^2} + \frac{\lambda}{1 - \frac{\pi}{2}\lambda^2} \int_0^\infty \sin(xt)f(t) dt,$$

где $\lambda \neq \pm\sqrt{2/\pi}$.

⊙ Литература: М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко (1968, стр. 150), Ф. Д. Гахов, Ю. И. Черский (1978, стр. 88).

$$21. \quad y(x) - \lambda \int_a^b \left\{ \sum_{k=1}^n A_k \sin[\beta_k(x-t)] \right\} y(t) dt = f(x), \quad n = 1, 2, \dots$$

Это уравнение сводится к частному случаю уравнения 4.9.20. Следует использовать формулу $\sin[\beta(x-t)] = \sin(\beta x) \cos(\beta t) - \sin(\beta t) \cos(\beta x)$.

$$22. \quad y(x) - \lambda \int_a^b \frac{\sin(\beta x)}{\sin(\beta t)} y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \sin(\beta x)$, $h(t) = \frac{1}{\sin(\beta t)}$.

$$23. \quad y(x) - \lambda \int_a^b \frac{\sin(\beta t)}{\sin(\beta x)} y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \frac{1}{\sin(\beta x)}$, $h(t) = \sin(\beta t)$.

$$24. \quad y(x) - \lambda \int_a^b \sin^k(\beta x) \sin^m(\mu t) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \sin^k(\beta x)$, $h(t) = \sin^m(\mu t)$.

$$25. \quad y(x) - \lambda \int_a^b t^k \sin^m(\beta x) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \sin^m(\beta x)$, $h(t) = t^k$.

$$26. \quad y(x) - \lambda \int_a^b x^k \sin^m(\beta t) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = x^k$, $h(t) = \sin^m(\beta t)$.

$$27. \quad y(x) - \lambda \int_a^b [A + B(x-t) \sin(\beta t)] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.8 при $h(t) = \sin(\beta t)$.

$$28. \quad y(x) - \lambda \int_a^b [A + B(x-t) \sin(\beta x)] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.10 при $h(x) = \sin(\beta x)$.

$$29. \quad y(x) + A \int_a^b \sin(\lambda|x-t|) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.39 при $g(t) = A$.

1°. Функция $y = y(x)$ удовлетворяет линейному неоднородному обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка с постоянными коэффициентами

$$y''_{xx} + \lambda(2A + \lambda)y = f''_{xx}(x) + \lambda^2 f(x). \quad (1)$$

Граничные условия для уравнения (1) имеют следующий вид (см. 4.9.39):

$$\begin{aligned} \sin[\lambda(b-a)]\varphi'_x(b) - \lambda \cos[\lambda(b-a)]\varphi(b) &= \lambda\varphi(a), \\ \sin[\lambda(b-a)]\varphi'_x(a) + \lambda \cos[\lambda(b-a)]\varphi(a) &= -\lambda\varphi(b), \end{aligned} \quad \varphi(x) = y(x) - f(x). \quad (2)$$

Уравнение (1) вместе с граничными условиями (2) описывает решение исходного интегрального уравнения.

2°. При $\lambda(2A + \lambda) = -k^2 < 0$ общее решение уравнения (1) дается формулой

$$y(x) = C_1 \operatorname{ch}(kx) + C_2 \operatorname{sh}(kx) + f(x) - \frac{2A\lambda}{k} \int_a^x \operatorname{sh}[k(x-t)] f(t) dt, \quad (3)$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

При $\lambda(2A + \lambda) = k^2 > 0$ общее решение уравнения (1) дается формулой

$$y(x) = C_1 \cos(kx) + C_2 \sin(kx) + f(x) - \frac{2A\lambda}{k} \int_a^x \sin[k(x-t)] f(t) dt. \quad (4)$$

При $\lambda = 2A$ общее решение уравнения (1) дается формулой

$$y(x) = C_1 + C_2 x + f(x) + 4A^2 \int_a^x (x-t)f(t) dt. \quad (5)$$

Условия (2) позволяют найти постоянные интегрирования C_1, C_2 в решениях (3)–(5).

30. $y(x) + A \int_a^b t \sin(\lambda|x-t|)y(t) dt = f(x).$

Частный случай уравнения 4.9.39 при $g(t) = At$. Решение интегрального уравнения может быть выражено через функции Бесселя (или модифицированные функции Бесселя) порядка $1/3$.

31. $y(x) + A \int_a^b \sin^3(\lambda|x-t|)y(t) dt = f(x).$

Используя формулу $\sin^3 \beta = -\frac{1}{4} \sin 3\beta + \frac{3}{4} \sin \beta$, приходим к уравнению вида 4.5.32 при $n = 2$:

$$y(x) + \int_a^b \left[-\frac{1}{4} A \sin(3\lambda|x-t|) + \frac{3}{4} A \sin(\lambda|x-t|) \right] y(t) dt = f(x).$$

32. $y(x) + \int_a^b \left[\sum_{k=1}^n A_k \sin(\lambda_k|x-t|) \right] y(t) dt = f(x), \quad -\infty < a < b < \infty.$

1°. Раскроем модуль в одном из слагаемых в подынтегральном выражении:

$$I_k(x) = \int_a^b \sin(\lambda_k|x-t|)y(t) dt = \int_a^x \sin[\lambda_k(x-t)]y(t) dt + \int_x^b \sin[\lambda_k(t-x)]y(t) dt. \quad (1)$$

Продифференцируем (1) дважды по x . В результате имеем (штрихи обозначают производные по x)

$$\begin{aligned} I'_k &= \lambda_k \int_a^x \cos[\lambda_k(x-t)]y(t) dt - \lambda_k \int_x^b \cos[\lambda_k(t-x)]y(t) dt, \\ I''_k &= 2\lambda_k y(x) - \lambda_k^2 \int_a^x \sin[\lambda_k(x-t)]y(t) dt - \lambda_k^2 \int_x^b \sin[\lambda_k(t-x)]y(t) dt. \end{aligned} \quad (2)$$

Из сопоставления формул (1) и (2) получим связь между I''_k и I_k :

$$I''_k = 2\lambda_k y(x) - \lambda_k^2 I_k, \quad I_k = I_k(x). \quad (3)$$

2°. Интегральное уравнение с помощью (1) можно записать в виде

$$y(x) + \sum_{k=1}^n A_k I_k = f(x). \quad (4)$$

Дифференцируя (4) дважды по x , с учетом равенств (3) имеем

$$y''_{xx}(x) + \sigma_n y(x) - \sum_{k=1}^n A_k \lambda_k^2 I_k = f''_{xx}(x), \quad \sigma_n = 2 \sum_{k=1}^n A_k \lambda_k. \quad (5)$$

Исключая интеграл I_n из (4) и (5), получим

$$y''_{xx}(x) + (\sigma_n + \lambda_n^2) y(x) + \sum_{k=1}^{n-1} A_k (\lambda_n^2 - \lambda_k^2) I_k = f''_{xx}(x) + \lambda_n^2 f(x). \quad (6)$$

Если продифференцировать равенство (6) дважды по x , а затем исключить интеграл I_{n-1} из полученного выражения с помощью (6), придем к аналогичному равенству, в левой части которого будет стоять линейный дифференциальный оператор четвертого порядка с постоянными коэффициентами (действующий на y) и сумма $\sum_{k=1}^{n-2} B_k I_k$. Продолжая далее с помощью двукратного дифференцирования последовательно исключать слагаемые I_{n-2}, I_{n-3}, \dots , придем в итоге к линейному неоднородному обыкновенному дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами порядка $2n$.

3°. Граничные условия для функции $y(x)$ находятся в результате подстановки значения $x = a$ в интегральное уравнение и все его следствия, полученные с помощью дифференцирования. (Эти условия можно найти, подставляя значения $x = a$ и $x = b$ в интегральное уравнение и все его следствия, полученные с помощью двукратного дифференцирования.)

$$33. \quad y(x) - \lambda \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x-t)}{x-t} y(t) dt = f(x).$$

Решение:

$$y(x) = f(x) + \frac{\lambda}{\sqrt{2\pi} - \pi\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x-t)}{x-t} f(t) dt, \quad \lambda \neq \sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

⊙ Литература: Ф. Д. Гахов, Ю. И. Черский (1978, стр. 87).

4.5-3. Ядра уравнений, содержащие тангенс

$$34. \quad y(x) - \lambda \int_a^b \operatorname{tg}(\beta x) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \operatorname{tg}(\beta x)$, $h(t) = 1$.

$$35. \quad y(x) - \lambda \int_a^b \operatorname{tg}(\beta t) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = 1$, $h(t) = \operatorname{tg}(\beta t)$.

$$36. \quad y(x) - \lambda \int_a^b [A \operatorname{tg}(\beta x) + B \operatorname{tg}(\beta t)] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.4 при $g(x) = \operatorname{tg}(\beta x)$.

$$37. \quad y(x) - \lambda \int_a^b \frac{\operatorname{tg}(\beta x)}{\operatorname{tg}(\beta t)} y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \operatorname{tg}(\beta x)$, $h(t) = \frac{1}{\operatorname{tg}(\beta t)}$.

$$38. \quad y(x) - \lambda \int_a^b \frac{\operatorname{tg}(\beta t)}{\operatorname{tg}(\beta x)} y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \frac{1}{\operatorname{tg}(\beta x)}$, $h(t) = \operatorname{tg}(\beta t)$.

$$39. \quad y(x) - \lambda \int_a^b \operatorname{tg}^k(\beta x) \operatorname{tg}^m(\mu t) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \operatorname{tg}^k(\beta x)$, $h(t) = \operatorname{tg}^m(\mu t)$.

$$40. \quad y(x) - \lambda \int_a^b t^k \operatorname{tg}^m(\beta x) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \operatorname{tg}^m(\beta x)$, $h(t) = t^k$.

$$41. \quad y(x) - \lambda \int_a^b x^k \operatorname{tg}^m(\beta t) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = x^k$, $h(t) = \operatorname{tg}^m(\beta t)$.

$$42. \quad y(x) - \lambda \int_a^b [A + B(x - t) \operatorname{tg}(\beta t)] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.8 при $h(t) = \operatorname{tg}(\beta t)$.

$$43. \quad y(x) - \lambda \int_a^b [A + B(x - t) \operatorname{tg}(\beta x)] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.10 при $h(x) = \operatorname{tg}(\beta x)$.

4.5-4. Ядра уравнений, содержащие котангенс

$$44. \quad y(x) - \lambda \int_a^b \operatorname{ctg}(\beta x) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \operatorname{ctg}(\beta x)$, $h(t) = 1$.

$$45. \quad y(x) - \lambda \int_a^b \operatorname{ctg}(\beta t) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = 1$, $h(t) = \operatorname{ctg}(\beta t)$.

$$46. \quad y(x) - \lambda \int_a^b [A \operatorname{ctg}(\beta x) + B \operatorname{ctg}(\beta t)] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.4 при $g(x) = \operatorname{ctg}(\beta x)$.

$$47. \quad y(x) - \lambda \int_a^b \frac{\operatorname{ctg}(\beta x)}{\operatorname{ctg}(\beta t)} y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \operatorname{ctg}(\beta x)$, $h(t) = \frac{1}{\operatorname{ctg}(\beta t)}$.

$$48. \quad y(x) - \lambda \int_a^b \frac{\operatorname{ctg}(\beta t)}{\operatorname{ctg}(\beta x)} y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \frac{1}{\operatorname{ctg}(\beta x)}$, $h(t) = \operatorname{ctg}(\beta t)$.

$$49. \quad y(x) - \lambda \int_a^b \operatorname{ctg}^k(\beta x) \operatorname{ctg}^m(\mu t) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \operatorname{ctg}^k(\beta x)$, $h(t) = \operatorname{ctg}^m(\mu t)$.

$$50. \quad y(x) - \lambda \int_a^b t^k \operatorname{ctg}^m(\beta x) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \operatorname{ctg}^m(\beta x)$, $h(t) = t^k$.

$$51. \quad y(x) - \lambda \int_a^b x^k \operatorname{ctg}^m(\beta t) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = x^k$, $h(t) = \operatorname{ctg}^m(\beta t)$.

$$52. \quad y(x) - \lambda \int_a^b [A + B(x - t) \operatorname{ctg}(\beta t)] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.8 при $h(t) = \operatorname{ctg}(\beta t)$.

$$53. \quad y(x) - \lambda \int_a^b [A + B(x - t) \operatorname{ctg}(\beta x)] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.10 при $h(x) = \operatorname{ctg}(\beta x)$.

4.5-5. Ядра уравнений, содержащие комбинации тригонометрических функций

$$54. \quad y(x) - \lambda \int_a^b \cos^k(\beta x) \sin^m(\mu t) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \cos^k(\beta x)$, $h(t) = \sin^m(\mu t)$.

$$55. \quad y(x) - \lambda \int_a^b [A \sin(\alpha x) \cos(\beta t) + B \sin(\gamma x) \cos(\delta t)] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.18 при $g_1(x) = \sin(\alpha x)$, $h_1(t) = A \cos(\beta t)$, $g_2(x) = \sin(\gamma x)$, $h_2(t) = B \cos(\delta t)$.

$$56. \quad y(x) - \lambda \int_a^b \operatorname{tg}^k(\gamma x) \operatorname{ctg}^m(\mu t) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \operatorname{tg}^k(\gamma x)$, $h(t) = \operatorname{ctg}^m(\mu t)$.

$$57. \quad y(x) - \lambda \int_a^b [A \operatorname{tg}(\alpha x) \operatorname{ctg}(\beta t) + B \operatorname{tg}(\gamma x) \operatorname{ctg}(\delta t)] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.18 при $g_1(x) = \operatorname{tg}(\alpha x)$, $h_1(t) = A \operatorname{ctg}(\beta t)$, $g_2(x) = \operatorname{tg}(\gamma x)$, $h_2(t) = B \operatorname{ctg}(\delta t)$.

4.5-6. Сингулярное уравнение

$$58. \quad Ay(x) - \frac{B}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{ctg}\left(\frac{t-x}{2}\right) y(t) dt = f(x), \quad 0 \leq x \leq 2\pi.$$

Здесь интеграл понимается в смысле главного значения по Коши. Без потери общности можно считать, что $A^2 + B^2 = 1$.

Решение:

$$y(x) = Af(x) + \frac{B}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{ctg}\left(\frac{t-x}{2}\right) f(t) dt + \frac{B^2}{2\pi A} \int_0^{2\pi} f(t) dt.$$

⊙ Литература: И. К. Лифанов (1995, стр. 57).

4.6. Уравнения, ядра которых содержат обратные тригонометрические функции

4.6-1. Ядра уравнений, содержащие арккосинус

$$1. \quad y(x) - \lambda \int_a^b \arccos(\beta x) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \arccos(\beta x)$, $h(t) = 1$.

$$2. \quad y(x) - \lambda \int_a^b \arccos(\beta t) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = 1$, $h(t) = \arccos(\beta t)$.

$$3. \quad y(x) - \lambda \int_a^b \frac{\arccos(\beta x)}{\arccos(\beta t)} y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \arccos(\beta x)$, $h(t) = \frac{1}{\arccos(\beta t)}$.

$$4. \quad y(x) - \lambda \int_a^b \frac{\arccos(\beta t)}{\arccos(\beta x)} y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \frac{1}{\arccos(\beta x)}$, $h(t) = \arccos(\beta t)$.

$$5. \quad y(x) - \lambda \int_a^b \arccos^k(\beta x) \arccos^m(\mu t) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \arccos^k(\beta x)$, $h(t) = \arccos^m(\mu t)$.

$$6. \quad y(x) - \lambda \int_a^b t^k \arccos^m(\beta x) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \arccos^m(\beta x)$, $h(t) = t^k$.

$$7. \quad y(x) - \lambda \int_a^b x^k \arccos^m(\beta t) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = x^k$, $h(t) = \arccos^m(\beta t)$.

$$8. \quad y(x) - \lambda \int_a^b [A + B(x - t) \arccos(\beta x)] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.10 при $h(x) = \arccos(\beta x)$.

$$9. \quad y(x) - \lambda \int_a^b [A + B(x - t) \arccos(\beta t)] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.8 при $h(t) = \arccos(\beta t)$.

4.6-2. Ядра уравнений, содержащие арксинус

$$10. \quad y(x) - \lambda \int_a^b \arcsin(\beta x) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \arcsin(\beta x)$, $h(t) = 1$.

$$11. \quad y(x) - \lambda \int_a^b \arcsin(\beta t) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = 1$, $h(t) = \arcsin(\beta t)$.

$$12. \quad y(x) - \lambda \int_a^b \frac{\arcsin(\beta x)}{\arcsin(\beta t)} y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \arcsin(\beta x)$, $h(t) = \frac{1}{\arcsin(\beta t)}$.

$$13. \quad y(x) - \lambda \int_a^b \frac{\arcsin(\beta t)}{\arcsin(\beta x)} y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \frac{1}{\arcsin(\beta x)}$, $h(t) = \arcsin(\beta t)$.

$$14. \quad y(x) - \lambda \int_a^b \arcsin^k(\beta x) \arcsin^m(\mu t) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \arcsin^k(\beta x)$, $h(t) = \arcsin^m(\mu t)$.

$$15. \quad y(x) - \lambda \int_a^b t^k \arcsin^m(\beta x) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \arcsin^m(\beta x)$, $h(t) = t^k$.

$$16. \quad y(x) - \lambda \int_a^b x^k \arcsin^m(\beta t) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = x^k$, $h(t) = \arcsin^m(\beta t)$.

$$17. \quad y(x) - \lambda \int_a^b [A + B(x - t) \arcsin(\beta t)] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.8 при $h(t) = \arcsin(\beta t)$.

$$18. \quad y(x) - \lambda \int_a^b [A + B(x - t) \arcsin(\beta x)] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.10 при $h(x) = \arcsin(\beta x)$.

4.6-3. Ядра уравнений, содержащие арктангенс

$$19. \quad y(x) - \lambda \int_a^b \operatorname{arctg}(\beta x) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \operatorname{arctg}(\beta x)$, $h(t) = 1$.

$$20. \quad y(x) - \lambda \int_a^b \operatorname{arctg}(\beta t) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = 1$, $h(t) = \operatorname{arctg}(\beta t)$.

$$21. \quad y(x) - \lambda \int_a^b [A \operatorname{arctg}(\beta x) + B \operatorname{arctg}(\beta t)] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.4 при $g(x) = \operatorname{arctg}(\beta x)$.

$$22. \quad y(x) - \lambda \int_a^b \frac{\operatorname{arctg}(\beta x)}{\operatorname{arctg}(\beta t)} y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \operatorname{arctg}(\beta x)$, $h(t) = \frac{1}{\operatorname{arctg}(\beta t)}$.

$$23. \quad y(x) - \lambda \int_a^b \frac{\operatorname{arctg}(\beta t)}{\operatorname{arctg}(\beta x)} y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \frac{1}{\operatorname{arctg}(\beta x)}$, $h(t) = \operatorname{arctg}(\beta t)$.

$$24. \quad y(x) - \lambda \int_a^b \operatorname{arctg}^k(\beta x) \operatorname{arctg}^m(\mu t) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \operatorname{arctg}^k(\beta x)$, $h(t) = \operatorname{arctg}^m(\mu t)$.

$$25. \quad y(x) - \lambda \int_a^b t^k \operatorname{arctg}^m(\beta x) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \operatorname{arctg}^m(\beta x)$, $h(t) = t^k$.

$$26. \quad y(x) - \lambda \int_a^b x^k \operatorname{arctg}^m(\beta t) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = x^k$, $h(t) = \operatorname{arctg}^m(\beta t)$.

$$27. \quad y(x) - \lambda \int_a^b [A + B(x - t) \operatorname{arctg}(\beta t)] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.8 при $h(t) = \operatorname{arctg}(\beta t)$.

$$28. \quad y(x) - \lambda \int_a^b [A + B(x - t) \operatorname{arctg}(\beta x)] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.10 при $h(x) = \operatorname{arctg}(\beta x)$.

4.6-4. Ядра уравнений, содержащие арккотангенс

$$29. \quad y(x) - \lambda \int_a^b \operatorname{arcctg}(\beta x) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \operatorname{arcctg}(\beta x)$, $h(t) = 1$.

$$30. \quad y(x) - \lambda \int_a^b \operatorname{arcctg}(\beta t) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = 1$, $h(t) = \operatorname{arcctg}(\beta t)$.

$$31. \quad y(x) - \lambda \int_a^b [A \operatorname{arcctg}(\beta x) + B \operatorname{arcctg}(\beta t)] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.4 при $g(x) = \operatorname{arcctg}(\beta x)$.

$$32. \quad y(x) - \lambda \int_a^b \frac{\operatorname{arcctg}(\beta x)}{\operatorname{arcctg}(\beta t)} y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \operatorname{arcctg}(\beta x)$, $h(t) = \frac{1}{\operatorname{arcctg}(\beta t)}$.

$$33. \quad y(x) - \lambda \int_a^b \frac{\operatorname{arcctg}(\beta t)}{\operatorname{arcctg}(\beta x)} y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \frac{1}{\operatorname{arcctg}(\beta x)}$, $h(t) = \operatorname{arcctg}(\beta t)$.

$$34. \quad y(x) - \lambda \int_a^b \operatorname{arcctg}^k(\beta x) \operatorname{arcctg}^m(\mu t) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \operatorname{arcctg}^k(\beta x)$, $h(t) = \operatorname{arcctg}^m(\mu t)$.

$$35. \quad y(x) - \lambda \int_a^b t^k \operatorname{arcctg}^m(\beta x) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \operatorname{arcctg}^m(\beta x)$, $h(t) = t^k$.

$$36. \quad y(x) - \lambda \int_a^b x^k \operatorname{arcctg}^m(\beta t) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = x^k$, $h(t) = \operatorname{arcctg}^m(\beta t)$.

$$37. \quad y(x) - \lambda \int_a^b [A + B(x - t) \operatorname{arcctg}(\beta t)] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.8 при $h(t) = \operatorname{arcctg}(\beta t)$.

$$38. \quad y(x) - \lambda \int_a^b [A + B(x-t) \operatorname{arctg}(\beta x)] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.10 при $h(x) = \operatorname{arctg}(\beta x)$.

4.7. Уравнения, ядра которых содержат комбинации элементарных функций

4.7-1. Ядра уравнений, содержащие экспоненциальные и гиперболические функции

$$1. \quad y(x) - \lambda \int_a^b e^{\mu(x-t)} \operatorname{ch}[\beta(x-t)] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.18 при $g_1(x) = e^{\mu x} \operatorname{ch}(\beta x)$, $h_1(t) = e^{-\mu t} \operatorname{ch}(\beta t)$, $g_2(x) = e^{\mu x} \operatorname{sh}(\beta x)$, $h_2(t) = -e^{-\mu t} \operatorname{sh}(\beta t)$.

$$2. \quad y(x) - \lambda \int_a^b e^{\mu(x-t)} \operatorname{sh}[\beta(x-t)] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.18 при $g_1(x) = e^{\mu x} \operatorname{sh}(\beta x)$, $h_1(t) = e^{-\mu t} \operatorname{ch}(\beta t)$, $g_2(x) = e^{\mu x} \operatorname{ch}(\beta x)$, $h_2(t) = -e^{-\mu t} \operatorname{sh}(\beta t)$.

$$3. \quad y(x) - \lambda \int_a^b t e^{\mu(x-t)} \operatorname{sh}[\beta(x-t)] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.18 при $g_1(x) = e^{\mu x} \operatorname{sh}(\beta x)$, $h_1(t) = t e^{-\mu t} \operatorname{ch}(\beta t)$, $g_2(x) = e^{\mu x} \operatorname{ch}(\beta x)$, $h_2(t) = -t e^{-\mu t} \operatorname{sh}(\beta t)$.

4.7-2. Ядра уравнений, содержащие экспоненциальные и логарифмические функции

$$4. \quad y(x) - \lambda \int_a^b e^{\mu t} \ln(\beta x) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \ln(\beta x)$, $h(t) = e^{\mu t}$.

$$5. \quad y(x) - \lambda \int_a^b e^{\mu x} \ln(\beta t) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = e^{\mu x}$, $h(t) = \ln(\beta t)$.

$$6. \quad y(x) - \lambda \int_a^b e^{\mu(x-t)} \ln(\beta x) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = e^{\mu x} \ln(\beta x)$, $h(t) = e^{-\mu t}$.

$$7. \quad y(x) - \lambda \int_a^b e^{\mu(x-t)} \ln(\beta t) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = e^{\mu x}$, $h(t) = e^{-\mu t} \ln(\beta t)$.

$$8. \quad y(x) - \lambda \int_a^b e^{\mu(x-t)} (\ln x - \ln t) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.18 при $g_1(x) = e^{\mu x} \ln x$, $h_1(t) = e^{-\mu t}$, $g_2(x) = e^{\mu x}$, $h_2(t) = -e^{-\mu t} \ln t$.

$$9. \quad y(x) + \frac{b^2 - a^2}{2a} \int_0^\infty \frac{1}{t} \exp\left(-a \left| \ln \frac{x}{t} \right| \right) y(t) dt = f(x).$$

Решение при $a > 0$, $b > 0$, $x > 0$:

$$y(x) = f(x) + \frac{a^2 - b^2}{2b} \int_0^\infty \frac{1}{t} \exp\left(-b \left| \ln \frac{x}{t} \right| \right) f(t) dt.$$

⊙ Литература: Ф. Д. Гахов, Ю. И. Черский (1978, стр. 91).

4.7-3. Ядра уравнений, содержащие экспоненциальные и тригонометрические функции

10. $y(x) - \lambda \int_a^b e^{\mu t} \cos(\beta x) y(t) dt = f(x).$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \cos(\beta x)$, $h(t) = e^{\mu t}$.

11. $y(x) - \lambda \int_a^b e^{\mu x} \cos(\beta t) y(t) dt = f(x).$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = e^{\mu x}$, $h(t) = \cos(\beta t)$.

12. $y(x) - \lambda \int_0^\infty e^{\mu(x-t)} \cos(xt) y(t) dt = f(x).$

Решение:

$$y(x) = \frac{f(x)}{1 - \frac{\pi}{2}\lambda^2} + \frac{\lambda}{1 - \frac{\pi}{2}\lambda^2} \int_0^\infty e^{\mu(x-t)} \cos(xt) f(t) dt, \quad \lambda \neq \pm\sqrt{2/\pi}.$$

13. $y(x) - \lambda \int_a^b e^{\mu(x-t)} \cos[\beta(x-t)] y(t) dt = f(x).$

Частный случай уравнения 4.9.18 при $g_1(x) = e^{\mu x} \cos(\beta x)$, $h_1(t) = e^{-\mu t} \cos(\beta t)$, $g_2(x) = e^{\mu x} \sin(\beta x)$, $h_2(t) = e^{-\mu t} \sin(\beta t)$.

14. $y(x) - \lambda \int_a^b e^{\mu t} \sin(\beta x) y(t) dt = f(x).$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \sin(\beta x)$, $h(t) = e^{\mu t}$.

15. $y(x) - \lambda \int_a^b e^{\mu x} \sin(\beta t) y(t) dt = f(x).$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = e^{\mu x}$, $h(t) = \sin(\beta t)$.

16. $y(x) - \lambda \int_0^\infty e^{\mu(x-t)} \sin(xt) y(t) dt = f(x).$

Решение:

$$y(x) = \frac{f(x)}{1 - \frac{\pi}{2}\lambda^2} + \frac{\lambda}{1 - \frac{\pi}{2}\lambda^2} \int_0^\infty e^{\mu(x-t)} \sin(xt) f(t) dt, \quad \lambda \neq \pm\sqrt{2/\pi}.$$

17. $y(x) - \lambda \int_a^b e^{\mu(x-t)} \sin[\beta(x-t)] y(t) dt = f(x).$

Частный случай уравнения 4.9.18 при $g_1(x) = e^{\mu x} \sin(\beta x)$, $h_1(t) = e^{-\mu t} \cos(\beta t)$, $g_2(x) = e^{\mu x} \cos(\beta x)$, $h_2(t) = -e^{-\mu t} \sin(\beta t)$.

18. $y(x) - \lambda \int_a^b e^{\mu(x-t)} \left\{ \sum_{k=1}^n A_k \sin[\beta_k(x-t)] \right\} y(t) dt = f(x), \quad n = 1, 2, \dots$

Частный случай уравнения 4.9.20.

19. $y(x) - \lambda \int_a^b t e^{\mu(x-t)} \sin[\beta(x-t)] y(t) dt = f(x).$

Частный случай уравнения 4.9.18 при $g_1(x) = e^{\mu x} \sin(\beta x)$, $h_1(t) = t e^{-\mu t} \cos(\beta t)$, $g_2(x) = e^{\mu x} \cos(\beta x)$, $h_2(t) = -t e^{-\mu t} \sin(\beta t)$.

$$20. \quad y(x) - \lambda \int_a^b x e^{\mu(x-t)} \sin[\beta(x-t)] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.18 при $g_1(x) = x e^{\mu x} \sin(\beta x)$, $h_1(t) = e^{-\mu t} \cos(\beta t)$, $g_2(x) = x e^{\mu x} \cos(\beta x)$, $h_2(t) = -e^{-\mu t} \sin(\beta t)$.

$$21. \quad y(x) - \lambda \int_a^b e^{\mu t} \operatorname{tg}(\beta x) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \operatorname{tg}(\beta x)$, $h(t) = e^{\mu t}$.

$$22. \quad y(x) - \lambda \int_a^b e^{\mu x} \operatorname{tg}(\beta t) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = e^{\mu x}$, $h(t) = \operatorname{tg}(\beta t)$.

$$23. \quad y(x) - \lambda \int_a^b e^{\mu(x-t)} [\operatorname{tg}(\beta x) - \operatorname{tg}(\beta t)] y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.18 при $g_1(x) = e^{\mu x} \operatorname{tg}(\beta x)$, $h_1(t) = e^{-\mu t}$, $g_2(x) = e^{\mu x}$, $h_2(t) = -e^{-\mu t} \operatorname{tg}(\beta t)$.

$$24. \quad y(x) - \lambda \int_a^b e^{\mu t} \operatorname{ctg}(\beta x) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \operatorname{ctg}(\beta x)$, $h(t) = e^{\mu t}$.

$$25. \quad y(x) - \lambda \int_a^b e^{\mu x} \operatorname{ctg}(\beta t) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = e^{\mu x}$, $h(t) = \operatorname{ctg}(\beta t)$.

4.7-4. Ядра уравнений, содержащие гиперболические и логарифмические функции

$$26. \quad y(x) - \lambda \int_a^b \operatorname{ch}^k(\beta x) \ln^m(\mu t) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \operatorname{ch}^k(\beta x)$, $h(t) = \ln^m(\mu t)$.

$$27. \quad y(x) - \lambda \int_a^b \operatorname{ch}^k(\beta t) \ln^m(\mu x) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \ln^m(\mu x)$, $h(t) = \operatorname{ch}^k(\beta t)$.

$$28. \quad y(x) - \lambda \int_a^b \operatorname{sh}^k(\beta x) \ln^m(\mu t) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \operatorname{sh}^k(\beta x)$, $h(t) = \ln^m(\mu t)$.

$$29. \quad y(x) - \lambda \int_a^b \operatorname{sh}^k(\beta t) \ln^m(\mu x) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \ln^m(\mu x)$, $h(t) = \operatorname{sh}^k(\beta t)$.

$$30. \quad y(x) - \lambda \int_a^b \operatorname{th}^k(\beta x) \ln^m(\mu t) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \operatorname{th}^k(\beta x)$, $h(t) = \ln^m(\mu t)$.

$$31. \quad y(x) - \lambda \int_a^b \operatorname{th}^k(\beta t) \ln^m(\mu x) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \ln^m(\mu x)$, $h(t) = \operatorname{th}^k(\beta t)$.

$$32. \quad y(x) - \lambda \int_a^b \operatorname{cth}^k(\beta x) \ln^m(\mu t) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \operatorname{cth}^k(\beta x)$, $h(t) = \ln^m(\mu t)$.

$$33. \quad y(x) - \lambda \int_a^b \operatorname{cth}^k(\beta t) \ln^m(\mu x) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \ln^m(\mu x)$, $h(t) = \operatorname{cth}^k(\beta t)$.

4.7-5. Ядра уравнений, содержащие гиперболические и тригонометрические функции

$$34. \quad y(x) - \lambda \int_a^b \operatorname{ch}^k(\beta x) \cos^m(\mu t) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \operatorname{ch}^k(\beta x)$, $h(t) = \cos^m(\mu t)$.

$$35. \quad y(x) - \lambda \int_a^b \operatorname{ch}^k(\beta t) \cos^m(\mu x) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \cos^m(\mu x)$, $h(t) = \operatorname{ch}^k(\beta t)$.

$$36. \quad y(x) - \lambda \int_a^b \operatorname{ch}^k(\beta x) \sin^m(\mu t) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \operatorname{ch}^k(\beta x)$, $h(t) = \sin^m(\mu t)$.

$$37. \quad y(x) - \lambda \int_a^b \operatorname{ch}^k(\beta t) \sin^m(\mu x) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \sin^m(\mu x)$, $h(t) = \operatorname{ch}^k(\beta t)$.

$$38. \quad y(x) - \lambda \int_a^b \operatorname{sh}^k(\beta x) \cos^m(\mu t) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \operatorname{sh}^k(\beta x)$, $h(t) = \cos^m(\mu t)$.

$$39. \quad y(x) - \lambda \int_a^b \operatorname{sh}^k(\beta t) \cos^m(\mu x) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \cos^m(\mu x)$, $h(t) = \operatorname{sh}^k(\beta t)$.

$$40. \quad y(x) - \lambda \int_a^b \operatorname{sh}^k(\beta x) \sin^m(\mu t) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \operatorname{sh}^k(\beta x)$, $h(t) = \sin^m(\mu t)$.

$$41. \quad y(x) - \lambda \int_a^b \operatorname{sh}^k(\beta t) \sin^m(\mu x) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \sin^m(\mu x)$, $h(t) = \operatorname{sh}^k(\beta t)$.

$$42. \quad y(x) - \lambda \int_a^b \operatorname{th}^k(\beta x) \cos^m(\mu t) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \operatorname{th}^k(\beta x)$, $h(t) = \cos^m(\mu t)$.

$$43. \quad y(x) - \lambda \int_a^b \operatorname{th}^k(\beta t) \cos^m(\mu x) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \cos^m(\mu x)$, $h(t) = \operatorname{th}^k(\beta t)$.

$$44. \quad y(x) - \lambda \int_a^b \operatorname{th}^k(\beta x) \sin^m(\mu t) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \operatorname{th}^k(\beta x)$, $h(t) = \sin^m(\mu t)$.

$$45. \quad y(x) - \lambda \int_a^b \operatorname{th}^k(\beta t) \sin^m(\mu x) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \sin^m(\mu x)$, $h(t) = \operatorname{th}^k(\beta t)$.

4.7-6. Ядра уравнений, содержащие логарифмические и тригонометрические функции

$$46. \quad y(x) - \lambda \int_a^b \cos^k(\beta x) \ln^m(\mu t) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \cos^k(\beta x)$, $h(t) = \ln^m(\mu t)$.

$$47. \quad y(x) - \lambda \int_a^b \cos^k(\beta t) \ln^m(\mu x) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \ln^m(\mu x)$, $h(t) = \cos^k(\beta t)$.

$$48. \quad y(x) - \lambda \int_a^b \sin^k(\beta x) \ln^m(\mu t) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \sin^k(\beta x)$, $h(t) = \ln^m(\mu t)$.

$$49. \quad y(x) - \lambda \int_a^b \sin^k(\beta t) \ln^m(\mu x) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \ln^m(\mu x)$, $h(t) = \sin^k(\beta t)$.

$$50. \quad y(x) - \lambda \int_a^b \operatorname{tg}^k(\beta x) \ln^m(\mu t) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \operatorname{tg}^k(\beta x)$, $h(t) = \ln^m(\mu t)$.

$$51. \quad y(x) - \lambda \int_a^b \operatorname{tg}^k(\beta t) \ln^m(\mu x) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \ln^m(\mu x)$, $h(t) = \operatorname{tg}^k(\beta t)$.

$$52. \quad y(x) - \lambda \int_a^b \operatorname{ctg}^k(\beta x) \ln^m(\mu t) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \operatorname{ctg}^k(\beta x)$, $h(t) = \ln^m(\mu t)$.

$$53. \quad y(x) - \lambda \int_a^b \operatorname{ctg}^k(\beta t) \ln^m(\mu x) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = \ln^m(\mu x)$, $h(t) = \operatorname{ctg}^k(\beta t)$.

4.8. Уравнения, ядра которых содержат специальные функции

4.8-1. Ядра уравнений, содержащие функции Бесселя

$$1. \quad y(x) - \lambda \int_a^b J_\nu(\beta x) y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = J_\nu(\beta x)$, $h(t) = 1$.

2. $y(x) - \lambda \int_a^b J_\nu(\beta t) y(t) dt = f(x).$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = 1$, $h(t) = J_\nu(\beta t)$.

3. $y(x) + \lambda \int_0^\infty t J_\nu(xt) y(t) dt = f(x), \quad \nu > -\frac{1}{2}.$

Решение:

$$y(x) = \frac{f(x)}{1 - \lambda^2} - \frac{\lambda}{1 - \lambda^2} \int_0^\infty t J_\nu(xt) f(t) dt, \quad \lambda \neq \pm 1.$$

4. $y(x) + \lambda \int_0^\infty J_\nu(2\sqrt{xt}) y(t) dt = f(x).$

Положим $x = \frac{1}{2}z^2$, $t = \frac{1}{2}\tau^2$, $y(x) = Y(z)$, $f(x) = F(z)$. В результате приходим к уравнению вида 4.8.3:

$$Y(z) + \lambda \int_0^\infty \tau J_\nu(z\tau) Y(\tau) d\tau = F(z).$$

5. $y(x) - \lambda \int_a^b [A + B(x - t) J_\nu(\beta t)] y(t) dt = f(x).$

Частный случай уравнения 4.9.8 при $h(t) = J_\nu(\beta t)$.

6. $y(x) - \lambda \int_a^b [A + B(x - t) J_\nu(\beta x)] y(t) dt = f(x).$

Частный случай уравнения 4.9.10 при $h(x) = J_\nu(\beta x)$.

7. $y(x) - \lambda \int_a^b [A J_\mu(\alpha x) + B J_\nu(\beta t)] y(t) dt = f(x).$

Частный случай уравнения 4.9.5 при $g(x) = A J_\mu(\alpha x)$, $h(t) = B J_\nu(\beta t)$.

8. $y(x) - \lambda \int_a^b [A J_\mu(x) J_\nu(t) + B J_\nu(x) J_\mu(t)] y(t) dt = f(x).$

Частный случай уравнения 4.9.17 при $g(x) = J_\mu(x)$, $h(t) = J_\nu(t)$.

9. $y(x) - \lambda \int_a^b Y_\nu(\beta x) y(t) dt = f(x).$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = Y_\nu(\beta x)$, $h(t) = 1$.

10. $y(x) - \lambda \int_a^b Y_\nu(\beta t) y(t) dt = f(x).$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = 1$, $h(t) = Y_\nu(\beta t)$.

11. $y(x) - \lambda \int_a^b [A + B(x - t) Y_\nu(\beta t)] y(t) dt = f(x).$

Частный случай уравнения 4.9.8 при $h(t) = Y_\nu(\beta t)$.

12. $y(x) - \lambda \int_a^b [A + B(x - t) Y_\nu(\beta x)] y(t) dt = f(x).$

Частный случай уравнения 4.9.10 при $h(x) = Y_\nu(\beta x)$.

13. $y(x) - \lambda \int_a^b [A Y_\mu(\alpha x) + B Y_\nu(\beta t)] y(t) dt = f(x).$

Частный случай уравнения 4.9.5 при $g(x) = A Y_\mu(\alpha x)$, $h(t) = B Y_\nu(\beta t)$.

$$14. \quad y(x) - \lambda \int_a^b [AY_\mu(x)Y_\nu(t) + BY_\nu(x)Y_\mu(t)]y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.14 при $g(x) = Y_\mu(x)$, $h(t) = Y_\nu(t)$.

$$15. \quad y(x) - \lambda \int_a^b [AY_\mu(x)Y_\nu(t) + BY_\nu(x)Y_\mu(t)]y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.17 при $g(x) = Y_\mu(x)$, $h(t) = Y_\nu(t)$.

4.8-2. Ядра уравнений, содержащие модифицированные функции Бесселя

$$16. \quad y(x) - \lambda \int_a^b I_\nu(\beta x)y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = I_\nu(\beta x)$, $h(t) = 1$.

$$17. \quad y(x) - \lambda \int_a^b I_\nu(\beta t)y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = 1$, $h(t) = I_\nu(\beta t)$.

$$18. \quad y(x) - \lambda \int_a^b [A + B(x - t)I_\nu(\beta t)]y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.8 при $h(t) = I_\nu(\beta t)$.

$$19. \quad y(x) - \lambda \int_a^b [A + B(x - t)I_\nu(\beta x)]y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.10 при $h(x) = I_\nu(\beta x)$.

$$20. \quad y(x) - \lambda \int_a^b [AI_\mu(\alpha x) + BI_\nu(\beta t)]y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.5 при $g(x) = AI_\mu(\alpha x)$, $h(t) = BI_\nu(\beta t)$.

$$21. \quad y(x) - \lambda \int_a^b [AI_\mu(x)I_\mu(t) + BI_\nu(x)I_\nu(t)]y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.14 при $g(x) = I_\mu(x)$, $h(t) = I_\nu(t)$.

$$22. \quad y(x) - \lambda \int_a^b [AI_\mu(x)I_\nu(t) + BI_\nu(x)I_\mu(t)]y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.17 при $g(x) = I_\mu(x)$, $h(t) = I_\nu(t)$.

$$23. \quad y(x) - \lambda \int_a^b K_\nu(\beta x)y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = K_\nu(\beta x)$, $h(t) = 1$.

$$24. \quad y(x) - \lambda \int_a^b K_\nu(\beta t)y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.1 при $g(x) = 1$, $h(t) = K_\nu(\beta t)$.

$$25. \quad y(x) - \lambda \int_a^b [A + B(x - t)K_\nu(\beta t)]y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.8 при $h(t) = K_\nu(\beta t)$.

$$26. \quad y(x) - \lambda \int_a^b [A + B(x-t)K_\nu(\beta x)]y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.10 при $h(x) = K_\nu(\beta x)$.

$$27. \quad y(x) - \lambda \int_a^b [AK_\mu(\alpha x) + BK_\nu(\beta t)]y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.5 при $g(x) = AK_\mu(\alpha x)$, $h(t) = BK_\nu(\beta t)$.

$$28. \quad y(x) - \lambda \int_a^b [AK_\mu(x)K_\mu(t) + BK_\nu(x)K_\nu(t)]y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.14 при $g(x) = K_\mu(x)$, $h(t) = K_\nu(t)$.

$$29. \quad y(x) - \lambda \int_a^b [AK_\mu(x)K_\nu(t) + BK_\nu(x)K_\mu(t)]y(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 4.9.17 при $g(x) = K_\mu(x)$, $h(t) = K_\nu(t)$.

4.9. Уравнения, ядра которых содержат произвольные функции

4.9-1. Уравнения с ядром вида $K(x, t) = g_1(x)h_1(t) + \dots + g_n(x)h_n(t)$

$$1. \quad y(x) - \lambda \int_a^b g(x)h(t)y(t) dt = f(x).$$

$$1^\circ. \quad \text{Случай } \lambda \neq \left(\int_a^b g(t)h(t) dt \right)^{-1}.$$

Решение:

$$y(x) = f(x) + \lambda k g(x), \quad \text{где } k = \left(1 - \lambda \int_a^b g(t)h(t) dt \right)^{-1} \int_a^b h(t)f(t) dt.$$

$$2^\circ. \quad \text{Случай } \lambda = \left(\int_a^b g(t)h(t) dt \right)^{-1}.$$

При $\int_a^b h(t)f(t) dt = 0$ решение имеет вид

$$y = f(x) + Cg(x),$$

где C — произвольная постоянная.

При $\int_a^b h(t)f(t) dt \neq 0$ решения нет.

При условии существования соответствующих несобственных интегралов пределы интегрирования могут принимать значения $a = -\infty$ и (или) $b = \infty$.

$$2. \quad y(x) - \lambda \int_a^b [g(x) + g(t)]y(t) dt = f(x).$$

Характеристические значения уравнения:

$$\lambda_1 = \frac{1}{g_1 + \sqrt{(b-a)g_2}}, \quad \lambda_2 = \frac{1}{g_1 - \sqrt{(b-a)g_2}},$$

где

$$g_1 = \int_a^b g(x) dx, \quad g_2 = \int_a^b g^2(x) dx.$$

1°. Решение при $\lambda \neq \lambda_{1,2}$:

$$y(x) = f(x) + \lambda[A_1 g(x) + A_2],$$

где постоянные A_1 и A_2 вычисляются по формулам

$$A_1 = \frac{f_1 - \lambda[f_1 g_1 - (b-a)f_2]}{[g_1^2 - (b-a)g_2]\lambda^2 - 2g_1\lambda + 1}, \quad A_2 = \frac{f_2 - \lambda(f_2 g_1 - f_1 g_2)}{[g_1^2 - (b-a)g_2]\lambda^2 - 2g_1\lambda + 1},$$

$$f_1 = \int_a^b f(x) dx, \quad f_2 = \int_a^b f(x)g(x) dx.$$

2°. Решение при $\lambda = \lambda_1 \neq \lambda_2$ и $f_1 = f_2 = 0$:

$$y(x) = f(x) + Cy_1(x), \quad y_1(x) = g(x) + \sqrt{\frac{g_2}{b-a}},$$

где C — произвольная постоянная, а $y_1(x)$ — собственная функция уравнения, соответствующая характеристическому значению λ_1 .

3°. Решение при $\lambda = \lambda_2 \neq \lambda_1$ и $f_1 = f_2 = 0$:

$$y(x) = f(x) + Cy_2(x), \quad y_2(x) = g(x) - \sqrt{\frac{g_2}{b-a}},$$

где C — произвольная постоянная, а $y_2(x)$ — собственная функция ядра, соответствующая характеристическому значению λ_2 .

4°. Уравнение не имеет кратных характеристических значений.

$$3. \quad y(x) - \lambda \int_a^b [g(x) - g(t)]y(t) dt = f(x).$$

Характеристические значения уравнения:

$$\lambda_1 = \frac{1}{\sqrt{g_1^2 - (b-a)g_2}}, \quad \lambda_2 = -\frac{1}{\sqrt{g_1^2 - (b-a)g_2}},$$

где

$$g_1 = \int_a^b g(x) dx, \quad g_2 = \int_a^b g^2(x) dx.$$

1°. Решение при $\lambda \neq \lambda_{1,2}$:

$$y(x) = f(x) + \lambda[A_1 g(x) + A_2],$$

где постоянные A_1 и A_2 вычисляются по формулам

$$A_1 = \frac{f_1 + \lambda[f_1 g_1 - (b-a)f_2]}{[(b-a)g_2 - g_1^2]\lambda^2 + 1}, \quad A_2 = \frac{-f_2 + \lambda(f_2 g_1 - f_1 g_2)}{[(b-a)g_2 - g_1^2]\lambda^2 + 1},$$

$$f_1 = \int_a^b f(x) dx, \quad f_2 = \int_a^b f(x)g(x) dx.$$

2°. Решение при $\lambda = \lambda_1 \neq \lambda_2$ и $f_1 = f_2 = 0$:

$$y(x) = f(x) + Cy_1(x), \quad y_1(x) = g(x) + \frac{1 - \lambda_1 g_1}{\lambda_1(b-a)},$$

где C — произвольная постоянная, а $y_1(x)$ — собственная функция уравнения, соответствующая характеристическому значению λ_1 .

3°. Решение при $\lambda = \lambda_2 \neq \lambda_1$ и $f_1 = f_2 = 0$ получается из формул п. 2° заменой λ_1 и $y_1(x)$ на λ_2 и $y_2(x)$ соответственно.

4°. Уравнение не имеет кратных характеристических значений.

$$4. \quad y(x) - \lambda \int_a^b [Ag(x) + Bg(t)]y(t) dt = f(x).$$

Характеристические значения уравнения:

$$\lambda_{1,2} = \frac{(A+B)g_1 \pm \sqrt{(A-B)^2 g_1^2 + 4AB(b-a)g_2}}{2AB[g_1^2 - (b-a)g_2]},$$

где

$$g_1 = \int_a^b g(x) dx, \quad g_2 = \int_a^b g^2(x) dx.$$

1°. Решение при $\lambda \neq \lambda_{1,2}$:

$$y(x) = f(x) + \lambda[A_1 g(x) + A_2],$$

где постоянные A_1 и A_2 вычисляются по формулам

$$A_1 = \frac{Af_1 - \lambda AB[f_1 g_1 - (b-a)f_2]}{AB[g_1^2 - (b-a)g_2]\lambda^2 - (A+B)g_1\lambda + 1}, \quad A_2 = \frac{Bf_2 - \lambda AB(f_2 g_1 - f_1 g_2)}{AB[g_1^2 - (b-a)g_2]\lambda^2 - (A+B)g_1\lambda + 1},$$

$$f_1 = \int_a^b f(x) dx, \quad f_2 = \int_a^b f(x)g(x) dx.$$

2°. Решение при $\lambda = \lambda_1 \neq \lambda_2$ и $f_1 = f_2 = 0$:

$$y(x) = f(x) + Cy_1(x), \quad y_1(x) = g(x) + \frac{1 - \lambda_1 A g_1}{\lambda_1 A(b-a)},$$

где C — произвольная постоянная, а $y_1(x)$ — собственная функция уравнения, соответствующая характеристическому значению λ_1 .

3°. Решение при $\lambda = \lambda_2 \neq \lambda_1$ и $f_1 = f_2 = 0$ получается из формул п. 2° заменой λ_1 и $y_1(x)$ на λ_2 и $y_2(x)$ соответственно.

4°. Решение при $\lambda = \lambda_{1,2} = \lambda_*$ и $f_1 = f_2 = 0$, где $\lambda_* = \frac{2}{(A+B)g_1}$ — двукратное характеристическое значение:

$$y(x) = f(x) + Cy_*(x), \quad y_*(x) = g(x) - \frac{(A-B)g_1}{2A(b-a)}.$$

Здесь C — произвольная постоянная, а $y_*(x)$ — собственная функция уравнения, соответствующая λ_* .

5. $y(x) - \lambda \int_a^b [g(x) + h(t)]y(t) dt = f(x).$

Характеристические значения уравнения:

$$\lambda_{1,2} = \frac{s_1 + s_3 \pm \sqrt{(s_1 - s_3)^2 + 4(b-a)s_2}}{2[s_1 s_3 - (b-a)s_2]},$$

где

$$s_1 = \int_a^b g(x) dx, \quad s_2 = \int_a^b g(x)h(x) dx, \quad s_3 = \int_a^b h(x) dx.$$

1°. Решение при $\lambda \neq \lambda_{1,2}$:

$$y(x) = f(x) + \lambda[A_1 g(x) + A_2],$$

где постоянные A_1 и A_2 вычисляются по формулам

$$A_1 = \frac{f_1 - \lambda[f_1 s_3 - (b-a)f_2]}{[s_1 s_3 - (b-a)s_2]\lambda^2 - (s_1 + s_3)\lambda + 1}, \quad A_2 = \frac{f_2 - \lambda(f_2 s_1 - f_1 s_2)}{[s_1 s_3 - (b-a)s_2]\lambda^2 - (s_1 + s_3)\lambda + 1},$$

$$f_1 = \int_a^b f(x) dx, \quad f_2 = \int_a^b f(x)h(x) dx.$$

2°. Решение при $\lambda = \lambda_1 \neq \lambda_2$ и $f_1 = f_2 = 0$:

$$y(x) = f(x) + Cy_1(x), \quad y_1(x) = g(x) + \frac{1 - \lambda_1 s_1}{\lambda_1(b-a)},$$

где C — произвольная постоянная, а $y_1(x)$ — собственная функция уравнения, соответствующая характеристическому значению λ_1 .

3°. Решение при $\lambda = \lambda_2 \neq \lambda_1$ и $f_1 = f_2 = 0$ получается из формул п. 2° заменой λ_1 и $y_1(x)$ на λ_2 и $y_2(x)$ соответственно.

4°. Решение при $\lambda = \lambda_{1,2} = \lambda_*$ и $f_1 = f_2 = 0$, где $\lambda_* = \frac{2}{s_1 + s_3}$ — двукратное характеристическое значение:

$$y(x) = f(x) + Cy_*(x), \quad y_*(x) = g(x) - \frac{s_1 - s_3}{2(b-a)}.$$

Здесь C — произвольная постоянная, а $y_*(x)$ — собственная функция уравнения, соответствующая λ_* .

$$6. \quad y(x) - \lambda \int_a^b [Ag(x) + Bg(t)]h(t) y(t) dt = f(x).$$

Характеристические значения уравнения:

$$\lambda_{1,2} = \frac{(A+B)s_1 \pm \sqrt{(A-B)^2 s_1^2 + 4ABs_0 s_2}}{2AB(s_1^2 - s_0 s_2)},$$

где

$$s_0 = \int_a^b h(x) dx, \quad s_1 = \int_a^b g(x)h(x) dx, \quad s_2 = \int_a^b g^2(x)h(x) dx.$$

1°. Решение при $\lambda \neq \lambda_{1,2}$:

$$y(x) = f(x) + \lambda[A_1 g(x) + A_2],$$

где постоянные A_1 и A_2 вычисляются по формулам

$$A_1 = \frac{Af_1 - AB\lambda(f_1 s_1 - f_2 s_0)}{AB(s_1^2 - s_0 s_2)\lambda^2 - (A+B)s_1\lambda + 1}, \quad A_2 = \frac{Bf_2 - AB\lambda(f_2 s_1 - f_1 s_2)}{AB(s_1^2 - s_0 s_2)\lambda^2 - (A+B)s_1\lambda + 1},$$

$$f_1 = \int_a^b f(x)h(x) dx, \quad f_2 = \int_a^b f(x)g(x)h(x) dx.$$

2°. Решение при $\lambda = \lambda_1 \neq \lambda_2$ и $f_1 = f_2 = 0$:

$$y(x) = f(x) + Cy_1(x), \quad y_1(x) = g(x) + \frac{1 - \lambda_1 A s_1}{\lambda_1 A s_0},$$

где C — произвольная постоянная, а $y_1(x)$ — собственная функция уравнения, соответствующая характеристическому значению λ_1 .

3°. Решение при $\lambda = \lambda_2 \neq \lambda_1$ и $f_1 = f_2 = 0$ получается из формул п. 2° заменой λ_1 и $y_1(x)$ на λ_2 и $y_2(x)$ соответственно.

4°. Решение при $\lambda = \lambda_{1,2} = \lambda_*$ и $f_1 = f_2 = 0$, где $\lambda_* = \frac{2}{(A+B)s_1}$ — двукратное характеристическое значение:

$$y(x) = f(x) + Cy_*(x).$$

Здесь C — произвольная постоянная, а $y_*(x)$ — собственная функция уравнения, соответствующая λ_* :

a) если $A \neq B$, то $4ABs_0 s_2 = -(A-B)^2 s_1^2$ и

$$y_*(x) = g(x) - \frac{(A-B)s_1}{2As_0};$$

b) если $A = B$, то в силу равенства $4ABs_0 s_2 = -(A-B)^2 s_1^2 = 0$ имеем

$$y_*(x) = \begin{cases} g(x) & \text{при } s_0 \neq 0, \quad s_2 = 0, \\ 1 & \text{при } s_0 = 0, \quad s_2 \neq 0, \\ C_1 g(x) + C_2 & \text{при } s_0 = s_2 = 0, \end{cases}$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

$$7. \quad y(x) - \lambda \int_a^b [Ag(x) + Bg(t) + C]h(t) y(t) dt = f(x).$$

Характеристические значения уравнения:

$$\lambda_{1,2} = \frac{(A+B)s_1 + C s_0 \pm \sqrt{(A-B)^2 s_1^2 + 2(A+B)C s_1 s_0 + C^2 s_0^2 + 4ABs_0 s_2}}{2AB(s_1^2 - s_0 s_2)},$$

где

$$s_0 = \int_a^b h(x) dx, \quad s_1 = \int_a^b g(x)h(x) dx, \quad s_2 = \int_a^b g^2(x)h(x) dx.$$

1°. Решение при $\lambda \neq \lambda_{1,2}$:

$$y(x) = f(x) + \lambda[A_1 g(x) + A_2],$$

где постоянные A_1 и A_2 вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{A f_1 - AB \lambda (f_1 s_1 - f_2 s_0)}{AB(s_1^2 - s_0 s_2) \lambda^2 - [(A+B)s_1 + C s_0] \lambda + 1}, \\ A_2 &= \frac{C_1 f_1 + B f_2 - AB \lambda (f_2 s_1 - f_1 s_2)}{AB(s_1^2 - s_0 s_2) \lambda^2 - [(A+B)s_1 + C s_0] \lambda + 1}, \\ f_1 &= \int_a^b f(x) h(x) dx, \quad f_2 = \int_a^b f(x) g(x) h(x) dx. \end{aligned}$$

2°. Решение при $\lambda = \lambda_1 \neq \lambda_2$ и $f_1 = f_2 = 0$:

$$y(x) = f(x) + \tilde{C} y_1(x), \quad y_1(x) = g(x) + \frac{1 - \lambda_1 A s_1}{\lambda_1 A s_0},$$

где \tilde{C} — произвольная постоянная, а $y_1(x)$ — собственная функция уравнения, соответствующая характеристическому значению λ_1 .

3°. Решение при $\lambda = \lambda_2 \neq \lambda_1$ и $f_1 = f_2 = 0$ получается из формул п. 2° заменой λ_1 и $y_1(x)$ на λ_2 и $y_2(x)$ соответственно.

4°. Решение при $\lambda = \lambda_{1,2} = \lambda_*$ и $f_1 = f_2 = 0$, где $\lambda_* = \frac{2}{(A+B)s_1 + C s_0}$ — двукратное характеристическое значение:

$$y(x) = f(x) + \tilde{C} y_*(x).$$

Здесь \tilde{C} — произвольная постоянная, а $y_*(x)$ — собственная функция уравнения, соответствующая λ_* :

a) если $(A-B)s_1 - C s_0 \neq 0$, то $4A s_0 (B s_2 + C s_1) = -[(A-B)s_1 - C s_0]^2$ и

$$y_*(x) = g(x) - \frac{(A-B)s_1 - C s_0}{2A s_0};$$

b) если $(A-B)s_1 - C s_0 = 0$, то в силу равенства $4A s_0 (B s_2 + C s_1) = 0$ имеем

$$y_*(x) = \begin{cases} g(x) & \text{при } s_0 \neq 0, B s_2 = -C s_1, \\ 1 & \text{при } s_0 = 0, B s_2 \neq -C s_1, \\ \tilde{C}_1 g(x) + \tilde{C}_2 & \text{при } s_0 = 0, B s_2 = -C s_1, \end{cases}$$

где \tilde{C}_1 и \tilde{C}_2 — произвольные постоянные.

$$8. \quad y(x) - \lambda \int_a^b [A + B(x-t)h(t)]y(t) dt = f(x).$$

Характеристические значения уравнения:

$$\lambda_{1,2} = \frac{A(b-a) \pm \sqrt{[A(b-a) - 2B h_1]^2 + 2B h_0 [A(b^2 - a^2) - 2B h_2]}}{B \{A(b-a)[2h_1 - (b+a)h_0] - 2B(h_1^2 - h_0 h_2)\}},$$

где

$$h_0 = \int_a^b h(x) dx, \quad h_1 = \int_a^b x h(x) dx, \quad h_2 = \int_a^b x^2 h(x) dx.$$

1°. Решение при $\lambda \neq \lambda_{1,2}$:

$$y(x) = f(x) + \lambda(A_1 + A_2 x),$$

где постоянные A_1 и A_2 вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{f_1 - \lambda [B(f_1 h_1 + f_2 h_2) - \frac{1}{2} A f_2 (b^2 - a^2)]}{B \{A(b-a) [h_1 - \frac{1}{2}(b+a)h_0] - B(h_1^2 - h_0 h_2)\} \lambda^2 + A(b-a) \lambda + 1}, \\ A_2 &= \frac{f_2 - \lambda [A(b-a)f_2 - B(f_1 h_0 + f_2 h_1)]}{B \{A(b-a) [h_1 - \frac{1}{2}(b+a)h_0] - B(h_1^2 - h_0 h_2)\} \lambda^2 + A(b-a) \lambda + 1}, \\ f_1 &= A \int_a^b f(x) dx - B \int_a^b x f(x) h(x) dx, \quad f_2 = B \int_a^b f(x) h(x) dx. \end{aligned}$$

2°. Решение при $\lambda = \lambda_1 \neq \lambda_2$ и $f_1 = f_2 = 0$:

$$y(x) = f(x) + Cy_1(x), \quad y_1(x) = 1 + \frac{2 - 2\lambda_1[A(b-a) - Bh_1]}{\lambda_1[A(b^2 - a^2) - 2Bh_2]}x,$$

где C — произвольная постоянная, а $y_1(x)$ — собственная функция уравнения, соответствующая характеристическому значению λ_1 .

3°. Решение при $\lambda = \lambda_2 \neq \lambda_1$ и $f_1 = f_2 = 0$ получается из формул п. 2° заменой λ_1 и $y_1(x)$ на λ_2 и $y_2(x)$ соответственно.

4°. Решение при $\lambda = \lambda_{1,2} = \lambda_*$ и $f_1 = f_2 = 0$, где $\lambda_* = \frac{2}{A(b-a)}$ ($A \neq 0$) — двукратное характеристическое значение:

$$y(x) = f(x) + Cy_*(x).$$

Здесь C — произвольная постоянная, а $y_*(x)$ — собственная функция уравнения, соответствующая λ_* :

а) если $A(b-a) - 2Bh_1 \neq 0$, то

$$y_*(x) = 1 - \frac{A(b-a) - 2Bh_1}{A(b^2 - a^2) - 2Bh_2}x;$$

б) если $A(b-a) - 2Bh_1 = 0$, то в силу равенства $h_0[A(b^2 - a^2) - 2Bh_2] = 0$ имеем

$$y_*(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } h_0 \neq 0, A(b^2 - a^2) = 2Bh_2, \\ x & \text{при } h_0 = 0, A(b^2 - a^2) \neq 2Bh_2, \\ C_1 + C_2x & \text{при } h_0 = 0, A(b^2 - a^2) = 2Bh_2, \end{cases}$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

$$9. \quad y(x) - \lambda \int_a^b [A + (Bx + Ct)h(t)]y(t) dt = f(x).$$

Характеристические значения уравнения:

$$\lambda_{1,2} = \frac{A(b-a) + (C+B)h_1 \pm \sqrt{D}}{B\{A(b-a)[2h_1 - (b+a)h_0] + 2C(h_1^2 - h_0h_2)\}},$$

$$D = [A(b-a) + (C-B)h_1]^2 + 2Bh_0[A(b^2 - a^2) + 2Ch_2],$$

где

$$h_0 = \int_a^b h(x) dx, \quad h_1 = \int_a^b xh(x) dx, \quad h_2 = \int_a^b x^2h(x) dx.$$

1°. Решение при $\lambda \neq \lambda_{1,2}$:

$$y(x) = f(x) + \lambda(A_1 + A_2x),$$

где постоянные A_1 и A_2 вычисляются по формулам

$$A_1 = \Delta^{-1} \left\{ f_1 - \lambda \left[Bf_1h_1 - Cf_2h_2 - \frac{1}{2}A(b^2 - a^2)f_2 \right] \right\},$$

$$A_2 = \Delta^{-1} \left\{ f_2 - \lambda [A(b-a)f_2 - Bf_1h_0 + Cf_2h_1] \right\},$$

$$\Delta = B \left\{ A(b-a) \left[h_1 - \frac{1}{2}(b+a)h_0 \right] + C(h_1^2 - h_0h_2) \right\} \lambda^2 + [A(b-a) + (B+C)h_1]\lambda + 1,$$

$$f_1 = A \int_a^b f(x) dx + C \int_a^b xf(x)h(x) dx, \quad f_2 = B \int_a^b f(x)h(x) dx.$$

2°. Решение при $\lambda = \lambda_1 \neq \lambda_2$ и $f_1 = f_2 = 0$:

$$y(x) = f(x) + \tilde{C}y_1(x), \quad y_1(x) = 1 + \frac{2 - 2\lambda_1[A(b-a) + Ch_1]}{\lambda_1[A(b^2 - a^2) + 2Ch_2]}x,$$

где \tilde{C} — произвольная постоянная, а $y_1(x)$ — собственная функция уравнения, соответствующая характеристическому значению λ_1 .

3°. Решение при $\lambda = \lambda_2 \neq \lambda_1$ и $f_1 = f_2 = 0$ получается из формул п. 2° заменой λ_1 и $y_1(x)$ на λ_2 и $y_2(x)$ соответственно.

4°. Решение при $\lambda = \lambda_{1,2} = \lambda_*$ и $f_1 = f_2 = 0$, где $\lambda_* = \frac{2}{A(b-a) + (B+C)h_1}$ — двукратное характеристическое значение:

$$y(x) = f(x) + \tilde{C}y_*(x).$$

Здесь \tilde{C} — произвольная постоянная, а $y_*(x)$ — собственная функция уравнения, соответствующая λ_* :

а) если $A(b-a) + (C-B)h_1 \neq 0$, то

$$y_*(x) = 1 - \frac{A(b-a) + (C-B)h_1}{A(b^2 - a^2) + 2Ch_2} x;$$

б) если $A(b-a) + (C-B)h_1 = 0$, то в силу равенства $h_0[A(b^2 - a^2) + 2Ch_2] = 0$ имеем

$$y_*(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } h_0 \neq 0, A(b^2 - a^2) = -2Ch_2, \\ x & \text{при } h_0 = 0, A(b^2 - a^2) \neq -2Ch_2, \\ \tilde{C}_1 + \tilde{C}_2 x & \text{при } h_0 = 0, A(b^2 - a^2) = -2Ch_2, \end{cases}$$

где \tilde{C}_1 и \tilde{C}_2 — произвольные постоянные.

10. $y(x) - \lambda \int_a^b [A + B(x-t)h(x)]y(t) dt = f(x).$

Характеристические значения уравнения:

$$\lambda_{1,2} = \frac{A(b-a) \pm \sqrt{[A(b-a) + 2Bh_1]^2 - 2Bh_0[A(b^2 - a^2) + 2Bh_2]}}{B\{h_0[A(b^2 - a^2) + 2Bh_2] - 2h_1[A(b-a) + Bh_1]\}},$$

где

$$h_0 = \int_a^b h(x) dx, \quad h_1 = \int_a^b xh(x) dx, \quad h_2 = \int_a^b x^2 h(x) dx.$$

1°. Решение при $\lambda \neq \lambda_{1,2}$:

$$y(x) = f(x) + \lambda[AE_1 + (BE_1x + E_2)h(x)],$$

где постоянные E_1 и E_2 вычисляются по формулам

$$E_1 = \Delta^{-1}[f_1 + \lambda B(f_1h_1 - f_2h_0)],$$

$$E_2 = B\Delta^{-1}\{-f_2 + \lambda f_2[A(b-a) + Bh_1] + \lambda f_1[\frac{1}{2}A(b^2 - a^2) + Bh_2]\},$$

$$\Delta = B\{h_0[\frac{1}{2}A(b^2 - a^2) + Bh_2] - h_1[A(b-a) + Bh_1]\}\lambda^2 - A(b-a)\lambda + 1,$$

$$f_1 = \int_a^b f(x) dx, \quad f_2 = \int_a^b xf(x) dx.$$

2°. Решение при $\lambda = \lambda_1 \neq \lambda_2$ и $f_1 = f_2 = 0$:

$$y(x) = f(x) + Cy_1(x), \quad y_1(x) = A + Bxh(x) + \frac{1 - \lambda_1[A(b-a) + Bh_1]}{\lambda_1 h_0} h(x),$$

где C — произвольная постоянная, а $y_1(x)$ — собственная функция уравнения, соответствующая характеристическому значению λ_1 .

3°. Решение при $\lambda = \lambda_2 \neq \lambda_1$ и $f_1 = f_2 = 0$ получается из формул п. 2° заменой λ_1 и $y_1(x)$ на λ_2 и $y_2(x)$ соответственно.

4°. Решение при $\lambda = \lambda_{1,2} = \lambda_*$ и $f_1 = f_2 = 0$, где $\lambda_* = \frac{2}{A(b-a)}$ ($A \neq 0$) — двукратное характеристическое значение:

$$y(x) = f(x) + Cy_*(x).$$

Здесь C — произвольная постоянная, а $y_*(x)$ — собственная функция уравнения, соответствующая λ_* :

а) если $A(b-a) \neq -2Bh_1$, то

$$y_*(x) = A + Bxh(x) - \frac{A(b-a) + 2Bh_1}{2h_0} h(x);$$

б) если $A(b-a) = -2Bh_1$, то в силу равенства $h_0[A(b^2 - a^2) + 2Bh_2] = 0$ имеем

$$y_*(x) = \begin{cases} A + Bxh(x) & \text{при } h_0 \neq 0, A(b^2 - a^2) = -2Bh_2, \\ h(x) & \text{при } h_0 = 0, A(b^2 - a^2) \neq -2Bh_2, \\ C_1[A + Bxh(x)] + C_2h(x) & \text{при } h_0 = 0, A(b^2 - a^2) = -2Bh_2, \end{cases}$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

$$11. \quad y(x) - \lambda \int_a^b [A + (Bx + Ct)h(x)]y(t) dt = f(x).$$

Характеристические значения уравнения:

$$\lambda_{1,2} = \frac{A(b-a) + (B+C)h_1 \pm \sqrt{D}}{C\{2h_1[A(b-a) + Bh_1] - h_0[A(b^2-a^2) + 2Bh_2]\}},$$

$$D = [A(b-a) + (B-C)h_1]^2 + 2Ch_0[A(b^2-a^2) + 2Bh_2],$$

где

$$h_0 = \int_a^b h(x) dx, \quad h_1 = \int_a^b xh(x) dx, \quad h_2 = \int_a^b x^2 h(x) dx.$$

1°. Решение при $\lambda \neq \lambda_{1,2}$:

$$y(x) = f(x) + \lambda[AE_1 + (BE_1x + E_2)h(x)],$$

где постоянные E_1 и E_2 вычисляются по формулам

$$E_1 = \Delta^{-1}[f_1 - \lambda C(f_1h_1 - f_2h_0)],$$

$$E_2 = C\Delta^{-1}\{f_2 - \lambda f_2[A(b-a) + Bh_1] - \lambda f_1[\frac{1}{2}A(b^2-a^2) + Bh_2]\},$$

$$\Delta = C\{h_1[A(b-a) + Bh_1] - h_0[\frac{1}{2}A(b^2-a^2) + Bh_2]\}\lambda^2 - [A(b-a) + (B+C)h_1]\lambda + 1,$$

$$f_1 = \int_a^b f(x) dx, \quad f_2 = \int_a^b xf(x) dx.$$

2°. Решение при $\lambda = \lambda_1 \neq \lambda_2$ и $f_1 = f_2 = 0$:

$$y(x) = f(x) + \tilde{C}y_1(x), \quad y_1(x) = A + Bxh(x) + \frac{1 - \lambda_1[A(b-a) + Bh_1]}{\lambda_1 h_0} h(x),$$

где \tilde{C} — произвольная постоянная, а $y_1(x)$ — собственная функция уравнения, соответствующая характеристическому значению λ_1 .

3°. Решение при $\lambda = \lambda_2 \neq \lambda_1$ и $f_1 = f_2 = 0$ получается из формул п. 2° заменой λ_1 и $y_1(x)$ на λ_2 и $y_2(x)$ соответственно.

4°. Решение при $\lambda = \lambda_{1,2} = \lambda_*$ и $f_1 = f_2 = 0$, где $\lambda_* = \frac{2}{A(b-a) + (B+C)h_1}$ ($A \neq 0$) — двукратное характеристическое значение:

$$y(x) = f(x) + \tilde{C}y_*(x).$$

Здесь \tilde{C} — произвольная постоянная, а $y_*(x)$ — собственная функция уравнения, соответствующая λ_* :

a) если $A(b-a) + Bh_1 \neq Ch_1$, то

$$y_*(x) = A + Bxh(x) - \frac{A(b-a) + (B-C)h_1}{2h_0} h(x);$$

b) если $A(b-a) + Bh_1 = Ch_1$, то в силу равенства $h_0[A(b^2-a^2) + 2Bh_2] = 0$ имеем

$$y_*(x) = \begin{cases} A + Bxh(x) & \text{при } h_0 \neq 0, A(b^2-a^2) = -2Bh_2, \\ h(x) & \text{при } h_0 = 0, A(b^2-a^2) \neq -2Bh_2, \\ \tilde{C}_1[A + Bxh(x)] + \tilde{C}_2h(x) & \text{при } h_0 = 0, A(b^2-a^2) = -2Bh_2, \end{cases}$$

где \tilde{C}_1 и \tilde{C}_2 — произвольные постоянные.

$$12. \quad y(x) - \lambda \int_a^b [g(x)g(t) + h(x)h(t)]y(t) dt = f(x).$$

Характеристические значения уравнения:

$$\lambda_1 = \frac{s_1 + s_3 + \sqrt{(s_1 - s_3)^2 + 4s_2^2}}{2(s_1s_3 - s_2^2)}, \quad \lambda_2 = \frac{s_1 + s_3 - \sqrt{(s_1 - s_3)^2 + 4s_2^2}}{2(s_1s_3 - s_2^2)},$$

где

$$s_1 = \int_a^b g^2(x) dx, \quad s_2 = \int_a^b g(x)h(x) dx, \quad s_3 = \int_a^b h^2(x) dx.$$

1°. Решение при $\lambda \neq \lambda_{1,2}$:

$$y(x) = f(x) + \lambda[A_1 g(x) + A_2 h(x)],$$

где постоянные A_1 и A_2 вычисляются по формулам

$$A_1 = \frac{f_1 - \lambda(f_1 s_3 - f_2 s_2)}{(s_1 s_3 - s_2^2)\lambda^2 - (s_1 + s_3)\lambda + 1}, \quad A_2 = \frac{f_2 - \lambda(f_2 s_1 - f_1 s_2)}{(s_1 s_3 - s_2^2)\lambda^2 - (s_1 + s_3)\lambda + 1},$$

$$f_1 = \int_a^b f(x)g(x) dx, \quad f_2 = \int_a^b f(x)h(x) dx.$$

2°. Решение при $\lambda = \lambda_1 \neq \lambda_2$ и $f_1 = f_2 = 0$:

$$y(x) = f(x) + C y_1(x), \quad y_1(x) = g(x) + \frac{1 - \lambda_1 s_1}{\lambda_1 s_2} h(x),$$

где C — произвольная постоянная, а $y_1(x)$ — собственная функция уравнения, соответствующая характеристическому значению λ_1 .

3°. Решение при $\lambda = \lambda_2 \neq \lambda_1$ и $f_1 = f_2 = 0$ получается из формул п. 2° заменой λ_1 и $y_1(x)$ на λ_2 и $y_2(x)$ соответственно.

4°. Решение при $\lambda = \lambda_{1,2} = \lambda_*$ и $f_1 = f_2 = 0$, где $\lambda_* = \frac{1}{s_1}$ — двукратное характеристическое значение:

$$y(x) = f(x) + \tilde{C}_1 g(x) + \tilde{C}_2 h(x),$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

13. $y(x) - \lambda \int_a^b [g(x)g(t) - h(x)h(t)]y(t) dt = f(x).$

Характеристические значения уравнения:

$$\lambda_1 = \frac{s_1 - s_3 + \sqrt{(s_1 + s_3)^2 - 4s_2^2}}{2(s_2^2 - s_1 s_3)}, \quad \lambda_2 = \frac{s_1 - s_3 - \sqrt{(s_1 + s_3)^2 - 4s_2^2}}{2(s_2^2 - s_1 s_3)},$$

где

$$s_1 = \int_a^b g^2(x) dx, \quad s_2 = \int_a^b g(x)h(x) dx, \quad s_3 = \int_a^b h^2(x) dx.$$

1°. Решение при $\lambda \neq \lambda_{1,2}$:

$$y(x) = f(x) + \lambda[A_1 g(x) + A_2 h(x)],$$

где постоянные A_1 и A_2 вычисляются по формулам

$$A_1 = \frac{f_1 + \lambda(f_1 s_3 - f_2 s_2)}{(s_2^2 - s_1 s_3)\lambda^2 - (s_1 - s_3)\lambda + 1}, \quad A_2 = \frac{-f_2 + \lambda(f_2 s_1 - f_1 s_2)}{(s_2^2 - s_1 s_3)\lambda^2 - (s_1 - s_3)\lambda + 1},$$

$$f_1 = \int_a^b f(x)g(x) dx, \quad f_2 = \int_a^b f(x)h(x) dx.$$

2°. Решение при $\lambda = \lambda_1 \neq \lambda_2$ и $f_1 = f_2 = 0$:

$$y(x) = f(x) + C y_1(x), \quad y_1(x) = g(x) + \frac{1 - \lambda_1 s_1}{\lambda_1 s_2} h(x),$$

где C — произвольная постоянная, а $y_1(x)$ — собственная функция уравнения, соответствующая характеристическому значению λ_1 .

3°. Решение при $\lambda = \lambda_2 \neq \lambda_1$ и $f_1 = f_2 = 0$ получается из формул п. 2° заменой λ_1 и $y_1(x)$ на λ_2 и $y_2(x)$ соответственно.

4°. Решение при $\lambda = \lambda_{1,2} = \lambda_*$ и $f_1 = f_2 = 0$, где $\lambda_* = \frac{2}{s_1 - s_3}$ — двукратное характеристическое значение:

$$y(x) = f(x) + C y_*(x), \quad y_*(x) = g(x) - \frac{s_1 + s_3}{2s_2} h(x).$$

Здесь C — произвольная постоянная, $y_*(x)$ — собственная функция уравнения, соответствующая λ_* .

$$14. \quad y(x) - \lambda \int_a^b [Ag(x)g(t) + Bh(x)h(t)]y(t) dt = f(x).$$

Характеристические значения уравнения:

$$\lambda_{1,2} = \frac{As_1 + Bs_3 \pm \sqrt{(As_1 - Bs_3)^2 + 4ABs_2^2}}{2AB(s_1s_3 - s_2^2)},$$

где

$$s_1 = \int_a^b g^2(x) dx, \quad s_2 = \int_a^b g(x)h(x) dx, \quad s_3 = \int_a^b h^2(x) dx.$$

1°. Решение при $\lambda \neq \lambda_{1,2}$:

$$y(x) = f(x) + \lambda[A_1g(x) + A_2h(x)],$$

где постоянные A_1 и A_2 вычисляются по формулам

$$A_1 = \frac{Af_1 - \lambda AB(f_1s_3 - f_2s_2)}{AB(s_1s_3 - s_2^2)\lambda^2 - (As_1 + Bs_3)\lambda + 1}, \quad A_2 = \frac{Bf_2 - \lambda AB(f_2s_1 - f_1s_2)}{AB(s_1s_3 - s_2^2)\lambda^2 - (As_1 + Bs_3)\lambda + 1},$$

$$f_1 = \int_a^b f(x)g(x) dx, \quad f_2 = \int_a^b f(x)h(x) dx.$$

2°. Решение при $\lambda = \lambda_1 \neq \lambda_2$ и $f_1 = f_2 = 0$:

$$y(x) = f(x) + Cy_1(x), \quad y_1(x) = g(x) + \frac{1 - \lambda_1 As_1}{\lambda_1 As_2} h(x),$$

где C — произвольная постоянная, а $y_1(x)$ — собственная функция уравнения, соответствующая характеристическому значению λ_1 .

3°. Решение при $\lambda = \lambda_2 \neq \lambda_1$ и $f_1 = f_2 = 0$ получается из формул п. 2° заменой λ_1 и $y_1(x)$ на λ_2 и $y_2(x)$ соответственно.

4°. Решение при $\lambda = \lambda_{1,2} = \lambda_*$ и $f_1 = f_2 = 0$, где $\lambda_* = \frac{2}{As_1 + Bs_3}$ — двукратное характеристическое значение:

$$y(x) = f(x) + Cy_*(x).$$

Здесь C — произвольная постоянная, а $y_*(x)$ — собственная функция уравнения, соответствующая λ_* :

а) если $As_1 \neq Bs_3$, то $4ABs_2^2 = -(As_1 - Bs_3)^2$, $AB < 0$ и

$$y_*(x) = g(x) - \frac{As_1 - Bs_3}{2As_2} h(x);$$

б) если $As_1 = Bs_3$, то в силу равенства $s_2 = 0$ имеем

$$y_*(x) = C_1g(x) + C_2h(x),$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

$$15. \quad y(x) - \lambda \int_a^b [g(x)h(t) + h(x)g(t)]y(t) dt = f(x).$$

Характеристические значения уравнения:

$$\lambda_1 = \frac{1}{s_1 + \sqrt{s_2s_3}}, \quad \lambda_2 = \frac{1}{s_1 - \sqrt{s_2s_3}},$$

где

$$s_1 = \int_a^b h(x)g(x) dx, \quad s_2 = \int_a^b h^2(x) dx, \quad s_3 = \int_a^b g^2(x) dx.$$

1°. Решение при $\lambda \neq \lambda_{1,2}$:

$$y(x) = f(x) + \lambda[A_1g(x) + A_2h(x)],$$

где постоянные A_1 и A_2 вычисляются по формулам

$$A_1 = \frac{f_1 - \lambda(f_1s_1 - f_2s_2)}{(s_1^2 - s_2s_3)\lambda^2 - 2s_1\lambda + 1}, \quad A_2 = \frac{f_2 - \lambda(f_2s_1 - f_1s_3)}{(s_1^2 - s_2s_3)\lambda^2 - 2s_1\lambda + 1},$$

$$f_1 = \int_a^b f(x)h(x) dx, \quad f_2 = \int_a^b f(x)g(x) dx.$$

2°. Решение при $\lambda = \lambda_1 \neq \lambda_2$ и $f_1 = f_2 = 0$:

$$y(x) = f(x) + Cy_1(x), \quad y_1(x) = g(x) + \sqrt{\frac{s_3}{s_2}} h(x),$$

где C — произвольная постоянная, а $y_1(x)$ — собственная функция уравнения, соответствующая характеристическому значению λ_1 .

3°. Решение при $\lambda = \lambda_2 \neq \lambda_1$ и $f_1 = f_2 = 0$:

$$y(x) = f(x) + Cy_2(x), \quad y_2(x) = g(x) - \sqrt{\frac{s_3}{s_2}} h(x),$$

где C — произвольная постоянная, а $y_2(x)$ — собственная функция ядра, соответствующая характеристическому значению λ_2 .

4°. Уравнение не имеет кратных характеристических значений.

$$16. \quad y(x) - \lambda \int_a^b [g(x)h(t) - h(x)g(t)]y(t) dt = f(x).$$

Характеристические значения уравнения:

$$\lambda_1 = \frac{1}{\sqrt{s_1^2 - s_2s_3}}, \quad \lambda_2 = -\frac{1}{\sqrt{s_1^2 - s_2s_3}},$$

где

$$s_1 = \int_a^b h(x)g(x) dx, \quad s_2 = \int_a^b h^2(x) dx, \quad s_3 = \int_a^b g^2(x) dx.$$

1°. Решение при $\lambda \neq \lambda_{1,2}$:

$$y(x) = f(x) + \lambda[A_1g(x) + A_2h(x)],$$

где постоянные A_1 и A_2 вычисляются по формулам

$$A_1 = \frac{f_1 + \lambda(f_1s_1 - f_2s_2)}{(s_2s_3 - s_1^2)\lambda^2 + 1}, \quad A_2 = \frac{-f_2 + \lambda(f_2s_1 - f_1s_3)}{(s_2s_3 - s_1^2)\lambda^2 + 1},$$

$$f_1 = \int_a^b f(x)h(x) dx, \quad f_2 = \int_a^b f(x)g(x) dx.$$

2°. Решение при $\lambda = \lambda_1 \neq \lambda_2$ и $f_1 = f_2 = 0$:

$$y(x) = f(x) + Cy_1(x), \quad y_1(x) = g(x) + \frac{\sqrt{s_1^2 - s_2s_3} - s_1}{s_2} h(x),$$

где C — произвольная постоянная, а $y_1(x)$ — собственная функция уравнения, соответствующая характеристическому значению λ_1 .

3°. Решение при $\lambda = \lambda_2 \neq \lambda_1$ и $f_1 = f_2 = 0$:

$$y(x) = f(x) + Cy_2(x), \quad y_2(x) = g(x) - \frac{\sqrt{s_1^2 - s_2s_3} + s_1}{s_2} h(x),$$

где C — произвольная постоянная, а $y_2(x)$ — собственная функция ядра, соответствующая характеристическому значению λ_2 .

4°. Уравнение не имеет кратных характеристических значений.

$$17. \quad y(x) - \lambda \int_a^b [Ag(x)h(t) + Bh(x)g(t)]y(t) dt = f(x).$$

Характеристические значения уравнения:

$$\lambda_{1,2} = \frac{(A+B)s_1 \pm \sqrt{(A-B)^2s_1^2 + 4ABs_2s_3}}{2AB(s_1^2 - s_2s_3)},$$

где

$$s_1 = \int_a^b h(x)g(x) dx, \quad s_2 = \int_a^b h^2(x) dx, \quad s_3 = \int_a^b g^2(x) dx.$$

1°. Решение при $\lambda \neq \lambda_{1,2}$:

$$y(x) = f(x) + \lambda[A_1 g(x) + A_2 h(x)],$$

где постоянные A_1 и A_2 вычисляются по формулам

$$A_1 = \frac{Af_1 - \lambda AB(f_1 s_1 - f_2 s_2)}{AB(s_1^2 - s_2 s_3)\lambda^2 - (A+B)s_1\lambda + 1}, \quad A_2 = \frac{Bf_2 - \lambda AB(f_2 s_1 - f_1 s_3)}{AB(s_1^2 - s_2 s_3)\lambda^2 - (A+B)s_1\lambda + 1},$$

$$f_1 = \int_a^b f(x)h(x)dx, \quad f_2 = \int_a^b f(x)g(x)dx.$$

2°. Решение при $\lambda = \lambda_1 \neq \lambda_2$ и $f_1 = f_2 = 0$:

$$y(x) = f(x) + Cy_1(x), \quad y_1(x) = g(x) + \frac{1 - \lambda_1 A s_1}{\lambda_1 A s_2} h(x),$$

где C — произвольная постоянная, а $y_1(x)$ — собственная функция уравнения, соответствующая характеристическому значению λ_1 .

3°. Решение при $\lambda = \lambda_2 \neq \lambda_1$ и $f_1 = f_2 = 0$ получается из формул п. 2° заменой λ_1 и $y_1(x)$ на λ_2 и $y_2(x)$ соответственно.

4°. Решение при $\lambda = \lambda_{1,2} = \lambda_*$ и $f_1 = f_2 = 0$, где $\lambda_* = \frac{2}{(A+B)s_1}$ — двукратное характеристическое значение:

$$y(x) = f(x) + Cy_*(x), \quad y_*(x) = g(x) - \frac{(A-B)s_1}{2As_2} h(x).$$

Здесь C — произвольная постоянная, а $y_*(x)$ — собственная функция уравнения, соответствующая λ_* .

$$18. \quad y(x) - \lambda \int_a^b [g_1(x)h_1(t) + g_2(x)h_2(t)]y(t)dt = f(x).$$

Характеристические значения уравнения λ_1 и λ_2 даются формулами:

$$\lambda_{1,2} = \frac{s_{11} + s_{22} \pm \sqrt{(s_{11} - s_{22})^2 + 4s_{12}s_{21}}}{2(s_{11}s_{22} - s_{12}s_{21})},$$

причем существуют следующие определенные интегралы:

$$s_{11} = \int_a^b h_1(x)g_1(x)dx, \quad s_{12} = \int_a^b h_1(x)g_2(x)dx,$$

$$s_{21} = \int_a^b h_2(x)g_1(x)dx, \quad s_{22} = \int_a^b h_2(x)g_2(x)dx.$$

1°. Решение при $\lambda \neq \lambda_{1,2}$:

$$y(x) = f(x) + \lambda[A_1 g_1(x) + A_2 g_2(x)],$$

где постоянные A_1 и A_2 заданы соотношениями

$$A_1 = \frac{f_1 - \lambda(f_1 s_{22} - f_2 s_{12})}{(s_{11}s_{22} - s_{12}s_{21})\lambda^2 - (s_{11} + s_{22})\lambda + 1}, \quad A_2 = \frac{f_2 - \lambda(f_2 s_{11} - f_1 s_{21})}{(s_{11}s_{22} - s_{12}s_{21})\lambda^2 - (s_{11} + s_{22})\lambda + 1},$$

$$f_1 = \int_a^b f(x)h_1(x)dx, \quad f_2 = \int_a^b f(x)h_2(x)dx.$$

2°. Решение при $\lambda = \lambda_1 \neq \lambda_2$ и $f_1 = f_2 = 0$:

$$y(x) = f(x) + Cy_1(x),$$

где C — произвольная постоянная, а $y_1(x)$ — собственная функция ядра, соответствующая характеристическому значению λ_1 :

$$y_1(x) = g_1(x) + \frac{1 - \lambda_1 s_{11}}{\lambda_1 s_{12}} g_2(x) = g_1(x) + \frac{\lambda_1 s_{21}}{1 - \lambda_1 s_{22}} g_2(x).$$

3°. Решение при $\lambda = \lambda_2 \neq \lambda_1$ и $f_1 = f_2 = 0$ получается из формул п. 2° заменой λ_1 и $y_1(x)$ на λ_2 и $y_2(x)$ соответственно.

4°. Решение при $\lambda = \lambda_{1,2} = \lambda_*$ и $f_1 = f_2 = 0$, где $\lambda_* = \frac{2}{s_{11} + s_{22}}$ — двукратное характеристическое значение (при $s_{11} = -s_{22}$ такого числа не существует):

$$y(x) = f(x) + C y_*(x).$$

Здесь C — произвольная постоянная, а $y_*(x)$ — собственная функция уравнения, соответствующая λ_* :

a) если $s_{11} \neq s_{22}$, то $s_{12} = -\frac{1}{4}(s_{11} - s_{22})^2/s_{21}$, $s_{21} \neq 0$ и

$$y_*(x) = g_1(x) - \frac{s_{11} - s_{22}}{2s_{12}} g_2(x), \quad (s_{12}s_{21} < 0);$$

b) если $s_{11} = s_{22}$, то в силу равенства $s_{12}s_{21} = -\frac{1}{4}(s_{11} - s_{22})^2 = 0$ имеем

$$y_*(x) = \begin{cases} g_1(x) & \text{при } s_{12} \neq 0, s_{21} = 0, \\ g_2(x) & \text{при } s_{12} = 0, s_{21} \neq 0, \\ C_1 g_1(x) + C_2 g_2(x) & \text{при } s_{12} = 0, s_{21} = 0, \end{cases}$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

$$19. \quad y(x) - \lambda \int_a^b [g(x) + h(t)]^m y(t) dt = f(x), \quad m = 1, 2, \dots$$

Частный случай уравнения 4.9.20 при $g_k(x) = g^k(x)$, $h_k(t) = C_m^k h^{m-k}(t)$, $k = 1, \dots, m$.

Решение:

$$y(x) = f(x) + \lambda \sum_{k=0}^m A_k g^k(x),$$

где A_k — постоянные, которые можно определить на основании 4.9.20.

$$20. \quad y(x) - \lambda \int_a^b \left[\sum_{k=1}^n g_k(x) h_k(t) \right] y(t) dt = f(x), \quad n = 2, 3, \dots$$

Характеристические значения интегрального уравнения λ_i (их ровно n штук с учетом кратности) являются корнями следующего алгебраического уравнения:

$$\Delta(\lambda) = 0,$$

где

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda s_{11} & -\lambda s_{12} & \cdots & -\lambda s_{1n} \\ -\lambda s_{21} & 1 - \lambda s_{22} & \cdots & -\lambda s_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\lambda s_{n1} & -\lambda s_{n2} & \cdots & 1 - \lambda s_{nn} \end{vmatrix} = (-\lambda)^n \begin{vmatrix} s_{11} - \lambda^{-1} & s_{12} & \cdots & s_{1n} \\ s_{21} & s_{22} - \lambda^{-1} & \cdots & s_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{n1} & s_{n2} & \cdots & s_{nn} - \lambda^{-1} \end{vmatrix},$$

причем существуют определенные интегралы

$$s_{mk} = \int_a^b h_m(x) g_k(x) dx; \quad m, k = 1, \dots, n.$$

1°. Решение при регулярном λ :

$$y(x) = f(x) + \lambda \sum_{k=1}^n A_k g_k(x),$$

где постоянные A_k есть решение следующей системы алгебраических уравнений:

$$A_m - \lambda \sum_{k=1}^n s_{mk} A_k = f_m, \quad f_m = \int_a^b f(x) h_m(x) dx, \quad m = 1, \dots, n.$$

Постоянные A_k можно определить по формулам Крамера

$$A_k = \Delta_k(\lambda) / \Delta(\lambda),$$

где

$$\Delta_k(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda s_{11} & \cdots & -\lambda s_{1k-1} & f_1 & -\lambda s_{1k+1} & \cdots & -\lambda s_{1n} \\ -\lambda s_{21} & \cdots & -\lambda s_{2k-1} & f_2 & -\lambda s_{2k+1} & \cdots & -\lambda s_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -\lambda s_{n1} & \cdots & -\lambda s_{nk-1} & f_n & -\lambda s_{nk+1} & \cdots & 1 - \lambda s_{nn} \end{vmatrix}.$$

2°. Решение при характеристическом λ и $f(x) = 0$:

$$y(x) = \sum_{i=1}^p C_i y_i(x),$$

где C_i — произвольные постоянные, $y_i(x)$ — линейно независимые собственные функции уравнения, соответствующие характеристическому значению λ :

$$y_i(x) = \sum_{k=1}^n A_{k(i)} g_k(x).$$

Здесь постоянные $A_{k(i)}$ составляют p ($p \leq n$) линейно независимых решений следующей однородной системы алгебраических уравнений:

$$A_{m(i)} - \lambda \sum_{k=1}^n s_{mk} A_{k(i)} = 0; \quad m = 1, \dots, n, \quad i = 1, \dots, p.$$

3°. Решение при характеристическом λ и $f(x) \neq 0$ существует тогда и только тогда, когда правая часть уравнения удовлетворяет следующим дополнительным условиям:

$$\sum_{k=1}^n B_{k(i)} f_k = 0, \quad i = 1, \dots, p, \quad p \leq n.$$

Здесь постоянные $B_{k(i)}$ составляют p линейно независимых решений однородной системы алгебраических уравнений, которая является транспонированной к системе, рассмотренной в п. 2°. В этом случае решение имеет вид

$$y(x) = y_0(x) + \sum_{i=1}^p C_i y_i(x),$$

где $y_0(x)$ — частное решение исходного неоднородного уравнения, а сумма представляет собой общее решение соответствующего однородного уравнения (см. п. 2°). В частности, если $f(x) \neq 0$, но все f_k равны нулю, то $y_0(x) = f(x)$.

● Литература: С. Г. Михлин (1959, стр. 59).

4.9-2. Уравнения с разностным ядром: $K(x, t) = K(x - t)$

21. $y(x) = \lambda \int_{-\pi}^{\pi} K(x - t) y(t) dt, \quad K(x) = K(-x).$

Характеристические значения:

$$\lambda_n = \frac{1}{\pi a_n}, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K(x) \cos(nx) dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Соответствующие им собственные функции:

$$y_0(x) = 1, \quad y_n^{(1)}(x) = \cos(nx), \quad y_n^{(2)}(x) = \sin(nx) \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Каждому значению λ_n при $n \neq 0$ отвечают две линейно независимые собственные функции $y_n^{(1)}(x)$ и $y_n^{(2)}(x)$.

● Литература: М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко (1968, стр. 103).

22. $y(x) + \int_{-\infty}^{\infty} K(x - t) y(t) dt = A e^{\lambda x}.$

Решение:

$$y(x) = \frac{A}{1 + q} e^{\lambda x}, \quad q = \int_{-\infty}^{\infty} K(x) e^{-\lambda x} dx.$$

$$23. \quad y(x) + \int_{-\infty}^{\infty} K(x-t)y(t) dt = A \cos(\lambda x) + B \sin(\lambda x).$$

Решение:

$$y(x) = \frac{AI_c + BI_s}{I_c^2 + I_s^2} \cos(\lambda x) + \frac{BI_c - AI_s}{I_c^2 + I_s^2} \sin(\lambda x),$$

$$I_c = 1 + \int_{-\infty}^{\infty} K(z) \cos(\lambda z) dz, \quad I_s = \int_{-\infty}^{\infty} K(z) \sin(\lambda z) dz.$$

$$24. \quad y(x) - \int_{-\infty}^{\infty} K(x-t)y(t) dt = f(x).$$

Здесь $-\infty < x < +\infty$, $f(x) \in L_1(-\infty, \infty)$, $K(x) \in L_1(-\infty, \infty)$.

Для разрешимости интегрального уравнения (в L_1) необходимо и достаточно выполнения условия

$$1 - \sqrt{2\pi} \tilde{K}(u) \neq 0, \quad -\infty < u < \infty, \quad (1)$$

где $\tilde{K}(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} K(x)e^{-iux} dx$ — преобразование Фурье функции $K(x)$. При выполнении условия (1) уравнение имеет единственное решение, представимое формулой

$$y(x) = f(x) + \int_{-\infty}^{\infty} R(x-t)f(t) dt,$$

$$R(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{R}(u)e^{iux} du, \quad \tilde{R}(u) = \frac{\tilde{K}(u)}{1 - \sqrt{2\pi} \tilde{K}(u)}.$$

⊙ Литература: В. А. Диткин, А. П. Прудников (1974, стр. 25).

$$25. \quad y(x) - \int_0^{\infty} K(x-t)y(t) dt = f(x).$$

Уравнение Винера — Хопфа второго рода.

Здесь $0 \leq x < \infty$, $K(x) \in L_1(-\infty, \infty)$, $f(x) \in L_1(0, \infty)$, $y(x) \in L_1(0, \infty)$.

Для разрешимости интегрального уравнения необходимо и достаточно выполнения условия

$$\Omega(u) = 1 - \tilde{K}(u) \neq 0, \quad -\infty < u < \infty, \quad (1)$$

где $\tilde{K}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x)e^{iux} dx$ — преобразование Фурье (несимметричная форма) функции $K(x)$.

При выполнении условия (1) определяется индекс уравнения

$$\nu = -\text{ind } \Omega(u) = -\frac{1}{2\pi} [\arg \Omega(u)]_{-\infty}^{\infty}.$$

1°. Решение при $\nu = 0$:

$$y(x) = f(x) + \int_0^{\infty} R(x,t)f(t) dt,$$

где

$$R(x,t) = R_+(x-t) + R_-(t-x) + \int_0^{\infty} R_+(x-s)R_-(t-s) ds,$$

а функции $R_+(x)$ и $R_-(x)$, такие что $R_+(x) = 0$ и $R_-(x) = 0$ при $x < 0$, однозначно определяются своими преобразованиями Фурье:

$$1 + \int_0^{\infty} R_{\pm}(t)e^{\pm iut} dt = \exp\left[-\frac{1}{2} \ln \Omega(u) \mp \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln \Omega(t)}{t-u} dt\right].$$

Функции $R_+(x)$ и $R_-(x)$ можно также получить, построив решения следующих уравнений:

$$R_+(x) + \int_0^{\infty} K(x-t)R_+(t) dt = K(x), \quad 0 \leq x \leq \infty,$$

$$R_-(x) + \int_0^{\infty} K(t-x)R_-(t) dt = K(-x), \quad 0 \leq x \leq \infty.$$

2°. Решение при $\nu > 0$:

$$y(x) = f(x) + \sum_{m=1}^{\nu} C_m x^{m-1} e^{-x} + \int_0^{\infty} R^{\circ}(x,t) \left[f(t) + \sum_{m=1}^{\nu} C_m t^{m-1} e^{-t} \right] dt,$$

где C_m — произвольные постоянные,

$$R^\circ(x, t) = R_+^{(0)}(x - t) + R_-^{(1)}(t - x) + \int_0^\infty R_+^{(0)}(x - s)R_-^{(1)}(t - s) ds,$$

а функции $R_+^{(0)}(x)$ и $R_-^{(1)}(x)$ однозначно определяются своими преобразованиями Фурье:

$$1 + \int_0^\infty R_\pm^{(1)}(t)e^{\pm iut} dt = \left(\frac{u-i}{u+i}\right)^\nu \left[1 + \int_0^\infty R_\pm^{(0)}(t)e^{\pm iut} dt\right],$$

$$1 + \int_0^\infty R_\pm^{(0)}(t)e^{\pm iut} dt = \exp\left[-\frac{1}{2} \ln \Omega^\circ(u) \mp \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^\infty \frac{\ln \Omega^\circ(t)}{t-u} dt\right],$$

$$\Omega^\circ(u)(u+i)^\nu = \Omega(u)(u-i)^\nu.$$

3°. Решение при $\nu < 0$ существует лишь в случае, когда выполнены условия

$$\int_0^\infty f(x)\psi_m(x) dx = 0, \quad m = 1, 2, \dots, -\nu,$$

где $\psi_1(x), \dots, \psi_\nu(x)$ — система линейно независимых решений транспонированного однородного уравнения

$$\psi(x) - \int_0^\infty K(t-x)\psi(t) dt = 0.$$

Тогда

$$y(x) = f(x) + \int_0^\infty R^*(x, t)f(t) dt,$$

где

$$R^*(x, t) = R_+^{(1)}(x - t) + R_-^{(0)}(t - x) + \int_0^\infty R_+^{(1)}(x - s)R_-^{(0)}(t - s) ds,$$

а функции $R_+^{(1)}(x)$ и $R_-^{(0)}(x)$ однозначно определены в п. 2° своими преобразованиями Фурье.

⊙ Литература: В. И. Смирнов (1974, стр. 195), Ф. Д. Гахов, Ю. И. Черский (1978, стр. 55, 56), Математическая Энциклопедия (1979, т. 2, стр. 598, 599).

4.9-3. Другие уравнения вида $y(x) + \int_a^b K(x, t)y(t) dt = F(x)$

26. $y(x) - \int_{-\infty}^\infty K(x+t)y(t) dt = f(x).$

Для решения этого уравнения используют преобразование Фурье.

Решение:

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty \frac{\tilde{f}(u) + \sqrt{2\pi} \tilde{f}(-u) \tilde{K}(u)}{1 - \sqrt{2\pi} \tilde{K}(u) \tilde{K}(-u)} e^{iux} du,$$

где

$$\tilde{f}(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty f(x)e^{-iux} dx, \quad \tilde{K}(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty K(x)e^{-iux} dx.$$

⊙ Литература: В. А. Диткин, А. П. Прудников (1974, стр. 28).

27. $y(x) + \int_{-\infty}^\infty e^{\beta t} K(x+t)y(t) dt = Ae^{\lambda x}.$

Решение:

$$y(x) = \frac{e^{\lambda x} - k(\lambda)e^{-(\beta+\lambda)x}}{1 - k(\lambda)k(-\beta-\lambda)}, \quad k(\lambda) = \int_{-\infty}^\infty K(x)e^{(\lambda+\beta)x} dx.$$

28. $y(x) + \int_{-\infty}^\infty [e^{\beta t} K(x+t) + M(x-t)]y(t) dt = Ae^{\lambda x}.$

Решение:

$$y(x) = A \frac{I_k(\lambda)e^{px} - [1 + I_m(p)]e^{\lambda x}}{I_k(\lambda)I_k(p) - [1 + I_m(\lambda)][1 + I_m(p)]}, \quad p = -\lambda - \beta,$$

где

$$I_k(\lambda) = \int_{-\infty}^\infty K(z)e^{(\beta+\lambda)z} dz, \quad I_m(\lambda) = \int_{-\infty}^\infty M(z)e^{-\lambda z} dz.$$

$$29. \quad y(x) - \int_0^\infty K(xt)y(t) dt = f(x).$$

Решение находится с помощью формулы обращения преобразования Меллина

$$y(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\tilde{f}(s) + \tilde{K}(s)\tilde{f}(1-s)}{1 - \tilde{K}(s)\tilde{K}(1-s)} x^{-s} ds,$$

где через \tilde{f} и \tilde{K} обозначены преобразования Меллина правой части и ядра интегрального уравнения:

$$\tilde{f}(s) = \int_0^\infty f(x)x^{s-1} dx, \quad \tilde{K}(s) = \int_0^\infty K(x)x^{s-1} dx.$$

⊙ Литература: М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко (1968, стр. 147).

$$30. \quad y(x) - \int_0^\infty K(xt)t^\beta y(t) dt = Ax^\lambda.$$

Решение:

$$y(x) = A \frac{x^\lambda + I_{\beta+\lambda} x^{-\beta-\lambda-1}}{1 - I_{\beta+\lambda} I_{-\lambda-1}}, \quad I_\mu = \int_0^\infty K(\xi)\xi^\mu d\xi.$$

Считается, что все несобственные интегралы существуют.

$$31. \quad y(x) - \int_0^\infty K(xt)t^\beta y(t) dt = f(x).$$

Решение находится с помощью обратного преобразования Меллина

$$y(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\tilde{f}(s) + \tilde{K}(s)\tilde{f}(1+\beta-s)}{1 - \tilde{K}(s)\tilde{K}(1+\beta-s)} x^{-s} ds,$$

где через \tilde{f} и \tilde{K} обозначены преобразования Меллина правой части и ядра интегрального уравнения:

$$\tilde{f}(s) = \int_0^\infty f(x)x^{s-1} dx, \quad \tilde{K}(s) = \int_0^\infty K(x)x^{s-1} dx.$$

$$32. \quad y(x) - \int_0^\infty g(xt)x^\lambda t^\mu y(t) dt = f(x).$$

Это уравнение можно записать в виде уравнения 4.9.31, если обозначить $K(z) = z^\lambda g(z)$, $\beta = \mu - \lambda$.

$$33. \quad y(x) - \int_0^\infty \frac{1}{t} K\left(\frac{x}{t}\right) y(t) dt = 0.$$

Вид собственных функций этого интегрального уравнения определяется корнями следующего трансцендентного (алгебраического) уравнения относительно параметра λ :

$$\int_0^\infty K\left(\frac{1}{z}\right) z^{\lambda-1} dz = 1. \quad (1)$$

1°. Действительным (однократным) корням λ_n уравнения (1) отвечают собственные функции

$$y_n(x) = x^{\lambda_n}.$$

2°. Действительным корням λ_n кратности r отвечают r собственных функций

$$y_{n1}(x) = x^{\lambda_n}, \quad y_{n2}(x) = x^{\lambda_n} \ln x, \quad \dots, \quad y_{nr}(x) = x^{\lambda_n} \ln^{r-1} x.$$

3°. Комплексным (однократным) корням $\lambda_n = \alpha_n + i\beta_n$ уравнения (1) отвечает пара собственных функций

$$y_n^{(1)}(x) = x^{\alpha_n} \cos(\beta_n \ln x), \quad y_n^{(2)}(x) = x^{\alpha_n} \sin(\beta_n \ln x).$$

4°. Комплексным корням $\lambda_n = \alpha_n + i\beta_n$ кратности r отвечают r пар собственных функций

$$\begin{aligned} y_{n1}^{(1)}(x) &= x^{\alpha_n} \cos(\beta_n \ln x), & y_{n1}^{(2)}(x) &= x^{\alpha_n} \sin(\beta_n \ln x), \\ y_{n2}^{(1)}(x) &= x^{\alpha_n} \ln x \cos(\beta_n \ln x), & y_{n2}^{(2)}(x) &= x^{\alpha_n} \ln x \sin(\beta_n \ln x), \\ &\dots & & \dots \\ y_{nr}^{(1)}(x) &= x^{\alpha_n} \ln^{r-1} x \cos(\beta_n \ln x), & y_{nr}^{(2)}(x) &= x^{\alpha_n} \ln^{r-1} x \sin(\beta_n \ln x). \end{aligned}$$

Общее решение представляет собой линейную комбинацию (с произвольными постоянными) собственных функций однородного интегрального уравнения.

$$34. \quad y(x) - \int_0^\infty \frac{1}{t} K\left(\frac{x}{t}\right) y(t) dt = Ax^b.$$

Решение:

$$y(x) = \frac{A}{B} x^b, \quad B = 1 - \int_0^\infty K\left(\frac{1}{\xi}\right) \xi^{b-1} d\xi.$$

Считается, что несобственный интеграл существует и $B \neq 0$. Общее решение рассматриваемого неоднородного интегрального уравнения представляет из себя сумму полученного решения и общего решения однородного интегрального уравнения 4.9.33.

$$35. \quad y(x) - \int_0^\infty \frac{1}{t} K\left(\frac{x}{t}\right) y(t) dt = f(x).$$

Решение находится с помощью обратного преобразования Меллина:

$$y(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\tilde{f}(s)}{1 - \tilde{K}(s)} x^{-s} ds,$$

где через \tilde{f} и \tilde{K} обозначены преобразования Меллина правой части и ядра интегрального уравнения:

$$\tilde{f}(s) = \int_0^\infty f(x) x^{s-1} dx, \quad \tilde{K}(s) = \int_0^\infty K(x) x^{s-1} dx.$$

В частном случае при $f(x) = Ae^{-\lambda x}$, $K(x) = \frac{1}{2}e^{-x}$ решение интегрального уравнения имеет вид

$$y(x) = \begin{cases} \frac{4A}{(3-2C)(\lambda x)^3} & \text{при } \lambda x > 1, \\ -2A \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(\lambda x)^{s_k} \psi(s_k)} & \text{при } \lambda x < 1. \end{cases}$$

Здесь $C = 0.5772 \dots$ — постоянная Эйлера, $\psi(z) = [\ln \Gamma(z)]'_z$ — логарифмическая производная гамма-функции, s_k — отрицательные корни трансцендентного уравнения: $\Gamma(s_k) = 2$, где $\Gamma(z)$ — гамма-функция.

● Литература: М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко (1968, стр. 146).

$$36. \quad y(x) + \int_a^b |x-t| g(t) y(t) dt = f(x), \quad a \leq x \leq b.$$

1°. Раскроем модуль в подынтегральном выражении. В результате получим

$$y(x) + \int_a^x (x-t) g(t) y(t) dt + \int_x^b (t-x) g(t) y(t) dt = f(x). \quad (1)$$

Дифференцируя (1) по x , имеем

$$y'_x(x) + \int_a^x g(t) y(t) dt - \int_x^b g(t) y(t) dt = f'_x(x). \quad (2)$$

Дифференцируя (2), приходим к следующему обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка для функции $y = y(x)$:

$$y''_{xx} + 2g(x)y = f''_{xx}(x). \quad (3)$$

2°. Выведем граничные условия для уравнения (3). Будем считать, что пределы интегрирования удовлетворяют условиям $-\infty < a < b < \infty$. Полагая в (1) $x = a$ и $x = b$, имеем два следствия:

$$\begin{aligned} y(a) + \int_a^b (t-a) g(t) y(t) dt &= f(a), \\ y(b) + \int_a^b (b-t) g(t) y(t) dt &= f(b). \end{aligned} \quad (4)$$

Выразим из уравнения (3) произведение $g(x)y$ через y''_{xx} и f''_{xx} и подставим в (4). После интегрирования по частям получим искомые граничные условия для функции $y(x)$:

$$\begin{aligned} y(a) + y(b) + (b-a)[f'_x(b) - y'_x(b)] &= f(a) + f(b), \\ y(a) + y(b) + (a-b)[f'_x(a) - y'_x(a)] &= f(a) + f(b). \end{aligned} \quad (5)$$

Отметим полезное следствие равенств (5):

$$y'_x(a) + y'_x(b) = f'_x(a) + f'_x(b), \quad (6)$$

которое можно использовать вместе с одним из условий (5).

Уравнение (3) вместе с граничными условиями (5) описывает решение исходного интегрального уравнения. Условия (5) позволяют найти постоянные интегрирования, которые получаются в результате решения дифференциального уравнения (3).

$$37. \quad y(x) + \int_a^b e^{\lambda|x-t|} g(t)y(t) dt = f(x), \quad a \leq x \leq b.$$

1°. Раскроем модуль в подынтегральном выражении. В результате получим

$$y(x) + \int_a^x e^{\lambda(x-t)} g(t)y(t) dt + \int_x^b e^{\lambda(t-x)} g(t)y(t) dt = f(x). \quad (1)$$

Дифференцируя (1) дважды по x , имеем

$$y''_{xx}(x) + 2\lambda g(x)y(x) + \lambda^2 \int_a^x e^{\lambda(x-t)} g(t)y(t) dt + \lambda^2 \int_x^b e^{\lambda(t-x)} g(t)y(t) dt = f''_{xx}(x). \quad (2)$$

Исключая из (1) и (2) интегральные члены, приходим к следующему обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка для функции $y = y(x)$:

$$y''_{xx} + 2\lambda g(x)y - \lambda^2 y = f''_{xx}(x) - \lambda^2 f(x). \quad (3)$$

2°. Выведем граничные условия для уравнения (3). Будем считать, что пределы интегрирования удовлетворяют условиям $-\infty < a < b < +\infty$. Полагая в (1) $x = a$ и $x = b$, имеем два следствия:

$$\begin{aligned} y(a) + e^{-\lambda a} \int_a^b e^{\lambda t} g(t)y(t) dt &= f(a), \\ y(b) + e^{\lambda b} \int_a^b e^{-\lambda t} g(t)y(t) dt &= f(b). \end{aligned} \quad (4)$$

Выразим из уравнения (3) произведение $g(x)y$ через y''_{xx} и f''_{xx} и подставим в (4). После интегрирования по частям получим

$$\begin{aligned} e^{\lambda b} \varphi'_x(b) - e^{\lambda a} \varphi'_x(a) &= \lambda e^{\lambda a} \varphi(a) + \lambda e^{\lambda b} \varphi(b), \\ e^{-\lambda b} \varphi'_x(b) - e^{-\lambda a} \varphi'_x(a) &= \lambda e^{-\lambda a} \varphi(a) + \lambda e^{-\lambda b} \varphi(b), \end{aligned} \quad \varphi(x) = y(x) - f(x).$$

Отсюда после некоторых преобразований найдем граничные условия для функции $y(x)$:

$$\varphi'_x(a) + \lambda \varphi(a) = 0, \quad \varphi'_x(b) - \lambda \varphi(b) = 0; \quad \varphi(x) = y(x) - f(x). \quad (5)$$

Уравнение (3) вместе с граничными условиями (5) описывает решение исходного интегрального уравнения. Условия (5) позволяют найти постоянные интегрирования, которые получаются в результате решения дифференциального уравнения (3).

$$38. \quad y(x) + \int_a^b \operatorname{sh}(\lambda|x-t|) g(t)y(t) dt = f(x), \quad a \leq x \leq b.$$

1°. Раскроем модуль в подынтегральном выражении. В результате получим

$$y(x) + \int_a^x \operatorname{sh}[\lambda(x-t)] g(t)y(t) dt + \int_x^b \operatorname{sh}[\lambda(t-x)] g(t)y(t) dt = f(x). \quad (1)$$

Дифференцируя (1) дважды по x , имеем

$$\begin{aligned} y''_{xx}(x) + 2\lambda g(x)y(x) + \lambda^2 \int_a^x \operatorname{sh}[\lambda(x-t)] g(t)y(t) dt \\ + \lambda^2 \int_x^b \operatorname{sh}[\lambda(t-x)] g(t)y(t) dt = f''_{xx}(x). \end{aligned} \quad (2)$$

Исключая из (1) и (2) интегральные члены, приходим к следующему обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка для функции $y = y(x)$:

$$y''_{xx} + 2\lambda g(x)y - \lambda^2 y = f''_{xx}(x) - \lambda^2 f(x). \quad (3)$$

2°. Выведем граничные условия для уравнения (3). Будем считать, что пределы интегрирования удовлетворяют условиям $-\infty < a < b < +\infty$. Полагая в (1) $x = a$ и $x = b$, имеем два следствия:

$$\begin{aligned} y(a) + \int_a^b \operatorname{sh}[\lambda(t-a)]g(t)y(t) dt &= f(a), \\ y(b) + \int_a^b \operatorname{sh}[\lambda(b-t)]g(t)y(t) dt &= f(b). \end{aligned} \quad (4)$$

Выразим из уравнения (3) произведение $g(x)y$ через y''_{xx} и f''_{xx} и подставим в (4). После интегрирования по частям получим

$$\begin{aligned} \operatorname{sh}[\lambda(b-a)]\varphi'_x(b) - \lambda \operatorname{ch}[\lambda(b-a)]\varphi(b) &= \lambda\varphi(a), \\ \operatorname{sh}[\lambda(b-a)]\varphi'_x(a) + \lambda \operatorname{ch}[\lambda(b-a)]\varphi(a) &= -\lambda\varphi(b); \quad \varphi(x) = y(x) - f(x). \end{aligned} \quad (5)$$

Уравнение (3) вместе с граничными условиями (5) описывает решение исходного интегрального уравнения. Условия (5) позволяют найти постоянные интегрирования, которые получаются в результате решения дифференциального уравнения (3).

$$39. \quad y(x) + \int_a^b \sin[\lambda|x-t|]g(t)y(t) dt = f(x), \quad a \leq x \leq b.$$

1°. Раскроем модуль в подынтегральном выражении. В результате получим

$$y(x) + \int_a^x \sin[\lambda(x-t)]g(t)y(t) dt + \int_x^b \sin[\lambda(t-x)]g(t)y(t) dt = f(x). \quad (1)$$

Дифференцируя (1) дважды по x , имеем

$$\begin{aligned} y''_{xx}(x) + 2\lambda g(x)y(x) - \lambda^2 \int_a^x \sin[\lambda(x-t)]g(t)y(t) dt \\ - \lambda^2 \int_x^b \sin[\lambda(t-x)]g(t)y(t) dt = f''_{xx}(x). \end{aligned} \quad (2)$$

Исключая из (1) и (2) интегральные члены, приходим к следующему обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка для функции $y = y(x)$:

$$y''_{xx} + 2\lambda g(x)y + \lambda^2 y = f''_{xx}(x) + \lambda^2 f(x). \quad (3)$$

2°. Выведем граничные условия для уравнения (3). Будем считать, что пределы интегрирования удовлетворяют условиям $-\infty < a < b < +\infty$. Полагая в (1) $x = a$ и $x = b$, имеем два следствия:

$$\begin{aligned} y(a) + \int_a^b \sin[\lambda(t-a)]g(t)y(t) dt &= f(a), \\ y(b) + \int_a^b \sin[\lambda(b-t)]g(t)y(t) dt &= f(b). \end{aligned} \quad (4)$$

Выразим из уравнения (3) произведение $g(x)y$ через y''_{xx} и f''_{xx} и подставим в (4). После интегрирования по частям получим

$$\begin{aligned} \sin[\lambda(b-a)]\varphi'_x(b) - \lambda \cos[\lambda(b-a)]\varphi(b) &= \lambda\varphi(a), \\ \sin[\lambda(b-a)]\varphi'_x(a) + \lambda \cos[\lambda(b-a)]\varphi(a) &= -\lambda\varphi(b); \quad \varphi(x) = y(x) - f(x). \end{aligned} \quad (5)$$

Уравнение (3) вместе с граничными условиями (5) описывает решение исходного интегрального уравнения. Условия (5) позволяют найти постоянные интегрирования, которые получаются в результате решения дифференциального уравнения (3).

4.9-4. Уравнения вида $y(x) + \int_a^b K(x, t)y(\cdot \cdot \cdot) dt = F(x)$

$$40. \quad y(x) + \int_a^b f(t)y(x-t) dt = 0.$$

Вид собственных функций этого интегрального уравнения* определяется корнями следующего характеристического (трансцендентного или алгебраического) уравнения относительно

* Аргументы уравнений, содержащих в подынтегральном выражении $y(x-t)$, могут изменяться, например, в следующих пределах: 1) $-\infty < x < \infty$, $-\infty < t < \infty$ при $a = -\infty$, $b = \infty$; 2) $a \leq t \leq b$, $-\infty \leq x < \infty$, где a и b любые, удовлетворяющие условиям $-\infty < a < b < \infty$. Случай 2) следует из случая 1), когда функция $f(t)$ отлична от нуля только на отрезке $a \leq t \leq b$.

параметра μ :

$$\int_a^b f(t) \exp(-\mu t) dt = -1. \quad (1)$$

1°. Действительным (однократным) корням μ_k уравнения (1) отвечают собственные функции $y_k(x) = \exp(\mu_k x)$.

2°. Действительным корням μ_k кратности r отвечают r собственных функций

$$y_{k1}(x) = \exp(\mu_k x), \quad y_{k2}(x) = x \exp(\mu_k x), \quad \dots, \quad y_{kr}(x) = x^{r-1} \exp(\mu_k x).$$

3°. Комплексным (однократным) корням $\mu_k = \alpha_k + i\beta_k$ уравнения (1) отвечает пара собственных функций

$$y_k^{(1)}(x) = \exp(\alpha_k x) \cos(\beta_k x), \quad y_k^{(2)}(x) = \exp(\alpha_k x) \sin(\beta_k x).$$

4°. Комплексным корням $\mu_k = \alpha_k + i\beta_k$ кратности r отвечают r пар собственных функций

$$\begin{aligned} y_{k1}^{(1)}(x) &= \exp(\alpha_k x) \cos(\beta_k x), & y_{k1}^{(2)}(x) &= \exp(\alpha_k x) \sin(\beta_k x), \\ y_{k2}^{(1)}(x) &= x \exp(\alpha_k x) \cos(\beta_k x), & y_{k2}^{(2)}(x) &= x \exp(\alpha_k x) \sin(\beta_k x), \\ &\dots & \dots & \\ y_{kr}^{(1)}(x) &= x^{r-1} \exp(\alpha_k x) \cos(\beta_k x), & y_{kr}^{(2)}(x) &= x^{r-1} \exp(\alpha_k x) \sin(\beta_k x). \end{aligned}$$

Общее решение представляет собой линейную комбинацию (с произвольными постоянными) собственных функций однородного интегрального уравнения.

► Для уравнений 4.9.41–4.9.46 приведены только частные решения. Общие решения этих уравнений можно получить, прибавив к частным решениям уравнений общее решение однородного уравнения 4.9.40.

$$41. \quad y(x) + \int_a^b f(t)y(x-t) dt = Ax + B.$$

Решение:

$$y(x) = px + q,$$

где коэффициенты p и q вычисляются по формулам

$$p = \frac{A}{1 + I_0}, \quad q = \frac{AI_1}{(1 + I_0)^2} + \frac{B}{1 + I_0}, \quad I_0 = \int_a^b f(t) dt, \quad I_1 = \int_a^b t f(t) dt.$$

$$42. \quad y(x) + \int_a^b f(t)y(x-t) dt = Ae^{\lambda x}.$$

Решение:

$$y(x) = \frac{A}{B} e^{\lambda x}, \quad B = 1 + \int_a^b f(t) \exp(-\lambda t) dt.$$

$$43. \quad y(x) + \int_a^b f(t)y(x-t) dt = A \sin(\lambda x).$$

Решение:

$$y(x) = \frac{AI_c}{I_c^2 + I_s^2} \sin(\lambda x) + \frac{AI_s}{I_c^2 + I_s^2} \cos(\lambda x),$$

где коэффициенты I_c и I_s вычисляются по формулам

$$I_c = 1 + \int_a^b f(t) \cos(\lambda t) dt, \quad I_s = \int_a^b f(t) \sin(\lambda t) dt.$$

$$44. \quad y(x) + \int_a^b f(t)y(x-t) dt = A \cos(\lambda x).$$

Решение:

$$y(x) = -\frac{AI_s}{I_c^2 + I_s^2} \sin(\lambda x) + \frac{AI_c}{I_c^2 + I_s^2} \cos(\lambda x).$$

где коэффициенты I_c и I_s вычисляются по формулам

$$I_c = 1 + \int_a^b f(t) \cos(\lambda t) dt, \quad I_s = \int_a^b f(t) \sin(\lambda t) dt.$$

$$45. \quad y(x) + \int_a^b f(t)y(x-t) dt = e^{\mu x} (A \sin \lambda x + B \cos \lambda x).$$

Решение:

$$y(x) = e^{\mu x} (p \sin \lambda x + q \cos \lambda x).$$

где коэффициенты p и q вычисляются по формулам

$$p = \frac{AI_c - BI_s}{I_c^2 + I_s^2}, \quad q = \frac{AI_s + BI_c}{I_c^2 + I_s^2},$$

$$I_c = 1 + \int_a^b f(t)e^{-\mu t} \cos(\lambda t) dt, \quad I_s = \int_a^b f(t)e^{-\mu t} \sin(\lambda t) dt.$$

$$46. \quad y(x) + \int_a^b f(t)y(x-t) dt = g(x).$$

1°. Для правой части $g(x) = \sum_{k=1}^n A_k \exp(\lambda_k x)$ решение уравнения имеет вид

$$y(x) = \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{B_k} \exp(\lambda_k x), \quad B_k = 1 + \int_a^b f(t) \exp(-\lambda_k t) dt.$$

2°. Для полиномиальной правой части уравнения $g(x) = \sum_{k=0}^n A_k x^k$ решение имеет вид

$$y(x) = \sum_{k=0}^n B_k x^k,$$

где постоянные B_k определяются методом неопределенных коэффициентов.

3°. Для правой части $g(x) = e^{\lambda x} \sum_{k=0}^n A_k x^k$ решение уравнения имеет вид

$$y(x) = e^{\lambda x} \sum_{k=0}^n B_k x^k,$$

где постоянные B_k определяются методом неопределенных коэффициентов.

4°. Для правой части $g(x) = \sum_{k=1}^n A_k \cos(\lambda_k x)$ решение уравнения имеет вид

$$y(x) = \sum_{k=1}^n B_k \cos(\lambda_k x) + \sum_{k=1}^n C_k \sin(\lambda_k x),$$

где постоянные B_k и C_k определяются методом неопределенных коэффициентов.

5°. Для правой части $g(x) = \sum_{k=1}^n A_k \sin(\lambda_k x)$ решение уравнения имеет вид

$$y(x) = \sum_{k=1}^n B_k \cos(\lambda_k x) + \sum_{k=1}^n C_k \sin(\lambda_k x),$$

где постоянные B_k и C_k определяются методом неопределенных коэффициентов.

6°. Для правой части $g(x) = \cos(\lambda x) \sum_{k=0}^n A_k x^k$ решение уравнения имеет вид

$$y(x) = \cos(\lambda x) \sum_{k=0}^n B_k x^k + \sin(\lambda x) \sum_{k=0}^n C_k x^k,$$

где постоянные B_k и C_k определяются методом неопределенных коэффициентов.

7°. Для правой части $g(x) = \sin(\lambda x) \sum_{k=0}^n A_k x^k$ решение уравнения имеет вид

$$y(x) = \cos(\lambda x) \sum_{k=0}^n B_k x^k + \sin(\lambda x) \sum_{k=0}^n C_k x^k,$$

где постоянные B_k и C_k определяются методом неопределенных коэффициентов.

8°. Для правой части $g(x) = e^{\mu x} \sum_{k=1}^n A_k \cos(\lambda_k x)$ решение уравнения имеет вид

$$y(x) = e^{\mu x} \sum_{k=1}^n B_k \cos(\lambda_k x) + e^{\mu x} \sum_{k=1}^n C_k \sin(\lambda_k x),$$

где постоянные B_k и C_k определяются методом неопределенных коэффициентов.

9°. Для правой части $g(x) = e^{\mu x} \sum_{k=1}^n A_k \sin(\lambda_k x)$ решение уравнения имеет вид

$$y(x) = e^{\mu x} \sum_{k=1}^n B_k \cos(\lambda_k x) + e^{\mu x} \sum_{k=1}^n C_k \sin(\lambda_k x),$$

где постоянные B_k и C_k определяются методом неопределенных коэффициентов.

10°. Для правой части $g(x) = \cos(\lambda x) \sum_{k=1}^n A_k \exp(\mu_k x)$ решение уравнения имеет вид

$$y(x) = \cos(\lambda x) \sum_{k=1}^n B_k \exp(\mu_k x) + \sin(\lambda x) \sum_{k=1}^n C_k \exp(\mu_k x),$$

где постоянные B_k и C_k определяются методом неопределенных коэффициентов.

11°. Для правой части $g(x) = \sin(\lambda x) \sum_{k=1}^n A_k \exp(\mu_k x)$ решение уравнения имеет вид

$$y(x) = \cos(\lambda x) \sum_{k=1}^n B_k \exp(\mu_k x) + \sin(\lambda x) \sum_{k=1}^n C_k \exp(\mu_k x),$$

где постоянные B_k и C_k определяются методом неопределенных коэффициентов.

47. $y(x) + \int_a^b f(t)y(x + \beta t) dt = Ax + B.$

Решение*:

$$y(x) = px + q,$$

где

$$p = \frac{A}{1 + I_0}, \quad q = \frac{B}{1 + I_0} - \frac{AI_1\beta}{(1 + I_0)^2}, \quad I_0 = \int_a^b f(t) dt, \quad I_1 = \int_a^b t f(t) dt.$$

48. $y(x) + \int_a^b f(t)y(x + \beta t) dt = Ae^{\lambda x}.$

Решение:

$$y(x) = \frac{A}{B} e^{\lambda x}, \quad B = 1 + \int_a^b f(t) \exp(\lambda \beta t) dt.$$

* Аргументы уравнений, содержащих в подынтегральном выражении $y(x + \beta t)$, при $\beta > 0$ могут изменяться, например, в следующих пределах: 1) $0 \leq x < \infty$, $0 \leq t < \infty$ при $a = 0$, $b = \infty$; 2) $a \leq t \leq b$, $0 \leq x < \infty$, где a и b — любые, удовлетворяющие условиям $0 \leq a < b < \infty$. Случай 2) следует из случая 1), когда функция $f(t)$ отлична от нуля только на отрезке $a \leq t \leq b$.

$$49. \quad y(x) + \int_a^b f(t)y(x + \beta t) dt = A \sin \lambda x + B \cos \lambda x.$$

Решение:

$$y(x) = p \sin \lambda x + q \cos \lambda x,$$

где коэффициенты p и q — вычисляются по формулам

$$p = \frac{AI_c + BI_s}{I_c^2 + I_s^2}, \quad q = \frac{BI_c - AI_s}{I_c^2 + I_s^2},$$

$$I_c = 1 + \int_a^b f(t) \cos(\lambda \beta t) dt, \quad I_s = \int_a^b f(t) \sin(\lambda \beta t) dt.$$

$$50. \quad y(x) + \int_a^b f(t)y(x + \beta t) dt = g(x).$$

1°. Для правой части $g(x) = \sum_{k=1}^n A_k \exp(\lambda_k x)$ решение уравнения имеет вид

$$y(x) = \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{B_k} \exp(\lambda_k x), \quad B_k = 1 + \int_a^b f(t) \exp(\beta \lambda_k t) dt.$$

2°. Для полиномиальной правой части уравнения $g(x) = \sum_{k=0}^n A_k x^k$ решение имеет вид

$$y(x) = \sum_{k=0}^n B_k x^k,$$

где постоянные B_k определяются методом неопределенных коэффициентов.

3°. Для правой части $g(x) = e^{\lambda x} \sum_{k=0}^n A_k x^k$ решение уравнения имеет вид

$$y(x) = e^{\lambda x} \sum_{k=0}^n B_k x^k,$$

где постоянные B_k определяются методом неопределенных коэффициентов.

4°. Для правой части $g(x) = \sum_{k=1}^n A_k \cos(\lambda_k x)$ решение уравнения имеет вид

$$y(x) = \sum_{k=1}^n B_k \cos(\lambda_k x) + \sum_{k=1}^n C_k \sin(\lambda_k x),$$

где постоянные B_k и C_k определяются методом неопределенных коэффициентов.

5°. Для правой части $g(x) = \sum_{k=1}^n A_k \sin(\lambda_k x)$ решение уравнения имеет вид

$$y(x) = \sum_{k=1}^n B_k \cos(\lambda_k x) + \sum_{k=1}^n C_k \sin(\lambda_k x),$$

где постоянные B_k и C_k определяются методом неопределенных коэффициентов.

6°. Для правой части $g(x) = \cos(\lambda x) \sum_{k=0}^n A_k x^k$ решение уравнения имеет вид

$$y(x) = \cos(\lambda x) \sum_{k=0}^n B_k x^k + \sin(\lambda x) \sum_{k=0}^n C_k x^k,$$

где постоянные B_k и C_k определяются методом неопределенных коэффициентов.

7°. Для правой части $g(x) = \sin(\lambda x) \sum_{k=0}^n A_k x^k$ решение уравнения имеет вид

$$y(x) = \cos(\lambda x) \sum_{k=0}^n B_k x^k + \sin(\lambda x) \sum_{k=0}^n C_k x^k,$$

где постоянные B_k и C_k определяются методом неопределенных коэффициентов.

8°. Для правой части $g(x) = e^{\mu x} \sum_{k=1}^n A_k \cos(\lambda_k x)$ решение уравнения имеет вид

$$y(x) = e^{\mu x} \sum_{k=1}^n B_k \cos(\lambda_k x) + e^{\mu x} \sum_{k=1}^n C_k \sin(\lambda_k x),$$

где постоянные B_k и C_k определяются методом неопределенных коэффициентов.

9°. Для правой части $g(x) = e^{\mu x} \sum_{k=1}^n A_k \sin(\lambda_k x)$ решение уравнения имеет вид

$$y(x) = e^{\mu x} \sum_{k=1}^n B_k \cos(\lambda_k x) + e^{\mu x} \sum_{k=1}^n C_k \sin(\lambda_k x),$$

где постоянные B_k и C_k определяются методом неопределенных коэффициентов.

10°. Для правой части $g(x) = \cos(\lambda x) \sum_{k=1}^n A_k \exp(\mu_k x)$ решение уравнения имеет вид

$$y(x) = \cos(\lambda x) \sum_{k=1}^n B_k \exp(\mu_k x) + \sin(\lambda x) \sum_{k=1}^n C_k \exp(\mu_k x),$$

где постоянные B_k и C_k определяются методом неопределенных коэффициентов.

11°. Для правой части $g(x) = \sin(\lambda x) \sum_{k=1}^n A_k \exp(\mu_k x)$ решение уравнения имеет вид

$$y(x) = \cos(\lambda x) \sum_{k=1}^n B_k \exp(\mu_k x) + \sin(\lambda x) \sum_{k=1}^n C_k \exp(\mu_k x),$$

где постоянные B_k и C_k определяются методом неопределенных коэффициентов.

51. $y(x) + \int_a^b f(t)y(xt) dt = 0.$

Вид собственных функций этого интегрального уравнения* определяется корнями следующего трансцендентного (алгебраического) уравнения относительно параметра λ :

$$\int_a^b f(t)t^\lambda dt = -1. \quad (1)$$

1°. Действительным (однократным) корням λ_k уравнения (1) отвечают собственные функции:

$$y_k(x) = x^{\lambda_k}.$$

2°. Действительным корням λ_k кратности r отвечают r собственных функций

$$y_{k1}(x) = x^{\lambda_k}, \quad y_{k2}(x) = x^{\lambda_k} \ln x, \quad \dots, \quad y_{kr}(x) = x^{\lambda_k} \ln^{r-1} x.$$

3°. Комплексным (однократным) корням $\lambda_k = \alpha_k + i\beta_k$ уравнения (1) отвечает пара собственных функций

$$y_k^{(1)}(x) = x^{\alpha_k} \cos(\beta_k \ln x), \quad y_k^{(2)}(x) = x^{\alpha_k} \sin(\beta_k \ln x).$$

* Аргументы уравнений, содержащих в подынтегральном выражении $y(xt)$, могут изменяться в следующих пределах: 1) $0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq 1$ при $a = 0, b = 1$, 2) $1 \leq x < \infty, 1 \leq t < \infty$ при $a = 1, b = \infty$, 3) $0 \leq x < \infty, 0 \leq t < \infty$ при $a = 0, b = \infty$, 4) $a \leq t \leq b, 0 \leq x < \infty$, где a и b — любые, удовлетворяющие условиям $0 \leq a < b \leq \infty$. Случай 4) следует из случая 3), когда функция $f(t)$ отлична от нуля только на отрезке $a \leq t \leq b$.

4°. Комплексным корням $\lambda_k = \alpha_k + i\beta_k$ кратности r отвечают r пар собственных функций

$$\begin{aligned} y_{k1}^{(1)}(x) &= x^{\alpha_k} \cos(\beta_k \ln x), & y_{k1}^{(2)}(x) &= x^{\alpha_k} \sin(\beta_k \ln x), \\ y_{k2}^{(1)}(x) &= x^{\alpha_k} \ln x \cos(\beta_k \ln x), & y_{k2}^{(2)}(x) &= x^{\alpha_k} \ln x \sin(\beta_k \ln x), \\ &\dots\dots\dots & &\dots\dots\dots \\ y_{kr}^{(1)}(x) &= x^{\alpha_k} \ln^{r-1} x \cos(\beta_k \ln x), & y_{kr}^{(2)}(x) &= x^{\alpha_k} \ln^{r-1} x \sin(\beta_k \ln x). \end{aligned}$$

Общее решение представляет собой линейную комбинацию (с произвольными постоянными) собственных функций однородного интегрального уравнения.

► Для уравнений 4.9.52–4.9.58 приведены только частные решения. Общие решения этих уравнений можно получить, прибавив к частным решениям уравнений общее решение однородного уравнения 4.9.51.

52. $y(x) + \int_a^b f(t)y(xt) dt = Ax + B.$

Решение: $y(x) = \frac{A}{1+I_1}x + \frac{B}{1+I_0}, \quad I_0 = \int_a^b f(t) dt, \quad I_1 = \int_a^b t f(t) dt.$

53. $y(x) + \int_a^b f(t)y(xt) dt = Ax^\beta.$

Решение: $y(x) = \frac{A}{B}x^\beta, \quad B = 1 + \int_a^b f(t)t^\beta dt.$

54. $y(x) + \int_a^b f(t)y(xt) dt = A \ln x + B.$

Решение: $y(x) = p \ln x + q,$

где

$$p = \frac{A}{1+I_0}, \quad q = \frac{B}{1+I_0} - \frac{AI_l}{(1+I_0)^2}, \quad I_0 = \int_a^b f(t) dt, \quad I_l = \int_a^b f(t) \ln t dt.$$

55. $y(x) + \int_a^b f(t)y(xt) dt = Ax^\beta \ln x.$

Решение: $y(x) = px^\beta \ln x + qx^\beta,$

где

$$p = \frac{A}{1+I_1}, \quad q = -\frac{AI_2}{(1+I_1)^2}, \quad I_1 = \int_a^b f(t)t^\beta dt, \quad I_2 = \int_a^b f(t)t^\beta \ln t dt.$$

56. $y(x) + \int_a^b f(t)y(xt) dt = A \cos(\ln x).$

Решение: $y(x) = \frac{AI_c}{I_c^2 + I_s^2} \cos(\ln x) + \frac{AI_s}{I_c^2 + I_s^2} \sin(\ln x),$
 $I_c = 1 + \int_a^b f(t) \cos(\ln t) dt, \quad I_s = \int_a^b f(t) \sin(\ln t) dt.$

57. $y(x) + \int_a^b f(t)y(xt) dt = A \sin(\ln x).$

Решение: $y(x) = -\frac{AI_s}{I_c^2 + I_s^2} \cos(\ln x) + \frac{AI_c}{I_c^2 + I_s^2} \sin(\ln x),$
 $I_c = 1 + \int_a^b f(t) \cos(\ln t) dt, \quad I_s = \int_a^b f(t) \sin(\ln t) dt.$

$$58. \quad y(x) + \int_a^b f(t)y(xt) dt = Ax^\beta \cos(\lambda \ln x) + Bx^\beta \sin(\lambda \ln x).$$

Решение:

$$y(x) = px^\beta \cos(\lambda \ln x) + qx^\beta \sin(\lambda \ln x),$$

где

$$p = \frac{AI_c - BI_s}{I_c^2 + I_s^2}, \quad q = \frac{AI_s + BI_c}{I_c^2 + I_s^2},$$

$$I_c = 1 + \int_a^b f(t)t^\beta \cos(\lambda \ln t) dt, \quad I_s = \int_a^b f(t)t^\beta \sin(\lambda \ln t) dt.$$

$$59. \quad y(x) + \int_a^b f(t)y(\xi) dt = 0, \quad \xi = x\varphi(t).$$

Вид собственных функций этого интегрального уравнения определяется корнями следующего трансцендентного (алгебраического) уравнения относительно параметра λ :

$$\int_a^b f(t)[\varphi(t)]^\lambda dt = -1. \quad (1)$$

1°. Действительным (однократным) корням λ_k уравнения (1) отвечают собственные функции:

$$y_k(x) = x^{\lambda_k}.$$

2°. Действительным корням λ_k кратности r отвечают r собственных функций:

$$y_{k1}(x) = x^{\lambda_k}, \quad y_{k2}(x) = x^{\lambda_k} \ln x, \quad \dots, \quad y_{kr}(x) = x^{\lambda_k} \ln^{r-1} x.$$

3°. Комплексным (однократным) корням $\lambda_k = \alpha_k + i\beta_k$ уравнения (1) отвечает пара собственных функций:

$$y_k^{(1)}(x) = x^{\alpha_k} \cos(\beta_k \ln x), \quad y_k^{(2)}(x) = x^{\alpha_k} \sin(\beta_k \ln x).$$

4°. Комплексным корням $\lambda_k = \alpha_k + i\beta_k$ кратности r отвечают r пар собственных функций:

$$\begin{aligned} y_{k1}^{(1)}(x) &= x^{\alpha_k} \cos(\beta_k \ln x), & y_{k1}^{(2)}(x) &= x^{\alpha_k} \sin(\beta_k \ln x), \\ y_{k2}^{(1)}(x) &= x^{\alpha_k} \ln x \cos(\beta_k \ln x), & y_{k2}^{(2)}(x) &= x^{\alpha_k} \ln x \sin(\beta_k \ln x), \\ &\dots\dots\dots & & \\ y_{kr}^{(1)}(x) &= x^{\alpha_k} \ln^{r-1} x \cos(\beta_k \ln x), & y_{kr}^{(2)}(x) &= x^{\alpha_k} \ln^{r-1} x \sin(\beta_k \ln x). \end{aligned}$$

Общее решение представляет собой линейную комбинацию (с произвольными постоянными) собственных функций однородного интегрального уравнения.

$$60. \quad y(x) + \int_a^b f(t)y(\xi) dt = Ax^\beta, \quad \xi = x\varphi(t).$$

Решение:

$$y(x) = \frac{A}{B}x^\beta, \quad B = 1 + \int_a^b f(t)[\varphi(t)]^\beta dt.$$

Считается, что $B \neq 0$. К решению (1) может быть добавлена линейная комбинация из собственных функций соответствующего однородного уравнения (см. 4.9.59).

$$61. \quad y(x) + \int_a^b f(t)y(\xi) dt = g(x), \quad \xi = x\varphi(t).$$

1°. Для правой части $g(x) = \sum_{k=0}^n A_k x^k$ решение уравнения имеет вид

$$y(x) = \sum_{k=0}^n \frac{A_k}{B_k} x^k, \quad B_k = 1 + \int_a^b f(t)[\varphi(t)]^k dt. \quad (1)$$

2°. Для правой части уравнения $g(x) = \ln x \sum_{k=0}^n A_k x^k$ решение имеет вид

$$y(x) = \ln x \sum_{k=0}^n B_k x^k + \sum_{k=0}^n C_k x^k, \quad (2)$$

где постоянные B_k и C_k определяются методом неопределенных коэффициентов.

3°. Для правой части $g(x) = \sum_{k=0}^n A_k (\ln x)^k$ решение уравнения имеет вид

$$y(x) = \sum_{k=0}^n B_k (\ln x)^k, \quad (3)$$

где постоянные B_k определяются методом неопределенных коэффициентов.

4°. Для правой части $g(x) = \sum_{k=1}^n A_k \cos(\lambda_k \ln x)$ решение уравнения имеет вид

$$y(x) = \sum_{k=1}^n B_k \cos(\lambda_k \ln x) + \sum_{k=1}^n C_k \sin(\lambda_k \ln x), \quad (4)$$

где постоянные B_k и C_k определяются методом неопределенных коэффициентов.

5°. Для правой части $g(x) = \sum_{k=1}^n A_k \sin(\lambda_k \ln x)$ решение уравнения имеет вид

$$y(x) = \sum_{k=1}^n B_k \cos(\lambda_k \ln x) + \sum_{k=1}^n C_k \sin(\lambda_k \ln x), \quad (5)$$

где постоянные B_k и C_k определяются методом неопределенных коэффициентов.

Замечание. К решениям (1)–(5) может быть добавлена линейная комбинация из собственных функций соответствующего однородного уравнения (см. 4.9.59).

4.10. Некоторые формулы и преобразования

Пусть решение интегрального уравнения

$$y(x) + \int_a^b K(x, t) y(t) dt = f(x) \quad (1)$$

имеет вид

$$y(x) = f(x) + \int_a^b R(x, t) f(t) dt. \quad (2)$$

Тогда решение более сложного интегрального уравнения

$$y(x) + \int_a^b K(x, t) \frac{g(x)}{g(t)} y(t) dt = f(x) \quad (3)$$

дается формулой

$$y(x) = f(x) + \int_a^b R(x, t) \frac{g(x)}{g(t)} f(t) dt. \quad (4)$$

Ниже приведены формулы для определения решений интегральных уравнений вида (3) для некоторых конкретных функций $g(x)$. Во всех случаях считается, что решение уравнения (1) известно и дается выражением (2).

1°. Решение уравнения

$$y(x) + \int_a^b K(x, t) (x/t)^\lambda y(t) dt = f(x)$$

имеет вид

$$y(x) = f(x) + \int_a^b R(x, t) (x/t)^\lambda f(t) dt.$$

2°. Решение уравнения

$$y(x) + \int_a^b K(x, t) e^{\lambda(x-t)} y(t) dt = f(x)$$

имеет вид

$$y(x) = f(x) + \int_a^b R(x, t) e^{\lambda(x-t)} f(t) dt.$$

5. Нелинейные уравнения с переменным пределом интегрирования

► **Обозначения:** f, g, h, φ — произвольные функции сложных аргументов, указанных в круглых скобках после знака функции (аргумент может зависеть от t, x, y); $A, B, C, a, b, c, k, \beta, \lambda, \mu$ — произвольные параметры.

5.1. Уравнения с квадратичной нелинейностью, содержащие произвольные параметры

5.1-1. Уравнения вида $\int_0^x y(t)y(x-t) dt = F(x)$

1. $\int_0^x y(t)y(x-t) dt = Ax + B, \quad A, B > 0.$

Решения:

$$y(x) = \pm \sqrt{B} \left[\frac{1}{\sqrt{\pi x}} \exp\left(-\frac{A}{B}x\right) + \sqrt{\frac{A}{B}} \operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{A}{B}}x\right) \right],$$

где $\operatorname{erf} z = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z \exp(-t^2) dt$ — интеграл вероятностей.

2. $\int_0^x y(t)y(x-t) dt = A^2 x^\lambda.$

Решения:

$$y(x) = \pm A \frac{\sqrt{\Gamma(\lambda+1)}}{\Gamma(\frac{\lambda+1}{2})} x^{\frac{\lambda-1}{2}},$$

где $\Gamma(z)$ — гамма-функция.

3. $\int_0^x y(t)y(x-t) dt = Ax^{\lambda-1} + Bx^\lambda, \quad \lambda > 0.$

Решения:

$$y(x) = \pm \frac{\sqrt{A\Gamma(\lambda)}}{\Gamma(\lambda/2)} x^{\frac{\lambda-2}{2}} \exp\left(-\lambda \frac{B}{A}x\right) \Phi\left(\frac{\lambda+1}{2}, \frac{\lambda}{2}; \lambda \frac{B}{A}x\right),$$

где $\Phi(a, c; x)$ — вырожденная гипергеометрическая функция (функция Куммера).

4. $\int_0^x y(t)y(x-t) dt = A^2 e^{\lambda x}.$

Решения: $y(x) = \pm \frac{A}{\sqrt{\pi x}} e^{\lambda x}.$

5. $\int_0^x y(t)y(x-t) dt = (Ax + B)e^{\lambda x}, \quad A, B > 0.$

Решения:

$$y(x) = \pm \sqrt{B} e^{\lambda x} \left[\frac{1}{\sqrt{\pi x}} \exp\left(-\frac{A}{B}x\right) + \sqrt{\frac{A}{B}} \operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{A}{B}}x\right) \right],$$

где $\operatorname{erf} z = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z \exp(-t^2) dt$ — интеграл вероятностей.

$$6. \int_0^x y(t)y(x-t) dt = A^2 x^\mu e^{\lambda x}.$$

Решения:

$$y(x) = \pm \frac{A\sqrt{\Gamma(\mu+1)}}{\Gamma(\frac{\mu+1}{2})} x^{\frac{\mu-1}{2}} e^{\lambda x}.$$

$$7. \int_0^x y(t)y(x-t) dt = (Ax^{\mu-1} + Bx^\mu) e^{\lambda x}.$$

Решения:

$$y(x) = \pm \frac{\sqrt{A\Gamma(\mu)}}{\Gamma(\mu/2)} x^{\frac{\mu-2}{2}} \exp\left[\left(\lambda - \mu \frac{B}{A}\right)x\right] \Phi\left(\frac{\mu+1}{2}, \frac{\mu}{2}; \mu \frac{B}{A} x\right).$$

$$8. \int_0^x y(t)y(x-t) dt = A^2 \operatorname{ch}(\lambda x).$$

Решения:

$$y(x) = \pm \frac{A}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{I_0(\lambda t) dt}{\sqrt{x-t}},$$

где I_0 — модифицированная функция Бесселя.

$$9. \int_0^x y(t)y(x-t) dt = A \operatorname{sh}(\lambda x).$$

Решения: $y = \pm \sqrt{A\lambda} I_0(\lambda x)$, где I_0 — модифицированная функция Бесселя.

$$10. \int_0^x y(t)y(x-t) dt = A \operatorname{sh}(\lambda \sqrt{x}).$$

Решения:

$$y = \pm \sqrt{A} \pi^{1/4} 2^{-7/8} \lambda^{3/4} x^{-1/8} I_{-1/4}\left(\lambda \sqrt{\frac{1}{2}x}\right),$$

где $I_{-1/4}$ — модифицированная функция Бесселя.

$$11. \int_0^x y(t)y(x-t) dt = A^2 \cos(\lambda x).$$

Решения:

$$y(x) = \pm \frac{A}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{J_0(\lambda t) dt}{\sqrt{x-t}},$$

где J_0 — функция Бесселя.

$$12. \int_0^x y(t)y(x-t) dt = A \sin(\lambda x).$$

Решения: $y = \pm \sqrt{A\lambda} J_0(\lambda x)$, где J_0 — функция Бесселя.

$$13. \int_0^x y(t)y(x-t) dt = A \sin(\lambda \sqrt{x}).$$

Решения:

$$y = \pm \sqrt{A} \pi^{1/4} 2^{-7/8} \lambda^{3/4} x^{-1/8} J_{-1/4}\left(\lambda \sqrt{\frac{1}{2}x}\right),$$

где $J_{-1/4}$ — функция Бесселя.

$$14. \int_0^x y(t)y(x-t) dt = A^2 e^{\mu x} \operatorname{ch}(\lambda x).$$

Решения:

$$y(x) = \pm \frac{A}{\sqrt{\pi}} e^{\mu x} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{I_0(\lambda t) dt}{\sqrt{x-t}},$$

где I_0 — модифицированная функция Бесселя.

$$15. \int_0^x y(t)y(x-t) dt = Ae^{\mu x} \operatorname{sh}(\lambda x).$$

Решения: $y = \pm \sqrt{A\lambda} e^{\mu x} I_0(\lambda x)$, где I_0 — модифицированная функция Бесселя.

$$16. \int_0^x y(t)y(x-t) dt = A^2 e^{\mu x} \cos(\lambda x).$$

Решения:

$$y(x) = \pm \frac{A}{\sqrt{\pi}} e^{\mu x} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{J_0(\lambda t) dt}{\sqrt{x-t}},$$

где J_0 — функция Бесселя.

$$17. \int_0^x y(t)y(x-t) dt = Ae^{\mu x} \sin(\lambda x).$$

Решения: $y = \pm \sqrt{A\lambda} e^{\mu x} J_0(\lambda x)$, где J_0 — функция Бесселя.

5.1-2. Уравнения вида $\int_0^x K(x, t)y(t)y(x-t) dt = F(x)$

$$18. \int_0^x t^k y(t)y(x-t) dt = Ax^\lambda, \quad A > 0.$$

Решения:

$$y(x) = \pm \left[\frac{A\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\frac{\lambda+1+k}{2})\Gamma(\frac{\lambda+1-k}{2})} \right]^{1/2} x^{\frac{\lambda-k-1}{2}},$$

где $\Gamma(z)$ — гамма-функция.

$$19. \int_0^x t^k y(t)y(x-t) dt = Ae^{\lambda x}.$$

Решения:

$$y(x) = \pm \left[\frac{A}{\Gamma(\frac{k+1}{2})\Gamma(\frac{1-k}{2})} \right]^{1/2} x^{-\frac{k+1}{2}} e^{\lambda x},$$

где $\Gamma(z)$ — гамма-функция.

$$20. \int_0^x t^k y(t)y(x-t) dt = Ax^\mu e^{\lambda x}.$$

Решения:

$$y(x) = \pm \left[\frac{A\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\frac{\mu+k+1}{2})\Gamma(\frac{\mu-k+1}{2})} \right]^{1/2} x^{\frac{\mu-k-1}{2}} e^{\lambda x},$$

где $\Gamma(z)$ — гамма-функция.

$$21. \int_0^x \frac{y(t)y(x-t)}{ax+bt} dt = Ax^\lambda.$$

Решения:

$$y(x) = \pm \sqrt{\frac{A}{I}} x^{\lambda/2}, \quad I = \int_0^1 z^{\lambda/2} (1-z)^{\lambda/2} \frac{dz}{a+bz}.$$

$$22. \int_0^x \frac{y(t)y(x-t)}{ax+bt} dt = Ae^{\lambda x}.$$

Решения:

$$y(x) = \pm \sqrt{\frac{A}{I}} e^{\lambda x}, \quad I = \frac{1}{b} \ln\left(1 + \frac{b}{a}\right).$$

$$23. \int_0^x \frac{y(t)y(x-t)}{ax+bt} dt = Ax^\mu e^{\lambda x}.$$

Решения:

$$y(x) = \pm \sqrt{\frac{A}{I}} x^{\mu/2} e^{\lambda x}, \quad I = \int_0^1 z^{\mu/2} (1-z)^{\mu/2} \frac{dz}{a+bz}.$$

$$24. \int_0^x \frac{y(t)y(x-t)}{\sqrt{ax^2+bt^2}} dt = Ax^\lambda.$$

Решения:

$$y(x) = \pm \sqrt{\frac{A}{I}} x^{\lambda/2}, \quad I = \int_0^1 z^{\lambda/2} (1-z)^{\lambda/2} \frac{dz}{\sqrt{a+bz^2}}.$$

$$25. \int_0^x \frac{y(t)y(x-t)}{\sqrt{ax^2+bt^2}} dt = Ae^{\lambda x}.$$

Решения:

$$y(x) = \pm \sqrt{\frac{A}{I}} e^{\lambda x}, \quad I = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{a+bz^2}}.$$

$$26. \int_0^x \frac{y(t)y(x-t)}{\sqrt{ax^2+bt^2}} dt = Ax^\mu e^{\lambda x}.$$

Решения:

$$y(x) = \pm \sqrt{\frac{A}{I}} x^{\mu/2} e^{\lambda x}, \quad I = \int_0^1 z^{\mu/2} (1-z)^{\mu/2} \frac{dz}{\sqrt{a+bz^2}}.$$

5.1-3. Уравнения вида $\int_0^x G(\dots) dt = F(x)$

$$27. \int_0^x y(t)y(ax+bt) dt = Ax^\lambda.$$

Решения:

$$y(x) = \pm \sqrt{\frac{A}{I}} x^{\frac{\lambda-1}{2}}, \quad I = \int_0^1 z^{\frac{\lambda-1}{2}} (a+bz)^{\frac{\lambda-1}{2}} dz.$$

$$28. \int_0^x y(t)y(ax-t) dt = Ae^{\lambda x}, \quad a \geq 1.$$

Решения:

$$y(x) = \pm \sqrt{\frac{A}{I}} \frac{\exp(\lambda x/a)}{\sqrt{x}}, \quad I = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{z(a-z)}}.$$

$$29. \int_0^x y(t)y(ax-t) dt = Ax^\mu e^{\lambda x}, \quad a \geq 1.$$

Решения:

$$y(x) = \pm \sqrt{\frac{A}{I}} x^{\frac{\mu-1}{2}} \exp(\lambda x/a), \quad I = \int_0^1 z^{\frac{\mu-1}{2}} (a-z)^{\frac{\mu-1}{2}} dz.$$

5.1-4. Уравнения вида $y(x) + \int_a^x K(x,t)y^2(t) dt = F(x)$

$$30. y(x) + A \int_a^x y^2(t) dt = Bx + C.$$

Это интегральное уравнение путем дифференцирования сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению с разделяющимися переменными.

1°. Решение при $AB > 0$:

$$y(x) = k \frac{(k+y_a) \exp[2Ak(x-a)] + y_a - k}{(k+y_a) \exp[2Ak(x-a)] - y_a + k}, \quad k = \sqrt{\frac{B}{A}}, \quad y_a = aB + C.$$

2°. Решение при $AB < 0$:

$$y(x) = k \operatorname{tg} \left[Ak(a-x) + \operatorname{arctg} \frac{y_a}{k} \right], \quad k = \sqrt{-\frac{B}{A}}, \quad y_a = aB + C.$$

3°. Решение при $B = 0$:

$$y(x) = \frac{C}{AC(x-a) + 1}.$$

$$31. \quad y(x) + k \int_a^x (x-t)y^2(t) dt = Ax^2 + Bx + C.$$

Частный случай уравнения 5.8.5 при $f(y) = ky^2$.

Решение в неявном виде:

$$\int_{y_0}^y [4Au - 2kF(u) + B^2 - 4AC]^{-1/2} du = \pm(x-a),$$

$$F(u) = \frac{1}{3}(u^3 - y_0^3), \quad y_0 = Aa^2 + Ba + C.$$

$$32. \quad y(x) + A \int_a^x t^\lambda y^2(t) dt = Bx^{\lambda+1} + C.$$

Частный случай уравнения 5.8.6 при $f(y) = Ay^2$. Это интегральное уравнение сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению с разделяющимися переменными.

Решение в неявном виде:

$$(\lambda+1) \int_{y_a}^y \frac{du}{Au^2 - B(\lambda+1)} + x^{\lambda+1} - a^{\lambda+1} = 0, \quad y_a = Ba^{\lambda+1} + C.$$

$$33. \quad y(x) + A \int_0^x x^{-\lambda-1} y^2(t) dt = Bx^\lambda, \quad \lambda > -\frac{1}{2}.$$

Решения: $y_1(x) = \beta_1 x^\lambda$ и $y_2(x) = \beta_2 x^\lambda$, где $\beta_{1,2}$ — корни квадратного уравнения $A\beta^2 + (2\lambda+1)\beta - B(2\lambda+1) = 0$.

$$34. \quad y(x) + \int_0^x \frac{y^2(t) dt}{ax + bt} = A.$$

Решения: $y_1(x) = \lambda_1$ и $y_2(x) = \lambda_2$, где $\lambda_{1,2}$ — корни уравнения $\ln\left(1 + \frac{b}{a}\right)\lambda^2 + b\lambda - Ab = 0$.

$$35. \quad y(x) + A \int_0^x \frac{y^2(t) dt}{x^2 + t^2} = Bx.$$

Решения: $y_1(x) = \lambda_1 x$ и $y_2(x) = \lambda_2 x$, где $\lambda_{1,2}$ — корни квадратного уравнения $(1 - \frac{1}{4}\pi)A\lambda^2 + \lambda - B = 0$.

$$36. \quad y(x) + \int_0^x \frac{y^2(t) dt}{\sqrt{ax^2 + bt^2}} = A.$$

Решения: $y_1(x) = \lambda_1$ и $y_2(x) = \lambda_2$, где $\lambda_{1,2}$ — корни квадратного уравнения

$$I\lambda^2 + \lambda - A = 0, \quad I = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{a + bz^2}}.$$

$$37. \quad y(x) + A \int_0^x (ax^n + bt^n)^{-\frac{\lambda+1}{n}} y^2(t) dt = Bx^\lambda.$$

Решения: $y_1(x) = \beta_1 x^\lambda$ и $y_2(x) = \beta_2 x^\lambda$, где $\beta_{1,2}$ — корни квадратного уравнения

$$AI\beta^2 + \beta - B = 0, \quad I = \int_0^1 z^{2\lambda} (a + bz^n)^{-\frac{\lambda+1}{n}} dz.$$

$$38. \quad y(x) + A \int_a^x e^{\lambda t} y^2(t) dt = Be^{\lambda x} + C.$$

Частный случай уравнения 5.8.11 при $f(y) = Ay^2$. Это интегральное уравнение сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению с разделяющимися переменными.

Решение в неявном виде:

$$\lambda \int_{y_0}^y \frac{du}{Au^2 - B\lambda} + e^{\lambda x} - e^{\lambda a} = 0, \quad y_0 = Be^{\lambda a} + C.$$

$$39. \quad y(x) + A \int_a^x e^{\lambda(x-t)} y^2(t) dt = B.$$

Частный случай уравнения 5.8.12. Это интегральное уравнение сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению с разделяющимися переменными

$$y'_x + Ay^2 - \lambda y + \lambda B = 0, \quad y(a) = B.$$

Решение в неявном виде:

$$\int_B^y \frac{du}{Au^2 - \lambda u + \lambda B} + x - a = 0.$$

$$40. \quad y(x) + k \int_a^x e^{\lambda(x-t)} y^2(t) dt = Ae^{\lambda x} + B.$$

Решение в неявном виде:

$$\int_{y_0}^y \frac{du}{\lambda u - ku^2 - \lambda B} = x - a, \quad y_0 = Ae^{\lambda a} + B.$$

$$41. \quad y(x) + k \int_a^x \operatorname{sh}[\lambda(x-t)] y^2(t) dt = Ae^{\lambda x} + Be^{-\lambda x} + C.$$

Частный случай уравнения 5.8.14 при $f(y) = ky^2$.

Решение в неявном виде:

$$\int_{y_0}^y [\lambda^2 u^2 - 2\lambda^2 Cu - 2k\lambda F(u) + \lambda^2(C^2 - 4AB)]^{-1/2} du = \pm(x-a),$$

$$F(u) = \frac{1}{3}(u^3 - y_0^3), \quad y_0 = Ae^{\lambda a} + Be^{-\lambda a} + C.$$

$$42. \quad y(x) + k \int_a^x \operatorname{sh}[\lambda(x-t)] y^2(t) dt = A \operatorname{ch}(\lambda x) + B.$$

Частный случай уравнения 5.8.15 при $f(y) = ky^2$.

Решение в неявном виде:

$$\int_{y_0}^y [\lambda^2 u^2 - 2\lambda^2 Bu - 2k\lambda F(u) + \lambda^2(B^2 - A^2)]^{-1/2} du = \pm(x-a),$$

$$F(u) = \frac{1}{3}(u^3 - y_0^3), \quad y_0 = A \operatorname{ch}(\lambda a) + B.$$

$$43. \quad y(x) + k \int_a^x \operatorname{sh}[\lambda(x-t)] y^2(t) dt = A \operatorname{sh}(\lambda x) + B.$$

Частный случай уравнения 5.8.16 при $f(y) = ky^2$.

Решение в неявном виде:

$$\int_{y_0}^y [\lambda^2 u^2 - 2\lambda^2 Bu - 2k\lambda F(u) + \lambda^2(A^2 + B^2)]^{-1/2} du = \pm(x-a),$$

$$F(u) = \frac{1}{3}(u^3 - y_0^3), \quad y_0 = A \operatorname{sh}(\lambda a) + B.$$

$$44. \quad y(x) + k \int_a^x \sin[\lambda(x-t)] y^2(t) dt = A \sin(\lambda x) + B \cos(\lambda x) + C.$$

Частный случай уравнения 5.8.17 при $f(y) = ky^2$.

Решение в неявном виде:

$$\int_{y_0}^y [\lambda^2 D - \lambda^2 u^2 + 2\lambda^2 Cu - 2k\lambda F(u)]^{-1/2} du = \pm(x-a),$$

$$y_0 = A \sin(\lambda a) + B \cos(\lambda a) + C, \quad D = A^2 + B^2 - C^2, \quad F(u) = \frac{1}{3}(u^3 - y_0^3).$$

5.1-5. Уравнения вида $y(x) + \int_a^x K(x,t)y(t)y(x-t) dt = F(x)$

$$45. \quad y(x) + A \int_0^x y(t)y(x-t) dt = AB^2x + B.$$

Решение: $y(x) = B$.

$$46. \quad y(x) + A \int_0^x y(t)y(x-t) dt = (AB^2x + B)e^{\lambda x}.$$

Решение: $y(x) = Be^{\lambda x}$.

$$47. \quad y(x) + \frac{\lambda}{2\beta} \int_0^x y(t)y(x-t) dt = \frac{1}{2}\beta \operatorname{sh}(\lambda x).$$

Решение: $y(x) = \beta I_1(\lambda x)$, где $I_1(x)$ — модифицированная функция Бесселя.

$$48. \quad y(x) - \frac{\lambda}{2\beta} \int_0^x y(t)y(x-t) dt = \frac{1}{2}\beta \sin(\lambda x).$$

Решение: $y(x) = \beta J_1(\lambda x)$, где $J_1(x)$ — функция Бесселя.

$$49. \quad y(x) + A \int_0^x x^{-\lambda-1} y(t)y(x-t) dt = Bx^\lambda.$$

Решения: $y_1(x) = \beta_1 x^\lambda$ и $y_2(x) = \beta_2 x^\lambda$, где $\beta_{1,2}$ — корни квадратного уравнения

$$AI\beta^2 + \beta - B = 0, \quad I = \int_0^1 z^\lambda (1-z)^\lambda dz = \frac{\Gamma^2(\lambda+1)}{\Gamma(2\lambda+2)}.$$

5.2. Уравнения с квадратичной нелинейностью, содержащие произвольные функции

5.2-1. Уравнения вида $\int_a^x G(\dots) dt = F(x)$

$$1. \quad \int_a^x K(x, t)y^2(t) dt = f(x).$$

Замена $w(x) = y^2(x)$ приводит к линейному уравнению

$$\int_a^x K(x, t)w(t) dt = f(x).$$

$$2. \quad \int_a^x K(t)y(x)y(t) dt = f(x).$$

Решения:

$$y(x) = \pm f(x) \left[2 \int_a^x K(t)f(t) dt \right]^{-1/2}.$$

$$3. \quad \int_0^x f\left(\frac{t}{x}\right)y(t)y(x-t) dt = Ax^\lambda.$$

Решения:

$$y(x) = \pm \sqrt{\frac{A}{I}} x^{\frac{\lambda-1}{2}}, \quad I = \int_0^1 f(z)z^{\frac{\lambda-1}{2}}(1-z)^{\frac{\lambda-1}{2}} dz.$$

$$4. \quad \int_0^x f\left(\frac{t}{x}\right)y(t)y(x-t) dt = Ae^{\lambda x}.$$

Решения:

$$y(x) = \pm \sqrt{\frac{A}{I}} \frac{e^{\lambda x}}{\sqrt{x}}, \quad I = \int_0^1 \frac{f(z) dz}{\sqrt{z(1-z)}}.$$

$$5. \quad \int_0^x f\left(\frac{t}{x}\right)y(t)y(x-t) dt = Ax^\mu e^{\lambda x}.$$

Решения:

$$y(x) = \pm \sqrt{\frac{A}{I}} x^{\frac{\mu-1}{2}} e^{\lambda x}, \quad I = \int_0^1 f(z)z^{\frac{\mu-1}{2}}(1-z)^{\frac{\mu-1}{2}} dz.$$

$$6. \int_0^x f\left(\frac{t}{x}\right) y(t) y(ax + bt) dt = Ax^\lambda.$$

Решения:

$$y(x) = \pm \sqrt{\frac{A}{I}} x^{\frac{\lambda-1}{2}}, \quad I = \int_0^1 f(z) z^{\frac{\lambda-1}{2}} (a + bz)^{\frac{\lambda-1}{2}} dz.$$

$$7. \int_0^x f\left(\frac{t}{x}\right) y(t) y(ax - t) dt = Ae^{\lambda x}, \quad a \geq 1.$$

Решения:

$$y(x) = \pm \sqrt{\frac{A}{I}} \frac{\exp(\lambda x/a)}{\sqrt{x}}, \quad I = \int_0^1 \frac{f(z) dz}{\sqrt{z(a-z)}}.$$

$$8. \int_0^x f\left(\frac{t}{x}\right) y(t) y(ax - t) dt = Ax^\mu e^{\lambda x}, \quad a \geq 1.$$

Решения:

$$y(x) = \pm \sqrt{\frac{A}{I}} x^{\frac{\mu-1}{2}} \exp(\lambda x/a), \quad I = \int_0^1 f(z) z^{\frac{\mu-1}{2}} (a-z)^{\frac{\mu-1}{2}} dz.$$

5.2-2. Уравнения вида $y(x) + \int_a^x K(x, t) y^2(t) dt = F(x)$

$$9. y(x) + \int_a^x f(t) y^2(t) dt = A.$$

Решение:

$$y(x) = A \left[1 + A \int_a^x f(t) dt \right]^{-1}.$$

$$10. y(x) + \int_a^x e^{\lambda(x-t)} g(t) y^2(t) dt = f(x).$$

Дифференцируя уравнение по x , имеем

$$y'_x + g(x) y^2 + \lambda \int_a^x e^{\lambda(x-t)} g(t) y^2(t) dt = f'_x(x). \quad (1)$$

Исключая отсюда интегральный член с помощью исходного уравнения, приходим к обыкновенному дифференциальному уравнению Риккати

$$y'_x + g(x) y^2 - \lambda y + \lambda f(x) - f'_x(x) = 0 \quad (2)$$

с начальным условием $y(a) = f(a)$. Уравнение (2) сводится к линейному обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка. Для различных конкретных функций f и g точные решения уравнения (2) приведены, например, в книгах Э. Камке (1976), В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (1995, 1997).

$$11. y(x) + \int_a^x g(x) h(t) y^2(t) dt = f(x).$$

Дифференцируя уравнение по x , имеем

$$y'_x + g(x) h(x) y^2 + g'_x(x) \int_a^x h(t) y^2(t) dt = f'_x(x). \quad (1)$$

Исключая отсюда интегральный член с помощью исходного уравнения, приходим к обыкновенному дифференциальному уравнению Риккати

$$y'_x + g(x) h(x) y^2 - \frac{g'_x(x)}{g(x)} y = f'_x(x) - \frac{g'_x(x)}{g(x)} f(x) \quad (2)$$

с начальным условием $y(a) = f(a)$. Уравнение (2) сводится к линейному обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка. Для различных конкретных функций f , g и h точные решения уравнения (2) приведены, например, в книгах Э. Камке (1976), В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (1995, 1997).

$$12. \quad y(x) + \int_0^x x^{-\lambda-1} f\left(\frac{t}{x}\right) y^2(t) dt = Ax^\lambda.$$

Решения: $y_1(x) = \beta_1 x^\lambda$ и $y_2(x) = \beta_2 x^\lambda$, где $\beta_{1,2}$ — корни квадратного уравнения

$$I\beta^2 + \beta - A = 0, \quad I = \int_0^1 f(z) z^{2\lambda} dz.$$

$$13. \quad y(x) - \int_{-\infty}^x e^{\lambda t + \beta x} f(x-t) y^2(t) dt = 0.$$

Частный случай уравнения 5.3.19 при $k = 2$.

$$14. \quad y(x) - \int_x^\infty e^{\lambda t + \beta x} f(x-t) y^2(t) dt = 0.$$

Решение:

$$y(x) = \frac{1}{A} e^{-(\lambda + \beta)x}, \quad A = \int_0^\infty e^{-(\lambda + 2\beta)z} f(-z) dz.$$

5.2-3. Уравнения вида $y(x) + \int_a^x G(\dots) dt = F(x)$

$$15. \quad y(x) + \int_0^x \frac{1}{x} f\left(\frac{t}{x}\right) y(t) y(x-t) dt = Ae^{\lambda x}.$$

Решения:

$$y_1(x) = B_1 e^{\lambda x}, \quad y_2(x) = B_2 e^{\lambda x},$$

где B_1 и B_2 — корни квадратного уравнения

$$IB^2 + B - A = 0, \quad I = \int_0^1 f(z) dz.$$

$$16. \quad y(x) + A \int_0^x x^{-\lambda-1} f\left(\frac{t}{x}\right) y(t) y(x-t) dt = Bx^\lambda.$$

Решения: $y_1(x) = \beta_1 x^\lambda$ и $y_2(x) = \beta_2 x^\lambda$, где $\beta_{1,2}$ — корни квадратного уравнения

$$AI\beta^2 + \beta - B = 0, \quad I = \int_0^1 f(z) z^\lambda (1-z)^\lambda dz.$$

$$17. \quad y(x) + \int_x^\infty f(t-x) y(t-x) y(t) dt = ae^{-\lambda x}.$$

Решения: $y(x) = b_k e^{-\lambda x}$, где b_k ($k = 1, 2$) — корни квадратного уравнения

$$b^2 I + b - a = 0, \quad I = \int_0^\infty f(z) e^{-2\lambda z} dz.$$

Для вычисления интеграла I удобно использовать таблицы преобразований Лапласа с параметром $p = 2\lambda$.

5.3. Уравнения со степенной нелинейностью

5.3-1. Уравнения, содержащие произвольные параметры

$$1. \quad y(x) + A \int_a^x t^\lambda y^k(t) dt = Bx^{\lambda+1} + C.$$

Это интегральное уравнение путем дифференцирования сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению с разделяющимися переменными.

Решение в неявном виде:

$$(\lambda + 1) \int_{y_0}^y \frac{du}{Au^k - B(\lambda + 1)} + x^{\lambda+1} - a^{\lambda+1} = 0, \quad y_0 = Ba^{\lambda+1} + C.$$

$$2. \quad y(x) + \int_0^x \frac{y^k(t)}{ax + bt} dt = A.$$

Решение: $y(x) = \lambda$, где λ — корень алгебраического (или трансцендентного) уравнения

$$\ln\left(1 + \frac{b}{a}\right)\lambda^k + b\lambda - Ab = 0.$$

$$3. \quad y(x) + Ax \int_0^x \frac{y^k(t) dt}{x^2 + t^2} = B.$$

Решение: $y(x) = \lambda$, где λ — корень алгебраического (или трансцендентного) уравнения

$$\lambda + \frac{1}{4}A\pi\lambda^k = B.$$

$$4. \quad y(x) + \int_0^x \frac{y^k(t) dt}{\sqrt{ax^2 + bt^2}} = A.$$

Решение: $y(x) = \lambda$, где λ — корень алгебраического (или трансцендентного) уравнения

$$I\lambda^k + \lambda - A = 0, \quad I = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{a + bz^2}}.$$

$$5. \quad y(x) + A \int_a^x (ax^n + bt^n)^{\frac{\lambda - k\lambda - 1}{n}} y^k(t) dt = Bx^\lambda.$$

Решение: $y = \beta x^\lambda$, где β — корень алгебраического (или трансцендентного) уравнения

$$AI\beta^k + \beta - B = 0, \quad I = \int_0^1 z^{k\lambda} (a + bz^n)^{\frac{\lambda - k\lambda - 1}{n}} dz.$$

$$6. \quad y(x) + A \int_a^x e^{\lambda t} y^\mu(t) dt = B e^{\lambda x} + C.$$

Это интегральное уравнение путем дифференцирования сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению с разделяющимися переменными.

Решение в неявном виде:

$$\lambda \int_{y_0}^y \frac{du}{Au^\mu - B\lambda} + e^{\lambda x} - e^{\lambda a} = 0, \quad y_0 = B e^{\lambda a} + C.$$

$$7. \quad y(x) + k \int_a^x e^{\lambda(x-t)} y^\mu(t) dt = A e^{\lambda x} + B.$$

Решение в неявном виде:

$$\int_{y_0}^y \frac{dt}{\lambda t - kt^\mu - \lambda B} = x - a, \quad y_0 = A e^{\lambda a} + B.$$

$$8. \quad y(x) + k \int_a^x \operatorname{sh}[\lambda(x-t)] y^\mu(t) dt = A e^{\lambda x} + B e^{-\lambda x} + C.$$

Частный случай уравнения 5.8.14 при $f(y) = ky^\mu$.

Решение в неявном виде:

$$\int_{y_0}^y [\lambda^2 u^2 - 2\lambda^2 C u - 2k\lambda F(u) + \lambda^2 (C^2 - 4AB)]^{-1/2} du = \pm(x - a),$$

$$F(u) = \frac{1}{\mu + 1} (u^{\mu+1} - y_0^{\mu+1}), \quad y_0 = A e^{\lambda a} + B e^{-\lambda a} + C.$$

$$9. \quad y(x) + k \int_a^x \operatorname{sh}[\lambda(x-t)] y^\mu(t) dt = A \operatorname{ch}(\lambda x) + B.$$

Частный случай уравнения 5.8.15 при $f(y) = ky^\mu$.

Решение в неявном виде:

$$\int_{y_0}^y [\lambda^2 u^2 - 2\lambda^2 B u - 2k\lambda F(u) + \lambda^2 (B^2 - A^2)]^{-1/2} du = \pm(x - a),$$

$$F(u) = \frac{1}{\mu + 1} (u^{\mu+1} - y_0^{\mu+1}), \quad y_0 = A \operatorname{ch}(\lambda a) + B.$$

$$10. \quad y(x) + k \int_a^x \operatorname{sh}[\lambda(x-t)] y^\mu(t) dt = A \operatorname{sh}(\lambda x) + B.$$

Частный случай уравнения 5.8.16 при $f(y) = ky^\mu$.

Решение в неявном виде:

$$\int_{y_0}^y [\lambda^2 u^2 - 2\lambda^2 B u - 2k\lambda F(u) + \lambda^2 (A^2 + B^2)]^{-1/2} du = \pm(x-a),$$

$$F(u) = \frac{1}{\mu+1} (u^{\mu+1} - y_0^{\mu+1}), \quad y_0 = A \operatorname{sh}(\lambda a) + B.$$

$$11. \quad y(x) + k \int_a^x \sin[\lambda(x-t)] y^\mu(t) dt = A \sin(\lambda x) + B \cos(\lambda x) + C.$$

Частный случай уравнения 5.8.17 при $f(y) = ky^\mu$.

Решение в неявном виде:

$$\int_{y_0}^y [\lambda^2 D - \lambda^2 u^2 + 2\lambda^2 C u - 2k\lambda F(u)]^{-1/2} du = \pm(x-a),$$

$$y_0 = A \sin(\lambda a) + B \cos(\lambda a) + C, \quad D = A^2 + B^2 - C^2, \quad F(u) = \frac{1}{\mu+1} (u^{\mu+1} - y_0^{\mu+1}).$$

5.3-2. Уравнения, содержащие произвольные функции

$$12. \quad \int_a^x K(x, t) y^\lambda(t) dt = f(x).$$

Замена $w(x) = y^\lambda(x)$ приводит к линейному уравнению

$$\int_a^x K(x, t) w(t) dt = f(x).$$

$$13. \quad y(x) + \int_a^x f(t) y^k(t) dt = A.$$

Решение:

$$y(x) = \left[A^{1-k} + (k-1) \int_a^x f(t) dt \right]^{\frac{1}{1-k}}.$$

$$14. \quad y(x) - \int_a^x f(x) g(t) y^k(t) dt = 0.$$

1°. Это уравнение путем дифференцирования с последующим исключением интегрального слагаемого (с помощью исходного уравнения) можно свести к дифференциальному уравнению Бернулли

$$y'_x - f(x)g(x)y^k - \frac{f'_x(x)}{f(x)}y = 0, \quad y(a) = 0.$$

2°. Решение при $k < 1$:

$$y(x) = f(x) \left[(1-k) \int_a^x f^k(t) g(t) dt \right]^{\frac{1}{1-k}}.$$

При $k > 0$ существует также тривиальное решение $y(x) \equiv 0$.

$$15. \quad y(x) + \int_0^x x^{\lambda-k\lambda-1} f\left(\frac{t}{x}\right) y^k(t) dt = A x^\lambda.$$

Решение: $y(x) = \beta x^\lambda$, где β — корень алгебраического уравнения

$$I\beta^k + \beta - A = 0, \quad I = \int_0^1 f(z) z^{k\lambda} dz.$$

$$16. \quad y(x) + \int_0^x f\left(\frac{t}{x}\right) \sqrt{y(t)} dt = Ax^2.$$

Решения: $y_k(x) = B_k^2 x^2$, где B_k — корни квадратных уравнений

$$B^2 \pm IB - A = 0, \quad I = \int_0^1 z f(z) dz.$$

$$17. \quad y(x) - \int_0^x t^a f\left(\frac{t}{x}\right) y^k(t) dt = 0, \quad k \neq 1.$$

Решение:

$$y(x) = Ax^{\frac{1+a}{1-k}}, \quad A^{1-k} = \int_0^1 z^{\frac{a+k}{1-k}} f(z) dz.$$

$$18. \quad y(x) - \int_x^\infty e^{\lambda t + \beta x} f(x-t) y^k(t) dt = 0, \quad k \neq 1.$$

Решение:

$$y(x) = A \exp\left(\frac{\lambda + \beta}{1-k} x\right), \quad A^{1-k} = \int_0^\infty \exp\left(\frac{\lambda + \beta k}{1-k} z\right) f(-z) dz.$$

$$19. \quad y(x) - \int_{-\infty}^x e^{\lambda t + \beta x} f(x-t) y^k(t) dt = 0, \quad k \neq 1.$$

Решение:

$$y(x) = A \exp\left(\frac{\lambda + \beta}{1-k} x\right), \quad A^{1-k} = \int_0^\infty \exp\left(-\frac{\lambda + \beta k}{1-k} z\right) f(z) dz.$$

5.4. Уравнения с экспоненциальной нелинейностью

5.4-1. Уравнения, содержащие произвольные параметры

$$1. \quad y(x) + A \int_a^x \exp[\lambda y(t)] dt = B.$$

Решение:

$$y(x) = -\frac{1}{\lambda} \ln[A\lambda(x-a) + e^{-B\lambda}].$$

$$2. \quad y(x) + A \int_a^x \exp[\lambda y(t)] dt = Bx + C.$$

При $B = 0$ см. уравнение 5.4.1.

Решение при $B \neq 0$:

$$y(x) = -\frac{1}{\lambda} \ln\left[\frac{A}{B} + \left(e^{-\lambda y_0} - \frac{A}{B}\right) e^{\lambda B(a-x)}\right], \quad y_0 = aB + C.$$

$$3. \quad y(x) + k \int_a^x (x-t) \exp[\lambda y(t)] dt = Ax^2 + Bx + C.$$

1°. Частный случай уравнения 5.8.5 при $f(y) = ke^{\lambda y}$. Решение этого интегрального уравнения определяется путем решения автономного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка

$$y''_{xx} + ke^{\lambda y} - 2A = 0$$

с начальными условиями

$$y(a) = Aa^2 + Ba + C, \quad y'_x(a) = 2Aa + B.$$

2°. Решения в неявном виде:

$$\int_{y_0}^y [4Au - 2F(u) + B^2 - 4AC]^{-1/2} du = \pm(x-a),$$

$$F(u) = \frac{k}{\lambda} (e^{\lambda u} - e^{\lambda y_0}), \quad y_0 = Aa^2 + Ba + C.$$

$$4. \quad y(x) + A \int_a^x t^\lambda \exp[\beta y(t)] dt = Bx^{\lambda+1} + C.$$

Это интегральное уравнение путем дифференцирования сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению с разделяющимися переменными.

Решение в неявном виде:

$$(\lambda + 1) \int_{y_0}^y \frac{du}{Ae^{\beta u} - B(\lambda + 1)} + x^{\lambda+1} - a^{\lambda+1} = 0, \quad y_0 = Ba^{\lambda+1} + C.$$

$$5. \quad y(x) + \int_0^x \frac{\exp[\lambda y(t)]}{ax + bt} dt = A.$$

Решение: $y(x) = \beta$, где β — корень трансцендентного уравнения

$$\ln\left(1 + \frac{b}{a}\right)e^{\lambda\beta} + b\beta - Ab = 0.$$

$$6. \quad y(x) + \int_0^x \frac{\exp[\lambda y(t)]}{\sqrt{ax^2 + bt^2}} dt = A.$$

Решение: $y(x) = \beta$, где β — корень трансцендентного уравнения

$$ke^{\lambda\beta} + \beta - A = 0, \quad k = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{a + bz^2}}.$$

$$7. \quad y(x) + A \int_a^x \exp[\lambda t + \beta y(t)] dt = Be^{\lambda x} + C.$$

Это интегральное уравнение путем дифференцирования сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению с разделяющимися переменными.

Решение в неявном виде:

$$\lambda \int_{y_0}^y \frac{du}{Ae^{\beta u} - B\lambda} + e^{\lambda x} - e^{\lambda a} = 0, \quad y_0 = Be^{\lambda a} + C.$$

$$8. \quad y(x) + k \int_a^x \exp[\lambda(x - t) + \beta y(t)] dt = A.$$

Решение в неявном виде:

$$\int_A^y \frac{dt}{\lambda t - ke^{\beta t} - \lambda A} = x - a.$$

$$9. \quad y(x) + k \int_a^x \exp[\lambda(x - t) + \beta y(t)] dt = Ae^{\lambda x} + B.$$

Решение в неявном виде:

$$\int_{y_0}^y \frac{dt}{\lambda t - ke^{\beta t} - \lambda B} = x - a, \quad y_0 = Ae^{\lambda a} + B.$$

$$10. \quad y(x) + k \int_a^x \operatorname{sh}[\lambda(x - t)] \exp[\beta y(t)] dt = Ae^{\lambda x} + Be^{-\lambda x} + C.$$

Частный случай уравнения 5.8.14 при $f(y) = ke^{\beta y}$.

$$11. \quad y(x) + k \int_a^x \operatorname{sh}[\lambda(x - t)] \exp[\beta y(t)] dt = A \operatorname{ch}(\lambda x) + B.$$

Частный случай уравнения 5.8.15 при $f(y) = ke^{\beta y}$.

$$12. \quad y(x) + k \int_a^x \operatorname{sh}[\lambda(x - t)] \exp[\beta y(t)] dt = A \operatorname{sh}(\lambda x) + B.$$

Частный случай уравнения 5.8.16 при $f(y) = ke^{\beta y}$.

$$13. \quad y(x) + k \int_a^x \sin[\lambda(x-t)] \exp[\beta y(t)] dt = A \sin(\lambda x) + B \cos(\lambda x) + C.$$

Частный случай уравнения 5.8.17 при $f(y) = ke^{\beta y}$.

5.4-2. Уравнения, содержащие произвольные функции

$$14. \quad y(x) + \int_a^x f(t) \exp[\lambda y(t)] dt = A.$$

Решение:

$$y(x) = -\frac{1}{\lambda} \ln \left[\lambda \int_a^x f(t) dt + e^{-A\lambda} \right].$$

$$15. \quad y(x) + \int_a^x g(t) \exp[\lambda y(t)] dt = f(x).$$

1°. Это интегральное уравнение путем дифференцирования сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению первого порядка для функции $y = y(x)$:

$$y'_x + g(x)e^{\lambda y} = f'_x(x) \quad (1)$$

с начальным условием $y(a) = f(a)$. Замена $w = e^{-\lambda y}$ приводит (1) к линейному уравнению

$$w'_x + \lambda f'_x(x)w - \lambda g(x) = 0, \quad w(a) = \exp[-\lambda f(a)].$$

2°. Решение:

$$y(x) = f(x) - \frac{1}{\lambda} \ln \left\{ 1 + \lambda \int_a^x g(t) \exp[\lambda f(t)] dt \right\}.$$

$$16. \quad y(x) + \frac{1}{x} \int_0^x f\left(\frac{t}{x}\right) \exp[\lambda y(t)] dt = A.$$

Решение: $y(x) = \beta$, где β — корень трансцендентного уравнения

$$\beta + Ie^{\lambda\beta} - A = 0, \quad I = \int_0^1 f(z) dz.$$

5.5. Уравнения с гиперболическими нелинейностями

5.5-1. Подынтегральные выражения с нелинейностью вида $\text{ch}[\beta y(t)]$

$$1. \quad y(x) + k \int_a^x \text{ch}[\beta y(t)] dt = A.$$

Частный случай уравнения 5.8.3 при $f(y) = k \text{ch}(\beta y)$.

$$2. \quad y(x) + k \int_a^x \text{ch}[\beta y(t)] dt = Ax + B.$$

Частный случай уравнения 5.8.4 при $f(y) = k \text{ch}(\beta y)$.

$$3. \quad y(x) + k \int_a^x (x-t) \text{ch}[\beta y(t)] dt = Ax^2 + Bx + C.$$

Частный случай уравнения 5.8.5 при $f(y) = k \text{ch}(\beta y)$.

$$4. \quad y(x) + k \int_a^x t^\lambda \text{ch}[\beta y(t)] dt = Bx^{\lambda+1} + C.$$

Частный случай уравнения 5.8.6 при $f(y) = k \text{ch}(\beta y)$.

$$5. \quad y(x) + \int_a^x g(t) \text{ch}[\beta y(t)] dt = A.$$

Частный случай уравнения 5.8.7 при $f(y) = \text{ch}(\beta y)$.

$$6. \quad y(x) + \int_0^x \frac{\operatorname{ch}[\beta y(t)]}{ax + bt} dt = A.$$

Частный случай уравнения 5.8.8 при $f(y) = \operatorname{ch}(\beta y)$.

$$7. \quad y(x) + \int_0^x \frac{\operatorname{ch}[\beta y(t)]}{\sqrt{ax^2 + bt^2}} dt = A.$$

Частный случай уравнения 5.8.9 при $f(y) = \operatorname{ch}(\beta y)$.

$$8. \quad y(x) + k \int_a^x e^{\lambda t} \operatorname{ch}[\beta y(t)] dt = B e^{\lambda x} + C.$$

Частный случай уравнения 5.8.11 при $f(y) = k \operatorname{ch}(\beta y)$.

$$9. \quad y(x) + k \int_a^x e^{\lambda(x-t)} \operatorname{ch}[\beta y(t)] dt = A.$$

Частный случай уравнения 5.8.12 при $f(y) = k \operatorname{ch}(\beta y)$.

$$10. \quad y(x) + k \int_a^x e^{\lambda(x-t)} \operatorname{ch}[\beta y(t)] dt = A e^{\lambda x} + B.$$

Частный случай уравнения 5.8.13 при $f(y) = k \operatorname{ch}(\beta y)$.

$$11. \quad y(x) + k \int_a^x \operatorname{sh}[\lambda(x-t)] \operatorname{ch}[\beta y(t)] dt = A e^{\lambda x} + B e^{-\lambda x} + C.$$

Частный случай уравнения 5.8.14 при $f(y) = k \operatorname{ch}(\beta y)$.

$$12. \quad y(x) + k \int_a^x \operatorname{sh}[\lambda(x-t)] \operatorname{ch}[\beta y(t)] dt = A \operatorname{ch}(\lambda x) + B.$$

Частный случай уравнения 5.8.15 при $f(y) = k \operatorname{ch}(\beta y)$.

$$13. \quad y(x) + k \int_a^x \operatorname{sh}[\lambda(x-t)] \operatorname{ch}[\beta y(t)] dt = A \operatorname{sh}(\lambda x) + B.$$

Частный случай уравнения 5.8.16 при $f(y) = k \operatorname{ch}(\beta y)$.

$$14. \quad y(x) + k \int_a^x \sin[\lambda(x-t)] \operatorname{ch}[\beta y(t)] dt = A \sin(\lambda x) + B \cos(\lambda x) + C.$$

Частный случай уравнения 5.8.17 при $f(y) = k \operatorname{ch}(\beta y)$.

5.5-2. Подынтегральные выражения с нелинейностью вида $\operatorname{sh}[\beta y(t)]$

$$15. \quad y(x) + k \int_a^x \operatorname{sh}[\beta y(t)] dt = A.$$

Частный случай уравнения 5.8.3 при $f(y) = k \operatorname{sh}(\beta y)$.

$$16. \quad y(x) + k \int_a^x \operatorname{sh}[\beta y(t)] dt = Ax + B.$$

Частный случай уравнения 5.8.4 при $f(y) = k \operatorname{sh}(\beta y)$.

$$17. \quad y(x) + k \int_a^x (x-t) \operatorname{sh}[\beta y(t)] dt = Ax^2 + Bx + C.$$

Частный случай уравнения 5.8.5 при $f(y) = k \operatorname{sh}(\beta y)$.

$$18. \quad y(x) + k \int_a^x t^\lambda \operatorname{sh}[\beta y(t)] dt = Bx^{\lambda+1} + C.$$

Частный случай уравнения 5.8.6 при $f(y) = k \operatorname{sh}(\beta y)$.

$$19. \quad y(x) + \int_a^x g(t) \operatorname{sh}[\beta y(t)] dt = A.$$

Частный случай уравнения 5.8.7 при $f(y) = \operatorname{sh}(\beta y)$.

$$20. \quad y(x) + \int_0^x \frac{\operatorname{sh}[\beta y(t)]}{ax + bt} dt = A.$$

Частный случай уравнения 5.8.8 при $f(y) = \operatorname{sh}(\beta y)$.

$$21. \quad y(x) + \int_0^x \frac{\operatorname{sh}[\beta y(t)]}{\sqrt{ax^2 + bt^2}} dt = A.$$

Частный случай уравнения 5.8.9 при $f(y) = \operatorname{sh}(\beta y)$.

$$22. \quad y(x) + k \int_a^x e^{\lambda t} \operatorname{sh}[\beta y(t)] dt = Be^{\lambda x} + C.$$

Частный случай уравнения 5.8.11 при $f(y) = k \operatorname{sh}(\beta y)$.

$$23. \quad y(x) + k \int_a^x e^{\lambda(x-t)} \operatorname{sh}[\beta y(t)] dt = A.$$

Частный случай уравнения 5.8.12 при $f(y) = k \operatorname{sh}(\beta y)$.

$$24. \quad y(x) + k \int_a^x e^{\lambda(x-t)} \operatorname{sh}[\beta y(t)] dt = Ae^{\lambda x} + B.$$

Частный случай уравнения 5.8.13 при $f(y) = k \operatorname{sh}(\beta y)$.

$$25. \quad y(x) + k \int_a^x \operatorname{sh}[\lambda(x-t)] \operatorname{sh}[\beta y(t)] dt = Ae^{\lambda x} + Be^{-\lambda x} + C.$$

Частный случай уравнения 5.8.14 при $f(y) = k \operatorname{sh}(\beta y)$.

$$26. \quad y(x) + k \int_a^x \operatorname{sh}[\lambda(x-t)] \operatorname{sh}[\beta y(t)] dt = A \operatorname{ch}(\lambda x) + B.$$

Частный случай уравнения 5.8.15 при $f(y) = k \operatorname{sh}(\beta y)$.

$$27. \quad y(x) + k \int_a^x \operatorname{sh}[\lambda(x-t)] \operatorname{sh}[\beta y(t)] dt = A \operatorname{sh}(\lambda x) + B.$$

Частный случай уравнения 5.8.16 при $f(y) = k \operatorname{sh}(\beta y)$.

$$28. \quad y(x) + k \int_a^x \sin[\lambda(x-t)] \operatorname{sh}[\beta y(t)] dt = A \sin(\lambda x) + B \cos(\lambda x) + C.$$

Частный случай уравнения 5.8.17 при $f(y) = k \operatorname{sh}(\beta y)$.

5.5-3. Подынтегральные выражения с нелинейностью вида $\operatorname{th}[\beta y(t)]$

$$29. \quad y(x) + k \int_a^x \operatorname{th}[\beta y(t)] dt = A.$$

Частный случай уравнения 5.8.3 при $f(y) = k \operatorname{th}(\beta y)$.

$$30. \quad y(x) + k \int_a^x \operatorname{th}[\beta y(t)] dt = Ax + B.$$

Частный случай уравнения 5.8.4 при $f(y) = k \operatorname{th}(\beta y)$.

$$31. \quad y(x) + k \int_a^x (x-t) \operatorname{th}[\beta y(t)] dt = Ax^2 + Bx + C.$$

Частный случай уравнения 5.8.5 при $f(y) = k \operatorname{th}(\beta y)$.

$$32. \quad y(x) + k \int_a^x t^\lambda \operatorname{th}[\beta y(t)] dt = Bx^{\lambda+1} + C.$$

Частный случай уравнения 5.8.6 при $f(y) = k \operatorname{th}(\beta y)$.

$$33. \quad y(x) + \int_a^x g(t) \operatorname{th}[\beta y(t)] dt = A.$$

Частный случай уравнения 5.8.7 при $f(y) = \operatorname{th}(\beta y)$.

$$34. \quad y(x) + \int_0^x \frac{\operatorname{th}[\beta y(t)]}{ax + bt} dt = A.$$

Частный случай уравнения 5.8.8 при $f(y) = \operatorname{th}(\beta y)$.

$$35. \quad y(x) + \int_0^x \frac{\operatorname{th}[\beta y(t)]}{\sqrt{ax^2 + bt^2}} dt = A.$$

Частный случай уравнения 5.8.9 при $f(y) = \operatorname{th}(\beta y)$.

$$36. \quad y(x) + k \int_a^x e^{\lambda t} \operatorname{th}[\beta y(t)] dt = Be^{\lambda x} + C.$$

Частный случай уравнения 5.8.11 при $f(y) = k \operatorname{th}(\beta y)$.

$$37. \quad y(x) + k \int_a^x e^{\lambda(x-t)} \operatorname{th}[\beta y(t)] dt = A.$$

Частный случай уравнения 5.8.12 при $f(y) = k \operatorname{th}(\beta y)$.

$$38. \quad y(x) + k \int_a^x e^{\lambda(x-t)} \operatorname{th}[\beta y(t)] dt = Ae^{\lambda x} + B.$$

Частный случай уравнения 5.8.13 при $f(y) = k \operatorname{th}(\beta y)$.

$$39. \quad y(x) + k \int_a^x \operatorname{sh}[\lambda(x-t)] \operatorname{th}[\beta y(t)] dt = Ae^{\lambda x} + Be^{-\lambda x} + C.$$

Частный случай уравнения 5.8.14 при $f(y) = k \operatorname{th}(\beta y)$.

$$40. \quad y(x) + k \int_a^x \operatorname{sh}[\lambda(x-t)] \operatorname{th}[\beta y(t)] dt = A \operatorname{ch}(\lambda x) + B.$$

Частный случай уравнения 5.8.15 при $f(y) = k \operatorname{th}(\beta y)$.

$$41. \quad y(x) + k \int_a^x \operatorname{sh}[\lambda(x-t)] \operatorname{th}[\beta y(t)] dt = A \operatorname{sh}(\lambda x) + B.$$

Частный случай уравнения 5.8.16 при $f(y) = k \operatorname{th}(\beta y)$.

$$42. \quad y(x) + k \int_a^x \sin[\lambda(x-t)] \operatorname{th}[\beta y(t)] dt = A \sin(\lambda x) + B \cos(\lambda x) + C.$$

Частный случай уравнения 5.8.17 при $f(y) = k \operatorname{th}(\beta y)$.

5.5-4. Подынтегральные выражения с нелинейностью вида $\operatorname{cth}[\beta y(t)]$

$$43. \quad y(x) + k \int_a^x \operatorname{cth}[\beta y(t)] dt = A.$$

Частный случай уравнения 5.8.3 при $f(y) = k \operatorname{cth}(\beta y)$.

$$44. \quad y(x) + k \int_a^x \operatorname{cth}[\beta y(t)] dt = Ax + B.$$

Частный случай уравнения 5.8.4 при $f(y) = k \operatorname{cth}(\beta y)$.

$$45. \quad y(x) + k \int_a^x (x-t) \operatorname{cth}[\beta y(t)] dt = Ax^2 + Bx + C.$$

Частный случай уравнения 5.8.5 при $f(y) = k \operatorname{cth}(\beta y)$.

$$46. \quad y(x) + k \int_a^x t^\lambda \operatorname{cth}[\beta y(t)] dt = Bx^{\lambda+1} + C.$$

Частный случай уравнения 5.8.6 при $f(y) = k \operatorname{cth}(\beta y)$.

$$47. \quad y(x) + \int_a^x g(t) \operatorname{cth}[\beta y(t)] dt = A.$$

Частный случай уравнения 5.8.7 при $f(y) = \operatorname{cth}(\beta y)$.

$$48. \quad y(x) + \int_0^x \frac{\operatorname{cth}[\beta y(t)]}{ax + bt} dt = A.$$

Частный случай уравнения 5.8.8 при $f(y) = \operatorname{cth}(\beta y)$.

$$49. \quad y(x) + \int_0^x \frac{\operatorname{cth}[\beta y(t)]}{\sqrt{ax^2 + bt^2}} dt = A.$$

Частный случай уравнения 5.8.9 при $f(y) = \operatorname{cth}(\beta y)$.

$$50. \quad y(x) + k \int_a^x e^{\lambda t} \operatorname{cth}[\beta y(t)] dt = Be^{\lambda x} + C.$$

Частный случай уравнения 5.8.11 при $f(y) = k \operatorname{cth}(\beta y)$.

$$51. \quad y(x) + k \int_a^x e^{\lambda(x-t)} \operatorname{cth}[\beta y(t)] dt = A.$$

Частный случай уравнения 5.8.12 при $f(y) = k \operatorname{cth}(\beta y)$.

$$52. \quad y(x) + k \int_a^x e^{\lambda(x-t)} \operatorname{cth}[\beta y(t)] dt = Ae^{\lambda x} + B.$$

Частный случай уравнения 5.8.13 при $f(y) = k \operatorname{cth}(\beta y)$.

$$53. \quad y(x) + k \int_a^x \operatorname{sh}[\lambda(x-t)] \operatorname{cth}[\beta y(t)] dt = Ae^{\lambda x} + Be^{-\lambda x} + C.$$

Частный случай уравнения 5.8.14 при $f(y) = k \operatorname{cth}(\beta y)$.

$$54. \quad y(x) + k \int_a^x \operatorname{sh}[\lambda(x-t)] \operatorname{cth}[\beta y(t)] dt = A \operatorname{ch}(\lambda x) + B.$$

Частный случай уравнения 5.8.15 при $f(y) = k \operatorname{cth}(\beta y)$.

$$55. \quad y(x) + k \int_a^x \operatorname{sh}[\lambda(x-t)] \operatorname{cth}[\beta y(t)] dt = A \operatorname{sh}(\lambda x) + B.$$

Частный случай уравнения 5.8.16 при $f(y) = k \operatorname{cth}(\beta y)$.

$$56. \quad y(x) + k \int_a^x \sin[\lambda(x-t)] \operatorname{cth}[\beta y(t)] dt = A \sin(\lambda x) + B \cos(\lambda x) + C.$$

Частный случай уравнения 5.8.17 при $f(y) = k \operatorname{cth}(\beta y)$.

5.6. Уравнения с логарифмической нелинейностью

5.6-1. Подынтегральные выражения, содержащие степенные функции

$$1. \quad y(x) + k \int_a^x \ln[\lambda y(t)] dt = A.$$

Частный случай уравнения 5.8.3 при $f(y) = k \ln(\lambda y)$.

$$2. \quad y(x) + k \int_a^x \ln[\lambda y(t)] dt = Ax + B.$$

Частный случай уравнения 5.8.4 при $f(y) = k \ln(\lambda y)$.

$$3. \quad y(x) + k \int_a^x (x - t) \ln[\lambda y(t)] dt = Ax^2 + Bx + C.$$

Частный случай уравнения 5.8.5 при $f(y) = k \ln(\lambda y)$.

$$4. \quad y(x) + k \int_a^x t^\lambda \ln[\mu y(t)] dt = Bx^{\lambda+1} + C.$$

Частный случай уравнения 5.8.6 при $f(y) = k \ln(\mu y)$.

$$5. \quad y(x) + \int_0^x \frac{\ln[\lambda y(t)]}{ax + bt} dt = A.$$

Частный случай уравнения 5.8.8 при $f(y) = \ln(\lambda y)$.

$$6. \quad y(x) + \int_0^x \frac{\ln[\lambda y(t)]}{\sqrt{ax^2 + bt^2}} dt = A.$$

Частный случай уравнения 5.8.9 при $f(y) = \ln(\lambda y)$.

5.6-2. Подынтегральные выражения, содержащие экспоненциальные функции

$$7. \quad y(x) + k \int_a^x e^{\lambda t} \ln[\mu y(t)] dt = Be^{\lambda x} + C.$$

Частный случай уравнения 5.8.11 при $f(y) = k \ln(\mu y)$.

$$8. \quad y(x) + k \int_a^x e^{\lambda(x-t)} \ln[\mu y(t)] dt = A.$$

Частный случай уравнения 5.8.12 при $f(y) = k \ln(\mu y)$.

$$9. \quad y(x) + k \int_a^x e^{\lambda(x-t)} \ln[\mu y(t)] dt = Ae^{\lambda x} + B.$$

Частный случай уравнения 5.8.13 при $f(y) = k \ln(\mu y)$.

5.6-3. Другие подынтегральные выражения

$$10. \quad y(x) + \int_a^x g(t) \ln[\lambda y(t)] dt = A.$$

Частный случай уравнения 5.8.7 при $f(y) = \ln(\lambda y)$.

$$11. \quad y(x) + k \int_a^x \operatorname{sh}[\lambda(x-t)] \ln[\mu y(t)] dt = Ae^{\lambda x} + Be^{-\lambda x} + C.$$

Частный случай уравнения 5.8.14 при $f(y) = k \ln(\mu y)$.

$$12. \quad y(x) + k \int_a^x \operatorname{sh}[\lambda(x-t)] \ln[\mu y(t)] dt = A \operatorname{ch}(\lambda x) + B.$$

Частный случай уравнения 5.8.15 при $f(y) = k \ln(\mu y)$.

$$13. \quad y(x) + k \int_a^x \operatorname{sh}[\lambda(x-t)] \ln[\mu y(t)] dt = A \operatorname{sh}(\lambda x) + B.$$

Частный случай уравнения 5.8.16 при $f(y) = k \ln(\mu y)$.

$$14. \quad y(x) + k \int_a^x \sin[\lambda(x-t)] \ln[\mu y(t)] dt = A \sin(\lambda x) + B \cos(\lambda x) + C.$$

Частный случай уравнения 5.8.17 при $f(y) = k \ln(\mu y)$.

5.7. Уравнения с тригонометрическими нелинейностями

5.7-1. Подынтегральные выражения с нелинейностью вида $\cos[\beta y(t)]$

$$1. \quad y(x) + k \int_a^x \cos[\beta y(t)] dt = A.$$

Частный случай уравнения 5.8.3 при $f(y) = k \cos(\beta y)$.

$$2. \quad y(x) + k \int_a^x \cos[\beta y(t)] dt = Ax + B.$$

Частный случай уравнения 5.8.4 при $f(y) = k \cos(\beta y)$.

$$3. \quad y(x) + k \int_a^x (x - t) \cos[\beta y(t)] dt = Ax^2 + Bx + C.$$

Частный случай уравнения 5.8.5 при $f(y) = k \cos(\beta y)$.

$$4. \quad y(x) + k \int_a^x t^\lambda \cos[\beta y(t)] dt = Bx^{\lambda+1} + C.$$

Частный случай уравнения 5.8.6 при $f(y) = k \cos(\beta y)$.

$$5. \quad y(x) + \int_a^x g(t) \cos[\beta y(t)] dt = A.$$

Частный случай уравнения 5.8.7 при $f(y) = \cos(\beta y)$.

$$6. \quad y(x) + \int_0^x \frac{\cos[\beta y(t)]}{ax + bt} dt = A.$$

Частный случай уравнения 5.8.8 при $f(y) = \cos(\beta y)$.

$$7. \quad y(x) + \int_0^x \frac{\cos[\beta y(t)]}{\sqrt{ax^2 + bt^2}} dt = A.$$

Частный случай уравнения 5.8.9 при $f(y) = \cos(\beta y)$.

$$8. \quad y(x) + k \int_a^x e^{\lambda t} \cos[\beta y(t)] dt = Be^{\lambda x} + C.$$

Частный случай уравнения 5.8.11 при $f(y) = k \cos(\beta y)$.

$$9. \quad y(x) + k \int_a^x e^{\lambda(x-t)} \cos[\beta y(t)] dt = A.$$

Частный случай уравнения 5.8.12 при $f(y) = k \cos(\beta y)$.

$$10. \quad y(x) + k \int_a^x e^{\lambda(x-t)} \cos[\beta y(t)] dt = Ae^{\lambda x} + B.$$

Частный случай уравнения 5.8.13 при $f(y) = k \cos(\beta y)$.

$$11. \quad y(x) + k \int_a^x \operatorname{sh}[\lambda(x - t)] \cos[\beta y(t)] dt = Ae^{\lambda x} + Be^{-\lambda x} + C.$$

Частный случай уравнения 5.8.14 при $f(y) = k \cos(\beta y)$.

$$12. \quad y(x) + k \int_a^x \operatorname{sh}[\lambda(x - t)] \cos[\beta y(t)] dt = A \operatorname{ch}(\lambda x) + B.$$

Частный случай уравнения 5.8.15 при $f(y) = k \cos(\beta y)$.

$$13. \quad y(x) + k \int_a^x \operatorname{sh}[\lambda(x-t)] \cos[\beta y(t)] dt = A \operatorname{sh}(\lambda x) + B.$$

Частный случай уравнения 5.8.16 при $f(y) = k \cos(\beta y)$.

$$14. \quad y(x) + k \int_a^x \sin[\lambda(x-t)] \cos[\beta y(t)] dt = A \sin(\lambda x) + B \cos(\lambda x) + C.$$

Частный случай уравнения 5.8.17 при $f(y) = k \cos(\beta y)$.

5.7-2. Подынтегральные выражения с нелинейностью вида $\sin[\beta y(t)]$

$$15. \quad y(x) + k \int_a^x \sin[\beta y(t)] dt = A.$$

Частный случай уравнения 5.8.3 при $f(y) = k \sin(\beta y)$.

$$16. \quad y(x) + k \int_a^x \sin[\beta y(t)] dt = Ax + B.$$

Частный случай уравнения 5.8.4 при $f(y) = k \sin(\beta y)$.

$$17. \quad y(x) + k \int_a^x (x-t) \sin[\beta y(t)] dt = Ax^2 + Bx + C.$$

Частный случай уравнения 5.8.5 при $f(y) = k \sin(\beta y)$.

$$18. \quad y(x) + k \int_a^x t^\lambda \sin[\beta y(t)] dt = Bx^{\lambda+1} + C.$$

Частный случай уравнения 5.8.6 при $f(y) = k \sin(\beta y)$.

$$19. \quad y(x) + \int_a^x g(t) \sin[\beta y(t)] dt = A.$$

Частный случай уравнения 5.8.7 при $f(y) = \sin(\beta y)$.

$$20. \quad y(x) + \int_0^x \frac{\sin[\beta y(t)]}{ax + bt} dt = A.$$

Частный случай уравнения 5.8.8 при $f(y) = \sin(\beta y)$.

$$21. \quad y(x) + \int_0^x \frac{\sin[\beta y(t)]}{\sqrt{ax^2 + bt^2}} dt = A.$$

Частный случай уравнения 5.8.9 при $f(y) = \sin(\beta y)$.

$$22. \quad y(x) + k \int_a^x e^{\lambda t} \sin[\beta y(t)] dt = Be^{\lambda x} + C.$$

Частный случай уравнения 5.8.11 при $f(y) = k \sin(\beta y)$.

$$23. \quad y(x) + k \int_a^x e^{\lambda(x-t)} \sin[\beta y(t)] dt = A.$$

Частный случай уравнения 5.8.12 при $f(y) = k \sin(\beta y)$.

$$24. \quad y(x) + k \int_a^x e^{\lambda(x-t)} \sin[\beta y(t)] dt = Ae^{\lambda x} + B.$$

Частный случай уравнения 5.8.13 при $f(y) = k \sin(\beta y)$.

$$25. \quad y(x) + k \int_a^x \operatorname{sh}[\lambda(x-t)] \sin[\beta y(t)] dt = Ae^{\lambda x} + Be^{-\lambda x} + C.$$

Частный случай уравнения 5.8.14 при $f(y) = k \sin(\beta y)$.

$$26. \quad y(x) + k \int_a^x \operatorname{sh}[\lambda(x-t)] \sin[\beta y(t)] dt = A \operatorname{ch}(\lambda x) + B.$$

Частный случай уравнения 5.8.15 при $f(y) = k \sin(\beta y)$.

$$27. \quad y(x) + k \int_a^x \operatorname{sh}[\lambda(x-t)] \sin[\beta y(t)] dt = A \operatorname{sh}(\lambda x) + B.$$

Частный случай уравнения 5.8.16 при $f(y) = k \sin(\beta y)$.

$$28. \quad y(x) + k \int_a^x \sin[\lambda(x-t)] \sin[\beta y(t)] dt = A \sin(\lambda x) + B \cos(\lambda x) + C.$$

Частный случай уравнения 5.8.17 при $f(y) = k \sin(\beta y)$.

5.7-3. Подынтегральные выражения с нелинейностью вида $\operatorname{tg}[\beta y(t)]$

$$29. \quad y(x) + k \int_a^x \operatorname{tg}[\beta y(t)] dt = A.$$

Частный случай уравнения 5.8.3 при $f(y) = k \operatorname{tg}(\beta y)$.

$$30. \quad y(x) + k \int_a^x \operatorname{tg}[\beta y(t)] dt = Ax + B.$$

Частный случай уравнения 5.8.4 при $f(y) = k \operatorname{tg}(\beta y)$.

$$31. \quad y(x) + k \int_a^x (x-t) \operatorname{tg}[\beta y(t)] dt = Ax^2 + Bx + C.$$

Частный случай уравнения 5.8.5 при $f(y) = k \operatorname{tg}(\beta y)$.

$$32. \quad y(x) + k \int_a^x t^\lambda \operatorname{tg}[\beta y(t)] dt = Bx^{\lambda+1} + C.$$

Частный случай уравнения 5.8.6 при $f(y) = k \operatorname{tg}(\beta y)$.

$$33. \quad y(x) + \int_a^x g(t) \operatorname{tg}[\beta y(t)] dt = A.$$

Частный случай уравнения 5.8.7 при $f(y) = \operatorname{tg}(\beta y)$.

$$34. \quad y(x) + \int_0^x \frac{\operatorname{tg}[\beta y(t)]}{ax + bt} dt = A.$$

Частный случай уравнения 5.8.8 при $f(y) = \operatorname{tg}(\beta y)$.

$$35. \quad y(x) + \int_0^x \frac{\operatorname{tg}[\beta y(t)]}{\sqrt{ax^2 + bt^2}} dt = A.$$

Частный случай уравнения 5.8.9 при $f(y) = \operatorname{tg}(\beta y)$.

$$36. \quad y(x) + k \int_a^x e^{\lambda t} \operatorname{tg}[\beta y(t)] dt = Be^{\lambda x} + C.$$

Частный случай уравнения 5.8.11 при $f(y) = k \operatorname{tg}(\beta y)$.

$$37. \quad y(x) + k \int_a^x e^{\lambda(x-t)} \operatorname{tg}[\beta y(t)] dt = A.$$

Частный случай уравнения 5.8.12 при $f(y) = k \operatorname{tg}(\beta y)$.

$$38. \quad y(x) + k \int_a^x e^{\lambda(x-t)} \operatorname{tg}[\beta y(t)] dt = Ae^{\lambda x} + B.$$

Частный случай уравнения 5.8.13 при $f(y) = k \operatorname{tg}(\beta y)$.

$$39. \quad y(x) + k \int_a^x \operatorname{sh}[\lambda(x-t)] \operatorname{tg}[\beta y(t)] dt = A e^{\lambda x} + B e^{-\lambda x} + C.$$

Частный случай уравнения 5.8.14 при $f(y) = k \operatorname{tg}(\beta y)$.

$$40. \quad y(x) + k \int_a^x \operatorname{sh}[\lambda(x-t)] \operatorname{tg}[\beta y(t)] dt = A \operatorname{ch}(\lambda x) + B.$$

Частный случай уравнения 5.8.15 при $f(y) = k \operatorname{tg}(\beta y)$.

$$41. \quad y(x) + k \int_a^x \operatorname{sh}[\lambda(x-t)] \operatorname{tg}[\beta y(t)] dt = A \operatorname{sh}(\lambda x) + B.$$

Частный случай уравнения 5.8.16 при $f(y) = k \operatorname{tg}(\beta y)$.

$$42. \quad y(x) + k \int_a^x \sin[\lambda(x-t)] \operatorname{tg}[\beta y(t)] dt = A \sin(\lambda x) + B \cos(\lambda x) + C.$$

Частный случай уравнения 5.8.17 при $f(y) = k \operatorname{tg}(\beta y)$.

5.7-4. Подынтегральные выражения с нелинейностью вида $\operatorname{ctg}[\beta y(t)]$

$$43. \quad y(x) + k \int_a^x \operatorname{ctg}[\beta y(t)] dt = A.$$

Частный случай уравнения 5.8.3 при $f(y) = k \operatorname{ctg}(\beta y)$.

$$44. \quad y(x) + k \int_a^x \operatorname{ctg}[\beta y(t)] dt = Ax + B.$$

Частный случай уравнения 5.8.4 при $f(y) = k \operatorname{ctg}(\beta y)$.

$$45. \quad y(x) + k \int_a^x (x-t) \operatorname{ctg}[\beta y(t)] dt = Ax^2 + Bx + C.$$

Частный случай уравнения 5.8.5 при $f(y) = k \operatorname{ctg}(\beta y)$.

$$46. \quad y(x) + k \int_a^x t^\lambda \operatorname{ctg}[\beta y(t)] dt = Bx^{\lambda+1} + C.$$

Частный случай уравнения 5.8.6 при $f(y) = k \operatorname{ctg}(\beta y)$.

$$47. \quad y(x) + \int_a^x g(t) \operatorname{ctg}[\beta y(t)] dt = A.$$

Частный случай уравнения 5.8.7 при $f(y) = \operatorname{ctg}(\beta y)$.

$$48. \quad y(x) + \int_0^x \frac{\operatorname{ctg}[\beta y(t)]}{ax + bt} dt = A.$$

Частный случай уравнения 5.8.8 при $f(y) = \operatorname{ctg}(\beta y)$.

$$49. \quad y(x) + \int_0^x \frac{\operatorname{ctg}[\beta y(t)]}{\sqrt{ax^2 + bt^2}} dt = A.$$

Частный случай уравнения 5.8.9 при $f(y) = \operatorname{ctg}(\beta y)$.

$$50. \quad y(x) + k \int_a^x e^{\lambda t} \operatorname{ctg}[\beta y(t)] dt = B e^{\lambda x} + C.$$

Частный случай уравнения 5.8.11 при $f(y) = k \operatorname{ctg}(\beta y)$.

$$51. \quad y(x) + k \int_a^x e^{\lambda(x-t)} \operatorname{ctg}[\beta y(t)] dt = A.$$

Частный случай уравнения 5.8.12 при $f(y) = k \operatorname{ctg}(\beta y)$.

$$52. \quad y(x) + k \int_a^x e^{\lambda(x-t)} \operatorname{ctg}[\beta y(t)] dt = A e^{\lambda x} + B.$$

Частный случай уравнения 5.8.13 при $f(y) = k \operatorname{ctg}(\beta y)$.

$$53. \quad y(x) + k \int_a^x \operatorname{sh}[\lambda(x-t)] \operatorname{ctg}[\beta y(t)] dt = A e^{\lambda x} + B e^{-\lambda x} + C.$$

Частный случай уравнения 5.8.14 при $f(y) = k \operatorname{ctg}(\beta y)$.

$$54. \quad y(x) + k \int_a^x \operatorname{sh}[\lambda(x-t)] \operatorname{ctg}[\beta y(t)] dt = A \operatorname{ch}(\lambda x) + B.$$

Частный случай уравнения 5.8.15 при $f(y) = k \operatorname{ctg}(\beta y)$.

$$55. \quad y(x) + k \int_a^x \operatorname{sh}[\lambda(x-t)] \operatorname{ctg}[\beta y(t)] dt = A \operatorname{sh}(\lambda x) + B.$$

Частный случай уравнения 5.8.16 при $f(y) = k \operatorname{ctg}(\beta y)$.

$$56. \quad y(x) + k \int_a^x \sin[\lambda(x-t)] \operatorname{ctg}[\beta y(t)] dt = A \sin(\lambda x) + B \cos(\lambda x) + C.$$

Частный случай уравнения 5.8.17 при $f(y) = k \operatorname{ctg}(\beta y)$.

5.8. Уравнения с нелинейностями общего вида

5.8-1. Уравнения вида $\int_a^x G(\dots) dt = F(x)$

$$1. \quad \int_a^x K(x, t) \varphi(y(t)) dt = f(x).$$

Замена $w(x) = \varphi(y(x))$ приводит к линейному уравнению

$$\int_a^x K(x, t) w(t) dt = f(x).$$

$$2. \quad \int_a^x K(x, t) \varphi(t, y(t)) dt = f(x).$$

Замена $w(x) = \varphi(x, y(x))$ приводит к линейному уравнению

$$\int_a^x K(x, t) w(t) dt = f(x).$$

5.8-2. Уравнения вида $y(x) + \int_a^x K(x, t) G(y(t)) dt = F(x)$

$$3. \quad y(x) + \int_a^x f(y(t)) dt = A.$$

Решение в неявном виде: $\int_A^y \frac{du}{f(u)} + x - a = 0$.

$$4. \quad y(x) + \int_a^x f(y(t)) dt = Ax + B.$$

Решение в неявном виде: $\int_{y_0}^y \frac{du}{A - f(u)} = x - a, \quad y_0 = Aa + B$.

$$5. \quad y(x) + \int_a^x (x-t)f(y(t)) \, dt = Ax^2 + Bx + C.$$

1°. Частный случай уравнения 5.8.19. Решение этого интегрального уравнения определяется из автономного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка

$$y''_{xx} + f(y) - 2A = 0$$

с начальными условиями: $y(a) = Aa^2 + Ba + C$, $y'_x(a) = 2Aa + B$.

2°. Решения в неявном виде:

$$\int_{y_0}^y [4Au - 2F(u) + B^2 - 4AC]^{-1/2} du = \pm(x-a),$$

$$F(u) = \int_{y_0}^u f(t) \, dt, \quad y_0 = Aa^2 + Ba + C.$$

$$6. \quad y(x) + \int_a^x t^\lambda f(y(t)) \, dt = Bx^{\lambda+1} + C.$$

Это интегральное уравнение путем дифференцирования сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению с разделяющимися переменными.

Решение в неявном виде:

$$(\lambda+1) \int_{y_a}^y \frac{du}{f(u) - B(\lambda+1)} + x^{\lambda+1} - a^{\lambda+1} = 0, \quad y_a = Ba^{\lambda+1} + C.$$

$$7. \quad y(x) + \int_a^x g(t)f(y(t)) \, dt = A.$$

Решение в неявном виде: $\int_A^y \frac{du}{f(u)} + \int_a^x g(t) \, dt = 0$.

$$8. \quad y(x) + \int_0^x \frac{f(y(t))}{ax+bt} \, dt = A.$$

Решение: $y(x) = \lambda$, где λ — корень алгебраического (или трансцендентного) уравнения

$$\ln\left(1 + \frac{b}{a}\right)f(\lambda) + b\lambda - Aa = 0.$$

$$9. \quad y(x) + \int_0^x \frac{f(y(t))}{\sqrt{ax^2+bt^2}} \, dt = A.$$

Решение: $y(x) = \lambda$, где λ — корень алгебраического (или трансцендентного) уравнения

$$kf(\lambda) + \lambda - A = 0, \quad k = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{a+bz^2}}.$$

$$10. \quad y(x) + x \int_0^x f(y(t)) \frac{dt}{x^2+t^2} = A.$$

Решение: $y(x) = \lambda$, где λ — корень алгебраического (или трансцендентного) уравнения

$$\lambda + \frac{1}{4}\pi f(\lambda) = A.$$

$$11. \quad y(x) + \int_a^x e^{\lambda t} f(y(t)) \, dt = Be^{\lambda x} + C.$$

Это интегральное уравнение путем дифференцирования сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению с разделяющимися переменными.

Решение в неявном виде:

$$\lambda \int_{y_0}^y \frac{du}{f(u) - B\lambda} + e^{\lambda x} - e^{\lambda a} = 0, \quad y_0 = Be^{\lambda a} + C.$$

$$12. \quad y(x) + \int_a^x e^{\lambda(x-t)} f(y(t)) dt = A.$$

Решение в неявном виде: $\int_A^y \frac{du}{\lambda u - f(u) - \lambda A} = x - a.$

$$13. \quad y(x) + \int_a^x e^{\lambda(x-t)} f(y(t)) dt = A e^{\lambda x} + B.$$

Решение в неявном виде: $\int_{y_0}^y \frac{du}{\lambda u - f(u) - \lambda B} = x - a, \quad y_0 = A e^{\lambda a} + B.$

$$14. \quad y(x) + \int_a^x \operatorname{sh}[\lambda(x-t)] f(y(t)) dt = A e^{\lambda x} + B e^{-\lambda x} + C.$$

1°. Частный случай уравнения 5.8.23. Решение этого интегрального уравнения определяется из автономного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка

$$y''_{xx} + \lambda f(y) - \lambda^2 y + \lambda^2 C = 0$$

с начальными условиями: $y(a) = A e^{\lambda a} + B e^{-\lambda a} + C, \quad y'_x(a) = A \lambda e^{\lambda a} - B \lambda e^{-\lambda a}.$

2°. Решения в неявном виде:

$$\int_{y_0}^y [\lambda^2 u^2 - 2\lambda^2 C u - 2\lambda F(u) + \lambda^2 (C^2 - 4AB)]^{-1/2} du = \pm(x-a),$$

$$F(u) = \int_{y_0}^u f(t) dt, \quad y_0 = A e^{\lambda a} + B e^{-\lambda a} + C.$$

$$15. \quad y(x) + \int_a^x \operatorname{sh}[\lambda(x-t)] f(y(t)) dt = A \operatorname{ch}(\lambda x) + B.$$

Частный случай уравнения 5.8.14.

Решение в неявном виде:

$$\int_{y_0}^y [\lambda^2 u^2 - 2\lambda^2 B u - 2\lambda F(u) + \lambda^2 (B^2 - A^2)]^{-1/2} du = \pm(x-a),$$

$$F(u) = \int_{y_0}^u f(t) dt, \quad y_0 = A \operatorname{ch}(\lambda a) + B.$$

$$16. \quad y(x) + \int_a^x \operatorname{sh}[\lambda(x-t)] f(y(t)) dt = A \operatorname{sh}(\lambda x) + B.$$

Частный случай уравнения 5.8.23.

Решение в неявном виде:

$$\int_{y_0}^y [\lambda^2 u^2 - 2\lambda^2 B u - 2\lambda F(u) + \lambda^2 (A^2 + B^2)]^{-1/2} du = \pm(x-a),$$

$$F(u) = \int_{y_0}^u f(t) dt, \quad y_0 = A \operatorname{sh}(\lambda a) + B.$$

$$17. \quad y(x) + \int_a^x \sin[\lambda(x-t)] f(y(t)) dt = A \sin(\lambda x) + B \cos(\lambda x) + C.$$

1°. Частный случай уравнения 5.8.25. Решение этого интегрального уравнения определяется из автономного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка

$$y''_{xx} + \lambda f(y) + \lambda^2 y - \lambda^2 C = 0$$

с начальными условиями

$$y(a) = A \sin(\lambda a) + B \cos(\lambda a) + C, \quad y'_x(a) = A \lambda \cos(\lambda a) - B \lambda \sin(\lambda a).$$

2°. Решения в неявном виде:

$$\int_{y_0}^y [\lambda^2 D - \lambda^2 u^2 + 2\lambda^2 C u - 2\lambda F(u)]^{-1/2} du = \pm(x-a),$$

$$y_0 = A \sin(\lambda a) + B \cos(\lambda a) + C, \quad D = A^2 + B^2 - C^2, \quad F(u) = \int_{y_0}^u f(t) dt.$$

5.8-3. Уравнения вида $y(x) + \int_a^x K(x, t)G(t, y(t)) dt = F(x)$

18. $y(x) + \int_a^x f(t, y(t)) dt = g(x).$

Решение этого интегрального уравнения определяется из обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка

$$y'_x + f(x, y) - g'_x(x) = 0$$

с начальным условием $y(a) = g(a)$. Точные решения нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка для различных функций $f(x, y)$ и $g(x)$ см. в книгах Э. Камке (1976), В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (1995, 1997).

19. $y(x) + \int_a^x (x - t)f(t, y(t)) dt = g(x).$

Дифференцируя уравнение по x , имеем

$$y'_x + \int_a^x f(t, y(t)) dt = g'_x(x). \quad (1)$$

Дифференцируя это равенство по x , получим нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка

$$y''_{xx} + f(x, y) - g''_{xx}(x) = 0. \quad (2)$$

Полагая $x = a$ в исходном уравнении и равенстве (1), имеем начальные условия для функции $y = y(x)$:

$$y(a) = g(a), \quad y'_x(a) = g'_x(a). \quad (3)$$

Уравнение (2) с условиями (3) определяет решение исходного интегрального уравнения. Точные решения нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка (2) для различных функций $f(x, y)$ и $g(x)$ см. в книгах В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (1995, 1997).

20. $y(x) + \int_a^x (x - t)^n f(t, y(t)) dt = g(x), \quad n = 1, 2, \dots$

Дифференцируя уравнение $n + 1$ раз по x , для функции $y = y(x)$ получим нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение $(n + 1)$ -го порядка

$$y_x^{(n+1)} + n! f(x, y) - g_x^{(n+1)}(x) = 0.$$

Это уравнение с начальными условиями

$$y(a) = g(a), \quad y'_x(a) = g'_x(a), \quad \dots, \quad y_x^{(n)}(a) = g_x^{(n)}(a)$$

определяет решение исходного интегрального уравнения.

21. $y(x) + \int_a^x e^{\lambda(x-t)} f(t, y(t)) dt = g(x).$

Дифференцируя уравнение по x , имеем

$$y'_x + f(x, y(x)) + \lambda \int_a^x e^{\lambda(x-t)} f(t, y(t)) dt = g'_x(x).$$

Исключая отсюда слагаемое с интегралом с помощью исходного уравнения, получим нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка

$$y'_x + f(x, y) - \lambda y + \lambda g(x) - g'_x(x) = 0.$$

Искомая функция $y = y(x)$ должна удовлетворять начальному условию $y(a) = g(a)$. Точные решения нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка для различных функций $f(x, y)$ и $g(x)$ см. в книгах Э. Камке (1976), В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (1995, 1997).

$$22. \quad y(x) + \int_a^x \operatorname{ch}[\lambda(x-t)]f(t, y(t)) dt = g(x).$$

Дифференцируя уравнение два раза по x , получим

$$y'_x(x) + f(x, y(x)) + \lambda \int_a^x \operatorname{sh}[\lambda(x-t)]f(t, y(t)) dt = g'_x(x), \quad (1)$$

$$y''_{xx}(x) + [f(x, y(x))]'_x + \lambda^2 \int_a^x \operatorname{ch}[\lambda(x-t)]f(t, y(t)) dt = g''_{xx}(x). \quad (2)$$

Исключая из равенства (2) интегральное слагаемое с помощью исходного уравнения, приходим к нелинейному обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка

$$y''_{xx} + [f(x, y)]'_x - \lambda^2 y + \lambda^2 g(x) - g''_{xx}(x) = 0. \quad (3)$$

Полагая $x = a$ в исходном уравнении и равенстве (1), имеем следующие начальные условия для функции $y = y(x)$:

$$y(a) = g(a), \quad y'_x(a) = g'_x(a) - f(a, g(a)). \quad (4)$$

Уравнение (3) с условиями (4) определяет решение исходного интегрального уравнения.

$$23. \quad y(x) + \int_a^x \operatorname{sh}[\lambda(x-t)]f(t, y(t)) dt = g(x).$$

Дифференцируя уравнение два раза по x , получим

$$y'_x(x) + \lambda \int_a^x \operatorname{ch}[\lambda(x-t)]f(t, y(t)) dt = g'_x(x), \quad (1)$$

$$y''_{xx}(x) + \lambda f(x, y(x)) + \lambda^2 \int_a^x \operatorname{sh}[\lambda(x-t)]f(t, y(t)) dt = g''_{xx}(x). \quad (2)$$

Исключая из равенства (2) интегральное слагаемое с помощью исходного уравнения, приходим к нелинейному обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка

$$y''_{xx} + \lambda f(x, y) - \lambda^2 y + \lambda^2 g(x) - g''_{xx}(x) = 0. \quad (3)$$

Полагая $x = a$ в исходном уравнении и равенстве (1), имеем следующие начальные условия для функции $y = y(x)$:

$$y(a) = g(a), \quad y'_x(a) = g'_x(a). \quad (4)$$

Уравнение (3) с условиями (4) определяет решение исходного интегрального уравнения. Точные решения нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка (3) для различных функций $f(x, y)$ и $g(x)$ см. в книгах В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (1995, 1997).

$$24. \quad y(x) + \int_a^x \cos[\lambda(x-t)]f(t, y(t)) dt = g(x).$$

Дифференцируя уравнение два раза по x , получим

$$y'_x(x) + f(x, y(x)) - \lambda \int_a^x \sin[\lambda(x-t)]f(t, y(t)) dt = g'_x(x), \quad (1)$$

$$y''_{xx}(x) + [f(x, y(x))]'_x - \lambda^2 \int_a^x \cos[\lambda(x-t)]f(t, y(t)) dt = g''_{xx}(x). \quad (2)$$

Исключая из равенства (2) интегральное слагаемое с помощью исходного уравнения, приходим к нелинейному обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка

$$y''_{xx} + [f(x, y)]'_x + \lambda^2 y - \lambda^2 g(x) - g''_{xx}(x) = 0. \quad (3)$$

Полагая $x = a$ в исходном уравнении и равенстве (1), имеем следующие начальные условия для функции $y = y(x)$:

$$y(a) = g(a), \quad y'_x(a) = g'_x(a) - f(a, g(a)). \quad (4)$$

Уравнение (3) с условиями (4) определяет решение исходного интегрального уравнения.

$$25. \quad y(x) + \int_a^x \sin[\lambda(x-t)]f(t, y(t)) dt = g(x).$$

Дифференцируя уравнение два раза по x , получим

$$y'_x(x) + \lambda \int_a^x \cos[\lambda(x-t)]f(t, y(t)) dt = g'_x(x), \quad (1)$$

$$y''_{xx}(x) + \lambda f(x, y(x)) - \lambda^2 \int_a^x \sin[\lambda(x-t)]f(t, y(t)) dt = g''_{xx}(x). \quad (2)$$

Исключая из равенства (2) интегральное слагаемое с помощью исходного уравнения, приходим к нелинейному обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка

$$y''_{xx} + \lambda f(x, y) + \lambda^2 y - \lambda^2 g(x) - g''_{xx}(x) = 0. \quad (3)$$

Полагая $x = a$ в исходном уравнении и равенстве (1), имеем следующие начальные условия для функции $y = y(x)$:

$$y(a) = g(a), \quad y'_x(a) = g'_x(a). \quad (4)$$

Уравнение (3) с условиями (4) определяет решение исходного интегрального уравнения. Точные решения нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка (3) для различных функций $f(x, y)$ и $g(x)$ см. в книгах В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (1995, 1997).

5.8-4. Другие уравнения

$$26. \quad y(x) + \frac{1}{x} \int_0^x f\left(\frac{t}{x}, y(t)\right) dt = A.$$

Решение: $y(x) = \lambda$, где λ — корень алгебраического (или трансцендентного) уравнения

$$\lambda + F(\lambda) - A = 0, \quad F(\lambda) = \int_0^1 f(z, \lambda) dz.$$

Разным корням отвечают разные решения.

$$27. \quad y(x) + \int_0^x f\left(\frac{t}{x}, \frac{y(t)}{t}\right) dt = Ax.$$

Решение: $y(x) = \lambda x$, где λ — корень алгебраического (или трансцендентного) уравнения

$$\lambda + F(\lambda) - A = 0, \quad F(\lambda) = \int_0^1 f(z, \lambda) dz.$$

Разным корням отвечают разные решения.

$$28. \quad y(x) + \int_x^\infty f(t-x, y(t-x))y(t) dt = ae^{-\lambda x}.$$

Решение: $y(x) = \beta e^{-\lambda x}$, где β — корень алгебраического (или трансцендентного) уравнения

$$\beta + \beta I(\beta) = a, \quad I(\beta) = \int_0^\infty f(z, \beta e^{-\lambda z})e^{-\lambda z} dz.$$

Разным корням отвечают разные решения.

6. Нелинейные уравнения с постоянными пределами интегрирования

► **Обозначения:** f, g, h, φ — произвольные функции сложных аргументов, указанных в круглых скобках после знака функции (аргумент может зависеть от t, x, y); $A, B, C, a, b, c, s, \beta, \gamma, \lambda, \mu$ — произвольные параметры; k, m, n — целые неотрицательные числа.

6.1. Уравнения с квадратичной нелинейностью, содержащие произвольные параметры

6.1-1. Уравнения вида $\int_a^b K(t)y(x)y(t) dt = F(x)$

1. $\int_0^1 y(x)y(t) dt = Ax^\lambda, \quad A > 0, \quad \lambda > -1.$

Частный случай уравнения 6.2.1 при $f(x) = Ax^\lambda, g(t) = 1, a = 0, b = 1.$

Решения: $y(x) = \pm \sqrt{A(\lambda + 1)} x^\lambda.$

2. $\int_0^1 y(x)y(t) dt = Ae^{\beta x}, \quad A > 0.$

Частный случай уравнения 6.2.1 при $f(x) = Ae^{\beta x}, g(t) = 1, a = 0, b = 1.$

Решения: $y(x) = \pm \sqrt{\frac{A\beta}{e^\beta - 1}} e^{\beta x}.$

3. $\int_0^1 y(x)y(t) dt = A \operatorname{ch}(\beta x), \quad A > 0.$

Частный случай уравнения 6.2.1 при $f(x) = A \operatorname{ch}(\beta x), g(t) = 1, a = 0, b = 1.$

Решения: $y(x) = \pm \sqrt{\frac{A\beta}{\operatorname{sh} \beta}} \operatorname{ch}(\beta x).$

4. $\int_0^1 y(x)y(t) dt = A \operatorname{sh}(\beta x), \quad A\beta > 0.$

Частный случай уравнения 6.2.1 при $f(x) = A \operatorname{sh}(\beta x), g(t) = 1, a = 0, b = 1.$

Решения: $y(x) = \pm \sqrt{\frac{A\beta}{\operatorname{ch} \beta - 1}} \operatorname{sh}(\beta x).$

5. $\int_0^1 y(x)y(t) dt = A \operatorname{th}(\beta x), \quad A\beta > 0.$

Частный случай уравнения 6.2.1 при $f(x) = A \operatorname{th}(\beta x), g(t) = 1, a = 0, b = 1.$

Решения: $y(x) = \pm \sqrt{\frac{A\beta}{\ln \operatorname{ch} \beta}} \operatorname{th}(\beta x).$

6. $\int_0^1 y(x)y(t) dt = A \ln(\beta x), \quad A(\ln \beta - 1) > 0.$

Частный случай уравнения 6.2.1 при $f(x) = A \ln(\beta x), g(t) = 1, a = 0, b = 1.$

Решения: $y(x) = \pm \sqrt{\frac{A}{\ln \beta - 1}} \ln(\beta x).$

$$7. \int_0^1 y(x)y(t) dt = A \cos(\beta x), \quad A > 0.$$

Частный случай уравнения 6.2.1 при $f(x) = A \cos(\beta x)$, $g(t) = 1$, $a = 0$, $b = 1$.

Решения: $y(x) = \pm \sqrt{\frac{A\beta}{\sin \beta}} \cos(\beta x)$.

$$8. \int_0^1 y(x)y(t) dt = A \sin(\beta x), \quad A\beta > 0.$$

Частный случай уравнения 6.2.1 при $f(x) = A \sin(\beta x)$, $g(t) = 1$, $a = 0$, $b = 1$.

Решения: $y(x) = \pm \sqrt{\frac{A\beta}{1 - \cos \beta}} \sin(\beta x)$.

$$9. \int_0^1 y(x)y(t) dt = A \operatorname{tg}(\beta x), \quad A\beta > 0.$$

Частный случай уравнения 6.2.1 при $f(x) = A \operatorname{tg}(\beta x)$, $g(t) = 1$, $a = 0$, $b = 1$.

Решения: $y(x) = \pm \sqrt{\frac{-A\beta}{\ln |\cos \beta|}} \operatorname{tg}(\beta x)$.

$$10. \int_0^1 t^\mu y(x)y(t) dt = Ax^\lambda, \quad A > 0, \quad \mu + \lambda > -1.$$

Частный случай уравнения 6.2.1 при $f(x) = Ax^\lambda$, $g(t) = t^\mu$, $a = 0$, $b = 1$.

Решения: $y(x) = \pm \sqrt{A(\mu + \lambda + 1)} x^\lambda$.

$$11. \int_0^1 e^{\mu t} y(x)y(t) dt = Ae^{\beta x}, \quad A > 0.$$

Частный случай уравнения 6.2.1 при $f(x) = Ae^{\beta x}$, $g(t) = e^{\mu t}$, $a = 0$, $b = 1$.

Решения: $y(x) = \pm \sqrt{\frac{A(\mu + \beta)}{e^{\mu + \beta} - 1}} e^{\beta x}$.

6.1-2. Уравнения вида $\int_a^b G(\dots) dt = F(x)$

$$12. \int_0^1 y(t)y(xt) dt = A, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Частный случай уравнения 6.2.2 при $f(t) = 1$, $a = 0$, $b = 1$.

1°. Решения:

$$\begin{aligned} y_1(x) &= \sqrt{A}, & y_2(x) &= -\sqrt{A}, \\ y_3(x) &= \sqrt{A}(3x - 2), & y_4(x) &= -\sqrt{A}(3x - 2), \\ y_5(x) &= \sqrt{A}(10x^2 - 12x + 3), & y_6(x) &= -\sqrt{A}(10x^2 - 12x + 3). \end{aligned}$$

2°. Интегральное уравнение имеет также и другие решения, например:

$$\begin{aligned} y_7(x) &= \frac{\sqrt{A}}{C} [(2C + 1)x^C - C - 1], & y_8(x) &= -\frac{\sqrt{A}}{C} [(2C + 1)x^C - C - 1], \\ y_9(x) &= \sqrt{A}(\ln x + 1), & y_{10}(x) &= -\sqrt{A}(\ln x + 1), \end{aligned}$$

где C — произвольная постоянная.

3°. О других решениях см. в 6.2.2.

$$13. \int_0^1 y(t)y(xt^\beta) dt = A, \quad \beta > 0.$$

1°. Решения:

$$\begin{aligned} y_1(x) &= \sqrt{A}, & y_2(x) &= -\sqrt{A}, \\ y_3(x) &= \sqrt{B}[(\beta+2)x - \beta - 1], & y_4(x) &= -\sqrt{B}[(\beta+2)x - \beta - 1], \end{aligned}$$

$$\text{где } B = \sqrt{\frac{2A}{\beta(\beta+1)}}.$$

2°. Интегральное уравнение имеет также и другие более сложные решения полиномиального вида $y(x) = \sum_{k=0}^n B_k x^k$, где постоянные B_k находятся из соответствующей системы алгебраических уравнений.

$$14. \int_1^\infty y(t)y(xt) dt = Ax^{-\lambda}, \quad \lambda > 0, \quad 1 \leq x < \infty.$$

Частный случай уравнения 6.2.3 при $f(t) = 1, a = 1, b = \infty$.

1°. Решения:

$$\begin{aligned} y_1(x) &= Bx^{-\lambda}, & y_2(x) &= -Bx^{-\lambda}, & \lambda > \frac{1}{2}; \\ y_3(x) &= B[(2\lambda-3)x - 2\lambda + 2]x^{-\lambda}, & y_4(x) &= -B[(2\lambda-3)x - 2\lambda + 2]x^{-\lambda}, & \lambda > \frac{3}{2}; \end{aligned}$$

$$\text{где } B = \sqrt{A(2\lambda-1)}.$$

2°. При достаточно больших λ интегральное уравнение имеет также более сложные решения полиномиального вида $y(x) = \sum_{k=0}^n B_k x^k$, где постоянные B_k находятся из соответствующей системы алгебраических уравнений. О других решениях см. в 6.2.2.

$$15. \int_0^\infty e^{-\lambda t} y(t)y(xt) dt = A, \quad \lambda > 0, \quad 0 \leq x < \infty.$$

Частный случай уравнения 6.2.2 при $f(t) = e^{-\lambda t}, a = 0, b = \infty$.

1°. Решения:

$$\begin{aligned} y_1(x) &= \sqrt{A\lambda}, & y_2(x) &= -\sqrt{A\lambda}, \\ y_3(x) &= \sqrt{\frac{1}{2}A\lambda}(\lambda x - 2), & y_4(x) &= -\sqrt{\frac{1}{2}A\lambda}(\lambda x - 2). \end{aligned}$$

2°. Интегральное уравнение имеет также более сложные решения полиномиального вида $y(x) = \sum_{k=0}^n B_k x^k$, где постоянные B_k находятся из соответствующей системы алгебраических уравнений. О других решениях см. в 6.2.2.

$$16. \int_0^1 y(t)y(x + \lambda t) dt = A, \quad 0 \leq x < \infty.$$

Частный случай уравнения 6.2.7 при $f(t) \equiv 1, a = 0, b = 1$.

Решения:

$$\begin{aligned} y_1(x) &= \sqrt{A}, & y_2(x) &= -\sqrt{A}, \\ y_3(x) &= \sqrt{3A/\lambda}(1 - 2x), & y_4(x) &= -\sqrt{3A/\lambda}(1 - 2x). \end{aligned}$$

$$17. \int_0^\infty y(t)y(x + \lambda t) dt = Ae^{-\beta x}, \quad A, \lambda, \beta > 0, \quad 0 \leq x < \infty.$$

Частный случай уравнения 6.2.9 при $f(t) \equiv 1, a = 0, b = \infty$.

Решения:

$$\begin{aligned} y_1(x) &= \sqrt{A\beta(\lambda+1)}e^{-\beta x}, & y_2(x) &= -\sqrt{A\beta(\lambda+1)}e^{-\beta x}, \\ y_3(x) &= B[\beta(\lambda+1)x - 1]e^{-\beta x}, & y_4(x) &= -B[\beta(\lambda+1)x - 1]e^{-\beta x}, \end{aligned}$$

$$\text{где } B = \sqrt{A\beta(\lambda+1)/\lambda}.$$

$$18. \int_0^1 y(t)y(x-t) dt = A, \quad -\infty < x < \infty.$$

Частный случай уравнения 6.2.10 при $f(t) \equiv 1$, $a = 0$, $b = 1$.

1°. Решения при $A > 0$:

$$\begin{aligned} y_1(x) &= \sqrt{A}, & y_2(x) &= -\sqrt{A}, \\ y_3(x) &= \sqrt{5A}(6x^2 - 6x + 1), & y_4(x) &= -\sqrt{5A}(6x^2 - 6x + 1). \end{aligned}$$

2°. Решения при $A < 0$:

$$y_1(x) = \sqrt{-3A}(1-2x), \quad y_2(x) = -\sqrt{-3A}(1-2x).$$

Интегральное уравнение имеет также более сложные решения полиномиального вида $y(x) = \sum_{k=0}^n B_k x^k$, где постоянные B_k находятся из соответствующей системы алгебраических уравнений.

$$19. \int_0^\infty e^{-\lambda t} y\left(\frac{x}{t}\right) y(t) dt = Ax^b, \quad \lambda > 0.$$

Решения: $y(x) = \pm \sqrt{A\lambda} x^b$.

6.1-3. Уравнения вида $y(x) + \int_a^b K(x, t)y^2(t) dt = F(x)$

$$20. y(x) + A \int_a^b x^\lambda y^2(t) dt = 0.$$

Решения:

$$y_1(x) = 0, \quad y_2(x) = -\frac{2\lambda + 1}{A(b^{2\lambda+1} - a^{2\lambda+1})} x^\lambda.$$

$$21. y(x) + A \int_a^b x^\lambda t^\mu y^2(t) dt = 0.$$

Решения:

$$y_1(x) = 0, \quad y_2(x) = -\frac{2\lambda + \mu + 1}{A(b^{2\lambda+\mu+1} - a^{2\lambda+\mu+1})} x^\lambda.$$

$$22. y(x) + A \int_a^b e^{-\lambda x} y^2(t) dt = 0.$$

Решения:

$$y_1(x) = 0, \quad y_2(x) = \frac{2\lambda}{A(e^{-2\lambda b} - e^{-2\lambda a})} e^{-\lambda x}.$$

$$23. y(x) + A \int_a^b e^{-\lambda x - \mu t} y^2(t) dt = 0.$$

Решения:

$$y_1(x) = 0, \quad y_2(x) = \frac{2\lambda + \mu}{A[e^{-(2\lambda+\mu)b} - e^{-(2\lambda+\mu)a}]} e^{-\lambda x}.$$

$$24. y(x) + A \int_a^b x^\lambda e^{-\mu t} y^2(t) dt = 0.$$

Частный случай уравнения 6.2.20 при $f(x) = Ax^\lambda$, $g(t) = e^{-\mu t}$.

$$25. y(x) + A \int_a^b e^{-\mu x} t^\lambda y^2(t) dt = 0.$$

Частный случай уравнения 6.2.20 при $f(x) = Ae^{-\mu x}$, $g(t) = t^\lambda$.

$$26. \quad y(x) + A \int_0^1 y^2(t) dt = Bx^\mu, \quad \mu > -1.$$

Частный случай уравнения 6.2.22 при $g(t) = A$, $f(x) = Bx^\mu$, $a = 0$, $b = 1$.

Решение: $y(x) = Bx^\mu + \lambda$, где λ определяется из квадратного уравнения

$$\lambda^2 + \frac{1}{A} \left(1 + \frac{2AB}{\mu + 1} \right) \lambda + \frac{B^2}{2\mu + 1} = 0.$$

Разным корням отвечают разные решения.

$$27. \quad y(x) + A \int_a^b t^\beta y^2(t) dt = Bx^\mu.$$

Частный случай уравнения 6.2.22 при $g(t) = At^\beta$, $f(x) = Bx^\mu$.

$$28. \quad y(x) + A \int_a^b e^{\beta t} y^2(t) dt = Be^{\mu x}.$$

Частный случай уравнения 6.2.22 при $g(t) = Ae^{\beta t}$, $f(x) = Be^{\mu x}$.

$$29. \quad y(x) + A \int_a^b x^\beta y^2(t) dt = Bx^\mu.$$

Частный случай уравнения 6.2.23 при $g(x) = Ax^\beta$, $f(x) = Bx^\mu$.

$$30. \quad y(x) + A \int_a^b e^{\beta x} y^2(t) dt = Be^{\mu x}.$$

Частный случай уравнения 6.2.23 при $g(x) = Ae^{\beta x}$, $f(x) = Be^{\mu x}$.

6.1-4. Уравнения вида $y(x) + \int_a^b K(x, t)y(x)y(t) dt = F(x)$

$$31. \quad y(x) + A \int_a^b t^\beta y(x)y(t) dt = Bx^\mu.$$

Частный случай уравнения 6.2.25 при $g(t) = At^\beta$, $f(x) = Bx^\mu$.

$$32. \quad y(x) + A \int_a^b e^{\beta t} y(x)y(t) dt = Be^{\mu x}.$$

Частный случай уравнения 6.2.25 при $g(t) = Ae^{\beta t}$, $f(x) = Be^{\mu x}$.

$$33. \quad y(x) + A \int_a^b x^\beta y(x)y(t) dt = Bx^\mu.$$

Частный случай уравнения 6.2.26 при $g(x) = Ax^\beta$, $f(x) = Bx^\mu$.

$$34. \quad y(x) + A \int_a^b e^{\beta x} y(x)y(t) dt = Be^{\mu x}.$$

Частный случай уравнения 6.2.26 при $g(x) = Ae^{\beta x}$, $f(x) = Be^{\mu x}$.

6.1-5. Уравнения вида $y(x) + \int_a^b G(\dots) dt = F(x)$
--

$$35. \quad y(x) + A \int_0^1 y(t)y(xt) dt = 0.$$

Частный случай уравнения 6.2.30 при $f(t) = A$, $a = 0$, $b = 1$.

1°. Решения:

$$y_1(x) = -\frac{1}{A}(2C+1)x^C, \quad y_2(x) = \frac{(I_1 - I_0)x + I_1 - I_2}{I_0 I_2 - I_1^2} x^C, \\ I_m = \frac{A}{2C + m + 1}, \quad m = 0, 1, 2,$$

где $C \geq 0$ — произвольная постоянная.

Существуют более сложные решения вида $y(x) = x^C \sum_{k=0}^n B_k x^k$, где C — произвольная постоянная, а коэффициенты B_k определяются из соответствующей системы алгебраических уравнений.

2°. Решение:

$$y_3(x) = \frac{(I_1 - I_0)x^\beta + I_1 - I_2}{I_0 I_2 - I_1^2} x^C, \quad I_m = \frac{A}{2C + m\beta + 1}, \quad m = 0, 1, 2,$$

где C, β — произвольные постоянные.

Существуют более сложные решения вида $y(x) = x^C \sum_{k=0}^n D_k x^{k\beta}$, где C, β — произвольные постоянные, а коэффициенты D_k определяются из соответствующей системы алгебраических уравнений.

3°. Решение:

$$y_4(x) = \frac{x^C (J_1 \ln x - J_2)}{J_0 J_2 - J_1^2}, \quad J_m = \int_0^1 t^{2C} (\ln t)^m dt, \quad m = 0, 1, 2,$$

где C — произвольная постоянная.

Существуют более сложные решения вида $y(x) = x^C \sum_{k=0}^n E_k (\ln x)^k$, где C — произвольная постоянная, а коэффициенты E_k определяются из соответствующей системы алгебраических уравнений.

36. $y(x) + A \int_1^\infty y(t)y(xt) dt = 0.$

Частный случай уравнения 6.2.30 при $f(t) = A, a = 1, b = \infty$.

37. $y(x) + \lambda \int_1^\infty y(t)y(xt) dt = Ax^\beta.$

Частный случай уравнения 6.2.31 при $f(t) = \lambda, a = 0, b = 1$.

38. $y(x) + A \int_0^1 y(t)y(x + \lambda t) dt = 0.$

Частный случай уравнения 6.2.35 при $f(t) \equiv A, a = 0, b = 1$.

1°. Решение:

$$y(x) = \frac{C(\lambda + 1)}{A[1 - e^{C(\lambda + 1)}]} e^{Cx},$$

где C — произвольная постоянная.

2°. Существуют более сложные решения вида $y(x) = e^{Cx} \sum_{m=0}^n B_m x^m$, где C — произвольная постоянная, а коэффициенты B_m определяются из соответствующей системы алгебраических уравнений.

39. $y(x) + A \int_0^\infty y(t)y(x + \lambda t) dt = 0, \quad \lambda > 0, \quad 0 \leq x < \infty.$

Частный случай уравнения 6.2.35 при $f(t) \equiv A, a = 0, b = \infty$.

Решение:

$$y(x) = -\frac{C(\lambda + 1)}{A} e^{-Cx},$$

где $C > 0$ — произвольная постоянная.

$$40. \quad y(x) + A \int_0^\infty e^{-\lambda t} y\left(\frac{x}{t}\right) y(t) dt = 0, \quad \lambda > 0.$$

Решение: $y(x) = -\frac{\lambda}{A} x^C$, где C — произвольная постоянная.

$$41. \quad y(x) + A \int_0^\infty e^{-\lambda t} y\left(\frac{x}{t}\right) y(t) dt = Bx^b, \quad \lambda > 0.$$

Решения:

$$y_1(x) = \beta_1 x^b, \quad y_2(x) = \beta_2 x^b,$$

где β_1 и β_2 — корни квадратного уравнения $A\beta^2 + \lambda\beta - B\lambda = 0$.

6.2. Уравнения с квадратичной нелинейностью, содержащие произвольные функции

6.2-1. Уравнения вида $\int_a^b G(\dots) dt = F(x)$

$$1. \quad \int_a^b g(t) y(x) y(t) dt = f(x).$$

Решения:

$$y(x) = \pm \lambda f(x), \quad \lambda = \left[\int_a^b f(t) g(t) dt \right]^{-1/2}.$$

$$2. \quad \int_a^b f(t) y(t) y(xt) dt = A.$$

1°. Решения*:

$$\begin{aligned} y_1(x) &= \sqrt{A/I_0}, & y_2(x) &= -\sqrt{A/I_0}, \\ y_3(x) &= q(I_1 x - I_2), & y_4(x) &= -q(I_1 x - I_2), \end{aligned}$$

где

$$I_m = \int_a^b t^m f(t) dt, \quad q = \left(\frac{A}{I_0 I_2^2 - I_1^2 I_2} \right)^{1/2}, \quad m = 0, 1, 2.$$

Интегральное уравнение имеет также более сложные решения полиномиального вида $y(x) = \sum_{k=0}^n B_k x^k$, где постоянные B_k находятся из соответствующей системы алгебраических уравнений.

2°. Решения:

$$\begin{aligned} y_5(x) &= q(I_1 x^C - I_2), & y_6(x) &= -q(I_1 x^C - I_2), \\ q &= \left(\frac{A}{I_0 I_2^2 - I_1^2 I_2} \right)^{1/2}, & I_m &= \int_a^b t^{mC} f(t) dt, \quad m = 0, 1, 2, \end{aligned}$$

где C — произвольная постоянная.

Уравнение имеет также более сложные решения вида $y(x) = \sum_{k=0}^n B_k x^{kC}$, где C — произвольная постоянная, а коэффициенты B_k находятся из соответствующей системы алгебраических уравнений.

* Аргументы нелинейных уравнений, содержащих в подынтегральном выражении сомножитель $y(xt)$, могут изменяться в следующих пределах: 1) $0 \leq t \leq 1$, $0 \leq x \leq 1$ при $a = 0$, $b = 1$; 2) $1 \leq t < \infty$, $1 \leq x < \infty$ при $a = 1$, $b = \infty$; 3) $0 \leq t < \infty$, $0 \leq x < \infty$ при $a = 0$, $b = \infty$; 4) $a \leq t \leq b$, $0 \leq x < \infty$, где a , b — любые, удовлетворяющие условиям $0 \leq a < b \leq \infty$. Случай 4) следует из случая 3), когда функция $f(t)$ отлична от нуля только на отрезке $a \leq t \leq b$.

3°. Решения:

$$y_7(x) = p(J_0 \ln x - J_1), \quad y_8(x) = -p(J_0 \ln x - J_1),$$

$$p = \left(\frac{A}{J_0^2 J_2 - J_0 J_1^2} \right)^{1/2}, \quad J_m = \int_a^b (\ln t)^m f(t) dt.$$

Уравнение имеет также более сложные решения вида $y(x) = \sum_{k=0}^n E_k (\ln x)^k$, где постоянные E_k находятся из соответствующей системы алгебраических уравнений.

3. $\int_a^b f(t)y(t)y(xt) dt = Ax^\beta.$

1°. Решения:

$$y_1(x) = \sqrt{A/I_0} x^\beta, \quad y_2(x) = -\sqrt{A/I_0} x^\beta,$$

$$y_3(x) = q(I_1 x - I_2) x^\beta, \quad y_4(x) = -q(I_1 x - I_2) x^\beta,$$

где

$$I_m = \int_a^b t^{2\beta+m} f(t) dt, \quad q = \sqrt{\frac{A}{I_2(I_0 I_2 - I_1^2)}}, \quad m = 0, 1, 2.$$

2°. Замена $y(x) = x^\beta w(x)$ приводит к уравнению вида 6.2.2:

$$\int_a^b g(t)w(t)w(xt) dt = A, \quad g(x) = f(x)x^{2\beta}.$$

Поэтому рассматриваемое интегральное уравнение имеет также и другие решения.

4. $\int_a^b f(t)y(t)y(xt) dt = A \ln x + B.$

Это уравнение имеет решения вида $y(x) = p \ln x + q$. Постоянные p и q определяются из системы двух алгебраических уравнений второго порядка

$$I_1 p^2 + I_0 p q = A, \quad I_2 p^2 + 2I_1 p q + I_0 q^2 = B,$$

где

$$I_m = \int_a^b f(t)(\ln t)^m dt, \quad m = 0, 1, 2.$$

5. $\int_a^b f(t)y(t)y(xt) dt = Ax^\lambda \ln x + Bx^\lambda.$

Замена $y(x) = x^\lambda w(x)$ приводит к уравнению вида 6.2.4:

$$\int_a^b g(t)w(t)w(xt) dt = A \ln x + B, \quad g(t) = f(t)t^{2\lambda}.$$

6. $\int_0^\infty f(t)y(t)y\left(\frac{x}{t}\right) dt = Ax^\lambda.$

Решения:

$$y_1(x) = \sqrt{\frac{A}{I}} x^\lambda, \quad y_2(x) = -\sqrt{\frac{A}{I}} x^\lambda, \quad I = \int_0^\infty f(t) dt.$$

7. $\int_a^b f(t)y(t)y(x + \lambda t) dt = A, \quad \lambda > 0.$

1°. Решения*:

$$y_1(x) = \sqrt{A/I_0}, \quad y_2(x) = -\sqrt{A/I_0},$$

$$y_3(x) = q(I_0 x - I_1), \quad y_4(x) = -q(I_0 x - I_1),$$

* Аргументы нелинейных уравнений, содержащих в подынтегральном выражении сомножитель $y(x + \lambda t)$, могут изменяться в следующих пределах: 1) $0 \leq t < \infty, 0 \leq x < \infty$ при $a = 0, b = \infty$; 2) $a \leq t \leq b, 0 \leq x < \infty$, где a, b — любые, удовлетворяющие условиям $0 \leq a < b < \infty$. Случай 2) следует из случая 1), когда функция $f(t)$ отлична от нуля только на отрезке $a \leq t \leq b$.

где

$$I_m = \int_a^b t^m f(t) dt, \quad q = \sqrt{\frac{A}{\lambda(I_0^2 I_2 - I_0 I_1^2)}}, \quad m = 0, 1, 2.$$

2°. Интегральное уравнение имеет также более сложные решения полиномиального вида $y(x) = \sum_{k=0}^n B_k x^k$, где постоянные B_k находятся из соответствующей системы алгебраических уравнений.

$$8. \int_a^b f(t)y(t)y(x + \lambda t) dt = Ax + B, \quad \lambda > 0.$$

Решение: $y(x) = \beta x + \mu$, где постоянные β и μ определяются путем решения алгебраической системы уравнений

$$I_0 \beta \mu + I_1 \beta^2 = A, \quad I_0 \mu^2 + (\lambda + 1) I_1 \beta \mu + \lambda I_2 \beta^2 = B, \quad I_m = \int_a^b t^m f(t) dt. \quad (1)$$

Умножим первое уравнение на B , а второе — на $-A$, и сложим полученные равенства. В результате получим квадратное уравнение

$$A I_0 z^2 + [(\lambda + 1) A I_1 - B I_0] z + \lambda A I_2 - B I_1 = 0, \quad z = \mu / \beta. \quad (2)$$

Каждому корню этого уравнения (2) в общем случае отвечает два решения системы (1). Поэтому исходное интегральное уравнение максимально может иметь четыре решения такого вида. Если дискриминант уравнения (2) меньше нуля, то интегральное уравнение таких решений не имеет.

Интегральное уравнение имеет также более сложные решения полиномиального вида $y(x) = \sum_{k=0}^n \beta_k x^k$, где постоянные β_k находятся из соответствующей системы алгебраических уравнений.

$$9. \int_a^b f(t)y(t)y(x + \lambda t) dt = A e^{-\beta x}, \quad \lambda > 0.$$

1°. Решения:

$$\begin{aligned} y_1(x) &= \sqrt{A/I_0} e^{-\beta x}, & y_2(x) &= -\sqrt{A/I_0} e^{-\beta x}, \\ y_3(x) &= q(I_0 x - I_1) e^{-\beta x}, & y_4(x) &= -q(I_0 x - I_1) e^{-\beta x}, \end{aligned}$$

где

$$I_m = \int_a^b t^m e^{-\beta(\lambda+1)t} f(t) dt, \quad q = \sqrt{\frac{A}{\lambda(I_0^2 I_2 - I_0 I_1^2)}}, \quad m = 0, 1, 2.$$

2°. Уравнение имеет также более сложные решения вида $y(x) = e^{-\beta x} \sum_{k=0}^n B_k x^k$, где постоянные B_k находятся из соответствующей системы алгебраических уравнений.

3°. Замена $y(x) = e^{-\beta x} w(x)$ приводит к уравнению вида 6.2.7:

$$\int_a^b e^{-\beta(\lambda+1)t} f(t)w(t)w(x + \lambda t) dt = A.$$

$$10. \int_a^b f(t)y(t)y(x - t) dt = A.$$

1°. Решения*:

$$\begin{aligned} y_1(x) &= \sqrt{A/I_0}, & y_2(x) &= -\sqrt{A/I_0}, \\ y_3(x) &= q(I_0 x - I_1), & y_4(x) &= -q(I_0 x - I_1), \end{aligned}$$

где

$$I_m = \int_a^b t^m f(t) dt, \quad q = \sqrt{\frac{A}{I_0 I_1^2 - I_0^2 I_2}}, \quad m = 0, 1, 2.$$

* Аргументы нелинейных уравнений, содержащих в подынтегральном выражении сомножитель $y(x-t)$, могут изменяться в следующих пределах: 1) $-\infty < t < \infty$, $-\infty < x < \infty$ при $a = -\infty$, $b = \infty$; 2) $a \leq t \leq b$, $-\infty \leq x < \infty$, где a , b — любые, удовлетворяющие условиям $-\infty < a < b < +\infty$. Случай 2) следует из случая 1), когда функция $f(t)$ отлична от нуля только на отрезке $a \leq t \leq b$.

2°. Интегральное уравнение имеет также более сложные решения полиномиального вида $y(x) = \sum_{k=0}^n \lambda_k x^k$, где постоянные λ_k находятся из соответствующей системы алгебраических уравнений. При $n = 3$ такое решение указано в 6.1.18.

$$11. \int_a^b f(t)y(t)y(x-t) dt = Ax + B.$$

Решение: $y(x) = \lambda x + \mu$, где постоянные λ и μ определяются путем решения алгебраической системы уравнений

$$I_0 \lambda \mu + I_1 \lambda^2 = A, \quad I_0 \mu^2 - I_2 \lambda^2 = B, \quad I_m = \int_a^b t^m f(t) dt, \quad m = 0, 1, 2. \quad (1)$$

Умножим первое уравнение на B , а второе — на $-A$, и сложим полученные равенства. В результате получим квадратное уравнение

$$AI_0 z^2 - BI_0 z - AI_2 - BI_1 = 0, \quad z = \mu/\lambda. \quad (2)$$

Каждому корню этого уравнения (2) в общем случае отвечает два решения системы (1). Поэтому исходное интегральное уравнение максимально может иметь четыре решения такого вида. Если дискриминант уравнения (2) меньше нуля, то интегральное уравнение таких решений не имеет.

Интегральное уравнение имеет также более сложные решения полиномиального вида $y(x) = \sum_{k=0}^n \lambda_k x^k$, где постоянные λ_k находятся из соответствующей системы алгебраических уравнений.

$$12. \int_a^b f(t)y(t)y(x-t) dt = \sum_{k=0}^n A_k x^k.$$

Решения этого уравнения имеют вид

$$y(x) = \sum_{k=0}^n \lambda_k x^k, \quad (1)$$

где постоянные λ_k находятся из системы алгебраических уравнений, которые получаются после подстановки выражения (1) в исходное интегральное уравнение в результате выделения членов при одинаковых степенях x .

$$13. \int_a^b f(t)y(x-t)y(t) dt = Ae^{\lambda x}.$$

Решения:

$$\begin{aligned} y_1(x) &= \sqrt{A/I_0} e^{\lambda x}, & y_2(x) &= -\sqrt{A/I_0} e^{\lambda x}, \\ y_3(x) &= q(I_0 x - I_1) e^{\lambda x}, & y_4(x) &= -q(I_0 x - I_1) e^{\lambda x}, \end{aligned}$$

где

$$I_m = \int_a^b t^m f(t) dt, \quad q = \sqrt{\frac{A}{I_0 I_1^2 - I_0^2 I_2}}, \quad m = 0, 1, 2.$$

Уравнение имеет также более сложные решения вида $y(x) = e^{\lambda x} \sum_{k=0}^n B_k x^k$, где постоянные B_k находятся из соответствующей системы алгебраических уравнений.

$$14. \int_a^b f(t)y(t)y(x-t) dt = A \operatorname{sh} \lambda x.$$

Решение:

$$y(x) = p \operatorname{sh} \lambda x + q \operatorname{ch} \lambda x. \quad (1)$$

Здесь p и q — корни алгебраической системы уравнений

$$I_0 p q + I_{cs}(p^2 - q^2) = A, \quad I_{cc} q^2 - I_{ss} p^2 = 0, \quad (2)$$

где использованы следующие обозначения:

$$I_0 = \int_a^b f(t) dt, \quad I_{cs} = \int_a^b f(t) \operatorname{ch}(\lambda t) \operatorname{sh}(\lambda t) dt, \\ I_{cc} = \int_a^b f(t) \operatorname{ch}^2(\lambda t) dt, \quad I_{ss} = \int_a^b f(t) \operatorname{sh}^2(\lambda t) dt.$$

Различным решениям системы (2) соответствуют различные решения (1) интегрального уравнения.

Из второго уравнения системы (2) имеем $q = \pm \sqrt{I_{ss}/I_{cc}} p$. Исключая с помощью этого равенства величину q из первого уравнения (2), находим решения:

$$y_{1,2}(x) = p(\operatorname{sh} \lambda x \pm k \operatorname{ch} \lambda x), \quad y_{3,4}(x) = -p(\operatorname{sh} \lambda x \pm k \operatorname{ch} \lambda x), \\ k = \sqrt{\frac{I_{ss}}{I_{cc}}}, \quad p = \sqrt{\frac{A}{(1 - k^2)I_{cs} \pm kI_0}}.$$

$$15. \int_a^b f(t)y(t)y(x-t) dt = A \operatorname{ch} \lambda x.$$

Решение:

$$y(x) = p \operatorname{sh} \lambda x + q \operatorname{ch} \lambda x. \quad (1)$$

Здесь p и q — корни алгебраической системы уравнений

$$I_0 pq + I_{cs}(p^2 - q^2) = 0, \quad I_{cc}q^2 - I_{ss}p^2 = A, \quad (2)$$

где использованы те же обозначения, что и в аналогичной системе для уравнения 6.2.14. Различным решениям системы (2) соответствуют различные решения (1) интегрального уравнения.

$$16. \int_a^b f(t)y(t)y(x-t) dt = A \sin \lambda x.$$

Решение:

$$y(x) = p \sin \lambda x + q \cos \lambda x. \quad (1)$$

Здесь p и q — корни алгебраической системы уравнений

$$I_0 pq + I_{cs}(p^2 + q^2) = A, \quad I_{cc}q^2 - I_{ss}p^2 = 0, \quad (2)$$

где

$$I_0 = \int_a^b f(t) dt, \quad I_{cs} = \int_a^b f(t) \cos(\lambda t) \sin(\lambda t) dt, \\ I_{cc} = \int_a^b f(t) \cos^2(\lambda t) dt, \quad I_{ss} = \int_a^b f(t) \sin^2(\lambda t) dt.$$

Из второго уравнения системы (2) имеем $q = \pm \sqrt{I_{ss}/I_{cc}} p$. Исключая с помощью этого равенства величину q из первого уравнения (2), находим решения:

$$y_{1,2}(x) = p(\sin \lambda x \pm k \cos \lambda x), \quad y_{3,4}(x) = -p(\sin \lambda x \pm k \cos \lambda x), \\ k = \sqrt{\frac{I_{ss}}{I_{cc}}}, \quad p = \sqrt{\frac{A}{(1 + k^2)I_{cs} \pm kI_0}}.$$

$$17. \int_a^b f(t)y(t)y(x-t) dt = A \cos \lambda x.$$

Решение:

$$y(x) = p \sin \lambda x + q \cos \lambda x. \quad (1)$$

Здесь p и q — корни алгебраической системы уравнений

$$I_0 pq + I_{cs}(p^2 + q^2) = 0, \quad I_{cc}q^2 - I_{ss}p^2 = A, \quad (2)$$

где использованы те же обозначения, что и в аналогичной системе для уравнения 6.2.16. Различным решениям системы (2) соответствуют различные решения (1) интегрального уравнения.

$$18. \int_0^1 y(t)y(\xi) dt = A, \quad \xi = f(x)t.$$

1°. Решения:

$$\begin{aligned} y_1(t) &= \sqrt{A}, & y_2(t) &= -\sqrt{A}, \\ y_3(t) &= \sqrt{A}(3t-2), & y_4(t) &= -\sqrt{A}(3t-2), \\ y_5(t) &= \sqrt{A}(10t^2-12t+3), & y_6(t) &= -\sqrt{A}(10t^2-12t+3). \end{aligned}$$

2°. Интегральное уравнение имеет также и другие более сложные решения полиномиального вида $y(t) = \sum_{k=0}^n B_k t^k$, где постоянные B_k находятся из соответствующей системы алгебраических уравнений.

3°. Замена $z = f(x)$ приводит к уравнению вида 6.1.12.

6.2-2. Уравнения вида $y(x) + \int_a^b K(x, t)y^2(t) dt = F(x)$

$$19. y(x) + \int_a^b f(x)y^2(t) dt = 0.$$

Решения: $y_1(x) = 0$ и $y_2(x) = \lambda f(x)$, где $\lambda = -\left[\int_a^b f^2(t) dt\right]^{-1}$.

$$20. y(x) + \int_a^b f(x)g(t)y^2(t) dt = 0.$$

Частный случай уравнения 6.8.29.

Решения: $y_1(x) = 0$ и $y_2(x) = \lambda f(x)$, где $\lambda = -\left[\int_a^b f^2(t)g(t) dt\right]^{-1}$.

$$21. y(x) + A \int_a^b y^2(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 6.8.27.

Решение: $y(x) = f(x) + \lambda$, где λ определяется путем решения квадратного уравнения

$$A(b-a)\lambda^2 + (1 + 2AI_1)\lambda + AI_2 = 0, \quad \text{где } I_1 = \int_a^b f(t) dt, \quad I_2 = \int_a^b f^2(t) dt.$$

$$22. y(x) + \int_a^b g(t)y^2(t) dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 6.8.29.

Решение: $y(x) = f(x) + \lambda$, где λ определяется путем решения квадратного уравнения

$$I_0\lambda^2 + (1 + 2I_1)\lambda + I_2 = 0, \quad \text{где } I_m = \int_a^b f^m(t)g(t) dt, \quad m = 0, 1, 2.$$

Разным корням отвечают разные решения.

$$23. y(x) + \int_a^b g(x)y^2(t) dt = f(x).$$

Решение: $y(x) = \lambda g(x) + f(x)$, где λ определяется путем решения квадратного уравнения

$$\begin{aligned} I_{gg}\lambda^2 + (1 + 2I_{fg})\lambda + I_{ff} &= 0, \\ I_{gg} &= \int_a^b g^2(t) dt, \quad I_{fg} = \int_a^b f(t)g(t) dt, \quad I_{ff} = \int_a^b f^2(t) dt. \end{aligned}$$

$$24. y(x) + \int_a^b [g_1(x)h_1(t) + g_2(x)h_2(t)]y^2(t) dt = f(x).$$

Решение: $y(x) = \lambda_1 g_1(x) + \lambda_2 g_2(x) + f(x)$, где постоянные λ_1 и λ_2 определяются путем решения алгебраической системы двух уравнений второго порядка (эту систему можно получить из более общей системы, указанной в 6.8.39).

6.2-3. Уравнения вида $y(x) + \int_a^b \sum K_{nm}(x, t) y^n(x) y^m(t) dt = F(x)$

$$25. \quad y(x) + \int_a^b g(t) y(x) y(t) dt = f(x).$$

Решения:

$$y_1(x) = \lambda_1 f(x), \quad y_2(x) = \lambda_2 f(x),$$

где λ_1 и λ_2 — корни квадратного уравнения

$$I\lambda^2 + \lambda - 1 = 0, \quad I = \int_a^b f(t)g(t) dt.$$

$$26. \quad y(x) + \int_a^b g(x) y(x) y(t) dt = f(x).$$

Решение:

$$y(x) = \frac{f(x)}{1 + \lambda g(x)},$$

где λ — корень алгебраического (или трансцендентного) уравнения

$$\lambda - \int_a^b \frac{f(t) dt}{1 + \lambda g(t)} = 0.$$

Разным корням отвечают разные решения интегрального уравнения.

$$27. \quad y(x) + \int_a^b [g_1(t) y^2(x) + g_2(x) y(t)] dt = f(x).$$

Решение в неявном виде:

$$y(x) + I y^2(x) + \lambda g_2(x) - f(x) = 0, \quad I = \int_a^b g_1(t) dt, \quad (1)$$

где параметр λ определяются путем решения алгебраического уравнения

$$\lambda = \int_a^b y(t) dt. \quad (2)$$

В правую часть (2) следует подставить функцию $y(x) = y(x, \lambda)$, которая получается путем разрешения квадратного уравнения (1).

$$28. \quad y(x) + \int_a^b [g_1(t) y^2(x) + g_2(x) y^2(t)] dt = f(x).$$

Решение в неявном виде:

$$y(x) + I y^2(x) + \lambda g_2(x) - f(x) = 0, \quad I = \int_a^b g_1(t) dt, \quad (1)$$

где параметр λ определяются путем решения алгебраического уравнения

$$\lambda = \int_a^b y^2(t) dt. \quad (2)$$

В правую часть (2) следует подставить функцию $y(x) = y(x, \lambda)$, которая получается путем разрешения квадратного уравнения (1).

$$29. \quad y(x) + \int_a^b [g_{11}(x) h_{11}(t) y^2(x) + g_{12}(x) h_{12}(t) y(x) y(t) + \\ + g_{22}(x) h_{22}(t) y^2(t) + g_1(x) h_1(t) y(x) + g_2(x) h_2(t) y(t)] dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 6.8.44.

6.2-4. Уравнения вида $y(x) + \int_a^b G(\dots) dt = F(x)$

30. $y(x) + \int_a^b f(t)y(t)y(xt) dt = 0.$

1°. Решения:

$$y_1(x) = -\frac{1}{I_0}x^C, \quad y_2(x) = \frac{(I_1 - I_0)x + I_1 - I_2}{I_0I_2 - I_1^2}x^C,$$

$$I_m = \int_a^b f(t)t^{2C+m} dt, \quad m = 0, 1, 2,$$

где C — произвольная постоянная.

Существуют более сложные решения вида $y(x) = x^C \sum_{k=0}^n B_k x^k$, где C — произвольная постоянная, а коэффициенты B_k определяются из соответствующей системы алгебраических уравнений.

2°. Решение:

$$y_3(x) = \frac{(I_1 - I_0)x^\beta + I_1 - I_2}{I_0I_2 - I_1^2}x^C,$$

$$I_m = \int_a^b f(t)t^{2C+m\beta} dt, \quad m = 0, 1, 2,$$

где C, β — произвольные постоянные.

Существуют более сложные решения вида $y(x) = x^C \sum_{k=0}^n D_k x^{k\beta}$, где C, β — произвольные постоянные, а коэффициенты D_k определяются из соответствующей системы алгебраических уравнений.

3°. Решение:

$$y_4(x) = \frac{x^C(J_1 \ln x - J_2)}{J_0J_2 - J_1^2},$$

$$J_m = \int_a^b f(t)t^{2C}(\ln t)^m dt, \quad m = 0, 1, 2,$$

где C — произвольная постоянная.

Существуют более сложные решения вида $y(x) = x^C \sum_{k=0}^n E_k (\ln x)^k$, где C — произвольная постоянная, а коэффициенты E_k определяются из соответствующей системы алгебраических уравнений.

4°. Уравнение имеет также тривиальное решение $y(x) \equiv 0$.

5°. Замена $y(x) = x^\beta w(x)$ приводит к уравнению аналогичного вида

$$w(x) + \int_a^b g(t)w(t)w(xt) dt = 0, \quad g(x) = f(x)x^{2\beta}.$$

31. $y(x) + \int_a^b f(t)y(t)y(xt) dt = Ax^\beta.$

1°. Решения:

$$y_1(x) = k_1 x^\beta, \quad y_2(x) = k_2 x^\beta,$$

где k_1 и k_2 — корни квадратного уравнения

$$Ik^2 + k - A = 0, \quad I = \int_a^b f(t)t^{2\beta} dt.$$

2°. Решения:

$$y(x) = x^\beta(\lambda x + \mu),$$

где коэффициенты λ и μ определяются из следующей системы двух алгебраических уравнений (эта система сводится к квадратному уравнению):

$$I_2\lambda + I_1\mu + 1 = 0, \quad I_1\lambda\mu + I_0\mu^2 + \mu - A = 0,$$

где $I_m = \int_a^b f(t)t^{2\beta+m} dt, \quad m = 0, 1, 2.$

3°. Существуют более сложные решения вида $y(x) = x^\beta \sum_{m=0}^n B_m x^m$, где коэффициенты B_m определяются из соответствующей системы алгебраических уравнений.

$$32. \quad y(x) + \int_a^b f(t)y(t)y(xt) dt = A \ln x + B.$$

Это уравнение имеет решения вида $y(x) = p \ln x + q$, где постоянные p и q определяются из системы двух алгебраических уравнений второго порядка.

$$33. \quad y(x) + \int_0^\infty f(t)y(t)y\left(\frac{x}{t}\right) dt = 0.$$

1°. Решение:

$$y(x) = -kx^C, \quad k = \left[\int_0^\infty f(t) dt \right]^{-1},$$

где C — произвольная постоянная.

2°. Уравнение имеет также тривиальное решение $y(x) \equiv 0$.

3°. Замена $y(x) = x^\beta w(x)$ приводит к такому же уравнению

$$w(x) + \int_0^\infty f(t)w(t)w\left(\frac{x}{t}\right) dt = 0.$$

$$34. \quad y(x) + \int_0^\infty f(t)y\left(\frac{x}{t}\right)y(t) dt = Ax^b.$$

Решения:

$$y_1(x) = \lambda_1 x^b, \quad y_2(x) = \lambda_2 x^b,$$

где λ_1 и λ_2 — корни квадратного уравнения

$$I\lambda^2 + \lambda - A = 0, \quad I = \int_0^\infty f(t) dt.$$

$$35. \quad y(x) + \int_a^b f(t)y(t)y(x + \lambda t) dt = 0, \quad \lambda > 0.$$

1°. Решения:

$$y_1(x) = -\frac{1}{I_0} \exp(-Cx), \quad y_2(x) = \frac{I_2 - I_1 x}{I_1^2 - I_0 I_2} \exp(-Cx),$$

$$I_m = \int_a^b t^m \exp[-C(\lambda + 1)t] f(t) dt, \quad m = 0, 1, 2,$$

где C — произвольная постоянная.

2°. Существуют более сложные решения вида $y(x) = \exp(-Cx) \sum_{k=0}^n A_k x^k$, где C — произвольная постоянная, а коэффициенты A_k определяются из соответствующей системы алгебраических уравнений.

3°. Уравнение имеет также тривиальное решение $y(x) \equiv 0$.

4°. Замена $y(x) = e^{\beta x} w(x)$ приводит к уравнению аналогичного вида

$$w(x) + \int_a^b g(t)w(t)w(x + \lambda t) dt = 0, \quad g(t) = e^{\beta(\lambda+1)t} f(t).$$

$$36. \quad y(x) + \int_a^b f(t)y(x + \lambda t)y(t) dt = Ae^{-\mu x}, \quad \lambda > 0.$$

1°. Решения:

$$y_1(x) = k_1 e^{-\mu x}, \quad y_2(x) = k_2 e^{-\mu x},$$

где k_1 и k_2 — корни квадратного уравнения

$$Ik^2 + k - A = 0, \quad I = \int_a^b e^{-\mu(\lambda+1)t} f(t) dt.$$

2°. Существуют более сложные решения вида $y(x) = e^{-\mu x} \sum_{m=0}^n B_m x^m$, где коэффициенты B_m определяются из соответствующей системы алгебраических уравнений.

3°. Замена $y(x) = e^{\beta x} w(x)$ приводит к уравнению такого же вида

$$w(x) + \int_a^b g(t)w(t)w(x-t) dt = Ae^{(\lambda-\beta)x}, \quad g(t) = f(t)e^{\beta(\lambda+1)t}.$$

$$37. \quad y(x) + \int_a^b f(t)y(t)y(x-t) dt = 0.$$

1°. Решения:

$$y_1(x) = -\frac{1}{I_0} \exp(Cx), \quad y_2(x) = \frac{I_2 - I_1 x}{I_1^2 - I_0 I_2} \exp(Cx), \quad I_m = \int_a^b t^m f(t) dt,$$

где C — произвольная постоянная, $m = 0, 1, 2$.

2°. Существуют более сложные решения вида $y(x) = \exp(Cx) \sum_{k=0}^n A_k x^k$, где C — произвольная постоянная, а коэффициенты A_k определяются из соответствующей системы алгебраических уравнений.

3°. Уравнение имеет также тривиальное решение $y(x) \equiv 0$.

4°. Замена $y(x) = \exp(Cx)w(x)$ приводит к уравнению такого же вида

$$w(x) + \int_a^b f(t)w(t)w(x-t) dt = 0.$$

$$38. \quad y(x) + \int_a^b f(t)y(x-t)y(t) dt = Ae^{\lambda x}.$$

1°. Решения:

$$y_1(x) = k_1 e^{\lambda x}, \quad y_2(x) = k_2 e^{\lambda x},$$

где k_1 и k_2 — корни квадратного уравнения

$$Ik^2 + k - A = 0, \quad I = \int_a^b f(t) dt.$$

2°. Замена $y(x) = e^{\beta x} w(x)$ приводит к уравнению такого же вида

$$w(x) + \int_a^b f(t)w(t)w(x-t) dt = Ae^{(\lambda-\beta)x}.$$

$$39. \quad y(x) + \int_a^b f(t)y(t)y(x-t) dt = A \operatorname{sh} \lambda x.$$

Решение:

$$y(x) = p \operatorname{sh} \lambda x + q \operatorname{ch} \lambda x. \quad (1)$$

Здесь p и q — корни алгебраической системы уравнений

$$p + I_0 pq + I_{cs}(p^2 - q^2) = A, \quad q + I_{cc}q^2 - I_{ss}p^2 = 0, \quad (2)$$

где использованы следующие обозначения:

$$I_0 = \int_a^b f(t) dt, \quad I_{cs} = \int_a^b f(t) \operatorname{ch}(\lambda t) \operatorname{sh}(\lambda t) dt, \\ I_{cc} = \int_a^b f(t) \operatorname{ch}^2(\lambda t) dt, \quad I_{ss} = \int_a^b f(t) \operatorname{sh}^2(\lambda t) dt.$$

Различным решениям системы (2) соответствуют различные решения (1) интегрального уравнения.

$$40. \quad y(x) + \int_a^b f(t)y(t)y(x-t) dt = A \operatorname{ch} \lambda x.$$

Решение:

$$y(x) = p \operatorname{sh} \lambda x + q \operatorname{ch} \lambda x. \quad (1)$$

Здесь p и q — корни алгебраической системы уравнений

$$p + I_0 pq + I_{cs}(p^2 - q^2) = 0, \quad q + I_{cc}q^2 - I_{ss}p^2 = A, \quad (2)$$

где использованы те же обозначения, что и в аналогичной системе для уравнения 6.2.39. Различным решениям системы (2) соответствуют различные решения (1) интегрального уравнения.

$$41. \quad y(x) + \int_a^b f(t)y(t)y(x-t) dt = A \sin \lambda x.$$

Решение:

$$y(x) = p \sin \lambda x + q \cos \lambda x. \quad (1)$$

Здесь p и q — корни алгебраической системы уравнений

$$p + I_0 pq + I_{cs}(p^2 + q^2) = A, \quad q + I_{cc}q^2 - I_{ss}p^2 = 0, \quad (2)$$

где использованы следующие обозначения:

$$I_0 = \int_a^b f(t) dt, \quad I_{cs} = \int_a^b f(t) \cos(\lambda t) \sin(\lambda t) dt, \\ I_{cc} = \int_a^b f(t) \cos^2(\lambda t) dt, \quad I_{ss} = \int_a^b f(t) \sin^2(\lambda t) dt.$$

Различным решениям системы (2) соответствуют различные решения (1) интегрального уравнения.

$$42. \quad y(x) + \int_a^b f(t)y(t)y(x-t) dt = A \cos \lambda x.$$

Решение:

$$y(x) = p \sin \lambda x + q \cos \lambda x. \quad (1)$$

Здесь p и q — корни алгебраической системы уравнений

$$p + I_0 pq + I_{cs}(p^2 + q^2) = 0, \quad q + I_{cc}q^2 - I_{ss}p^2 = A, \quad (2)$$

где использованы те же обозначения, что и в аналогичной системе для уравнения 6.2.41. Различным решениям системы (2) соответствуют различные решения (1) интегрального уравнения.

6.3. Уравнения со степенной нелинейностью

6.3-1. Уравнения вида $\int_a^b G(\dots) dt = F(x)$

$$1. \quad \int_a^b t^\lambda y^\mu(x) y^\beta(t) dt = f(x).$$

Решение:

$$y(x) = A[f(x)]^{\frac{1}{\mu}}, \quad A = \left\{ \int_a^b t^\lambda [f(t)]^{\frac{\beta}{\mu}} dt \right\}^{-\frac{1}{\mu+\beta}}.$$

$$2. \quad \int_a^b e^{\lambda t} y^\mu(x) y^\beta(t) dt = f(x).$$

Решение:

$$y(x) = A[f(x)]^{\frac{1}{\mu}}, \quad A = \left\{ \int_a^b e^{\lambda t} [f(t)]^{\frac{\beta}{\mu}} dt \right\}^{-\frac{1}{\mu+\beta}}.$$

$$3. \int_0^\infty f(x^a t) t^b y(x^k t) [y(t)]^s dt = Ax^c.$$

Решение:

$$y(x) = \left(\frac{A}{I}\right)^{\frac{1}{s+1}} x^\lambda, \quad \lambda = \frac{a+c+ab}{k-a-as},$$

$$I = \int_0^\infty f(t) t^\beta dt, \quad \beta = \frac{a+c+as+bk+cs}{k-a-as}.$$

6.3-2. Уравнения вида $y(x) + \int_a^b K(x, t) y^\beta(t) dt = F(x)$

$$4. y(x) + A \int_a^b t^\lambda y^\beta(t) dt = g(x).$$

Частный случай уравнения 6.8.27 при $f(t, y) = At^\lambda y^\beta$.

$$5. y(x) + A \int_a^b e^{\mu t} y^\beta(t) dt = g(x).$$

Частный случай уравнения 6.8.27 при $f(t, y) = Ae^{\mu t} y^\beta$.

$$6. y(x) + A \int_a^b e^{\lambda(x-t)} y^\beta(t) dt = g(x).$$

Частный случай уравнения 6.8.28 при $f(t, y) = Ay^\beta$.

$$7. y(x) - \int_a^b g(x) y^\beta(t) dt = 0.$$

Решение:

$$y(x) = \lambda g(x), \quad \lambda = \left[\int_a^b g^\beta(t) dt \right]^{\frac{1}{1-\beta}}.$$

При $\beta > 0$ уравнение имеет также тривиальное решение $y(x) \equiv 0$.

$$8. y(x) - \int_a^b g(x) y^\beta(t) dt = h(x).$$

Частный случай уравнения 6.8.29 при $f(t, y) = -y^\beta$.

$$9. y(x) + A \int_a^b \operatorname{ch}(\lambda x + \mu t) y^\beta(t) dt = h(x).$$

Частный случай уравнения 6.8.31 при $f(t, y) = Ay^\beta$.

$$10. y(x) + A \int_a^b \operatorname{sh}(\lambda x + \mu t) y^\beta(t) dt = h(x).$$

Частный случай уравнения 6.8.32 при $f(t, y) = Ay^\beta$.

$$11. y(x) + A \int_a^b \cos(\lambda x + \mu t) y^\beta(t) dt = h(x).$$

Частный случай уравнения 6.8.33 при $f(t, y) = Ay^\beta$.

$$12. y(x) + A \int_a^b \sin(\lambda x + \mu t) y^\beta(t) dt = h(x).$$

Частный случай уравнения 6.8.34 при $f(t, y) = Ay^\beta$.

$$13. \quad y(x) + \int_0^\infty f\left(\frac{t}{x}\right) \sqrt{y(t)} dt = Ax^2.$$

Решения: $y_k(x) = \beta_k^2 x^2$, где β_k ($k = 1, 2$) — корни квадратных уравнений:

$$\beta^2 \pm I\beta - A = 0, \quad I = \int_0^\infty z f(z) dz.$$

$$14. \quad y(x) - \int_0^\infty t^\lambda f\left(\frac{t}{x}\right) [y(t)]^\beta dt = 0, \quad \beta \neq 1.$$

Решение:

$$y(x) = Ax^{\frac{1+\lambda}{1-\beta}}, \quad A^{1-\beta} = \int_0^\infty z^{\frac{\lambda+\beta}{1-\beta}} f(z) dz.$$

$$15. \quad y(x) - \int_{-\infty}^\infty e^{\lambda t} f(ax + bt) [y(t)]^\beta dt = 0, \quad b \neq 0, \quad a\beta \neq -b.$$

Решение:

$$y(x) = A \exp\left(-\frac{a\lambda}{a\beta + b} x\right), \quad A^{1-\beta} = \int_{-\infty}^\infty \exp\left(\frac{\lambda b}{a\beta + b} z\right) f(bz) dz.$$

6.3-3. Уравнения вида $y(x) + \int_a^b G(\dots) dt = F(x)$

$$16. \quad y(x) + A \int_a^b y^\beta(x) y^\mu(t) dt = f(x).$$

Решение в неявном виде:

$$y(x) + A\lambda y^\beta(x) - f(x) = 0, \tag{1}$$

где λ определяется путем решения алгебраического (или трансцендентного) уравнения

$$\lambda = \int_a^b y^\mu(t) dt. \tag{2}$$

В правую часть (2) следует подставить функцию $y(x) = y(x, \lambda)$, которая находится путем разрешения (1). Разным корням уравнения (2) соответствуют разные решения исходного интегрального уравнения.

$$17. \quad y(x) + \int_a^b g(t) y(x) y^\mu(t) dt = f(x).$$

Решение: $y(x) = \lambda f(x)$, где λ определяется путем решения алгебраического (или трансцендентного) уравнения

$$I\lambda^{\mu+1} + \lambda - 1 = 0, \quad I = \int_a^b g(t) f^\mu(t) dt.$$

$$18. \quad y(x) + \int_a^b g(x) y(x) y^\mu(t) dt = f(x).$$

Решение:

$$y(x) = \frac{f(x)}{1 + \lambda g(x)},$$

где λ является корнем алгебраического (или трансцендентного) уравнения

$$\lambda - \int_a^b \frac{f^\mu(t) dt}{[1 + \lambda g(t)]^\mu} = 0.$$

Разным корням отвечают разные решения интегрального уравнения.

$$19. \quad y(x) + \int_a^b [g_1(t)y^2(x) + g_2(x)y^\mu(t)] dt = f(x).$$

Решение в неявном виде:

$$y(x) + Iy^2(x) + \lambda g_2(x) - f(x) = 0, \quad I = \int_a^b g_1(t) dt, \quad (1)$$

где λ определяется путем решения алгебраического (или трансцендентного) уравнения

$$\lambda = \int_a^b y^\mu(t) dt. \quad (2)$$

В правую часть (2) следует подставить функцию $y(x) = y(x, \lambda)$, которая получается путем разрешения квадратного уравнения (1).

$$20. \quad y(x) + \int_a^b [g_1(x)h_1(t)y^k(x)y^s(t) + g_2(x)h_2(t)y^p(x)y^q(t)] dt = f(x).$$

Частный случай уравнения 6.8.44.

$$21. \quad y(x) + A \int_a^b y(xt)y^\beta(t) dt = 0.$$

Частный случай уравнения 6.8.45 при $f(t, y) = Ay^\beta$.

6.4. Уравнения с экспоненциальными нелинейностями

6.4-1. Подынтегральные выражения с нелинейностью вида $\exp[\beta y(t)]$

$$1. \quad y(x) + A \int_a^b \exp[\beta y(t)] dt = g(x).$$

Частный случай уравнения 6.8.27 при $f(t, y) = A \exp(\beta y)$.

$$2. \quad y(x) + A \int_a^b t^\mu \exp[\beta y(t)] dt = g(x).$$

Частный случай уравнения 6.8.27 при $f(t, y) = At^\mu \exp(\beta y)$.

$$3. \quad y(x) + A \int_a^b \exp[\mu t + \beta y(t)] dt = g(x).$$

Частный случай уравнения 6.8.27 при $f(t, y) = A \exp(\mu t) \exp(\beta y)$.

$$4. \quad y(x) + A \int_a^b \exp[\lambda(x - t) + \beta y(t)] dt = g(x).$$

Частный случай уравнения 6.8.28 при $f(t, y) = A \exp(\beta y)$.

$$5. \quad y(x) + \int_a^b g(x) \exp[\beta y(t)] dt = h(x).$$

Частный случай уравнения 6.8.29 при $f(t, y) = \exp(\beta y)$.

$$6. \quad y(x) + A \int_a^b \operatorname{ch}(\lambda x + \mu t) \exp[\beta y(t)] dt = h(x).$$

Частный случай уравнения 6.8.31 при $f(t, y) = A \exp(\beta y)$.

$$7. \quad y(x) + A \int_a^b \operatorname{sh}(\lambda x + \mu t) \exp[\beta y(t)] dt = h(x).$$

Частный случай уравнения 6.8.32 при $f(t, y) = A \exp(\beta y)$.

$$8. \quad y(x) + A \int_a^b \cos(\lambda x + \mu t) \exp[\beta y(t)] dt = h(x).$$

Частный случай уравнения 6.8.33 при $f(t, y) = A \exp(\beta y)$.

$$9. \quad y(x) + A \int_a^b \sin(\lambda x + \mu t) \exp[\beta y(t)] dt = h(x).$$

Частный случай уравнения 6.8.34 при $f(t, y) = A \exp(\beta y)$.

6.4-2. Другие подынтегральные выражения

$$10. \quad y(x) + A \int_a^b \exp[\beta y(x) + \gamma y(t)] dt = h(x).$$

Частный случай уравнения 6.8.43 при $g(x, y) = A \exp(\beta y)$, $f(t, y) = \exp(\gamma y)$.

$$11. \quad y(x) + A \int_a^b y(xt) \exp[\beta y(t)] dt = 0.$$

Частный случай уравнения 6.8.45 при $f(t, y) = A \exp(\beta y)$.

6.5. Уравнения с гиперболическими нелинейностями

6.5-1. Подынтегральные выражения с нелинейностью вида $\text{ch}[\beta y(t)]$

$$1. \quad y(x) + A \int_a^b \text{ch}[\beta y(t)] dt = g(x).$$

Частный случай уравнения 6.8.27 при $f(t, y) = A \text{ch}(\beta y)$.

$$2. \quad y(x) + A \int_a^b t^\mu \text{ch}^k[\beta y(t)] dt = g(x).$$

Частный случай уравнения 6.8.27 при $f(t, y) = A t^\mu \text{ch}^k(\beta y)$.

$$3. \quad y(x) + A \int_a^b \text{ch}(\mu t) \text{ch}[\beta y(t)] dt = g(x).$$

Частный случай уравнения 6.8.27 при $f(t, y) = A \text{ch}(\mu t) \text{ch}(\beta y)$.

$$4. \quad y(x) + A \int_a^b e^{\lambda(x-t)} \text{ch}[\beta y(t)] dt = g(x).$$

Частный случай уравнения 6.8.28 при $f(t, y) = A \text{ch}(\beta y)$.

$$5. \quad y(x) + \int_a^b g(x) \text{ch}[\beta y(t)] dt = h(x).$$

Частный случай уравнения 6.8.29 при $f(t, y) = \text{ch}(\beta y)$.

$$6. \quad y(x) + A \int_a^b \text{ch}(\lambda x + \mu t) \text{ch}[\beta y(t)] dt = h(x).$$

Частный случай уравнения 6.8.31 при $f(t, y) = A \text{ch}(\beta y)$.

$$7. \quad y(x) + A \int_a^b \text{sh}(\lambda x + \mu t) \text{ch}[\beta y(t)] dt = h(x).$$

Частный случай уравнения 6.8.32 при $f(t, y) = A \text{ch}(\beta y)$.

$$8. \quad y(x) + A \int_a^b \cos(\lambda x + \mu t) \operatorname{ch}[\beta y(t)] dt = h(x).$$

Частный случай уравнения 6.8.33 при $f(t, y) = A \operatorname{ch}(\beta y)$.

$$9. \quad y(x) + A \int_a^b \sin(\lambda x + \mu t) \operatorname{ch}[\beta y(t)] dt = h(x).$$

Частный случай уравнения 6.8.34 при $f(t, y) = A \operatorname{ch}(\beta y)$.

6.5-2. Подынтегральные выражения с нелинейностью вида $\operatorname{sh}[\beta y(t)]$

$$10. \quad y(x) + A \int_a^b \operatorname{sh}[\beta y(t)] dt = g(x).$$

Частный случай уравнения 6.8.27 при $f(t, y) = A \operatorname{sh}(\beta y)$.

$$11. \quad y(x) + A \int_a^b t^\mu \operatorname{sh}^k[\beta y(t)] dt = g(x).$$

Частный случай уравнения 6.8.27 при $f(t, y) = A t^\mu \operatorname{sh}^k(\beta y)$.

$$12. \quad y(x) + A \int_a^b \operatorname{sh}(\mu t) \operatorname{sh}[\beta y(t)] dt = g(x).$$

Частный случай уравнения 6.8.27 при $f(t, y) = A \operatorname{sh}(\mu t) \operatorname{sh}(\beta y)$.

$$13. \quad y(x) + A \int_a^b e^{\lambda(x-t)} \operatorname{sh}[\beta y(t)] dt = g(x).$$

Частный случай уравнения 6.8.28 при $f(t, y) = A \operatorname{sh}(\beta y)$.

$$14. \quad y(x) + \int_a^b g(x) \operatorname{sh}[\beta y(t)] dt = h(x).$$

Частный случай уравнения 6.8.29 при $f(t, y) = \operatorname{sh}(\beta y)$.

$$15. \quad y(x) + A \int_a^b \operatorname{ch}(\lambda x + \mu t) \operatorname{sh}[\beta y(t)] dt = h(x).$$

Частный случай уравнения 6.8.31 при $f(t, y) = A \operatorname{sh}(\beta y)$.

$$16. \quad y(x) + A \int_a^b \operatorname{sh}(\lambda x + \mu t) \operatorname{sh}[\beta y(t)] dt = h(x).$$

Частный случай уравнения 6.8.32 при $f(t, y) = A \operatorname{sh}(\beta y)$.

$$17. \quad y(x) + A \int_a^b \cos(\lambda x + \mu t) \operatorname{sh}[\beta y(t)] dt = h(x).$$

Частный случай уравнения 6.8.33 при $f(t, y) = A \operatorname{sh}(\beta y)$.

$$18. \quad y(x) + A \int_a^b \sin(\lambda x + \mu t) \operatorname{sh}[\beta y(t)] dt = h(x).$$

Частный случай уравнения 6.8.34 при $f(t, y) = A \operatorname{sh}(\beta y)$.

6.5-3. Подынтегральные выражения с нелинейностью вида $\operatorname{th}[\beta y(t)]$

$$19. \quad y(x) + A \int_a^b \operatorname{th}[\beta y(t)] dt = g(x).$$

Частный случай уравнения 6.8.27 при $f(t, y) = A \operatorname{th}(\beta y)$.

$$20. \quad y(x) + A \int_a^b t^\mu \operatorname{th}^k[\beta y(t)] dt = g(x).$$

Частный случай уравнения 6.8.27 при $f(t, y) = At^\mu \operatorname{th}^k(\beta y)$.

$$21. \quad y(x) + A \int_a^b \operatorname{th}(\mu t) \operatorname{th}[\beta y(t)] dt = g(x).$$

Частный случай уравнения 6.8.27 при $f(t, y) = A \operatorname{th}(\mu t) \operatorname{th}(\beta y)$.

$$22. \quad y(x) + A \int_a^b e^{\lambda(x-t)} \operatorname{th}[\beta y(t)] dt = g(x).$$

Частный случай уравнения 6.8.28 при $f(t, y) = A \operatorname{th}(\beta y)$.

$$23. \quad y(x) + \int_a^b g(x) \operatorname{th}[\beta y(t)] dt = h(x).$$

Частный случай уравнения 6.8.29 при $f(t, y) = \operatorname{th}(\beta y)$.

$$24. \quad y(x) + A \int_a^b \operatorname{ch}(\lambda x + \mu t) \operatorname{th}[\beta y(t)] dt = h(x).$$

Частный случай уравнения 6.8.31 при $f(t, y) = A \operatorname{th}(\beta y)$.

$$25. \quad y(x) + A \int_a^b \operatorname{sh}(\lambda x + \mu t) \operatorname{th}[\beta y(t)] dt = h(x).$$

Частный случай уравнения 6.8.32 при $f(t, y) = A \operatorname{th}(\beta y)$.

$$26. \quad y(x) + A \int_a^b \cos(\lambda x + \mu t) \operatorname{th}[\beta y(t)] dt = h(x).$$

Частный случай уравнения 6.8.33 при $f(t, y) = A \operatorname{th}(\beta y)$.

$$27. \quad y(x) + A \int_a^b \sin(\lambda x + \mu t) \operatorname{th}[\beta y(t)] dt = h(x).$$

Частный случай уравнения 6.8.34 при $f(t, y) = A \operatorname{th}(\beta y)$.

6.5-4. Подынтегральные выражения с нелинейностью вида $\operatorname{cth}[\beta y(t)]$

$$28. \quad y(x) + A \int_a^b \operatorname{cth}[\beta y(t)] dt = g(x).$$

Частный случай уравнения 6.8.27 при $f(t, y) = A \operatorname{cth}(\beta y)$.

$$29. \quad y(x) + A \int_a^b t^\mu \operatorname{cth}^k[\beta y(t)] dt = g(x).$$

Частный случай уравнения 6.8.27 при $f(t, y) = At^\mu \operatorname{cth}^k(\beta y)$.

$$30. \quad y(x) + A \int_a^b \operatorname{cth}(\mu t) \operatorname{cth}[\beta y(t)] dt = g(x).$$

Частный случай уравнения 6.8.27 при $f(t, y) = A \operatorname{cth}(\mu t) \operatorname{cth}(\beta y)$.

$$31. \quad y(x) + A \int_a^b e^{\lambda(x-t)} \operatorname{cth}[\beta y(t)] dt = g(x).$$

Частный случай уравнения 6.8.28 при $f(t, y) = A \operatorname{cth}(\beta y)$.

$$32. \quad y(x) + \int_a^b g(x) \operatorname{cth}[\beta y(t)] dt = h(x).$$

Частный случай уравнения 6.8.29 при $f(t, y) = \operatorname{cth}(\beta y)$.

$$33. \quad y(x) + A \int_a^b \operatorname{ch}(\lambda x + \mu t) \operatorname{cth}[\beta y(t)] dt = h(x).$$

Частный случай уравнения 6.8.31 при $f(t, y) = A \operatorname{cth}(\beta y)$.

$$34. \quad y(x) + A \int_a^b \operatorname{sh}(\lambda x + \mu t) \operatorname{cth}[\beta y(t)] dt = h(x).$$

Частный случай уравнения 6.8.32 при $f(t, y) = A \operatorname{cth}(\beta y)$.

$$35. \quad y(x) + A \int_a^b \cos(\lambda x + \mu t) \operatorname{cth}[\beta y(t)] dt = h(x).$$

Частный случай уравнения 6.8.33 при $f(t, y) = A \operatorname{cth}(\beta y)$.

$$36. \quad y(x) + A \int_a^b \sin(\lambda x + \mu t) \operatorname{cth}[\beta y(t)] dt = h(x).$$

Частный случай уравнения 6.8.34 при $f(t, y) = A \operatorname{cth}(\beta y)$.

6.5-5. Другие подынтегральные выражения

$$37. \quad y(x) + A \int_a^b \operatorname{ch}[\beta y(x)] \operatorname{ch}[\gamma y(t)] dt = h(x).$$

Частный случай уравнения 6.8.43 при $g(x, y) = A \operatorname{ch}(\beta y)$, $f(t, y) = \operatorname{ch}(\gamma y)$.

$$38. \quad y(x) + A \int_a^b y(xt) \operatorname{ch}[\beta y(t)] dt = 0.$$

Частный случай уравнения 6.8.45 при $f(t, y) = A \operatorname{ch}(\beta y)$.

$$39. \quad y(x) + A \int_a^b \operatorname{sh}[\beta y(x)] \operatorname{sh}[\gamma y(t)] dt = h(x).$$

Частный случай уравнения 6.8.43 при $g(x, y) = A \operatorname{sh}(\beta y)$, $f(t, y) = \operatorname{sh}(\gamma y)$.

$$40. \quad y(x) + A \int_a^b y(xt) \operatorname{sh}[\beta y(t)] dt = 0.$$

Частный случай уравнения 6.8.45 при $f(t, y) = A \operatorname{sh}(\beta y)$.

$$41. \quad y(x) + A \int_a^b \operatorname{th}[\beta y(x)] \operatorname{th}[\gamma y(t)] dt = h(x).$$

Частный случай уравнения 6.8.43 при $g(x, y) = A \operatorname{th}(\beta y)$, $f(t, y) = \operatorname{th}(\gamma y)$.

$$42. \quad y(x) + A \int_a^b y(xt) \operatorname{th}[\beta y(t)] dt = 0.$$

Частный случай уравнения 6.8.45 при $f(t, y) = A \operatorname{th}(\beta y)$.

$$43. \quad y(x) + A \int_a^b \operatorname{cth}[\beta y(x)] \operatorname{cth}[\gamma y(t)] dt = h(x).$$

Частный случай уравнения 6.8.43 при $g(x, y) = A \operatorname{cth}(\beta y)$, $f(t, y) = \operatorname{cth}(\gamma y)$.

$$44. \quad y(x) + A \int_a^b y(xt) \operatorname{cth}[\beta y(t)] dt = 0.$$

Частный случай уравнения 6.8.45 при $f(t, y) = A \operatorname{cth}(\beta y)$.

6.6. Уравнения с логарифмическими нелинейностями**6.6-1. Подынтегральные выражения с нелинейностью вида $\ln[\beta y(t)]$**

$$1. \quad y(x) + A \int_a^b \ln[\beta y(t)] dt = g(x).$$

Частный случай уравнения 6.8.27 при $f(t, y) = A \ln(\beta y)$.

$$2. \quad y(x) + A \int_a^b t^\mu \ln^k[\beta y(t)] dt = g(x).$$

Частный случай уравнения 6.8.27 при $f(t, y) = At^\mu \ln^k(\beta y)$.

$$3. \quad y(x) + A \int_a^b \ln(\mu t) \ln[\beta y(t)] dt = g(x).$$

Частный случай уравнения 6.8.27 при $f(t, y) = A \ln(\mu t) \ln(\beta y)$.

$$4. \quad y(x) + A \int_a^b e^{\lambda(x-t)} \ln[\beta y(t)] dt = g(x).$$

Частный случай уравнения 6.8.28 при $f(t, y) = A \ln(\beta y)$.

$$5. \quad y(x) + \int_a^b g(x) \ln[\beta y(t)] dt = h(x).$$

Частный случай уравнения 6.8.29 при $f(t, y) = \ln(\beta y)$.

$$6. \quad y(x) + A \int_a^b \operatorname{ch}(\lambda x + \mu t) \ln[\beta y(t)] dt = h(x).$$

Частный случай уравнения 6.8.31 при $f(t, y) = A \ln(\beta y)$.

$$7. \quad y(x) + A \int_a^b \operatorname{sh}(\lambda x + \mu t) \ln[\beta y(t)] dt = h(x).$$

Частный случай уравнения 6.8.32 при $f(t, y) = A \ln(\beta y)$.

$$8. \quad y(x) + A \int_a^b \cos(\lambda x + \mu t) \ln[\beta y(t)] dt = h(x).$$

Частный случай уравнения 6.8.33 при $f(t, y) = A \ln(\beta y)$.

$$9. \quad y(x) + A \int_a^b \sin(\lambda x + \mu t) \ln[\beta y(t)] dt = h(x).$$

Частный случай уравнения 6.8.34 при $f(t, y) = A \ln(\beta y)$.

6.6-2. Другие подынтегральные выражения

$$10. \quad y(x) + A \int_a^b \ln[\beta y(x)] \ln[\gamma y(t)] dt = h(x).$$

Частный случай уравнения 6.8.43 при $g(x, y) = A \ln(\beta y)$, $f(t, y) = \ln(\gamma y)$.

$$11. \quad y(x) + A \int_a^b y(xt) \ln[\beta y(t)] dt = 0.$$

Частный случай уравнения 6.8.45 при $f(t, y) = A \ln(\beta y)$.

6.7. Уравнения с тригонометрическими нелинейностями

6.7-1. Подынтегральные выражения с нелинейностью вида $\cos[\beta y(t)]$

$$1. \quad y(x) + A \int_a^b \cos[\beta y(t)] dt = g(x).$$

Частный случай уравнения 6.8.27 при $f(t, y) = A \cos(\beta y)$.

$$2. \quad y(x) + A \int_a^b t^\mu \cos^k[\beta y(t)] dt = g(x).$$

Частный случай уравнения 6.8.27 при $f(t, y) = At^\mu \cos^k(\beta y)$.

$$3. \quad y(x) + A \int_a^b \cos(\mu t) \cos[\beta y(t)] dt = g(x).$$

Частный случай уравнения 6.8.27 при $f(t, y) = A \cos(\mu t) \cos(\beta y)$.

$$4. \quad y(x) + A \int_a^b e^{\lambda(x-t)} \cos[\beta y(t)] dt = g(x).$$

Частный случай уравнения 6.8.28 при $f(t, y) = A \cos(\beta y)$.

$$5. \quad y(x) + \int_a^b g(x) \cos[\beta y(t)] dt = h(x).$$

Частный случай уравнения 6.8.29 при $f(t, y) = \cos(\beta y)$.

$$6. \quad y(x) + A \int_a^b \operatorname{ch}(\lambda x + \mu t) \cos[\beta y(t)] dt = h(x).$$

Частный случай уравнения 6.8.31 при $f(t, y) = A \cos(\beta y)$.

$$7. \quad y(x) + A \int_a^b \operatorname{sh}(\lambda x + \mu t) \cos[\beta y(t)] dt = h(x).$$

Частный случай уравнения 6.8.32 при $f(t, y) = A \cos(\beta y)$.

$$8. \quad y(x) + A \int_a^b \cos(\lambda x + \mu t) \cos[\beta y(t)] dt = h(x).$$

Частный случай уравнения 6.8.33 при $f(t, y) = A \cos(\beta y)$.

$$9. \quad y(x) + A \int_a^b \sin(\lambda x + \mu t) \cos[\beta y(t)] dt = h(x).$$

Частный случай уравнения 6.8.34 при $f(t, y) = A \cos(\beta y)$.

6.7-2. Подынтегральные выражения с нелинейностью вида $\sin[\beta y(t)]$

$$10. \quad y(x) + A \int_a^b \sin[\beta y(t)] dt = g(x).$$

Частный случай уравнения 6.8.27 при $f(t, y) = A \sin(\beta y)$.

$$11. \quad y(x) + A \int_a^b t^\mu \sin^k[\beta y(t)] dt = g(x).$$

Частный случай уравнения 6.8.27 при $f(t, y) = At^\mu \sin^k(\beta y)$.

$$12. \quad y(x) + A \int_a^b \sin(\mu t) \sin[\beta y(t)] dt = g(x).$$

Частный случай уравнения 6.8.27 при $f(t, y) = A \sin(\mu t) \sin(\beta y)$.

$$13. \quad y(x) + A \int_a^b e^{\lambda(x-t)} \sin[\beta y(t)] dt = g(x).$$

Частный случай уравнения 6.8.28 при $f(t, y) = A \sin(\beta y)$.

$$14. \quad y(x) + \int_a^b g(x) \sin[\beta y(t)] dt = h(x).$$

Частный случай уравнения 6.8.29 при $f(t, y) = \sin(\beta y)$.

$$15. \quad y(x) + A \int_a^b \operatorname{ch}(\lambda x + \mu t) \sin[\beta y(t)] dt = h(x).$$

Частный случай уравнения 6.8.31 при $f(t, y) = A \sin(\beta y)$.

$$16. \quad y(x) + A \int_a^b \operatorname{sh}(\lambda x + \mu t) \sin[\beta y(t)] dt = h(x).$$

Частный случай уравнения 6.8.32 при $f(t, y) = A \sin(\beta y)$.

$$17. \quad y(x) + A \int_a^b \cos(\lambda x + \mu t) \sin[\beta y(t)] dt = h(x).$$

Частный случай уравнения 6.8.33 при $f(t, y) = A \sin(\beta y)$.

$$18. \quad y(x) + A \int_a^b \sin(\lambda x + \mu t) \sin[\beta y(t)] dt = h(x).$$

Частный случай уравнения 6.8.34 при $f(t, y) = A \sin(\beta y)$.

6.7-3. Подынтегральные выражения с нелинейностью вида $\operatorname{tg}[\beta y(t)]$

$$19. \quad y(x) + A \int_a^b \operatorname{tg}[\beta y(t)] dt = g(x).$$

Частный случай уравнения 6.8.27 при $f(t, y) = A \operatorname{tg}(\beta y)$.

$$20. \quad y(x) + A \int_a^b t^\mu \operatorname{tg}^k[\beta y(t)] dt = g(x).$$

Частный случай уравнения 6.8.27 при $f(t, y) = A t^\mu \operatorname{tg}^k(\beta y)$.

$$21. \quad y(x) + A \int_a^b \operatorname{tg}(\mu t) \operatorname{tg}[\beta y(t)] dt = g(x).$$

Частный случай уравнения 6.8.27 при $f(t, y) = A \operatorname{tg}(\mu t) \operatorname{tg}(\beta y)$.

$$22. \quad y(x) + A \int_a^b e^{\lambda(x-t)} \operatorname{tg}[\beta y(t)] dt = g(x).$$

Частный случай уравнения 6.8.28 при $f(t, y) = A \operatorname{tg}(\beta y)$.

$$23. \quad y(x) + \int_a^b g(x) \operatorname{tg}[\beta y(t)] dt = h(x).$$

Частный случай уравнения 6.8.29 при $f(t, y) = \operatorname{tg}(\beta y)$.

$$24. \quad y(x) + A \int_a^b \operatorname{ch}(\lambda x + \mu t) \operatorname{tg}[\beta y(t)] dt = h(x).$$

Частный случай уравнения 6.8.31 при $f(t, y) = A \operatorname{tg}(\beta y)$.

$$25. \quad y(x) + A \int_a^b \operatorname{sh}(\lambda x + \mu t) \operatorname{tg}[\beta y(t)] dt = h(x).$$

Частный случай уравнения 6.8.32 при $f(t, y) = A \operatorname{tg}(\beta y)$.

$$26. \quad y(x) + A \int_a^b \cos(\lambda x + \mu t) \operatorname{tg}[\beta y(t)] dt = h(x).$$

Частный случай уравнения 6.8.33 при $f(t, y) = A \operatorname{tg}(\beta y)$.

$$27. \quad y(x) + A \int_a^b \sin(\lambda x + \mu t) \operatorname{tg}[\beta y(t)] dt = h(x).$$

Частный случай уравнения 6.8.34 при $f(t, y) = A \operatorname{tg}(\beta y)$.

6.7-4. Подынтегральные выражения с нелинейностью вида $\operatorname{ctg}[\beta y(t)]$

$$28. \quad y(x) + A \int_a^b \operatorname{ctg}[\beta y(t)] dt = g(x).$$

Частный случай уравнения 6.8.27 при $f(t, y) = A \operatorname{ctg}(\beta y)$.

$$29. \quad y(x) + A \int_a^b t^\mu \operatorname{ctg}^k[\beta y(t)] dt = g(x).$$

Частный случай уравнения 6.8.27 при $f(t, y) = A t^\mu \operatorname{ctg}^k(\beta y)$.

$$30. \quad y(x) + A \int_a^b \operatorname{ctg}(\mu t) \operatorname{ctg}[\beta y(t)] dt = g(x).$$

Частный случай уравнения 6.8.27 при $f(t, y) = A \operatorname{ctg}(\mu t) \operatorname{ctg}(\beta y)$.

$$31. \quad y(x) + A \int_a^b e^{\lambda(x-t)} \operatorname{ctg}[\beta y(t)] dt = g(x).$$

Частный случай уравнения 6.8.28 при $f(t, y) = A \operatorname{ctg}(\beta y)$.

$$32. \quad y(x) + \int_a^b g(x) \operatorname{ctg}[\beta y(t)] dt = h(x).$$

Частный случай уравнения 6.8.29 при $f(t, y) = \operatorname{ctg}(\beta y)$.

$$33. \quad y(x) + A \int_a^b \operatorname{ch}(\lambda x + \mu t) \operatorname{ctg}[\beta y(t)] dt = h(x).$$

Частный случай уравнения 6.8.31 при $f(t, y) = A \operatorname{ctg}(\beta y)$.

$$34. \quad y(x) + A \int_a^b \operatorname{sh}(\lambda x + \mu t) \operatorname{ctg}[\beta y(t)] dt = h(x).$$

Частный случай уравнения 6.8.32 при $f(t, y) = A \operatorname{ctg}(\beta y)$.

$$35. \quad y(x) + A \int_a^b \cos(\lambda x + \mu t) \operatorname{ctg}[\beta y(t)] dt = h(x).$$

Частный случай уравнения 6.8.33 при $f(t, y) = A \operatorname{ctg}(\beta y)$.

$$36. \quad y(x) + A \int_a^b \sin(\lambda x + \mu t) \operatorname{ctg}[\beta y(t)] dt = h(x).$$

Частный случай уравнения 6.8.34 при $f(t, y) = A \operatorname{ctg}(\beta y)$.

6.7-5. Другие подынтегральные выражения

$$37. \quad y(x) + A \int_a^b \cos[\beta y(x)] \cos[\gamma y(t)] dt = h(x).$$

Частный случай уравнения 6.8.43 при $g(x, y) = A \cos(\beta y)$, $f(t, y) = \cos(\gamma y)$.

$$38. \quad y(x) + A \int_a^b y(xt) \cos[\beta y(t)] dt = 0.$$

Частный случай уравнения 6.8.45 при $f(t, y) = A \cos(\beta y)$.

$$39. \quad y(x) + A \int_a^b \sin[\beta y(x)] \sin[\gamma y(t)] dt = h(x).$$

Частный случай уравнения 6.8.43 при $g(x, y) = A \sin(\beta y)$, $f(t, y) = \sin(\gamma y)$.

$$40. \quad y(x) + A \int_a^b y(xt) \sin[\beta y(t)] dt = 0.$$

Частный случай уравнения 6.8.45 при $f(t, y) = A \sin(\beta y)$.

$$41. \quad y(x) + A \int_a^b \operatorname{tg}[\beta y(x)] \operatorname{tg}[\gamma y(t)] dt = h(x).$$

Частный случай уравнения 6.8.43 при $g(x, y) = A \operatorname{tg}(\beta y)$, $f(t, y) = \operatorname{tg}(\gamma y)$.

$$42. \quad y(x) + A \int_a^b y(xt) \operatorname{tg}[\beta y(t)] dt = 0.$$

Частный случай уравнения 6.8.45 при $f(t, y) = A \operatorname{tg}(\beta y)$.

$$43. \quad y(x) + A \int_a^b \operatorname{ctg}[\beta y(x)] \operatorname{ctg}[\gamma y(t)] dt = h(x).$$

Частный случай уравнения 6.8.43 при $g(x, y) = A \operatorname{ctg}(\beta y)$, $f(t, y) = \operatorname{ctg}(\gamma y)$.

$$44. \quad y(x) + A \int_a^b y(xt) \operatorname{ctg}[\beta y(t)] dt = 0.$$

Частный случай уравнения 6.8.45 при $f(t, y) = A \operatorname{ctg}(\beta y)$.

6.8. Уравнения с нелинейностями общего вида

6.8-1. Уравнения вида $\int_a^b G(\dots) dt = F(x)$

$$1. \quad \int_a^b y(x) f(t, y(t)) dt = g(x).$$

Решение: $y(x) = \lambda g(x)$, где λ определяется из следующего алгебраического (или трансцендентного) уравнения: $\lambda \int_a^b f(t, \lambda g(t)) dt = 1$.

$$2. \quad \int_a^b y^k(x) f(t, y(t)) dt = g(x).$$

Решение: $y(x) = \lambda [g(x)]^{1/k}$, где λ определяется из следующего алгебраического (или трансцендентного) уравнения: $\lambda^k \int_a^b f(t, \lambda g^{1/k}(t)) dt = 1$.

$$3. \int_a^b \varphi(y(x)) f(t, y(t)) dt = g(x).$$

Решение в неявном виде:

$$\lambda \varphi(y(x)) - g(x) = 0, \quad (1)$$

где λ определяется из алгебраического (или трансцендентного) уравнения

$$\lambda - F(\lambda) = 0, \quad F(\lambda) = \int_a^b f(t, y(t)) dt. \quad (2)$$

В уравнение (2) следует подставить функцию $y(x) = y(x, \lambda)$, которая получается путем разрешения (1).

Число решений интегрального уравнения определяется числом решений, полученных из (1) и (2).

$$4. \int_a^b y(xt) f(t, y(t)) dt = A.$$

1°. Решения: $y(x) = \lambda_k$, где λ_k — корни следующего алгебраического (или трансцендентного) уравнения: $\lambda \int_a^b f(t, \lambda) dt = A$.

2°. Решения: $y(x) = px + q$, где p и q определяются из системы алгебраических (или трансцендентных) уравнений

$$\int_a^b t f(t, pt + q) dt = 0, \quad q \int_a^b f(t, pt + q) dt = A.$$

При $f(t, y(t)) = \bar{f}(t)y(t)$ решения этой системы см. в 6.2.2.

3°. Интегральное уравнение может иметь также и другие решения полиномиального вида $y(x) = \sum_{k=0}^n B_k x^k$, где постоянные B_k определяются из соответствующей системы алгебраических (или трансцендентных) уравнений.

4°. Интегральное уравнение может иметь решения логарифмического вида, аналогичные указанным в п. 3° для уравнения 6.2.2.

$$5. \int_a^b y(xt) f(t, y(t)) dt = Ax + B.$$

1°. Решение:

$$y(x) = px + q, \quad (1)$$

где p и q определяются из системы алгебраических (или трансцендентных) уравнений

$$p \int_a^b t f(t, pt + q) dt - A = 0, \quad q \int_a^b f(t, pt + q) dt - B = 0. \quad (2)$$

Различным решениям системы (2) соответствуют различные решения (1) интегрального уравнения.

2°. Интегральное уравнение может иметь также и другие решения полиномиального вида $y(x) = \sum_{k=0}^n B_k x^k$, где постоянные B_k определяются из соответствующей системы алгебраических (или трансцендентных) уравнений.

$$6. \int_a^b y(xt) f(t, y(t)) dt = Ax^\beta.$$

Решение:

$$y(x) = kx^\beta, \quad (1)$$

где k — корень алгебраического (или трансцендентного) уравнения

$$kF(k) - A = 0, \quad F(k) = \int_a^b t^\beta f(t, kt^\beta) dt. \quad (2)$$

Каждому корню k_n уравнения (2) отвечает соответствующее решение $y_n = y_n(x)$ нелинейного интегрального уравнения, которое находится по формуле (1).

$$7. \int_a^b y(xt) f(t, y(t)) dt = A \ln x + B.$$

Решение:

$$y(x) = p \ln x + q, \quad (1)$$

где p и q определяются из системы алгебраических (или трансцендентных) уравнений

$$p \int_a^b f(t, p \ln t + q) dt - A = 0, \quad \int_a^b (p \ln t + q) f(t, p \ln t + q) dt - B = 0. \quad (2)$$

Различным решениям системы (2) соответствуют различные решения (1) интегрального уравнения.

$$8. \int_a^b y(xt) f(t, y(t)) dt = Ax^\beta \ln x.$$

Это уравнение имеет решения вида $y(x) = px^\beta \ln x + qx^\beta$, где p и q — некоторые постоянные.

$$9. \int_a^b y(xt) f(t, y(t)) dt = A \cos(\beta \ln x).$$

Это уравнение имеет решения вида $y(x) = p \cos(\beta \ln x) + q \sin(\beta \ln x)$, где p и q — некоторые постоянные.

$$10. \int_a^b y(xt) f(t, y(t)) dt = A \sin(\beta \ln x).$$

Это уравнение имеет решения вида $y(x) = p \cos(\beta \ln x) + q \sin(\beta \ln x)$, где p и q — некоторые постоянные.

$$11. \int_a^b y(xt) f(t, y(t)) dt = Ax^\beta \cos(\beta \ln x) + Bx^\beta \sin(\beta \ln x).$$

Это уравнение имеет решения вида $y(x) = px^\beta \cos(\beta \ln x) + qx^\beta \sin(\beta \ln x)$, где p и q — некоторые постоянные.

$$12. \int_a^b y(x + \beta t) f(t, y(t)) dt = Ax + B, \quad \beta > 0.$$

Решение:

$$y(x) = px + q, \quad (1)$$

где p и q определяются из системы алгебраических (или трансцендентных) уравнений

$$p \int_a^b f(t, pt + q) dt - A = 0, \quad \int_a^b (\beta pt + q) f(t, pt + q) dt - B = 0. \quad (2)$$

Различным решениям системы (2) соответствуют различные решения (1) интегрального уравнения.

$$13. \int_a^b y(x + \beta t) f(t, y(t)) dt = Ae^{-\lambda x}, \quad \beta > 0.$$

Решения:

$$y_n(x) = k_n e^{-\lambda x},$$

где k_n — корни алгебраического (или трансцендентного) уравнения

$$kF(k) - A = 0, \quad F(k) = \int_a^b f(t, ke^{-\lambda t}) e^{-\beta \lambda t} dt.$$

$$14. \int_a^b y(x + \beta t) f(t, y(t)) dt = A \cos \lambda x, \quad \beta > 0.$$

Это уравнение имеет решения вида $y(x) = p \sin \lambda x + q \cos \lambda x$, где p и q — некоторые постоянные.

$$15. \int_a^b y(x + \beta t) f(t, y(t)) dt = A \sin \lambda x, \quad \beta > 0.$$

Это уравнение имеет решения вида $y(x) = p \sin \lambda x + q \cos \lambda x$, где p и q — некоторые постоянные.

$$16. \int_a^b y(x + \beta t) f(t, y(t)) dt = e^{-\mu x} (A \cos \lambda x + B \sin \lambda x), \quad \beta > 0.$$

Это уравнение имеет решения вида $y(x) = e^{-\mu x} (p \sin \lambda x + q \cos \lambda x)$, где p и q — некоторые постоянные.

$$17. \int_a^b y(x - t) f(t, y(t)) dt = Ax + B.$$

Это уравнение имеет решения вида $y(x) = px + q$, где p и q — некоторые постоянные.

$$18. \int_a^b y(x - t) f(t, y(t)) dt = Ae^{\lambda x}.$$

Это уравнение имеет решения вида $y(x) = pe^{\lambda x}$, где p — некоторая постоянная.

$$19. \int_a^b y(x - t) f(t, y(t)) dt = A \cos \lambda x.$$

Это уравнение имеет решения вида $y(x) = p \sin \lambda x + q \cos \lambda x$, где p и q — некоторые постоянные.

$$20. \int_a^b y(x - t) f(t, y(t)) dt = e^{-\mu x} (A \cos \lambda x + B \sin \lambda x).$$

Это уравнение имеет решения вида $y(x) = e^{-\mu x} (p \sin \lambda x + q \cos \lambda x)$, где p и q — некоторые постоянные.

6.8-2. Уравнения вида $y(x) + \int_a^b K(x, t)G(y(t)) dt = F(x)$

$$21. y(x) + \int_a^b |x - t| f(y(t)) dt = Ax^2 + Bx + C.$$

Частный случай уравнения 6.8.35 при $f(t, y) = f(y)$, $g(x) = Ax^2 + Bx + C$.

Функция $y = y(x)$ удовлетворяет автономному дифференциальному уравнению второго порядка

$$y''_{xx} + 2f(y) = 2A.$$

Его решение записывается в неявном виде:

$$\int_{y_a}^y \frac{du}{\sqrt{w_a^2 + 4A(u - y_a) - 4F(u, y_a)}} = \pm(x - a), \quad F(u, v) = \int_v^u f(t) dt, \quad (1)$$

где $y_a = y(a)$, $w_a = y'_x(a)$ — постоянные интегрирования. Эти величины вместе с аналогичными неизвестными $y_b = y(b)$, $w_b = y'_x(b)$ определяются путем решения алгебраической (или трансцендентной) системы уравнений

$$\begin{aligned} y_a + y_b - (a - b)w_a &= (b^2 + 2ab - a^2)A + 2bB + 2C, \\ w_a + w_b &= 2(a + b)A + 2B, \\ w_b^2 &= w_a^2 + 4A(y_b - y_a) - 4F(y_b, y_a), \\ \int_{y_a}^{y_b} \frac{du}{\sqrt{w_a^2 + 4A(u - y_a) - 4F(u, y_a)}} &= \pm(b - a). \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь первое уравнение получено из второго условия (5) в 6.8.35, а второе уравнение — из условия (6) в 6.8.35; третье и четвертое уравнения являются следствиями (1).

Различным решениям системы (2) соответствуют различные решения (1) интегрального уравнения.

$$22. \quad y(x) + \int_a^b e^{\lambda|x-t|} f(y(t)) dt = A + Be^{\lambda x} + Ce^{-\lambda x}.$$

Частный случай уравнения 6.8.36 при $f(t, y) = f(y)$, $g(x) = A + Be^{\lambda x} + Ce^{-\lambda x}$.

Функция $y = y(x)$ удовлетворяет автономному дифференциальному уравнению второго порядка

$$y''_{xx} + 2\lambda f(y) - \lambda^2 y = -\lambda^2 A. \quad (1)$$

Его решение записывается в неявном виде:

$$\int_{y_a}^y \frac{du}{\sqrt{w_a^2 + \lambda^2(u^2 - y_a^2) - 2A\lambda^2(u - y_a) - 4\lambda F(u, y_a)}} = \pm(x - a), \quad F(u, v) = \int_v^u f(t) dt, \quad (2)$$

где $y_a = y(a)$, $w_a = y'_x(a)$ — постоянные интегрирования. Эти величины вместе с аналогичными неизвестными $y_b = y(b)$, $w_b = y'_x(b)$ определяются путем решения алгебраической (или трансцендентной) системы уравнений

$$\begin{aligned} w_a + \lambda y_a &= A\lambda + 2B\lambda e^{\lambda a}, \\ w_b - \lambda y_b &= -A\lambda - 2C\lambda e^{-\lambda b}, \\ w_b^2 &= w_a^2 + \lambda^2(y_b^2 - y_a^2) - 2A\lambda^2(y_b - y_a) - 4\lambda F(y_b, y_a), \\ \int_{y_a}^{y_b} \frac{du}{\sqrt{w_a^2 + \lambda^2(u^2 - y_a^2) - 2A\lambda^2(u - y_a) - 4\lambda F(u, y_a)}} &= \pm(b - a). \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь первое и второе уравнения получены из условий (5) в 6.8.86, а третье и четвертое уравнения являются следствиями (2).

Различным решениям системы (3) соответствуют различные решения интегрального уравнения.

$$23. \quad y(x) + \int_a^b e^{\lambda|x-t|} f(y(t)) dt = \beta \operatorname{ch}(\lambda x).$$

Частный случай уравнения 6.8.22 при $A = 0$, $B = C = \frac{1}{2}\beta$.

$$24. \quad y(x) + \int_a^b e^{\lambda|x-t|} f(y(t)) dt = \beta \operatorname{sh}(\lambda x).$$

Частный случай уравнения 6.8.22 при $A = 0$, $B = \frac{1}{2}\beta$, $C = -\frac{1}{2}\beta$.

$$25. \quad y(x) + \int_a^b \operatorname{sh}(\lambda|x-t|) f(y(t)) dt = A + B \operatorname{ch}(\lambda x) + C \operatorname{sh}(\lambda x).$$

Частный случай уравнения 6.8.37 при $f(t, y) = f(y)$, $g(x) = A + B \operatorname{ch}(\lambda x) + C \operatorname{sh}(\lambda x)$.

Функция $y = y(x)$ удовлетворяет автономному дифференциальному уравнению второго порядка

$$y''_{xx} + 2\lambda f(y) - \lambda^2 y = -\lambda^2 A.$$

Его решение записывается в неявном виде:

$$\int_{y_a}^y \frac{du}{\sqrt{w_a^2 + \lambda^2(u^2 - y_a^2) - 2A\lambda^2(u - y_a) - 4\lambda F(u, y_a)}} = \pm(x - a), \quad F(u, v) = \int_v^u f(t) dt,$$

где $y_a = y(a)$, $w_a = y'_x(a)$ — постоянные интегрирования, которые определяются из граничных условий (5) в 6.8.37.

$$26. \quad y(x) + \int_a^b \sin(\lambda|x-t|) f(y(t)) dt = A + B \cos(\lambda x) + C \sin(\lambda x).$$

Частный случай уравнения 6.8.38 при $f(t, y) = f(y)$, $g(x) = A + B \cos \lambda x + C \sin \lambda x$.

Функция $y = y(x)$ удовлетворяет автономному дифференциальному уравнению второго порядка

$$y''_{xx} + 2\lambda f(y) + \lambda^2 y = \lambda^2 A.$$

Его решение записывается в неявном виде:

$$\int_{y_a}^y \frac{du}{\sqrt{w_a^2 - \lambda^2(u^2 - y_a^2) + 2A\lambda^2(u - y_a) - 4\lambda F(u, y_a)}} = \pm(x - a), \quad F(u, v) = \int_v^u f(t) dt,$$

где $y_a = y(a)$, $w_a = y'_x(a)$ — постоянные интегрирования, которые определяются из граничных условий (5) в 6.8.38.

6.8-3. Уравнения вида $y(x) + \int_a^b K(x, t)G(t, y(t)) dt = F(x)$

27. $y(x) + \int_a^b f(t, y(t)) dt = g(x).$

Решение: $y(x) = g(x) + \lambda$, где λ определяется из алгебраического (или трансцендентного) уравнения

$$\lambda + F(\lambda) = 0, \quad F(\lambda) = \int_a^b f(t, g(t) + \lambda) dt.$$

28. $y(x) + \int_a^b e^{\lambda(x-t)} f(t, y(t)) dt = g(x).$

Решение: $y(x) = \beta e^{\lambda x} + g(x)$, где λ определяется из алгебраического (или трансцендентного) уравнения

$$\beta + F(\beta) = 0, \quad F(\beta) = \int_a^b e^{-\lambda t} f(t, \beta e^{\lambda t} + g(t)) dt.$$

29. $y(x) + \int_a^b g(x) f(t, y(t)) dt = h(x).$

Решение: $y(x) = \lambda g(x) + h(x)$, где λ определяется из алгебраического (или трансцендентного) уравнения

$$\lambda + F(\lambda) = 0, \quad F(\lambda) = \int_a^b f(t, \lambda g(t) + h(t)) dt.$$

30. $y(x) + \int_a^b (Ax + Bt) f(t, y(t)) dt = g(x).$

Решение: $y(x) = g(x) + \lambda x + \mu$, где постоянные λ и μ определяются путем решения алгебраической (или трансцендентной) системы уравнений

$$\lambda + A \int_a^b f(t, g(t) + \lambda t + \mu) dt = 0, \quad \mu + B \int_a^b t f(t, g(t) + \lambda t + \mu) dt = 0.$$

31. $y(x) + \int_a^b \operatorname{ch}(\lambda x + \mu t) f(t, y(t)) dt = h(x).$

Используя формулу $\operatorname{ch}(\lambda x + \mu t) = \operatorname{ch}(\lambda x) \operatorname{ch}(\mu t) + \operatorname{sh}(\mu t) \operatorname{sh}(\lambda x)$, приходим к уравнению вида 6.8.39:

$$y(x) + \int_a^b [\operatorname{ch}(\lambda x) f_1(t, y(t)) + \operatorname{sh}(\lambda x) f_2(t, y(t))] dt = h(x),$$

$$f_1(t, y(t)) = \operatorname{ch}(\mu t) f(t, y(t)), \quad f_2(t, y(t)) = \operatorname{sh}(\mu t) f(t, y(t)).$$

32. $y(x) + \int_a^b \operatorname{sh}(\lambda x + \mu t) f(t, y(t)) dt = h(x).$

Используя формулу $\operatorname{sh}(\lambda x + \mu t) = \operatorname{ch}(\lambda x) \operatorname{sh}(\mu t) + \operatorname{ch}(\mu t) \operatorname{sh}(\lambda x)$, приходим к уравнению вида 6.8.39:

$$y(x) + \int_a^b [\operatorname{ch}(\lambda x) f_1(t, y(t)) + \operatorname{sh}(\lambda x) f_2(t, y(t))] dt = h(x),$$

$$f_1(t, y(t)) = \operatorname{sh}(\mu t) f(t, y(t)), \quad f_2(t, y(t)) = \operatorname{ch}(\mu t) f(t, y(t)).$$

33. $y(x) + \int_a^b \cos(\lambda x + \mu t) f(t, y(t)) dt = h(x).$

Используя формулу $\cos(\lambda x + \mu t) = \cos(\lambda x) \cos(\mu t) - \sin(\mu t) \sin(\lambda x)$, приходим к уравнению вида 6.8.39:

$$y(x) + \int_a^b [\cos(\lambda x) f_1(t, y(t)) + \sin(\lambda x) f_2(t, y(t))] dt = h(x),$$

$$f_1(t, y(t)) = \cos(\mu t) f(t, y(t)), \quad f_2(t, y(t)) = -\sin(\mu t) f(t, y(t)).$$

$$34. \quad y(x) + \int_a^b \sin(\lambda x + \mu t) f(t, y(t)) dt = h(x).$$

Используя формулу $\sin(\lambda x + \mu t) = \cos(\lambda x) \sin(\mu t) + \cos(\mu t) \sin(\lambda x)$, приходим к уравнению вида 6.8.39:

$$\begin{aligned} y(x) + \int_a^b [\cos(\lambda x) f_1(t, y(t)) + \sin(\lambda x) f_2(t, y(t))] dt &= h(x), \\ f_1(t, y(t)) &= \sin(\mu t) f(t, y(t)), \quad f_2(t, y(t)) = \cos(\mu t) f(t, y(t)). \end{aligned}$$

$$35. \quad y(x) + \int_a^b |x - t| f(t, y(t)) dt = g(x), \quad a \leq x \leq b.$$

1°. Раскроем модуль в подынтегральном выражении. В результате получим

$$y(x) + \int_a^x (x - t) f(t, y(t)) dt + \int_x^b (t - x) f(t, y(t)) dt = g(x). \quad (1)$$

Дифференцируя (1) по x , имеем

$$y'_x(x) + \int_a^x f(t, y(t)) dt - \int_x^b f(t, y(t)) dt = g'_x(x). \quad (2)$$

Дифференцируя (2), приходим к следующему обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка для функции $y = y(x)$:

$$y''_{xx} + 2f(x, y) = g''_{xx}(x). \quad (3)$$

2°. Выведем граничные условия для уравнения (3). Считаем, что $-\infty < a < b < \infty$. Полагая в (1) $x = a$ и $x = b$, имеем два следствия:

$$\begin{aligned} y(a) + \int_a^b (t - a) f(t, y(t)) dt &= g(a), \\ y(b) + \int_a^b (b - t) f(t, y(t)) dt &= g(b). \end{aligned} \quad (4)$$

Выразим из уравнения (3) функцию $f(x, y)$ и подставим в (4). После интегрирования по частям получим искомые граничные условия для функции $y(x)$:

$$\begin{aligned} y(a) + y(b) + (b - a)[g'_x(b) - y'_x(b)] &= g(a) + g(b), \\ y(a) + y(b) + (a - b)[g'_x(a) - y'_x(a)] &= g(a) + g(b). \end{aligned} \quad (5)$$

Отметим полезное следствие равенств (5):

$$y'_x(a) + y'_x(b) = g'_x(a) + g'_x(b), \quad (6)$$

которое можно использовать вместе с одним из условий (5).

Уравнение (3) вместе с граничными условиями (5) описывает решение исходного интегрального уравнения (этих решений может быть несколько). Условия (5) позволяют найти постоянные интегрирования, которые получаются в результате решения дифференциального уравнения (3).

$$36. \quad y(x) + \int_a^b e^{\lambda|x-t|} f(t, y(t)) dt = g(x), \quad a \leq x \leq b.$$

1°. Раскроем модуль в подынтегральном выражении. В результате получим

$$y(x) + \int_a^x e^{\lambda(x-t)} f(t, y(t)) dt + \int_x^b e^{\lambda(t-x)} f(t, y(t)) dt = g(x). \quad (1)$$

Дифференцируя (1) дважды по x , имеем

$$y''_{xx}(x) + 2\lambda f(x, y(x)) + \lambda^2 \int_a^x e^{\lambda(x-t)} f(t, y(t)) dt + \lambda^2 \int_x^b e^{\lambda(t-x)} f(t, y(t)) dt = g''_{xx}(x). \quad (2)$$

Исключая из (1) и (2) интегральные члены, приходим к следующему обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка для функции $y = y(x)$:

$$y''_{xx} + 2\lambda f(x, y) - \lambda^2 y = g''_{xx}(x) - \lambda^2 g(x). \quad (3)$$

2°. Выведем граничные условия для уравнения (3). Считаем, что $-\infty < a < b < \infty$. Полагая в (1) $x = a$ и $x = b$, имеем два следствия:

$$\begin{aligned} y(a) + e^{-\lambda a} \int_a^b e^{\lambda t} f(t, y(t)) dt &= g(a), \\ y(b) + e^{\lambda b} \int_a^b e^{-\lambda t} f(t, y(t)) dt &= g(b). \end{aligned} \quad (4)$$

Выразим из уравнения (3) функцию $f(x, y)$ и подставим в (4). После интегрирования по частям получим

$$\begin{aligned} e^{\lambda b} \varphi'_x(b) - e^{\lambda a} \varphi'_x(a) &= \lambda e^{\lambda a} \varphi(a) + \lambda e^{\lambda b} \varphi(b), \quad \varphi(x) = y(x) - g(x); \\ e^{-\lambda b} \varphi'_x(b) - e^{-\lambda a} \varphi'_x(a) &= \lambda e^{-\lambda a} \varphi(a) + \lambda e^{-\lambda b} \varphi(b). \end{aligned}$$

Отсюда находятся граничные условия для функции $y(x)$:

$$\varphi'_x(a) + \lambda \varphi(a) = 0, \quad \varphi'_x(b) - \lambda \varphi(b) = 0; \quad \varphi(x) = y(x) - g(x). \quad (5)$$

Уравнение (3) вместе с граничными условиями (5) описывает решение исходного интегрального уравнения (этих решений может быть несколько). Условия (5) позволяют найти постоянные интегрирования, которые получаются в результате решения дифференциального уравнения (3).

$$37. \quad y(x) + \int_a^b \operatorname{sh}(\lambda|x-t|) f(t, y(t)) dt = g(x), \quad a \leq x \leq b.$$

1°. Раскроем модуль в подынтегральном выражении. В результате получим

$$y(x) + \int_a^x \operatorname{sh}[\lambda(x-t)] f(t, y(t)) dt + \int_x^b \operatorname{sh}[\lambda(t-x)] f(t, y(t)) dt = g(x). \quad (1)$$

Дифференцируя (1) дважды по x , имеем

$$\begin{aligned} y''_{xx}(x) + 2\lambda f(x, y(x)) + \lambda^2 \int_a^x \operatorname{sh}[\lambda(x-t)] f(t, y(t)) dt + \\ + \lambda^2 \int_x^b \operatorname{sh}[\lambda(t-x)] f(t, y(t)) dt = g''_{xx}(x). \end{aligned} \quad (2)$$

Исключая из (1) и (2) интегральные члены, приходим к следующему обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка для функции $y = y(x)$:

$$y''_{xx} + 2\lambda f(x, y) - \lambda^2 y = g''_{xx}(x) - \lambda^2 g(x). \quad (3)$$

2°. Выведем граничные условия для уравнения (3). Считаем, что $-\infty < a < b < \infty$. Полагая в (1) $x = a$ и $x = b$, имеем два следствия:

$$\begin{aligned} y(a) + \int_a^b \operatorname{sh}[\lambda(t-a)] f(t, y(t)) dt &= g(a), \\ y(b) + \int_a^b \operatorname{sh}[\lambda(b-t)] f(t, y(t)) dt &= g(b). \end{aligned} \quad (4)$$

Выразим из уравнения (3) функцию $f(x, y)$ и подставим в (4). После интегрирования по частям получим

$$\begin{aligned} \operatorname{sh}[\lambda(b-a)] \varphi'_x(b) - \lambda \operatorname{ch}[\lambda(b-a)] \varphi(b) &= \lambda \varphi(a), \quad \varphi(x) = y(x) - g(x); \\ \operatorname{sh}[\lambda(b-a)] \varphi'_x(a) + \lambda \operatorname{ch}[\lambda(b-a)] \varphi(a) &= -\lambda \varphi(b). \end{aligned} \quad (5)$$

Уравнение (3) вместе с граничными условиями (5) описывает решение исходного интегрального уравнения (этих решений может быть несколько). Условия (5) позволяют найти постоянные интегрирования, которые получаются в результате решения дифференциального уравнения (3).

$$38. \quad y(x) + \int_a^b \sin(\lambda|x-t|) f(t, y(t)) dt = g(x), \quad a \leq x \leq b.$$

1°. Раскроем модуль в подынтегральном выражении. В результате получим

$$y(x) + \int_a^x \sin[\lambda(x-t)] f(t, y(t)) dt + \int_x^b \sin[\lambda(t-x)] f(t, y(t)) dt = g(x). \quad (1)$$

Дифференцируя (1) дважды по x , имеем

$$\begin{aligned} y''_{xx}(x) + 2\lambda f(x, y(x)) - \lambda^2 \int_a^x \sin[\lambda(x-t)] f(t, y(t)) dt - \\ - \lambda^2 \int_x^b \sin[\lambda(t-x)] f(t, y(t)) dt = g''_{xx}(x). \end{aligned} \quad (2)$$

Исключая из (1) и (2) интегральные члены, приходим к следующему обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка для функции $y = y(x)$:

$$y''_{xx} + 2\lambda f(x, y) + \lambda^2 y = g''_{xx}(x) + \lambda^2 g(x). \quad (3)$$

2°. Выведем граничные условия для уравнения (3). Считаем, что $-\infty < a < b < \infty$. Полагая в (1) $x = a$ и $x = b$, имеем два следствия:

$$\begin{aligned} y(a) + \int_a^b \sin[\lambda(t-a)] f(t, y(t)) dt = g(a), \\ y(b) + \int_a^b \sin[\lambda(b-t)] f(t, y(t)) dt = g(b). \end{aligned} \quad (4)$$

Выразим из уравнения (3) функцию $f(x, y)$ и подставим в (4). После интегрирования по частям получим

$$\begin{aligned} \sin[\lambda(b-a)] \varphi'_x(b) - \lambda \cos[\lambda(b-a)] \varphi(b) = \lambda \varphi(a), \quad \varphi(x) = y(x) - g(x); \\ \sin[\lambda(b-a)] \varphi'_x(a) + \lambda \cos[\lambda(b-a)] \varphi(a) = -\lambda \varphi(b). \end{aligned} \quad (5)$$

Уравнение (3) вместе с граничными условиями (5) описывает решение исходного интегрального уравнения (этих решений может быть несколько). Условия (5) позволяют найти постоянные интегрирования, которые получаются в результате решения дифференциального уравнения (3).

6.8-4. Уравнения вида $y(x) + \int_a^b G(x, t, y(t)) dt = F(x)$

$$39. \quad y(x) + \int_a^b [g_1(x) f_1(t, y(t)) + g_2(x) f_2(t, y(t))] dt = h(x).$$

Решение:

$$y(x) = h(x) + \lambda_1 g_1(x) + \lambda_2 g_2(x),$$

где постоянные λ_1 и λ_2 определяется путем решения алгебраической (или трансцендентной) системы уравнений

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \int_a^b f_1(t, h(t) + \lambda_1 g_1(t) + \lambda_2 g_2(t)) dt = 0, \\ \lambda_2 + \int_a^b f_2(t, h(t) + \lambda_1 g_1(t) + \lambda_2 g_2(t)) dt = 0. \end{aligned}$$

$$40. \quad y(x) + \int_a^b \left[\sum_{k=1}^n g_k(x) f_k(t, y(t)) \right] dt = h(x).$$

Решение:

$$y(x) = h(x) + \sum_{k=1}^n \lambda_k g_k(x),$$

где постоянные λ_k определяется путем решения алгебраической (или трансцендентной) системы уравнений

$$\lambda_m + \int_a^b f_m(t, h(t) + \sum_{k=1}^n \lambda_k g_k(t)) dt = 0; \quad m = 1, \dots, n.$$

Различным корням этой системы отвечают различные решения интегрального уравнения.

⊙ Литература: А. Ф. Верлань, В. С. Сизиков (1986).

6.8-5. Уравнения вида $F(x, y(x)) + \int_a^b G(x, t, y(x), y(t)) dt = 0$

$$41. \quad y(x) + \int_a^b y(x) f(t, y(t)) dt = g(x).$$

Решение: $y(x) = \lambda g(x)$, где λ определяется из алгебраического (или трансцендентного) уравнения

$$\lambda + \lambda F(\lambda) - 1 = 0, \quad F(\lambda) = \int_a^b f(t, \lambda g(t)) dt.$$

$$42. \quad y(x) + \int_a^b g(x) y(x) f(t, y(t)) dt = h(x).$$

Решение: $y(x) = \frac{h(x)}{1 + \lambda g(x)}$, где λ определяется из алгебраического (или трансцендентного) уравнения

$$\lambda - F(\lambda) = 0, \quad F(\lambda) = \int_a^b f\left(t, \frac{h(t)}{1 + \lambda g(t)}\right) dt.$$

$$43. \quad y(x) + \int_a^b g(x, y(x)) f(t, y(t)) dt = h(x).$$

Решение в неявном виде:

$$y(x) + \lambda g(x, y(x)) - h(x) = 0, \quad (1)$$

где λ определяется из алгебраического (или трансцендентного) уравнения

$$\lambda - F(\lambda) = 0, \quad F(\lambda) = \int_a^b f(t, y(t)) dt. \quad (2)$$

В уравнение (2) следует подставить функцию $y(x) = y(x, \lambda)$, которая получается путем разрешения (1).

Число решений интегрального уравнения определяется числом решений, полученных из (1), (2).

$$44. \quad f(x, y(x)) + \int_a^b \left[\sum_{k=1}^n g_k(x, y(x)) h_k(t, y(t)) \right] dt = 0.$$

Решение в неявном виде:

$$f(x, y(x)) + \sum_{k=1}^n \lambda_k g_k(x, y(x)) = 0, \quad (1)$$

где λ_k определяются путем решения системы алгебраических (или трансцендентных) уравнений

$$\begin{aligned} \lambda_k - H_k(\vec{\lambda}) &= 0, \quad k = 1, \dots, n; \\ H_k(\vec{\lambda}) &= \int_a^b h_k(t, y(t)) dt, \quad \vec{\lambda} = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}. \end{aligned} \quad (2)$$

В систему (2) следует подставить функцию $y(x) = y(x, \vec{\lambda})$, которая получается путем разрешения (1).

Число решений интегрального уравнения определяется числом решений, полученных из (1), (2).

6.8-6. Другие уравнения

$$45. \quad y(x) + \int_a^b y(xt) f(t, y(t)) dt = 0.$$

1°. Решение:

$$y(x) = kx^C, \quad (1)$$

где C — произвольная постоянная, а зависимость $k = k(C)$ определяется путем решения алгебраического (или трансцендентного) уравнения

$$1 + \int_a^b t^C f(t, kt^C) dt = 0. \quad (2)$$

Каждому корню уравнения (2) отвечает соответствующее решение нелинейного интегрального уравнения, которое находится по формуле (1).

2°. Интегральное уравнение может иметь и другие решения, аналогичные указанным в пп. 1°–3° для уравнения 6.2.30.

$$46. \quad y(x) + \int_a^b y(xt) f(t, y(t)) dt = Ax + B.$$

Решение:

$$y(x) = px + q, \quad (1)$$

где p и q — корни системы алгебраических (или трансцендентных) уравнений

$$\begin{aligned} p + p \int_a^b t f(t, pt + q) dt - A &= 0, \\ q + q \int_a^b f(t, pt + q) dt - B &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Различным корням системы (2) соответствуют различные решения (1) интегрального уравнения.

$$47. \quad y(x) + \int_a^b y(xt) f(t, y(t)) dt = Ax^\beta.$$

Решение:

$$y(x) = kx^\beta, \quad (1)$$

где k — корень алгебраического (или трансцендентного) уравнения

$$k + kF(k) - A = 0, \quad F(k) = \int_a^b t^\beta f(t, kt^\beta) dt. \quad (2)$$

Каждому корню уравнения (2) отвечает соответствующее решение нелинейного интегрального уравнения, которое находится по формуле (1).

$$48. \quad y(x) + \int_a^b y(xt) f(t, y(t)) dt = A \ln x + B.$$

Решение:

$$y(x) = p \ln x + q, \quad (1)$$

где p и q — корни системы алгебраических (или трансцендентных) уравнений

$$\begin{aligned} p + p \int_a^b f(t, p \ln t + q) dt - A &= 0, \\ q + \int_a^b (p \ln t + q) f(t, p \ln t + q) dt - B &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Различным корням системы (2) соответствуют различные решения (1) интегрального уравнения.

$$49. \quad y(x) + \int_a^b y(xt) f(t, y(t)) dt = Ax^\beta \ln x.$$

Решение:

$$y(x) = px^\beta \ln x + qx^\beta, \quad (1)$$

где p и q — корни системы алгебраических (или трансцендентных) уравнений

$$\begin{aligned} p + p \int_a^b t^\beta f(t, pt^\beta \ln t + qt^\beta) dt &= A, \\ q + \int_a^b (pt^\beta \ln t + qt^\beta) f(t, pt^\beta \ln t + qt^\beta) dt &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Различным корням системы (2) соответствуют различные решения (1) интегрального уравнения.

$$50. \quad y(x) + \int_a^b y(xt) f(t, y(t)) dt = A \cos(\ln x).$$

Решение:

$$y(x) = p \cos(\ln x) + q \sin(\ln x),$$

где p и q — корни системы алгебраических (или трансцендентных) уравнений

$$p + \int_a^b [p \cos(\ln t) + q \sin(\ln t)] f(t, p \cos(\ln t) + q \sin(\ln t)) dt = A,$$

$$q + \int_a^b [q \cos(\ln t) - p \sin(\ln t)] f(t, p \cos(\ln t) + q \sin(\ln t)) dt = 0.$$

$$51. \quad y(x) + \int_a^b y(xt) f(t, y(t)) dt = A \sin(\ln x).$$

Решение:

$$y(x) = p \cos(\ln x) + q \sin(\ln x),$$

где p и q — корни системы алгебраических (или трансцендентных) уравнений

$$p + \int_a^b [p \cos(\ln t) + q \sin(\ln t)] f(t, p \cos(\ln t) + q \sin(\ln t)) dt = 0,$$

$$q + \int_a^b [q \cos(\ln t) - p \sin(\ln t)] f(t, p \cos(\ln t) + q \sin(\ln t)) dt = A.$$

$$52. \quad y(x) + \int_a^b y(xt) f(t, y(t)) dt = Ax^\beta \cos(\ln x) + Bx^\beta \sin(\ln x).$$

Решение:

$$y(x) = px^\beta \cos(\ln x) + qx^\beta \sin(\ln x), \quad (1)$$

где p и q — корни системы алгебраических (или трансцендентных) уравнений

$$p + \int_a^b t^\beta [p \cos(\ln t) + q \sin(\ln t)] f(t, pt^\beta \cos(\ln t) + qt^\beta \sin(\ln t)) dt = A, \quad (2)$$

$$q + \int_a^b t^\beta [q \cos(\ln t) - p \sin(\ln t)] f(t, pt^\beta \cos(\ln t) + qt^\beta \sin(\ln t)) dt = B.$$

Различным корням системы (2) соответствуют различные решения (1) интегрального уравнения.

$$53. \quad y(x) + \int_a^b y(xt^\beta) f(t, y(t)) dt = g(x), \quad \beta > 0.$$

1°. Для правой части $g(x) = \sum_{k=1}^n A_k x^k$ решение уравнения имеет вид

$$y(x) = \sum_{k=1}^n B_k x^k,$$

где B_k — корни алгебраических (или трансцендентных) уравнений

$$B_k + B_k F_k(\vec{B}) - A_k = 0, \quad F_k(\vec{B}) = \int_a^b t^{k\beta} f\left(t, \sum_{m=1}^n B_m t^m\right) dt.$$

Различным корням соответствуют различные решения интегрального уравнения.

2°. Для правой части уравнения $g(x) = \ln x \sum_{k=0}^n A_k x^k$ решение имеет вид

$$y(x) = \ln x \sum_{k=0}^n B_k x^k + \sum_{k=0}^n C_k x^k,$$

где постоянные B_k и C_k определяются методом неопределенных коэффициентов.

3°. Для правой части $g(x) = \sum_{k=0}^n A_k (\ln x)^k$ решение уравнения имеет вид

$$y(x) = \sum_{k=0}^n B_k (\ln x)^k,$$

где постоянные B_k определяются методом неопределенных коэффициентов.

4°. Для правой части $g(x) = \sum_{k=1}^n A_k \cos(\lambda_k \ln x)$ решение уравнения имеет вид

$$y(x) = \sum_{k=1}^n B_k \cos(\lambda_k \ln x) + \sum_{k=1}^n C_k \sin(\lambda_k \ln x),$$

где постоянные B_k и C_k определяются методом неопределенных коэффициентов.

5°. Для правой части $g(x) = \sum_{k=1}^n A_k \sin(\lambda_k \ln x)$ решение уравнения имеет вид

$$y(x) = \sum_{k=1}^n B_k \cos(\lambda_k \ln x) + \sum_{k=1}^n C_k \sin(\lambda_k \ln x),$$

где постоянные B_k и C_k определяются методом неопределенных коэффициентов.

54. $y(x) + \int_a^b y(x-t)f(t, y(t)) dt = 0.$

1°. Решение:

$$y(x) = ke^{Cx}, \quad (1)$$

где C — произвольная постоянная, а зависимость $k = k(C)$ определяется путем решения алгебраического (или трансцендентного) уравнения

$$1 + \int_a^b f(t, ke^{Ct}) e^{-Ct} dt = 0. \quad (2)$$

Каждому корню уравнения (2) отвечает соответствующее решение нелинейного интегрального уравнения, которое находится по формуле (1).

2°. Уравнение имеет решения вида $y(x) = \sum_{m=0}^n E_m x^m$, где постоянные E_m находятся методом неопределенных коэффициентов.

55. $y(x) + \int_a^b y(x-t)f(t, y(t)) dt = Ax + B.$

Решение:

$$y(x) = px + q, \quad (1)$$

где p и q — корни системы алгебраических (или трансцендентных) уравнений

$$\begin{aligned} p + p \int_a^b f(t, pt + q) dt - A &= 0, \\ q + \int_a^b (q - pt) f(t, pt + q) dt - B &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Различным корням системы (2) соответствуют различные решения (1) интегрального уравнения.

56. $y(x) + \int_a^b y(x-t)f(t, y(t)) dt = Ae^{\lambda x}.$

Решения:

$$y_n(x) = k_n e^{\lambda x},$$

где k_n — корни алгебраического (или трансцендентного) уравнения

$$k + kF(k) - A = 0, \quad F(k) = \int_a^b f(t, ke^{\lambda t}) e^{-\lambda t} dt.$$

$$57. \quad y(x) + \int_a^b y(x-t)f(t, y(t)) dt = A \operatorname{sh} \lambda x.$$

Решение:

$$y(x) = p \operatorname{sh} \lambda x + q \operatorname{ch} \lambda x, \quad (1)$$

где p и q — корни системы алгебраических (или трансцендентных) уравнений

$$\begin{aligned} p + \int_a^b (p \operatorname{ch} \lambda t - q \operatorname{sh} \lambda t) f(t, p \operatorname{sh} \lambda t + q \operatorname{ch} \lambda t) dt &= A, \\ q + \int_a^b (q \operatorname{ch} \lambda t - p \operatorname{sh} \lambda t) f(t, p \operatorname{sh} \lambda t + q \operatorname{ch} \lambda t) dt &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Различным корням системы (2) соответствуют различные решения (1) интегрального уравнения.

$$58. \quad y(x) + \int_a^b y(x-t)f(t, y(t)) dt = A \operatorname{ch} \lambda x.$$

Решение:

$$y(x) = p \operatorname{sh} \lambda x + q \operatorname{ch} \lambda x,$$

где p и q — корни системы алгебраических (или трансцендентных) уравнений

$$\begin{aligned} p + \int_a^b (p \operatorname{ch} \lambda t - q \operatorname{sh} \lambda t) f(t, p \operatorname{sh} \lambda t + q \operatorname{ch} \lambda t) dt &= 0, \\ q + \int_a^b (q \operatorname{ch} \lambda t - p \operatorname{sh} \lambda t) f(t, p \operatorname{sh} \lambda t + q \operatorname{ch} \lambda t) dt &= A. \end{aligned}$$

$$59. \quad y(x) + \int_a^b y(x-t)f(t, y(t)) dt = A \sin \lambda x.$$

Решение:

$$y(x) = p \sin \lambda x + q \cos \lambda x, \quad (1)$$

где p и q — корни системы алгебраических (или трансцендентных) уравнений

$$\begin{aligned} p + \int_a^b (p \cos \lambda t + q \sin \lambda t) f(t, p \sin \lambda t + q \cos \lambda t) dt &= A, \\ q + \int_a^b (q \cos \lambda t - p \sin \lambda t) f(t, p \sin \lambda t + q \cos \lambda t) dt &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Различным корням системы (2) соответствуют различные решения (1) интегрального уравнения.

$$60. \quad y(x) + \int_a^b y(x-t)f(t, y(t)) dt = A \cos \lambda x.$$

Решение:

$$y(x) = p \sin \lambda x + q \cos \lambda x,$$

где p и q — корни системы алгебраических (или трансцендентных) уравнений

$$\begin{aligned} p + \int_a^b (p \cos \lambda t + q \sin \lambda t) f(t, p \sin \lambda t + q \cos \lambda t) dt &= 0, \\ q + \int_a^b (q \cos \lambda t - p \sin \lambda t) f(t, p \sin \lambda t + q \cos \lambda t) dt &= A. \end{aligned}$$

$$61. \quad y(x) + \int_a^b y(x-t)f(t, y(t)) dt = e^{\mu x} (A \sin \lambda x + B \cos \lambda x).$$

Решение:

$$y(x) = e^{\mu x} (p \sin \lambda x + q \cos \lambda x), \quad (1)$$

где p и q — корни системы алгебраических (или трансцендентных) уравнений

$$\begin{aligned} p + \int_a^b (p \cos \lambda t + q \sin \lambda t) e^{-\mu t} f(t, p e^{\mu t} \sin \lambda t + q e^{\mu t} \cos \lambda t) dt &= A, \\ q + \int_a^b (q \cos \lambda t - p \sin \lambda t) e^{-\mu t} f(t, p e^{\mu t} \sin \lambda t + q e^{\mu t} \cos \lambda t) dt &= B. \end{aligned} \quad (2)$$

Различным корням системы (2) соответствуют различные решения (1) интегрального уравнения.

$$62. \quad y(x) + \int_a^b y(x-t)f(t, y(t)) dt = g(x).$$

1°. Для правой части $g(x) = \sum_{k=1}^n A_k \exp(\lambda_k x)$ решение уравнения имеет вид

$$y(x) = \sum_{k=1}^n B_k \exp(\lambda_k x),$$

где постоянные B_k определяются путем решения нелинейной системы алгебраических (или трансцендентных) уравнений

$$B_k + B_k F_k(\vec{B}) - A_k = 0, \quad k = 1, \dots, n,$$

$$\vec{B} = \{B_1, \dots, B_n\}, \quad F_k(\vec{B}) = \int_a^b f\left(t, \sum_{m=1}^n B_m \exp(\lambda_m t)\right) \exp(-\lambda_k t) dt.$$

Различным корням этой системы соответствуют различные решения интегрального уравнения.

2°. Для полиномиальной правой части уравнения $g(x) = \sum_{k=0}^n A_k x^k$ решение имеет вид

$$y(x) = \sum_{k=0}^n B_k x^k,$$

где постоянные B_k определяются методом неопределенных коэффициентов.

3°. Для правой части $g(x) = e^{\lambda x} \sum_{k=0}^n A_k x^k$ решение уравнения имеет вид

$$y(x) = e^{\lambda x} \sum_{k=0}^n B_k x^k,$$

где постоянные B_k определяются методом неопределенных коэффициентов.

4°. Для правой части $g(x) = \sum_{k=1}^n A_k \cos(\lambda_k x)$ решение уравнения имеет вид

$$y(x) = \sum_{k=1}^n B_k \cos(\lambda_k x) + \sum_{k=1}^n C_k \sin(\lambda_k x),$$

где постоянные B_k и C_k определяются методом неопределенных коэффициентов.

5°. Для правой части $g(x) = \sum_{k=1}^n A_k \sin(\lambda_k x)$ решение уравнения имеет вид

$$y(x) = \sum_{k=1}^n B_k \cos(\lambda_k x) + \sum_{k=1}^n C_k \sin(\lambda_k x),$$

где постоянные B_k и C_k определяются методом неопределенных коэффициентов.

6°. Для правой части $g(x) = \cos(\lambda x) \sum_{k=0}^n A_k x^k$ решение уравнения имеет вид

$$y(x) = \cos(\lambda x) \sum_{k=0}^n B_k x^k + \sin(\lambda x) \sum_{k=0}^n C_k x^k,$$

где постоянные B_k и C_k определяются методом неопределенных коэффициентов.

7°. Для правой части $g(x) = \sin(\lambda x) \sum_{k=0}^n A_k x^k$ решение уравнения имеет вид

$$y(x) = \cos(\lambda x) \sum_{k=0}^n B_k x^k + \sin(\lambda x) \sum_{k=0}^n C_k x^k,$$

где постоянные B_k и C_k определяются методом неопределенных коэффициентов.

8°. Для правой части $g(x) = e^{\mu x} \sum_{k=1}^n A_k \cos(\lambda_k x)$ решение уравнения имеет вид

$$y(x) = e^{\mu x} \sum_{k=1}^n B_k \cos(\lambda_k x) + e^{\mu x} \sum_{k=1}^n C_k \sin(\lambda_k x),$$

где постоянные B_k и C_k определяются методом неопределенных коэффициентов.

9°. Для правой части $g(x) = e^{\mu x} \sum_{k=1}^n A_k \sin(\lambda_k x)$ решение уравнения имеет вид

$$y(x) = e^{\mu x} \sum_{k=1}^n B_k \cos(\lambda_k x) + e^{\mu x} \sum_{k=1}^n C_k \sin(\lambda_k x),$$

где постоянные B_k и C_k определяются методом неопределенных коэффициентов.

10°. Для правой части $g(x) = \cos(\lambda x) \sum_{k=1}^n A_k \exp(\mu_k x)$ решение уравнения имеет вид

$$y(x) = \cos(\lambda x) \sum_{k=1}^n B_k \exp(\mu_k x) + \sin(\lambda x) \sum_{k=1}^n C_k \exp(\mu_k x),$$

где постоянные B_k и C_k определяются методом неопределенных коэффициентов.

11°. Для правой части $g(x) = \sin(\lambda x) \sum_{k=1}^n A_k \exp(\mu_k x)$ решение уравнения имеет вид

$$y(x) = \cos(\lambda x) \sum_{k=1}^n B_k \exp(\mu_k x) + \sin(\lambda x) \sum_{k=1}^n C_k \exp(\mu_k x),$$

где постоянные B_k и C_k определяются методом неопределенных коэффициентов.

$$63. \quad y(x) + \int_a^b y(x + \beta t) f(t, y(t)) dt = Ax + B.$$

Решение:

$$y(x) = px + q, \quad (1)$$

где p и q — корни системы алгебраических (или трансцендентных) уравнений

$$\begin{aligned} p + p \int_a^b f(t, pt + q) dt - A &= 0, \\ q + \int_a^b (\beta pt + q) f(t, pt + q) dt - B &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Различным корням системы (2) соответствуют различные решения (1) интегрального уравнения.

$$64. \quad y(x) + \int_a^b y(x + \beta t) f(t, y(t)) dt = Ae^{\lambda x}.$$

Решения:

$$y_n(x) = k_n e^{\lambda x},$$

где k_n — корни алгебраического (или трансцендентного) уравнения

$$k + kF(k) - A = 0, \quad F(k) = \int_a^b f(t, ke^{\lambda t}) e^{\beta \lambda t} dt.$$

$$65. \quad y(x) + \int_a^b y(x + \beta t) f(t, y(t)) dt = A \sin \lambda x + B \cos \lambda x.$$

Решение:

$$y(x) = p \sin \lambda x + q \cos \lambda x, \quad (1)$$

где p и q — корни системы алгебраических (или трансцендентных) уравнений

$$\begin{aligned} p + \int_a^b [p \cos(\lambda \beta t) - q \sin(\lambda \beta t)] f(t, p \sin \lambda t + q \cos \lambda t) dt &= A, \\ q + \int_a^b [q \cos(\lambda \beta t) + p \sin(\lambda \beta t)] f(t, p \sin \lambda t + q \cos \lambda t) dt &= B. \end{aligned} \quad (2)$$

Различным корням системы (2) соответствуют различные решения (1) интегрального уравнения.

$$66. \quad y(x) + \int_a^b y(x + \beta t) f(t, y(t)) dt = g(x).$$

1°. Для правой части $g(x) = \sum_{k=1}^n A_k \exp(\lambda_k x)$ решение уравнения имеет вид

$$y(x) = \sum_{k=1}^n B_k \exp(\lambda_k x),$$

где постоянные B_k определяются путем решения нелинейной системы алгебраических (или трансцендентных) уравнений

$$B_k + B_k F_k(\vec{B}) - A_k = 0, \quad k = 1, \dots, n, \\ \vec{B} = \{B_1, \dots, B_n\}, \quad F_k(\vec{B}) = \int_a^b f\left(t, \sum_{m=1}^n B_m \exp(\lambda_m t)\right) \exp(\lambda_k \beta t) dt.$$

Различным решениям этой системы соответствуют различные решения интегрального уравнения.

2°. Для полиномиальной правой части уравнения $g(x) = \sum_{k=0}^n A_k x^k$ решение имеет вид

$$y(x) = \sum_{k=0}^n B_k x^k,$$

где постоянные B_k определяются методом неопределенных коэффициентов.

3°. Для правой части $g(x) = e^{\lambda x} \sum_{k=0}^n A_k x^k$ решение уравнения имеет вид

$$y(x) = e^{\lambda x} \sum_{k=0}^n B_k x^k,$$

где постоянные B_k определяются методом неопределенных коэффициентов.

4°. Для правой части $g(x) = \sum_{k=1}^n A_k \cos(\lambda_k x)$ решение уравнения имеет вид

$$y(x) = \sum_{k=1}^n B_k \cos(\lambda_k x) + \sum_{k=1}^n C_k \sin(\lambda_k x),$$

где постоянные B_k и C_k определяются методом неопределенных коэффициентов.

5°. Для правой части $g(x) = \sum_{k=1}^n A_k \sin(\lambda_k x)$ решение уравнения имеет вид

$$y(x) = \sum_{k=1}^n B_k \cos(\lambda_k x) + \sum_{k=1}^n C_k \sin(\lambda_k x),$$

где постоянные B_k и C_k определяются методом неопределенных коэффициентов.

6°. Для правой части $g(x) = \cos(\lambda x) \sum_{k=0}^n A_k x^k$ решение уравнения имеет вид

$$y(x) = \cos(\lambda x) \sum_{k=0}^n B_k x^k + \sin(\lambda x) \sum_{k=0}^n C_k x^k,$$

где постоянные B_k и C_k определяются методом неопределенных коэффициентов.

7°. Для правой части $g(x) = \sin(\lambda x) \sum_{k=0}^n A_k x^k$ решение уравнения имеет вид

$$y(x) = \cos(\lambda x) \sum_{k=0}^n B_k x^k + \sin(\lambda x) \sum_{k=0}^n C_k x^k,$$

где постоянные B_k и C_k определяются методом неопределенных коэффициентов.

8°. Для правой части $g(x) = e^{\mu x} \sum_{k=1}^n A_k \cos(\lambda_k x)$ решение уравнения имеет вид

$$y(x) = e^{\mu x} \sum_{k=1}^n B_k \cos(\lambda_k x) + e^{\mu x} \sum_{k=1}^n C_k \sin(\lambda_k x),$$

где постоянные B_k и C_k определяются методом неопределенных коэффициентов.

9°. Для правой части $g(x) = e^{\mu x} \sum_{k=1}^n A_k \sin(\lambda_k x)$ решение уравнения имеет вид

$$y(x) = e^{\mu x} \sum_{k=1}^n B_k \cos(\lambda_k x) + e^{\mu x} \sum_{k=1}^n C_k \sin(\lambda_k x),$$

где постоянные B_k и C_k определяются методом неопределенных коэффициентов.

10°. Для правой части $g(x) = \cos(\lambda x) \sum_{k=1}^n A_k \exp(\mu_k x)$ решение уравнения имеет вид

$$y(x) = \cos(\lambda x) \sum_{k=1}^n B_k \exp(\mu_k x) + \sin(\lambda x) \sum_{k=1}^n C_k \exp(\mu_k x),$$

где постоянные B_k и C_k определяются методом неопределенных коэффициентов.

11°. Для правой части $g(x) = \sin(\lambda x) \sum_{k=1}^n A_k \exp(\mu_k x)$ решение уравнения имеет вид

$$y(x) = \cos(\lambda x) \sum_{k=1}^n B_k \exp(\mu_k x) + \sin(\lambda x) \sum_{k=1}^n C_k \exp(\mu_k x),$$

где постоянные B_k и C_k определяются методом неопределенных коэффициентов.

$$67. \quad y(x) + \int_a^b y(\xi) f(t, y(t)) dt = 0, \quad \xi = x\varphi(t).$$

1°. Решение:

$$y(x) = kx^C, \quad (1)$$

где C — произвольная постоянная, а зависимость $k = k(C)$ определяется путем решения алгебраического (или трансцендентного) уравнения

$$1 + \int_a^b [\varphi(t)]^C f(t, kt^C) dt = 0. \quad (2)$$

Каждому корню уравнения (2) отвечает соответствующее решение нелинейного интегрального уравнения, которое находится по формуле (1).

2°. Уравнение имеет решения вида $y(x) = \sum_{m=0}^n E_m x^m$, где постоянные E_m находятся методом неопределенных коэффициентов.

$$68. \quad y(x) + \int_a^b y(\xi) f(t, y(t)) dt = g(x), \quad \xi = x\varphi(t).$$

1°. Для правой части $g(x) = \sum_{k=1}^n A_k x^k$ решение уравнения имеет вид

$$y(x) = \sum_{k=1}^n B_k x^k,$$

где B_k — корни алгебраических (или трансцендентных) уравнений

$$B_k + B_k F_k(\vec{B}) - A_k = 0, \quad k = 1, \dots, n, \\ \vec{B} = \{B_1, \dots, B_n\}, \quad F_k(\vec{B}) = \int_a^b [\varphi(t)]^k f\left(t, \sum_{m=1}^n B_m t^m\right) dt.$$

Различным корням соответствуют различные решения интегрального уравнения.

2°. Вид решения для некоторых других функций $g(x)$ указан в пп. 2°–5° интегрального уравнения 6.8.53.

$$69. \quad y(x) + \int_a^b y(\xi) f(t, y(t)) dt = 0, \quad \xi = x + \varphi(t).$$

1°. Решение:

$$y(x) = ke^{Cx}, \quad (1)$$

где C — произвольная постоянная, а зависимость $k = k(C)$ определяется путем решения алгебраического (или трансцендентного) уравнения

$$1 + \int_a^b e^{C\varphi(t)} f(t, ke^{Ct}) dt = 0. \quad (2)$$

Каждому корню уравнения (2) отвечает соответствующее решение нелинейного интегрального уравнения, которое находится по формуле (1).

2°. Уравнение имеет решения вида $y(x) = \sum_{m=0}^n E_m x^m$, где постоянные E_m находятся методом неопределенных коэффициентов.

$$70. \quad y(x) + \int_a^b y(\xi) f(t, y(t)) dt = g(x), \quad \xi = x + \varphi(t).$$

1°. Для правой части $g(x) = \sum_{k=1}^n A_k \exp(\lambda_k x)$ решение уравнения имеет вид

$$y(x) = \sum_{k=1}^n B_k \exp(\lambda_k x),$$

где постоянные B_k определяются путем решения нелинейной системы алгебраических (или трансцендентных) уравнений

$$B_k + B_k F_k(\vec{B}) - A_k = 0, \quad k = 1, \dots, n,$$

$$\vec{B} = \{B_1, \dots, B_n\}, \quad F_k(\vec{B}) = \int_a^b f\left(t, \sum_{m=1}^n B_m \exp(\lambda_m t)\right) \exp[\lambda_k \varphi(t)] dt.$$

2°. Вид решения для некоторых других функций $g(x)$ указан в пп. 2°–11° интегрального уравнения 6.8.66.

7. Основные определения и формулы. Интегральные преобразования

7.1. Некоторые определения, замечания и формулы

7.1-1. Некоторые определения

Действительная функция $f(x)$ называется квадратично интегрируемой (квадратично суммируемой, интегрируемой с квадратом) на отрезке $[a, b]$, если $f^2(x)$ интегрируема на $[a, b]$. Комплекснозначная функция $f(x)$ называется квадратично интегрируемой на отрезке $[a, b]$, если $|f(x)|^2$ интегрируема на $[a, b]$. Совокупность всех квадратично интегрируемых на $[a, b]$ функций обозначают $L_2(a, b)$ или коротко L_2^* . Совокупность всех интегрируемых на $[a, b]$ функций обычно обозначают $L_1(a, b)$ или коротко L_1 .

Основные свойства функций из L_2 :

- 1°. Сумма двух квадратично интегрируемых функций есть квадратично интегрируемая функция.
- 2°. Произведение квадратично интегрируемой функции на константу есть квадратично интегрируемая функция.
- 3°. Произведение двух квадратично интегрируемых функций есть интегрируемая функция.
- 4°. Если действительные функции $f(x) \in L_2$ и $g(x) \in L_2$, то имеет место неравенство Буняковского — Шварца

$$(f, g)^2 \leq \|f\|^2 \|g\|^2, \quad (f, g) = \int_a^b f(x)g(x) dx, \quad \|f\|^2 = (f, f) = \int_a^b f^2(x) dx.$$

Число (f, g) называется скалярным произведением действительных функций $f(x)$ и $g(x)$, а число $\|f\|$ — нормой действительной функции $f(x)$ в L_2 .

Для комплекснозначных функций из L_2 указанные соотношения имеют вид

$$|(f, g)|^2 \leq \|f\|^2 \|g\|^2, \quad (f, g) = \int_a^b f(x)\overline{g(x)} dx, \quad \|f\|^2 = (f, f) = \int_a^b |f(x)|^2 dx.$$

Здесь и далее черта сверху означает комплексно сопряженную величину, причем для действительных функций действительного аргумента $\overline{g(x)} = g(x)$.

- 5°. Для $f(x) \in L_2$ и $g(x) \in L_2$ имеет место неравенство треугольника

$$\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|.$$

- 6°. Пусть функции $f(x)$ и $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots$ квадратично интегрируемы на отрезке $[a, b]$. Если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b |f_n(x) - f(x)|^2 dx = 0,$$

то говорят, что последовательность функций $f_1(x), f_2(x), \dots$ сходится в среднем квадратичном к функции $f(x)$.

Если последовательность функций $\{f_n(x)\}$ из L_2 сходится равномерно к $f(x)$, то $f(x) \in L_2$ и $\{f_n(x)\}$ сходится к $f(x)$ в среднем.

Аналогичным образом вводится понятие интегрируемой (суммируемой) функции нескольких переменных. Например, функция $f(x, t)$ называется квадратично интегрируемой в области $S = \{a \leq x \leq b, a \leq t \leq b\}$, если $f(x, t)$ измерима и

$$\|f\|^2 = \int_a^b \int_a^b |f(x, t)|^2 dx dt < +\infty.$$

Здесь, как и ранее $\|f\|$ обозначает норму функции $f(x, t)$.

* В общем случае рассматриваются измеримые функции и интеграл Лебега. Как обычно, эквивалентные функции (т. е. равные почти всюду или отличающиеся на множестве меры нуль) считаются одним и тем же элементом L_2 .

7.1-2. Структура решений линейных интегральных уравнений

Линейное интегральное уравнение с переменным пределом интегрирования имеет вид

$$\beta y(x) + \int_a^x K(x, t)y(t) dt = f(x), \quad (1)$$

где $y(x)$ — неизвестная функция.

Линейное интегральное уравнение с постоянными пределами интегрирования имеет вид

$$\beta y(x) + \int_a^b K(x, t)y(t) dt = f(x). \quad (2)$$

При $\beta = 0$, уравнения (1) и (2) называются *линейными интегральными уравнениями первого рода*, а при $\beta \neq 0$ — *линейными интегральными уравнениями второго рода*.

Уравнения вида (1) и (2) при специальных условиях, накладываемых на их ядра и правые части, образуют различные классы интегральных уравнений (уравнения Вольтерра, уравнения Фредгольма, уравнения типа свертки и др.), которые подробно рассмотрены в главах 8–13.

В ряде случаев, для краткости, будем использовать операторную форму записи линейных интегральных уравнений (1) и (2):

$$\mathbf{L}[y] = f(x). \quad (3)$$

Линейный оператор \mathbf{L} обладает следующими свойствами:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}[y_1 + y_2] &= \mathbf{L}[y_1] + \mathbf{L}[y_2], \\ \mathbf{L}[\sigma y] &= \sigma \mathbf{L}[y], \quad \sigma = \text{const}. \end{aligned}$$

При $f(x) \equiv 0$ линейные уравнения называются *однородными*, а при $f(x) \not\equiv 0$ — *неоднородными*.

Любое линейное однородное интегральное уравнение имеет тривиальное решение $y \equiv 0$.

Если $y_1 = y_1(x)$ и $y_2 = y_2(x)$ — частные решения линейного однородного интегрального уравнения, то их линейная комбинация $C_1 y_1 + C_2 y_2$ с произвольными постоянными C_1, C_2 также будет решением данного уравнения (в физических задачах это свойство называют принципом линейной суперпозиции).

Общее решение линейного неоднородного интегрального уравнения (3) равно сумме общего решения $Y = Y(x)$ соответствующего однородного уравнения $\mathbf{L}[Y] = 0$ и любого частного решения $\bar{y} = \bar{y}(x)$ данного неоднородного уравнения $\mathbf{L}[\bar{y}] = f(x)$:

$$y = Y + \bar{y}. \quad (4)$$

Если однородное интегральное уравнение имеет только тривиальное решение $Y \equiv 0$, то решение соответствующего неоднородного уравнения будет единственным (если оно существует).

Пусть \bar{y}_1 и \bar{y}_2 — решения линейных неоднородных интегральных уравнений с одинаковыми левыми и разными правыми частями: $\mathbf{L}[\bar{y}_1] = f_1(x)$ и $\mathbf{L}[\bar{y}_2] = f_2(x)$. Тогда функция $\bar{y} = \bar{y}_1 + \bar{y}_2$ является решением уравнения $\mathbf{L}[\bar{y}] = f_1(x) + f_2(x)$.

Преобразование

$$x = g(z), \quad t = g(\tau), \quad y(x) = \varphi(z)w(z) + \psi(z), \quad (5)$$

где $g(z)$, $\varphi(z)$, $\psi(z)$ — произвольные непрерывные функции ($g'_z \neq 0$), приводит уравнения (1) и (2) к линейным уравнениям того же вида относительно неизвестной функции $w = w(z)$. Такие преобразования часто используются для построения точных решений линейных интегральных уравнений.

7.1-3. Интегральные преобразования

Интегральные преобразования имеют вид

$$\tilde{f}(\lambda) = \int_a^b \varphi(x, \lambda) f(x) dx.$$

Функция $f(x)$ называется *оригиналом*, $\tilde{f}(\lambda)$ — *изображением* (или *образом*) функции $f(x)$, а $\varphi(x, \lambda)$ — *ядром* интегрального преобразования. Пределы интегрирования a и b — действительные (как правило $a = 0$, $b = \infty$ или $a = -\infty$, $b = \infty$).



Рис. 1. Принципиальная схема решения интегральных уравнений при помощи интегральных преобразований

В разд. 7.2–7.6 описаны наиболее распространенные интегральные преобразования (Лапласа, Меллина, Фурье и др.), которые встречаются в этой книге при решении конкретных интегральных уравнений. В этих же разделах даны соответствующие формулы для обратных преобразований, которые имеют вид

$$f(x) = \int_{\mathcal{L}} \psi(x, \lambda) \tilde{f}(\lambda) d\lambda$$

и позволяют по заданному изображению $\tilde{f}(\lambda)$ восстановить оригинал $f(x)$. Контур интегрирования \mathcal{L} при этом может проходить как по действительной оси, так и по комплексной плоскости.

Интегральные преобразования используются для решения различных дифференциальных и интегральных уравнений. На рис. 1 приведена принципиальная схема решения интегральных уравнений при помощи интегральных преобразований (в случае, приведенном на схеме, использование подходящего интегрального преобразования позволяет получить линейное алгебраическое уравнение первого порядка относительно изображения $\tilde{f}(\lambda)$).

Во многих случаях для вычисления определенных интегралов, в том числе для определения обратных преобразований Лапласа, Меллина и Фурье, используют методы теории функций комплексного переменного, включая теорему о вычетах и лемму Жордана, которые излагаются ниже в пп. 7.1-4 и 7.1-5.

7.1-4. Вычеты. Формулы для вычислений

Вычетом функции $f(z)$ в изолированной особой точке $z = a$ комплексной плоскости z называется число

$$\operatorname{res}_{z=a} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c_\varepsilon} f(z) dz, \quad i^2 = -1,$$

где c_ε — окружность достаточно малого радиуса ε , которая описывается уравнением $|z - a| = \varepsilon$.

Если точка $z = a$ есть полюс n -го порядка* функции $f(z)$, то

$$\operatorname{res}_{z=a} f(z) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow a} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} [(z-a)^n f(z)].$$

Для простого полюса, что соответствует $n = 1$, отсюда имеем

$$\operatorname{res}_{z=a} f(z) = \lim_{z \rightarrow a} [(z-a)f(z)].$$

Если $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, причем $\varphi(a) \neq 0$, а $\psi(z)$ имеет в точке $z = a$ нуль первого порядка, т. е.

$\psi(a) = 0$, а $\psi'_z(a) \neq 0$, то

$$\operatorname{res}_{z=a} f(z) = \frac{\varphi(a)}{\psi'_z(a)}.$$

7.1-5. Лемма Жордана

Если функция $f(z)$ непрерывна в области $|z| \geq R_0$, $\operatorname{Im} z \geq \alpha$ (α — фиксированное действительное число) и $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0$, то для любого $\lambda > 0$ выполняется предельное равенство

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} e^{i\lambda z} f(z) dz = 0,$$

где C_R — дуга окружности $|z| = R$, лежащая в рассматриваемой области.

⊙ Литература: М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко (1968), А. Г. Свешников, А. Н. Тихонов (1970).

7.2. Преобразование Лапласа**7.2-1. Определение. Формула обращения**

Преобразование Лапласа для произвольной (комплекснозначной) функции $f(x)$ действительно-го переменного x ($x \geq 0$) определяется следующим образом:

$$\tilde{f}(p) = \int_0^\infty e^{-px} f(x) dx, \quad (1)$$

где $p = s + i\sigma$ — комплексная переменная.

Функция $f(x)$ называется *оригиналом*, а $\tilde{f}(p)$ — *изображением (образом)* функции $f(x)$.

Преобразование Лапласа существует для непрерывных и кусочно-непрерывных функций, удовлетворяющих условию $|f(x)| < M e^{\sigma_0 x}$, где $M > 0$ и $\sigma_0 \geq 0$ — некоторые числа. Далее считаем, что в указанной оценке взято наименьшее из возможных чисел σ_0 , которое называется *показателем роста* функции $f(x)$.

Для всякого оригинала $f(x)$ функция $\tilde{f}(p)$ определена в полуплоскости $\operatorname{Re} p > \sigma_0$ и является в этой полуплоскости аналитической функцией.

Формулу (1) кратко будем записывать так:

$$\tilde{f}(p) = \mathfrak{L}\{f(x)\} \quad \text{или} \quad \tilde{f}(p) = \mathfrak{L}\{f(x), p\}.$$

По известному изображению $\tilde{f}(p)$ оригинал находится с помощью обратного преобразования Лапласа

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \tilde{f}(p) e^{px} dp, \quad i^2 = -1, \quad (2)$$

* В окрестности этой точки $f(z) \approx \operatorname{const} (z-a)^{-n}$.

где путь интегрирования расположен параллельно мнимой оси комплексной плоскости справа от всех особых точек функции $\tilde{f}(p)$, что соответствует $c > \sigma_0$.

Интеграл в (2) понимается в смысле главного значения:

$$\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \tilde{f}(p)e^{px} dp = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_{c-i\omega}^{c+i\omega} \tilde{f}(p)e^{px} dp.$$

В области $x < 0$ формула (2) дает $f(x) \equiv 0$.

Формула (2) справедлива для непрерывных функций. Если в точке $x = x_0 > 0$, функция $f(x)$ имеет конечный разрыв первого рода, то правая часть формулы (2) в этой точке дает значение $\frac{1}{2}[f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)]$ (при $x_0 = 0$ первый член в квадратных скобках должен быть опущен).

Формулу обращения преобразования Лапласа (2) кратко будем записывать так:

$$f(x) = \mathfrak{L}^{-1}\{\tilde{f}(p)\} \quad \text{или} \quad f(x) = \mathfrak{L}^{-1}\{\tilde{f}(p), x\}.$$

7.2-2. Обращение рациональных функций

Рассмотрим важный случай, когда изображение является рациональной функцией вида

$$\tilde{f}(p) = \frac{R(p)}{Q(p)}, \quad (3)$$

где $Q(p)$ и $R(p)$ — многочлены переменной p , причем степень многочлена $Q(p)$ больше степени многочлена $R(p)$.

Пусть все нули знаменателя простые, т. е. справедливо равенство

$$Q(p) \equiv \text{const} (p - \lambda_1)(p - \lambda_2) \dots (p - \lambda_n).$$

Тогда оригинал можно определить по формуле

$$f(x) = \sum_{k=1}^n \frac{R(\lambda_k)}{Q'(\lambda_k)} \exp(\lambda_k x), \quad (4)$$

где штрихом обозначены производные.

Пусть многочлен $Q(p)$ имеет кратные корни, т. е.

$$Q(p) \equiv \text{const} (p - \lambda_1)^{s_1} (p - \lambda_2)^{s_2} \dots (p - \lambda_m)^{s_m}.$$

В этом случае оригинал вычисляется по формуле

$$f(x) = \sum_{k=1}^m \frac{1}{(s_k - 1)!} \lim_{p \rightarrow \lambda_k} \frac{d^{s_k-1}}{dp^{s_k-1}} [(p - \lambda_k)^{s_k} \tilde{f}(p)e^{px}].$$

7.2-3. Представление оригиналов в виде ряда

Если функция $\tilde{f}(p)$ имеет конечное число особых точек p_1, p_2, \dots, p_n и стремится к нулю при $p \rightarrow \infty$, то интеграл в (2) можно вычислить с помощью теории вычетов путем применения леммы Жордана (см. пп. 7.1-4 и 7.1-5). В этом случае

$$f(x) = \sum_{k=1}^n \text{res}_{p=p_k} [\tilde{f}(p)e^{px}]. \quad (5)$$

Формула (5) может быть обобщена на случай, когда функция $\tilde{f}(p)$ имеет бесконечное количество особых точек. Тогда функция $f(x)$ представляется в виде бесконечного ряда.

Если точка $p = \infty$ является правильной точкой функции $\tilde{f}(p)$ и $\tilde{f}(\infty) = 0$, то функция $\tilde{f}(p)$ представляет собой изображение функции действительной переменной

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } t > 0, \\ \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1} \frac{x^n}{n!} & \text{при } t < 0, \end{cases} \quad (6)$$

где c_n — коэффициенты разложения функции $\tilde{f}(p)$ в ряд Лорана в окрестности точки $p = \infty$.

7.2-4. Теорема о свертке для преобразования Лапласа

Сверткой (по Лапласу) двух функций $f(x)$ и $g(x)$ называется выражение

$$f(x) * g(x) \equiv \int_0^x f(t)g(x-t) dt.$$

Справедлива теорема о свертке:

$$\mathfrak{L}\{f(x) * g(x)\} = \mathfrak{L}\{f(x)\} \mathfrak{L}\{g(x)\},$$

которая часто используется при решении уравнений Вольтерра с разностным ядром.

7.2-5. Предельные теоремы

Пусть $0 \leq x < \infty$ и $\tilde{f}(p) = \mathfrak{L}\{f(x)\}$ — преобразование Лапласа функции $f(x)$. Если существует предел $f(x)$ при $x \rightarrow 0$, то

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{p \rightarrow \infty} [p\tilde{f}(p)].$$

Если существует предел $f(x)$ при $x \rightarrow \infty$, то

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{p \rightarrow 0} [p\tilde{f}(p)].$$

7.2-6. Основные свойства преобразования Лапласа

В таблице 1 приведены основные формулы соответствия оригиналов и изображений преобразования Лапласа.

ТАБЛИЦА 1
Основные свойства преобразования Лапласа

№	Оригинал	Изображение	Операция
1	$af_1(x) + bf_2(x)$	$a\tilde{f}_1(p) + b\tilde{f}_2(p)$	Линейность
2	$f(x/a), a > 0$	$a\tilde{f}(ap)$	Изменение масштаба
3	$f(x-a),$ $f(\xi) \equiv 0$ при $\xi < 0$	$e^{-ap}\tilde{f}(p)$	Сдвиг аргумента
4	$x^n f(x); n = 1, 2, \dots$	$(-1)^n \tilde{f}_p^{(n)}(p)$	Дифференцирование изображения
5	$\frac{1}{x} f(x)$	$\int_p^\infty \tilde{f}(q) dq$	Интегрирование изображения
6	$e^{ax} f(x)$	$\tilde{f}(p-a)$	Смещение в комплексной плоскости
7	$f'_x(x)$	$p\tilde{f}(p) - f(+0)$	Дифференцирование
8	$f_x^{(n)}(x)$	$p^n \tilde{f}(p) - \sum_{k=1}^n p^{n-k} f_x^{(k-1)}(+0)$	Дифференцирование
9	$x^m f_x^{(n)}(x), m \geq n$	$\left(-\frac{d}{dp}\right)^m [p^n \tilde{f}(p)]$	Дифференцирование
10	$\frac{d^n}{dx^n} [x^m f(x)], m \geq n$	$(-1)^m p^n \frac{d^m}{dp^m} \tilde{f}(p)$	Дифференцирование
11	$\int_0^x f(t) dt$	$\frac{\tilde{f}(p)}{p}$	Интегрирование
12	$\int_0^x f_1(t)f_2(x-t) dt$	$\tilde{f}_1(p)\tilde{f}_2(p)$	Свертка

Существуют таблицы прямых и обратных преобразований Лапласа (см. литературу в конце раздела), в которых сведены вместе конкретные функции и их изображения. Эти таблицы удобно использовать при решении линейных интегральных и дифференциальных уравнений.

7.2-7. Формула Поста–Уиддера

Для приложений имеется возможность определять значения оригинала $f(x)$, если известны значения изображения $\tilde{f}(t)$ на действительной полуоси при $t = p \geq 0$. Для этого можно использовать формулу Поста–Уиддера

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{n}{x} \right)^{n+1} \tilde{f}_t^{(n)} \left(\frac{n}{x} \right) \right]. \quad (7)$$

Для получения приближенной формулы обращения можно в (5) вместо предела взять конкретное (достаточно большое) целое значение n .

● *Литература:* И. И. Хиршман, Д. В. Уиддер (1958), Г. Бейтмен, А. Эрдейи (1969), Г. Дёч (1971), J. W. Miles (1971), В. А. Диткин, А. П. Прудников (1974), В. Davis (1978), Yu. A. Brychkov, A. P. Prudnikov (1989), W. H. Beyer (1991), A. D. Polyanin, A. V. Manzhirov (1998), А. В. Манжиров, А. Д. Полянин (1999, 2000).

7.3. Преобразование Меллина

7.3-1. Определение. Формула обращения

Пусть функция $f(x)$ определена при положительных x и удовлетворяет условию

$$\int_0^1 |f(x)| x^{\sigma_1 - 1} dx < \infty$$

и условию

$$\int_1^\infty |f(x)| x^{\sigma_2 - 1} dx < \infty$$

при подходящем выборе чисел σ_1 и σ_2 ($\sigma_1 < \sigma_2$).

Преобразование Меллина функции $f(x)$ вводится следующим образом:

$$\hat{f}(s) = \int_0^\infty f(x) x^{s-1} dx, \quad (1)$$

где $s = \sigma + i\tau$ — комплексная переменная ($\sigma_1 < \sigma < \sigma_2$).

Функция $f(x)$ называется *оригиналом*, а $\hat{f}(s)$ — *изображением* $f(x)$.

Формулу (1) кратко будем записывать так:

$$\hat{f}(s) = \mathfrak{M}\{f(x)\},$$

или в ряде случаев в форме

$$\hat{f}(s) = \mathfrak{M}\{f(x), s\}.$$

По известному изображению $\hat{f}(s)$ оригинал находится с помощью обратного преобразования Меллина

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \hat{f}(s) x^{-s} ds, \quad \sigma_1 < \sigma < \sigma_2, \quad (2)$$

где путь интегрирования расположен параллельно мнимой оси комплексной плоскости s , а интеграл понимается в смысле главного значения.

Формула (2) справедлива для непрерывных функций. Если в точке $x = x_0$ $x = x_0 > 0$, функция $f(x)$ имеет конечный разрыв первого рода, то правая часть формулы (2) в этой точке дает значение $\frac{1}{2}[f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)]$ (при $x_0 = 0$ первый член в квадратных скобках должен быть опущен).

Кратко формулу (2) будем записывать так:

$$f(x) = \mathfrak{M}^{-1}\{\hat{f}(s)\} \quad \text{или} \quad f(x) = \mathfrak{M}^{-1}\{\hat{f}(s), x\}.$$

7.3-2. Основные свойства преобразования Меллина

В таблице 2 приведены основные формулы соответствия оригиналов и изображений преобразования Меллина.

ТАБЛИЦА 2
Основные свойства преобразования Меллина

№	Оригинал	Изображение	Операция
1	$af_1(x) + bf_2(x)$	$a\widehat{f}_1(s) + b\widehat{f}_2(s)$	Линейность
2	$f(ax), a > 0$	$a^{-s}\widehat{f}(s)$	Изменение масштаба
3	$x^a f(x)$	$\widehat{f}(s+a)$	Сдвиг аргумента у изображения
4	$f(x^2)$	$\frac{1}{2}\widehat{f}(\frac{1}{2}s)$	Квадратичный аргумент
5	$f(1/x)$	$\widehat{f}(-s)$	Изменение знака у аргумента изображения
6	$x^\lambda f(ax^\beta), a > 0, \beta \neq 0$	$\frac{1}{\beta}a^{-\frac{s+\lambda}{\beta}}\widehat{f}\left(\frac{s+\lambda}{\beta}\right)$	Преобразование оригинала, содержащее степени
7	$f'_x(x)$	$-(s-1)\widehat{f}(s-1)$	Дифференцирование
8	$xf'_x(x)$	$-s\widehat{f}(s)$	Дифференцирование
9	$f_x^{(n)}(x)$	$(-1)^n \frac{\Gamma(s)}{\Gamma(s-n)}\widehat{f}(s-n)$	Множественное дифференцирование
10	$\left(x \frac{d}{dx}\right)^n f(x)$	$(-1)^n s^n \widehat{f}(s)$	Множественное дифференцирование
11	$x^\alpha \int_0^\infty t^\beta f_1(xt)f_2(t) dt$	$\widehat{f}_1(s+\alpha)\widehat{f}_2(1-s-\alpha+\beta)$	Сложное интегрирование
12	$x^\alpha \int_0^\infty t^\beta f_1\left(\frac{x}{t}\right)f_2(t) dt$	$\widehat{f}_1(s+\alpha)\widehat{f}_2(s+\alpha+\beta+1)$	Сложное интегрирование

7.3-3. Связь преобразований Меллина, Лапласа и Фурье

Существуют таблицы прямых и обратных преобразований Меллина (см. литературу в конце раздела), которые удобно использовать при решении конкретных интегральных и дифференциальных уравнений. Преобразование Меллина связано с преобразованиями Лапласа и Фурье следующими формулами:

$$\mathfrak{M}\{f(x), s\} = \mathfrak{L}\{f(e^x), -s\} + \mathfrak{L}\{f(e^{-x}), s\} = \mathfrak{F}\{f(e^x), is\},$$

что позволяет использовать также более распространенные таблицы прямых и обратных преобразований Лапласа и Фурье.

© Литература: Г. Бейтмен, А. Эрдейи (1969), Г. Дёч (1971), В. А. Диткин, А. П. Прудников (1974), Ю. А. Брычков, А. Р. Прудников (1989), А. Д. Полянин, А. В. Манжиров (1998), А. В. Манжиров, А. Д. Полянин (1999, 2000).

7.4. Преобразование Фурье**7.4-1. Определение. Формула обращения**

Преобразование Фурье вводится следующим образом:

$$\tilde{f}(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iux} dx. \quad (1)$$

Формулу (1) кратко будем записывать так:

$$\tilde{f}(u) = \mathfrak{F}\{f(x)\} \quad \text{или} \quad \tilde{f}(u) = \mathfrak{F}\{f(x), u\}.$$

По известному изображению $\tilde{f}(u)$ оригинал $f(x)$ находится с помощью обратного преобразования Фурье

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(u) e^{iux} du. \quad (2)$$

Формула (2) справедлива для непрерывных функций. Если в точке $x = x_0$ $x = x_0 > 0$, функция $f(x)$ имеет конечный разрыв первого рода, то правая часть формулы (2) в этой точке дает значение $\frac{1}{2}[f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)]$.

Кратко будем записывать (2) так:

$$f(x) = \mathfrak{F}^{-1}\{\tilde{f}(u)\} \quad \text{или} \quad f(x) = \mathfrak{F}^{-1}\{\tilde{f}(u), x\}.$$

7.4-2. Несимметричная форма преобразования

В ряде случаев бывает удобно пользоваться преобразованием Фурье в форме

$$\tilde{f}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-iux} dx, \quad (3)$$

где (3) запишем следующим образом: $\tilde{f}(u) = \mathcal{F}\{f(x)\}$ или $\tilde{f}(u) = \mathcal{F}\{f(x), u\}$.

В этом случае по известному изображению $\tilde{f}(u)$ оригинал $f(x)$ находится с помощью формулы обратного преобразования Фурье в виде

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(u) e^{iux} du, \quad (4)$$

причем для (4) вводится краткая запись $f(x) = \mathcal{F}^{-1}\{\tilde{f}(u)\}$ или $f(x) = \mathcal{F}^{-1}\{\tilde{f}(u), x\}$.

7.4-3. Альтернативное преобразование Фурье

Иногда, например в теории краевых задач, используют *альтернативное преобразование Фурье* (его называют просто преобразованием Фурье) в форме

$$\mathcal{F}(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{iux} dx. \quad (5)$$

Формулу (5) кратко будем записывать следующим образом:

$$\mathcal{F}(u) = \mathbf{F}\{f(x)\} \quad \text{или} \quad \mathcal{F}(u) = \mathbf{F}\{f(x), u\}.$$

По известному изображению $\mathcal{F}(u)$ оригинал $f(x)$ находится с помощью обратного преобразования

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(u) e^{-iux} du. \quad (6)$$

Формулу (6) кратко будем записывать так:

$$f(x) = \mathbf{F}^{-1}\{\mathcal{F}(u)\} \quad \text{или} \quad f(x) = \mathbf{F}^{-1}\{\mathcal{F}(u), x\}.$$

Функция $\mathcal{F}(u)$ называется также *интегралом Фурье* от функции $f(x)$.

Аналогично тому, как было проделано для преобразования Фурье, можно ввести несимметричную форму и для альтернативного преобразования Фурье в виде

$$\check{\mathcal{F}}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{iux} dx, \quad f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \check{\mathcal{F}}(u) e^{-iux} du, \quad (7)$$

при этом прямое и обратное преобразования (7) обозначают соответственно $\check{\mathcal{F}}(u) = \check{\mathbf{F}}\{f(x)\}$ и $f(x) = \check{\mathbf{F}}^{-1}\{\check{\mathcal{F}}(u)\}$ или $\check{\mathcal{F}}(u) = \check{\mathbf{F}}\{f(x), u\}$ и $f(x) = \check{\mathbf{F}}^{-1}\{\check{\mathcal{F}}(u), x\}$.

7.4-4. Теорема о свертке для преобразования Фурье

Сверткой (по Фурье) двух функций $f(x)$ и $g(x)$ называется выражение

$$f(x) * g(x) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g(t) dt.$$

Путем замены переменных $x-t = u$ легко установить, что свертка симметрична относительно свертываемых функций: $f(x) * g(x) = g(x) * f(x)$.

Теорема. Преобразование Фурье свертки равно произведению интегралов Фурье свертываемых функций:

$$\mathfrak{F}\{f(x) * g(x)\} = \mathfrak{F}\{f(x)\} \mathfrak{F}\{g(x)\}. \quad (8)$$

Для альтернативного преобразования Фурье теорема о свертке выражается соотношением

$$\mathbf{F}\{f(x) * g(x)\} = \mathbf{F}\{f(x)\} \mathbf{F}\{g(x)\}. \quad (9)$$

Формулы (8) и (9) будут использованы в главах 10 и 11 для решения линейных интегральных уравнений с разностными ядрами.

© *Литература:* Г. Бейтмен, А. Эрдейи (1969), J. W. Miles (1971), В. А. Диткин, А. П. Прудников (1974), B. Davis (1978), Ю. А. Brychkov, A. P. Prudnikov (1989), W. H. Beyer (1991), A. D. Polyaniin, A. V. Manzhirrov (1998), А. В. Манжиров, А. Д. Полянин (1999, 2000).

7.5. Синус- и косинус-преобразования Фурье

7.5-1. Косинус-преобразование Фурье

Пусть функция $f(x)$ интегрируема на полуоси $0 \leq x < \infty$. Косинус-преобразование Фурье вводится следующим образом:

$$\tilde{f}_c(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(x) \cos(xu) dx, \quad 0 < u < \infty. \quad (1)$$

По известному изображению $\tilde{f}_c(u)$ оригинал $f(x)$ находится с помощью обратного косинус-преобразования Фурье

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \tilde{f}_c(u) \cos(xu) du, \quad 0 < x < \infty. \quad (2)$$

Косинус-преобразование Фурье (1) обозначают $\tilde{f}_c(u) = \mathfrak{F}_c\{f(x)\}$. Из формулы (2) следует, что косинус-преобразование Фурье обладает свойством $\mathfrak{F}_c^2 = 1$. Существуют таблицы косинус-преобразования Фурье (см. литературу в конце раздела), которыми удобно пользоваться при решении конкретных интегральных уравнений.

Иногда пользуются несимметричной формой косинус-преобразования Фурье, задаваемой парой формул

$$\tilde{f}_c(u) = \int_0^\infty f(x) \cos(xu) dx, \quad f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \tilde{f}_c(u) \cos(xu) du. \quad (3)$$

Прямое и обратное косинус-преобразования Фурье (3) обычно обозначают соответственно $\tilde{f}_c(u) = \mathcal{F}_c\{f(x)\}$ и $f(x) = \mathcal{F}_c^{-1}\{\tilde{f}_c(u)\}$.

7.5-2. Синус-преобразование Фурье

Пусть функция $f(x)$ интегрируема на полуоси $0 \leq x < \infty$. Синус-преобразование Фурье вводится следующим образом:

$$\tilde{f}_s(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(x) \sin(xu) dx, \quad 0 < u < \infty. \quad (4)$$

По известному изображению $\tilde{f}_s(u)$ оригинал $f(x)$ находится с помощью обратного синус-преобразования Фурье

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \tilde{f}_s(u) \sin(xu) du, \quad 0 < x < \infty. \quad (5)$$

Синус-преобразование Фурье (4) кратко обозначают $\tilde{f}_s(u) = \mathfrak{F}_s\{f(x)\}$. Из формулы (5) следует, что синус-преобразование Фурье обладает свойством $\mathfrak{F}_s^2 = 1$. Существуют таблицы синус-преобразования Фурье (см. литературу в конце раздела), которыми удобно пользоваться при решении конкретных интегральных уравнений.

В ряде случаев бывает удобнее использовать несимметричную форму синус-преобразования Фурье, задаваемую следующей парой формул:

$$\check{f}_s(u) = \int_0^\infty f(x) \sin(xu) dx, \quad f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \check{f}_s(u) \sin(xu) du. \quad (6)$$

Прямое и обратное синус-преобразования Фурье (6) часто обозначают через $\check{f}_s(u) = \mathcal{F}_s\{f(x)\}$ и $f(x) = \mathcal{F}_s^{-1}\{\check{f}_s(u)\}$ соответственно.

● *Литература:* И. Снеддон (1955), И. И. Хиршман, Д. В. Уиддер (1958), Г. Бейтмен, А. Эрдейи (1969), В. А. Диткин, А. П. Прудников (1974), А. D. Polyanin, A. V. Manzhirov (1998), А. В. Манжиров, А. Д. Полянин (1999, 2000).

7.6. Другие интегральные преобразования

7.6-1. Преобразование Ханкеля

Преобразование Ханкеля вводится следующим образом:

$$\check{f}_\nu(u) = \int_0^\infty x J_\nu(ux) f(x) dx, \quad 0 < u < \infty, \quad (1)$$

где $\nu > -\frac{1}{2}$, а $J_\nu(x)$ — функция Бесселя первого рода порядка ν .

По известному изображению $\check{f}_\nu(u)$ оригинал $f(x)$ находится с помощью обратного преобразования Ханкеля

$$f(x) = \int_0^\infty u J_\nu(ux) \check{f}_\nu(u) du, \quad 0 < x < \infty. \quad (2)$$

Отметим, что если функция $f(x)$ такая, что $f(x) = O(x^\alpha)$ при $x \rightarrow 0$, $\alpha + \nu + 2 > 0$ и $f(x) = O(x^\beta)$ при $x \rightarrow \infty$, $\beta + \frac{3}{2} < 0$, то интеграл (1) сходится.

Формула обращения (2) справедлива для непрерывных функций. Если $f(x)$ в некоторых точках имеет конечный разрыв первого рода, то левую часть формулы (2) следует заменить на $\frac{1}{2} [f(x-0) + f(x+0)]$.

Преобразование Ханкеля (1) кратко обозначают $\check{f}_\nu(u) = \mathfrak{H}_\nu\{f(x)\}$. Из формулы (2) следует, что преобразование Ханкеля обладает свойством $\mathfrak{H}_\nu^2 = 1$.

7.6-2. Преобразование Мейера

Преобразование Мейера вводится следующим образом:

$$\hat{f}_\mu(s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \sqrt{sx} K_\mu(sx) f(x) dx, \quad 0 < s < \infty, \quad (3)$$

где $K_\mu(x)$ — модифицированная функция Бесселя второго рода (функция Макдональда) порядка μ .

По известному изображению $\hat{f}_\mu(s)$ оригинал $f(x)$ находится с помощью обратного преобразования Мейера

$$f(x) = \frac{1}{i\sqrt{2\pi}} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \sqrt{sx} I_\mu(sx) \hat{f}_\mu(s) ds, \quad 0 < x < \infty, \quad (4)$$

где $I_\mu(x)$ — модифицированная функция Бесселя первого рода порядка μ . Для преобразования Мейера определена свертка и построено операционное исчисление.

7.6-3. Преобразование Конторовича–Лебедева

Преобразование Конторовича–Лебедева вводится следующим образом:

$$F(\tau) = \int_0^\infty K_{i\tau}(x) f(x) dx, \quad 0 < \tau < \infty, \quad (5)$$

где $K_\mu(x)$ — модифицированная функция Бесселя второго рода (функция Макдональда) порядка μ , а i — мнимая единица.

По известному изображению $F(\tau)$ оригинал $f(x)$ находится с помощью обратного преобразования Конторовича–Лебедева

$$f(x) = \frac{2}{\pi^2 x} \int_0^\infty \tau \operatorname{sh}(\pi\tau) K_{i\tau}(x) F(\tau) d\tau, \quad 0 < x < \infty. \quad (6)$$

7.6-4. Y -преобразование и другие преобразования

Интегральное Y -преобразование вводится соотношением

$$F_\nu(u) = \int_0^\infty \sqrt{ux} Y_\nu(ux) f(x) dx, \quad (7)$$

где $Y_\nu(x)$ — функция Бесселя второго рода порядка ν .

По известному изображению $F_\nu(u)$ оригинал $f(x)$ находится с помощью обратного Y -преобразования

$$f(x) = \int_0^\infty \sqrt{ux} \mathbf{H}_\nu(ux) F_\nu(u) du, \quad (8)$$

где $\mathbf{H}_\nu(x)$ — функция Струве, определяемая формулой

$$\mathbf{H}_\nu(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j (x/2)^{\nu+2j+1}}{\Gamma(j + \frac{3}{2}) \Gamma(\nu + j + \frac{3}{2})}.$$

Существуют и другие интегральные преобразования, основные из которых, наряду с указанными выше преобразованиями, приведены в табл. 3 (об ограничениях, накладываемых на функции и параметры преобразований, см. в литературе, приведенной в конце раздела).

ТАБЛИЦА 3
Интегральные преобразования

Название преобразования	Интегральное преобразование	Формула обращения
Преобразование Лапласа	$\tilde{f}(p) = \int_0^\infty e^{-px} f(x) dx$	$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{px} \tilde{f}(p) dp$
Двухстороннее преобразование Лапласа	$\tilde{f}_*(p) = \int_{-\infty}^\infty e^{-px} f(x) dx$	$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{px} \tilde{f}_*(p) dp$
Преобразование Фурье	$\tilde{f}(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty e^{-iux} f(x) dx$	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty e^{iux} \tilde{f}(u) du$
Синус-преобразование Фурье	$\tilde{f}_s(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \sin(xu) f(x) dx$	$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \sin(xu) \tilde{f}_s(u) du$
Косинус-преобразование Фурье	$\tilde{f}_c(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \cos(xu) f(x) dx$	$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \cos(xu) \tilde{f}_c(u) du$
Преобразование Хартли	$\tilde{f}_h(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty g(x, u) f(x) dx,$ $g(x, u) \equiv \cos xu + \sin xu$	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty g(x, u) \tilde{f}_h(u) du$
Преобразование Меллина	$\hat{f}(s) = \int_0^\infty x^{s-1} f(x) dx$	$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} x^{-s} \hat{f}(s) ds$
Преобразование Ханкеля	$\hat{f}_\nu(w) = \int_0^\infty x J_\nu(xw) f(x) dx$	$f(x) = \int_0^\infty w J_\nu(xw) \hat{f}_\nu(w) dw$
Y -преобразование	$F_\nu(u) = \int_0^\infty \sqrt{ux} Y_\nu(ux) f(x) dx$	$f(x) = \int_0^\infty \sqrt{ux} \mathbf{H}_\nu(ux) F_\nu(u) du$
Преобразование Мейера (K -преобразование)	$\hat{f}(s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \sqrt{sx} K_\nu(sx) f(x) dx$	$f(x) = \frac{1}{i\sqrt{2\pi}} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \sqrt{sx} I_\nu(sx) \hat{f}(s) ds$

ТАБЛИЦА 3 (продолжение)

Название преобразования	Интегральное преобразование	Формула обращения
Преобразование Бохнера	$\tilde{f}(r) = \int_0^\infty J_{n/2-1}(2\pi x r) G(x, r) f(x) dx,$ $G(x, r) = 2\pi r (x/r)^{n/2}, \quad n = 1, 2, \dots$	$f(x) = \int_0^\infty J_{n/2-1}(2\pi r x) G(r, x) \tilde{f}(r) dr$
Преобразование Вебера	$F_a(u) = \int_a^\infty W_\nu(xu, au) x f(x) dx,$ $W_\nu(\beta, \mu) \equiv J_\nu(\beta) Y_\nu(\mu) - J_\nu(\mu) Y_\nu(\beta)$	$f(x) = \int_0^\infty \frac{W_\nu(xu, au)}{J_\nu^2(au) + Y_\nu^2(au)} u F_a(u) du$
Преобразование Конторовича–Лебедева	$F(\tau) = \int_0^\infty K_{i\tau}(x) f(x) dx$	$f(x) = \frac{2}{\pi^2 x} \int_0^\infty \tau \operatorname{sh}(\pi \tau) K_{i\tau}(x) F(\tau) d\tau$
Преобразование Мелера–Фока	$\tilde{F}(\tau) = \int_1^\infty P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x) f(x) dx$	$f(x) = \int_0^\infty \tau \operatorname{th}(\pi \tau) P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x) \tilde{F}(\tau) d\tau$
Преобразование Гильберта*	$\hat{F}(s) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{f(x)}{x-s} dx$	$f(x) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{\hat{F}(s)}{s-x} ds$
<p>Обозначения: $i = \sqrt{-1}$, $J_\mu(x)$ и $Y_\mu(x)$ — функции Бесселя первого и второго рода, $I_\mu(x)$ и $K_\mu(x)$ — модифицированные функции Бесселя первого и второго рода, $P_\mu(x)$ — сферическая функция Лежандра второго рода.</p> <p>* Примечание. В прямом и обратном преобразованиях Гильберта интегралы понимаются в смысле главного значения.</p>		

● *Литература:* Г. Бейтмен, А. Эрдейи (1969), J. W. Miles (1971), В. А. Диткин, А. П. Прудников (1974), В. Davis (1978), D. Zwillinger (1989), Yu. A. Brychkov, A. P. Prudnikov (1989), W. H. Beyer (1991).

8. Методы решения линейных уравнений вида $\int_a^x K(x, t)y(t) dt = f(x)$

8.1. Уравнения Вольтерра первого рода

8.1-1. Структура уравнений. Классы функций и ядер

В главе 8 излагаются методы решения линейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода, которые имеют вид

$$\int_a^x K(x, t)y(t) dt = f(x), \quad (1)$$

где $y(x)$ — неизвестная функция ($a \leq x \leq b$), $K(x, t)$ — ядро интегрального уравнения, $f(x)$ — некоторая известная функция, которая называется свободным членом или правой частью уравнения (1).

Функции $y(x)$ и $f(x)$ обычно считают непрерывными, либо квадратично интегрируемыми на $[a, b]$. Ядро интегрального уравнения $K(x, t)$ полагают непрерывным в квадрате $S = \{a \leq x \leq b, a \leq t \leq b\}$, либо удовлетворяющим условию

$$\int_a^b \int_a^b K^2(x, t) dx dt = B^2 < \infty, \quad (2)$$

где B — постоянная, т. е. квадратично интегрируемым в этом квадрате. В формуле (2) полагается, что $K(x, t) \equiv 0$ при $t > x$.

Ядро интегрального уравнения $K(x, t)$ называется вырожденным, если оно представимо в виде $K(x, t) = g_1(x)h_1(t) + \dots + g_n(x)h_n(t)$.

Ядро интегрального уравнения $K(x, t)$ называется разностным, если оно зависит от разности аргументов: $K(x, t) = K(x - t)$.

Рассматривают также полярные ядра

$$K(x, t) = \frac{L(x, t)}{(x - t)^\beta} + M(x, t), \quad 0 < \beta < 1, \quad (3)$$

и логарифмические ядра (ядра, имеющие логарифмическую особенность)

$$K(x, t) = L(x, t) \ln(x - t) + M(x, t), \quad (4)$$

где $L(x, t)$ ($L(x, x) \neq 0$) и $M(x, t)$ — непрерывны в S .

Полярные и логарифмические ядра составляют класс ядер со слабой особенностью. Уравнения, содержащие такие ядра, называются уравнениями со слабой особенностью.

Частным случаем уравнения (1) с ядром (3) является обобщенное уравнение Абеля:

$$\int_a^x \frac{y(t)}{(x - t)^\beta} dt = f(x), \quad 0 < \beta < 1.$$

Для непрерывных $K(x, t)$ и $f(x)$ правая часть уравнения (1) должна удовлетворять следующим условиям:

1°. Если $K(a, a) \neq 0$, то должно выполняться условие $f(a) = 0$.

2°. Если $K(a, a) = K'_x(a, a) = \dots = K_x^{(n-1)}(a, a) = 0$, $0 < |K_x^{(n)}(a, a)| < \infty$, то правая часть уравнения должна удовлетворять условиям

$$f(a) = f'_x(a) = \dots = f_x^{(n)}(a) = 0.$$

3°. Если $K(a, a) = K'_x(a, a) = \dots = K_x^{(n-1)}(a, a) = 0$, $K_x^{(n)}(a, a) = \infty$, то правая часть уравнения должна удовлетворять условиям

$$f(a) = f'_x(a) = \dots = f_x^{(n-1)}(a) = 0.$$

Для полярных ядер вида (4) и непрерывных $f(x)$ на правую часть интегрального уравнения дополнительные условия не накладываются.

Замечание 1. Случай, когда $a = -\infty$, вообще говоря, не исключается.

8.1-2. Существование и единственность решения

Если в уравнении (1) функции $f(x)$ и $K(x, t)$ — непрерывны и ограничены вместе со своими первыми производными на $[a, b]$ и в S соответственно, причем $K(x, x) \neq 0$ ($x \in [a, b]$) и $f(a) = 0$, то существует единственное непрерывное решение $y(x)$ уравнения (1).

Замечание 2. Вопрос о существовании и единственности решения уравнения Вольтерра первого рода тесно связан с условиями, при которых оно приводится к уравнениям Вольтерра второго рода (см. разд. 8.3).

Замечание 3. Уравнение Вольтерра первого рода можно трактовать как уравнение Фредгольма первого рода, ядро которого $K(x, t)$ обращается в нуль при $t > x$ (см. главу 10).

● *Литература:* Э. Гурса (1934), Г. М. Мюнтц (1934), С. Г. Михлин (1959), Ф. Трикоми (1960), П. П. Забрейко, А. И. Кошелев и др. (1968), М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко (1968), Л. Я. Цлаф (1970), J. A. Cochran (1972), C. Corduneanu (1973), В. И. Смирнов (1974), В. Вольтерра (1982), А. J. Jerri (1985), А. Ф. Верлань, В. С. Сизиков (1986), A. D. Polyaniin, A. V. Manzhirrov (1998), А. В. Манжиров, А. Д. Полянин (1999, 2000).

8.2. Уравнения с вырожденным ядром:

$$K(x, t) = g_1(x)h_1(t) + \dots + g_n(x)h_n(t)$$

8.2-1. Уравнения с ядром $K(x, t) = g_1(x)h_1(t) + g_2(x)h_2(t)$

Рассматриваемое уравнение можно записать так:

$$g_1(x) \int_a^x h_1(t)y(t) dt + g_2(x) \int_a^x h_2(t)y(t) dt = f(x). \quad (1)$$

Считается, что выполнены условия: $g_1(x) \neq \text{const}$, $g_2(x) \neq \text{const}$, $h_1(t) \neq \text{const}$, $h_2(t) \neq \text{const}$, $f(a) = 0$, $0 < g_1^2(a) + g_2^2(a) < \infty$.

Замена

$$u(x) = \int_a^x h_1(t)y(t) dt \quad (2)$$

и последующее интегрирование по частям второго интеграла в (1) с учетом равенства $u(a) = 0$ дает уравнение Вольтерра второго рода

$$[g_1(x)h_1(x) + g_2(x)h_2(x)]u(x) - g_2(x)h_1(x) \int_a^x \left[\frac{h_2(t)}{h_1(t)} \right]'_t u(t) dt = h_1(x)f(x). \quad (3)$$

Подстановка

$$w(x) = \int_a^x \left[\frac{h_2(t)}{h_1(t)} \right]'_t u(t) dt \quad (4)$$

приводит (3) к линейному обыкновенному дифференциальному уравнению первого порядка

$$[g_1(x)h_1(x) + g_2(x)h_2(x)]w'_x - g_2(x)h_1(x) \left[\frac{h_2(x)}{h_1(x)} \right]'_x w = f(x)h_1(x) \left[\frac{h_2(x)}{h_1(x)} \right]'_x. \quad (5)$$

1°. При $g_1(x)h_1(x) + g_2(x)h_2(x) \neq 0$, решение уравнения (5), удовлетворяющее условию $w(a) = 0$ (которое является следствием замены (4)), имеет вид

$$w(x) = \Phi(x) \int_a^x \left[\frac{h_2(t)}{h_1(t)} \right]'_t \frac{f(t)h_1(t) dt}{\Phi(t)[g_1(t)h_1(t) + g_2(t)h_2(t)]}, \quad (6)$$

$$\Phi(x) = \exp \left\{ \int_a^x \left[\frac{h_2(t)}{h_1(t)} \right]'_t \frac{g_2(t)h_1(t) dt}{g_1(t)h_1(t) + g_2(t)h_2(t)} \right\}. \quad (7)$$

Продифференцируем обе части (4) и подставим в полученное выражение зависимость (6). После интегрирования по частям с учетом равенств $f(a) = 0$, $w(a) = 0$, при $f \neq \text{const}$ g_2 получим

$$u(x) = \frac{g_2(x)h_1(x)\Phi(x)}{g_1(x)h_1(x) + g_2(x)h_2(x)} \int_a^x \left[\frac{f(t)}{g_2(t)} \right]'_t \frac{dt}{\Phi(t)}.$$

При помощи формулы (2) находим решение исходного уравнения в виде

$$y(x) = \frac{1}{h_1(x)} \frac{d}{dx} \left\{ \frac{g_2(x)h_1(x)\Phi(x)}{g_1(x)h_1(x) + g_2(x)h_2(x)} \int_a^x \left[\frac{f(t)}{g_2(t)} \right]'_t \frac{dt}{\Phi(t)} \right\}, \quad (8)$$

где функция $\Phi(x)$ дается выражением (7).

Если $f(x) \equiv \text{const}$ $g_2(x)$, то решение дается формулами (8) и (7), в которых индекс 1 должен быть заменен на 2 и наоборот.

2°. При $g_1(x)h_1(x) + g_2(x)h_2(x) \equiv 0$ решение имеет вид

$$y(x) = \frac{1}{h_1} \frac{d}{dx} \left[\frac{(f/g_2)'_x}{(g_1/g_2)'_x} \right] = -\frac{1}{h_1} \frac{d}{dx} \left[\frac{(f/g_2)'_x}{(h_2/h_1)'_x} \right].$$

8.2-2. Уравнения с вырожденным ядром общего вида

Уравнение Вольтерра первого рода с вырожденным ядром общего вида можно записать так:

$$\sum_{m=1}^n g_m(x) \int_a^x h_m(t) y(t) dt = f(x). \quad (9)$$

Используя обозначения

$$w_m(x) = \int_a^x h_m(t) y(t) dt, \quad m = 1, 2, \dots, n, \quad (10)$$

запишем уравнение (9) следующим образом:

$$\sum_{m=1}^n g_m(x) w_m(x) = f(x). \quad (11)$$

Дифференцируя формулы (10) и исключая из полученных выражений $y(x)$, приходим к линейным дифференциальным уравнениям для функций $w_m = w_m(x)$:

$$h_1(x) w'_m = h_m(x) w'_1, \quad m = 2, 3, \dots, n, \quad (12)$$

(штрих соответствует производной по x) с начальными условиями

$$w_m(a) = 0, \quad m = 1, 2, \dots, n.$$

Если найдено решение системы уравнений (11), (12), то решение исходного интегрального уравнения (9) определяется с помощью любого из выражений

$$y(x) = \frac{w'_m(x)}{h_m(x)}, \quad m = 1, 2, \dots, n,$$

которые получены путем дифференцирования формулы (10).

Систему (11), (12) (путем неоднократного дифференцирования уравнения (11) с учетом (12)) можно свести к линейному дифференциальному уравнению $(n-1)$ -го порядка для любой функции $w_m(x)$ ($m = 1, 2, \dots, n$).

⊙ Литература: Э. Гурса (1934), А. Ф. Верлань, В. С. Сизиков (1986).

8.3. Сведение уравнений Вольтерра первого рода к уравнениям Вольтерра второго рода

8.3-1. Первый способ

Пусть ядро и правая часть уравнения

$$\int_a^x K(x, t) y(t) dt = f(x), \quad (1)$$

имеют непрерывные производные по x и выполняется условие $K(x, x) \neq 0$. Тогда после дифференцирования (1) с последующим делением обеих частей полученного выражения на $K(x, x)$, приходим к уравнению Вольтерра второго рода:

$$y(x) + \int_a^x \frac{K'_x(x, t)}{K(x, x)} y(t) dt = \frac{f'_x(x)}{K(x, x)}. \quad (2)$$

Уравнения этого типа рассматриваются в главе 9. Если $K(x, x) \equiv 0$, то дифференцируя дважды уравнение (1) по x при $K'_x(x, t)|_{t=x} \neq 0$ имеем уравнение Вольтерра второго рода

$$y(x) + \int_a^x \frac{K''_{xx}(x, t)}{K'_x(x, t)|_{t=x}} y(t) dt = \frac{f''_{xx}(x)}{K'_x(x, t)|_{t=x}}.$$

Если же $K'_x(x, x) \equiv 0$, то вновь можно применить дифференцирование и т. д. В случае, когда первые $m-2$ частные производные ядра по x тождественно равны нулю, а $(m-1)$ -я производная не равна нулю, то m -кратное дифференцирование исходного уравнения дает следующее уравнение Вольтерра второго рода:

$$y(x) + \int_a^x \frac{K_x^{(m)}(x, t)}{K_x^{(m-1)}(x, t)|_{t=x}} y(t) dt = \frac{f_x^{(m)}(x)}{K_x^{(m-1)}(x, t)|_{t=x}}.$$

8.3-2. Второй способ

Введем новую переменную

$$Y(x) = \int_a^x y(t) dt,$$

а затем проинтегрируем по частям правую часть уравнения (1) с учетом равенства $f(a) = 0$. В результате после деления обеих частей полученного выражения на $K(x, x)$, приходим к уравнению Вольтерра второго рода:

$$Y(x) - \int_a^x \frac{K'_t(x, t)}{K(x, x)} Y(t) dt = \frac{f(x)}{K(x, x)},$$

для которого должно выполняться условие $K(x, x) \neq 0$.

● Литература: Э. Гурса (1934), В. Вольтерра (1982).

8.4. Уравнения с разностным ядром: $K(x, t) = K(x - t)$ **8.4-1. Метод решения, основанный на преобразовании Лапласа**

Уравнения Вольтерра первого рода с ядром, зависящим от разности аргументов, имеют вид

$$\int_0^x K(x - t)y(t) dt = f(x). \quad (1)$$

Для решения этих уравнений используют преобразование Лапласа (см. разд. 7.2). Для дальнейшего понадобятся образы ядра и правой части интегрального уравнения, которые вычисляются по формулам

$$\tilde{K}(p) = \int_0^\infty K(x)e^{-px} dx, \quad \tilde{f}(p) = \int_0^\infty f(x)e^{-px} dx. \quad (2)$$

Применяя преобразование Лапласа \mathfrak{L} к уравнению (1) и учитывая, что интеграл с ядром, зависящим от разности аргументов, преобразуется в произведение по правилу (см. п. 7.2-4):

$$\mathfrak{L} \left\{ \int_0^x K(x - t)y(t) dt \right\} = \tilde{K}(p)\tilde{y}(p),$$

приходим к уравнению для образа искомой величины $\tilde{y}(p)$:

$$\tilde{K}(p)\tilde{y}(p) = \tilde{f}(p). \quad (3)$$

Решение уравнения (3) определяется формулой

$$\tilde{y}(p) = \frac{\tilde{f}(p)}{\tilde{K}(p)}. \quad (4)$$

Применяя к (4) обратное преобразование Лапласа (если оно существует), получим решение уравнения (1) в виде

$$y(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\tilde{f}(p)}{\tilde{K}(p)} e^{px} dp. \quad (5)$$

При использовании указанного аналитического метода решения могут возникнуть следующие технические трудности:

1°. Получение изображения $\tilde{K}(p) = \int_0^\infty K(x)e^{-px} dx$ для данного ядра $K(x)$.

2°. Получение оригинала (4), задаваемого формулой (5).

Для вычисления соответствующих интегралов применяют таблицы прямых и обратных преобразований Лапласа [см. Г. Бейтмен, А. Эрдейи (1969), В. А. Диткин, А. П. Прудников (1974)], причем во многих случаях для обратного преобразования используют методы теории функций комплексного переменного, включая теорему о вычетах (см. п. 7.1-4).

Замечание. Если нижний предел в интеграле уравнения Вольтерра с ядром, зависящим от разности аргументов, равен a , то его можно свести к уравнению (1) с помощью замены $x = \bar{x} - a$, $t = \bar{t} - a$.

8.4-2. Случай рационального образа решения

Рассмотрим важный частный случай, когда образ решения (4) является рациональной функцией вида

$$\tilde{y}(p) = \frac{\tilde{f}(p)}{\tilde{K}(p)} \equiv \frac{R(p)}{Q(p)},$$

где $Q(p)$ и $R(p)$ — многочлены переменной p , причем степень многочлена $Q(p)$ больше степени многочлена $R(p)$.

Если все нули знаменателя $Q(p)$ простые, т. е. справедливо равенство

$$Q(p) = \text{const} (p - \lambda_1)(p - \lambda_2) \dots (p - \lambda_n)$$

и $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$, то решение интегрального уравнения имеет вид

$$y(x) = \sum_{k=1}^n \frac{R(\lambda_k)}{Q'(\lambda_k)} \exp(\lambda_k x),$$

где штрихом обозначены производные.

Пример 1. Рассмотрим интегральное уравнение Вольтерра первого рода

$$\int_0^x e^{-a(x-t)} y(t) dt = A \operatorname{sh}(bx).$$

Применяя к нему преобразование Лапласа, получим

$$\frac{1}{p+a} \tilde{y}(p) = \frac{Ab}{p^2 - b^2}.$$

Отсюда находим, что

$$\tilde{y}(p) = \frac{Ab(p+a)}{p^2 - b^2} = \frac{Ab(p+a)}{(p-b)(p+b)}.$$

Имеем $Q(p) = (p-b)(p+b)$, $R(p) = Ab(p+a)$ и $\lambda_1 = b$, $\lambda_2 = -b$. Поэтому решение интегрального уравнения может быть записано в виде

$$y(x) = \frac{1}{2} A(b+a) e^{bx} + \frac{1}{2} A(b-a) e^{-bx} = Aa \operatorname{sh}(bx) + Ab \operatorname{ch}(bx).$$

8.4-3. Представление решения в виде композиции

При решении интегральных уравнений Вольтерра первого рода с разностным ядром $K(x-t)$ с помощью преобразования Лапласа иногда полезно использовать следующий прием.

Представим образ решения (4) в следующем виде:

$$\tilde{y}(p) = \tilde{N}(p) \tilde{M}(p) \tilde{f}(p), \quad \tilde{N}(p) \equiv \frac{1}{\tilde{K}(p) \tilde{M}(p)}. \quad (6)$$

Если удастся подобрать такую функцию $\tilde{M}(p)$, что существуют

$$\mathfrak{L}^{-1}\{\tilde{M}(p)\} = M(x), \quad \mathfrak{L}^{-1}\{\tilde{N}(p)\} = N(x), \quad (7)$$

то решение интегрального уравнения можно записать в виде композиции:

$$y(x) = \int_0^x N(x-t) F(t) dt, \quad F(t) = \int_0^t M(t-s) f(s) ds. \quad (8)$$

Пример 2. Рассмотрим уравнение

$$\int_0^x \sin(k\sqrt{x-t}) y(t) dt = f(x), \quad f(0) = 0. \quad (9)$$

Используя преобразование Лапласа, получим изображение решения в виде

$$\tilde{y}(p) = \frac{2}{\sqrt{\pi} k} p^{3/2} \exp(\alpha/p) \tilde{f}(p), \quad \alpha = \frac{1}{4} k^2. \quad (10)$$

Перепишем правую часть (10) в эквивалентном виде

$$\tilde{y}(p) = \frac{2}{\sqrt{\pi} k} p^2 [p^{-1/2} \exp(\alpha/p)] \tilde{f}(p), \quad \alpha = \frac{1}{4} k^2. \quad (11)$$

Здесь в квадратных скобках выделен сомножитель, соответствующий $\tilde{M}(p)$ в формуле (6), $\tilde{N}(p) = \text{const } p^2$.

Применяя обратное преобразование Лапласа по указанной схеме к формуле (11) с учетом равенства

$$\mathfrak{L}^{-1}\{p^2 \tilde{\varphi}(p)\} = \frac{d^2}{dx^2} \varphi(x), \quad \mathfrak{L}^{-1}\{p^{-1/2} \exp(\alpha/p)\} = \frac{1}{\sqrt{\pi x}} \operatorname{ch}(k\sqrt{x}),$$

находим решение интегрального уравнения

$$y(x) = \frac{2}{\pi k} \frac{d^2}{dx^2} \int_0^x \frac{\operatorname{ch}(k\sqrt{x-t})}{\sqrt{x-t}} f(t) dt.$$

8.4-4. Использование вспомогательного уравнения

Рассмотрим уравнение

$$\int_a^x K(x-t)y(t) dt = f(x), \quad (12)$$

где ядро $K(x)$ имеет интегрируемую особенность при $x = 0$.

Пусть $w = w(x)$ — решение вспомогательного более простого уравнения при $f(x) \equiv 1, a = 0$:

$$\int_0^x K(x-t)w(t) dt = 1. \quad (13)$$

Тогда решение исходного уравнения с произвольной правой частью (12) выражается через решение вспомогательного уравнения (13) с помощью формулы

$$y(x) = \frac{d}{dx} \int_a^x w(x-t)f(t) dt = f(a)w(x-a) + \int_a^x w(x-t)f'_t(t) dt. \quad (14)$$

Пример 3. Рассмотрим обобщенное уравнение Абеля

$$\int_a^x \frac{y(t) dt}{(x-t)^\mu} = f(x), \quad 0 < \mu < 1. \quad (15)$$

Решение соответствующего вспомогательного уравнения

$$\int_0^x \frac{w(t) dt}{(x-t)^\mu} = 1, \quad 0 < \mu < 1, \quad (16)$$

ищем методом неопределенных коэффициентов в виде

$$w(x) = Ax^\beta. \quad (17)$$

Подставим (17) в (15), а затем сделаем в интеграле замену переменной $t = x\xi$. Учитывая связь

$$B(p, q) = \int_0^1 \xi^{p-1}(1-\xi)^{1-q} d\xi = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

между бета- и гамма-функциями, имеем

$$A \frac{\Gamma(\beta+1)\Gamma(1-\mu)}{\Gamma(2+\beta-\mu)} x^{\beta+1-\mu} = 1.$$

Из этого равенства находим коэффициенты A и β :

$$\beta = \mu - 1, \quad A = \frac{1}{\Gamma(\mu)\Gamma(1-\mu)} = \frac{\sin(\pi\mu)}{\pi}. \quad (18)$$

Формулы (17), (18) определяют решение вспомогательного уравнения (16) и позволяют с помощью формулы (14) получить решение обобщенного уравнения Абеля (15) в следующем виде:

$$y(x) = \frac{\sin(\pi\mu)}{\pi} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{f(t) dt}{(x-t)^{1-\mu}} = \frac{\sin(\pi\mu)}{\pi} \left[\frac{f(a)}{(x-a)^{1-\mu}} + \int_a^x \frac{f'_t(t) dt}{(x-t)^{1-\mu}} \right]. \quad (19)$$

8.4-5. Сведение к обыкновенным дифференциальным уравнениям

Рассмотрим специальный случай, когда образ ядра интегрального уравнения (1) можно представить в виде

$$\tilde{K}(p) = \frac{M(p)}{N(p)}, \quad (20)$$

где $M(p)$ и $N(p)$ некоторые многочлены степеней m и n соответственно:

$$M(p) = \sum_{k=0}^m A_k p^k, \quad N(p) = \sum_{k=0}^n B_k p^k. \quad (21)$$

В этом случае решение интегрального уравнения (1) (если оно существует) удовлетворяет линейному неоднородному обыкновенному дифференциальному уравнению m -го порядка с постоянными коэффициентами:

$$\sum_{k=0}^m A_k y_x^{(k)}(x) = \sum_{k=0}^n B_k f_x^{(k)}(x). \quad (22)$$

Уравнение (22) можно кратко записать в операторном виде

$$M(D)y(x) = N(D)f(x), \quad D \equiv \frac{d}{dx}.$$

Начальные условия для дифференциального уравнения (22), а также условия, которые необходимо наложить на правую часть интегрального уравнения (1), получаются из равенства

$$\sum_{k=0}^m A_k \sum_{s=0}^{k-1} p^{k-1-s} y_x^{(s)}(0) - \sum_{k=0}^n B_k \sum_{s=0}^{k-1} p^{k-1-s} f_x^{(s)}(0) = 0 \quad (23)$$

путем выделения членов при одинаковых степенях параметра p .

Доказательство этого утверждения проводится с помощью применения преобразования Лапласа к дифференциальному уравнению (22) и последующим сравнением полученного выражения с уравнением (3) с учетом равенства (20).

8.4-6. Связь уравнений Вольтерра и Винера–Хопфа

Уравнение Вольтерра первого рода с разностным ядром вида

$$\int_0^x K(x-t)y(t) dt = f(x), \quad 0 < x < \infty, \quad (24)$$

можно привести к уравнению Винера–Хопфа первого рода в форме

$$\int_0^\infty K_+(x-t)y(t) dt = f(x), \quad 0 < x < \infty, \quad (25)$$

где ядро $K_+(x-t)$ дается соотношением

$$K_+(s) = \begin{cases} K(s) & \text{при } s > 0, \\ 0 & \text{при } s < 0. \end{cases}$$

Методы решения уравнения (25) приведены в главе 10.

● Литература: П. П. Забрейко, А. И. Кошелев и др. (1968), М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко (1968), Г. Дёч (1971), В. А. Диткин, А. П. Прудников (1974), В. И. Смирнов (1974), Ф. Д. Гахов, Ю. И. Черский (1978).

8.5. Метод дробного дифференцирования

8.5-1. Определение дробных интегралов

Функция $f(x)$ называется *абсолютно непрерывной* на отрезке $[a, b]$, если для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такое $\delta > 0$, что для любой конечной системы попарно непересекающихся отрезков $[a_k, b_k] \subset [a, b]$, $k = 1, 2, \dots, n$, такой, что $\sum_{k=1}^n (b_k - a_k) < \delta$, справедливо неравенство

$\sum_{k=1}^n |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon$. Класс всех таких функций обозначается AC .

Через AC^n , где $n = 1, 2, \dots$, обозначим класс функций $f(x)$, непрерывно дифференцируемых на $[a, b]$ до порядка $n-1$, причем $f^{(n-1)}(x) \in AC$.

Пусть $\varphi(x) \in L_1(a, b)$. Интегралы

$$\mathbf{I}_{a+}^\mu \varphi(x) \equiv \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_a^x \frac{\varphi(t)}{(x-t)^{1-\mu}} dt, \quad x > a, \quad (1)$$

$$\mathbf{I}_{b-}^\mu \varphi(x) \equiv \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_x^b \frac{\varphi(t)}{(t-x)^{1-\mu}} dt, \quad x < b, \quad (2)$$

где $\mu > 0$, называются *интегралами дробного порядка μ* . Первый из них называют иногда *левосторонним*, а второй — *правосторонним*. Операторы \mathbf{I}_{a+}^μ , \mathbf{I}_{b-}^μ называют *операторами дробного интегрирования*.

Интегралы (1), (2) принято называть также *дробными интегралами Римана–Лиувилля*.

Справедлива формула

$$\int_a^b \varphi(x) \mathbf{I}_{a+}^\mu \psi(x) dx = \int_a^b \psi(x) \mathbf{I}_{b-}^\mu \varphi(x) dx, \quad (3)$$

называемая иногда *формулой дробного интегрирования по частям*.

Дробное интегрирование обладает свойством

$$\mathbf{I}_{a+}^\mu \mathbf{I}_{a+}^\beta \varphi(x) = \mathbf{I}_{a+}^{\mu+\beta} \varphi(x), \quad \mathbf{I}_{b-}^\mu \mathbf{I}_{b-}^\beta \varphi(x) = \mathbf{I}_{b-}^{\mu+\beta} \varphi(x), \quad \mu > 0, \quad \beta > 0. \quad (4)$$

Свойство (4) называется *полугрупповым свойством дробного интегрирования*.

8.5-2. Определение дробных производных

Дробное дифференцирование естественно ввести как операцию, обратную дробному интегрированию. Для функции $f(x)$, заданной на отрезке $[a, b]$, выражения

$$\mathbf{D}_{a+}^\mu f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\mu)} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^\mu} dt, \quad (5)$$

$$\mathbf{D}_{b-}^\mu f(x) = -\frac{1}{\Gamma(1-\mu)} \frac{d}{dx} \int_x^b \frac{f(t)}{(t-x)^\mu} dt \quad (6)$$

называются соответственно *левосторонней* и *правосторонней дробными производными порядка μ* . В этих формулах считается, что $0 < \mu < 1$.

Дробные производные (5), (6) называют обычно *производными Римана–Лиувилля*.

Заметим, что дробные интегралы определены для любого порядка $\mu > 0$, а дробные производные — пока только для порядка $0 < \mu < 1$.

Если $f(x) \in AC$, то функция $f(x)$ имеет почти всюду производные $\mathbf{D}_{a+}^\mu f(x)$ и $\mathbf{D}_{b-}^\mu f(x)$, $0 < \mu < 1$, причем $\mathbf{D}_{a+}^\mu f(x), \mathbf{D}_{b-}^\mu f(x) \in L_r(a, b)$, $1 \leq r < 1/\mu$, и их можно представить также в виде

$$\mathbf{D}_{a+}^\mu f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\mu)} \left[\frac{f(a)}{(x-a)^\mu} + \int_a^x \frac{f'_t(t)}{(x-t)^\mu} dt \right], \quad (7)$$

$$\mathbf{D}_{b-}^\mu f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\mu)} \left[\frac{f(b)}{(b-x)^\mu} - \int_x^b \frac{f'_t(t)}{(t-x)^\mu} dt \right]. \quad (8)$$

Перейдем, наконец, к дробным производным порядков $\mu \geq 1$. Будем пользоваться обозначениями: $[\mu]$ — целая часть числа μ , $\{\mu\}$ — дробная часть числа μ , $0 \leq \{\mu\} < 1$, так что

$$\mu = [\mu] + \{\mu\}. \quad (9)$$

Если μ — целое число, то под дробной производной порядка μ будем понимать обычное дифференцирование:

$$\mathbf{D}_{a+}^\mu = \left(\frac{d}{dx} \right)^\mu, \quad \mathbf{D}_{b-}^\mu = \left(-\frac{d}{dx} \right)^\mu, \quad \mu = 1, 2, \dots \quad (10)$$

Если же μ — не целое, то $\mathbf{D}_{a+}^\mu f(x), \mathbf{D}_{b-}^\mu f(x)$ вводятся по формулам

$$\mathbf{D}_{a+}^\mu f(x) \equiv \left(\frac{d}{dx} \right)^{[\mu]} \mathbf{D}_{a+}^{\{\mu\}} f(x) = \left(\frac{d}{dx} \right)^{[\mu]+1} \mathbf{I}_{a+}^{1-\{\mu\}} f(x), \quad (11)$$

$$\mathbf{D}_{b-}^\mu f(x) \equiv \left(-\frac{d}{dx} \right)^{[\mu]} \mathbf{D}_{b-}^{\{\mu\}} f(x) = \left(-\frac{d}{dx} \right)^{[\mu]+1} \mathbf{I}_{b-}^{1-\{\mu\}} f(x). \quad (12)$$

Таким образом,

$$\mathbf{D}_{a+}^{\mu} f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\mu)} \left(\frac{d}{dx} \right)^n \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{\mu-n+1}} dt, \quad n = [\mu] + 1, \quad (13)$$

$$\mathbf{D}_{b-}^{\mu} f(x) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\mu)} \left(\frac{d}{dx} \right)^n \int_x^b \frac{f(t)}{(t-x)^{\mu-n+1}} dt, \quad n = [\mu] + 1. \quad (14)$$

Достаточное условие существования производных (13), (14) состоит в том, чтобы

$$\int_a^x \frac{f(t) dt}{(x-t)^{\{\mu\}}} \in AC^{[\mu]}.$$

Для выполнения этого условия достаточно, чтобы $f(x) \in AC^{[\mu]}$.

Замечание. Определения дробных интегралов и дробных производных можно обобщить на случай комплексных μ (см., например, С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев (1987)).

8.5-3. Основные свойства

Через $\mathbf{I}_{a+}^{\mu}(L_1)$, $\mu > 0$, обозначим класс функций $f(x)$, представимых левосторонним дробным интегралом порядка μ от интегрируемой функции: $f(x) = \mathbf{I}_{a+}^{\mu} \varphi(x)$, $\varphi(x) \in L_1(a, b)$, $1 \leq p < \infty$.

Для того чтобы $f(x) \in \mathbf{I}_{a+}^{\mu}(L_1)$, $\mu > 0$, необходимо и достаточно, чтобы

$$f_{n-\mu}(x) \equiv \mathbf{I}_{a+}^{n-\mu} f(x) \in AC^n, \quad (15)$$

где $n = [\mu] + 1$, и чтобы*

$$f_{n-\mu}^{(k)}(a) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n-1. \quad (16)$$

Пусть $\mu > 0$. Будем говорить, что функция $f(x) \in L_1$ имеет интегрируемую дробную производную $\mathbf{D}_{a+}^{\mu} f(x)$, если $\mathbf{I}_{a+}^{n-\mu} f(x) \in AC^n$, $n = [\mu] + 1$.

Другими словами, этим определением введено понятие, использующее только первое из двух условий (15), (16), описывающих класс $\mathbf{I}_{a+}^{\mu}(L_1)$.

Пусть $\mu > 0$. Тогда равенство

$$\mathbf{D}_{a+}^{\mu} \mathbf{I}_{a+}^{\mu} \varphi(x) = \varphi(x) \quad (17)$$

выполняется для любой интегрируемой функции $\varphi(x)$, а равенство

$$\mathbf{I}_{a+}^{\mu} \mathbf{D}_{a+}^{\mu} f(x) = f(x) \quad (18)$$

выполняется для функции

$$f(x) \in \mathbf{I}_{a+}^{\mu}(L_1). \quad (19)$$

Если вместо (19) предположить, что функция $f(x) \in L_1(a, b)$ имеет суммируемую производную $\mathbf{D}_{a+}^{\mu} f(x)$, то (18), вообще говоря, неверно и заменяется формулой

$$\mathbf{I}_{a+}^{\mu} \mathbf{D}_{a+}^{\mu} f(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-a)^{\mu-k-1}}{\Gamma(\mu-k)} f_{n-\mu}^{(n-k-1)}(a), \quad (20)$$

где $n = [\mu] + 1$ и $f_{n-\mu}(x) = \mathbf{I}_{a+}^{n-\mu} f(x)$. В частности, при $0 < \mu < 1$ имеем

$$\mathbf{I}_{a+}^{\mu} \mathbf{D}_{a+}^{\mu} f(x) = f(x) - \frac{f_{1-\mu}(a)}{\Gamma(\mu)} (x-a)^{\mu-1}. \quad (21)$$

8.5-4. Решение обобщенного уравнения Абеля

Рассмотрим интегральное уравнение Абеля в форме

$$\int_a^x \frac{y(t)}{(x-t)^{\mu}} dt = f(x), \quad (22)$$

* Здесь и далее в разд. 8.5 запись $f^{(n)}(x)$ обозначает n -ю производные функции $f(x)$ по ее аргументу, а $f^{(n)}(a) \equiv f^{(n)}(x)|_{x=a}$.

где $0 < \mu < 1$. Будем считать, что $x \in [a, b]$, $f(x) \in AC$, $y(t) \in L_1$, и применим технику дробного дифференцирования. Разделив обе части уравнения (22) на $\Gamma(1-\mu)$, на основании (1) запишем это уравнение в виде

$$\mathbf{I}_{a+}^{1-\mu} y(x) = \frac{f(x)}{\Gamma(1-\mu)}, \quad x > a. \quad (23)$$

Поддействуем на обе части равенства (23) оператором дробного дифференцирования $\mathbf{D}_{a+}^{1-\mu}$. Тогда на основании свойств операторов дробного интегрирования и дифференцирования получим

$$y(x) = \frac{\mathbf{D}_{a+}^{1-\mu} f(x)}{\Gamma(1-\mu)}, \quad (24)$$

или в развернутой записи

$$y(x) = \frac{1}{\Gamma(\mu)\Gamma(1-\mu)} \left[\frac{f(a)}{(x-a)^{1-\mu}} + \int_a^x \frac{f'_t(t)}{(x-t)^{1-\mu}} dt \right]. \quad (25)$$

Теперь с учетом соотношения

$$\frac{1}{\Gamma(\mu)\Gamma(1-\mu)} = \frac{\sin(\pi\mu)}{\pi}$$

придем к решению обобщенного уравнения Абеля в форме

$$y(x) = \frac{\sin(\pi\mu)}{\pi} \left[\frac{f(a)}{(x-a)^{1-\mu}} + \int_a^x \frac{f'_t(t) dt}{(x-t)^{1-\mu}} \right], \quad (26)$$

которая совпадает с полученной ранее в п. 8.4-4.

● *Литература:* К. В. Oldham, J. Spanier (1974), Ю. И. Бабенко (1986), С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев (1987).

8.6. Уравнения с ядрами, имеющими слабую особенность

8.6-1. Метод преобразования ядра

Рассмотрим интегральное уравнение Вольтерра первого рода с полярным ядром

$$K(x, t) = \frac{L(x, t)}{(x-t)^\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1. \quad (1)$$

Тогда исследуемое интегральное уравнение можно записать в форме

$$\int_0^x \frac{L(x, t)}{(x-t)^\alpha} y(t) dt = f(x), \quad (2)$$

причем предполагается, что функции $L(x, t)$ и $\partial L(x, t)/\partial x$ являются непрерывными и ограниченными. Для решения уравнения (2) умножим обе его части на $dx/(\xi-x)^{1-\alpha}$ и проинтегрируем от 0 до ξ . Тогда

$$\int_0^\xi \left[\int_0^x \frac{L(x, t)}{(x-t)^\alpha} y(t) dt \right] \frac{dx}{(\xi-x)^{1-\alpha}} = \int_0^\xi \frac{f(x) dx}{(\xi-x)^{1-\alpha}}.$$

Полагая

$$K^*(\xi, t) = \int_t^\xi \frac{L(x, t) dx}{(\xi-x)^{1-\alpha}(x-t)^\alpha},$$

$$\varphi(\xi) = \int_0^\xi \frac{f(x) dx}{(\xi-x)^{1-\alpha}}, \quad \varphi(0) = 0,$$

будем иметь другое интегральное уравнение первого рода с неизвестной функцией $y(t)$:

$$\int_0^\xi K^*(\xi, t)y(t) dt = \varphi(\xi), \quad (3)$$

в котором ядро $K^*(\xi, t)$ не имеет особенностей.

Можно показать, что любое решение уравнения (3) является также решением уравнения (2). Таким образом, после преобразования уравнения (2) к виду (3), к последнему применимы методы, пригодные для непрерывных ядер.

8.6-2. Ядро с логарифмической особенностью

Рассмотрим уравнение

$$\int_0^x \ln(x-t)y(t) dt = f(x), \quad f(0) = 0. \quad (4)$$

Для его решения применим преобразование Лапласа. Заметим, что

$$\mathfrak{L}\{x^\nu\} = \int_0^\infty e^{-px} x^\nu dx = \frac{\Gamma(\nu+1)}{p^{\nu+1}}, \quad \nu > -1. \quad (5)$$

Продифференцируем соотношение (5) по ν . Тогда

$$\mathfrak{L}\{x^\nu \ln x\} = \frac{\Gamma(\nu+1)}{p^{\nu+1}} \left[\frac{\Gamma'_\nu(\nu+1)}{\Gamma(\nu+1)} + \ln \frac{1}{p} \right]. \quad (6)$$

При $\nu = 0$ в силу (6) имеем

$$\frac{\Gamma'_\nu(1)}{\Gamma(1)} = -C,$$

где $C = 0,5772 \dots$ — постоянная Эйлера. С учетом последнего равенства формула (6) принимает вид

$$\mathfrak{L}\{\ln x\} = -\frac{\ln p + C}{p}. \quad (7)$$

Применяя к уравнению (4) преобразование Лапласа, с учетом (7) получим

$$-\frac{\ln p + C}{p} \tilde{y}(p) = \tilde{f}(p),$$

откуда

$$\tilde{y}(p) = -\frac{p\tilde{f}(p)}{\ln p + C}. \quad (8)$$

Запишем теперь $\tilde{y}(p)$ в виде

$$\tilde{y}(p) = -\frac{p^2\tilde{f}(p) - f'_x(0)}{p(\ln p + C)} - \frac{f'_x(0)}{p(\ln p + C)}. \quad (9)$$

Так как $f(0) = 0$, то

$$\mathfrak{L}\{f''_{xx}(x)\} = p^2\tilde{f}(p) - f'_x(0). \quad (10)$$

Перепишем формулу (5) следующим образом:

$$\mathfrak{L}\left\{\frac{x^\nu}{\Gamma(\nu+1)}\right\} = \frac{1}{p^{\nu+1}}, \quad (11)$$

и проинтегрируем обе части (11) по ν в пределах от 0 до ∞ . Тогда

$$\mathfrak{L}\left\{\int_0^\infty \frac{x^\nu}{\Gamma(\nu+1)} d\nu\right\} = \int_0^\infty \frac{d\nu}{p^{\nu+1}} = \frac{1}{p \ln p}.$$

Воспользовавшись формулой для преобразования Лапласа при изменении масштаба переменной (см. табл. 1 из п. 7.2-5), будем иметь

$$\mathfrak{L}\left\{\int_0^\infty \frac{(x/a)^\nu}{\Gamma(\nu+1)} d\nu\right\} = \int_0^\infty \frac{d\nu}{p^{\nu+1}} = \frac{1}{p \ln ap} = \frac{1}{p(\ln p + \ln a)}.$$

Если положить $a = e^C$, то

$$\mathfrak{L}\left\{\int_0^\infty \frac{x^\nu e^{-C\nu}}{\Gamma(\nu+1)} d\nu\right\} = \frac{1}{p(\ln p + C)}. \quad (12)$$

Обратимся к равенству (9). В силу соотношения (12)

$$\frac{f'_x(0)}{p(\ln p + C)} = \mathfrak{L}\left\{f'_x(0) \int_0^\infty \frac{x^\nu e^{-C\nu}}{\Gamma(\nu+1)} d\nu\right\}. \quad (13)$$

Учитывая (10) и (12), первое слагаемое в правой части (9) можно рассматривать как произведение изображений. Для отыскания этого слагаемого воспользуемся теоремой о свертке:

$$\frac{p^2\tilde{f}(p) - f'_x(0)}{p(\ln p + C)} = \mathfrak{L}\left\{\int_0^x f''_{tt}(t) \int_0^\infty \frac{(x-t)^\nu e^{-C\nu}}{\Gamma(\nu+1)} d\nu dt\right\}. \quad (14)$$

На основании соотношений (9), (13) и (14) получим решение интегрального уравнения (4) в виде

$$y(x) = -\int_0^x f''_{tt}(t) \int_0^\infty \frac{(x-t)^\nu e^{-C\nu}}{\Gamma(\nu+1)} d\nu dt - f'_x(0) \int_0^\infty \frac{x^\nu e^{-C\nu}}{\Gamma(\nu+1)} d\nu. \quad (15)$$

● Литература: М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко (1968), В. Вольтерра (1982).

8.7. Метод квадратур

8.7-1. Квадратурные формулы

Методом квадратур называется метод построения приближенного решения интегрального уравнения, основанный на замене интегралов конечными суммами по некоторой формуле. Такие формулы называются *квадратурными* и в общем случае имеют вид

$$\int_a^b \psi(x) dx = \sum_{i=1}^n A_i \psi(x_i) + \varepsilon_n[\psi], \quad (1)$$

где x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) — абсциссы точек разбиения промежутка интегрирования $[a, b]$ или узлы квадратуры (или интерполирования), A_i — числовые коэффициенты не зависящие от выбора функции $\psi(x)$, $\varepsilon_n[\psi]$ — *остаточный член* (ошибка) формулы (1). Как правило $A_i \geq 0$ и $\sum_{i=1}^n A_i = b - a$.

Существует довольно много квадратурных формул вида (1). Наиболее простыми и часто применяемыми на практике являются следующие (h — постоянный шаг интегрирования):

Формула прямоугольников:

$$\begin{aligned} A_1 = A_2 = \dots = A_{n-1} = h, \quad A_n = 0, \\ h = \frac{b-a}{n-1}, \quad x_i = a + h(i-1) \quad (i = 1, \dots, n). \end{aligned} \quad (2)$$

Формула трапеций:

$$\begin{aligned} A_1 = A_n = \frac{1}{2}h, \quad A_2 = A_3 = \dots = A_{n-1} = h, \\ h = \frac{b-a}{n-1}, \quad x_i = a + h(i-1) \quad (i = 1, \dots, n). \end{aligned} \quad (3)$$

Формула Симпсона (парабол):

$$\begin{aligned} A_1 = A_{2m+1} = \frac{1}{3}h, \quad A_2 = \dots = A_{2m} = \frac{4}{3}h, \quad A_3 = \dots = A_{2m-1} = \frac{2}{3}h, \\ h = \frac{b-a}{n-1}, \quad x_i = a + h(i-1) \quad (n = 2m+1, \quad i = 1, \dots, n), \end{aligned} \quad (4)$$

где m — натуральное число.

Широко применяются также квадратурные формулы Чебышева и Гаусса с разным количеством узлов интерполирования. Проиллюстрируем эти формулы на примере.

Пример. На отрезке $[-1, 1]$, параметры формулы (1) принимают следующие значения:

Формула Чебышева ($n = 6$):

$$\begin{aligned} A_1 = A_2 = \dots = \frac{2}{n} = \frac{1}{3}, \quad x_1 = -x_6 = -0,8662468181, \\ x_2 = -x_5 = -0,4225186538, \quad x_3 = -x_4 = -0,2666354015. \end{aligned} \quad (5)$$

Формула Гаусса ($n = 7$):

$$\begin{aligned} A_1 = A_7 = 0,1294849662, \quad A_2 = A_6 = 0,2797053915, \\ A_3 = A_5 = 0,3818300505, \quad A_4 = 0,4179591837, \\ x_1 = -x_7 = -0,9491079123, \quad x_2 = -x_6 = -0,7415311856, \\ x_3 = -x_5 = -0,4058451514, \quad x_4 = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Заметим, что квадратурным формулам посвящена обширная литература, которую заинтересованный читатель сможет найти, например, в книгах Н. С. Бахвалов (1973), С. М. Никольский (1979), Г. Корн, Т. Корн (1984).

8.7-2. Общая схема метода

Рассмотрим линейное интегральное уравнение Вольтерра первого рода

$$\int_a^x K(x, t)y(t)dt = f(x), \quad f(a) = 0, \quad (7)$$

и применим для его решения на отрезке $a \leq x \leq b$ метод квадратур. Процедура построения решения состоит из двух этапов:

1°. Во-первых, определим начальное значение $y(a)$. Для этого продифференцируем уравнение (7) по x . Тогда

$$K(x, x)y(x) + \int_a^x K'_x(x, t)y(t) dt = f'_x(x).$$

Полагая $x = a$, найдем

$$y_1 = y(a) = \frac{f'_x(a)}{K(a, a)} = \frac{f'_x(a)}{K_{11}}.$$

2°. Возьмем постоянный шаг интегрирования h и рассмотрим дискретное множество точек $x_i = a + h(i - 1)$, $i = 1, 2, \dots, n$. При $x = x_i$ уравнение (7) примет вид

$$\int_a^{x_i} K(x_i, t)y(t) dt = f(x_i), \quad i = 2, 3, \dots, n. \quad (8)$$

Заменяя интеграл в (8) квадратурной формулой (1) и выбирая x_j ($j = 1, 2, \dots, i$) узлами квадратуры (по переменной t), получим следующую систему уравнений:

$$\sum_{j=1}^i A_{ij} K(x_i, x_j)y(x_j) = f(x_i) + \varepsilon_i[y], \quad i = 2, 3, \dots, n, \quad (9)$$

где A_{ij} — коэффициенты квадратурной формулы на отрезке $[a, x_i]$, $\varepsilon_i[y]$ — ошибка аппроксимации. Полагая $\varepsilon_i[y]$ малыми и отбрасывая их, получим систему линейных алгебраических уравнений в форме

$$\sum_{j=1}^i A_{ij} K_{ij} y_j = f_i, \quad i = 2, 3, \dots, n, \quad (10)$$

где $K_{ij} = K(x_i, x_j)$ ($j = 1, 2, \dots, i$), $f_i = f(x_i)$, y_j — приближенные значения искомой функции $y(x)$ в узлах x_i .

Теперь система уравнений (10) позволяет последовательно определить при $A_i K_{ii} \neq 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) искомые приближенные значения посредством формул

$$y_1 = \frac{f'_x(a)}{K_{11}}, \quad y_2 = \frac{f_2 - A_{21} K_{21} y_1}{A_{22} K_{22}}, \quad \dots, \quad y_n = \frac{f_n - \sum_{j=1}^{n-1} A_{nj} K_{nj} y_j}{A_{nn} K_{nn}},$$

конкретный вид которых зависит от выбора квадратурной формулы.

8.7-3. Алгоритм на основе формулы трапеций

В соответствии с формулой трапеций (3), имеем

$$A_{i1} = A_{ii} = \frac{1}{2}h, \quad A_{i2} = \dots = A_{i, i-1} = h, \quad i = 2, 3, \dots, n.$$

Применение этой формулы в общей схеме приводит к следующему пошаговому алгоритму:

$$y_1 = \frac{f'_x(a)}{K_{11}}, \quad f'_x(a) = \frac{-3f_1 + 4f_2 - f_3}{2h},$$

$$y_i = \frac{2}{K_{ii}} \left(\frac{f_i}{h} - \sum_{j=1}^{i-1} \beta_j K_{ij} y_j \right), \quad \beta_j = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{при } j = 1, \\ 1 & \text{при } j > 1, \end{cases} \quad i = 2, 3, \dots, n,$$

где обозначения совпадают с введенными в п. 8.7-2. Формула трапеций достаточно проста, эффективна и часто используется на практике для решения интегральных уравнений с переменным пределом интегрирования.

На основании 8.7-1 и 8.7-2 можно выписать аналогичные выражения с использованием других квадратурных формул. Однако существуют особенности в их применении. Например, применение формулы Симпсона должно чередоваться для нечетных узлов с каким-либо другим правилом, скажем, с формулой прямоугольников или формулой трапеций. Для уравнений с переменным пределом интегрирования возникают сложности и в применении формул Чебышева и Гаусса.

8.7-4. Алгоритм для уравнения с вырожденным ядром

Общее свойство алгоритмов метода квадратур при решении уравнений Вольтерра первого рода с произвольным ядром состоит в пропорциональной зависимости количества вычислений на шаге от номера шага: все операции предыдущего шага повторяются с новыми данными на следующем шаге и добавляется еще один член суммы.

Если же ядро в уравнении (7) вырожденное, т. е.

$$K(x, t) = \sum_{k=1}^m p_k(x)q_k(t), \quad (11)$$

или возможна приближенная замена произвольного ядра вырожденным, то можно построить алгоритм, для которого количество операций не зависит от номера узла дискретизации. С учетом (11) уравнение (7) принимает вид

$$\sum_{k=1}^m p_k(x) \int_a^x q_k(t)y(t) dt = f(x). \quad (12)$$

Применяя к (12) формулу трапеций, получаем рекуррентные выражения для решения уравнения (см. формулы п. 8.7-3):

$$y(a) = \frac{f'_x(a)}{\sum_{k=1}^m p_k(a)q_k(a)}, \quad y_i = \frac{2}{\sum_{k=1}^m p_{ki}q_{ki}} \left[\frac{f_i}{h} - \sum_{k=1}^m p_{ki} \sum_{j=1}^{i-1} \beta_j q_{kj} y_j \right],$$

где y_i — приближенные значения неизвестной функции $y(x)$ в узлах x_i , $f_i = f(x_i)$, $p_{ki} = p_k(x_i)$, $q_{ki} = q_k(x_i)$.

⊙ *Литература:* Н. С. Бахвалов (1973), В. И. Крылов, В. В. Бобков, П. И. Монастырный (1984), А. Ф. Верлань, В. С. Сизиков (1986).

8.8. Уравнения с бесконечным пределом интегрирования

Представляют интерес интегральные уравнения первого рода с одним переменным, а другим бесконечным пределами, содержащие разностное ядро. Часто ядра и функции таких уравнений не принадлежат описанным в начале главы классам. Исследование этих уравнений проводится методом модельных решений (см. разд. 9.6) или методом сведения к уравнениям типа свертки. Рассмотрим отмеченные методы на примере уравнения первого рода с переменным нижним пределом.

8.8-1. Уравнение с переменным нижним пределом интегрирования

Рассмотрим уравнение первого рода с разностным ядром:

$$\int_x^\infty K(x-t)y(t) dt = f(x). \quad (1)$$

Уравнение (1) нельзя решить путем непосредственного применения преобразования Лапласа, так как здесь теорема о свертке не применима. В соответствии с методом модельных решений, подробное изложение которого приведено в разд. 9.6, рассмотрим вспомогательное уравнение с экспоненциальной правой частью

$$\int_x^\infty K(x-t)y(t) dt = e^{px}. \quad (2)$$

Решение (2) имеет вид

$$Y(x, p) = \frac{1}{\tilde{K}(-p)} e^{px}, \quad \tilde{K}(-p) = \int_0^\infty K(-z) e^{pz} dz. \quad (3)$$

Тогда на основании этих формул и формулы (11) из разд. 9.6 получим решение уравнения (1) для произвольной правой части $f(x)$ в форме

$$y(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\tilde{f}(p)}{\tilde{K}(-p)} e^{px} dp, \quad (4)$$

где $\tilde{f}(p)$ — изображение функции $f(x)$, полученное с помощью преобразования Лапласа.

Пример. Рассмотрим интегральное уравнение первого рода с переменным нижним пределом интегрирования

$$\int_x^\infty e^{a(x-t)} y(t) dt = A \sin(bx), \quad a > 0. \quad (5)$$

В соответствии с формулами (3) и (4) получим выражения для $\tilde{f}(p)$ и $\tilde{K}(-p)$:

$$\tilde{f}(p) = \frac{Ab}{p^2 + b^2}, \quad \tilde{K}(-p) = \int_0^\infty e^{(p-a)z} dz = \frac{1}{a-p}, \quad (6)$$

а также решение уравнения (5) в форме

$$y(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{Ab(a-p)}{p^2 + b^2} e^{px} dp. \quad (7)$$

Теперь, воспользовавшись таблицами обратного преобразования Лапласа [см. Г. Бейтмен, А. Эрдейи (1969), В. А. Диткин, А. П. Прудников (1974)], получим точное решение

$$y(x) = Aa \sin(bx) - Ab \cos(bx), \quad a > 0, \quad (8)$$

которое можно легко проверить подстановкой (8) в уравнение (5) с использованием таблиц интегралов.

8.8-2. Приведение к уравнению Винера–Хопфа первого рода

Уравнение (1) может быть приведено к одностороннему уравнению первого рода

$$\int_0^\infty K_-(x-t)y(t) dt = -f(x), \quad 0 < x < \infty, \quad (9)$$

где ядро $K_-(x-t)$ имеет следующий вид:

$$K_-(s) = \begin{cases} 0 & \text{при } s > 0, \\ -K(s) & \text{при } s < 0. \end{cases}$$

Методы исследования уравнения (9) описаны в главе 10.

● *Литература:* Ф. Д. Гахов, Ю. И. Черский (1978), А. В. Манжиров, А. Д. Полянин (1999, 2000).

9. Методы решения линейных уравнений вида $y(x) - \int_a^x K(x, t)y(t) dt = f(x)$

9.1. Интегральные уравнения Вольтерра второго рода

9.1-1. Предварительные замечания. Уравнения для резольвенты

В главе 9 излагаются методы решения интегральных уравнений Вольтерра второго рода, которые имеют вид:

$$y(x) - \int_a^x K(x, t)y(t) dt = f(x), \quad (1)$$

где $y(x)$ — неизвестная функция ($a \leq x \leq b$), $K(x, t)$ — ядро интегрального уравнения, $f(x)$ — свободный член или правая часть интегрального уравнения. Классы функций, которым могут принадлежать $y(x)$, $f(x)$ и $K(x, t)$, определены в п. 8.1-1. В этих классах функций решение интегрального уравнения Вольтерра второго рода существует и единственно.

При $f(x) \equiv 0$ уравнение (1) называют *однородным*, а при $f(x) \not\equiv 0$ — *неоднородным*.

Ядро интегрального уравнения $K(x, t)$ называется *вырожденным*, если оно представимо в виде $K(x, t) = g_1(x)h_1(t) + \dots + g_n(x)h_n(t)$.

Ядро интегрального уравнения $K(x, t)$ называется *разностным*, если оно зависит от разности аргументов: $K(x, t) = K(x - t)$.

Замечание 1. Однородное интегральное уравнение Вольтерра второго рода имеет только тривиальное решение.

Замечание 2. Вывод о существовании и единственности решения интегрального уравнения Вольтерра второго рода справедлив и для гораздо более широкого класса ядер и функций.

Замечание 3. Уравнение Вольтерра второго рода можно трактовать как уравнение Фредгольма второго рода, ядро которого $K(x, t)$ обращается в нуль при $t > x$ (см. главу 10).

Замечание 4. Случай, когда $a = -\infty$ и/или $b = \infty$, вообще говоря, не исключается, но при этом следует внимательно проверять выполнение условия квадратичной интегрируемости ядра $K(x, t)$ в квадрате $S = \{a \leq x \leq b, a \leq t \leq b\}$.

Решение уравнения (1) можно представить в виде

$$y(x) = f(x) + \int_a^x R(x, t)f(t) dt, \quad (2)$$

где *резольвента* $R(x, t)$ не зависит от свободного члена $f(x)$ и нижнего предела интегрирования a , а определяется только ядром интегрального уравнения.

Резольвента уравнения Вольтерра (1) удовлетворяет двум интегральным уравнениям

$$R(x, t) = K(x, t) + \int_t^x K(x, s)R(s, t) ds, \quad (3)$$

$$R(x, t) = K(x, t) + \int_t^x K(s, t)R(x, s) ds, \quad (4)$$

в которых интегрирование ведется по различным парам переменных ядра и резольвенты.

9.1-2. Связь между решениями интегральных уравнений

Приведем две полезные формулы, выражающие решение одного интегрального уравнения через решения других интегральных уравнений.

1°. Пусть решению уравнения Вольтерра второго рода с ядром $K(x, t)$ отвечает резольвента $R(x, t)$. Тогда решению уравнения Вольтерра второго рода с ядром $K^*(x, t) = -K(t, x)$ отвечает резольвента $R^*(x, t) = -R(t, x)$.

2°. Пусть имеются два уравнения Вольтерра второго рода с ядрами $K_1(x, t)$ и $K_2(x, t)$, которым соответствуют резольвенты $R_1(x, t)$ и $R_2(x, t)$. Тогда уравнение Вольтерра с ядром

$$K(x, t) = K_1(x, t) + K_2(x, t) - \int_t^x K_1(x, s)K_2(s, t) ds \quad (5)$$

имеет резольвенту

$$R(x, t) = R_1(x, t) + R_2(x, t) + \int_t^x R_1(s, t)R_2(x, s) ds. \quad (6)$$

Отметим, что в формулах (5) и (6) интегрирование ведется по различным парам переменных.

⊙ *Литература:* Э. Гурса (1934), Г. М. Мюнтц (1934), С. Г. Михлин (1959), Ф. Трикоми (1960), П. П. Забрейко, А. И. Кошелев и др. (1968), М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко (1968), Л. Я. Цлаф (1970), J. A. Cochran (1972), C. Corduneanu (1973), В. И. Смирнов (1974), В. Вольтерра (1982), А. J. Jerry (1985), А. Ф. Верлань, В. С. Сизиков (1986), А. D. Polyaniin, A. V. Manzhiriov (1998), А. В. Манжиров, А. Д. Полянин (1999, 2000).

9.2. Уравнения с вырожденным ядром:

$$K(x, t) = g_1(x)h_1(t) + \dots + g_n(x)h_n(t)$$

9.2-1. Уравнения с ядром $K(x, t) = \varphi(x) + \psi(x)(x - t)$

Решение уравнений Вольтерра с таким ядром можно представить в виде формулы

$$y = w''_{xx}, \quad (1)$$

где $w = w(x)$ — решение линейного неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка

$$w''_{xx} - \varphi(x)w'_x - \psi(x)w = f(x), \quad (2)$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$w(a) = w'_x(a) = 0. \quad (3)$$

Пусть $w_1 = w_1(x)$ — нетривиальное частное решение соответствующего линейного однородного дифференциального уравнения (2) при $f(x) \equiv 0$. Пусть $w_1(a) \neq 0$. Тогда другое нетривиальное частное решение указанного линейного однородного дифференциального уравнения $w_2 = w_2(x)$ можно записать в виде

$$w_2(x) = w_1(x) \int_a^x \frac{\Phi(t)}{[w_1(t)]^2} dt, \quad \Phi(x) = \exp \left[\int_a^x \varphi(s) ds \right].$$

Решение неоднородного уравнения (2), удовлетворяющее начальным условиям (3), дается формулой

$$w(x) = w_2(x) \int_a^x \frac{w_1(t)}{\Phi(t)} f(t) dt - w_1(x) \int_a^x \frac{w_2(t)}{\Phi(t)} f(t) dt. \quad (4)$$

Подставляя выражение (4) в формулу (1), получим решение исходного интегрального уравнения

$$y(x) = f(x) + \int_a^x R(x, t) f(t) dt,$$

где

$$\begin{aligned} R(x, t) &= [w_2''(x)w_1(t) - w_1''(x)w_2(t)] \frac{1}{\Phi(t)} = \\ &= \varphi(x) \frac{\Phi(x)}{w_1(x)} \frac{w_1(t)}{\Phi(t)} + [\varphi(x)w_1'(x) + \psi(x)w_1(x)] \frac{w_1(t)}{\Phi(t)} \int_t^x \frac{\Phi(s)}{[w_1(s)]^2} ds. \end{aligned}$$

Здесь $\Phi(x) = \exp \left[\int_a^x \varphi(s) ds \right]$, штрихами обозначены производные по переменной x .

Для вырожденного ядра рассматриваемого вида резольвенту можно определить по формуле

$$R(x, t) = u''_{xx},$$

где вспомогательная функция u является решением линейного однородного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка

$$u''_{xx} - \varphi(x)u'_x - \psi(x)u = 0, \quad (5)$$

удовлетворяющим следующим начальным условиям при $x = t$:

$$u|_{x=t} = 0, \quad u'_x|_{x=t} = 1. \quad (6)$$

Параметр t входит лишь в начальные условия (6), при этом само уравнение (5) не зависит от t .

Замечание 1. Ядро рассматриваемого уравнения можно записать в виде $K(x, t) = G_1(x) + tG_2(x)$, где $G_1(x) = \varphi(x) + x\psi(x)$, $G_2(x) = -\varphi(x)$.

9.2-2. Уравнения с ядром $K(x, t) = \varphi(t) + \psi(t)(t - x)$

Для вырожденного ядра рассматриваемого вида резольвента определяется выражением

$$R(x, t) = -v''_{tt}, \quad (7)$$

где вспомогательная функция v является решением линейного однородного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка

$$v''_{tt} + \varphi(t)v'_t + \psi(t)v = 0, \quad (8)$$

удовлетворяющим следующим начальным условиям при $t = x$:

$$v|_{t=x} = 0, \quad v'_t|_{t=x} = 1. \quad (9)$$

Величина x входит в начальные условия (9) лишь параметрически, при этом само уравнение (8) не зависит от x .

Пусть $v_1 = v_1(t)$ — нетривиальное частное решение уравнения (8). Тогда общее решение этого дифференциального уравнения дается формулой

$$v(t) = C_1 v_1(t) + C_2 v_1(t) \int_a^t \frac{ds}{\Phi(s)[v_1(s)]^2}, \quad \Phi(t) = \exp \left[\int_a^t \varphi(s) ds \right].$$

Удовлетворяя начальным условиям (9), находим зависимость постоянных интегрирования C_1 и C_2 от параметра x . В результате получим решение задачи (8), (9):

$$v = v_1(x)\Phi(x) \int_x^t \frac{ds}{\Phi(s)[v_1(s)]^2}. \quad (10)$$

Подставляя выражение (10) в формулу (7) и исключая вторую производную с помощью уравнения (8), найдем резольвенту

$$R(x, t) = \varphi(t) \frac{v_1(x)\Phi(x)}{v_1(t)\Phi(t)} + v_1(x)\Phi(x)[\varphi(t)v'_t(t) + \psi(t)v_1(t)] \int_x^t \frac{ds}{\Phi(s)[v_1(s)]^2}.$$

Замечание 2. Ядро рассматриваемого интегрального уравнения можно записать в виде $K(x, t) = G_1(t) + xG_2(t)$, где $G_1(t) = \varphi(t) + t\psi(t)$, $G_2(t) = -\varphi(t)$.

9.2-3. Уравнения с ядром $K(x, t) = \sum_{m=1}^n \varphi_m(x)(x - t)^{m-1}$

Для определения резольвенты $R(x, t)$ введем вспомогательную функцию

$$u(x, t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_t^x R(s, t)(x-s)^{n-1} ds + \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!},$$

которая при $x = t$ обращается в нуль вместе со своими $n-2$ первыми производными по x , а производная порядка $n-1$ при $x = t$ равна единице. Кроме того,

$$R(x, t) = u_x^{(n)}(x, t), \quad u_x^{(n)} = \frac{d^n u(x, t)}{dx^n}. \quad (11)$$

Подставляя (11) в уравнение для резольвенты (3) из п. 9.1-1, будем иметь

$$u_x^{(n)}(x, t) = K(x, t) + \int_t^x K(x, s)u_s^{(n)}(s, t) ds. \quad (12)$$

Применяя к интегралу в правой части (12) формулу интегрирования по частям, получим

$$u_x^{(n)}(x, t) = K(x, t) + \sum_{m=0}^{n-1} (-1)^m K_s^{(m)}(x, s) u_s^{(n-m-1)}(s, t) \Big|_{s=t}^{s=x}. \quad (13)$$

Подставляя теперь в (13) выражения для $K(x, t)$ и $u(x, t)$, приходим к линейному однородному обыкновенному дифференциальному уравнению n -го порядка относительно функции $u(x, t)$.

Таким образом, резольвенту $R(x, t)$ интегрального уравнения Вольтерра с вырожденным ядром указанного вида можно получить при помощи (11), где $u(x, t)$ удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению и начальным условиям:

$$u_x^{(n)} - \varphi_1(x)u_x^{(n-1)} - \varphi_2(x)u_x^{(n-2)} - 2\varphi_3(x)u_x^{(n-3)} - \dots - (n-1)!\varphi_n(x)u = 0,$$

$$u|_{x=t} = u'|_{x=t} = \dots = u_x^{(n-2)}|_{x=t} = 0, \quad u_x^{(n-1)}|_{x=t} = 1.$$

Величина t входит в начальные условия лишь параметрически, при этом само уравнение не зависит от t .

Замечание 3. К ядру рассматриваемого вида элементарными преобразованиями приводится ядро $K(x, t) = \sum_{m=1}^n \phi_m(x)t^{m-1}$.

9.2-4. Уравнения с ядром $K(x, t) = \sum_{m=1}^n \varphi_m(t)(t-x)^{m-1}$

Представим резольвенту заданного вырожденного ядра в виде

$$R(x, t) = -v_t^{(n)}(x, t), \quad v_t^{(n)} = \frac{d^n v(x, t)}{dt^n},$$

причем вспомогательная функция $v(x, t)$ при $t = x$ обращается в нуль вместе с $n-2$ производными по t , а $n-1$ -я производная по t при $t = x$ равна единице. Подставляя выражение для резольвенты в уравнение (3) из п. 9.1-1, получим

$$v_t^{(n)}(x, t) = \int_t^x K(s, t)v_s^{(n)}(x, s) ds - K(x, t).$$

Применим к интегралу в правой части формулу интегрирования по частям. Тогда, учитывая свойства вспомогательной функции $v(x, t)$, приходим к следующей задаче Коши для обыкновенного дифференциального уравнения n -го порядка:

$$v_t^{(n)} + \varphi_1(t)v_t^{(n-1)} + \varphi_2(t)v_t^{(n-2)} + 2\varphi_3(t)v_t^{(n-3)} + \dots + (n-1)!\varphi_n(t)v = 0,$$

$$v|_{t=x} = v'|_{t=x} = \dots = v_t^{(n-2)}|_{t=x} = 0, \quad v_t^{(n-1)}|_{t=x} = 1.$$

Величина x входит в начальные условия лишь параметрически, при этом само уравнение не зависит от x .

Замечание 4. К ядру рассматриваемого вида элементарными преобразованиями приводится ядро $K(x, t) = \sum_{m=1}^n \phi_m(t)x^{m-1}$.

9.2-5. Уравнения с вырожденным ядром общего вида

В данном случае уравнение Вольтерра второго рода можно представить в виде

$$y(x) - \sum_{m=1}^n g_m(x) \int_a^x h_m(t)y(t) dt = f(x). \quad (14)$$

Используя обозначения

$$w_j(x) = \int_a^x h_j(t)y(t) dt, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (15)$$

запишем уравнение (14) следующим образом:

$$y(x) = \sum_{m=1}^n g_m(x)w_m(x) + f(x). \quad (16)$$

Дифференцируя выражения (15) с учетом формулы (16), приходим к системе линейных дифференциальных уравнений для определения функций $w_j = w_j(x)$:

$$w'_j = h_j(x) \left[\sum_{m=1}^n g_m(x)w_m + f(x) \right], \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

с начальными условиями

$$w_j(a) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Если найдено решение этой системы, то решение исходного интегрального уравнения (14) определяется по формуле (16) или с помощью любого из выражений

$$y(x) = \frac{w'_j(x)}{h_j(x)}, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

которые получены путем дифференцирования формулы (15).

● *Литература:* Э. Гурса (1934), Г. М. Мюнтц (1934), А. Ф. Верлань, В. С. Сизиков (1986), А. Д. Polyanin, А. V. Manzhirov (1998), А. В. Манжиров, А. Д. Полянин (1999, 2000).

9.3. Уравнения с разностным ядром: $K(x, t) = K(x - t)$

9.3-1. Метод решения, основанный на преобразовании Лапласа

Уравнения Вольтерра второго рода с ядром, зависящим от разности аргументов, имеют вид

$$y(x) - \int_0^x K(x - t)y(t) dt = f(x). \quad (1)$$

Применяя преобразование Лапласа \mathfrak{L} к уравнению (1) и учитывая, что интеграл с ядром, зависящим от разности аргументов, по теореме о свертке (см. п. 7.2-4) преобразуется в произведение $\tilde{K}(p)\tilde{y}(p)$, приходим к уравнению для образа искомой величины

$$\tilde{y}(p) - \tilde{K}(p)\tilde{y}(p) = \tilde{f}(p). \quad (2)$$

Решение уравнения (2) определяется формулой

$$\tilde{y}(p) = \frac{\tilde{f}(p)}{1 - \tilde{K}(p)}, \quad (3)$$

которую можно записать в эквивалентном виде

$$\tilde{y}(p) = \tilde{f}(p) + \tilde{R}(p)\tilde{f}(p), \quad \tilde{R}(p) = \frac{\tilde{K}(p)}{1 - \tilde{K}(p)}. \quad (4)$$

Применяя к (4) обратное преобразование Лапласа, получим решение уравнения (1) в виде

$$\begin{aligned} y(x) &= f(x) + \int_0^x R(x - t)f(t) dt, \\ R(x) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \tilde{R}(p)e^{px} dp. \end{aligned} \quad (5)$$

При использовании формулы (5) могут возникнуть технические трудности:

1°. При получении изображения $\tilde{K}(p) = \int_0^\infty K(x)e^{-px} dx$ для конкретного ядра $K(x)$.

2°. При нахождении оригинала резольвенты (5), изображение которого $\tilde{R}(p)$ находится по формуле (4).

Для вычисления соответствующих интегралов применяют таблицы прямых и обратных преобразований Лапласа [см., например, Г. Бейтмен, А. Эрдейи (1969), В. А. Диткин, А. П. Прудников (1974)], причем во многих случаях для обратного преобразования используют методы теории функций комплексного переменного, включая теорему о вычетах (см. п. 7.1-4).

Замечание. Если нижний предел в интеграле уравнения Вольтерра с ядром, зависящим от разности аргументов, равен a , то его можно свести к уравнению (1) с помощью замены $x = \bar{x} - a$, $t = \bar{t} - a$.

Пример 1. Рассмотрим уравнение

$$y(x) + A \int_0^x \sin[\lambda(x - t)]y(t) dt = f(x), \quad (6)$$

которое является частным случаем уравнения (1) при $K(x) = -A \sin(\lambda x)$.

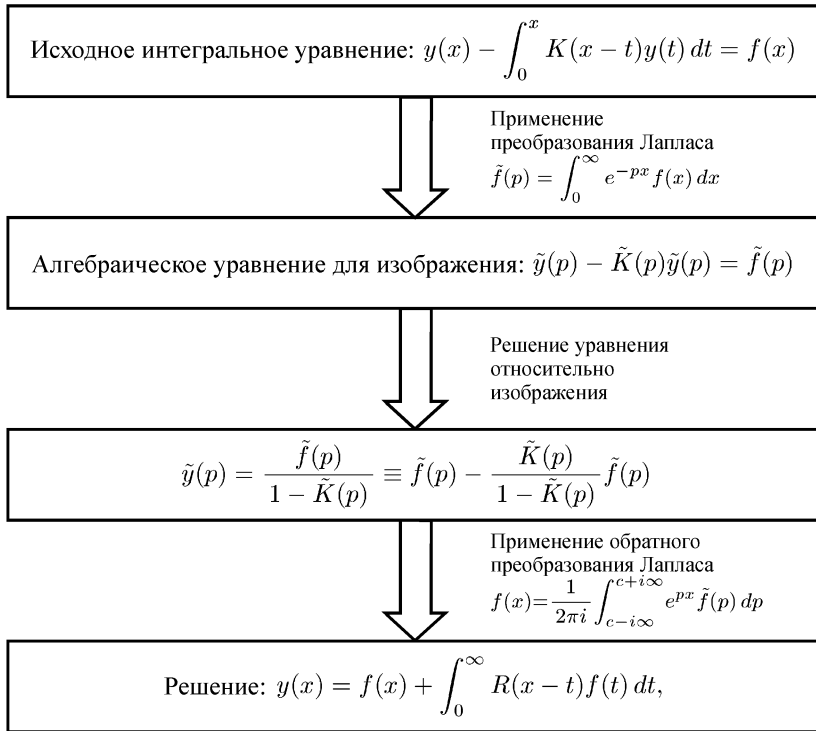


Рис. 2. Схема решения интегральных уравнений Вольтерра второго рода с разностным ядром с помощью интегрального преобразования Лапласа, $R(x)$ — оригинал функции

$$\tilde{R}(p) = \frac{\tilde{K}(p)}{1 - \tilde{K}(p)}.$$

Сначала, используя таблицы преобразований Лапласа [Г. Бейтмен, А. Эрдейи (1969, стр. 138)], получим образ ядра интегрального уравнения в виде

$$\tilde{K}(p) = -\frac{A\lambda}{p^2 + \lambda^2}.$$

Затем по формуле (4) найдем образ резольвенты:

$$\tilde{R}(p) = -\frac{A\lambda}{p^2 + \lambda(A + \lambda)}.$$

Используя далее таблицы обратных преобразований Лапласа [Г. Бейтмен, А. Эрдейи (1969, стр. 207)], получим оригинал резольвенты

$$R(x) = \begin{cases} -\frac{A\lambda}{k} \sin(kx) & \text{при } \lambda(A + \lambda) > 0, \\ -\frac{A\lambda}{k} \operatorname{sh}(kx) & \text{при } \lambda(A + \lambda) < 0, \end{cases} \quad \text{где } k = |\lambda(A + \lambda)|^{1/2}.$$

Заметим, что в частном случае при $\lambda = -A$ получаем $R(x) = A^2x$. Подставляя эти выражения в формулу (5), находим решение интегрального уравнения (6). В частности, при $\lambda(A + \lambda) > 0$ это решение имеет вид

$$y(x) = f(x) - \frac{A\lambda}{k} \int_0^x \sin[k(x-t)] f(t) dt, \quad k = \sqrt{\lambda(A + \lambda)}. \quad (7)$$

На рис. 2 приведена принципиальная схема решения интегральных уравнений Вольтерра второго рода с разностным ядром с помощью интегрального преобразования Лапласа.

9.3-2. Метод, основанный на решении вспомогательного уравнения

Рассмотрим интегральное уравнение

$$Ay(x) + B \int_a^x K(x-t)y(t) dt = f(x). \quad (8)$$

Пусть $w = w(x)$ — решение вспомогательного более простого уравнения при $f(x) \equiv 1$, $a = 0$:

$$Aw(x) + B \int_0^x K(x-t)w(t) dt = 1. \quad (9)$$

Тогда решение исходного уравнения с произвольной правой частью (8) выражается через решение вспомогательного уравнения (9) с помощью формулы

$$y(x) = \frac{d}{dx} \int_a^x w(x-t)f(t) dt = f(a)w(x-a) + \int_a^x w(x-t)f'_t(t) dt. \quad (10)$$

Докажем это утверждение. Перепишем выражение (10) (в котором предварительно сделано переобозначение параметра интегрирования t на s) в виде

$$y(x) = \frac{d}{dx} I(x), \quad I(x) = \int_a^x w(x-s)f(s) ds, \quad (11)$$

и подставим его в левую часть уравнения (8). В результате некоторых преобразований и изменения порядка интегрирования в двойном интеграле с учетом (9) получим

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} AI(x) + B \int_a^x K(x-t) \frac{d}{dt} I(t) dt &= \frac{d}{dx} AI(x) + \frac{d}{dx} B \int_a^x K(x-t) I(t) dt = \\ &= \frac{d}{dx} \left[A \int_a^x w(x-s)f(s) ds + B \int_a^x \int_a^t K(x-t)w(t-s)f(s) ds dt \right] = \\ &= \frac{d}{dx} \left\{ \int_a^x f(s) \left[Aw(x-s) + B \int_s^x K(x-t)w(t-s) dt \right] ds \right\} = \\ &= \frac{d}{dx} \left\{ \int_a^x f(s) \left[Aw(x-s) + B \int_0^{x-s} K(x-s-\lambda)w(\lambda) d\lambda \right] ds \right\} = \\ &= \frac{d}{dx} \int_a^x f(s) ds = f(x), \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

9.3-3. Сведение к обыкновенным дифференциальным уравнениям

Рассмотрим специальный случай, когда образ ядра интегрального уравнения (1) можно представить в виде

$$1 - \tilde{K}(p) = \frac{Q(p)}{R(p)}, \quad (12)$$

где $Q(p)$ и $R(p)$ некоторые многочлены степени n :

$$Q(p) = \sum_{k=0}^n A_k p^k, \quad R(p) = \sum_{k=0}^n B_k p^k. \quad (13)$$

В этом случае решение интегрального уравнения (1) удовлетворяет линейному неоднородному обыкновенному дифференциальному уравнению n -го порядка с постоянными коэффициентами:

$$\sum_{k=0}^n A_k y_x^{(k)}(x) = \sum_{k=0}^n B_k f_x^{(k)}(x). \quad (14)$$

Уравнение (14) кратко можно записать в операторном виде

$$Q(D)y(x) = R(D)f(x), \quad D \equiv \frac{d}{dx}.$$

Начальные условия для уравнения (14) получаются из равенства

$$\sum_{k=0}^n A_k \sum_{s=0}^{k-1} p^{k-1-s} y_x^{(s)}(0) - \sum_{k=0}^n B_k \sum_{s=0}^{k-1} p^{k-1-s} f_x^{(s)}(0) = 0 \quad (15)$$

путем выделения членов при одинаковых степенях параметра p .

Доказательство этого утверждения проводится с помощью применения преобразования Лапласа к дифференциальному уравнению (14) и последующим сравнением полученного выражения с уравнением (2) с учетом равенства (12).

Другой метод сведения интегрального уравнения к обыкновенным дифференциальным уравнениям описан в разд. 9.7.

9.3-4. Приведение к уравнению Винера–Хопфа второго рода

Уравнение Вольтерра второго рода с разностным ядром вида

$$y(x) + \int_0^x K(x-t)y(t) dt = f(x), \quad 0 < x < \infty, \quad (16)$$

можно привести к уравнению Винера–Хопфа в форме

$$y(x) + \int_0^\infty K_+(x-t)y(t) dt = f(x), \quad 0 < x < \infty, \quad (17)$$

где ядро $K_+(x-t)$ дается соотношением

$$K_+(s) = \begin{cases} K(s) & \text{при } s > 0, \\ 0 & \text{при } s < 0. \end{cases}$$

Методы исследования уравнения (17) описаны в главе 11, где приведен и пример построения решения уравнения Вольтерра второго рода с разностным ядром посредством решения соответствующего уравнения Винера–Хопфа второго рода (см. п. 11.9-3).

9.3-5. Метод дробного интегрирования для уравнения Абеля

Рассмотрим обобщенное уравнение Абеля второго рода в форме

$$y(x) - \lambda \int_a^x \frac{y(t)}{(x-t)^\mu} dt = f(x), \quad x > a, \quad (18)$$

где $0 < \mu < 1$. Будем считать, что $x \in [a, b]$, $f(x) \in AC$, $y(t) \in L_1$, и применим технику дробного интегрирования (см. разд. 8.5). Положив

$$\mu = 1 - \beta, \quad 0 < \beta < 1, \quad \lambda = \frac{\nu}{\Gamma(\beta)}, \quad (19)$$

на основании (8.5.1) запишем уравнение (18) в виде

$$(1 - \nu \mathbf{I}_{a+}^\beta) y(x) = f(x), \quad x > a. \quad (20)$$

Теперь решение обобщенного уравнения Абеля второго рода можно символически представить следующим образом:

$$y(x) = (1 - \nu \mathbf{I}_{a+}^\beta)^{-1} f(x), \quad x > a. \quad (21)$$

Разлагая операторное выражение в скобках в ряд по степеням оператора при помощи формулы для геометрической прогрессии, получим

$$y(x) = \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} (\nu \mathbf{I}_{a+}^\beta)^n \right] f(x), \quad x > a. \quad (22)$$

В развернутой записи с учетом равенства $(\mathbf{I}_{a+}^\beta)^n = \mathbf{I}_{a+}^{\beta n}$ формула (22) принимает вид

$$y(x) = f(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\nu^n}{\Gamma(\beta n)} \int_a^x (x-t)^{\beta n-1} f(t) dt, \quad x > a. \quad (23)$$

Поменяем в выражении (23) порядок суммирования и интегрирования, и заметим, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\nu^n (x-t)^{\beta n-1}}{\Gamma(\beta n)} = \frac{d}{dx} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\nu^n (x-t)^{\beta n}}{\Gamma(1+\beta n)}.$$

Тогда с учетом замены (19) решение обобщенного уравнения Абеля второго рода примет вид

$$y(x) = f(x) + \int_a^x R(x-t)f(t) dt, \quad x > a, \quad (24)$$

где резольвента $R(x-t)$ определяется формулой

$$R(x-t) = \frac{d}{dx} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[\lambda \Gamma(1-\mu)(x-t)^{(1-\mu)}]^n}{\Gamma[1+(1-\mu)n]}. \quad (25)$$

Ряд в представлении резольвенты (25) удается в некоторых случаях просуммировать и получить для нее явное выражение.

Пример 2. Рассмотрим уравнение Абеля второго рода (в уравнении (18) полагаем $\mu = \frac{1}{2}$)

$$y(x) - \lambda \int_a^x \frac{y(t)}{\sqrt{x-t}} dt = f(x), \quad x > a. \quad (26)$$

В силу формулы (25) резольвента для уравнения (26) задается выражением

$$R(x-t) = \frac{d}{dx} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[\lambda \sqrt{\pi(x-t)}]^n}{\Gamma(1 + \frac{1}{2}n)}. \quad (27)$$

Известно, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n/2}}{\Gamma(1 + \frac{1}{2}n)} = e^x \operatorname{erf} \sqrt{x}, \quad \operatorname{erf} x \equiv \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt, \quad (28)$$

где $\operatorname{erf} x$ — интеграл вероятностей. Тогда на основании (27) и (28) выражение для резольвенты можно записать в форме

$$R(x-t) = \frac{d}{dx} \left\{ \exp[\lambda^2 \pi(x-t)] \operatorname{erf} [\lambda \sqrt{\pi(x-t)}] \right\}. \quad (29)$$

Воспользовавшись соотношениями (24) и (27), получим решение интегрального уравнения Абеля второго рода, которое имеет вид

$$y(x) = f(x) + \frac{d}{dx} \int_a^x \left\{ \exp[\lambda^2 \pi(x-t)] \operatorname{erf} [\lambda \sqrt{\pi(x-t)}] \right\} f(t) dt, \quad x > a. \quad (30)$$

Заметим, что в рассмотренном случае решение построено в замкнутом виде.

9.3-6. Системы интегральных уравнений Вольтерра

Преобразование Лапласа можно применить для решения систем интегральных уравнений Вольтерра вида

$$y_m(x) - \sum_{k=1}^n \int_0^x K_{mk}(x-t)y_k(t) dt = f_m(x), \quad m = 1, 2, \dots, n. \quad (31)$$

Поддействуем на систему (31) преобразованием Лапласа. Тогда будем иметь

$$\tilde{y}_m(p) - \sum_{k=1}^n \tilde{K}_{mk}(p)\tilde{y}_k(p) = \tilde{f}_m(p), \quad m = 1, 2, \dots, n. \quad (32)$$

Решая эту систему линейных алгебраических уравнений, определим $\tilde{y}_m(p)$, и решение рассматриваемой системы уравнений примет вид

$$y_m(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \tilde{y}_m(p) e^{px} dp. \quad (33)$$

Преобразование Лапласа можно применить для построения решения систем уравнений Вольтерра первого рода и интегродифференциальных уравнений.

● *Литература:* В. А. Диткин, А. П. Прудников (1965), П. П. Забрейко, А. И. Кошелев и др. (1968), М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко (1968), В. И. Смирнов (1974), К. В. Oldham, J. Spanier (1974), Ф. Д. Гахов, Ю. И. Черский (1978), Ю. И. Бабенко (1986), С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев (1987), R. Gorenflo, S. Vessella (1991).

9.4. Операторные методы решения линейных интегральных уравнений

9.4-1. Использование решения «укороченного» уравнения

Рассмотрим линейное уравнение второго рода

$$y(x) + \mathbf{L}[y] = f(x), \quad (1)$$

где \mathbf{L} — некоторый линейный (интегральный) оператор.

Пусть решение вспомогательного «укороченного» уравнения первого рода

$$\mathbf{L}[u] = g(x), \quad (2)$$

может быть представлено в виде

$$u(x) = \mathbf{M}[\mathbf{L}[g]], \quad (3)$$

где \mathbf{M} — некоторый известный линейный оператор. Формула (3) означает, что

$$\mathbf{L}^{-1} = \mathbf{M}\mathbf{L}.$$

Поддействуем оператором \mathbf{L}^{-1} на обе части уравнения (1). В результате получим

$$\mathbf{M}[\mathbf{L}[y]] + y(x) = \mathbf{M}[\mathbf{L}[f]]. \quad (4)$$

Исключая $y(x)$ из (1) и (4), приходим к следующему уравнению:

$$\mathbf{M}[w] - w(x) = F(x), \quad (5)$$

где использованы обозначения

$$w = \mathbf{L}[y], \quad F(x) = \mathbf{M}[\mathbf{L}[f]] - f(x).$$

В ряде случаев уравнение (5) оказывается проще, чем исходное уравнение (1). Это бывает, например, когда оператор \mathbf{M} является константой (см. п. 11.7-2) или дифференциальным оператором:

$$\mathbf{M} = a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \dots + a_1 D + a_0, \quad D \equiv \frac{d}{dx}.$$

В последнем случае уравнение (5) представляет собой обыкновенное линейное дифференциальное уравнение относительно функции w .

Если решение $w = w(x)$ уравнения (5) получено, то решение уравнения (1) дается формулой $y(x) = \mathbf{M}[\mathbf{L}[w]]$.

Пример 1. Рассмотрим уравнение Абеля второго рода

$$y(x) + \lambda \int_a^x \frac{y(t) dt}{\sqrt{x-t}} = f(x). \quad (6)$$

Для его решения будем использовать небольшую модификацию схемы, описанной выше, которая соответствует случаю $\mathbf{M} \equiv \text{const} \frac{d}{dx}$.

Перепишем уравнение (6) следующим образом:

$$\int_a^x \frac{y(t) dt}{\sqrt{x-t}} = \frac{f(x) - y(x)}{\lambda}. \quad (7)$$

Считая правую часть известной, будем рассматривать (7) как уравнение Абеля первого рода. Его решение можно записать в виде (см. пример из п. 8.4-4)

$$y(x) = \frac{1}{\pi} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{f(t) - y(t)}{\lambda \sqrt{x-t}} dt$$

или

$$y(x) + \frac{1}{\pi\lambda} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{y(t) dt}{\sqrt{x-t}} = \frac{1}{\pi\lambda} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{f(t) dt}{\sqrt{x-t}}. \quad (8)$$

Продифференцируем обе части уравнения (6) по x , затем умножим обе части (8) на $-\pi\lambda^2$ и сложим почленно полученные выражения. В результате придем к линейному обыкновенному дифференциальному уравнению первого порядка для функции $y = y(x)$:

$$y'_x - \pi\lambda^2 y = F'_x(x), \quad (9)$$

где

$$F(x) = f(x) - \lambda \int_a^x \frac{f(t) dt}{\sqrt{x-t}}. \quad (10)$$

Уравнение (9) следует дополнить «начальным» условием

$$y(a) = f(a), \quad (11)$$

которое является следствием (6).

Решение задачи (9)–(11) имеет вид

$$y(x) = F(x) + \pi\lambda^2 \int_a^x \exp[\pi\lambda^2(x-t)] F(t) dt \quad (12)$$

и определяет решение уравнения Абеля второго рода (6).

9.4-2. Использование вспомогательного уравнения второго рода

Решение уравнения Абеля второго рода (6) можно было получить также другим методом, который излагается ниже.

Рассмотрим линейное уравнение

$$y(x) - \mathbf{L}[y] = f(x), \quad (13)$$

где \mathbf{L} — линейный оператор. Пусть решение вспомогательного уравнения

$$w(x) - \mathbf{L}^n[w] = \Phi(x), \quad \mathbf{L}^n[w] \equiv \mathbf{L}[\mathbf{L}^{n-1}[w]], \quad (14)$$

содержащего n -ю степень оператора \mathbf{L} , известно и определяется формулой

$$w(x) = \mathbf{M}[\Phi(x)]. \quad (15)$$

Тогда решение исходного уравнения (13) имеет вид

$$y(x) = \mathbf{M}[\Phi(x)], \quad \Phi(x) = \mathbf{L}^{n-1}[f] + \mathbf{L}^{n-2}[f] + \dots + \mathbf{L}[f] + f(x). \quad (16)$$

Это утверждение доказывается применением оператора $\mathbf{L}^{n-1} + \mathbf{L}^{n-2} + \dots + \mathbf{L} + 1$ к обеим частям уравнения (13) с учетом операторного равенства

$$(1 - \mathbf{L})(\mathbf{L}^{n-1} + \mathbf{L}^{n-2} + \dots + \mathbf{L} + 1) = 1 - \mathbf{L}^n$$

и формулы (16) для $\Phi(x)$. В уравнении (14) вместо $w(x)$ можно писать $y(x)$.

Пример 2. Используем теперь операторный метод (при $n = 2$) для решения обобщенного уравнения Абеля с показателем $3/4$:

$$y(x) - b \int_0^x \frac{y(t) dt}{(x-t)^{3/4}} = f(x). \quad (17)$$

Рассмотрим сначала интегральный оператор с разностным ядром

$$\mathbf{L}[y(x)] \equiv \int_0^x K(x-t)y(t) dt.$$

Посмотрим как действует \mathbf{L}^2 :

$$\begin{aligned} \mathbf{L}^2[y] &\equiv \mathbf{L}[\mathbf{L}[y]] = \int_0^x \int_0^t K(x-t)K(t-s)y(s) ds dt = \\ &= \int_0^x y(s) ds \int_s^x K(x-t)K(t-s) dt = \int_0^x K_2(x-s)y(s) ds, \\ K_2(z) &= \int_0^z K(\xi)K(z-\xi) d\xi. \end{aligned} \quad (18)$$

При выводе этой формулы менялся порядок интегрирования и делалась замена $\xi = t - s$.

Для ядра степенного вида

$$K(\xi) = b\xi^\mu$$

имеем

$$K_2(z) = b^2 \frac{\Gamma^2(1+\mu)}{\Gamma(2+2\mu)} z^{1+2\mu}. \quad (19)$$

Для уравнения (17) имеем

$$\mu = -\frac{3}{4}, \quad K_2(z) = A \frac{1}{\sqrt{z}}, \quad A = \frac{b^2}{\sqrt{\pi}} \Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right).$$

Поэтому вспомогательное уравнение (14), соответствующее значению $n = 2$, имеет вид

$$y(x) - A \int_0^x \frac{y(t) dt}{\sqrt{x-t}} = \Phi(x), \quad (20)$$

где

$$\Phi(x) = f(x) + b \int_0^x \frac{f(t) dt}{(x-t)^{3/4}}.$$

Уравнение (20) с точностью до переобозначений $A \rightarrow -\lambda$, $\Phi \rightarrow f$ совпадает с уравнением (6), его решение может быть получено по формуле (12).

Замечание. Из формулы (19) следует, что решение обобщенного уравнения Абеля с показателем β

$$y(x) + \lambda \int_0^x \frac{y(t) dt}{(x-t)^\beta} = f(x)$$

сводится к решению уравнения аналогичного вида с другим показателем степени $\beta_1 = 2\beta - 1$. В частности, уравнение Абеля (6), соответствующее значению $\beta = \frac{1}{2}$, сводится к решению уравнения с вырожденным ядром при $\beta_1 = 0$.

9.4-3. Метод решения «квадратных» операторных уравнений

Пусть известно решение линейного (интегрального, дифференциального и др.) уравнения

$$y(x) - \lambda \mathbf{L}[y] = f(x) \quad (21)$$

для произвольной правой части $f(x)$ и любого λ из интервала $(\lambda_{\min}, \lambda_{\max})$. Обозначим это решение так:

$$y = Y(f, \lambda). \quad (22)$$

Построим решение более сложного уравнения вида

$$y(x) - a\mathbf{L}[y] - b\mathbf{L}^2[y] = f(x), \quad (23)$$

где a и b — некоторые числа, $f(x)$ — произвольная функция. Для этого представим левую часть уравнения (23) в виде произведения операторов:

$$(1 - a\mathbf{L} - b\mathbf{L}^2)[y] \equiv (1 - \lambda_1\mathbf{L})(1 - \lambda_2\mathbf{L})[y], \quad (24)$$

где λ_1 и λ_2 — корни квадратного уравнения

$$\lambda^2 - a\lambda - b = 0. \quad (25)$$

Пусть $\lambda_{\min} < \lambda_1, \lambda_2 < \lambda_{\max}$.

Решим вспомогательное уравнение

$$w(x) - \lambda_2\mathbf{L}[w] = f(x), \quad (26)$$

которое является частным случаем уравнения (21) при $\lambda = \lambda_2$. Его решение дается формулой

$$w(x) = Y(f, \lambda_2). \quad (27)$$

Уравнение (23) с учетом (24) и (26) можно записать в виде

$$(1 - \lambda_1\mathbf{L})(1 - \lambda_2\mathbf{L})[y] = (1 - \lambda_2\mathbf{L})[w]$$

или, с учетом тождества $(1 - \lambda_1\mathbf{L})(1 - \lambda_2\mathbf{L}) \equiv (1 - \lambda_2\mathbf{L})(1 - \lambda_1\mathbf{L})$, в виде

$$(1 - \lambda_2\mathbf{L})\{(1 - \lambda_1\mathbf{L})[y] - w(x)\} = 0.$$

Это равенство будет выполняться, если искомая функция $y(x)$ будет удовлетворять уравнению

$$y(x) - \lambda_1\mathbf{L}[y] = w(x). \quad (28)$$

Решение уравнения (28) дается формулой

$$y(x) = Y(w, \lambda_1), \quad \text{где } w = Y(f, \lambda_2). \quad (29)$$

Если однородное уравнение $y(x) - \lambda_2\mathbf{L}[y] = 0$ имеет только тривиальное* решение $y \equiv 0$, то формула (29) определяет единственное решение исходного уравнения (23).

Пример 3. Рассмотрим интегральное уравнение

$$y(x) - \int_0^x \left(\frac{A}{\sqrt{x-t}} + B \right) y(t) dt = f(x).$$

Из результатов примера 2 (см. п. 9.4-2) следует, что его можно записать в виде уравнения (23):

$$y(x) - A\mathbf{L}[y] - \frac{1}{\pi}B\mathbf{L}^2[y] = f(x), \quad \mathbf{L}[y] \equiv \int_0^x \frac{y(t) dt}{\sqrt{x-t}}.$$

Поэтому решение интегрального уравнения (в квадратурах) дается формулами

$$Y(f, \lambda) = F(x) + \pi\lambda^2 \int_0^x \exp[\pi\lambda^2(x-t)] F(t) dt, \quad F(x) = f(x) + \lambda \int_0^x \frac{f(t) dt}{\sqrt{x-t}},$$

где λ_1 и λ_2 — корни квадратного уравнения $\lambda^2 - A\lambda - \frac{1}{\pi}B = 0$.

Этот метод применим также для решения (в квадратурах) более общих уравнений вида

$$y(x) - \int_0^x \left[\frac{A}{(x-t)^\beta} + \frac{B}{(x-t)^{2\beta-1}} \right] y(t) dt = f(x),$$

где β — рациональное число, удовлетворяющее условию $0 < \beta < 1$ (см. пример 2 из п. 9.4-2).

* Если однородное уравнение $y(x) - \lambda_2\mathbf{L}[y] = 0$ имеет нетривиальные решения, то в правой части уравнения (28) вместо $w(x)$ должна стоять функция $w(x) + y_0(x)$, где y_0 — общее решение указанного однородного уравнения.

9.4-4. Решение операторных уравнений полиномиального вида

Метод, описанный в п. 9.4-3, допускает обобщение на случай операторных уравнений полиномиального вида. Будем считать, что решение линейного неоднородного уравнения (21) дается формулой (22), а соответствующее однородное уравнение имеет только тривиальное решение.

Построим решение более сложного уравнения с полиномиальной левой частью относительно оператора \mathbf{L} :

$$y(x) - \sum_{k=1}^n A_k \mathbf{L}^k [y] = f(x), \quad \mathbf{L}^k \equiv \mathbf{L}(\mathbf{L}^{k-1}), \quad (30)$$

где A_k — некоторые числа, $f(x)$ — произвольная функция.

Обозначим $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ корни характеристического уравнения

$$\lambda^n - \sum_{k=1}^n A_k \lambda^{n-k} = 0. \quad (31)$$

Левую часть уравнения (30) можно представить в виде произведения операторов:

$$y(x) - \sum_{k=1}^n A_k \mathbf{L}^k [y] \equiv \prod_{k=1}^n (1 - \lambda_k \mathbf{L}) [y]. \quad (32)$$

Решение вспомогательного уравнения (26), в котором переобозначены $w \rightarrow y_{n-1}$, $\lambda_2 \rightarrow \lambda_n$, дается формулой $y_{n-1}(x) = Y(f, \lambda_n)$. Рассуждая аналогично тому, как это делалось в п. 9.4-3, получим, что решение уравнения (30) сводится к решению более простого уравнения

$$\prod_{k=1}^{n-1} (1 - \lambda_k \mathbf{L}) [y] = y_{n-1}(x), \quad (33)$$

которое имеет меньшую степень (на единицу) относительно оператора \mathbf{L} , чем исходное уравнение. Аналогичным образом можно показать, что уравнение (33) сводится к решению более простого уравнения вида

$$\prod_{k=1}^{n-2} (1 - \lambda_k \mathbf{L}) [y] = y_{n-2}(x), \quad y_{n-2}(x) = Y(y_{n-1}, \lambda_{n-1}).$$

Продолжая последовательно процесс понижения порядка уравнения, придем в итоге к уравнению (28), в правой части которого стоит функция $y_1(x) = Y(y_2, \lambda_2)$. Решение этого уравнения дается формулой $y(x) = Y(y_1, \lambda_1)$.

Решение исходного уравнения (30) определяется рекуррентно с помощью формул

$$y_{k-1}(x) = Y(y_k, \lambda_k); \quad k = n, \dots, 2, 1, \quad \text{где } y_n(x) \equiv f(x), \quad y_0(x) \equiv y(x).$$

Отметим, что здесь используется убывающая последовательность $k = n, \dots, 2, 1$.

9.4-5. Некоторые обобщения

Пусть левая часть линейного (интегрального) уравнения

$$y(x) - \mathbf{Q}[y] = f(x) \quad (34)$$

может быть представлена в виде произведения

$$y(x) - \mathbf{Q}[y] \equiv \prod_{k=1}^n (1 - \mathbf{L}_k) [y], \quad (35)$$

где \mathbf{L}_k — линейные операторы. Будем считать, что решения вспомогательных уравнений

$$y(x) - \mathbf{L}_k [y] = f(x), \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (36)$$

известны и даются формулами

$$y(x) = Y_k[f(x)], \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (37)$$

Решение вспомогательного уравнения (36) при $k = n$, в котором переобозначено $y \rightarrow y_{n-1}$, дается формулой $y_{n-1}(x) = Y_n[f(x)]$. Рассуждая аналогично тому, как это делалось в п. 9.4-3, получим, что решение уравнения (34) сводится к решению более простого уравнения

$$\prod_{k=1}^{n-1} (1 - L_k)[y] = y_{n-1}(x).$$

Продолжая последовательно процесс «понижения порядка» уравнения, придем в итоге к уравнению (36) при $k = 1$, в правой части которого стоит функция $y_1(x) = Y_2[y_2(x)]$. Решение этого уравнения дается формулой $y(x) = Y_1[y_1(x)]$.

Решение исходного уравнения (35) определяется рекуррентно с помощью формул

$$y_{k-1}(x) = Y_k[y_k(x)]; \quad k = n, \dots, 2, 1, \quad \text{где} \quad y_n(x) \equiv f(x), \quad y_0(x) \equiv y(x).$$

Отметим, что здесь используется убывающая последовательность $k = n, \dots, 2, 1$.

⊙ *Литература:* А. Д. Полянин, А. В. Манжиров (1998), А. В. Манжиров, А. Д. Полянин (1999, 2000).

9.5. Построение решений уравнений со специальной правой частью

В этом разделе описаны способы построения решений интегральных уравнений со специальной правой частью. Эти способы основаны на использовании вспомогательных решений, зависящих от свободного параметра.

9.5-1. Общая схема

Рассмотрим линейное уравнение, которое для краткости будем записывать в виде

$$L[y] = f_g(x, \lambda), \quad (1)$$

где L — некоторый линейный (интегральный, дифференциальный и др.) оператор, который действует по переменной x и не зависит от параметра λ ; $f_g(x, \lambda)$ — конкретная функция, которая зависит от переменной x и параметра λ .

Будем считать, что решение уравнения (1) известно:

$$y = y(x, \lambda). \quad (2)$$

Пусть M — некоторый линейный (интегральный, дифференциальный и др.) оператор, который действует по параметру λ и не зависит от переменной x . Будем считать, что операторы L и M коммутативны. Подействуем оператором M на обе части уравнения (1). В результате получим, что уравнение

$$L[w] = f_M(x), \quad f_M(x) = M[f_g(x, \lambda)], \quad (3)$$

имеет решение

$$w = M[y(x, \lambda)]. \quad (4)$$

Выбирая различным образом оператор M можно получить решения для других правых частей уравнения (1). Исходную функцию $f_g(x, \lambda)$ будем называть *порождающей функцией* для оператора L .

9.5-2. Порождающая функция экспоненциального вида

Рассмотрим линейное уравнение с экспоненциальной правой частью

$$L[y] = e^{\lambda x}. \quad (5)$$

Будем считать, что его решение известно и дается формулой (2). В таблице 4 приведены решения уравнения $L[y] = f(x)$ с различной правой частью, которые выражаются через решение уравнения (5).

Замечание 1. При использовании указанных в таблице формул не надо знать левую часть линейного уравнения (5) (уравнение может быть интегральным, дифференциальным и др.), если известно его частное решение для экспоненциальной правой части. При этом важна лишь самая общая информация о том, что левая часть уравнения не зависит от параметра λ .

ТАБЛИЦА 4
Решения уравнения $\mathbf{L}[y] = f(x)$ с порождающей функцией экспоненциального вида

№	Правая часть $f(x)$	Решение y	Как получено
1	$e^{\lambda x}$	$y(x, \lambda)$	Исходное уравнение
2	$A_1 e^{\lambda_1 x} + \dots + A_n e^{\lambda_n x}$	$A_1 y(x, \lambda_1) + \dots + A_n y(x, \lambda_n)$	Следствие линейности
3	$Ax + B$	$A \frac{d}{d\lambda} [y(x, \lambda)]_{\lambda=0} + By(x, 0)$	Следствие линейности и результатов п. 4
4	$Ax^n, n = 0, 1, 2, \dots$	$A \left\{ \frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} [y(x, \lambda)] \right\}_{\lambda=0}$	Следствие результатов п. 6 при $\lambda = 0$
5	$\frac{A}{x+a}, a > 0$	$A \int_0^\infty e^{-a\lambda} y(x, -\lambda) d\lambda$	Интегрирование по параметру λ
6	$Ax^n e^{\lambda x}, n = 0, 1, 2, \dots$	$A \frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} [y(x, \lambda)]$	Дифференцирование по параметру λ
7	a^x	$y(x, \ln a)$	Следствие п. 1
8	$A \operatorname{ch}(\lambda x)$	$\frac{1}{2} A [y(x, \lambda) + y(x, -\lambda)]$	Линейность и связь с экспонентой
9	$A \operatorname{sh}(\lambda x)$	$\frac{1}{2} A [y(x, \lambda) - y(x, -\lambda)]$	Линейность и связь с экспонентой
10	$Ax^m \operatorname{ch}(\lambda x), m = 1, 3, 5, \dots$	$\frac{1}{2} A \frac{\partial^m}{\partial \lambda^m} [y(x, \lambda) - y(x, -\lambda)]$	Дифференцирование по λ , и связь с экспонентой
11	$Ax^m \operatorname{ch}(\lambda x), m = 2, 4, 6, \dots$	$\frac{1}{2} A \frac{\partial^m}{\partial \lambda^m} [y(x, \lambda) + y(x, -\lambda)]$	Дифференцирование по λ , и связь с экспонентой
12	$Ax^m \operatorname{sh}(\lambda x), m = 1, 3, 5, \dots$	$\frac{1}{2} A \frac{\partial^m}{\partial \lambda^m} [y(x, \lambda) + y(x, -\lambda)]$	Дифференцирование по λ , и связь с экспонентой
13	$Ax^m \operatorname{sh}(\lambda x), m = 2, 4, 6, \dots$	$\frac{1}{2} A \frac{\partial^m}{\partial \lambda^m} [y(x, \lambda) - y(x, -\lambda)]$	Дифференцирование по λ , и связь с экспонентой
14	$A \cos(\beta x)$	$A \operatorname{Re} [y(x, i\beta)]$	Выделение действительной части при $\lambda = i\beta$
15	$A \sin(\beta x)$	$A \operatorname{Im} [y(x, i\beta)]$	Выделение мнимой части при $\lambda = i\beta$
16	$Ax^n \cos(\beta x), n = 1, 2, 3, \dots$	$A \operatorname{Re} \left\{ \frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} [y(x, \lambda)] \right\}_{\lambda=i\beta}$	Дифференцирование по λ , выделение действительной части при $\lambda = i\beta$
17	$Ax^n \sin(\beta x), n = 1, 2, 3, \dots$	$A \operatorname{Im} \left\{ \frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} [y(x, \lambda)] \right\}_{\lambda=i\beta}$	Дифференцирование по λ , выделение мнимой части при $\lambda = i\beta$
18	$Ae^{\mu x} \cos(\beta x)$	$A \operatorname{Re} [y(x, \mu + i\beta)]$	Выделение действительной части при $\lambda = \mu + i\beta$
19	$Ae^{\mu x} \sin(\beta x)$	$A \operatorname{Im} [y(x, \mu + i\beta)]$	Выделение мнимой части при $\lambda = \mu + i\beta$
20	$Ax^n e^{\mu x} \cos(\beta x), n = 1, 2, 3, \dots$	$A \operatorname{Re} \left\{ \frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} [y(x, \lambda)] \right\}_{\lambda=\mu+i\beta}$	Дифференцирование по λ , выделение действительной части при $\lambda = \mu + i\beta$
21	$Ax^n e^{\mu x} \sin(\beta x), n = 1, 2, 3, \dots$	$A \operatorname{Im} \left\{ \frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} [y(x, \lambda)] \right\}_{\lambda=\mu+i\beta}$	Дифференцирование по λ , выделение мнимой части при $\lambda = \mu + i\beta$

Замечание 2. При использовании указанных в таблице формул необходимо проверять сходимость интегралов, входящих в полученное решение.

Пример 1. Решение уравнения с экспоненциальной правой частью

$$y(x) + \int_x^\infty K(x-t)y(t) dt = e^{\lambda x} \quad (6)$$

ищем в виде $y(x, \lambda) = ke^{\lambda x}$ методом неопределенных коэффициентов. В результате получим

$$y(x, \lambda) = \frac{1}{B(\lambda)} e^{\lambda x}, \quad B(\lambda) = 1 + \int_0^\infty K(-z) e^{\lambda z} dz. \quad (7)$$

Из п. 3 таблицы 4 следует, что решение уравнения

$$y(x) + \int_x^\infty K(x-t)y(t) dt = Ax \quad (8)$$

имеет вид

$$y(x) = \frac{A}{D}x - \frac{AC}{D^2}, \quad D = 1 + \int_0^\infty K(-z) dz, \quad C = \int_0^\infty zK(-z) dz.$$

Для того чтобы такое решение существовало, должны существовать несобственные интегралы от функций $K(-z)$, $zK(-z)$. Поэтому функция $K(-z)$ должна убывать быстрее, чем z^{-2} при $z \rightarrow \infty$. В противном случае решения не существует. Интересно отметить, что для растущих по степенному закону функций $K(-z)$ при $z \rightarrow \infty$ в случае $\lambda < 0$ решение уравнения (6) существует и дается формулой (7), а решения уравнения (8) не существует. Поэтому следует быть осторожным при использовании формул из таблицы 4 и проверять сходимость интегралов, входящих в решение.

Из п. 15 таблицы 4 следует, что решение уравнения

$$y(x) + \int_x^\infty K(x-t)y(t) dt = A \sin(\lambda x) \quad (9)$$

дается формулой

$$y(x) = \frac{A}{B_c^2 + B_s^2} [B_c \sin(\lambda x) - B_s \cos(\lambda x)],$$

$$\text{где } B_c = 1 + \int_0^\infty K(-z) \cos(\lambda z) dz, \quad B_s = \int_0^\infty K(-z) \sin(\lambda z) dz.$$

9.5-3. Порождающая функция степенного вида

Рассмотрим линейное уравнение со степенной правой частью

$$\mathbf{L}[y] = x^\lambda. \quad (10)$$

Будем считать, что его решение известно и дается формулой (2). В таблице 5 приведены решения уравнения $\mathbf{L}[y] = f(x)$ с различной правой частью, которые выражаются через решение уравнения (10).

Пример 2. Решение уравнения со степенной правой частью

$$y(x) + \int_0^x \frac{1}{x} K\left(\frac{t}{x}\right) y(t) dt = x^\lambda$$

ищем в виде $y(x, \lambda) = kx^\lambda$ методом неопределенных коэффициентов. В результате получим

$$y(x, \lambda) = \frac{1}{1 + B(\lambda)} x^\lambda, \quad B(\lambda) = \int_0^1 K(t) t^\lambda dt.$$

Из п. 3 таблицы 5 следует, что решение уравнения с логарифмической правой частью

$$y(x) + \int_0^x \frac{1}{x} K\left(\frac{t}{x}\right) y(t) dt = A \ln x$$

имеет вид

$$y(x) = \frac{A}{1 + I_0} \ln x - \frac{AI_1}{(1 + I_0)^2},$$

$$I_0 = \int_0^1 K(t) dt, \quad I_1 = \int_0^1 K(t) \ln t dt.$$

ТАБЛИЦА 5
Решения уравнения $\mathbf{L}[y] = f(x)$ с порождающей функцией степенного вида

№	Правая часть $f(x)$	Решение y	Как получено
1	x^λ	$y(x, \lambda)$	Исходное уравнение
2	$\sum_{k=0}^n A_k x^k$	$\sum_{k=0}^n A_k y(x, k)$	Следствие линейности
3	$A \ln x + B$	$A \frac{d}{d\lambda} [y(x, \lambda)]_{\lambda=0} + B y(x, 0)$	Следствие линейности и результатов п. 4
4	$A \ln^n x,$ $n = 0, 1, 2, \dots$	$A \left\{ \frac{d^n}{d\lambda^n} [y(x, \lambda)] \right\}_{\lambda=0}$	Следствие результатов п. 5 при $\lambda = 0$
5	$A x^n x^\lambda,$ $n = 0, 1, 2, \dots$	$A \frac{d^n}{d\lambda^n} [y(x, \lambda)]$	Дифференцирование по параметру λ
6	$A \cos(\beta \ln x)$	$A \operatorname{Re} [y(x, i\beta)]$	Выделение действительной части при $\lambda = i\beta$
7	$A \sin(\beta \ln x)$	$A \operatorname{Im} [y(x, i\beta)]$	Выделение мнимой части при $\lambda = i\beta$
8	$A x^\mu \cos(\beta \ln x)$	$A \operatorname{Re} [y(x, \mu + i\beta)]$	Выделение действительной части при $\lambda = \mu + i\beta$
9	$A x^\mu \sin(\beta \ln x)$	$A \operatorname{Im} [y(x, \mu + i\beta)]$	Выделение мнимой части при $\lambda = \mu + i\beta$

9.5-4. Порождающая функция, содержащая синусы или косинусы

Рассмотрим линейное уравнение с синусоидальной правой частью

$$\mathbf{L}[y] = \sin(\lambda x). \quad (11)$$

Будем считать, что его решение известно и дается формулой (2). В таблице 6 приведены решения уравнения $\mathbf{L}[y] = f(x)$ с различной правой частью, которые выражаются через решение уравнения (11).

ТАБЛИЦА 6
Решения уравнения $\mathbf{L}[y] = f(x)$ с синусоидальной порождающей функцией

№	Правая часть $f(x)$	Решение y	Как получено
1	$\sin(\lambda x)$	$y(x, \lambda)$	Исходное уравнение
2	$\sum_{k=1}^n A_k \sin(\lambda_k x)$	$\sum_{k=1}^n A_k y(x, \lambda_k)$	Следствие линейности
3	$A x^m,$ $m = 1, 3, 5, \dots$	$A (-1)^{\frac{m-1}{2}} \left[\frac{d^m}{d\lambda^m} y(x, \lambda) \right]_{\lambda=0}$	Следствие результатов п. 5 при $\lambda = 0$
4	$A x^m \sin(\lambda x),$ $m = 2, 4, 6, \dots$	$A (-1)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{d\lambda^m} y(x, \lambda)$	Дифференцирование по параметру λ
5	$A x^m \cos(\lambda x),$ $m = 1, 3, 5, \dots$	$A (-1)^{\frac{m-1}{2}} \frac{d^m}{d\lambda^m} y(x, \lambda)$	Дифференцирование по параметру λ
6	$\operatorname{sh}(\beta x)$	$-i y(x, i\beta)$	Связь с гиперболическим синусом, $\lambda = i\beta$
7	$x^m \operatorname{sh}(\beta x),$ $m = 2, 4, 6, \dots$	$i (-1)^{\frac{m+2}{2}} \left[\frac{d^m}{d\lambda^m} y(x, \lambda) \right]_{\lambda=i\beta}$	Дифференцирование по λ , связь с гиперболическим синусом, $\lambda = i\beta$

Рассмотрим линейное уравнение с косинусоидальной правой частью

$$\mathbf{L}[y] = \cos(\lambda x). \quad (12)$$

Будем считать, что его решение известно и дается формулой (2). В таблице 7 приведены решения уравнения $\mathbf{L}[y] = f(x)$ с различной правой частью, которые выражаются через решение уравнения (12).

ТАБЛИЦА 7
Решения уравнения $\mathbf{L}[y] = f(x)$ с косинусоидальной порождающей функцией

№	Правая часть $f(x)$	Решение y	Как получено
1	$\cos(\lambda x)$	$y(x, \lambda)$	Исходное уравнение
2	$\sum_{k=1}^n A_k \cos(\lambda_k x)$	$\sum_{k=1}^n A_k y(x, \lambda_k)$	Следствие линейности
3	$Ax^m,$ $m = 0, 2, 4, \dots$	$A(-1)^{\frac{m}{2}} \left[\frac{d^m}{d\lambda^m} y(x, \lambda) \right]_{\lambda=0}$	Следствие результатов п. 4 при $\lambda = 0$
4	$Ax^m \cos(\lambda x),$ $m = 2, 4, 6, \dots$	$A(-1)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{d\lambda^m} y(x, \lambda)$	Дифференцирование по параметру λ
5	$Ax^m \sin(\lambda x),$ $m = 1, 3, 5, \dots$	$A(-1)^{\frac{m+1}{2}} \frac{d^m}{d\lambda^m} y(x, \lambda)$	Дифференцирование по параметру λ
6	$\operatorname{ch}(\beta x)$	$y(x, i\beta)$	Связь с гиперболическим косинусом, $\lambda = i\beta$
7	$x^m \operatorname{ch}(\beta x),$ $m = 2, 4, 6, \dots$	$(-1)^{\frac{m}{2}} \left[\frac{d^m}{d\lambda^m} y(x, \lambda) \right]_{\lambda=i\beta}$	Дифференцирование по λ , связь с гиперболическим косинусом, $\lambda = i\beta$

9.6. Метод модельных решений

9.6-1. Предварительные замечания*

Рассмотрим линейное уравнение, которое для краткости будем записывать в виде

$$\mathbf{L}[y(x)] = f(x), \quad (1)$$

где \mathbf{L} — некоторый линейный (интегральный) оператор, $y(x)$ — неизвестная функция, $f(x)$ — известная функция.

Зададим пока произвольно некоторое пробное решение

$$y_0 = y_0(x, \lambda), \quad (2)$$

зависящее от вспомогательного параметра λ (считается, что оператор \mathbf{L} не зависит от λ и $y_0 \neq \text{const}$). Из уравнения (1) определим правую часть, которая будет соответствовать пробному решению (2):

$$f_0(x, \lambda) = \mathbf{L}[y_0(x, \lambda)].$$

Умножим обе части уравнения (1) при $y = y_0$ и $f = f_0$ на некоторую функцию $\varphi(\lambda)$, а затем проинтегрируем полученное равенство по λ на отрезке $[a, b]$. В результате получим

$$\mathbf{L}[y_\varphi(x)] = f_\varphi(x), \quad (3)$$

где

$$y_\varphi(x) = \int_a^b y_0(x, \lambda) \varphi(\lambda) d\lambda, \quad f_\varphi(x) = \int_a^b f_0(x, \lambda) \varphi(\lambda) d\lambda. \quad (4)$$

Из формул (3), (4) следует, что для правой части $f = f_\varphi(x)$, решением исходного уравнения (1) будет $y = y_\varphi(x)$. За счет произвола в выборе функции $\varphi(\lambda)$ (и отрезка интегрирования) функцию $f_\varphi(x)$ в принципе можно сделать любой. Основная проблема здесь состоит в том, как подобрать функцию $\varphi(\lambda)$, чтобы получить заданную функцию $f_\varphi(x)$. Эту проблему можно решить, если удастся найти такое пробное решение, для которого правая часть уравнения (1) будет ядром известного обратного интегрального преобразования (такое пробное решение будем обозначать $Y(x, \lambda)$ и называть *модельным решением*).

* До чтения этого раздела полезно просмотреть разд. 9.5.

9.6-2. Описание метода

Действительно, пусть \mathfrak{P} — некоторое обратимое интегральное преобразование, которое любой функции-оригиналу $f(x)$ ставит в соответствии изображение $F(\lambda)$ по правилу

$$F(\lambda) = \mathfrak{P}\{f(x)\}. \quad (5)$$

Считаем, что обратное интегральное преобразование \mathfrak{P}^{-1} имеет ядро $\psi(x, \lambda)$ и действует следующим образом:

$$\mathfrak{P}^{-1}\{F(\lambda)\} = f(x), \quad \mathfrak{P}^{-1}\{F(\lambda)\} \equiv \int_a^b F(\lambda)\psi(x, \lambda) d\lambda. \quad (6)$$

Пределы a и b и путь интегрирования в (6) могут лежать в комплексной плоскости.

Пусть удалось найти модельное решение $Y(x, \lambda)$ вспомогательной задачи для уравнения (1), в правой части которого стоит ядро обратного преобразования \mathfrak{P}^{-1} :

$$\mathbf{L}[Y(x, \lambda)] = \psi(x, \lambda). \quad (7)$$

Умножим обе части (7) на $F(\lambda)$, а затем проинтегрируем по λ в тех же пределах, которые стоят в обратном преобразовании (6). Учитывая, что оператор \mathbf{L} не зависит от λ и используя равенство $\mathfrak{P}^{-1}\{F(\lambda)\} = f(x)$, получим

$$\mathbf{L}\left[\int_a^b Y(x, \lambda)F(\lambda) d\lambda\right] = f(x).$$

Отсюда следует, что решение уравнения (1) при произвольной функции $f(x)$ выражается через решение более простого вспомогательного уравнения (7) по формуле

$$y(x) = \int_a^b Y(x, \lambda)F(\lambda) d\lambda, \quad (8)$$

где $F(\lambda)$ — изображение функции $f(x)$, полученное с помощью преобразования (5).

В качестве правой части вспомогательного уравнения (7) можно, например, взять экспоненциальную, степенную и тригонометрические функции, которые соответственно являются ядрами обратных преобразований Лапласа, Меллина, синус и косинус преобразований Фурье (с точностью до постоянного множителя). В ряде случаев методом неопределенных коэффициентов удастся сравнительно просто найти модельное решение (задав его структуру). После этого для построения решения уравнения с произвольной правой частью можно использовать формулы, выписанные далее в пп. 9.6-3–9.6-6.

9.6-3. Модельное решение для экспоненциальной правой части

Пусть удалось подобрать модельное решение $Y = Y(x, \lambda)$, соответствующее экспоненциальной правой части:

$$\mathbf{L}[Y(x, \lambda)] = e^{\lambda x}. \quad (9)$$

Рассмотрим два случая.

1°. Уравнение на полуоси, $0 \leq x < \infty$. Обозначим $\tilde{f}(p)$ изображение функции $f(x)$, полученное с помощью преобразования Лапласа:

$$\tilde{f}(p) = \mathfrak{L}\{f(x)\}, \quad \mathfrak{L}\{f(x)\} \equiv \int_0^\infty f(x)e^{-px} dx. \quad (10)$$

Решение уравнения (1) при произвольной правой части $f(x)$ выражается через решение более простого вспомогательного уравнения с экспоненциальной правой частью (9) при $\lambda = p$ по формуле

$$y(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} Y(x, p)\tilde{f}(p) dp. \quad (11)$$

2°. Уравнение на всей оси, $-\infty < x < \infty$. Обозначим $\tilde{f}(u)$ изображение функции $f(x)$, полученное с помощью преобразования Фурье:

$$\tilde{f}(u) = \mathfrak{F}\{f(x)\}, \quad \mathfrak{F}\{f(x)\} \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty f(x)e^{-iux} dx. \quad (12)$$

Решение уравнения (1) при произвольной правой части $f(x)$ выражается через решение более простого вспомогательного уравнения с экспоненциальной правой частью (9) при $\lambda = iu$ по формуле

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} Y(x, iu) \tilde{f}(u) du. \quad (13)$$

Для вычисления интегралов в правых частях формул (11) и (13) используют методы теории функций комплексного переменного, включая лемму Жордана и теорему о вычетах (см. пп. 7.1-4 и 7.1-5).

Замечание 1. Модельное решение $Y(x, \lambda)$ может иметь структуру, отличную от ядра обратного преобразования Лапласа или Фурье.

Замечание 2. При использовании указанного метода не обязательно знать левую часть уравнения (1) (уравнение может быть интегральным, дифференциальным, функциональным и др.), если известно его частное решение для экспоненциальной правой части. При этом важна лишь самая общая информация, что уравнение линейно и его левая часть не зависит от параметра λ .

Замечание 3. Указанный метод может использоваться также при решении линейных интегральных (дифференциальных, интегро-дифференциальных и функциональных) уравнений со сложным аргументом у искомой функции.

Пример 1. Рассмотрим уравнение Вольтерра второго рода с разностным ядром

$$y(x) + \int_x^{\infty} K(x-t)y(t) dt = f(x). \quad (14)$$

Это уравнение нельзя решить путем непосредственного применения преобразования Лапласа, так как здесь теорема о свертке не применима.

В соответствии с методом модельных решений рассмотрим вспомогательное уравнение с экспоненциальной правой частью

$$y(x) + \int_x^{\infty} K(x-t)y(t) dt = e^{px}. \quad (15)$$

Его решение имеет вид (см. пример 1 из п. 9.5-2)

$$Y(x, p) = \frac{1}{1 + \tilde{K}(-p)} e^{px}, \quad \tilde{K}(-p) = \int_0^{\infty} K(-z) e^{pz} dz. \quad (16)$$

Отсюда с помощью формулы (11) получим решение уравнения (12) для произвольной правой части

$$y(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\tilde{f}(p)}{1 + \tilde{K}(-p)} e^{px} dp, \quad (17)$$

где $\tilde{f}(p)$ — изображение функции $f(x)$, полученное с помощью преобразования Лапласа (10) (см. также разд. 9.11).

Отметим, что более сложным путем решение уравнения (12) было получено в книге М. Л. Краснова, А. И. Киселева, Г. И. Макаренко (1968, стр. 42, 43).

9.6-4. Модельное решение для степенной правой части

Пусть удалось подобрать модельное решение $Y = Y(x, s)$, соответствующее степенной правой части уравнения

$$\mathbf{L}[Y(x, s)] = x^{-s}, \quad \lambda = -s. \quad (18)$$

Обозначим $\hat{f}(s)$ изображение функции $f(x)$, полученное с помощью преобразования Меллина

$$\hat{f}(s) = \mathfrak{M}\{f(x)\}, \quad \mathfrak{M}\{f(x)\} \equiv \int_0^{\infty} f(x) x^{s-1} dx. \quad (19)$$

Решение уравнения (1) при произвольной правой части $f(x)$ выражается через решение более простого вспомогательного уравнения со степенной правой частью (18) по формуле

$$y(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} Y(x, s) \hat{f}(s) ds. \quad (20)$$

Для вычисления соответствующих интегралов в правой части формулы (20) используют таблицы обратных преобразований Меллина [см., например, Г. Бейтмен, А. Эрдейи (1969), В. А. Диткин, А. П. Прудников (1974)], а также методы теории функций комплексного переменного, включая лемму Жордана и теорему о вычетах (см. пп. 7.1-4 и 7.1-5).

Пример 2. Рассмотрим уравнение

$$y(x) + \int_0^x \frac{1}{x} K\left(\frac{t}{x}\right) y(t) dt = f(x). \quad (21)$$

В соответствии с методом модельных решений рассмотрим вспомогательное уравнение со степенной правой частью

$$y(x) + \int_0^x \frac{1}{x} K\left(\frac{t}{x}\right) y(t) dt = x^{-s}. \quad (22)$$

Его решение имеет вид (см. пример 2 из п. 9.5-3 при $\lambda = -s$)

$$Y(x, s) = \frac{1}{1 + B(s)} x^{-s}, \quad B(s) = \int_0^1 K(t) t^{-s} dt. \quad (23)$$

Отсюда на основании формулы (20) получим решение уравнения (21) для произвольной правой части

$$y(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\hat{f}(s)}{1 + B(s)} x^{-s} ds, \quad (24)$$

где $\hat{f}(s)$ — изображение функции $f(x)$, полученное с помощью преобразования Меллина (19).

9.6-5. Модельное решение для синусоидальной правой части

Пусть удалось подобрать модельное решение $Y = Y(x, u)$, соответствующее синусу в правой части:

$$\mathbf{L}[Y(x, u)] = \sin(ux), \quad \lambda = u. \quad (25)$$

Обозначим $\check{f}_s(u)$ изображение функции $f(x)$, полученное с помощью несимметричной формы синус-преобразования Фурье:

$$\check{f}_s(u) = \mathcal{F}_s\{f(x)\}, \quad \mathcal{F}_s\{f(x)\} \equiv \int_0^\infty f(x) \sin(ux) dx. \quad (26)$$

Решение уравнения (1) при произвольной правой части $f(x)$ выражается через решение более простого вспомогательного уравнения с синусоидальной правой частью (25) по формуле

$$y(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty Y(x, u) \check{f}_s(u) du. \quad (27)$$

9.6-6. Модельное решение для косинусоидальной правой части

Пусть удалось подобрать модельное решение $Y = Y(x, u)$, соответствующее косинусу в правой части:

$$\mathbf{L}[Y(x, u)] = \cos(ux), \quad \lambda = u. \quad (28)$$

Обозначим $\check{f}_c(u)$ изображение функции $f(x)$, полученное с помощью несимметричной формы косинус-преобразования Фурье:

$$\check{f}_c(u) = \mathcal{F}_c\{f(x)\}, \quad \mathcal{F}_c\{f(x)\} \equiv \int_0^\infty f(x) \cos(ux) dx. \quad (29)$$

Решение уравнения (1) при произвольной правой части $f(x)$ выражается через решение более простого вспомогательного уравнения с косинусом в правой части (28) по формуле

$$y(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty Y(x, u) \check{f}_c(u) du. \quad (30)$$

9.6-7. Некоторые обобщения

Как и ранее, будем считать, что \mathfrak{P} — обратимое преобразование, которое любой функции-оригиналу $f(x)$ ставит в соответствие изображение $F(\lambda)$ по правилу (5). Обратное преобразование определяется формулой (6).

Пусть удалось найти модельное решение $Y(x, \lambda)$ следующей вспомогательной задачи для уравнения (1):

$$\mathbf{L}_x[Y(x, \lambda)] = \mathbf{H}_\lambda[\psi(x, \lambda)]. \quad (31)$$

В правой части уравнения (31) стоит некоторый обратимый линейный (интегральный, дифференциальный или функциональный) оператор, который не зависит от переменной x и действует

по параметру λ на ядро обратного преобразования $\psi(x, \lambda)$, см. формулу (6). Для наглядности оператор в левой части уравнения (31) помечен индексом x (он действует по переменной x и не зависит от λ).

Поддействуем на обе части (31) обратным оператором \mathbf{H}_λ^{-1} . В результате в правой части получим ядро $\psi(x, \lambda)$, а в левой части переставим операторы по правилу $\mathbf{H}_\lambda^{-1} \mathbf{L}_x = \mathbf{L}_x \mathbf{H}_\lambda^{-1}$ (это как правило можно сделать, так как операторы действуют по различным переменным). Умножим далее обе части полученного равенства на изображение $F(\lambda)$, а затем проинтегрируем по λ в тех же пределах, которые стоят в обратном преобразовании (6). В результате с учетом равенства $\mathfrak{P}^{-1}\{F(\lambda)\} = f(x)$ получим

$$\mathbf{L}_x \left[\int_a^b F(\lambda) \mathbf{H}_\lambda^{-1}[Y(x, \lambda)] d\lambda \right] = f(x). \quad (32)$$

Отсюда следует, что решение уравнения (1) при произвольной функции $f(x)$ в правой части выражается через решение более простого вспомогательного уравнения (31) по формуле

$$y(x) = \int_a^b F(\lambda) \mathbf{H}_\lambda^{-1}[Y(x, \lambda)] d\lambda, \quad (33)$$

где $F(\lambda)$ — изображение функции $f(x)$, полученное с помощью преобразования \mathfrak{P} по формуле (5).

Такой подход за счет произвола в выборе оператора \mathbf{H}_λ расширяет возможности метода модельных решений.

● *Литература:* А. Д. Полянин, А. В. Манжиров (1998), А. В. Манжиров, А. Д. Полянин (1999, 2000).

9.7. Метод дифференцирования интегральных уравнений

В ряде случаев дифференцирование (однократное, двукратное и т. д.) интегральных уравнений с последующим исключением интегральных членов с помощью исходного уравнения позволяет свести их к обыкновенным дифференциальным уравнениям. Иногда с помощью дифференцирования удастся свести рассматриваемое уравнение к более простому интегральному уравнению, решение которого известно. Ниже перечислены некоторые классы интегральных уравнений, которые сводятся к обыкновенным дифференциальным уравнениям с постоянными коэффициентами.

9.7-1. Ядро содержит сумму экспонент

Рассмотрим уравнение

$$y(x) + \int_a^x \left[\sum_{k=1}^n A_k e^{\lambda_k(x-t)} \right] y(t) dt = f(x). \quad (1)$$

Это уравнение в общем случае можно свести к линейному неоднородному обыкновенному дифференциальному уравнению n -го порядка с постоянными коэффициентами.

В широком диапазоне изменения параметров A_k, λ_k решение можно представить в виде:

$$y(x) = f(x) + \int_a^x \left[\sum_{k=1}^n B_k e^{\mu_k(x-t)} \right] f(t) dt,$$

где параметры решения B_k, μ_k связаны алгебраическими соотношениями с параметрами уравнения A_k, λ_k .

Пример 1. Рассмотрим уравнение

$$y(x) + \int_a^x [A_1 e^{\lambda_1(x-t)} + A_2 e^{\lambda_2(x-t)}] y(t) dt = f(x).$$

1°. Введем обозначения

$$I_1 = \int_a^x e^{\lambda_1(x-t)} y(t) dt, \quad I_2 = \int_a^x e^{\lambda_2(x-t)} y(t) dt.$$

Продифференцируем дважды интегральное уравнение. В результате имеем (первым записано исходное уравнение)

$$y + A_1 I_1 + A_2 I_2 = f, \quad f = f(x), \quad (2)$$

$$y'_x + (A_1 + A_2)y + A_1 \lambda_1 I_1 + A_2 \lambda_2 I_2 = f'_x, \quad (3)$$

$$y''_{xx} + (A_1 + A_2)y'_x + (A_1 \lambda_1 + A_2 \lambda_2)y + A_1 \lambda_1^2 I_1 + A_2 \lambda_2^2 I_2 = f''_{xx}. \quad (4)$$

Исключая отсюда величины I_1 и I_2 , приходим к линейному обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка с постоянными коэффициентами

$$y''_{xx} + (A_1 + A_2 - \lambda_1 - \lambda_2)y'_x + (\lambda_1 \lambda_2 - A_1 \lambda_2 - A_2 \lambda_1)y = f''_{xx} - (\lambda_1 + \lambda_2)f'_x + \lambda_1 \lambda_2 f. \quad (5)$$

Подставляя значение $x = a$ в равенства (2) и (3), получим начальные условия

$$y(a) = f(a), \quad y'_x(a) = f'_x(a) - (A_1 + A_2)f(a). \quad (6)$$

Решение дифференциального уравнения (5) с условиями (6) позволяет найти решение интегрального уравнения.

2°. Рассмотрим характеристическое уравнение

$$\mu^2 + (A_1 + A_2 - \lambda_1 - \lambda_2)\mu + \lambda_1 \lambda_2 - A_1 \lambda_2 - A_2 \lambda_1 = 0, \quad (7)$$

которое соответствует однородному дифференциальному уравнению (5) при $f(x) \equiv 0$. Структура решения интегрального уравнения зависит от знака дискриминанта квадратного уравнения (7):

$$D \equiv (A_1 - A_2 - \lambda_1 + \lambda_2)^2 + 4A_1 A_2.$$

В случае $D > 0$ квадратное уравнение (7) имеет действительные (и различные) корни μ_1 и μ_2 :

$$\mu_1 = \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2 - A_1 - A_2) + \frac{1}{2}\sqrt{D}, \quad \mu_2 = \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2 - A_1 - A_2) - \frac{1}{2}\sqrt{D}.$$

При этом решение исходного интегрального уравнения имеет вид

$$y(x) = f(x) + \int_a^x [B_1 e^{\mu_1(x-t)} + B_2 e^{\mu_2(x-t)}] f(t) dt,$$

где

$$B_1 = A_1 \frac{\mu_1 - \lambda_2}{\mu_2 - \mu_1} + A_2 \frac{\mu_1 - \lambda_1}{\mu_2 - \mu_1}, \quad B_2 = A_1 \frac{\mu_2 - \lambda_2}{\mu_1 - \mu_2} + A_2 \frac{\mu_2 - \lambda_1}{\mu_1 - \mu_2}.$$

В случае $D < 0$ квадратное уравнение (7) имеет комплексно сопряженные корни

$$\mu_1 = \sigma + i\beta, \quad \mu_2 = \sigma - i\beta, \quad \sigma = \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2 - A_1 - A_2), \quad \beta = \frac{1}{2}\sqrt{-D}.$$

При этом решение исходного интегрального уравнения имеет вид

$$y(x) = f(x) + \int_a^x \{B_1 e^{\sigma(x-t)} \cos[\beta(x-t)] + B_2 e^{\sigma(x-t)} \sin[\beta(x-t)]\} f(t) dt,$$

где

$$B_1 = -A_1 - A_2, \quad B_2 = \frac{1}{\beta} [A_1(\lambda_2 - \sigma) + A_2(\lambda_1 - \sigma)].$$

9.7-2. Ядро содержит сумму гиперболических функций

Уравнения с разностным ядром вида

$$y(x) + \int_a^x K(x-t)y(t) dt = f(x), \quad (8)$$

$$K(x) = \sum_{k=1}^m A_k \operatorname{ch}(\lambda_k x) + \sum_{k=1}^s B_k \operatorname{sh}(\mu_k x),$$

с помощью формул $\operatorname{ch} \beta = \frac{1}{2}(e^\beta + e^{-\beta})$ и $\operatorname{sh} \beta = \frac{1}{2}(e^\beta - e^{-\beta})$ могут быть представлены в виде уравнения (1) при $n = 2m + 2s$. Поэтому они сводятся к линейным неоднородным обыкновенным дифференциальным уравнениям с постоянными коэффициентами.

9.7-3. Ядро содержит сумму тригонометрических функций

Уравнения с разностным ядром вида

$$y(x) + \int_a^x K(x-t)y(t) dt = f(x), \quad K(x) = \sum_{k=1}^m A_k \cos(\lambda_k x), \quad (9)$$

$$y(x) + \int_a^x K(x-t)y(t) dt = f(x), \quad K(x) = \sum_{k=1}^m A_k \sin(\lambda_k x), \quad (10)$$

также можно свести к линейным неоднородным обыкновенным дифференциальным уравнениям $2n$ -го порядка с постоянными коэффициентами.

Пример 2. Рассмотрим подробнее уравнение (10).

1°. Обозначим

$$I_k(x) = \int_a^x \sin[\lambda_k(x-t)]y(t) dt. \quad (11)$$

Продифференцируем (11) дважды по x . В результате имеем (штрихи обозначают производные по x)

$$I'_k = \lambda_k \int_a^x \cos[\lambda_k(x-t)]y(t) dt, \quad I''_k = \lambda_k y(x) - \lambda_k^2 \int_a^x \sin[\lambda_k(x-t)]y(t) dt. \quad (12)$$

Из сопоставления формул (11) и (12) получим связь между I''_k и I_k :

$$I''_k = \lambda_k y(x) - \lambda_k^2 I_k, \quad I_k = I_k(x). \quad (13)$$

Интегральное уравнение с помощью (11) можно записать в виде

$$y(x) + \sum_{k=1}^n A_k I_k = f(x). \quad (14)$$

Дифференцируя (14) дважды по x , с учетом равенств (13) имеем

$$y''_{xx}(x) + \sigma_n y(x) - \sum_{k=1}^n A_k \lambda_k^2 I_k = f''_{xx}(x), \quad \sigma_n = \sum_{k=1}^n A_k \lambda_k. \quad (15)$$

Исключая интеграл I_n из (14) и (15), получим

$$y''_{xx}(x) + (\sigma_n + \lambda_n^2)y(x) + \sum_{k=1}^{n-1} A_k (\lambda_n^2 - \lambda_k^2) I_k = f''_{xx}(x) + \lambda_n^2 f(x). \quad (16)$$

Дифференцируя равенство (16) дважды по x и исключая интеграл I_{n-1} из полученного выражения с помощью (16), придем к аналогичному равенству, в левой части которого будет стоять линейный дифференциальный оператор четвертого порядка с постоянными коэффициентами (действующий на y) и

сумма вида $\sum_{k=1}^{n-2} B_k I_k$. Продолжая далее с помощью двукратного дифференцирования и соотношения (13)

последовательно исключать слагаемые I_{n-2}, I_{n-3}, \dots , придем в итоге к линейному неоднородному обыкновенному дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами порядка $2n$.

Начальные условия для функции $y(x)$ находятся в результате подстановки значения $x = a$ в интегральное уравнение и все его следствия, полученные с помощью дифференцирования.

2°. Найдем корни z_k алгебраического уравнения

$$\sum_{k=1}^n \frac{\lambda_k A_k}{z + \lambda_k^2} + 1 = 0, \quad (17)$$

которое после приведения к общему знаменателю сводится к задаче об определении корней характеристического многочлена n -й степени.

Пусть все корни z_k уравнения (17) действительны, различны и не равны нулю. Все корни в зависимости от их знака разобьем на две группы:

$$\begin{aligned} z_1 > 0, \quad z_2 > 0, \quad \dots, \quad z_s > 0 & \quad (\text{положительные корни}); \\ z_{s+1} < 0, \quad z_{s+2} < 0, \quad \dots, \quad z_n < 0 & \quad (\text{отрицательные корни}). \end{aligned}$$

Решение интегрального уравнения можно представить в виде

$$y(x) = f(x) + \int_a^x \left\{ \sum_{k=1}^s B_k \operatorname{sh}[\mu_k(x-t)] + \sum_{k=s+1}^n C_k \sin[\mu_k(x-t)] \right\} f(t) dt, \quad \mu_k = \sqrt{|z_k|}. \quad (18)$$

Коэффициенты B_k и C_k находятся из системы линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{k=0}^s \frac{B_k \mu_k}{\lambda_m^2 + \mu_k^2} + \sum_{k=s+1}^n \frac{C_k \mu_k}{\lambda_m^2 - \mu_k^2} - 1 = 0, \quad \mu_k = \sqrt{|z_k|}, \quad m = 1, 2, \dots, n. \quad (19)$$

Случай с нулевым корнем $z_s = 0$ рассматривается с помощью введения новой постоянной $D = B_s \mu_s$ и предельного перехода $\mu_s \rightarrow 0$. В результате в решении (18) вместо члена $B_s \operatorname{sh}[\mu_s(x - t)]$ возникает слагаемое $D(x - t)$, а в системе (19) появляются соответствующие слагаемые $D\lambda_m^{-2}$.

Уравнение с разностным ядром, содержащим сумму косинусов и синусов, также сводится к линейному неоднородному обыкновенному дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами.

9.7-4. Ядро содержит комбинации различных функций

Любое уравнение с разностным ядром, содержащим линейную комбинацию слагаемых вида

$$(x - t)^m \quad (m = 0, 1, 2, \dots), \quad \exp[\alpha(x - t)], \quad \operatorname{ch}[\beta(x - t)], \quad \operatorname{sh}[\gamma(x - t)], \quad \cos[\lambda(x - t)], \quad \sin[\mu(x - t)], \quad (20)$$

также с помощью дифференцирования может быть сведено к линейному неоднородному обыкновенному дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами. Экспоненциальная, гиперболические и тригонометрические функции могут быть умножены также на $(x - t)^n$ ($n = 1, 2, \dots$).

Замечание. Метод дифференцирования с успехом может использоваться также для решения более сложных уравнений с неразностным ядром, к которым неприменимо преобразование Лапласа.

9.8. Сведение уравнений Вольтерра второго рода к уравнениям Вольтерра первого рода

Уравнение Вольтерра второго рода

$$y(x) - \int_a^x K(x, t)y(t) dt = f(x) \quad (1)$$

можно свести к уравнению Вольтерра первого рода двумя способами.

9.8-1. Первый способ

Проинтегрируем обе части уравнения (1) по x от a до x , а затем изменим порядок интегрирования в двойном интеграле. В результате приходим к уравнению Вольтерра первого рода

$$\int_a^x M(x, t)y(t) dt = F(x), \quad (2)$$

в котором использованы следующие обозначения:

$$M(x, t) = 1 - \int_t^x K(s, t) ds, \quad F(x) = \int_a^x f(t) dt. \quad (3)$$

9.8-2. Второй способ

Пусть выполнено условие $f(a) = 0$. Тогда уравнение (1) приводится к уравнению Вольтерра первого рода для производной искомой функции

$$\int_a^x N(x, t)y'_t(t) dt = f(x), \quad y(a) = 0, \quad (4)$$

где

$$N(x, t) = 1 - \int_t^x K(x, s) ds. \quad (5)$$

Действительно, интегрируя по частям правую часть (4) с учетом формулы (5), приходим к уравнению (1).

Замечание. При $f(a) \neq 0$ из уравнения (1) следует, что $y(a) = f(a)$. В этом случае замена $z(x) = y(x) - f(a)$ приводит к уравнению Вольтерра второго рода

$$z(x) - \int_a^x K(x, t)z(t) dt = \Phi(x),$$

$$\Phi(x) = f(x) - f(a) + f(a) \int_a^x K(x, t) dt,$$

для правой части которого выполняется условие $\Phi(0) = 0$ и которое уже может быть сведено вторым способом к уравнению Вольтерра первого рода.

● *Литература:* В. Вольтерра (1982), А. Ф. Верлань, В. С. Сизиков (1986).

9.9. Метод последовательных приближений

9.9-1. Общая схема

1°. Рассмотрим интегральное уравнение Вольтерра второго рода

$$y(x) - \int_a^x K(x, t)y(t) dt = f(x). \quad (1)$$

Будем считать, что $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, а ядро $K(x, t)$ непрерывно при $a \leq x \leq b$, $a \leq t \leq x$.

Будем искать решение методом последовательных приближений. Для этого положим

$$y(x) = f(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x), \quad (2)$$

где $\varphi_n(x)$ определяются по формулам

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= \int_a^x K(x, t)f(t) dt, \\ \varphi_2(x) &= \int_a^x K(x, t)\varphi_1(t) dt = \int_a^x K_2(x, t)f(t) dt, \\ \varphi_3(x) &= \int_a^x K(x, t)\varphi_2(t) dt = \int_a^x K_3(x, t)f(t) dt, \quad \dots \end{aligned}$$

Здесь

$$K_n(x, t) = \int_a^x K(x, z)K_{n-1}(z, t) dz, \quad (3)$$

где $n = 2, 3, \dots$, причем $K_1(x, t) \equiv K(x, t)$, $K_n(x, t) = 0$ при $t > x$. Функции $K_n(x, t)$, даваемые формулами (3), называются *итерированными ядрами*. Для них справедливо соотношение

$$K_n(x, t) = \int_a^x K_m(x, s)K_{n-m}(s, t) ds, \quad (4)$$

где m — любое натуральное число, меньшее n .

2°. Последовательные приближения можно построить и по другой, более общей схеме:

$$y_n(x) = f(x) + \int_a^x K(x, t)y_{n-1}(t) dt, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (5)$$

где $y_0(x)$ — какая-либо непрерывная на $[a, b]$ функция. Получаемые таким образом функции $y_1(x), y_2(x), \dots$ также непрерывны на отрезке $[a, b]$.

При сделанных выше предположениях относительно $f(x)$ и $K(x, t)$ последовательность $\{y_n(x)\}$ сходится при $n \rightarrow \infty$ к непрерывному решению $y(x)$ интегрального уравнения. Удачный выбор «нулевого» приближения $y_0(x)$ может привести к быстрой сходимости процесса.

Следует отметить, что в частном случае $y_0(x) = f(x)$ данный метод переходит в метод, изложенный в 1°.

Замечание 1. Если ядро $K(x, t)$ квадратично интегрируемо в $S = \{a \leq x \leq b, a \leq t \leq x\}$ и $f(x) \in L_2(a, b)$, то последовательные приближения сходятся в среднем к решению $y(x) \in L_2(a, b)$ уравнения (1) при любом выборе начального приближения $y_0(x) \in L_2(a, b)$.

9.9-2. Формула для резольвенты

Резольвента интегрального уравнения (1) определяется через итерированные ядра формулой

$$R(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} K_n(x, t), \quad (6)$$

где сходящийся ряд, стоящий в правой части, называется *рядом Неймана* ядра $K(x, t)$. Решение уравнения Вольтерра второго рода (1) может теперь быть записано в традиционной форме

$$y(x) = f(x) + \int_a^x R(x, t)f(t) dt. \quad (7)$$

Замечание 2. В случае ядра со слабой особенностью решение уравнения (1) может быть получено рассмотренным выше методом последовательных приближений. При этом ядра $K_n(x, t)$, начиная с некоторого значения n , непрерывны. При $\alpha < \frac{1}{2}$ непрерывным будет уже ядро $K_2(x, t)$.

⊙ *Литература:* У. В. Ловитт (1957), С. Г. Михлин (1959), М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко (1968), В. И. Смирнов (1974), В. Вольтерра (1982).

9.10. Метод квадратур**9.10-1. Общая схема метода**

Рассмотрим линейное интегральное уравнение Вольтерра второго рода

$$y(x) - \int_a^x K(x, t)y(t) dt = f(x) \quad (1)$$

на отрезке $a \leq x \leq b$, и применим для его решения метод квадратур. Будем считать ядро и правую часть уравнения непрерывными функциями.

На основании уравнения (1) найдем, что $y(a) = f(a)$. Возьмем постоянный шаг интегрирования h и рассмотрим дискретное множество точек $x_i = a + h(i-1)$, $i = 1, 2, \dots, n$. При $x = x_i$ уравнение (1) примет вид

$$y(x_i) - \int_a^{x_i} K(x_i, t)y(t) dt = f(x_i), \quad i = 1, \dots, n. \quad (2)$$

Заменяя интеграл в (2) квадратурной формулой (см. п. 8.7-1) и выбирая x_j ($j = 1, 2, \dots, i$) узлами квадратуры (по переменной t), получим следующую систему уравнений:

$$y(x_i) - \sum_{j=1}^i A_{ij} K(x_i, x_j) y(x_j) = f(x_i) + \varepsilon_i[y], \quad i = 2, 3, \dots, n, \quad (3)$$

где A_{ij} — коэффициенты квадратурной формулы на отрезке $[a, x_i]$, $\varepsilon_i[y]$ — ошибка аппроксимации. Полагая $\varepsilon_i[y]$ малыми и отбрасывая их, получим систему линейных алгебраических уравнений в форме

$$y_1 = f_1, \quad y_i - \sum_{j=1}^i A_{ij} K_{ij} y_j = f_i, \quad i = 2, 3, \dots, n, \quad (4)$$

где $K_{ij} = K(x_i, x_j)$ ($j = 1, \dots, i$), $f_i = f(x_i)$, y_j — приближенные значения искомой функции $y(x)$ в узлах x_i .

На основании (4) получим следующую рекуррентную формулу:

$$y_1 = f_1, \quad y_i = \frac{f_i + \sum_{j=1}^{i-1} A_{ij} K_{ij} y_j}{1 - A_{ii} K_{ii}}, \quad i = 2, 3, \dots, n, \quad (5)$$

справедливую при условии

$$1 - A_{ii} K_{ii} \neq 0, \quad (6)$$

чего всегда можно добиться за счет выбора узлов и обеспечения достаточной малости коэффициентов A_{ii} .

9.10-2. Применение формулы трапеций

В соответствии с формулой трапеций (см. п. 8.7-1), имеем

$$A_{i1} = A_{ii} = \frac{1}{2}h, \quad A_{i2} = \dots = A_{i,i-1} = h, \quad i = 2, 3, \dots, n.$$

Использование формулы трапеций в общей схеме метода квадратур для решения интегрального уравнения Вольтерра второго рода приводит к следующему пошаговому алгоритму:

$$y_1 = f_1, \quad y_i = \frac{f_i + h \sum_{j=1}^{i-1} \beta_j K_{ij} y_j}{1 - \frac{1}{2} h K_{ii}}, \quad i = 2, 3, \dots, n,$$

$$x_i = a + (i-1)h, \quad n = \frac{b-a}{h} + 1, \quad \beta_j = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{при } j = 1, \\ 1 & \text{при } j > 1, \end{cases}$$

где обозначения совпадают с введенным в п. 9.10-1. Формула трапеций достаточно проста, эффективна и часто используется на практике. Некоторые особенности применения метода квадратур для решения интегральных уравнений с переменным пределом интегрирования отмечены в п. 8.7-3.

9.10-3. Случай вырожденного ядра

В случае решения интегрального уравнения Вольтерра второго рода с произвольным ядром по мере увеличения номера шага нарастает и объем вычислений. Если же ядро оказывается вырожденным, то возможно построение алгоритмов с неизменным объемом вычислений на шаге. Действительно, для вырожденного ядра

$$K(x, t) = \sum_{k=1}^m p_k(x) q_k(t)$$

уравнение (1) можно записать в виде

$$y(x) = \sum_{k=1}^m p_k(x) \int_a^x q_k(t) y(t) dt + f(x).$$

Применение формулы трапеций позволяет получить следующее рекуррентное выражение (см. п. 9.10-2):

$$y_1 = f_1, \quad y_i = \frac{f_i + h \sum_{k=1}^m p_{ki} \sum_{j=1}^{i-1} \beta_j q_{kj} y_j}{1 - \frac{1}{2} h \sum_{k=1}^m p_{ki} q_{ki}},$$

где y_i — приближенные значения искомой функции $y(x)$ в узлах x_i , $f_i = f(x_i)$, $p_{ki} = p_k(x_i)$, $q_{ki} = q_k(x_i)$, из которого видно, что количество вычислений на каждом шаге остается неизменным.

⊙ *Литература:* В. И. Крылов, В. В. Бобков, П. И. Монастырный (1984), А. Ф. Верлань, В. С. Сизиков (1986).

9.11. Уравнения с бесконечным пределом интегрирования

Представляют также интерес интегральные уравнения второго рода с одним переменным, а другим бесконечным пределами, содержащие разностное ядро. Ядра и функции таких уравнений могут не принадлежать описанным в начале главы классам. В этом случае их исследование проводится методом модельных решений (см. разд. 9.6) или методом сведения к уравнениям типа свертки. Для определенности рассмотрим далее уравнения второго рода с переменным нижним пределом интегрирования.

9.11-1. Случай переменного нижнего предела интегрирования

Интегральное уравнение второго рода с переменным нижним пределом в случае разностного ядра имеет вид

$$y(x) + \int_x^\infty K(x-t)y(t)dt = f(x), \quad 0 < x < \infty. \quad (1)$$

Оно принципиальным образом отличается от уравнений Вольтерра второго рода, рассмотренных выше, для которых решение существует и единственно. Решение соответствующего однородного уравнения

$$y(x) + \int_x^\infty K(x-t)y(t) dt = 0 \quad (2)$$

может быть и нетривиальным.

Собственные функции интегрального уравнения (2) определяются корнями следующего трансцендентного (или алгебраического) уравнения относительно параметра λ :

$$\int_0^\infty K(-z)e^{-\lambda z} dz = -1. \quad (3)$$

Левая часть этого уравнения есть изображение функции $K(-z)$, полученное с помощью преобразования Лапласа с параметром λ .

Например, простому действительному корню λ_k уравнения (3) соответствует собственная функция $y_k(x) = \exp(-\lambda_k x)$. Общее решение однородного уравнения представляет собой линейную комбинацию (с произвольными постоянными) собственных функций уравнения (2).

Ниже в примере 1 даны общие решения конкретного уравнения типа (2) для случаев кратных и комплексных корней (3).

Общее решение интегрального уравнения (1) представляет из себя сумму общего решения однородного уравнения (2) и частного решения неоднородного уравнения (1).

Пример 1. Рассмотрим однородное интегральное уравнение Пикара–Гурса

$$y(x) + A \int_x^\infty (t-x)^n y(t) dt = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (4)$$

которое является частным случаем уравнения (1) при $K(z) = A(-z)^n$.

Общее решение однородного уравнения имеет вид

$$y(x) = \sum_{k=1}^m C_k \exp(-\lambda_k x), \quad (5)$$

где C_k — произвольные постоянные, λ_k — корни алгебраического уравнения

$$\lambda^{n+1} + An! = 0, \quad (6)$$

удовлетворяющие условию $\operatorname{Re} \lambda_k > 0$ (m — число корней уравнения (6), для которых это условие выполняется). Уравнение (6) есть частный случай уравнения (3) при $K(z) = A(-z)^n$. Корни уравнения (6), для которых $\operatorname{Re} \lambda_k \leq 0$ должны быть отброшены, поскольку интеграл в (3) для них расходится.

Уравнение (6) имеет комплексные корни. Рассмотрим два случая, которые соответствуют разным знакам величины A .

1°. Пусть $A < 0$. Решение уравнения (4) имеет вид

$$y(x) = Ce^{-\lambda x}, \quad \lambda = (-An!)^{\frac{1}{n+1}}, \quad (7)$$

где C — произвольная постоянная. Это решение единственно при $n = 0, 1, 2, 3$.

При $n \geq 4$, выделяя в (5) действительную и мнимую части, придем к общему решению однородного уравнения Пикара–Гурса в форме

$$y(x) = Ce^{-\lambda x} + \sum_{k=1}^{[n/4]} \exp(-\alpha_k x) [C_k^{(1)} \cos(\beta_k x) + C_k^{(2)} \sin(\beta_k x)], \quad (8)$$

где $C_k^{(1)}, C_k^{(2)}$ — произвольные постоянные, $[a]$ — целая часть числа a , λ определено в (7), а коэффициенты α_k и β_k даются выражениями

$$\alpha_k = |An!|^{\frac{1}{n+1}} \cos\left(\frac{2\pi k}{n+1}\right), \quad \beta_k = |An!|^{\frac{1}{n+1}} \sin\left(\frac{2\pi k}{n+1}\right).$$

Заметим, что решение (8) содержит нечетное число слагаемых.

2°. Пусть $A > 0$. Выделяя в (5) действительную и мнимую части, получим общее решение однородного уравнения Пикара–Гурса в форме

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n+2}{4}\right]} \exp(-\alpha_k x) [C_k^{(1)} \cos(\beta_k x) + C_k^{(2)} \sin(\beta_k x)], \quad (9)$$

где $C_k^{(1)}, C_k^{(2)}$ — произвольные постоянные, а коэффициенты α_k и β_k даются формулами

$$\alpha_k = (An!)^{\frac{1}{n+1}} \cos\left(\frac{2\pi k + \pi}{n+1}\right), \quad \beta_k = (An!)^{\frac{1}{n+1}} \sin\left(\frac{2\pi k + \pi}{n+1}\right).$$

Заметим, что решение (9) содержит четное число слагаемых. В частных случаях при $n = 0$ и $n = 1$, выражение (9) приводит к тривиальному решению $y(x) \equiv 0$.

Пример 2. Рассмотрим неоднородное интегральное уравнение Пикара–Гурса

$$y(x) + A \int_x^\infty (t-x)^n y(t) dt = Be^{-\mu x}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (10)$$

которое является частным случаем уравнения (1) при $K(z) = A(-z)^n$ и $f(x) = Be^{-\mu x}$.

Будем считать, что $\mu > 0$. Рассмотрим два случая.

1°. Пусть $\mu^{n+1} + An! \neq 0$. Частное решение неоднородного уравнения имеет вид

$$\bar{y}(x) = De^{-\mu x}, \quad D = \frac{B\mu^{n+1}}{\mu^{n+1} + An!}. \quad (11)$$

При $A < 0$, общее решение неоднородного уравнения Пикара–Гурса является суммой решений (8) и (11). При $A > 0$, общее решение уравнения (10) есть сумма решений (9) и (11).

2°. Пусть $\mu^{n+1} + An! = 0$. Поскольку μ положительно, то A должно быть отрицательным. Частное решение неоднородного уравнения имеет вид

$$\bar{y}(x) = Exe^{-\mu x}, \quad E = \frac{B\mu^{n+2}}{A(n+1)!}. \quad (12)$$

Общее решение неоднородного уравнения Пикара–Гурса есть сумма решений (8) и (12).

9.11-2. Приведение к уравнению Винера–Хопфа второго рода

Уравнение (1) может быть приведено к одностороннему уравнению второго рода типа

$$y(x) - \int_0^\infty K_-(x-t)y(t) dt = f(x), \quad 0 < x < \infty, \quad (13)$$

где ядро $K_-(x-t)$ имеет следующий вид:

$$K_-(s) = \begin{cases} 0 & \text{при } s > 0, \\ -K(s) & \text{при } s < 0. \end{cases}$$

Методы исследования уравнения (13) описаны в главе 11, где рассматриваются уравнения второго рода с постоянными пределами. Там же в п. 11.9-3 изучено уравнение второго рода с разностным ядром и переменным нижним пределом интегрирования посредством приведения его к уравнению Винера–Хопфа второго рода.

● *Литература:* Ф. Д. Гахов, Ю. И. Черский (1978).

10. Методы решения линейных уравнений

$$\text{вида } \int_a^b K(x, t)y(t) dt = f(x)$$

10.1. Предварительные замечания

10.1-1. Интегральные уравнения Фредгольма первого рода

Линейные интегральные уравнения первого рода с постоянными пределами интегрирования имеют форму

$$\int_a^b K(x, t)y(t) dt = f(x), \quad (1)$$

где $y(x)$ — неизвестная функция ($a \leq x \leq b$), $K(x, t)$ — ядро интегрального уравнения, $f(x)$ — некоторая известная функция, которая называется *свободным членом* или *правой частью уравнения* (1). Функции $y(x)$ и $f(x)$ обычно считают непрерывными, либо квадратично интегрируемыми на $[a, b]$. Если ядро интегрального уравнения (1) непрерывно в квадрате $S = \{a \leq x \leq b, a \leq t \leq b\}$, либо квадратично интегрируемо в этом квадрате, т. е.

$$\int_a^b \int_a^b K^2(x, t) dx dt = B^2 < \infty, \quad (2)$$

где B — постоянная, то его называют *фредгольмовым ядром*. Уравнения с постоянными пределами интегрирования вида (1), имеющие фредгольмово ядро, называют *уравнениями Фредгольма первого рода*.

Ядро интегрального уравнения $K(x, t)$ называется *вырожденным*, если оно представимо в виде $K(x, t) = g_1(x)h_1(t) + \dots + g_n(x)h_n(t)$.

Ядро интегрального уравнения $K(x, t)$ называется *разностным*, если оно зависит от разности аргументов: $K(x, t) = K(x - t)$.

Ядро интегрального уравнения $K(x, t)$ называется *симметричным*, если оно удовлетворяет условию $K(x, t) = K(t, x)$.

Интегральное уравнение, полученное из (1) заменой ядра $K(x, t)$ на $K(t, x)$, называется союзным с (1) или транспонированным к нему.

Замечание 1. В общем случае переменные t и x в уравнении (1) могут изменяться в различных пределах (например, $a \leq t \leq b$ и $c \leq x \leq d$).

10.1-2. Интегральные уравнения первого рода со слабой особенностью

Если ядро интегрального уравнения (1) является *полярным*:

$$K(x, t) = \frac{L(x, t)}{|x - t|^\alpha} + M(x, t), \quad 0 < \alpha < 1, \quad (3)$$

либо логарифмическим:

$$K(x, t) = L(x, t) \ln |x - t| + M(x, t), \quad (4)$$

где $L(x, t)$, $M(x, t)$ непрерывны в S и $L(x, x) \neq 0$, то оно называется *ядром со слабой особенностью*, а само уравнение — *уравнением со слабой особенностью*.

Замечание 2. Ядра с логарифмической особенностью и полярные ядра при $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ являются фредгольмовыми.

Замечание 3. Случай, когда пределы интегрирования a и/или b могут быть бесконечными, вообще говоря, не исключается, но при этом следует внимательно проверять выполнение условия (2).

10.1-3. Интегральные уравнения типа свертки

Интегральное уравнение первого рода с разностным ядром на всей оси (его называют иногда *уравнением типа свертки первого рода с одним ядром*) имеет вид

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(x - t)y(t) dt = f(x), \quad -\infty < x < \infty, \quad (5)$$

где $y(x)$ — искомая функция, $K(x)$ — ядро интегрального уравнения, $f(x)$ — правая часть интегрального уравнения (введенные обозначения будем использовать и далее).

Интегральное уравнение первого рода с разностным ядром на полуоси имеет вид

$$\int_0^{\infty} K(x-t)y(t) dt = f(x), \quad 0 < x < \infty. \quad (6)$$

Уравнение (6) называется также *односторонним уравнением первого рода* или *интегральным уравнением Винера–Хопфа первого рода*.

Интегральное уравнение типа свертки с двумя ядрами первого рода имеет вид

$$\int_0^{\infty} K_1(x-t)y(t) dt + \int_{-\infty}^0 K_2(x-t)y(t) dt = f(x), \quad -\infty < x < \infty, \quad (7)$$

где $K_1(x)$ и $K_2(x)$ — ядра интегрального уравнения (7).

Функция $g(x)$ удовлетворяет на действительной оси условию Гёльдера, если для любых действительных x_1 и x_2 выполняется неравенство

$$|g(x_2) - g(x_1)| \leq A|x_2 - x_1|^\lambda, \quad 0 < \lambda \leq 1,$$

и для любых достаточно больших по модулю x_1 и x_2 справедливо

$$|g(x_2) - g(x_1)| \leq A \left| \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} \right|^\lambda, \quad 0 < \lambda \leq 1,$$

где A и λ — положительные числа (последнее условие является условием Гёльдера в окрестности бесконечно удаленной точки).

Предположим, что функции $y(x)$, $f(x)$ и ядра $K(x)$, $K_1(x)$, $K_2(x)$ таковы, что их изображения, полученные с помощью преобразования Фурье, принадлежат $L_2(-\infty, \infty)$ и, кроме того, удовлетворяют условию Гёльдера.

Для того чтобы некоторая функция $y(x)$ принадлежала введенному классу функций, достаточно, чтобы функция $y(x)$ принадлежала $L_2(-\infty, \infty)$, а $xy(x)$ была абсолютно интегрируема на $(-\infty, \infty)$.

Замечание 4. Иногда класс функций и ядер для уравнений типа свертки (в частности, для уравнения Винера–Хопфа) отличается от введенного в п. 10.1-3. Это обстоятельство будет оговариваться в каждом отдельном случае.

10.1-4. Парные интегральные уравнения первого рода

Парное интегральное уравнение первого рода с разностными ядрами (типа свертки) имеет вид

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} K_1(x-t)y(t) dt &= f(x), & 0 < x < \infty, \\ \int_{-\infty}^{\infty} K_2(x-t)y(t) dt &= f(x), & -\infty < x < 0, \end{aligned} \quad (8)$$

где обозначения, класс функций и ядер совпадают с введенными ранее для уравнений типа свертки.

Парное интегральное уравнение первого рода в достаточно общем случае имеет вид

$$\begin{aligned} \int_a^{\infty} K_1(x,t)y(t) dt &= f_1(x), & a < x < b, \\ \int_a^{\infty} K_2(x,t)y(t) dt &= f_2(x), & b < x < \infty, \end{aligned}$$

где $f_1(x)$, $f_2(x)$ и $K_1(x,t)$, $K_2(x,t)$ — известные правые части и ядра уравнения (9), а $y(x)$ — функция, подлежащая определению. Его различные формы будут рассмотрены в пп. 10.6-2 и 10.6-3.

Интегральные уравнения, полученные из (5)–(8) заменой ядра $K(x-t)$ на $K(t-x)$, называются союзными с ними или транспонированными к ним.

Замечание 5. К уравнениям (5)–(8) приводятся некоторые уравнения, ядра которых содержат произведение или отношение переменных x и t .

Замечание 6. Уравнения типа свертки (5)–(8) иногда записывают в форме, где перед интегралами ставят множитель $1/\sqrt{2\pi}$.

⊙ *Литература:* И. Снеддон (1955), С. Г. Михлин (1959), Б. Нобл (1962), И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн (1967), П. П. Забрейко, А. И. Кошелев и др. (1968), М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко (1968), Л. Я. Цлаф (1970), Я. С. Уфлянд (1977), Ф. Д. Гахов, Ю. И. Черский (1978), А. J. Jerry (1985), А. Ф. Верлань, В. С. Сизиков (1986), L. A. Sakhnovich (1996), A. D. Polyanin, A. V. Manzhirov (1998), А. В. Манжиров, А. Д. Полянин (1999, 2000), А. Б. Васильева, Н. А. Тихонов (2002).

10.2. Метод Крейна

10.2-1. Основное и вспомогательное уравнения

Опишем здесь метод построения точных аналитических решений линейных интегральных уравнений первого рода со слабой особенностью и произвольной правой частью. Метод основан на построении вспомогательного решения более простого уравнения с правой частью равной единице. Вспомогательное решение используется для построения решения исходного уравнения при произвольной правой части.

Рассмотрим уравнение

$$\int_{-a}^a K(x-t)y(t) dt = f(x), \quad -a \leq x \leq a. \quad (1)$$

Считаем, что ядро интегрального уравнения (1) является полярным или логарифмическим, а $K(x)$ — четная положительно определенная функция, представимая в виде

$$\begin{aligned} K(x) &= \beta|x|^{-\mu} + M(x), \quad 0 < \mu < 1, \\ K(x) &= \beta \ln \frac{1}{|x|} + M(x), \end{aligned}$$

где $\beta > 0$, $-2a \leq x \leq 2a$, $M(x)$ — достаточно гладкая функция.

Одновременно с (1) будем рассматривать вспомогательное уравнение, зависящее от параметра ξ ($0 \leq \xi \leq a$):

$$\int_{-\xi}^{\xi} K(x-t)w(t, \xi) dt = 1, \quad -\xi \leq x \leq \xi. \quad (2)$$

10.2-2. Решение основного уравнения

Для любой непрерывной функции $f(x)$ решение исходного уравнения (1) может быть выражено через решение вспомогательного уравнения (2) по формуле

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{1}{2M'(a)} \left[\frac{d}{da} \int_{-a}^a w(t, a)f(t) dt \right] w(x, a) - \\ &- \frac{1}{2} \int_{|x|}^a w(x, \xi) \frac{d}{d\xi} \left[\frac{1}{M'(\xi)} \frac{d}{d\xi} \int_{-\xi}^{\xi} w(t, \xi)f(t) dt \right] d\xi - \\ &- \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \int_{|x|}^a \frac{w(x, \xi)}{M'(\xi)} \left[\int_{-\xi}^{\xi} w(t, \xi) df(t) \right] d\xi, \end{aligned} \quad (3)$$

где $M(\xi) = \int_0^{\xi} w(x, \xi) dx$, штрих обозначает производную, а последний внутренний интеграл берется по Стильтесу.

Формула (3) позволяет получить некоторые точные решения интегральных уравнений вида (1) с произвольной правой частью.

Пример 1. Решение интегрального уравнения

$$\int_{-a}^a \ln \left(\frac{A}{|x-t|} \right) y(t) dt = f(x),$$

которое встречается в теории упругости, дается формулой (3), где функции $M(\xi)$ и $w(t, \xi)$ определяются выражениями

$$M(\xi) = \left(\ln \frac{2A}{\xi} \right)^{-1}, \quad w(t, \xi) = \frac{M(\xi)}{\pi \sqrt{\xi^2 - t^2}}.$$

Пример 2. Рассмотрим интегральное уравнение

$$\int_{-a}^a \frac{y(t) dt}{|x-t|^\mu} = f(x), \quad 0 < \mu < 1,$$

которое встречается в теории ползучести. Его решение дается формулой (3), где функции $M(\xi)$ и $w(t, \xi)$ определяются выражениями

$$M(\xi) = \frac{2\sqrt{\pi}}{\mu \Gamma\left(\frac{\mu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1-\mu}{2}\right)} \xi^\mu, \quad w(t, \xi) = \frac{1}{\pi} \cos\left(\frac{\pi\mu}{2}\right) (\xi^2 - t^2)^{\frac{\mu-1}{2}}.$$

● *Литература:* Н. Х. Арутюнян (1959), И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн (1967).

10.3. Метод интегральных преобразований

Метод интегральных преобразований позволяет привести некоторые интегральные уравнения на всей оси и на полуоси к алгебраическим уравнениям для изображений. Последние элементарно разрешаются относительно изображения искомой функции. Решение исходного интегрального уравнения получается в результате применения обратного интегрального преобразования.

10.3-1. Уравнение с разностным ядром на всей оси

Рассмотрим интегральное уравнение

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(x-t)y(t) dt = f(x), \quad -\infty < x < \infty, \quad (1)$$

где $f(x), y(x) \in L_2(-\infty, \infty)$ и $K(x) \in L_1(-\infty, \infty)$.

Применим к уравнению (1) преобразование Фурье. Тогда с учетом теоремы о свертке (см. п. 7.4-4) получим

$$\sqrt{2\pi} \tilde{K}(u) \tilde{y}(u) = \tilde{f}(u). \quad (2)$$

Таким образом, с помощью преобразования Фурье нам удалось свести решение исходного интегрального уравнения (1) к решению алгебраического уравнения (2) для изображения искомого решения. Решение последнего уравнения имеет форму

$$\tilde{y}(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\tilde{f}(u)}{\tilde{K}(u)}, \quad (3)$$

причем функция $\tilde{f}(u)/\tilde{K}(u)$ должна принадлежать $L_2(-\infty, \infty)$.

Тем самым изображение решения исходного интегрального уравнения оказалось выраженным через изображения заданных функций — ядра и правой части уравнения. Само решение может быть выражено через его изображение с помощью формулы обратного преобразования:

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{y}(u) e^{iux} du = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{f}(u)}{\tilde{K}(u)} e^{iux} du. \quad (4)$$

10.3-2. Уравнения с ядром $K(x, t) = K(x/t)$ на полуоси

Интегральное уравнение первого рода

$$\int_0^{\infty} K(x/t)y(t) dt = f(x), \quad 0 \leq x < \infty, \quad (5)$$

заменой переменных $x = e^\xi$, $t = e^\tau$, $w(\tau) = ty(t)$ приводится к виду (1). Его решение может быть также получено путем непосредственного применения преобразования Меллина, что будет в аналогичной ситуации проделано в следующем разделе.

10.3-3. Уравнение с ядром $K(x, t) = K(xt)$ и его обобщения

1°. Рассмотрим сначала следующее уравнение:

$$\int_0^{\infty} K(xt)y(t) dt = f(x), \quad 0 \leq x < \infty. \quad (6)$$

Его заменой переменных $x = e^\xi$, $t = e^{-\tau}$ можно привести к виду (1), но здесь удобнее использовать преобразование Меллина (см. разд. 7.3). Умножая обе части (6) на x^{s-1} и интегрируя по x от нуля до бесконечности, получим

$$\int_0^\infty y(t) dt \int_0^\infty K(xt)x^{s-1} dx = \int_0^\infty f(x)x^{s-1} dx.$$

Во внутреннем интеграле двойного интеграла сделаем замену $z = xt$. В результате получим

$$\widehat{K}(s) \int_0^\infty y(t)t^{-s} dt = \widehat{f}(s). \quad (7)$$

Учитывая равенство

$$\int_0^\infty y(t)t^{-s} dt = \widehat{y}(1-s),$$

перепишем уравнение (7) в следующем виде:

$$\widehat{K}(s)\widehat{y}(1-s) = \widehat{f}(s). \quad (8)$$

Заменяя в (8) $1-s$ на s и разрешая полученное выражение относительно $\widehat{y}(s)$, находим изображение искомого решения

$$\widehat{y}(s) = \frac{\widehat{f}(1-s)}{\widehat{K}(1-s)}. \quad (9)$$

По формуле обращения Меллина получим решение интегрального уравнения (6) в виде

$$y(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\widehat{f}(1-s)}{\widehat{K}(1-s)} x^{-s} ds.$$

2°. Рассмотрим теперь более сложное уравнение

$$\int_0^\infty K(\varphi(x)\psi(t))g(t)y(t) dt = f(x). \quad (10)$$

Считаем, что выполнены условия $\varphi(0) = 0$, $\varphi(\infty) = \infty$, $\varphi'_x > 0$, $\psi(0) = 0$, $\psi(\infty) = \infty$, $\psi'_t > 0$.

Преобразование

$$z = \varphi(x), \quad \tau = \psi(t), \quad y(t) = \frac{g(t)}{\psi'_t(t)} w(\tau)$$

приводит (10) к уравнению вида (6)

$$\int_0^\infty K(z\tau)w(\tau) d\tau = F(z),$$

где функция $F(z)$ задается параметрически: $F = f(x)$, $z = \varphi(x)$. Во многих случаях, исключая из этих равенств x , удастся получить явную зависимость $F = F(z)$.

⊙ Литература: В. А. Диткин, А. П. Прудников (1965), М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко (1968).

10.4. Задача Римана для действительной оси

Краевая задача Римана служит одним из основных инструментов построения решений интегральных уравнений, к которым могут быть применены различные интегральные преобразования, и при этом возможно использование теорем типа свертки. Ее исследование проводится на примере интегрального преобразования Фурье.

10.4-1. Связь интеграла Фурье с интегралом типа Коши

Пусть $\mathcal{Y}(\tau)$ — функция, интегрируемая на замкнутом или разомкнутом контуре L , расположенном в комплексной плоскости $z = u + iv$ (τ — комплексная координата точек контура). Рассмотрим интеграл типа Коши (см. разд. 12.2):

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\mathcal{Y}(\tau)}{\tau - z} d\tau.$$

Он определяет функцию, аналитическую в комплексной плоскости с разрезом по контуру L . Если L — замкнутая кривая, то интеграл будет функцией, аналитической в каждой связной части плоскости, ограничиваемой L . Пусть контур L есть вещественная ось, тогда

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathcal{Y}(\tau)}{\tau - z} d\tau = \begin{cases} \mathcal{Y}^+(z) & \text{при } \operatorname{Im} z > 0, \\ \mathcal{Y}^-(z) & \text{при } \operatorname{Im} z < 0. \end{cases} \quad (1)$$

Кроме того, существуют предельные значения функций $\mathcal{Y}^{\pm}(z)$ на действительной оси и они будут связаны с плотностью \mathcal{Y} интеграла следующими формулами Сохоцкого–Племеля:

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}^+(u) &= \frac{1}{2} \mathcal{Y}(u) + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathcal{Y}(\tau)}{\tau - u} d\tau, \\ \mathcal{Y}^-(u) &= -\frac{1}{2} \mathcal{Y}(u) + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathcal{Y}(\tau)}{\tau - u} d\tau \end{aligned} \quad (2)$$

или

$$\mathcal{Y}^+(u) - \mathcal{Y}^-(u) = \mathcal{Y}(u), \quad \mathcal{Y}^+(u) + \mathcal{Y}^-(u) = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathcal{Y}(\tau)}{\tau - u} d\tau. \quad (3)$$

Интеграл в последних формулах понимается в смысле главного значения по Коши.

В интеграл Фурье*

$$\mathcal{Y}(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} y(x) e^{iux} dx$$

действительный параметр u входит посредством аналитической функции, поэтому в нем можно u заменить на комплексное z . Функция комплексного переменного $\mathcal{Y}(z)$, определяемая интегралом

$$\mathcal{Y}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} y(x) e^{izx} dx, \quad (4)$$

будет аналитической в той области комплексной плоскости $z = u + iv$, где интеграл (4) абсолютно сходится. Если такая область не сводится к одной действительной оси, то интеграл (4) даст аналитическое продолжение интеграла Фурье в комплексную плоскость $z = u + iv$. Интеграл (4) будем также называть интегралом Фурье.

Установим связь между этим интегралом и интегралом типа Коши с плотностью $\mathcal{Y}(u)$, взятыми по оси. Будем иметь

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathcal{Y}(\tau)}{\tau - z} d\tau = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} y(x) e^{izx} dx, \quad \operatorname{Im} z > 0, \quad (5)$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathcal{Y}(\tau)}{\tau - z} d\tau = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 y(x) e^{izx} dx, \quad \operatorname{Im} z < 0. \quad (6)$$

10.4-2. Односторонние интегралы Фурье

Если $\mathcal{Y}(z) = \mathcal{Y}^+(z)$ есть аналитическая в верхней полуплоскости функция, имеющая своим предельным значением на действительной оси функцию $\mathcal{Y}(u) = \mathcal{Y}^+(u) \in L_2(-\infty, \infty)$, то функцию $\mathcal{Y}^+(z)$ можно представить интегралом Коши. Отсюда в на основании (5) будем иметь

$$\mathcal{Y}^+(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} y(x) e^{izx} dx,$$

причем в силу непрерывности интеграла предельные значения на оси можно получить простой заменой в последнем равенстве z на u :

$$\mathcal{Y}^+(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} y(x) e^{iux} dx,$$

где $y(x)$ есть, согласно (5), оригинал для $\mathcal{Y}(u)$. Правую часть можно рассматривать как интеграл Фурье от функции, равной тождественно нулю для отрицательных x . Отсюда в силу единственности представления функции $\mathcal{Y}^+(u)$ интегралом Фурье следует, что $y(x) \equiv 0$ на отрицательной полуоси.

* В разд. 10.4–10.6 используется альтернативное преобразование Фурье (см. п. 7.4-3).

Наоборот, если $y(x) \equiv 0$ для $x < 0$, то ее интеграл Фурье принимает вид

$$\mathcal{Y}(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty y(x)e^{iux} dx.$$

От замены параметра u на число z , лежащее в верхней полуплоскости, сходимость интеграла только улучшается. Отсюда следует аналитичность функции

$$\mathcal{Y}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty y(x)e^{izx} dx$$

в верхней полуплоскости.

Случай нижней полуплоскости рассматривается аналогично.

Интегралы

$$\mathcal{Y}^+(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty y(x)e^{izx} dx, \quad \mathcal{Y}^-(z) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 y(x)e^{izx} dx \quad (7)$$

называются *односторонними интегралами Фурье*, *правым* и *левым* соответственно. Значки \pm над символами функций, как и в формуле (1), будут означать аналитичность этих функций соответственно в верхней или нижней полуплоскостях.

Введем функции

$$y_+(x) = \begin{cases} y(x) & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x < 0, \end{cases} \quad y_-(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x > 0, \\ -y(x) & \text{при } x < 0. \end{cases} \quad (8)$$

Будем называть их *правой* и *левой односторонними функциями* для $y(x)$ соответственно, а иногда просто *правой* и *левой функциями*. Очевидно, будет справедливо равенство

$$y(x) = y_+(x) - y_-(x). \quad (9)$$

Используя известную функцию $\text{sign } x$:

$$\text{sign } x = \begin{cases} 1 & \text{при } x > 0, \\ -1 & \text{при } x < 0, \end{cases} \quad (10)$$

можно $y_\pm(x)$ выразить через $y(x)$ в следующем виде:

$$y_\pm(x) = \frac{1}{2}(\pm 1 + \text{sign } x)y(x). \quad (11)$$

У односторонних функций значки \pm будем всегда писать внизу.

Интегралы Фурье правой и левой односторонних функций есть краевые значения функций, аналитических соответственно в верхней и нижней полуплоскостях.

Приведем аналоги формул Сохоцкого–Племеля (3) в интегралах Фурье:

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}(u) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty y(x)e^{iux} dx = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty y(x)e^{iux} dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 y(x)e^{iux} dx = \mathcal{Y}^+(u) - \mathcal{Y}^-(u), \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^\infty \frac{\mathcal{Y}(\tau)}{\tau - u} d\tau &= \mathcal{Y}^+(u) + \mathcal{Y}^-(u) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty y(x)e^{iux} dx - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 y(x)e^{iux} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty y(x) \text{sign } x e^{iux} dx. \end{aligned}$$

Таким образом, первая из формул Сохоцкого–Племеля (представление произвольной функции в виде разности краевых значений аналитических функций) здесь является тривиальным следствием разбиения интеграла Фурье на правый и левый. Вторую из формул можно записать еще в следующей форме:

$$\mathbf{F}\{y(x) \text{sign } x\} = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^\infty \frac{\mathcal{Y}(\tau)}{\tau - u} d\tau. \quad (13)$$

10.4.3. Теорема об аналитическом продолжении и теорема Лиувилля

Ниже приведены теорема об аналитическом продолжении и обобщенная теорема Лиувилля в форме единого утверждения, которое будет использовано далее в главах 10 и 11.

Пусть функции $\mathcal{Y}_1(z)$ и $\mathcal{Y}_2(z)$ аналитичны соответственно в верхней и нижней полуплоскостях за исключением может быть точки $z_* \neq \infty$, где они могут иметь полюс. Если $\mathcal{Y}_1(z)$ и $\mathcal{Y}_2(z)$ ограничены на бесконечности, причем главные части их разложений в окрестности точки z_* имеют вид

$$\frac{c_1}{z - z_*} + \frac{c_2}{(z - z_*)^2} + \dots + \frac{c_m}{(z - z_*)^m} \equiv \frac{\mathcal{P}_{m-1}(z)}{(z - z_*)^m},$$

а сами функции совпадают на действительной оси, то они представляют единую во всей плоскости рациональную функцию

$$\mathcal{Y}(z) = c_0 + \frac{\mathcal{P}_{m-1}(z)}{(z - z_*)^m},$$

где c_0 — постоянная, \mathcal{P}_{m-1} — полином степени $m - 1$. Полюс z_* может лежать как в полуплоскостях, так и на действительной оси.

Ниже приведена более общая объединенная формулировка теорем.

Если функции $\mathcal{Y}_1(z)$ и $\mathcal{Y}_2(z)$ аналитичны соответственно в верхней и нижней полуплоскостях за исключением может быть конечного числа точек $z_0 = \infty, z_k$ ($k = 1, 2, \dots, n$), где они могут иметь полюсы, причем главные части разложений этих функций в окрестности полюсов имеют вид

$$\begin{aligned} c_1^0 z + c_2^0 z^2 + \dots + c_{m_0}^0 z^{m_0} &\equiv \mathcal{P}_{m_0}(z) && \text{в точке } z_0, \\ \frac{c_1^k}{z - z_k} + \frac{c_2^k}{(z - z_k)^2} + \dots + \frac{c_{m_k}^k}{(z - z_k)^{m_k}} &\equiv \frac{\mathcal{P}_{m_k-1}(z)}{(z - z_k)^{m_k}} && \text{в точках } z_k, \end{aligned}$$

а сами функции совпадают на действительной оси, то они представляют единую во всей плоскости рациональную функцию

$$\mathcal{Y}(z) = C + \mathcal{P}_{m_0}(z) + \sum_{k=1}^n \frac{\mathcal{P}_{m_k-1}(z)}{(z - z_k)^{m_k}}$$

где C — постоянная. Полюсы z_k могут лежать как в полуплоскостях, так и на действительной оси.

10.4.4. Краевая задача Римана

Решение задачи Римана в этом разделе будет отличаться от традиционного тем, что оно будет выражаться не в интегралах типа Коши (см. п. 12.3-8), а в интегралах Фурье. Для решения рассматриваемых уравнений типа свертки последний аппарат является более удобным.

Индексом непрерывной не обращающейся в нуль комплексной функции $\mathcal{M}(u)$ ($\mathcal{M}(u) = \mathcal{M}_1(u) + i\mathcal{M}_2(u)$, $-\infty < u < \infty$, $\mathcal{M}(-\infty) = \mathcal{M}(\infty)$) называется изменение ее аргумента на действительной оси, выраженное в полных оборотах:

$$\text{Ind } \mathcal{M}(u) = \frac{1}{2\pi} [\arg \mathcal{M}(u)]_{-\infty}^{\infty} = \frac{1}{2\pi i} [\ln \mathcal{M}(u)]_{-\infty}^{\infty} = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} d \ln \mathcal{M}(u).$$

Если $\mathcal{M}(u)$ не дифференцируема, но имеет ограниченную вариацию, то интеграл нужно понимать в смысле Стильеса. Из правил действий над аргументом вытекают следующие свойства индекса:

$$\begin{aligned} \text{Ind}[\mathcal{M}_1(u)\mathcal{M}_2(u)] &= \text{Ind } \mathcal{M}_1(u) + \text{Ind } \mathcal{M}_2(u), \\ \text{Ind } \frac{\mathcal{M}_1(u)}{\mathcal{M}_2(u)} &= \text{Ind } \mathcal{M}_1(u) - \text{Ind } \mathcal{M}_2(u), \quad \text{Ind } \mathcal{M}^n(u) = n \text{Ind } \mathcal{M}(u). \end{aligned}$$

Если функция $\mathcal{M}(u)$ является краевым значением аналитической, за исключением может быть конечного числа полюсов в верхней или нижней полуплоскости функции, то

$$\text{Ind } \mathcal{M}(u) = \pm(N - P),$$

где знак плюс берется для верхней, а минус — для нижней полуплоскости, N — число нулей, а P — число полюсов в соответствующей полуплоскости, причем нули и полюсы считаются с учетом их кратности.

Если в окрестности некоторой точки z_0 аналитическая функция $\mathcal{Y}(z)$ имеет представление

$$\mathcal{Y}(z) = (z - z_0)^m \mathcal{Y}_1(z),$$

где $\mathcal{Y}_1(z)$ аналитична и $\mathcal{Y}_1(z_0) \neq 0$, то целое число m (положительное, отрицательное или нуль) называется порядком функции $\mathcal{Y}(z)$ в точке z_0 . Если $m > 0$, то порядок функции есть порядок ее нуля, если $m < 0$, то порядок ее есть порядок полюса с противоположным знаком. Если порядок функции в z_0 есть нуль, то в такой точке функция принимает конечное, отличное от нуля, значение. При рассмотрении бесконечно удаленной точки разность $z - z_0$ следует заменить на $1/z$.

Сформулируем задачу Римана. Пусть на действительной оси заданы две функции: $\mathcal{D}(u)$ — коэффициент задачи и $\mathcal{H}(u)$ — свободный член, причем выполнено условие нормальности $\mathcal{D}(u) \neq 0$. Функции $\mathcal{H}(u)$ и $\mathcal{D}(u) - 1$ принадлежат $L_2(-\infty, \infty)$ и при этом удовлетворяют условию Гёльдера (см. п. 10.1-3). Требуется найти две функции $\mathcal{Y}^\pm(z)$ — аналитические соответственно в верхней и нижней полуплоскостях,* предельные значения которых на действительной оси удовлетворяют краевому условию

$$\mathcal{Y}^+(u) = \mathcal{D}(u)\mathcal{Y}^-(u) + \mathcal{H}(u). \quad (14)$$

Из представления $\mathcal{D}(u)$ вытекает, что $\mathcal{D}(\infty) = 1$. Последнее условие не ограничивает общности дальнейших рассуждений, поскольку, разделив краевое условие (14) на $\mathcal{D}(\infty)$, всегда можно получить необходимую форму задачи.**

Если $\mathcal{D}(u) \equiv 1$, то задача Римана называется *задачей о скачке*. Если $\mathcal{H}(u) \equiv 0$, то задача Римана называется *однородной*. Индекс ν коэффициента краевой задачи $\mathcal{D}(u)$ называется *индексом задачи Римана*.

Рассмотрим задачу о скачке, т. е. определим $\mathcal{Y}^\pm(z)$ по краевому условию

$$\mathcal{Y}^+(u) - \mathcal{Y}^-(u) = \mathcal{H}(u). \quad (15)$$

Решение этой задачи дает первая формула (12):

$$\mathcal{Y}^+(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty H(x)e^{izx} dx, \quad \mathcal{Y}^-(z) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 H(x)e^{izx} dx, \quad (16)$$

где

$$H(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty \mathcal{H}(u)e^{-iux} du. \quad (17)$$

Построим необходимое для дальнейших исследований частное решение $\mathcal{X}(z)$ однородной задачи Римана (14):

$$\mathcal{X}^+(u) = \mathcal{D}(u)\mathcal{X}^-(u), \quad \mathcal{D}(\infty) = 1, \quad (18)$$

не обращающееся на действительной оси в нуль с дополнительным условием $\mathcal{X}^\pm(\infty) = 1$. Обозначим через N_+ и N_- числа нулей функций $\mathcal{X}^+(z)$ и $\mathcal{X}^-(z)$ соответственно в верхней и нижней полуплоскостях. Вычисляя индекс обеих частей краевого условия (18), на основании свойств индекса получим

$$N_+ + N_- = \text{Ind } \mathcal{D}(u) = \nu. \quad (19)$$

Пусть сначала $\nu = 0$. В этом случае $\ln \mathcal{D}(u)$ будет однозначной функцией. Из соотношения (19) следует, что $N_+ = N_- = 0$, т. е. решение не имеет нулей во всей плоскости. Поэтому функции $\ln \mathcal{X}^+(z)$ и $\ln \mathcal{X}^-(z)$ будут аналитическими в своих полуплоскостях и, следовательно однозначными вместе со своими краевыми значениями $\ln \mathcal{X}^+(u)$ и $\ln \mathcal{X}^-(u)$. Логарифмируя краевое условие (18) будем иметь

$$\ln \mathcal{X}^+(u) - \ln \mathcal{X}^-(u) = \ln \mathcal{D}(u). \quad (20)$$

Выбирая для $\ln \mathcal{D}(u)$ такую ветвь, чтобы $\ln \mathcal{D}(\infty) = 0$ (можно показать, что окончательный результат не зависит от выбора ветви), придем к задаче о скачке. Тогда на основании (15)–(17)

* Пару функций $\mathcal{Y}^\pm(z)$ можно трактовать как одну кусочно аналитическую во всей комплексной плоскости функцию $\mathcal{Y}(z)$. В ряде случаев мы будем использовать последнее обозначение.

** Поскольку основным аналитическим выражением задачи Римана является ее краевое условие, то при ссылках на соответствующую задачу будем часто указывать только ее краевое условие и писать, например, задача Римана (14).

и (20) решение задачи (18) можно представить в форме

$$\begin{aligned}\mathcal{X}^+(z) &= e^{\mathcal{G}^+(z)}, \quad \mathcal{X}^-(z) = e^{\mathcal{G}^-(z)}, \\ \mathcal{G}^+(z) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty g(x) e^{izx} dx, \quad \mathcal{G}^-(z) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 g(x) e^{izx} dx, \\ g(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty \ln \mathcal{D}(u) e^{-iux} du.\end{aligned}\quad (21)$$

Соотношения (21) позволяют сделать важный вывод о том, что не обращающуюся в нуль на действительной оси функцию нулевого индекса $\mathcal{D}(u)$, такую что $\mathcal{D}(\infty) = 1$, можно представить в виде отношения функций, являющихся краевыми значениями функций, аналитических и не обращающихся в нуль соответственно в верхней и нижней полуплоскостях.

Перейдем к случаю произвольного индекса однородной задачи Римана (18). Канонической функцией (однородной задачи Римана) $\mathcal{X}(z)$ называют функцию, удовлетворяющую краевому условию (18), условию $\mathcal{X}^\pm(\infty) = 1$ и имеющую нулевой порядок всюду, за исключением может быть точки $-i$, где ее порядок равен индексу задачи Римана ν . Ее можно построить, приведя однородную задачу Римана к рассмотренному случаю нулевого индекса. Действительно, запишем краевое условие однородной задачи Римана (18) в форме

$$\mathcal{X}^+(u) = \left[\left(\frac{u-i}{u+i} \right)^{-\nu} \mathcal{D}(u) \right] \left[\left(\frac{u-i}{u+i} \right)^{\nu} \mathcal{X}^-(u) \right]. \quad (22)$$

Тогда стоящая в первых квадратных скобках функция имеет нулевой индекс и может быть представлена в виде отношения краевых значений аналитических в верхней и нижней полуплоскостях функций. Отсюда и из краевого условия (22) получим выражение для канонической функции

$$\begin{aligned}\mathcal{X}^+(z) &= e^{\mathcal{G}^+(z)}, \quad \mathcal{X}^-(z) = \left(\frac{z-i}{z+i} \right)^{-\nu} e^{\mathcal{G}^-(z)}, \\ \mathcal{G}^+(z) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty g(x) e^{izx} dx, \quad \mathcal{G}^-(z) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 g(x) e^{izx} dx, \\ g(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty \ln \left[\left(\frac{u-i}{u+i} \right)^{-\nu} \mathcal{D}(u) \right] e^{-iux} du,\end{aligned}\quad (23)$$

где $\mathcal{X}^-(z)$ в случае $\nu > 0$ имеет в точке $-i$ нуль порядка ν , а в случае $\nu < 0$ — полюс порядка $|\nu|$.

Коэффициент краевой задачи Римана $\mathcal{D}(u)$ может быть представлен в виде отношения краевых значений канонической функции (см. (22) и (23)):

$$\mathcal{D}(u) = \frac{\mathcal{X}^+(u)}{\mathcal{X}^-(u)}. \quad (24)$$

Такое представление $\mathcal{D}(u)$ в виде отношения краевых значений канонической функции часто называют *факторизацией*.

Рассмотрим теперь однородную задачу Римана с краевым условием

$$\mathcal{Y}^+(u) = \mathcal{D}(u) \mathcal{Y}^-(u), \quad \mathcal{D}(\infty) = 1. \quad (25)$$

Подставляя в (25) выражение для $\mathcal{D}(u)$ в форме (24), приведем краевое условие к виду

$$\frac{\mathcal{Y}^+(u)}{\mathcal{X}^+(u)} = \frac{\mathcal{Y}^-(u)}{\mathcal{X}^-(u)}. \quad (26)$$

Согласно формулам (23) для $\mathcal{X}(z)$ в левой и правой частях равенства (26) стоят краевые значения функций аналитических соответственно в верхней и нижней полуплоскостях, за исключением может быть точки $-i$, где порядок равен ν . Для выбранного класса функций их значение на бесконечности есть нуль. Тогда по теореме об аналитическом продолжении и обобщенной теореме Лиувилля (см. п. 10.4-3) при $\nu > 0$ будем иметь

$$\frac{\mathcal{Y}^+(z)}{\mathcal{X}^+(z)} = \frac{\mathcal{Y}^-(z)}{\mathcal{X}^-(z)} = \frac{\mathcal{P}_{\nu-1}(z)}{(z+i)^\nu}, \quad (27)$$

где $\mathcal{P}_{\nu-1}(z)$ — произвольный многочлен степени $\nu - 1$ (степень числителя ниже степени знаменателя в силу $\mathcal{Y}(\infty) = 0$). Отсюда

$$\mathcal{Y}(z) = \mathcal{X}(z) \frac{\mathcal{P}_{\nu-1}(z)}{(z+i)^\nu}. \quad (28)$$

При $\nu \leq 0$ в силу $\mathcal{Y}(\infty) = 0$ по обобщенной теореме Лиувилля $\mathcal{Y}(z) \equiv 0$.

Итак, однородная краевая задача Римана при $\nu > 0$ имеет точно ν линейно независимых решений вида

$$\frac{z^{k-1}\mathcal{X}(z)}{(z+i)^\nu}, \quad k = 1, 2, \dots, \nu,$$

при $\nu \leq 0$ нетривиальных решений нет.

Правая часть равенства (28) имеет во всей плоскости ровно ν нулей, включая и нуль на бесконечности. Эти нули могут быть расположены в любых точках верхней и нижней полуплоскостей или действительной оси. Если обозначить число нулей на действительной оси через N_0 , то формула (19) в общем случае (без условия об отсутствии нулей на действительной оси) заменяется следующей:

$$N_+ + N_- + N_0 = \text{Ind } \mathcal{D}(u) = \nu. \quad (29)$$

Перейдем к решению неоднородной задачи Римана с краевым условием (14). Воспользуемся соотношением (24) и приведем краевое условие к виду

$$\frac{\mathcal{Y}^+(u)}{\mathcal{X}^+(u)} = \frac{\mathcal{Y}^-(u)}{\mathcal{X}^-(u)} + \frac{\mathcal{H}(u)}{\mathcal{X}^+(u)}. \quad (30)$$

Представим последнее слагаемое как разность краевых значений аналитических в верхней и нижней полуплоскостях функций (см. задачу о скачке), т. е.

$$\mathcal{W}^+(u) - \mathcal{W}^-(u) = \frac{\mathcal{H}(u)}{\mathcal{X}^+(u)}, \quad (31)$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{W}^+(z) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty w(x)e^{izx} dx, \quad \mathcal{W}^-(z) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 w(x)e^{izx} dx, \\ w(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty \frac{\mathcal{H}(u)}{\mathcal{X}^+(u)} e^{-iux} du. \end{aligned} \quad (32)$$

Подставляя (31) в (30), получим

$$\frac{\mathcal{Y}^+(u)}{\mathcal{X}^+(u)} - \mathcal{W}^+(u) = \frac{\mathcal{Y}^-(u)}{\mathcal{X}^-(u)} - \mathcal{W}^-(u). \quad (33)$$

По теореме об аналитическом продолжении и обобщенной теореме Лиувилля при $\nu > 0$ будем иметь

$$\frac{\mathcal{Y}^+(z)}{\mathcal{X}^+(z)} - \mathcal{W}^+(z) = \frac{\mathcal{Y}^-(z)}{\mathcal{X}^-(z)} - \mathcal{W}^-(z) = \frac{\mathcal{P}_{\nu-1}(z)}{(z+i)^\nu}.$$

Откуда при $\nu > 0$ получим

$$\mathcal{Y}(z) = \mathcal{X}(z) \left[\mathcal{W}(z) + \frac{\mathcal{P}_{\nu-1}(z)}{(z+i)^\nu} \right]. \quad (34)$$

В правой части формулы (34) присутствует в качестве слагаемого общее решение (28) однородной задачи. Таким образом, получено общее решение неоднородной задачи.

При $\nu \leq 0$ следует положить $\mathcal{P}_{\nu-1}(z) \equiv 0$, и искомое решение запишется в виде

$$\mathcal{Y}(z) = \mathcal{X}(z)\mathcal{W}(z). \quad (35)$$

Однако только при $\nu = 0$ формула (35) дает решение удовлетворяющее всем условиям. Если $\nu < 0$, то функция $\mathcal{X}(z)$ будет иметь в точке $-i$ полюс порядка $|\nu|$. В этом случае для существования решения в выбранном классе функций необходимо, чтобы второй множитель имел в точке $-i$ нуль соответствующего порядка. На основании соотношений (6) и (32) представим функцию $\mathcal{W}^-(z)$ в форме

$$\mathcal{W}^-(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^\infty \frac{\mathcal{H}(\tau)}{\mathcal{X}^+(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - z}.$$

Разлагая последний интеграл в ряд по степеням $z + i$ и приравнявая нулю коэффициенты при $(z + i)^{k-1}$ ($k = 1, 2, \dots, |\nu|$), получим условия разрешимости задачи в виде

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{\mathcal{H}(u)}{\mathcal{X}^+(u)} \frac{du}{(u+i)^k} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, |\nu|. \quad (36)$$

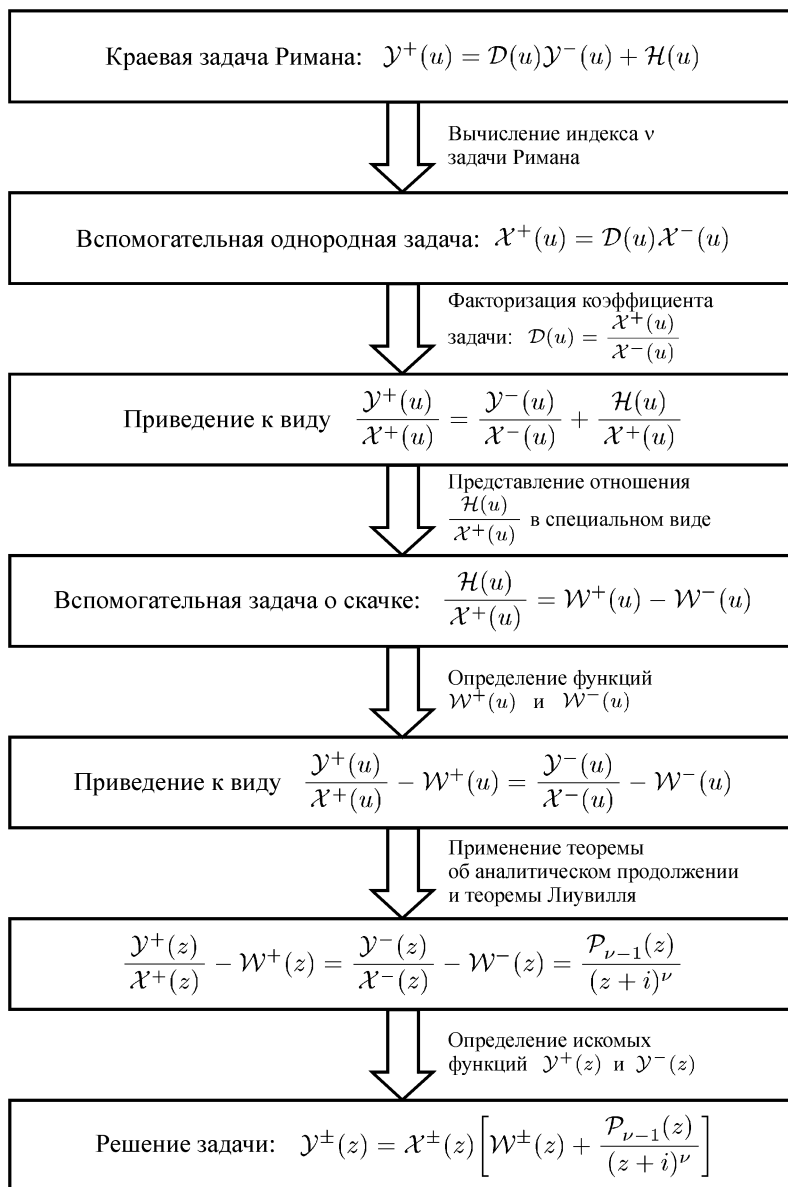


Рис. 3. Схема решения краевой задачи Римана для функций $\mathcal{Y}^+(z)$ и $\mathcal{Y}^-(z)$, аналитических соответственно в верхней и нижней полуплоскостях комплексной плоскости $z = u + iv$. Считается, что $\mathcal{D}(u) \neq 0$ и $\mathcal{P}_{\nu-1}(z) \equiv 0$ при $\nu \leq 0$.

Для наглядности на рис. 3 приведена принципиальная схема метода решения задачи Римана на действительной оси.

Сформулируем окончательные результаты, касающиеся решения задачи Римана. Если индекс задачи $\nu > 0$, то однородная и неоднородная задачи Римана безусловно разрешимы и их решения

$$\mathcal{Y}^\pm(z) = \mathcal{X}^\pm(z) \frac{\mathcal{P}_{\nu-1}(z)}{(z+i)^\nu} \quad (\text{однородная задача}), \quad (37)$$

$$\mathcal{Y}^\pm(z) = \mathcal{X}^\pm(z) \left[\mathcal{W}^\pm(z) + \frac{\mathcal{P}_{\nu-1}(z)}{(z+i)^\nu} \right] \quad (\text{неоднородная задача}) \quad (38)$$

зависят от ν произвольных комплексных постоянных, где $\mathcal{P}_{\nu-1}(z)$ — полином степени $\nu - 1$. Если $\nu \leq 0$, то однородная задача имеет лишь тривиальное нулевое решение, а неоднородная задача имеет единственное решение

$$\mathcal{Y}^\pm(z) = \mathcal{X}^\pm(z) \mathcal{W}^\pm(z) \quad (39)$$

при соблюдении $|\nu|$ условий (36). При этом

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \ln \left[\left(\frac{u-i}{u+i} \right)^{-\nu} \mathcal{D}(u) \right] e^{-iux} du, \quad (40)$$

$$\mathcal{G}^+(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} g(x) e^{izx} dx, \quad \mathcal{G}^-(z) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 g(x) e^{izx} dx, \quad (41)$$

$$\mathcal{X}^+(z) = e^{\mathcal{G}^+(z)}, \quad \mathcal{X}^-(z) = \left(\frac{z-i}{z+i} \right)^{-\nu} e^{\mathcal{G}^-(z)}, \quad (42)$$

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathcal{H}(u)}{\mathcal{X}^+(u)} e^{-iux} du, \quad (43)$$

$$\mathcal{W}^+(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} w(x) e^{izx} dx, \quad \mathcal{W}^-(z) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 w(x) e^{izx} dx. \quad (44)$$

Последовательность действий для получения решения можно представить следующим образом:

- 1°. По формуле (40) отыскивается $g(x)$, а по ней с помощью (41) — функция $\mathcal{G}^\pm(z)$.
- 2°. По формулам (42) находится каноническая функция $\mathcal{X}^\pm(z)$.
- 3°. По формуле (43) определяется $w(x)$, а затем с помощью (44) — функция $\mathcal{W}^\pm(z)$.

После этого по формулам (37)–(39) и (42) находится решение однородной и неоднородной задач. В случае $\nu < 0$ необходимо еще проверить выполнимость условий разрешимости (36).

10.4-5. Задача Римана с рациональными коэффициентами

Полученное решение задачи Римана требует вычисления ряда интегралов Фурье. Легко можно было бы выразить решение также через интегралы типа Коши. Как правило, интегралы не берутся в конечном виде, а вычисляются различными приближенными методами. Это трудоемкий процесс, поэтому представляет интерес выделить те случаи, когда решение можно получить по краевому условию методом аналитического продолжения, минуя квадратуры.

Пусть в краевом условии (14)

$$\mathcal{D}(u) = \frac{\mathcal{R}_+(u)}{\mathcal{Q}_+(u)} \frac{\mathcal{R}_-(u)}{\mathcal{Q}_-(u)}.$$

Здесь $\mathcal{R}_+(u)$, $\mathcal{Q}_+(u)$ и $\mathcal{R}_-(u)$, $\mathcal{Q}_-(u)$ — многочлены, нули которых лежат соответственно в верхней и в нижней полуплоскостях (не следует смешивать их с введенными ранее, имеющими аналогичные обозначения, односторонними функциями). Обозначим степени многочленов \mathcal{R}_+ , \mathcal{R}_- , \mathcal{Q}_+ , \mathcal{Q}_- соответственно m_+ , m_- , n_+ , n_- . Так как по условию задачи $\mathcal{D}(\infty)$ не может обращаться ни в нуль, ни в бесконечность, будет выполняться соотношение $m_+ + m_- = n_+ + n_-$. Индекс задачи выразится равенством

$$\nu = \text{Ind } \mathcal{D}(u) = m_+ - n_+ = -(m_- - n_-).$$

Умножив краевое условие на $\mathcal{Q}_-(u)/\mathcal{R}_-(u)$, будем иметь

$$\frac{\mathcal{Q}_-(u)}{\mathcal{R}_-(u)} \mathcal{Y}^+(u) - \frac{\mathcal{R}_+(u)}{\mathcal{Q}_+(u)} \mathcal{Y}^-(u) = \frac{\mathcal{Q}_-(u)}{\mathcal{R}_-(u)} \mathcal{H}(u).$$

Если свободный член $\mathcal{H}(u)$ также есть рациональная функция, то легко решается задача о скачке

$$\mathcal{W}^+(u) - \mathcal{W}^-(u) = \frac{\mathcal{Q}_-(u)}{\mathcal{R}_-(u)} \mathcal{H}(u). \quad (45)$$

Для этого достаточно правую часть разложить на сумму простых дробей. Тогда $\mathcal{W}^+(u)$ и $\mathcal{W}^-(u)$ будут соответственно суммами дробей с полюсами в нижней и в верхней полуплоскостях. К полученному равенству

$$\frac{\mathcal{Q}_-(u)}{\mathcal{R}_-(u)} \mathcal{Y}^+(u) - \mathcal{W}^+(u) = \frac{\mathcal{R}_+(u)}{\mathcal{Q}_+(u)} \mathcal{Y}^-(u) - \mathcal{W}^-(u)$$

можно непосредственно применить теорему об аналитическом продолжении и обобщенную теорему Лиувилля. Единственной исключительной точкой, где единая во всей комплексной плоскости аналитическая функция может иметь ненулевой порядок, будет бесконечно удаленная, где порядок функции будет равен $\nu - 1 = m_+ - n_+ - 1 = n_- - m_- - 1$.

При $\nu > 0$ решение запишется в виде

$$\mathcal{Y}^+(z) = \frac{\mathcal{R}_-(z)}{\mathcal{Q}_-(z)} [\mathcal{W}^+(z) + \mathcal{P}_{\nu-1}(z)], \quad \mathcal{Y}^-(z) = \frac{\mathcal{Q}_+(z)}{\mathcal{R}_+(z)} [\mathcal{W}^-(z) + \mathcal{P}_{\nu-1}(z)].$$

При $\nu \leq 0$ нужно положить $\mathcal{P}_{\nu-1} \equiv 0$ и при $\nu < 0$ выписать еще условия разрешимости, получаемые приравниванием нулю $|\nu|$ начальных членов разложения рациональной функции $\mathcal{W}(z)$ в ряд в окрестности бесконечно удаленной точки (по степеням $1/z$).

Решение задачи о скачке (45) можно получить или используя метод неопределенных коэффициентов, как это делается при интегрировании рациональных функций, или же используя теорию вычетов аналитических функций. Пусть z_k есть полюс кратности m функции $[\mathcal{Q}_-(z)/\mathcal{R}_-(z)]\mathcal{H}(z)$. Тогда коэффициенты главной части ее разложения в окрестности точки z_k

$$\frac{c_1^k}{z - z_k} + \dots + \frac{c_m^k}{(z - z_k)^m}$$

могут быть получены по формуле

$$c_j^k = \frac{1}{(j-1)!} \frac{d^{j-1}}{dz^{j-1}} \left[\frac{\mathcal{Q}_-(z)}{\mathcal{R}_-(z)} \mathcal{H}(z) \right]_{z=z_k}.$$

Рассмотренный случай нередко встречается на практике. Он важен также и как один из возможных путей решения задачи при общих предположениях. Аппроксимация произвольных коэффициентов рассматриваемого класса рациональными функциями является одним из распространенных способов приближенного решения краевой задачи Римана.

10.4-6. Исключительные случаи. Однородная задача

Пусть в краевой задаче Римана коэффициент $\mathcal{D}(u)$ имеет нули соответственно порядков $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ в точках a_1, a_2, \dots, a_r и полюсы* порядков $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ в точках b_1, b_2, \dots, b_s ($\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ — целые положительные числа). Таким образом, коэффициент представляется в виде

$$\mathcal{D}(u) = \frac{\prod_{i=1}^r (u - a_i)^{\alpha_i}}{\prod_{j=1}^s (u - b_j)^{\beta_j}} \mathcal{D}_1(u), \quad \mathcal{D}_1(u) \neq 0, \quad -\infty < u < \infty, \quad \sum_{i=1}^r \alpha_i = m, \quad \sum_{j=1}^s \beta_j = n. \quad (46)$$

Функцию $\mathcal{D}_1(u)$ в свою очередь представим (см. п. 10.4-5) в виде

$$\mathcal{D}_1(u) = \frac{\mathcal{R}_+(u)\mathcal{R}_-(u)}{\mathcal{Q}_+(u)\mathcal{Q}_-(u)} \mathcal{D}_2(u), \quad (47)$$

где $\mathcal{R}_+(u)$, $\mathcal{Q}_+(u)$ и $\mathcal{R}_-(u)$, $\mathcal{Q}_-(u)$, так же как и выше — многочлены степеней соответственно m_+ , n_+ и m_- , n_- , имеющие нули в верхней и нижней полуплоскостях. Функция $\mathcal{D}_2(u)$ удовлетворяет условию Гёльдера, имеет нулевой индекс и нигде на действительной оси не обращается в нуль. Кроме того, на нее могут быть наложены некоторые условия дифференцируемости в окрестности точек a_i , b_j и, может быть, в окрестности бесконечно удаленной точки.

* В случае, когда функция $\mathcal{D}(u)$ не аналитическая, термином «полюс» будет обозначаться точка, где функция обращается в бесконечность целого порядка.

Краевое условие однородной задачи Римана запишется в виде

$$\mathcal{Y}^+(u) = \frac{\prod_{i=1}^r (u - a_i)^{\alpha_i} \mathcal{R}_+(u) \mathcal{R}_-(u)}{\prod_{j=1}^s (u - b_j)^{\beta_j} \mathcal{Q}_+(u) \mathcal{Q}_-(u)} \mathcal{D}_2(u) \mathcal{Y}^-(u). \quad (48)$$

Решение будем искать в классе функций, ограниченных на вещественной оси и обращающихся в нуль на бесконечности:

$$\mathcal{Y}(\infty) = 0. \quad (49)$$

Коэффициент $\mathcal{D}(u)$ на бесконечности имеет порядок

$$\eta = n + n_+ + n_- - m - m_+ - m_-. \quad (50)$$

Число

$$\nu = m_+ - n_+ \quad (51)$$

назовем *индексом* задачи. Введем обозначение

$$h = n_- - m_-. \quad (52)$$

Тогда порядок на бесконечности выразится формулой

$$\eta = h - \nu + n - m. \quad (53)$$

Приступим теперь к решению задачи (48). Применяя общие приемы, положим

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_2(u) &= \frac{e^{\mathcal{G}^+(u)}}{e^{\mathcal{G}^-(u)}}, \quad g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \ln \mathcal{D}_2(u) e^{-iux} du, \\ \mathcal{G}^+(z) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} g(x) e^{izx} dx, \quad \mathcal{G}^-(z) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 g(x) e^{izx} dx \end{aligned} \quad (54)$$

и запишем краевое условие в виде

$$\frac{\mathcal{Q}_-(u) \mathcal{Y}^+(u)}{\prod_{i=1}^r (u - a_i)^{\alpha_i} \mathcal{R}_-(u) e^{\mathcal{G}^+(u)}} = \frac{\mathcal{R}_+(u) \mathcal{Y}^-(u)}{\prod_{j=1}^s (u - b_j)^{\beta_j} \mathcal{Q}_+(u) e^{\mathcal{G}^-(u)}}. \quad (55)$$

Применяя, аналогично тому, как это сделано ранее, аналитическое продолжение и обобщенную теорему Лиувилля, получим в качестве единственной возможной особенности полюс на бесконечности.

Возможны два случая:

1°. Пусть порядок коэффициента краевой задачи на бесконечности $\eta \geq 0$, т. е. $\mathcal{D}(u)$ имеет на бесконечности нуль порядка η . Из (53) следует $n - \nu \geq m - h$. Приравнявая левую и правую части равенства (55) многочлену $\mathcal{P}_{\nu-n-1}(z)$, получим решение краевой задачи в следующем виде:

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}^+(z) &= \prod_{i=1}^r (z - a_i)^{\alpha_i} \frac{\mathcal{R}_-(z)}{\mathcal{Q}_-(z)} e^{\mathcal{G}^+(z)} \mathcal{P}_{\nu-n-1}(z), \\ \mathcal{Y}^-(z) &= \prod_{j=1}^s (z - b_j)^{\beta_j} \frac{\mathcal{Q}_+(z)}{\mathcal{R}_+(z)} e^{\mathcal{G}^-(z)} \mathcal{P}_{\nu-n-1}(z). \end{aligned} \quad (56)$$

Задача имеет $\nu - n$ линейно независимых решений при $\nu - n > 0$ и имеет лишь тривиальное нулевое решение при $\nu - n \leq 0$.

2°. Пусть $\eta < 0$, т. е. $\mathcal{D}(u)$ имеет на бесконечности полюс порядка $-\eta$. В этом случае $m - h > n - \nu$, и общее решение получим из (56), если в нем заменим $\mathcal{P}_{\nu-n-1}(z)$ на $\mathcal{P}_{h-m-1}(z)$. В этом случае задача имеет $h - m$ решений при $h - m > 0$ и лишь тривиальное нулевое при $h - m \leq 0$.

Согласно (53) имеем

$$h - m = \nu - n + \eta. \quad (57)$$

Таким образом, в обоих рассмотренных случаях число линейно независимых решений равно индексу минус суммарное число полюсов (включая и полюс на бесконечности) коэффициента $\mathcal{D}(u)$. Следовательно, число линейно независимых решений однородной задачи Римана не изменяется от наличия нулей коэффициента и уменьшается на суммарный порядок его полюсов.

10.4-7. Исключительные случаи. Неоднородная задача

Предположим, что свободный член имеет те же полюсы, что и коэффициент. Краевое условие можно представить в виде

$$\mathcal{Y}^+(u) = \frac{\prod_{i=1}^r (u - a_i)^{\alpha_i} \mathcal{R}_+(u) \mathcal{R}_-(u)}{\prod_{j=1}^s (u - b_j)^{\beta_j} \mathcal{Q}_+(u) \mathcal{Q}_-(u)} \mathcal{D}_2(u) \mathcal{Y}^-(u) + \frac{\mathcal{H}_1(u)}{\prod_{j=1}^s (u - b_j)^{\beta_j}}, \quad (58)$$

где $\mathcal{D}_2(u)$, $\mathcal{H}_1(u)$ удовлетворяют условию Гёльдера и, кроме того, некоторым условиям дифференцируемости в окрестности точек a_i, b_j, ∞ .

1°. Пусть порядок коэффициента краевой задачи на бесконечности $\eta \geq 0$. В силу того, что первые два члена равенства (58) на бесконечности обращаются в нуль, минимально возможный порядок $\mathcal{H}_1(u)$ на бесконечности равен $1 - n$. Заменяя, как и в однородной задаче, $\mathcal{D}_2(u)$ отношением двух функций (54), запишем краевое условие в виде (под фигурными скобками выписаны порядки соответствующих функций на бесконечности)

$$\underbrace{\frac{\prod_{j=1}^s (u - b_j)^{\beta_j} \mathcal{Q}_-(u) \mathcal{Y}^+(u)}{\mathcal{R}_-(u) e^{\mathcal{G}^+(u)}}}_{1-n-h} = \underbrace{\frac{\prod_{i=1}^r (u - a_i)^{\alpha_i} \mathcal{R}_+(u) \mathcal{Y}^-(u)}{\mathcal{Q}_+(u) e^{\mathcal{G}^-(u)}}}_{1-m-\nu} + \underbrace{\frac{\mathcal{H}_1(u) \mathcal{Q}_-(u)}{\mathcal{R}_-(u) e^{\mathcal{G}^+(u)}}}_{1-n-h}$$

Допустим, что многочлен $\mathcal{S}(u)$ степени $n + h - 1$ представляет главную часть разложения последнего члена в окрестности бесконечно удаленной точки (в случае, если $n + h - 1 \geq 0$)

$$\frac{\mathcal{H}_1(u) \mathcal{Q}_-(u)}{\mathcal{R}_-(u) e^{\mathcal{G}^+(u)}} = \mathcal{S}(u) + \mathcal{W}(u), \quad \mathcal{W}(\infty) = 0.$$

Заменяв $\mathcal{W}(u)$ разностью краевых значений аналитических функций

$$\mathcal{W}(u) = \mathcal{W}^+(u) - \mathcal{W}^-(u), \quad (59)$$

где

$$\begin{aligned} w(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{W}(u) e^{-iux} du, \\ \mathcal{W}^+(u) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} w(x) e^{iux} dx, \quad \mathcal{W}^-(u) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 w(x) e^{iux} dx, \end{aligned} \quad (60)$$

приведем краевое условие к виду

$$\frac{\prod_{j=1}^s (u - b_j)^{\beta_j} \mathcal{Q}_-(u) \mathcal{Y}^+(u)}{\mathcal{R}_-(u) e^{\mathcal{G}^+(u)}} - \mathcal{S}(u) - \mathcal{W}^+(u) = \frac{\prod_{i=1}^r (u - a_i)^{\alpha_i} \mathcal{R}_+(u) \mathcal{Y}^-(u)}{\mathcal{Q}_+(u) e^{\mathcal{G}^-(u)}} - \mathcal{W}^-(u).$$

Применяя теорему об аналитическом продолжении и обобщенную теорему Лиувилля и учитывая, что единственной особой точкой рассматриваемой функции может быть лишь бесконечно удаленная точка, а также тот факт, что $-n - h \leq -m - \nu$ ($\eta \geq 0$), получим

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}^+(z) &= \frac{\mathcal{R}_-(z) e^{\mathcal{G}^+(z)}}{\prod_{j=1}^s (z - b_j)^{\beta_j} \mathcal{Q}_-(z)} [\mathcal{W}^+(z) + \mathcal{S}(z) + \mathcal{P}_{\nu+m-1}(z)], \\ \mathcal{Y}^-(z) &= \frac{\mathcal{Q}_+(z) e^{\mathcal{G}^-(z)}}{\prod_{i=1}^r (z - a_i)^{\alpha_i} \mathcal{R}_+(z)} [\mathcal{W}^-(z) + \mathcal{P}_{\nu+m-1}(z)]. \end{aligned} \quad (61)$$

Последние формулы определяют решение, имеющее в точках a_i, b_j полярные особенности. Чтобы получить ограниченное решение, воспользуемся канонической функцией неоднородной задачи.

Канонической функцией $\mathcal{V}(z)$ неоднородной задачи Римана в исключительном случае называется кусочно аналитическая функция, удовлетворяющая краевому условию (58), имеющая во всей конечной части плоскости, включая точки a_i и b_j , нулевой порядок и обладающая на бесконечности наимизшим возможным порядком.

Пусть $\mathcal{U}_p(z)$ — интерполяционный многочлен Эрмита с узлами интерполяции порядков α_i, β_j соответственно в точках a_i, b_j . Такой многочлен степени $p = m + n - 1$ существует и определяется единственным образом (см. п. 12.3-2). На заданные функции $\mathcal{D}_1(u), \mathcal{H}_1(u)$ нужно наложить дополнительное условие, чтобы в окрестности точек a_i, b_j они имели производные порядков α_i, β_j соответственно, удовлетворяющие условию Гёльдера. Тогда каноническая функция неоднородной задачи запишется в виде

$$\begin{aligned}\mathcal{V}^+(z) &= \frac{\mathcal{R}_-(z)e^{\mathcal{G}^+(z)}}{\prod_{j=1}^s (z - b_j)^{\beta_j} \mathcal{Q}_-(z)} [\mathcal{W}^+(z) + \mathcal{S}(z) - \mathcal{U}_p(z)], \\ \mathcal{V}^-(z) &= \frac{\mathcal{Q}_+(z)e^{\mathcal{G}^-(z)}}{\prod_{i=1}^r (z - a_i)^{\alpha_i} \mathcal{R}_+(z)} [\mathcal{W}^-(z) - \mathcal{U}_p(z)].\end{aligned}\quad (62)$$

Складывая $\mathcal{V}(z)$ с полученным ранее общим решением однородной задачи, получим общее решение рассматриваемой неоднородной задачи:

$$\begin{aligned}\mathcal{Y}^+(z) &= \mathcal{V}^+(z) + \prod_{i=1}^r (z - a_i)^{\alpha_i} \frac{\mathcal{R}_-(z)}{\mathcal{Q}_-(z)} e^{\mathcal{G}^+(z)} \mathcal{P}_{\nu-n-1}(z), \\ \mathcal{Y}^-(z) &= \mathcal{V}^-(z) + \prod_{j=1}^s (z - b_j)^{\beta_j} \frac{\mathcal{Q}_+(z)}{\mathcal{R}_+(z)} e^{\mathcal{G}^-(z)} \mathcal{P}_{\nu-n-1}(z).\end{aligned}\quad (63)$$

При $\nu - n > 0$ задача имеет $\nu - n$ линейно независимых решений. В случае $\nu - n \leq 0$ нужно положить $\mathcal{P}_{\nu-n-1}(z) \equiv 0$. При $\nu - n < 0$ каноническая функция $\mathcal{V}(z)$ имеет на бесконечности порядок $\nu - n < 0$ и, следовательно, перестает быть решением неоднородной задачи. Однако, подчиняя свободный член $n - \nu$ условиям, можно добиться повышения порядка на бесконечности функции $\mathcal{V}(u)$ на $n - \nu$ единиц и тем самым вновь сделать каноническую функцию $\mathcal{V}(z)$ решением неоднородной задачи.

Чтобы обеспечить выполнимость указанных операций, достаточно потребовать, чтобы функции $u^k \mathcal{H}_1(u)$ и $\mathcal{D}_2(u)$ имели на бесконечности производные порядков до $n - \nu$, удовлетворяющие условию Гёльдера.

2°. Пусть $\eta < 0$. Наимизший возможный порядок $\mathcal{H}_1(u)$ на бесконечности $h - \nu - m + 1$. Тогда в условии (58) функция $[\mathcal{H}_1(u)\mathcal{Q}_-(u)]/[\mathcal{R}_-(u)e^{\mathcal{G}^+(u)}]$ будет иметь на бесконечности порядок, равный $1 - m - \nu$. В этом случае после выделения главной части разложения $[\mathcal{H}_1(u)\mathcal{Q}_-(u)]/[\mathcal{R}_-(u)e^{\mathcal{G}^+(u)}]$ в окрестности бесконечно удаленной точки при $m + \nu - 1 > 0$ краевое условие запишем в виде

$$\frac{\prod_{j=1}^s (u - b_j)^{\beta_j} \mathcal{Q}_-(u) \mathcal{Y}^+(u)}{\mathcal{R}_-(u)e^{\mathcal{G}^+(u)}} - \mathcal{W}^+(u) = \frac{\prod_{i=1}^r (u - a_i)^{\alpha_i} \mathcal{R}_+(u) \mathcal{Y}^-(u)}{\mathcal{Q}_+(u)e^{\mathcal{G}^-(u)}} - \mathcal{W}^-(u) + \mathcal{S}(u).$$

Каноническая функция неоднородной задачи выражается через интерполяционный многочлен следующим образом:

$$\begin{aligned}\mathcal{V}_1^+(z) &= \frac{\mathcal{R}_-(z)e^{\mathcal{G}^+(z)}}{\prod_{j=1}^s (z - b_j)^{\beta_j} \mathcal{Q}_-(z)} [\mathcal{W}^+(z) - \mathcal{U}_p(z)], \\ \mathcal{V}_1^-(z) &= \frac{\mathcal{Q}_+(z)e^{\mathcal{G}^-(z)}}{\prod_{i=1}^r (z - a_i)^{\alpha_i} \mathcal{R}_+(z)} [\mathcal{W}^-(z) - \mathcal{S}(z) - \mathcal{U}_p(z)].\end{aligned}\quad (64)$$

Общее решение задачи (58) примет вид

$$\begin{aligned}\mathcal{Y}^+(z) &= \mathcal{V}_1^+(z) + \prod_{i=1}^r (z - a_i)^{\alpha_i} \frac{\mathcal{R}_-(z)}{\mathcal{Q}_-(z)} e^{\mathcal{G}^+(z)} \mathcal{P}_{h-m-1}(z), \\ \mathcal{Y}^-(z) &= \mathcal{V}_1^-(z) + \prod_{j=1}^s (z - b_j)^{\beta_j} \frac{\mathcal{Q}_+(z)}{\mathcal{R}_+(z)} e^{\mathcal{G}^-(z)} \mathcal{P}_{h-m-1}(z).\end{aligned}\quad (65)$$

При $h - m > 0$ задача имеет $h - m$ линейно независимых решений. В случае $h - m \leq 0$ многочлен $\mathcal{P}_{h-m-1}(z)$ нужно положить тождественно равным нулю, а от свободного члена в случае $h - m < 0$ потребовать выполнения $m - h$ условий такого же вида, как и в предыдущем случае. При выполнении этих условий неоднородная задача (58) будет иметь единственное решение.

Замечание. В разд. 10.5 будут рассмотрены уравнения, которые приводятся к задаче Римана посредством применения теоремы о свертке для преобразования Фурье. Аналогично можно исследовать уравнения, к которым применимы теоремы о свертке для других интегральных преобразований, например для преобразования Меллина.

⊙ *Литература:* Н. И. Мусхелишвили (1968), Ф. Д. Гахов, Ю. И. Черский (1978), S. G. Mikhlin, S. Prössdorf (1986).

10.5. Метод Карлемана для уравнений типа свертки первого рода

Методом Карлемана назовем метод приведения интегрального уравнения к краевой задаче теории аналитических функций, в частности, к задаче Римана. Для уравнений типа свертки такое приведение осуществляется с помощью интегральных преобразований. После решения краевой задачи искомая функция может быть получена посредством обратного интегрального преобразования.

10.5-1. Уравнение Винера–Хопфа первого рода

Рассмотрим уравнение Винера–Хопфа первого рода

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty K(x-t)y(t) dt = f(x), \quad 0 < x < \infty, \quad (1)$$

которое часто встречается в приложениях. Доопределим его на отрицательной полуоси путем введения односторонних функций

$$y_+(x) = \begin{cases} y(x) & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x < 0, \end{cases} \quad f_+(x) = \begin{cases} f(x) & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x < 0, \end{cases} \quad y_-(x) = 0 \text{ при } x > 0.$$

Используя односторонние функции, запишем уравнение (1) в виде

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty K(x-t)y_+(t) dt = f_+(x) + y_-(x), \quad -\infty < x < \infty. \quad (2)$$

Вспомогательная функция $y_-(x)$ введена для того, чтобы доопределить левую часть уравнения (2) при $x < 0$. Заметим, что $y_-(x)$ в области $x < 0$ неизвестна и находится в процессе решения задачи.

Применяя теперь к уравнению (2) преобразование Фурье, получим следующую краевую задачу:

$$\mathcal{Y}^+(u) = \frac{1}{\mathcal{K}(u)} \mathcal{Y}^-(u) + \frac{\mathcal{F}^+(u)}{\mathcal{K}(u)}. \quad (3)$$

Если σ — порядок $\mathcal{K}(u)$ на бесконечности, то порядок коэффициента краевой задачи на бесконечности $\eta = -\sigma < 0$. Общее решение задачи (3) можно получить на основании соотношений (65) из п. 10.4-7, заменив в них $\mathcal{P}_{h-m-1}(z)$ на $\mathcal{P}_{\nu-n+\eta-1}(z)$. Решение исходного уравнения (1) получим из решения задачи (3) по формуле обращения

$$y(x) = y_+(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty \mathcal{Y}^+(u) e^{-iux} du, \quad x > 0. \quad (4)$$

Отметим, что в формуле (4) явно присутствует только функция $\mathcal{Y}^+(u)$, которая связана с $\mathcal{Y}^-(u)$ соотношением (3).

10.5-2. Интегральные уравнения с двумя ядрами первого рода

Рассмотрим интегральное уравнение первого рода

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty K_1(x-t)y(t) dt + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 K_2(x-t)y(t) dt = f(x), \quad -\infty < x < \infty. \quad (5)$$

Преобразование Фурье уравнения (5) приводит к решению следующей краевой задачи:

$$\mathcal{Y}^+(u) = \frac{\mathcal{K}_2(u)}{\mathcal{K}_1(u)} \mathcal{Y}^-(u) + \frac{\mathcal{F}(u)}{\mathcal{K}_1(u)}, \quad -\infty < u < \infty. \quad (6)$$

Ее коэффициент представляет собой отношение функций, обращающихся в нуль на бесконечности, и, следовательно, в отличие от предыдущего случая, может иметь в бесконечно удаленной точке нуль или полюс некоторого порядка.

Пусть $\mathcal{K}_1(u) = \mathcal{T}_1(u)/u^\lambda$, а $\mathcal{K}_2(u) = \mathcal{T}_2(u)/u^\mu$, где функции $\mathcal{T}_1(u)$ и $\mathcal{T}_2(u)$ имеют на бесконечности нулевой порядок. В зависимости от того, будет ли разность $\eta = \mu - \lambda$ отрицательна или положительна, могут представиться два случая. Для общности будем считать, что имеются также исключительные точки на конечном расстоянии. Пусть функции $\mathcal{K}_1(u)$ и $\mathcal{K}_2(u)$ имеют представления

$$\mathcal{K}_1(u) = \prod_{j=1}^s (u - b_j)^{\beta_j} \prod_{k=1}^p (u - c_k)^{\gamma_k} \mathcal{K}_{11}(u), \quad \mathcal{K}_2(u) = \prod_{i=1}^r (u - a_i)^{\alpha_i} \prod_{k=1}^p (u - c_k)^{\gamma_k} \mathcal{K}_{12}(u).$$

Кроме общих нулей в точках c_k кратности γ_k , функции $\mathcal{K}_1(u)$ и $\mathcal{K}_2(u)$ имеют на бесконечности общий нуль порядка $\min(\lambda, \mu)$.

Коэффициент задачи Римана можно представить в виде

$$\mathcal{D}(u) = \frac{\prod_{i=1}^r (u - a_i)^{\alpha_i} \mathcal{R}_+(u) \mathcal{R}_-(u)}{\prod_{j=1}^s (u - b_j)^{\beta_j} \mathcal{Q}_+(u) \mathcal{Q}_-(u)} \mathcal{D}_2(u).$$

Из (6) следует, что эта задача и интегральное уравнение (5) будут разрешимы, если $\mathcal{F}(u)$ в точках c_k , являющихся общими нулями функций $\mathcal{K}_1(u)$, $\mathcal{K}_2(u)$, имеет нуль порядка γ_k , т. е. $\mathcal{F}(u)$ имеет вид

$$\mathcal{F}(u) = \prod_{k=1}^p (u - c_k)^{\gamma_k} \mathcal{F}_1(u).$$

Для этого необходимо выполнение $\gamma_1 + \dots + \gamma_p = l$ условий

$$[\mathcal{F}_u^{(j_k)}(u)]_{u=c_k} = 0, \quad j_k = 0, 1, \dots, \gamma_k - 1, \quad (7)$$

или, что все равно, условий

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) x^{j_k} e^{ic_k x} dx = 0. \quad (8)$$

К этим условиям в рассматриваемом случае уравнения первого рода добавятся еще

$$d = \min(\lambda, \mu) + 1 \quad (9)$$

условий, накладываемых на поведение $\mathcal{F}(u)$ на бесконечности, так как функции $\mathcal{K}_1(u)$, $\mathcal{K}_2(u)$ имеют на бесконечности общий нуль порядка $\min(\lambda, \mu)$. Следовательно, $\mathcal{F}(u)$ должна удовлетворять условиям (8) и иметь на бесконечности порядок не ниже d .

Если эти условия выполнены, то краевая задача (6) принимает вид

$$\mathcal{Y}^+(u) = \frac{\prod_{i=1}^r (u - a_i)^{\alpha_i} \mathcal{R}_+(u) \mathcal{R}_-(u)}{\prod_{j=1}^s (u - b_j)^{\beta_j} \mathcal{Q}_+(u) \mathcal{Q}_-(u)} \mathcal{D}_2(u) \mathcal{Y}^-(u) + \frac{\mathcal{H}_1(u)}{\prod_{j=1}^s (u - b_j)^{\beta_j}}.$$

Ее решение приведено ранее в п. 10.4-7. В случае $\eta \geq 0$ ($\mu \geq \lambda$) оно записывается в виде

$$\begin{aligned}\mathcal{Y}^+(z) &= \mathcal{V}^+(z) + \prod_{i=1}^r (z - a_i)^{\alpha_i} \frac{\mathcal{R}_-(z)}{\mathcal{Q}_-(z)} e^{\mathcal{G}^+(z)} \mathcal{P}_{\nu-n+1}(z), \\ \mathcal{Y}^-(z) &= \mathcal{V}^-(z) + \prod_{j=1}^s (z - b_j)^{\beta_j} \frac{\mathcal{Q}_+(z)}{\mathcal{R}_+(z)} e^{\mathcal{G}^-(z)} \mathcal{P}_{\nu-n+1}(z).\end{aligned}\quad (10)$$

В случае $\eta < 0$ ($\mu < \lambda$) оно дается в виде

$$\begin{aligned}\mathcal{Y}^+(z) &= \mathcal{V}_1^+(z) + \prod_{i=1}^r (z - a_i)^{\alpha_i} \frac{\mathcal{R}_-(z)}{\mathcal{Q}_-(z)} e^{\mathcal{G}^+(z)} \mathcal{P}_{h-m-1}(z), \\ \mathcal{Y}^-(z) &= \mathcal{V}_1^-(z) + \prod_{j=1}^s (z - b_j)^{\beta_j} \frac{\mathcal{Q}_+(z)}{\mathcal{R}_+(z)} e^{\mathcal{G}^-(z)} \mathcal{P}_{h-m-1}(z).\end{aligned}\quad (11)$$

Решение исходного интегрального уравнения в обоих случаях может быть получено путем подстановки выражений (10), (11) в формулу

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} [\mathcal{Y}^+(u) - \mathcal{Y}^-(u)] e^{-iux} du. \quad (12)$$

Пример. Рассмотрим уравнение первого рода

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} K_1(x-t)y(t) dt + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 K_2(x-t)y(t) dt = f(x),$$

где

$$\begin{aligned}K_1(x) &= \begin{cases} 0 & \text{при } x > 0, \\ \sqrt{2\pi}(e^{3x} - e^{2x}) & \text{при } x < 0, \end{cases} \quad K_2(x) = \begin{cases} -\sqrt{2\pi}ie^{-2x} & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x < 0, \end{cases} \\ f(x) &= \begin{cases} 0 & \text{при } x > 0, \\ \sqrt{2\pi}(e^{3x} - e^{2x}) & \text{при } x < 0. \end{cases}\end{aligned}\quad (13)$$

Применяя преобразование Фурье к функциям из (13), получим

$$\mathcal{K}_1(u) = \frac{1}{(u-2i)(u-3i)}, \quad \mathcal{K}_2(u) = \frac{1}{u+2i}, \quad \mathcal{F}(u) = \frac{1}{(u-2i)(u-3i)}.$$

Краевая задача (6) здесь имеет вид

$$\mathcal{Y}^+(u) = \frac{(u-2i)(u-3i)}{u+2i} \mathcal{Y}^-(u) + 1.$$

Коэффициент $\mathcal{D}(u)$ имеет в бесконечно удаленной точке полюс первого порядка ($\nu = -1$). Тогда

$$m_+ = 2, \quad n_+ = 0, \quad \nu = m_+ - n_+ = 2, \quad \min(\lambda, \mu) = 1, \quad d = 2.$$

Функция $\mathcal{F}(u)$ имеет на бесконечности нуль второго порядка, следовательно, необходимое условие разрешимости уравнения выполнено.

Однородная задача

$$\mathcal{Y}^+(u) = \frac{(u-2i)(u-3i)}{u+2i} \mathcal{Y}^-(u)$$

в классе функций, обращающихся в нуль на бесконечности, имеет следующее решение:

$$\mathcal{Y}^+(z) = \frac{C}{z+2i}, \quad \mathcal{Y}^-(z) = \frac{C}{(z-2i)(z-3i)},$$

где C — произвольная постоянная.

Число линейно независимых решений задачи (13) меньше индекса на единицу, так как $\mathcal{D}(u)$ имеет полюс первого порядка на бесконечности.

Решение неоднородной задачи в классе функций, обращающихся в нуль на бесконечности, имеет вид

$$\begin{aligned}\mathcal{Y}^+(z) &= \frac{C}{z+2i}, \quad \mathcal{Y}^-(z) = \frac{C-2i-z}{(z-2i)(z-3i)}, \\ y(x) &= \begin{cases} -\sqrt{2\pi}iCe^{-2x} & \text{при } x > 0, \\ \sqrt{2\pi}C(e^{2x} - e^{3x}) - 4i\sqrt{2\pi}e^{2x} + 5i\sqrt{2\pi}e^{3x} & \text{при } x < 0. \end{cases}\end{aligned}$$

При выбранной выше правой части уравнение оказывается разрешимым. Возьмем теперь, например,

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x > 0, \\ \sqrt{2\pi} i(5e^{3x} - 4e^{2x}) & \text{при } x < 0. \end{cases} \quad (14)$$

Тогда $\mathcal{F}(u) = (u + 2i)/[(u - 2i)(u - 3i)]$. Соответствующая краевая задача Римана имеет вид

$$\mathcal{Y}^+(u) = \frac{(u - 2i)(u - 3i)}{u + 2i} \mathcal{Y}^-(u) + u + 2i.$$

Ее решение в классе функций, ограниченных на бесконечности, можно представить в форме

$$\mathcal{Y}^+(z) = \frac{C - z}{z + 2i}, \quad \mathcal{Y}^-(z) = \frac{C - z - (z + 2i)^2}{(z - 2i)(z - 3i)}. \quad (15)$$

Ни при каком подбore постоянной C решение не обращается в нуль на бесконечности, следовательно, уравнение с правой частью, заданной выражением (14), не имеет решений, интегрируемых на вещественной оси.

● *Литература:* Н. И. Мухелишвили (1968), Ф. Д. Гахов, Ю. И. Черский (1978), S. G. Mikhlin, S. Prössdorf (1986).

10.6. Парные интегральные уравнения первого рода

10.6-1. Метод Карлемана для уравнения с разностными ядрами

Рассмотрим парное интегральное уравнение типа свертки

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} K_1(x - t)y(t) dt &= f(x), & 0 < x < \infty, \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} K_2(x - t)y(t) dt &= f(x), & -\infty < x < 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где функция $y(x)$ подлежит определению.

С целью дальнейшего использования интегрального преобразования Фурье (см. пп. 7.4-3, 10.4-1, 10.4-2) доопределим соотношения (1) на всю действительную ось. Для этого добавим в правые части обоих соотношений новые неизвестные функции. Эти функции должны быть выбраны так, чтобы заданные на полуосях уравнения оставались справедливыми. Таким образом, к правой части первого уравнения (1) следует прибавить функцию, исчезающую на положительной полуоси, а к правой части второго уравнения (1) — функцию, исчезающую на отрицательной полуоси. В итоге парное интегральное уравнение принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} K_1(x - t)y(t) dt &= f(x) + \xi_-(x), \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} K_2(x - t)y(t) dt &= f(x) + \xi_+(x), \end{aligned} \quad -\infty < x < \infty,$$

где $\xi_{\pm}(x)$ — неизвестные правая и левая односторонние функции.

Применяя интегральное преобразование Фурье, получим

$$\mathcal{K}_1(u)\mathcal{Y}(u) = \mathcal{F}(u) + \Xi^-(u), \quad \mathcal{K}_2(u)\mathcal{Y}(u) = \mathcal{F}(u) + \Xi^+(u). \quad (2)$$

Соотношения (2) содержат три неизвестные функции $\mathcal{Y}(u)$, $\Xi^+(u)$, и $\Xi^-(u)$.

Исключая $\mathcal{Y}(u)$ из соотношений (2), придем к краевой задаче Римана в форме

$$\Xi^+(u) = \frac{\mathcal{K}_2(u)}{\mathcal{K}_1(u)} \Xi^-(u) + \frac{\mathcal{K}_2(u) - \mathcal{K}_1(u)}{\mathcal{K}_1(u)} \mathcal{F}(u), \quad -\infty < u < \infty.$$

В данном случае коэффициент краевого условия представляет собой отношение функций, обращающихся в нуль на бесконечности, и, следовательно, может иметь в бесконечно удаленной точке нуль или полюс некоторого порядка. Решение краевой задачи Римана может быть построено на основании пп. 10.4-6 и 10.4-7, а решение интегрального уравнения (1) определится по формуле

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Xi^+(u) + \mathcal{F}(u)}{\mathcal{K}_2(u)} e^{-iux} du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Xi^-(u) + \mathcal{F}(u)}{\mathcal{K}_1(u)} e^{-iux} du. \quad (3)$$

Пример. Решим парное уравнение первого рода (1), где

$$K_1(x) = \begin{cases} \sqrt{2\pi}(e^{3x} - e^{2x}) & \text{при } x < 0, \\ 0 & \text{при } x > 0, \end{cases} \quad K_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ -\sqrt{2\pi}ie^{-2x} & \text{при } x > 0, \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}\sqrt{2\pi}e^{2x} & \text{при } x < 0, \\ -\frac{1}{4}\sqrt{2\pi}e^{-2x} & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

Найдем интегралы Фурье

$$\mathcal{K}_1(u) = \frac{1}{(u-2i)(u-3i)}, \quad \mathcal{K}_2(u) = \frac{1}{u+2i}, \quad \mathcal{F}(u) = \frac{1}{u^2+4}.$$

Соответствующая этому уравнению краевая задача (2) запишется в виде

$$\Xi^+(u) = \frac{(u-2i)(u-3i)}{u+2i}\Xi^-(u) + \frac{u-3i}{(u+2i)^2} - \frac{1}{u^2+4}. \quad (4)$$

Коэффициент $\mathcal{D}(u)$ имеет на бесконечности полюс первого порядка (индекс $\nu = -1$). Функции $\mathcal{K}_1(u)$ и $\mathcal{K}_2(u)$ имеют в бесконечно удаленной точке общий нуль первого порядка. Тогда

$$m_+ = 2, \quad n_+ = 0, \quad \nu = m_+ - n_+ = 2.$$

Представляя краевое условие в форме

$$(u+2i)\Xi^+(u) - \frac{u-3i}{u+2i} = (u-2i)(u-3i)\Xi^-(u) - \frac{1}{u-2i}$$

и используя аналитическое продолжение и обобщенную теорему Лиувилля, получим, что общее решение задачи (4) в классе функций, обращающихся в нуль на бесконечности, дается выражением

$$\Xi^+(z) = \frac{1}{z+2i} \left(\frac{z-3i}{z+2i} + C \right), \quad \Xi^-(z) = \frac{1}{(z-2i)(z-3i)} \left(\frac{1}{z-2i} + C \right), \quad (5)$$

где C — произвольная постоянная.

Решение рассматриваемого интегрального уравнения находится по формуле

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Xi^+(u) + \mathcal{F}(u)}{\mathcal{K}_2(u)} e^{-iux} du.$$

Так как функция $\mathcal{K}_2(u)$ имеет на бесконечности нуль первого порядка, то $\Xi^+(u) + \mathcal{F}(u)$ должна иметь в бесконечно удаленной точке нуль, по крайней мере второго порядка. Из этого условия находим $C = -1$.

При $C = -1$ решение (5) принимает вид

$$\Xi^+(z) = \frac{-5i}{(z+2i)^2}, \quad \Xi^-(z) = \frac{1+2i-z}{(z-2i)^2(z-3i)}, \quad y(x) = \begin{cases} i\sqrt{2\pi}e^{2x} & \text{при } x < 0, \\ 5\sqrt{2\pi}e^{-2x} & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

Таким образом, условию разрешимости, вытекающему из наличия общего нуля функций $\mathcal{K}_1(u)$ и $\mathcal{K}_2(u)$, удалось удовлетворить путем подбора входящей в общее решение произвольной постоянной, и интегральное уравнение оказалось однозначно разрешимым.

10.6.2. Точные решения некоторых парных уравнений первого рода

В приложениях (например, в теории упругости, теплопроводности, электростатике) встречаются парные интегральные уравнения, которые имеют вид

$$\int_0^\infty K_1(x, t)y(t) dt = f_1(x) \quad \text{при } 0 < x < a, \\ \int_0^\infty K_2(x, t)y(t) dt = f_2(x) \quad \text{при } a < x < \infty, \quad (6)$$

где $K_1(x, t)$, $K_2(x, t)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$ — известные функции, $y(x)$ — функция, подлежащая определению.

Методы решения различных типов таких уравнений описаны, например, в приведенной в конце раздела литературе. Ниже приведены решения некоторых классов парных интегральных уравнений, которые наиболее часто встречаются в приложениях.

1°. Рассмотрим парное интегральное уравнение в форме

$$\begin{aligned} \int_0^\infty J_0(xt)y(t) dt &= f(x) && \text{при } 0 < x < a, \\ \int_0^\infty tJ_0(xt)y(t) dt &= 0 && \text{при } a < x < \infty, \end{aligned} \quad (7)$$

где $J_0(x)$ — функция Бесселя нулевого порядка. Решение уравнений (7) можно получить, используя преобразование Ханкеля. Оно определяется формулой

$$y(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^a \cos(xt) \left[\frac{d}{dt} \int_0^t \frac{sf(s) ds}{\sqrt{t^2 - s^2}} \right] dt. \quad (8)$$

2°. Точное решение парного интегрального уравнения

$$\begin{aligned} \int_0^\infty tJ_0(xt)y(t) dt &= f(x) && \text{при } 0 < x < a, \\ \int_0^\infty J_0(xt)y(t) dt &= 0 && \text{при } a < x < \infty, \end{aligned} \quad (9)$$

где $J_0(x)$ — функция Бесселя нулевого порядка, построенное при помощи преобразования Ханкеля, дается формулой

$$y(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^a \sin(xt) \left[\frac{d}{dt} \int_0^t \frac{sf(s) ds}{\sqrt{t^2 - s^2}} \right] dt. \quad (10)$$

3°. Точное решение парного интегрального уравнения

$$\begin{aligned} \int_0^\infty tJ_\mu(xt)y(t) dt &= f(x) && \text{при } 0 < x < a, \\ \int_0^\infty J_\mu(xt)y(t) dt &= 0 && \text{при } a < x < \infty, \end{aligned} \quad (11)$$

где $J_\mu(x)$ — функция Бесселя порядка μ , определяется следующим выражением (здесь также применяется преобразование Ханкеля):

$$y(x) = \sqrt{\frac{2x}{\pi}} \int_0^a t^{3/2} J_{\mu+\frac{1}{2}}(xt) \left[\int_0^{\pi/2} \sin^{\mu+1} \theta f(t \sin \theta) d\theta \right] dt. \quad (12)$$

4°. Рассмотрим парное интегральное уравнение в форме

$$\begin{aligned} \int_0^\infty t^{2\beta} J_\mu(xt)y(t) dt &= f(x) && \text{при } 0 < x < 1, \\ \int_0^\infty J_\mu(xt)y(t) dt &= 0 && \text{при } 1 < x < \infty, \end{aligned} \quad (13)$$

где $J_\mu(x)$ — функция Бесселя порядка μ .

Решение уравнения (13) можно получить, используя преобразование Меллина. При $\beta > 0$ это решение определяется формулами

$$y(x) = \frac{(2x)^{1-\beta}}{\Gamma(\beta)} \int_0^1 t^{1+\beta} J_{\mu+\beta}(xt) F(t) dt, \quad F(t) = \int_0^1 f(t\zeta) \zeta^{\mu+1} (1-\zeta^2)^{\beta-1} d\zeta. \quad (14)$$

При $\beta > -1$ решение парного уравнения (13) имеет вид

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{(2x)^{-\beta}}{\Gamma(1+\beta)} \left[x^{1+\beta} J_{\mu+\beta}(x) \int_0^1 t^{\mu+1} (1-t^2)^\beta f(t) dt + \int_0^1 t^{\mu+1} (1-t^2)^\beta \Phi(x, t) dt \right], \\ \Phi(x, t) &= \int_0^1 (x\xi)^{2+\beta} J_{\mu+\beta+1}(x\xi) f(\xi t) d\xi. \end{aligned} \quad (15)$$

Формула (15) справедлива при $\beta > -1$ и $-\mu - \frac{1}{2} < 2\beta < \mu + \frac{3}{2}$. Можно показать, что при $\beta > 0$ решение (15) можно привести к виду (14).

5°. Точное решение парного интегрального уравнения

$$\begin{aligned} \int_0^\infty tP_{-\frac{1}{2}+it}(\operatorname{ch} x)y(t) dt &= f(x) && \text{при } 0 < x < a, \\ \int_0^\infty \operatorname{th}(\pi t)P_{-\frac{1}{2}+it}(\operatorname{ch} x)y(t) dt &= 0 && \text{при } a < x < \infty, \end{aligned} \quad (16)$$

где $P_\mu(x)$ — сферическая функция Лежандра первого рода, а i — мнимая единица, может быть построено при помощи интегрального преобразования Мелера–Фока (см. разд. 7.6) и дается формулой

$$y(x) = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_0^a \sin(xt) \left[\int_0^t \frac{f(s) \operatorname{sh} s}{\sqrt{\operatorname{ch} t - \operatorname{ch} s}} ds \right] dt. \quad (17)$$

Заметим, что

$$P_{-\frac{1}{2}+it}(\operatorname{ch} x) = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_0^x \frac{\cos(ts)}{\sqrt{\operatorname{ch} x - \operatorname{ch} s}} ds, \quad x > 0,$$

где интеграл в правой части равенства называется интегралом Мелера.

10.6-3. Приведение парных уравнений к уравнению Фредгольма

Одним из эффективных методов приближенного решения парных интегральных уравнений первого рода является метод их сведения к интегральным уравнениям Фредгольма второго рода (см. главу 11). Ниже приведем некоторые парные уравнения, которые встречаются в задачах механики и физики, и связанные с ними уравнения Фредгольма второго рода.

1°. Решение парного интегрального уравнения первого рода

$$\begin{aligned} \int_0^\infty g(t) J_0(xt) y(t) dt &= f(x) & \text{при } 0 < x < a, \\ \int_0^\infty t J_0(xt) y(t) dt &= 0 & \text{при } a < x < \infty, \end{aligned} \quad (18)$$

где $g(x)$ — известная функция, а $J_0(x)$ — функция Бесселя нулевого порядка, имеет вид

$$y(x) = \int_0^a \varphi(t) \cos(xt) dt. \quad (19)$$

Функция $\varphi(x)$ в равенстве (19) определяется из решения уравнения Фредгольма второго рода следующего вида:

$$\varphi(x) - \frac{1}{\pi} \int_0^a K(x, t) \varphi(t) dt = \psi(x), \quad 0 < x < a, \quad (20)$$

симметричное ядро $K(x, t)$ и правая часть $\psi(x)$ которого даются соотношениями

$$K(x, t) = 2 \int_0^\infty [1 - g(s)] \cos(xs) \cos(ts) ds, \quad \psi(x) = \frac{2}{\pi} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{tf(t)}{\sqrt{x^2 - t^2}} dt. \quad (21)$$

Методы исследования таких уравнений изложены в главе 11.

2°. Решение парного интегрального уравнения первого рода

$$\begin{aligned} \int_0^\infty tg(t) J_0(xt) y(t) dt &= f(x) & \text{при } 0 < x < a, \\ \int_0^\infty J_0(xt) y(t) dt &= 0 & \text{при } a < x < \infty, \end{aligned} \quad (22)$$

где $g(x)$ — известная функция, а $J_0(x)$ — функция Бесселя нулевого порядка, имеет вид

$$y(x) = \int_0^a \varphi(t) \sin(xt) dt. \quad (23)$$

Функция $\varphi(x)$ в равенстве (23) определяется из решения уравнения Фредгольма второго рода (20), где

$$K(x, t) = 2 \int_0^\infty [1 - g(s)] \sin(xs) \sin(ts) ds, \quad \psi(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^x \frac{tf(t)}{\sqrt{x^2 - t^2}} dt.$$

Заметим, что ядро $K(x, t)$ — симметричное.

3°. Решение парного интегрального уравнения первого рода

$$\begin{aligned} \int_0^\infty g(t) J_\mu(xt) y(t) dt &= f(x) & \text{при } 0 < x < a, \\ \int_0^\infty t J_\mu(xt) y(t) dt &= 0 & \text{при } a < x < \infty, \end{aligned} \quad (24)$$

где $g(x)$ — известная функция, а $J_\mu(x)$ — функция Бесселя порядка μ , имеет вид

$$y(x) = \sqrt{\frac{\pi x}{2}} \int_0^a \sqrt{t} J_{\mu-\frac{1}{2}}(xt) \varphi(t) dt. \quad (25)$$

Функция $\varphi(x)$ в равенстве (25) определяется из решения уравнения Фредгольма второго рода (20), в котором

$$K(x, t) = \pi \sqrt{xt} \int_0^\infty [1 - g(s)] s J_{\mu-\frac{1}{2}}(xs) J_{\mu-\frac{1}{2}}(ts) ds, \\ \psi(x) = \frac{2}{\pi} \left\{ f(0) + \int_0^{\pi/2} [\mu(\sin \theta)^{\mu-1} f(x \sin \theta) + x(\sin \theta)^\mu f'(x \sin \theta)] d\theta \right\},$$

где $f'(x \sin \theta) = \frac{df(\xi)}{d\xi} \Big|_{\xi=x \sin \theta}$, причем ядро $K(x, t)$ — симметричное.

4°. Решение парного интегрального уравнения первого рода

$$\int_0^\infty t g(t) J_\mu(xt) y(t) dt = f(x) \quad \text{при } 0 < x < a, \\ \int_0^\infty J_\mu(xt) y(t) dt = 0 \quad \text{при } a < x < \infty, \quad (26)$$

где $g(x)$ — известная функция, а $J_\mu(x)$ — функция Бесселя порядка μ , имеет вид

$$y(x) = \sqrt{\frac{\pi x}{2}} \int_0^a \sqrt{t} J_{\mu+\frac{1}{2}}(xt) \varphi(t) dt. \quad (27)$$

Функция $\varphi(x)$ в равенстве (27) определяется из решения уравнения Фредгольма второго рода (20), в котором

$$K(x, t) = \pi \sqrt{xt} \int_0^\infty [1 - g(s)] s J_{\mu+\frac{1}{2}}(xs) J_{\mu+\frac{1}{2}}(ts) ds, \\ \psi(x) = \frac{2x}{\pi} \int_0^{\pi/2} f(x \sin \theta) (\sin \theta)^{\mu+1} d\theta,$$

причем ядро $K(x, t)$ — симметричное.

5°. Решение парного интегрального уравнения первого рода

$$\int_0^\infty g(t) J_\mu(xt) y(t) dt = f(x) \quad \text{при } 0 < x < a, \\ \int_0^\infty J_\mu(xt) y(t) dt = 0 \quad \text{при } a < x < \infty, \quad (28)$$

где $g(x)$ — известная функция, а $J_\mu(x)$ — функция Бесселя порядка μ , имеет вид

$$y(x) = x \sqrt{\frac{\pi x}{2}} \int_0^a \sqrt{t} J_{\mu-\frac{1}{2}}(xt) \varphi(t) dt. \quad (29)$$

Функция $\varphi(x)$ в равенстве (29) определяется из решения уравнения Фредгольма второго рода (20), в котором

$$K(x, t) = x^\mu \sqrt{2\pi t} \int_x^a \frac{\rho^{1-\mu}}{\sqrt{\rho^2 - x^2}} \int_0^\infty [1 - g(s)] s^{3/2} J_\mu(\rho s) J_{\mu-\frac{1}{2}}(ts) ds d\rho, \\ \psi(x) = \frac{2}{\pi} x^\mu \int_x^a \frac{\rho^{1-\mu}}{\sqrt{\rho^2 - x^2}} d\rho.$$

6°. Решение парного интегрального уравнения первого рода

$$\int_0^\infty t^{2\beta} g(t) J_\mu(xt) y(t) dt = f(x) \quad \text{при } 0 < x < a, \\ \int_0^\infty J_\mu(xt) y(t) dt = 0 \quad \text{при } a < x < \infty, \quad (30)$$

где $0 < \beta < 1$, $g(x)$ — известная функция, а $J_\mu(x)$ — функция Бесселя порядка μ , имеет вид

$$y(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} x^{1-\beta} \int_0^a \sqrt{t} J_{\mu+\beta}(xt) \varphi(t) dt. \quad (31)$$

Функция $\varphi(x)$ в равенстве (31) определяется из решения уравнения Фредгольма второго рода (20), в котором

$$K(x, t) = \pi \sqrt{xt} \int_0^\infty [1 - g(s)] s J_{\mu+\beta}(xs) J_{\mu+\beta}(ts) ds,$$

$$\psi(x) = \frac{2^{1-\beta}}{\Gamma(\beta)} \sqrt{\frac{2x}{\pi}} x^\beta \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x \sin \theta) (\sin \theta)^{\mu+1} (\cos \theta)^{2\beta-1} d\theta,$$

причем ядро $K(x, t)$ — симметричное.

7°. Решение парного интегрального уравнения первого рода

$$\int_0^\infty g(t) P_{-\frac{1}{2}+it}(\operatorname{ch} x) y(t) dt = f(x) \quad \text{при } 0 < x < a,$$

$$\int_0^\infty t \operatorname{th}(\pi t) P_{-\frac{1}{2}+it}(\operatorname{ch} x) y(t) dt = 0 \quad \text{при } a < x < \infty,$$
(32)

где $P_\mu(x)$ — сферическая функция Лежандра первого рода, i — мнимая единица, а $g(x)$ — известная функция дается формулой

$$y(x) = \int_0^a \cos(xt) \varphi(t) dt. \quad (33)$$

Функция $\varphi(x)$ в равенстве (33) определяется из решения уравнения Фредгольма второго рода (20), в котором

$$K(x, t) = \int_0^\infty [1 - g(s)] \{ \cos[(x+t)s] + \cos[(x-t)s] \} ds,$$

$$\psi(x) = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{f(s) \operatorname{sh} s}{\sqrt{\operatorname{ch} x - \operatorname{ch} s}} ds,$$

причем ядро $K(x, t)$ — симметричное.

8°. Решение парного интегрального уравнения первого рода

$$\int_0^\infty t g(t) P_{-\frac{1}{2}+it}(\operatorname{ch} x) y(t) dt = f(x) \quad \text{при } 0 < x < a,$$

$$\int_0^\infty t \operatorname{th}(\pi t) P_{-\frac{1}{2}+it}(\operatorname{ch} x) y(t) dt = 0 \quad \text{при } a < x < \infty,$$
(34)

где $P_\mu(x)$ — сферическая функция Лежандра первого рода, i — мнимая единица, а $g(x)$ — известная функция, дается формулой

$$y(x) = \int_0^a \sin(xt) \varphi(t) dt. \quad (35)$$

Функция $\varphi(x)$ в равенстве (35) определяется из решения уравнения Фредгольма второго рода (20), в котором

$$K(x, t) = \int_0^\infty [1 - g(s)] \{ \cos[(x-t)s] - \cos[(x+t)s] \} ds, \quad \psi(x) = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_0^x \frac{f(s) \operatorname{sh} s}{\sqrt{\operatorname{ch} x - \operatorname{ch} s}} ds,$$

причем ядро $K(x, t)$ — симметричное.

⊙ Литература: Е. Титчмарш (1948), И. Снеддон (1955), Я. С. Уфлянд (1977), Ф. Д. Гахов, Ю. И. Черский (1978).

10.7. Асимптотические методы решения уравнений с логарифмической особенностью

10.7-1. Предварительные замечания

Рассмотрим интегральное уравнение Фредгольма первого рода

$$\int_{-1}^1 K\left(\frac{x-t}{\lambda}\right) y(t) dt = f(x), \quad -1 \leq x \leq 1, \quad (1)$$

с характерным параметром λ , где $0 < \lambda < \infty$.

Будем считать, что ядро $K = K(x)$ является четной непрерывной (при $x \neq 0$) функций, которая имеет логарифмическую особенность при $x \rightarrow 0$ и экспоненциальным образом убывает при $x \rightarrow \infty$. Уравнения с таким ядром возникают при решении различных задач механики сплошной среды со смешанными граничными условиями.

Пусть $f(x)$ принадлежит пространству функций, первые производные которых удовлетворяют условию Гёльдера с показателем $\alpha > \frac{1}{2}$ на отрезке $[-1, 1]$. В этом случае решение интегрального уравнения (1) в классе функций, удовлетворяющих условию Гёльдера, существует и единственно при любом $\lambda \in (0, \infty)$, причем оно имеет следующую структуру:

$$y(x) = \frac{\omega(x)}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (2)$$

где $\omega(x)$ — непрерывная функция, которая не обращается в нуль на концах отрезка при $x = \pm 1$.*

Из формулы (2) следует, что решение уравнения (1) неограничено при $x \rightarrow \pm 1$. Это важное обстоятельство будет учтено в п. 10.7-3 при построении асимптотического решения в случае $\lambda \rightarrow 0$.

Заметим, что более общие уравнения с разностным ядром и произвольными конечными пределами интегрирования всегда можно заменой переменных привести к (1). Здесь форма (1) взята для удобства дальнейшего изложения.

10.7-2. Решение при больших значениях характерного параметра

Пусть для ядра интегрального уравнения (1) справедливо следующее представление при $x \rightarrow 0$:

$$K(x) = \ln |x| \sum_{n=0}^{\infty} a_n |x|^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n |x|^n, \quad (3)$$

где $a_0 \neq 0$.

Из выражения (3) видно, что в уравнение (1) при $\lambda \rightarrow \infty$ входят два разно масштабных больших параметра λ и $\ln \lambda$. Второй «квазипостоянный параметр» растет существенно медленнее, чем первый (например, при $\lambda = 100$ и $\lambda = 1000$ имеем соответственно $\ln \lambda \approx 4,6$ и $\ln \lambda \approx 6,9$).

Отбросим в уравнении (1) все слагаемые, затухающие при $\lambda \rightarrow \infty$. С учетом (3), для главного (нулевого) приближения получим

$$\int_{-1}^1 (a_0 \ln |x-t| - a_0 \ln \lambda + b_0) y_0(t) dt = f(x), \quad -1 \leq x \leq 1. \quad (4)$$

Следует отметить, что в подынтегральном выражении нельзя было сохранить только одно слагаемое, пропорциональное $\ln \lambda$ (так как соответствующее «укороченное» уравнение было бы неразрешимым). Константа b_0 также должна быть включена в (4), чтобы уравнение для главного приближения было инвариантным относительно перенормировки параметра λ в уравнении (1).

Для построения асимптотического решения уравнения (1) при $\lambda \rightarrow \infty$ удобно поступить следующим образом. Рассмотрим сначала вспомогательное интегральное уравнение с двумя параметрами λ и β :

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \mathcal{K}(x-t, \beta, \lambda) y(t) dt &= f(x), \quad -1 \leq x \leq 1, \\ \mathcal{K}(x, \beta, \lambda) &= (\ln |x| - \beta) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{\lambda^n} |x|^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{\lambda^n} |x|^n. \end{aligned} \quad (5)$$

Его решение ищем в виде регулярного асимптотического разложения по обратным степеням λ (при фиксированном β). В итоге для первых N членов получим:

$$y(x, \beta, \lambda) = \sum_{n=0}^N \lambda^{-n} y_n(x, \beta) + o(\lambda^{-N}). \quad (6)$$

Подставляя (6) в (5), для последовательного определения функций $y_n(x, \beta)$ получим рекуррентную цепочку интегральных уравнений вида (4):

$$\int_{-1}^1 (a_0 \ln |x-t| - a_0 \beta + b_0) y_n(t, \beta) dt = g_n(x, \beta), \quad -1 \leq x \leq 1, \quad (7)$$

* Равенства $\omega(\pm 1) = 0$ могут выполняться лишь в исключительных случаях при особых значениях параметра λ .

правые части которых $g_n(x, \beta)$ зависят только от предыдущих членов разложения y_0, y_1, \dots, y_{n-1} .

Учтем, что вспомогательное уравнение (5) при $\beta = \ln \lambda$ совпадает с уравнением (1), в которое подставлено разложение (3). Поэтому асимптотическое решение уравнения (1) получается с помощью выражений (6) и (7) при $\beta = \ln \lambda$.

Контактные задачи теории упругости часто приводятся к уравнению (1), в котором ядро может быть представлено в виде (3) при $a_n = 0$ для всех $n > 0$ и $b_{2m+1} = 0$ при $m = 0, 1, 2, \dots$. В этом случае в решении (6) следует положить $y_n(x, \beta) \equiv 0$ при $n = 1, 3, 5, \dots$. Для практических целей обычно можно ограничиться удержанием членов порядка до λ^{-4} .

10.7-3. Решение при малых значениях характерного параметра

При анализе предельного случая $\lambda \rightarrow 0$ учтем особенности решения на концах отрезка $-1 \leq x \leq 1$ (см. формулу (2)). Для этого рассмотрим вспомогательную систему двух интегральных уравнений

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{\infty} K\left(\frac{x-t}{\lambda}\right) y_1(t) dt &= f_1(x) + \int_{-\infty}^{-1} K\left(\frac{x-t}{\lambda}\right) y_2(t) dt, & -1 \leq x < \infty, \\ \int_{-\infty}^1 K\left(\frac{x-t}{\lambda}\right) y_2(t) dt &= f_2(x) + \int_1^{\infty} K\left(\frac{x-t}{\lambda}\right) y_1(t) dt, & -\infty < x \leq 1. \end{aligned} \quad (8)$$

Первое уравнение способствует выделению особенности решения при $x = -1$, а второе — выделению особенности решения при $x = +1$,

Функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ таковы, что

$$\begin{aligned} f_1(x) + f_2(x) &= f(x), & -1 \leq x \leq 1, \\ f_1(x) &= O(e^{-\alpha_1 x}) & \text{при } x \rightarrow \infty, \\ f_2(x) &= O(e^{\alpha_2 x}) & \text{при } x \rightarrow -\infty, \end{aligned} \quad (9)$$

где $\alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0$.

При выполнении первого условия (9) решение интегрального уравнения (1) отыскивается как сумма решений интегральных уравнений (8), т. е.

$$y(x) = y_1(x) + y_2(x), \quad -1 \leq x \leq 1. \quad (10)$$

Отметим, что в силу двух последних условий (9) справедливы соотношения

$$\begin{aligned} y_1(x) &= O(e^{-\beta_1 x}) & \text{при } x \rightarrow \infty, \\ y_2(x) &= O(e^{\beta_2 x}) & \text{при } x \rightarrow -\infty, \end{aligned} \quad (11)$$

где $\beta_1 > 0, \beta_2 > 0$.

Напомним, что ядро $K(x)$ является четной функцией. Поэтому если функция $f(x)$ в интегральном уравнении (1) четная или нечетная, то в системе (8) следует положить*

$$f_1(x) = \pm f_2(-x), \quad y_1(x) = \pm y_2(-x). \quad (12)$$

В обоих этих случаях система уравнений (8) путем перехода к новым переменным сводится к одному интегральному уравнению

$$\int_0^{\infty} K(z - \tau) w(\tau) d\tau = F(z) \pm \int_{2/\lambda}^{\infty} K(2/\lambda - z - \tau) w(\tau) d\tau, \quad 0 \leq z < \infty, \quad (13)$$

в котором использованы следующие обозначения:

$$z = \frac{x+1}{\lambda}, \quad \tau = \frac{t+1}{\lambda}, \quad w(\tau) = y(t), \quad F(z) = \frac{1}{\lambda} f_1(x). \quad (14)$$

С учетом свойств ядра $K(x)$ (см. п. 10.7-1) и первого соотношения (11) можно получить равномерную по τ асимптотическую оценку

$$I(w) \equiv \int_{2/\lambda}^{\infty} K(2/\lambda - z - \tau) w(\tau) d\tau = O(e^{-2\beta_1/\lambda}). \quad (15)$$

* В формулах (12), (13), (16) и (17) знак плюс берется для четной функции $f(x)$, минус — для нечетной функции $f(x)$.

Согласно (15), интегральное уравнение (13) при малых λ можно решать методом последовательных приближений по схеме

$$\int_0^\infty K(z - \tau)w_n(\tau) d\tau = F(z) \pm I(w_{n-1}), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (16)$$

отбрасывая в главном приближении интеграл $I(w_0)$ в правой части. Полученные интегральные уравнения Винера–Хопфа первого рода (16) решаются в замкнутом виде (см. п. 10.5-1).

Из формул (10), (12) и (14) следует, что главный член асимптотического разложения решения интегрального уравнения (1) при $\lambda \rightarrow 0$ имеет вид

$$y(x) = w_1\left(\frac{1+x}{\lambda}\right) \pm w_1\left(\frac{1-x}{\lambda}\right), \quad (17)$$

где $w_1 = w_1(\tau)$ — решение уравнения (16) при $n = 1$ и $w_0 \equiv 0$.

Для практических целей обычно бывает достаточно использовать формулу (17).

10.7-4. Интегральные уравнения теории упругости

В контактных задачах теории упругости часто встречается интегральное уравнение (1), в котором ядро задается с помощью косинус-преобразования Фурье

$$K(x) = \int_0^\infty \frac{L(u)}{u} \cos(ux) du. \quad (18)$$

Здесь функция $L(u)$ непрерывна и положительна при $u \in (0, \infty)$, причем для нее справедливы асимптотические равенства

$$\begin{aligned} L(u) &= Au + O(u^3) && \text{при } u \rightarrow 0, \\ L(u) &= \sum_{n=0}^{N-1} B_n u^{-n} + O(u^{-N}) && \text{при } u \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (19)$$

где $A > 0$, $B_0 > 0$.

Из формулы (18) следует, что ядро является четной функцией: $K(x) = K(-x)$.

Обычно считается, что $L(u)u^{-1}$ и $u[L(u)]^{-1}$ как функции комплексного переменного $w = u + iv$ соответственно регулярны в полосе $|v| \leq \gamma_1$ и в полосе $|v| \leq \gamma_2$. Отсюда, в частности, следует, что ядро $K(x)$ убывает на бесконечности не слабее, чем $\exp(-\gamma_1|t|)$.

Из формул (18) и (19) следует, что ядро интегрального уравнения $K(x)$ имеет логарифмическую особенность при $x = 0$. При этом справедливо представление (3), где $a_n = 0$ при $n = 1, 3, 5, \dots$

Таким образом ядро, заданное с помощью формулы (18), имеет те же самые характерные особенности, которые предполагались выполненными для ядра интегрального уравнения (1). Поэтому для асимптотического анализа уравнения (1) с ядром (18) при $\lambda \rightarrow \infty$ и $\lambda \rightarrow 0$ можно использовать результаты пп. 10.7-2 и 10.7-3.

⊙ *Литература:* И. И. Ворович, В. М. Александров, В. А. Бабешко (1974), В. М. Александров, Е. В. Коваленко (1986), В. М. Александров (1993).

10.8. Методы регуляризации

10.8-1. Метод регуляризации Лаврентьева

Рассмотрим интегральное уравнение Фредгольма первого рода (см. также замечание 3 из п. 11.6-5)

$$\int_a^b K(x, t)y(t) dt = f(x), \quad a \leq x \leq b, \quad (1)$$

где $f(x) \in L_2(a, b)$, $y(x) \in L_2(a, b)$, ядро $K(x, t)$ — квадратично суммируемое, симметричное и положительно определенное (см. п. 11.6-2).

В выбранных классах функций и ядер задача отыскания решения уравнения (1) является некорректно поставленной, т. е. неустойчивой по отношению к малым изменениям правой части интегрального уравнения.

Согласно методу регуляризации Лаврентьева наряду с уравнением (1) рассмотрим также регуляризованное уравнение

$$\varepsilon y_\varepsilon(x) + \int_a^b K(x, t) y_\varepsilon(t) dt = f(x), \quad a \leq x \leq b, \quad (2)$$

где $\varepsilon > 0$ — параметр регуляризации, которое является уравнением Фредгольма второго рода и может быть решено методами, изложенными в главе 11, причем его решение существует и единственно.

Задавая в уравнении (2) параметр ε достаточно малым, найдем решение уравнения $y_\varepsilon(x)$ и подставим это решение в уравнение (1). В результате получим

$$\int_a^b K(x, t) y_\varepsilon(t) dt = f_\varepsilon(x), \quad a \leq x \leq b. \quad (3)$$

Если полученная таким образом функция $f_\varepsilon(x)$ мало отличается от $f(x)$, т. е.

$$\|f(x) - f_\varepsilon(x)\| \leq \delta, \quad (4)$$

где δ — некоторое заранее известное малое положительное число, то решение $f_\varepsilon(x)$ считается достаточно хорошим приближенным решением уравнения (1).

Обычно параметр δ определяет погрешность исходных данных, когда правая часть уравнения (1) задается или определяется в эксперименте с некоторой точностью.

В случае, когда при заданном ε условие (4) не выполняется, выбирается новое значение параметра регуляризации, и повторяется описанная процедура.

В следующем пункте описан метод регуляризации, пригодный для уравнений первого рода с произвольными квадратично интегрируемыми ядрами.

10.8-2. Метод регуляризации Тихонова

Рассмотрим интегральное уравнение Фредгольма первого рода

$$\int_a^b K(x, t) y(t) dt = f(x), \quad c \leq x \leq d. \quad (5)$$

Будем полагать, что $K(x, t)$ есть любая квадратично суммируемая в области $\{a \leq t \leq b, c \leq x \leq d\}$ функция, $f(x) \in L_2(c, d)$ и $y(x) \in L_2(a, b)$. Задача отыскания решения уравнения (5) также является некорректно поставленной в указанном выше смысле.

Согласно методу регуляризации Тихонова (нулевого порядка), наряду с уравнением (5) рассмотрим интегральное уравнение Фредгольма второго рода (см. главу 11)

$$\varepsilon y_\varepsilon(x) + \int_a^b K^*(x, t) y_\varepsilon(t) dt = f^*(x), \quad a \leq x \leq b, \quad (6)$$

где

$$K^*(x, t) = K^*(t, x) = \int_c^d K(s, x) K(s, t) ds, \quad f^*(x) = \int_c^d K(s, x) f(s) ds, \quad (7)$$

а число $\varepsilon > 0$ — параметр регуляризации. Уравнение (6) называется регуляризованным интегральным уравнением, причем его решение существует и единственно.

Задавая в уравнении (6) параметр ε достаточно малым, найдем решение уравнения $y_\varepsilon(x)$ и подставим это решение в уравнение (5). Тогда

$$\int_a^b K(x, t) y_\varepsilon(t) dt = f_\varepsilon(x), \quad c \leq x \leq d. \quad (8)$$

Сравнивая найденную правую часть уравнения $f_\varepsilon(x)$ с заданной $f(x)$ по формуле (4) в соответствии с описанным выше простейшим алгоритмом, либо сочтем полученное приближенное решение $y_\varepsilon(x)$ удовлетворительным, либо продолжим поиск при новом значении параметра регуляризации.

Выше изложены простейшие принципы выбора приближенного решения уравнения Фредгольма первого рода. Более совершенные и сложные алгоритмы можно найти в цитируемой ниже литературе.

● Литература: А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин (1979), М. М. Лаврентьев, В. Г. Романов, С. П. Шишатский (1980), А. Ф. Верлань, В. С. Сизиков (1986).

11. Методы решения линейных уравнений

$$\text{вида } y(x) - \int_a^b K(x, t)y(t) dt = f(x)$$

11.1. Предварительные замечания

11.1-1. Уравнения Фредгольма и уравнения со слабой особенностью

Линейные интегральные уравнения второго рода с постоянными пределами интегрирования имеют форму

$$y(x) - \lambda \int_a^b K(x, t)y(t) dt = f(x), \quad (1)$$

где $y(x)$ — неизвестная функция ($a \leq x \leq b$), $K(x, t)$ — ядро интегрального уравнения, $f(x)$ — некоторая известная функция, которая называется *свободным членом* или *правой частью уравнения* (1). Для удобства анализа в интегральном уравнении (1) по традиции принято выделять числовой параметр λ , который называют *параметром интегрального уравнения*. Классы рассматриваемых функций и ядер были определены ранее в пп. 10.1-1 и 10.1-2. Отметим, что уравнения с постоянными пределами интегрирования вида (1), имеющие фредгольмовы ядра или ядра со слабой особенностью, называются соответственно *уравнениями Фредгольма второго рода* или *уравнениями со слабой особенностью второго рода*.

Число λ называется *характеристическим числом* или *характеристическим значением* интегрального уравнения (1), если существует нетривиальное решение соответствующего однородного уравнения ($f(x) \equiv 0$). Само же это нетривиальное решение называется *собственной функцией* интегрального уравнения, соответствующей характеристическому числу λ . Если λ является характеристическим числом, то величина $1/\lambda$ называется *собственным числом* интегрального уравнения (1). *Правильным* или *регулярным* значением параметра λ называется такое его значение, при котором упомянутое однородное уравнение имеет только тривиальное решение. Иногда характеристические числа и собственные функции интегрального уравнения Фредгольма называют характеристическими числами и собственными функциями ядра $K(x, t)$.

Ядро $K(x, t)$ интегрального уравнения (1) называется *вырожденным*, если оно имеет вид $K(x, t) = g_1(x)h_1(t) + \dots + g_n(x)h_n(t)$, разностным, если оно зависит от разности аргументов: $K(x, t) = K(x - t)$, симметричным, если оно удовлетворяет условию $K(x, t) = K(t, x)$.

Интегральное уравнение, полученное из (1) заменой ядра $K(x, t)$ на $K(t, x)$, называется *союзным с (1)* или *транспонированным к (1)*.

Замечание 1. Переменные t и x могут изменяться в различных интервалах (например, $a \leq t \leq b$ и $c \leq x \leq d$). Для определенности далее будем считать, что $c = a$ и $d = b$ (этого всегда можно добиться линейной подстановкой $x = \alpha\bar{x} + \beta$ с помощью надлежащего выбора постоянных α и β).

Замечание 2. Случай, когда пределы интегрирования a и/или b могут быть бесконечными, вообще говоря, не исключается, но при этом следует внимательно проверять выполнение условия квадратичной интегрируемости ядра $K(x, t)$ в квадрате $S = \{a \leq x \leq b, a \leq t \leq b\}$.

11.1-2. Структура решений

Решение уравнения (1) может быть представлено в форме

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b R(x, t; \lambda)f(t) dt,$$

где *резольвента* $R(x, t; \lambda)$ не зависит от свободного члена $f(x)$ и определяется только ядром интегрального уравнения.

Резольвента уравнения Фредгольма (1) удовлетворяет двум интегральным уравнениям

$$R(x, t; \lambda) = K(x, t) + \lambda \int_a^b K(x, s)R(s, t; \lambda) ds,$$

$$R(x, t; \lambda) = K(x, t) + \lambda \int_a^b K(s, t)R(x, s; \lambda) ds,$$

в которых интегрирование ведется по различным парам переменных ядра и резольвенты.

11.1-3. Интегральные уравнения типа свертки второго рода

Интегральными уравнениями типа свертки (см. также п. 10.1-3) называются уравнения, которые при применении к ним некоторого интегрального преобразования и теоремы о свертке для этого преобразования приводятся к алгебраическим уравнениям для изображений или к краевым задачам теории аналитических функций. Рассмотрим уравнения типа свертки второго рода, связанные с преобразованием Фурье.

Интегральное уравнение второго рода с разностным ядром на всей оси (его называют иногда уравнением типа свертки второго рода с одним ядром) имеет вид

$$y(x) + \int_{-\infty}^{\infty} K(x-t)y(t) dt = f(x), \quad -\infty < x < \infty, \quad (2)$$

где $f(x)$ и $K(x)$ — известные правая часть и ядро интегрального уравнения, а $y(x)$ — искомая функция.

Интегральное уравнение второго рода с разностным ядром на полуоси имеет вид

$$y(x) + \int_0^{\infty} K(x-t)y(t) dt = f(x), \quad 0 < x < \infty. \quad (3)$$

Уравнение (3) называется также *односторонним уравнением второго рода* или *интегральным уравнением Винера–Хопфа второго рода*

Интегральное уравнение типа свертки с двумя ядрами второго рода имеет вид

$$y(x) + \int_0^{\infty} K_1(x-t)y(t) dt + \int_{-\infty}^0 K_2(x-t)y(t) dt = f(x), \quad -\infty < x < \infty, \quad (4)$$

где $K_1(x)$ и $K_2(x)$ — ядра интегрального уравнения (4). Класс функций и ядер для уравнений типа свертки введен ранее в п. 10.1-3.

11.1-4. Парные интегральные уравнения второго рода

Парное интегральное уравнение второго рода с разностными ядрами (типа свертки) имеет вид

$$\begin{aligned} y(x) + \int_{-\infty}^{\infty} K_1(x-t)y(t) dt &= f(x), & 0 < x < \infty, \\ y(x) + \int_{-\infty}^{\infty} K_2(x-t)y(t) dt &= f(x), & -\infty < x < 0, \end{aligned} \quad (5)$$

где обозначения, класс функций и ядер совпадают с введенными для уравнений типа свертки в п. 10.1-3.

Парное интегральное уравнение второго рода в достаточно общем случае имеет вид

$$\begin{aligned} y(x) + \int_a^{\infty} K_1(x,t)y(t) dt &= f_1(x), & a < x < b, \\ y(x) + \int_a^{\infty} K_2(x,t)y(t) dt &= f_2(x), & b < x < \infty, \end{aligned} \quad (6)$$

где $f_1(x)$, $f_2(x)$ и $K_1(x, t)$, $K_2(x, t)$ — известные правые части и ядра уравнения (6), а $y(x)$ — функция, подлежащая определению. Такие уравнения можно исследовать методами различных интегральных преобразований с приведением к краевым задачам теории аналитических функций, а также другими методами развитыми для парных интегральных уравнений первого рода (см., например, И. Снеддон (1955), Я. С. Уфлянд (1977)).

Интегральные уравнения, полученные из (2)–(5) заменой ядра $K(x-t)$ на $K(t-x)$, называются *союзными* с ними или *транспонированными* к ним.

Если правые части уравнений (1)–(6) тождественно равны нулю, то их называют *однородными*. Если же правые части не обращаются в нуль всюду в области их определения, то уравнения (1)–(6) называют *неоднородными*.

Замечание 3. К уравнениям (2)–(5) приводятся некоторые уравнения, ядра которых содержат произведение или отношение переменных x и t .

Замечание 4. Уравнения типа свертки (2)–(5) иногда записывают в форме, где перед интегралами ставят множитель $1/\sqrt{2\pi}$.

Замечание 5. Если класс функций и ядер для уравнений типа свертки (в частности, для уравнения Винера–Хопфа) отличается от введенного в п. 10.1-3, то это будет особо оговариваться в каждом случае (см. разд. 11.10 и 11.11).

● *Литература:* Г. Виарда (1933), Э. Гурса (1934), Г. М. Мюнтц (1934), И. И. Привалов (1935), И. Г. Петровский (1951), М. Г. Крейн (1958), С. Г. Михлин (1959), Ф. Трикоми (1960), Б. Нобл (1962), П. П. Забрейко, А. И. Кошелев и др. (1968), М. А. Красносельский, Г. М. Вайникко и др. (1969), М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко (1968), Л. Я. Цлаф (1970), J. A. Cochran (1972), В. И. Смирнов (1974), А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин (1976), Л. В. Канторович, Г. П. Акилов (1977), Ф. Д. Гахов, Ю. И. Черский (1978), Ф. Рисс, Б. Сёкефальви-Надь (1979), А. Г. Бутковский (1979), L. M. Delves, J. L. Mohamed (1985), A. J. Jerry (1985), А. Ф. Верлань, В. С. Сизиков (1986), A. Golberg (1990), D. Porter, D. S. G. Stirling (1990), C. Corduneanu (1991), J. Kondo (1991), S. Prössdorf, B. Silbermann (1991), W. Hackbusch (1995), R. P. Kanwal (1996), K. E. Atkinson (1997), А. Д. Полянин, А. В. Манжиров (1998), А. Д. Polyanin, A. V. Manzhirov (1998), А. В. Манжиров, А. Д. Полянин (1999, 2000), А. Б. Васильева, Н. А. Тихонов (2002).

11.2. Уравнения Фредгольма второго рода с вырожденным ядром

11.2-1. Простейшее вырожденное ядро

Рассмотрим интегральное уравнение Фредгольма второго рода с простейшим вырожденным ядром

$$y(x) - \lambda \int_a^b g(x)h(t)y(t) dt = f(x), \quad a \leq x \leq b. \quad (1)$$

Решение уравнения (1) ищем в виде

$$y(x) = f(x) + \lambda Ag(x). \quad (2)$$

Подставляя выражения (2) в уравнение (1), после простых преобразований будем иметь

$$A \left[1 - \lambda \int_a^b h(t)g(t) dt \right] = \int_a^b f(t)h(t) dt. \quad (3)$$

Считается, что оба интеграла, входящие в (3), существуют. На основании (1)–(3), с учетом того, что единственное характеристическое число λ_1 уравнения (1) дается выражением

$$\lambda_1 = \left[\int_a^b h(t)g(t) dt \right]^{-1}, \quad (4)$$

получим следующие результаты.

1°. Если $\lambda \neq \lambda_1$, то при произвольной правой части существует единственное решение уравнения (1), которое можно записать в виде

$$y(x) = f(x) + \frac{\lambda \lambda_1 f_1}{\lambda_1 - \lambda} g(x), \quad f_1 = \int_a^b f(t)h(t) dt. \quad (5)$$

2°. Если $\lambda = \lambda_1$ и $f_1 = 0$, то решение уравнения (1) можно представить в форме

$$y = f(x) + Cy_1(x), \quad y_1(x) = g(x), \quad (6)$$

где C — произвольная постоянная, $y_1(x)$ — собственная функция, соответствующая характеристическому числу λ_1 .

3°. Если $\lambda = \lambda_1$ и $f_1 \neq 0$ решения не существует.

11.2-2. Вырожденное ядро в общем случае

Интегральное уравнение Фредгольма второго рода с вырожденным ядром в общем случае имеет вид

$$y(x) - \lambda \int_a^b \left[\sum_{k=1}^n g_k(x)h_k(t) \right] y(t) dt = f(x), \quad n = 2, 3, \dots \quad (7)$$

Перепишем уравнение (7) в форме

$$y(x) = f(x) + \lambda \sum_{k=1}^n g_k(x) \int_a^b h_k(t)y(t) dt, \quad n = 2, 3, \dots \quad (8)$$

Предполагая, что уравнение (8) имеет решение, с учетом обозначения

$$A_k = \int_a^b h_k(t)y(t) dt \quad (9)$$

будем иметь

$$y(x) = f(x) + \lambda \sum_{k=1}^n A_k g_k(x), \quad (10)$$

из которого видно, что решение интегрального уравнения с вырожденным ядром сводится к определению постоянных A_k .

Умножим обе части равенства (10) на $h_m(x)$ и проинтегрируем по x в пределах от a до b . Тогда получим систему линейных алгебраических уравнений, которой удовлетворяют коэффициенты A_k :

$$A_m - \lambda \sum_{k=1}^n s_{mk} A_k = f_m, \quad m = 1, 2, \dots, n, \quad (11)$$

где

$$s_{mk} = \int_a^b h_m(x)g_k(x) dx, \quad f_m = \int_a^b f(x)h_m(x) dx, \quad m, k = 1, 2, \dots, n. \quad (12)$$

При вычисления коэффициентов s_{mk} и f_m для конкретных вырожденных ядер можно воспользоваться таблицами интегралов из справочников И. С. Градштейна, И. М. Рыжика (1975), А. П. Прудникова, Ю. А. Брычкова, О. И. Маричева (1981, 1983, 1986).

Если построено решение системы уравнений (11), то построено и решение интегрального уравнения с вырожденным ядром (7). Значения параметра λ , при которых определитель системы (11) обращается в нуль, являются характеристическими числами интегрального уравнения (7), причем их ровно n штук с учетом кратности.

Теперь можно сформулировать основные результаты о решении уравнения (7).

1°. Если λ — правильное, то при произвольной правой части $f(x)$ существует единственное решение интегрального уравнения Фредгольма с вырожденным ядром, которое можно представить в форме (10), где коэффициенты A_k являются решением системы линейных алгебраических уравнений (11). Постоянные A_k можно определить, например, по формулам Крамера.

2°. Если λ — характеристическое и $f(x) \equiv 0$, то решение однородного уравнения с вырожденным ядром имеет вид

$$y(x) = \sum_{i=1}^p C_i y_i(x), \quad (13)$$

где C_i — произвольные постоянные, а $y_i(x)$ — линейно независимые собственные функции ядра, соответствующие характеристическому числу λ_i :

$$y_i(x) = \sum_{k=1}^n A_{k(i)} g_k(x). \quad (14)$$

Здесь постоянные $A_{k(i)}$ составляют p ($p \leq n$) линейно независимых решений следующей однородной системы алгебраических уравнений:

$$A_{m(i)} - \lambda \sum_{k=1}^n s_{mk} A_{k(i)} = 0; \quad m = 1, 2, \dots, n, \quad i = 1, 2, \dots, p. \quad (15)$$

3°. Если λ — характеристическое и $f(x) \neq 0$, то для разрешимости неоднородного интегрального уравнения (7) необходимо и достаточно, чтобы правая часть уравнения $f(x)$ удовлетворяла p условиям

$$\sum_{k=1}^n B_{k(i)} f_k = 0, \quad i = 1, 2, \dots, p, \quad p \leq n. \quad (16)$$

Здесь постоянные $B_{k(i)}$ составляют p линейно независимых решений однородной системы алгебраических уравнений, транспонированной к системе (15). В этом случае решение уравнения (7) имеет вид

$$y(x) = y_0(x) + \sum_{i=1}^p C_i y_i(x), \quad (17)$$

где $y_0(x)$ — частное решение неоднородного уравнения (7), а сумма представляет собой общее решение соответствующего однородного уравнения (см. 2°).

В частности, если $f(x) \neq 0$, но все f_k равны нулю, то

$$y(x) = f(x) + \sum_{i=1}^p C_i y_i(x). \quad (18)$$

Пример. Решим интегральное уравнение

$$y(x) - \lambda \int_{-\pi}^{\pi} (x \cos t + t^2 \sin x + \cos x \sin t) y(t) dt = x, \quad -\pi \leq x \leq \pi. \quad (19)$$

Введем обозначения

$$A_1 = \int_{-\pi}^{\pi} y(t) \cos t dt, \quad A_2 = \int_{-\pi}^{\pi} t^2 y(t) dt, \quad A_3 = \int_{-\pi}^{\pi} y(t) \sin t dt, \quad (20)$$

где A_1, A_2, A_3 — неизвестные постоянные. Тогда уравнение (19) примет вид

$$y(x) = A_1 \lambda x + A_2 \lambda \sin x + A_3 \lambda \cos x + x. \quad (21)$$

Подставляя выражение (21) в равенства (20), получим

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_{-\pi}^{\pi} (A_1 \lambda t + A_2 \lambda \sin t + A_3 \lambda \cos t + t) \cos t dt, \\ A_2 &= \int_{-\pi}^{\pi} (A_1 \lambda t + A_2 \lambda \sin t + A_3 \lambda \cos t + t) t^2 dt, \\ A_3 &= \int_{-\pi}^{\pi} (A_1 \lambda t + A_2 \lambda \sin t + A_3 \lambda \cos t + t) \sin t dt. \end{aligned}$$

Вычисляя входящие в эти уравнения интегралы, получим систему алгебраических уравнений для нахождения неизвестных A_1, A_2, A_3 :

$$\begin{aligned} A_1 - \lambda \pi A_3 &= 0, \\ A_2 + 4\lambda \pi A_3 &= 0, \\ -2\lambda \pi A_1 - \lambda \pi A_2 + A_3 &= 2\pi. \end{aligned} \quad (22)$$

Определитель этой системы отличен от нуля:

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -\lambda \pi \\ 0 & 1 & 4\lambda \pi \\ -2\lambda \pi & -\lambda \pi & 1 \end{vmatrix} = 1 + 2\lambda^2 \pi^2 \neq 0.$$

Таким образом, система (22) имеет единственное решение

$$A_1 = \frac{2\lambda \pi^2}{1 + 2\lambda^2 \pi^2}, \quad A_2 = -\frac{8\lambda \pi^2}{1 + 2\lambda^2 \pi^2}, \quad A_3 = \frac{2\pi}{1 + 2\lambda^2 \pi^2}.$$

Подставляя найденные значения A_1, A_2, A_3 в (21), получим решение данного интегрального уравнения в виде

$$y(x) = \frac{2\lambda \pi}{1 + 2\lambda^2 \pi^2} (\lambda \pi x - 4\lambda \pi \sin x + \cos x) + x.$$

● *Литература:* С. Г. Михлин (1959), М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко (1968), И. С. Градштейн, И. М. Рыжик (1975), А. J. Jerry (1985), А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев (1981, 1983, 1986).

11.3. Решение в виде ряда по степеням параметра. Метод последовательных приближений

11.3-1. Итерированные ядра

Пусть имеем интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$y(x) - \lambda \int_a^b K(x, t)y(t) dt = f(x), \quad a \leq x \leq b. \quad (1)$$

Будем искать его решение в виде ряда по степеням параметра λ :

$$y(x) = f(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \psi_n(x). \quad (2)$$

Подставим ряд (2) в уравнение (1). Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях λ , получим рекуррентную систему соотношений для определения функций $\psi_n(x)$:

$$\begin{aligned}\psi_1(x) &= \int_a^b K(x, t) f(t) dt, \\ \psi_2(x) &= \int_a^b K(x, t) \psi_1(t) dt = \int_a^b K_2(x, t) f(t) dt, \\ \psi_3(x) &= \int_a^b K(x, t) \psi_2(t) dt = \int_a^b K_3(x, t) f(t) dt, \quad \dots\end{aligned}$$

Здесь

$$K_n(x, t) = \int_a^b K(x, z) K_{n-1}(z, t) dz, \quad (3)$$

где $n = 2, 3, \dots$, причем $K_1(x, t) \equiv K(x, t)$. Функции $K_n(x, t)$, определяемые по формулам (3), называются *итерированными ядрами*. Для них справедливо соотношение

$$K_n(x, t) = \int_a^b K_m(x, s) K_{n-m}(s, t) ds, \quad (4)$$

где m — любое натуральное число, меньшее n .

Итерированные ядра $K_n(x, t)$ можно непосредственно выразить через данное ядро $K(x, t)$ по формуле

$$K_n(x, t) = \underbrace{\int_a^b \int_a^b \dots \int_a^b}_{n-1} K(x, s_1) K(s_1, s_2) \dots K(s_{n-1}, t) ds_1 ds_2 \dots ds_{n-1}.$$

Все итерированные ядра $K_n(x, t)$, начиная с $K_2(x, t)$, будут непрерывными функциями в квадрате $S = \{a \leq x \leq b, a \leq t \leq b\}$, если начальное ядро $K(x, t)$ квадратично интегрируемо в этом квадрате.

Если данное ядро $K(x, t)$ симметрично, то все итерированные ядра $K_n(x, t)$ тоже симметричны.

11.3-2. Метод последовательных приближений

Результаты п. 11.3-1 могут быть также получены с помощью метода последовательных приближений. Для этого следует использовать рекуррентное соотношение

$$y_n(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t) y_{n-1}(t) dt, \quad n = 1, 2, \dots,$$

в котором нулевое приближение $y_0(x) = f(x)$.

11.3-3. Построение резольвенты

Резольвента интегрального уравнения (1) определяется через итерированные ядра формулой

$$R(x, t; \lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} K_n(x, t), \quad (5)$$

где ряд, стоящий в правой части, называется *рядом Неймана* ядра $K(x, t)$. Он сходится в среднем к единственному квадратично интегрируемому решению уравнения (1), если

$$|\lambda| < \frac{1}{B}, \quad B = \sqrt{\int_a^b \int_a^b K^2(x, t) dx dt}. \quad (6)$$

Если, кроме того,

$$\int_a^b K^2(x, t) dt \leq A, \quad a \leq x \leq b,$$

где A — некоторая постоянная, то ряд Неймана сходится на $[a, b]$ абсолютно и равномерно.

Решение уравнения Фредгольма второго рода (1) выражается формулой

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b R(x, t; \lambda) f(t) dt, \quad a \leq x \leq b. \quad (7)$$

Неравенство (6) является существенным для сходимости ряда (5). Однако решение уравнения (1) может существовать и для значений $|\lambda| > 1/B$.

Замечание 1. Решение уравнения второго рода со слабой особенностью

$$y(x) - \lambda \int_a^b K(x, t)y(t) dt = f(x), \quad a \leq x \leq b,$$

где ядро $K(x, t)$ имеет вид

$$K(x, t) = \frac{L(x, t)}{|x - t|^\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1,$$

а функция $L(x, t)$ — непрерывна в квадрате $S = \{a \leq x \leq b, a \leq t \leq b\}$, можно построить методом последовательных приближений при условии

$$|\lambda| < \frac{1 - \alpha}{2B^*(b - a)^{1-\alpha}}, \quad B^* = \sup |L(x, t)|.$$

Само же уравнение со слабой особенностью можно привести к уравнению Фредгольма вида

$$y(x) - \lambda^n \int_a^b K_n(x, t)y(t) dt = F(x), \quad a \leq x \leq b,$$

$$F(x) = f(x) + \sum_{p=1}^{n-1} \lambda^p \int_a^b K_p(x, t)f(t) dt,$$

где $K_p(x, t)$ ($p = 1, 2, \dots, n$) — p -ое итерированное ядро, причем $K_n(x, t)$ — фредгольмово при $n > \frac{1}{2}(1 - \alpha)^{-1}$ и ограниченное при $n > (1 - \alpha)^{-1}$.

Пример 1. Решим интегральное уравнение

$$y(x) - \lambda \int_0^1 xty(t) dt = f(x), \quad 0 \leq x \leq 1,$$

методом последовательных приближений. Здесь $K(x, t) = xt$, $a = 0$, $b = 1$. Последовательно найдем

$$\begin{aligned} K_1(x, t) &= xt, \quad K_2(x, t) = \int_0^1 (xz)(zt) dz = \frac{xt}{3}, \\ K_3(x, t) &= \frac{1}{3} \int_0^1 (xz)(zt) dz = \frac{xt}{3^2}, \quad \dots, \quad K_n(x, t) = \frac{xt}{3^{n-1}}. \end{aligned}$$

Согласно формуле (5) для резольвенты

$$R(x, t; \lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} K_n(x, t) = xt \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{3}\right)^{n-1} = \frac{3xt}{3 - \lambda},$$

причем $|\lambda| < 3$, и в силу формулы (7) решение данного интегрального уравнения запишется в форме

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_0^1 \frac{3xt}{3 - \lambda} f(t) dt, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad \lambda \neq 3.$$

В частности, при $f(x) = x$ получим

$$y(x) = \frac{3x}{3 - \lambda}, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad \lambda \neq 3.$$

11.3-4. Ортогональные ядра

Для некоторых уравнений Фредгольма ряд Неймана (5) для резольвенты сходится при любых значениях λ . Покажем это.

Пусть имеем два ядра: $K(x, t)$ и $L(x, t)$. Будем называть эти ядра *ортогональными*, если выполняются два условия:

$$\int_a^b K(x, z)L(z, t) dz = 0, \quad \int_a^b L(x, z)K(z, t) dz = 0, \quad (8)$$

при любых допустимых значениях x и t .

Существуют ядра, ортогональные самим себе. Для таких ядер $K_2(x, t) \equiv 0$, где $K_2(x, t)$ — второе итерированное ядро. В этом случае, все последующие итерированные ядра также равны нулю и резольвента совпадает с ядром $K(x, t)$.

Пример 2. Найдем резольвенту ядра $K(x, t) = \sin(x - 2t)$, $0 \leq x \leq 2\pi$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

Имеем

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \sin(x - 2z) \sin(z - 2t) dz &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [\cos(x + 2t - 3z) - \cos(x - 2t - z)] dz = \\ &= \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{3} \sin(x + 2t - 3z) + \sin(x - 2t - z) \right]_{z=0}^{z=2\pi} = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, в этом случае резольвента ядра равна самому ядру:

$$R(x, t; \lambda) \equiv \sin(x - 2t),$$

так что ряд Неймана (5) состоит из одного члена и, очевидно, сходится при любом λ .

Замечание 2. Если ядра $M^{(1)}(x, t)$, $M^{(2)}(x, t)$, \dots , $M^{(n)}(x, t)$ попарно ортогональны, то резольвента, соответствующая их сумме

$$K(x, t) = \sum_{m=1}^n M^{(m)}(x, t),$$

равна сумме резольвент, соответствующих каждому из слагаемых.

⊙ *Литература:* С. Г. Михлин (1959), М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко (1968), J. A. Cochran (1972), В. И. Смирнов (1974), A. J. Jerry (1985).

11.4. Метод определителей Фредгольма

11.4-1. Формула для резольвенты

Решение уравнения Фредгольма второго рода

$$y(x) - \lambda \int_a^b K(x, t) y(t) dt = f(x), \quad a \leq x \leq b, \quad (1)$$

дается формулой

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b R(x, t; \lambda) f(t) dt, \quad a \leq x \leq b, \quad (2)$$

где резольвента $R(x, t; \lambda)$ определяется равенством

$$R(x, t; \lambda) = \frac{D(x, t; \lambda)}{D(\lambda)}, \quad D(\lambda) \neq 0. \quad (3)$$

Здесь $D(x, t; \lambda)$ и $D(\lambda)$ — степенные ряды по λ :

$$D(x, t; \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} A_n(x, t) \lambda^n, \quad D(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} B_n \lambda^n, \quad (4)$$

коэффициенты которых определяются формулами

$$A_0(x, t) = K(x, t),$$

$$A_n(x, t) = \underbrace{\int_a^b \dots \int_a^b}_n \begin{vmatrix} K(x, t) & K(x, t_1) & \dots & K(x, t_n) \\ K(t_1, t) & K(t_1, t_1) & \dots & K(t_1, t_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K(t_n, t) & K(t_n, t_1) & \dots & K(t_n, t_n) \end{vmatrix} dt_1 \dots dt_n, \quad (5)$$

$$B_0 = 1,$$

$$B_n = \underbrace{\int_a^b \dots \int_a^b}_n \begin{vmatrix} K(t_1, t_1) & K(t_1, t_2) & \dots & K(t_1, t_n) \\ K(t_2, t_1) & K(t_2, t_2) & \dots & K(t_2, t_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K(t_n, t_1) & K(t_n, t_2) & \dots & K(t_n, t_n) \end{vmatrix} dt_1 \dots dt_n. \quad (6)$$

Функция $D(x, t; \lambda)$ называется *минором Фредгольма*, а $D(\lambda)$ — *определителем Фредгольма*. Ряды (4) сходятся для всех значений λ и, значит, являются целыми аналитическими функциями от λ . Резольвента $R(x, t; \lambda)$ есть аналитическая функция от λ , кроме тех значений λ , которые являются корнями $D(\lambda)$. Последние совпадают с характеристическими числами уравнения и являются полюсами резольвенты $R(x, t; \lambda)$.

Пример 1. Рассмотрим интегральное уравнение

$$y(x) - \lambda \int_0^1 x e^t y(t) dt = f(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad \lambda \neq 1.$$

Имеем

$$A_0(x, t) = x e^t, \quad A_1(x, t) = \int_0^1 \begin{vmatrix} x e^t & x e^{t_1} \\ t_1 e^t & t_1 e^{t_1} \end{vmatrix} dt_1 = 0, \quad A_2(x, t) = \int_0^1 \int_0^1 \begin{vmatrix} x e^t & x e^{t_1} & x e^{t_2} \\ t_1 e^t & t_1 e^{t_1} & t_1 e^{t_2} \\ t_2 e^t & t_2 e^{t_1} & t_2 e^{t_2} \end{vmatrix} dt_1 dt_2 = 0,$$

так как определители под знаком интеграла равны нулю. Очевидно, что и все последующие $A_n(x, t) = 0$. Находим коэффициенты B_n :

$$B_1 = \int_0^1 K(t_1, t_1) dt_1 = \int_0^1 t_1 e^{t_1} dt_1 = 1, \quad B_2 = \int_0^1 \int_0^1 \begin{vmatrix} t_1 e^{t_1} & t_1 e^{t_2} \\ t_2 e^{t_1} & t_2 e^{t_2} \end{vmatrix} dt_1 dt_2 = 0.$$

Очевидно, что и все последующие $B_n = 0$.

Согласно формулам (4) имеем

$$D(x, t; \lambda) = K(x, t) = x e^t; \quad D(\lambda) = 1 - \lambda.$$

Таким образом,

$$R(x, t; \lambda) = \frac{D(x, t; \lambda)}{D(\lambda)} = \frac{x e^t}{1 - \lambda},$$

и решение уравнения можно записать в форме

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_0^1 \frac{x e^t}{1 - \lambda} f(t) dt, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad \lambda \neq 1.$$

В частности, для $f(x) = e^{-x}$ получаем

$$y(x) = e^{-x} + \frac{\lambda}{1 - \lambda} x, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad \lambda \neq 1.$$

11.4-2. Рекуррентные соотношения

Вычисление по формулам (5) и (6) коэффициентов $A_n(x, t)$ и B_n рядов (4) практически возможно лишь в очень редких случаях, но из этих формул получаются следующие рекуррентные соотношения:

$$A_n(x, t) = B_n K(x, t) - n \int_a^b K(x, s) A_{n-1}(s, t) ds, \quad (7)$$

$$B_n = \int_a^b A_{n-1}(s, s) ds. \quad (8)$$

Пример. Пользуясь формулами (7) и (8), найдем резольвенту ядра $K(x, t) = x - 2t$, где $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq t \leq 1$.

Действительно, $B_0 = 1$, $A_0(x, t) = x - 2t$. По формуле (8), найдем

$$B_1 = \int_0^1 (-s) ds = -\frac{1}{2}.$$

По формуле (7) получим

$$A_1(x, t) = -\frac{x - 2t}{2} - \int_0^1 (x - 2s)(s - 2t) ds = -x - t + 2xt + \frac{2}{3}.$$

Далее будем иметь

$$B_2 = \int_0^1 (-2s + 2s^2 + \frac{2}{3}) ds = \frac{1}{3},$$

$$A_2(x, t) = \frac{x - 2t}{3} - 2 \int_0^1 (x - 2s)(-s - t + 2st + \frac{2}{3}) ds = 0,$$

$$B_3 = B_4 = \dots = 0, \quad A_3(x, t) = A_4(x, t) = \dots = 0.$$

Следовательно,

$$D(\lambda) = 1 + \frac{1}{2} \lambda + \frac{1}{6} \lambda^2; \quad D(x, t; \lambda) = x - 2t + \lambda(x + t - 2xt - \frac{2}{3}).$$

Резольвента данного ядра будет иметь вид

$$R(x, t; \lambda) = \frac{x - 2t + \lambda(x + t - 2xt - \frac{2}{3})}{1 + \frac{1}{2} \lambda + \frac{1}{6} \lambda^2}.$$

⊙ Литература: С. Г. Михлин (1959), М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко (1968), В. И. Смирнов (1974).

11.5. Теоремы и альтернатива Фредгольма

11.5-1. Теоремы Фредгольма

Теорема 1. Уравнение Фредгольма имеет не более счетного множества характеристических чисел, которые могут сгущаться только на бесконечности.

Теорема 2. Если значение λ правильное, то как данное интегральное уравнение, так и союзное с ним уравнение, разрешимо при любом свободном члене и решение каждого из этих уравнений единственно. Соответствующие однородные уравнения имеют только тривиальные решения.

Теорема 3. Если значение λ характеристическое, то однородное интегральное уравнение, так же как и союзное с ним однородное уравнение, имеет нетривиальные решения. Число линейно независимых решений однородного интегрального уравнения конечно и равно числу линейно независимых решений однородного союзного уравнения.

Теорема 4. Для того чтобы неоднородное интегральное уравнение было разрешимо, необходимо и достаточно, чтобы его свободный член $f(x)$ удовлетворял условиям

$$\int_a^b f(x)\psi_k(x) dx = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

где $\psi_k(x)$ — совокупность всех линейно независимых решений соответствующего союзного однородного уравнения.

11.5-2. Альтернатива Фредгольма

Из теорем Фредгольма вытекает так называемая альтернатива Фредгольма, которой чаще всего пользуются при исследовании интегральных уравнений.

Альтернатива Фредгольма. Либо неоднородное уравнение разрешимо, какова бы ни была его правая часть, либо соответствующее однородное уравнение имеет нетривиальные решения.

Первая часть альтернативы имеет место, если данное значение параметра правильное, вторая — если оно характеристическое.

Замечание. Теория Фредгольма справедлива и для интегральных уравнений второго рода со слабой особенностью.

⊙ Литература: С. Г. Михлин (1959), М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко (1968), J. A. Cochran (1972), В. И. Смирнов (1974) A. J. Jerry (1985), D. Porter, D. S. G. Stirling (1990), C. Corduneanu (1991), J. Kondo (1991), W. Hackbusch (1995), R. P. Kanwal (1996).

11.6. Интегральные уравнения Фредгольма второго рода с симметричными ядрами

11.6-1. Характеристические числа и собственные функции

Симметричными интегральными уравнениями называются уравнения, ядра которых симметричны, т. е. $K(x, t) = K(t, x)$.

Каждое симметричное ядро, не равное тождественно нулю, имеет по крайней мере одно характеристическое число.

Совокупность характеристических чисел n -го итерированного ядра при любом n совпадает с совокупностью n -ых степеней характеристических чисел первого ядра.

Собственные функции симметричного ядра, соответствующие различным характеристическим числам, ортогональны, т. е. если

$$\varphi_1(x) = \lambda_1 \int_a^b K(x, t)\varphi_1(t) dt, \quad \varphi_2(x) = \lambda_2 \int_a^b K(x, t)\varphi_2(t) dt, \quad \lambda_1 \neq \lambda_2,$$

то

$$(\varphi_1, \varphi_2) = 0, \quad (\varphi, \psi) \equiv \int_a^b \varphi(x)\psi(x) dx.$$

Характеристические числа симметричного ядра действительны.

Собственные функции можно сделать нормированными: достаточно каждую из них разделить на ее норму. Если некоторому характеристическому числу соответствуют несколько линейно независимых собственных функций, например, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, \dots , $\varphi_n(x)$, то каждая их линейная комбинация также является собственной функцией и эти линейные комбинации могут быть выбраны так, что полученные при этом собственные функции будут ортонормированы.

Действительно, функция

$$\psi_1(x) = \frac{\varphi_1(x)}{\|\varphi_1\|}, \quad \|\varphi_1\| = \sqrt{(\varphi_1, \varphi_1)},$$

имеет норму, равную единице: $\|\psi_1\| = 1$. Образует комбинацию $\alpha\psi_1 + \varphi_2$ и выберем α так, что

$$(\alpha\psi_1 + \varphi_2, \psi_1) = 0,$$

т. е. возьмем

$$\alpha = -\frac{(\varphi_2, \psi_1)}{(\psi_1, \psi_1)} = -(\varphi_2, \psi_1).$$

Функция

$$\psi_2(x) = \frac{\alpha\psi_1 + \varphi_2}{\|\alpha\psi_1 + \varphi_2\|}$$

ортогональна к $\psi_1(x)$ и имеет норму, равную единице. Далее выбирается комбинация $\alpha\psi_1 + \beta\psi_2 + \varphi_3$ и постоянные α и β находятся из условий ортогональности

$$(\alpha\psi_1 + \beta\psi_2 + \varphi_3, \psi_1) = 0, \quad (\alpha\psi_1 + \beta\psi_2 + \varphi_3, \psi_2) = 0.$$

С найденными таким образом коэффициентами α и β функция

$$\psi_3 = \frac{\alpha\psi_1 + \beta\psi_2 + \varphi_3}{\|\alpha\psi_1 + \beta\psi_2 + \varphi_3\|}$$

ортогональна к ψ_1 , ψ_2 и имеет норму, равную единице, и т. д.

Собственные функции, соответствующие разным характеристическим числам, как было отмечено ранее, ортогональны. Отсюда вытекает, что последовательность собственных функций симметричного ядра можно сделать ортонормированной.

В дальнейшем будем считать, что последовательность собственных функций симметричного ядра ортонормирована. Выписывая последовательность характеристических чисел, будем повторять каждое из них столько раз, сколько ему соответствует линейно независимых собственных функций. Тогда можно считать, что каждому характеристическому числу соответствует только одна собственная функция, хотя среди характеристических чисел могут оказаться равные. Пронумеруем характеристические числа в порядке возрастания их абсолютных величин. Таким образом, если

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots \quad (1)$$

есть последовательность характеристических чисел некоторого симметричного ядра, и ей соответствует последовательность собственных функций

$$\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots \quad (2)$$

так что

$$\varphi_n(x) - \lambda_n \int_a^b K(x, t)\varphi_n(t) dt = 0, \quad (3)$$

то

$$\int_a^b \varphi_i(x)\varphi_j(x) dx = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j, \\ 0 & \text{при } i \neq j, \end{cases} \quad (4)$$

и

$$|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \dots \leq |\lambda_n| \leq \dots \quad (5)$$

Если характеристических чисел бесконечно много, то по теореме 1 Фредгольма они сгущаются только на бесконечности и потому $\lambda_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$.

Совокупность всех характеристических чисел и соответствующих им ортонормированных собственных функций симметричного ядра называются *системой характеристических чисел и собственных функций* данного ядра. Система собственных функций называется *неполной*, если существует отличная от нуля квадратично интегрируемая функция, ортогональная ко всем функциям системы. В противном случае система собственных функций называется *полной*.

11.6-2. Билинейный ряд

Пусть ядро $K(x, t)$ допускает разложение в равномерно сходящийся ряд по ортонормированной системе своих собственных функций

$$K(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(x) \varphi_k(t) \quad (6)$$

для каждого фиксированного значения x в случае непрерывного ядра или почти всех x в случае квадратично интегрируемого ядра.

Тогда будем иметь

$$a_k(x) = \int_a^b K(x, t) \varphi_k(t) dt = \frac{\varphi_k(x)}{\lambda_k}, \quad (7)$$

и, следовательно,

$$K(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(x) \varphi_k(t)}{\lambda_k}. \quad (8)$$

Обратно, если ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(x) \varphi_k(t)}{\lambda_k} \quad (9)$$

сходится равномерно, то

$$K(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(x) \varphi_k(t)}{\lambda_k}.$$

Имеет место следующее утверждение: билинейный ряд (9) сходится в среднем к ядру $K(x, t)$.

Если симметричное ядро $K(x, t)$ имеет лишь конечное число характеристических чисел, то оно вырожденное, так как в этом случае

$$K(x, t) = \sum_{k=1}^n \frac{\varphi_k(x) \varphi_k(t)}{\lambda_k}. \quad (10)$$

Ядро $K(x, t)$ называется *положительно определенным*, если для всех функций $\varphi(x)$, отличных от тождественного нуля,

$$\int_a^b \int_a^b K(x, t) \varphi(x) \varphi(t) dx dt > 0,$$

и лишь для $\varphi(x) \equiv 0$ указанный выше квадратичский функционал равен нулю. Такое ядро имеет только положительные характеристические числа. Аналогично определяется *отрицательно определенное ядро*.

Всякое симметричное непрерывное положительно определенное (или отрицательно определенное) ядро разлагается по собственным функциям в билинейный ряд, абсолютно и равномерно сходящийся относительно переменных x, t .

Утверждение остается верным, если допустить, что ядро имеет конечное число отрицательных (соответственно положительных) характеристических чисел.

Если ядро уравнения $K(x, t)$ симметрично, непрерывно в $S = \{a \leq x \leq b, a \leq t \leq b\}$ и имеет в квадрате S равномерно ограниченные частные производные, то оно разлагается по собственным функциям в равномерно сходящийся билинейный ряд.

11.6-3. Теорема Гильберта–Шмидта

Если функцию $f(x)$ можно представить в виде

$$f(x) = \int_a^b K(x, t) g(t) dt, \quad (11)$$

где $K(x, t)$ — квадратично интегрируемое ядро, $g(t)$ — некоторая квадратично интегрируемая функция, то $f(x)$ может быть представлена своим рядом Фурье относительно ортонормированной системы собственных функций ядра $K(x, t)$:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(x), \quad (12)$$

где

$$a_k = \int_a^b f(x)\varphi_k(x) dx, \quad k = 1, 2, \dots$$

Если, кроме того,

$$\int_a^b K^2(x, t) dt \leq A < \infty, \quad (13)$$

то ряд (12) сходится абсолютно и равномерно для каждой функции $f(x)$ вида (11).

Замечание 1. В теореме Гильберта–Шмидта полнота системы собственных функций не предполагается.

11.6-4. Билинейные ряды итерированных ядер

По определению итерированных ядер

$$K_m(x, t) = \int_a^b K(x, z)K_{m-1}(z, t) dz, \quad m = 2, 3, \dots \quad (14)$$

Коэффициенты Фурье $a_k(t)$ ядра $K_m(x, t)$, рассматриваемого как функция x , относительно ортонормированной системы собственных функций ядра $K(x, t)$ равны

$$a_k(t) = \int_a^b K_m(x, t)\varphi_k(x) dx = \frac{\varphi_k(t)}{\lambda_k^m}. \quad (15)$$

Применение теоремы Гильберта–Шмидта к (14) дает

$$K_m(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(x)\varphi_k(t)}{\lambda_k^m}, \quad m = 2, 3, \dots \quad (16)$$

В формуле (16) сумма ряда понимается как предел в среднем. Если же дополнительно выполняется неравенство (13), то в формуле (16) ряд сходится равномерно.

11.6-5. Решение неоднородного уравнения

Представим интегральное уравнение

$$y(x) - \lambda \int_a^b K(x, t)y(t) dt = f(x), \quad a \leq x \leq b, \quad (17)$$

где значение λ правильное, в виде

$$y(x) - f(x) = \lambda \int_a^b K(x, t)y(t) dt \quad (18)$$

и применим теорему Гильберта–Шмидта к функции $y(x) - f(x)$:

$$y(x) - f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \varphi_k(x),$$

$$A_k = \int_a^b [y(x) - f(x)]\varphi_k(x) dx = \int_a^b y(x)\varphi_k(x) dx - \int_a^b f(x)\varphi_k(x) dx = y_k - f_k.$$

Тогда с учетом разложения (8) будем иметь

$$\lambda \int_a^b K(x, t)y(t) dt = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{y_k}{\lambda_k} \varphi_k(x)$$

и, таким образом,

$$\lambda \frac{y_k}{\lambda_k} = y_k - f_k, \quad y_k = \frac{\lambda_k f_k}{\lambda_k - \lambda}, \quad A_k = \frac{\lambda f_k}{\lambda_k - \lambda}. \quad (19)$$

Следовательно,

$$y(x) = f(x) + \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k}{\lambda_k - \lambda} \varphi_k(x). \quad (20)$$

Если же значение λ характеристическое, т. е.

$$\lambda = \lambda_p = \lambda_{p+1} = \dots = \lambda_q, \quad (21)$$

то при $k \neq p, p+1, \dots, q$ члены (20) сохраняют свой вид. При $k = p, p+1, \dots, q$ из формулы (19) следует $f_k = A_k(\lambda - \lambda_k)/\lambda$ и в силу (21) $f_p = f_{p+1} = \dots = f_q = 0$. Последнее означает, что

$$\int_a^b f(x) \varphi_k(x) dx = 0$$

при $k = p, p+1, \dots, q$, т. е. свободный член уравнения должен быть ортогональным к собственным функциям, соответствующим характеристическому числу λ .

Решения уравнения (17) в этом случае имеют вид

$$y(x) = f(x) + \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k}{\lambda_k - \lambda} \varphi_k(x) + \sum_{k=p}^q C_k \varphi_k(x), \quad (22)$$

где в первой из сумм (22) должны быть опущены члены при $k = p, p+1, \dots, q$, для которых одновременно обращаются в нуль f_k и $\lambda - \lambda_k$. Коэффициенты во второй сумме C_k — произвольные постоянные.

Замечание 2. Аналогично проделанному выше можно на основании билинейного разложения (8) и теоремы Гильберта–Шмидта построить решение симметричного интегрального уравнения Фредгольма первого рода

$$\int_a^b K(x, t) y(t) dt = f(x), \quad a \leq x \leq b,$$

в следующей форме:

$$y(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \lambda_k \varphi_k(x),$$

причем необходимыми и достаточными условиями существования и единственности такого решения из $L_2(a, b)$ являются полнота системы собственных функций $\varphi_k(x)$ ядра $K(x, t)$ и сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} f_k^2 \lambda_k^2$, где λ_k — соответствующие характеристические числа.

Следует отметить, что проверка последнего условия для конкретных уравнений затруднительна. Обычно при решении уравнений Фредгольма первого рода пользуются методами, изложенными в главе 10.

11.6-6. Альтернатива Фредгольма для симметричных уравнений

Полученные результаты можно объединить в следующей альтернативной форме.

Симметричное интегральное уравнение

$$y(x) - \lambda \int_a^b K(x, t) y(t) dt = f(x), \quad a \leq x \leq b, \quad (23)$$

при заданном λ либо имеет для всякой произвольной функции $f(x) \in L^2(a, b)$ одно и только одно квадратично интегрируемое решение, (в частности, $y = 0$ для $f = 0$), либо соответствующее однородное уравнение имеет конечное число r линейно независимых решений $Y_1(x), Y_2(x), \dots, Y_r(x)$, $r > 0$.

Во втором случае неоднородное уравнение имеет решение тогда и только тогда, когда заданная функция $f(x)$ ортогональна всем функциям $Y_1(x), Y_2(x), \dots, Y_r(x)$ на отрезке $[a, b]$. При этом решение определяется с точностью до аддитивной линейной комбинации $A_1 Y_1(x) + A_2 Y_2(x) + \dots + A_r Y_r(x)$, где A_i ($i = 1, 2, \dots, r$) — произвольные постоянные.

11.6-7. Резольвента симметричного ядра

Решение уравнения Фредгольма второго рода (23) можно записать в виде

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b R(x, t; \lambda) f(t) dt, \quad (24)$$

где резольвента $R(x, t; \lambda)$ имеет вид

$$R(x, t; \lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(x)\varphi_k(t)}{\lambda_k - \lambda}. \quad (25)$$

Здесь совокупности $\varphi_k(x)$ и λ_k составляют системы собственных функций и характеристических чисел уравнения (23). Из формулы (25) вытекает, что резольвента симметричного ядра имеет только простые полюсы.

11.6-8. Экстремальные свойства характеристических чисел

Введем обозначения

$$(u, w) = \int_a^b u(x)w(x) dx, \quad \|u\|^2 = (u, u),$$

$$(Ku, u) = \int_a^b \int_a^b K(x, t)u(x)u(t) dx dt,$$

где (u, w) — скалярное произведение функций $u(x)$ и $w(x)$, $\|u\|$ — норма функции $u(x)$, а (Ku, u) — квадратичная форма порожденная ядром $K(x, t)$.

Пусть λ_1 — наименьшее по абсолютной величине характеристическое число симметричного ядра $K(x, t)$ и пусть $y_1(x)$ — соответствующая этому числу собственная функция. Тогда

$$\frac{1}{|\lambda_1|} = \max_{y \neq 0} \frac{|(Ky, y)|}{\|y\|^2}. \quad (26)$$

Максимум правой части достигается при $y = y_1(x)$.

Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ — первые n характеристических чисел симметричного ядра $K(x, t)$ (в порядке возрастания их абсолютных величин), а $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ — соответствующие им ортонормированные собственные функции. Тогда для характеристического числа λ_{n+1} , следующего за λ_n , справедлива формула

$$\frac{1}{|\lambda_{n+1}|} = \max \frac{|(Ky, y)|}{\|y\|^2}, \quad (27)$$

причем максимум берется на множестве функций y , отличных от тождественного нуля и ортогональных к собственным функциям y_1, y_2, \dots, y_n :

$$(y, y_j) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (28)$$

Максимум правой части (27) достигается при $y = y_{n+1}$, где $y_{n+1} = y_{n+1}(x)$ — собственная функция, соответствующая характеристическому числу λ_{n+1} и ортогональная к y_1, y_2, \dots, y_n .

Замечание 3. Для положительно определенного ядра $K(x, t)$ знак модуля в соотношениях (26) и (27) может быть опущен.

11.6-9. Интегральные уравнения, приводимые к симметричным

Уравнение вида

$$y(x) - \lambda \int_a^b K(x, t)\rho(t)y(t) dt = f(x), \quad (29)$$

где $K(x, t)$ — симметричное ядро и непрерывная функция $\rho(t) > 0$ на $[a, b]$, можно привести к симметричному. Действительно, умножая обе части (29) на $\sqrt{\rho(x)}$ и вводя новую искомую функцию $z(x) = \sqrt{\rho(x)}y(x)$, приходим к интегральному уравнению

$$z(x) - \lambda \int_a^b L(x, t)z(t) dt = f(x)\sqrt{\rho(x)}, \quad L(x, t) = K(x, t)\sqrt{\rho(x)\rho(t)}, \quad (30)$$

где $L(x, t)$ — симметричное ядро.

11.6-10. Кососимметричное интегральное уравнение

Кососимметричным интегральным уравнением называется уравнение, ядро которого кососимметрично, т. е. в уравнении

$$y(x) - \lambda \int_a^b K(x, t)y(t) dt = f(x) \quad (31)$$

ядро $K(x, t)$ обладает следующим свойством:

$$K(t, x) = -K(x, t). \quad (32)$$

Уравнение (31) с кососимметричным ядром (32) имеет по крайней мере одно характеристическое число и все его характеристические числа — чисто мнимые.

● *Литература:* Э. Гурса (1934), Р. Курант, Д. Гильберт (1951), С. Г. Михлин (1959), Ф. Трикоми (1960), М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко (1968), J. A. Cochran (1972), В. И. Смирнов (1974), А. J. Jerry (1985), D. Porter, D. S. G. Stirling (1990), C. Corduneanu (1991), J. Kondo (1991), W. Hackbusch (1995), R. P. Kanwal (1996).

11.7. Операторный метод решения интегральных уравнений второго рода

11.7-1. Простейшая схема

Рассмотрим линейное уравнение второго рода специального вида

$$y(x) - \lambda \mathbf{L}[y] = f(x), \quad (1)$$

где \mathbf{L} — некоторый линейный (интегральный) оператор, удовлетворяющий условию $\mathbf{L}^2 = k$, $k = \text{const}$.

Поддействуем оператором \mathbf{L} на обе части уравнения (1). В результате получим

$$\mathbf{L}[y] - k\lambda y(x) = \mathbf{L}[f(x)]. \quad (2)$$

Исключая из (1) и (2) слагаемое $\mathbf{L}[y]$, находим решение:

$$y(x) = \frac{1}{1 - k\lambda^2} \{f(x) + \lambda \mathbf{L}[f]\}. \quad (3)$$

Замечание. В разд. 9.4 описаны различные обобщения указанного метода.

11.7-2. Решение уравнений второго рода на полуоси

1°. Рассмотрим уравнение

$$y(x) - \lambda \int_0^\infty \cos(xt)y(t) dt = f(x). \quad (4)$$

Оператор \mathbf{L} в данном случае с точностью до постоянного множителя совпадает с косинус-преобразованием Фурье:

$$\mathbf{L}[y] = \int_0^\infty \cos(xt)y(t) dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \mathfrak{F}_c[y] \quad (5)$$

и действует по правилу $\mathbf{L}^2 = k$, где $k = \frac{\pi}{2}$ (см. п. 7.5-1).

Решение получим по формуле (3) с учетом равенства (5):

$$y(x) = \frac{2}{2 - \pi\lambda^2} \left[f(x) + \lambda \int_0^\infty \cos(xt)f(t) dt \right], \quad \lambda \neq \pm \sqrt{\frac{2}{\pi}}. \quad (6)$$

2°. Рассмотрим уравнение

$$y(x) - \lambda \int_0^\infty t J_\nu(xt)y(t) dt = f(x), \quad (7)$$

где $J_\nu(x)$ — функция Бесселя, $\text{Re } \nu > -\frac{1}{2}$.

Оператор \mathbf{L} здесь с точностью до постоянного множителя совпадает с преобразованием Ханкеля:

$$\mathbf{L}[y] = \int_0^\infty t J_\nu(xt)y(t) dt \quad (8)$$

и действует по правилу $\mathbf{L}^2 = 1$ (см. п. 7.6-1).

Решение получим по формуле (3) при $k = 1$ с учетом равенства (8):

$$y(x) = \frac{1}{1 - \lambda^2} \left[f(x) + \lambda \int_0^\infty t J_\nu(xt)f(t) dt \right], \quad \lambda \neq \pm 1. \quad (9)$$

● *Литература:* А. Д. Полянин, А. В. Манжиров (1998), А. В. Манжиров, А. Д. Полянин (1999, 2000).

11.8. Метод интегральных преобразований и метод модельных решений

11.8-1. Уравнение с разностным ядром на всей оси

Рассмотрим интегральное уравнение типа свертки второго рода с одним ядром

$$y(x) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} K(x-t)y(t) dt = f(x), \quad -\infty < x < \infty, \quad (1)$$

где $f(x)$ и $K(x)$ — известные правая часть и ядро интегрального уравнения, а $y(x)$ — искомая функция. Применим к уравнению (1) альтернативное преобразование Фурье. Тогда с учетом теоремы о свертке (см. п. 7.4-4)

$$\mathcal{Y}(u)[1 + \mathcal{K}(u)] = \mathcal{F}(u). \quad (2)$$

Таким образом, с помощью преобразования Фурье решение исходного интегрального уравнения (1) приводится к решению алгебраического уравнения (2) для изображения искомого решения. Решение уравнения (2) имеет вид

$$\mathcal{Y}(u) = \frac{\mathcal{F}(u)}{1 + \mathcal{K}(u)}. \quad (3)$$

Формула (3) выражает изображение решения исходного интегрального уравнения через изображения заданных функций — ядра и правой части уравнения. Само решение может быть получено при помощи обратного преобразования Фурье:

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{Y}(u)e^{-iux} du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathcal{F}(u)}{1 + \mathcal{K}(u)} e^{-iux} du. \quad (4)$$

Формула (4) фактически решает задачу, однако она не всегда удобна для использования, так как требует вычисления изображения $\mathcal{F}(u)$ для каждой правой части $f(x)$. Во многих случаях более удобным оказывается представление решения неоднородного интегрального уравнения через резольвенту исходного уравнения. Чтобы получить требуемое представление, заметим, что формула (3) может быть преобразована к виду

$$\mathcal{Y}(u) = [1 - \mathcal{R}(u)]\mathcal{F}(u), \quad \mathcal{R}(u) = \frac{\mathcal{K}(u)}{1 + \mathcal{K}(u)}. \quad (5)$$

На основании (5) при помощи обратного преобразования Фурье и теоремы о свертке (для изображений) получим

$$y(x) = f(x) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} R(x-t)f(t) dt, \quad (6)$$

где резольвента $R(x-t)$ интегрального уравнения (1) задается соотношением

$$R(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathcal{K}(u)}{1 + \mathcal{K}(u)} e^{-iux} du. \quad (7)$$

Таким образом, для определения решения исходного интегрального уравнения (1) достаточно найти функцию $R(x)$ по формуле (7).

Функция $R(x)$ представляет собой решение уравнения (1) при специальном виде функции $f(x)$. Действительно, из формул (3) и (5) следует, что при $\mathcal{Y}(u) = \mathcal{R}(u)$ функция $\mathcal{F}(u)$ равна $\mathcal{K}(u)$. Это означает, что решением уравнения (1) при $f(x) \equiv K(x)$ является функция $y(x) \equiv R(x)$, т. е. резольвента уравнения (1) удовлетворяет интегральному уравнению

$$R(x) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} K(x-t)R(t) dt = K(x), \quad -\infty < x < \infty. \quad (8)$$

Отметим, что для вычисления прямых и обратных преобразований Фурье можно воспользоваться соответствующими таблицами из книг Г. Бейтмена, А. Эрдейи (1969), В. А. Диткина, А. П. Прудникова (1965, 1974).

Пример. Решим интегральное уравнение

$$y(x) - \lambda \int_{-\infty}^{\infty} \exp(\alpha|x-t|)y(t) dt = f(x), \quad -\infty < x < \infty, \quad (9)$$

которое вытекает из уравнения (1) при конкретном ядре $K(x-t)$, задаваемом выражением

$$K(x) = -\sqrt{2\pi} \lambda e^{-\alpha|x|}, \quad \alpha > 0. \quad (10)$$

Найдем функцию $R(x)$, для чего вычислим

$$\mathcal{K}(u) = -\int_{-\infty}^{\infty} \lambda e^{-\alpha|x|} e^{iux} dx = -\frac{2\alpha\lambda}{u^2 + \alpha^2}. \quad (11)$$

Тогда по формуле (5)

$$\mathcal{R}(u) = \frac{\mathcal{K}(u)}{1 + \mathcal{K}(u)} = -\frac{2\alpha\lambda}{u^2 + \alpha^2 - 2\alpha\lambda}, \quad (12)$$

откуда

$$R(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{R}(u) e^{-iux} du = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha\lambda}{u^2 + \alpha^2 - 2\alpha\lambda} e^{-iux} du. \quad (13)$$

Положим, что $\lambda < \frac{1}{2}\alpha$. Тогда интеграл (13) имеет смысл и может быть вычислен с помощью теории вычетов путем применения леммы Жордана (см. пп. 7.1-4 и 7.1-5). После некоторых выкладок найдем

$$R(x) = -\sqrt{2\pi} \frac{\alpha\lambda}{\sqrt{\alpha^2 - 2\alpha\lambda}} \exp(-|x|\sqrt{\alpha^2 - 2\alpha\lambda}) \quad (14)$$

и, окончательно, в соответствии с (6) получим

$$y(x) = f(x) + \frac{\alpha\lambda}{\sqrt{\alpha^2 - 2\alpha\lambda}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-|x-t|\sqrt{\alpha^2 - 2\alpha\lambda}) f(t) dt, \quad -\infty < x < \infty. \quad (15)$$

11.8-2. Уравнение с ядром $K(x, t) = t^{-1}Q(x/t)$ на полуоси

Рассмотрим здесь уравнение на полуоси

$$y(x) - \int_0^{\infty} \frac{1}{t} Q\left(\frac{x}{t}\right) y(t) dt = f(x). \quad (16)$$

Для решения будем использовать преобразование Меллина, которое определяется следующим образом (см. также разд. 7.3):

$$\hat{f}(s) = \mathfrak{M}\{f(x), s\} \equiv \int_0^{\infty} f(x) x^{s-1} dx, \quad (17)$$

где $s = \sigma + i\tau$ — комплексная переменная ($\sigma_1 < \sigma < \sigma_2$), $\hat{f}(s)$ — изображение функции $f(x)$. Далее для краткости преобразование Меллина будем обозначать $\mathfrak{M}\{f(x)\} \equiv \mathfrak{M}\{f(x), s\}$.

По известному изображению $\hat{f}(s)$ оригинал находится с помощью обратного преобразования Меллина

$$f(x) = \mathfrak{M}^{-1}\{\hat{f}(s)\} \equiv \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \hat{f}(s) x^{-s} ds, \quad \sigma_1 < c < \sigma_2, \quad (18)$$

где путь интегрирования расположен параллельно мнимой оси комплексной плоскости s , а интеграл понимается в смысле главного значения.

Применяя преобразование Меллина к уравнению (16) и учитывая, что интеграл с таким ядром преобразуется в произведение по правилу (см. п. 7.3-2)

$$\mathfrak{M}\left\{\int_0^{\infty} \frac{1}{t} Q\left(\frac{x}{t}\right) y(t) dt\right\} = \hat{Q}(s) \hat{y}(s),$$

приходим к уравнению для изображения искомой величины $\hat{y}(s)$:

$$\hat{y}(s) - \hat{Q}(s) \hat{y}(s) = \hat{f}(s).$$

Решение этого уравнения определяется формулой

$$\hat{y}(s) = \frac{\hat{f}(s)}{1 - \hat{Q}(s)}. \quad (19)$$

Применяя к (19) обратное преобразование Меллина (18), получим решение исходного интегрального уравнения

$$y(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\hat{f}(s)}{1 - \hat{Q}(s)} x^{-s} ds. \quad (20)$$

Это решение можно записать также с помощью резольвенты в виде

$$y(x) = f(x) + \int_0^\infty \frac{1}{t} N\left(\frac{x}{t}\right) f(t) dt, \quad (21)$$

где приняты обозначения

$$N(x) = \mathfrak{M}^{-1}\{\hat{N}(s)\}, \quad \hat{N}(s) = \frac{\hat{Q}(s)}{1 - \hat{Q}(s)}. \quad (22)$$

При использовании указанного аналитического метода решения могут возникнуть технические трудности: 1) при получении изображения для заданного ядра $K(x)$ и 2) при нахождении оригинала решения по его изображению $\hat{y}(s)$. Для вычисления соответствующих интегралов применяют таблицы прямых и обратных преобразований Меллина [см. Г. Бейтмен, А. Эрдейи (1969), В. А. Диткин, А. П. Прудников (1974)]. Во многих случаях сначала используют связь между преобразованием Меллина и преобразованиями Фурье и Лапласа:

$$\mathfrak{M}\{f(x), s\} = \mathfrak{F}\{f(e^x), is\} = \mathfrak{L}\{f(e^x), -s\} + \mathfrak{L}\{f(e^{-x}), s\}, \quad (23)$$

а затем применяют таблицы прямых и обратных преобразований Фурье и Лапласа.

Замечание 1. Уравнение

$$y(x) - \int_0^\infty H\left(\frac{x}{t}\right) x^\alpha t^{-\alpha-1} y(t) dt = f(x) \quad (24)$$

можно записать в форме (16), если обозначить $K(z) = z^\alpha H(z)$.

11.8-3. Уравнение с ядром $K(x, t) = t^\beta Q(xt)$ на полуоси

Рассмотрим уравнение на полуоси

$$y(x) - \int_0^\infty t^\beta Q(xt)y(t) dt = f(x). \quad (25)$$

Для решения будем использовать преобразование Меллина. Умножая обе части (25) на x^{s-1} и интегрируя по x от нуля до бесконечности, получим

$$\int_0^\infty y(x)x^{s-1} dx - \int_0^\infty y(t)t^\beta dt \int_0^\infty Q(xt)x^{s-1} dx = \int_0^\infty f(x)x^{s-1} dx. \quad (26)$$

Сделаем замену $z = xt$. В результате получим

$$\hat{y}(s) - \hat{Q}(s) \int_0^\infty y(t)t^{\beta-s} dt = \hat{f}(s). \quad (27)$$

Учитывая равенство

$$\int_0^\infty y(t)t^{\beta-s} dt = \hat{y}(1 + \beta - s),$$

перепишем уравнение (27) в следующем виде:

$$\hat{y}(s) - \hat{Q}(s)\hat{y}(1 + \beta - s) = \hat{f}(s). \quad (28)$$

Заменяя s в соотношении (28) на $1 + \beta - s$, имеем

$$\hat{y}(1 + \beta - s) - \hat{Q}(1 + \beta - s)\hat{y}(s) = \hat{f}(1 + \beta - s). \quad (29)$$

Исключая из равенств величину $\hat{y}(1 + \beta - s)$ и разрешая полученное уравнение относительно $\hat{y}(s)$, находим изображение искомого решения

$$\hat{y}(s) = \frac{\hat{f}(s) + \hat{Q}(s)\hat{f}(1 + \beta - s)}{1 - \hat{Q}(s)\hat{Q}(1 + \beta - s)}. \quad (30)$$

По формуле обращения Меллина получим решение интегрального уравнения (25) в виде

$$y(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\hat{f}(s) + \hat{Q}(s)\hat{f}(1 + \beta - s)}{1 - \hat{Q}(s)\hat{Q}(1 + \beta - s)} x^{-s} ds. \quad (31)$$

Замечание 2. Уравнение

$$y(x) - \int_0^\infty H(xt)x^p t^q y(t) dt = f(x)$$

можно записать в форме (25), если обозначить $Q(z) = z^p H(z)$, $\beta = q - p$.

11.8-4. Метод модельных решений для уравнений на всей оси

Проиллюстрируем возможности обобщенной модификации метода модельных решений (см. разд. 9.6) на примере уравнения

$$Ay(x) + \int_{-\infty}^{\infty} Q(x+t)e^{\beta t}y(t)dt = f(x), \quad (32)$$

где $Q = Q(z)$, $f(x)$ — произвольные функции, A, β — произвольные постоянные, удовлетворяющие некоторым ограничениям.

Для наглядности вместо исходного уравнения (32) будем писать

$$\mathbf{L}[y(x)] = f(x). \quad (33)$$

В качестве пробного решения возьмем экспоненту

$$y_0 = e^{px}. \quad (34)$$

Подставляя (34) в левую часть уравнения (33), после некоторых преобразований получим

$$\mathbf{L}[e^{px}] = Ae^{px} + q(p)e^{-(p+\beta)x}, \quad \text{где } q(p) = \int_{-\infty}^{\infty} Q(z)e^{(p+\beta)z}dz. \quad (35)$$

Правую часть (35) можно рассматривать как функциональное уравнение относительно ядра обратного преобразования Лапласа e^{px} . Для его решения заменим p в (35) на $-p - \beta$. В результате получим

$$\mathbf{L}[e^{-(p+\beta)x}] = Ae^{-(p+\beta)x} + q(-p-\beta)e^{px}. \quad (36)$$

Умножим обе части равенства (35) на A , а обе части равенства (36) на $-q(p)$ и сложим почленно полученные выражения. В результате имеем

$$\mathbf{L}[Ae^{px} - q(p)e^{-(p+\beta)x}] = [A^2 - q(p)q(-p-\beta)]e^{px}. \quad (37)$$

Поделив обе части (37) на постоянную $A^2 - q(p)q(-p-\beta)$, получим исходное модельное решение

$$Y(x, p) = \frac{Ae^{px} - q(p)e^{-(p+\beta)x}}{A^2 - q(p)q(-p-\beta)}, \quad \mathbf{L}[Y(x, p)] = e^{px}. \quad (38)$$

Здесь $-\infty < x < \infty$, поэтому следует положить $p = iu$ и воспользоваться формулами из п. 9.6-3. Тогда решение уравнения (32) для произвольной функции $f(x)$ можно записать в виде

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} Y(x, iu)\tilde{f}(u)du, \quad \tilde{f}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iux}dx. \quad (39)$$

● *Литература:* П. П. Забрейко, А. И. Кошелев и др. (1968), М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко (1968), В. И. Смирнов (1974), Ф. Д. Гахов, Ю. И. Черский (1978), А. Д. Полянин, А. В. Манжиров (1997), А. Д. Polyanin, А. V. Manzhirrov (1998), А. В. Манжиров, А. Д. Полянин (1999, 2000).

11.9. Метод Карлемана для интегральных уравнений типа свертки второго рода

11.9-1. Уравнение Винера–Хопфа второго рода

В приложениях часто встречаются уравнения типа свертки второго рода вида*

$$y(x) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} K(x-t)y(t)dt = f(x), \quad 0 < x < \infty, \quad (1)$$

где ядро $K(x)$ определено на всей действительной оси.

* Перед чтением этого раздела рекомендуется ознакомиться с разд. 10.4 и 10.5.

Доопределим (1) на отрицательной полуоси путем введения односторонних функций

$$y_+(x) = \begin{cases} y(x) & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x < 0, \end{cases} \quad f_+(x) = \begin{cases} f(x) & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x < 0, \end{cases} \quad y_-(x) = 0 \text{ при } x > 0.$$

Тогда получим уравнение

$$y_+(x) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} K(x-t)y_+(t) dt = y_-(x) + f_+(x), \quad -\infty < x < \infty, \quad (2)$$

которое совпадает с (1) при $x > 0$.

Вспомогательная функция $y_-(x)$ введена для того, чтобы доопределить левую часть уравнения (2) при $x < 0$. Заметим, что $y_-(x)$ в области $x < 0$ неизвестна и находится в процессе решения задачи.

Переходя в равенстве (2) к интегралам Фурье (см. пп. 7.4-3, 10.4-1, 10.4-2), получим задачу Римана в форме

$$\mathcal{Y}^+(u) = \frac{\mathcal{Y}^-(u)}{1 + \mathcal{K}(u)} + \frac{\mathcal{F}^+(u)}{1 + \mathcal{K}(u)}, \quad -\infty < u < \infty. \quad (3)$$

1°. Предположим, что выполнено условие нормальности, т. е.

$$1 + \mathcal{K}(u) \neq 0,$$

и запишем задачу Римана в ее обычной форме

$$\mathcal{Y}^+(u) = \mathcal{D}(u)\mathcal{Y}^-(u) + \mathcal{H}(u), \quad -\infty < u < \infty, \quad (4)$$

где

$$\mathcal{D}(u) = \frac{1}{1 + \mathcal{K}(u)}, \quad \mathcal{H}(u) = \frac{\mathcal{F}(u)}{1 + \mathcal{K}(u)}. \quad (5)$$

Задача Римана (4) равносильна уравнению (1): они одновременно разрешимы или неразрешимы, имеют в общих решениях одинаковое число произвольных постоянных. Если индекс задачи Римана

$$\nu = \text{Ind} \frac{1}{1 + \mathcal{K}(u)}, \quad (6)$$

который иногда называют *индексом уравнения Винера-Хопфа второго рода* положителен, то однородное уравнение (1) ($f(x) \equiv 0$) имеет ровно ν линейно независимых решений, а неоднородное уравнение безусловно разрешимо, и его решение зависит от ν произвольных комплексных постоянных.

В случае $\nu \leq 0$ однородное уравнение не имеет отличных от нуля решений. Неоднородное уравнение при $\nu = 0$ безусловно разрешимо, причем решение единственно. Когда индекс ν отрицателен, условия

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathcal{F}(u) du}{\mathcal{X}^+(u)[1 + \mathcal{K}(u)](u+i)^k} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, -\nu, \quad (7)$$

необходимы и достаточны для разрешимости неоднородного уравнения (см. п. 10.4-4).

Во всех случаях, когда решение уравнения (1) существует, его можно найти по формуле

$$y(x) = y_+(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{Y}^+(u) e^{-iux} du, \quad x > 0, \quad (8)$$

где $\mathcal{Y}^+(u)$ — построенное по схеме из п. 10.4-4 (см. рис. 3) решение задачи Римана (4) и (5).

Отметим, что в формуле (8) явно присутствует только функция $\mathcal{Y}^+(u)$, которая связана с $\mathcal{Y}^-(u)$ соотношением (4).

2°. Исследуем теперь исключительный случай интегрального уравнения (1), когда нарушается условие нормальности для задачи Римана (3) (см. пп. 10.4-6 и 10.4-7). В этом случае отсутствуют нули коэффициента $D(u) = [1 + \mathcal{K}(u)]^{-1}$ и порядок его на бесконечности $\eta = 0$. Общее решение краевой задачи (3) можно получить по формулам (63) из п. 10.4-7 при $\alpha_i = 0$. Решение исходного интегрального уравнения (1) определится из решения краевой задачи по формуле (8).

На рис. 4 изображена схема решения интегральных уравнений Винера-Хопфа (см. также п. 10.5-1).

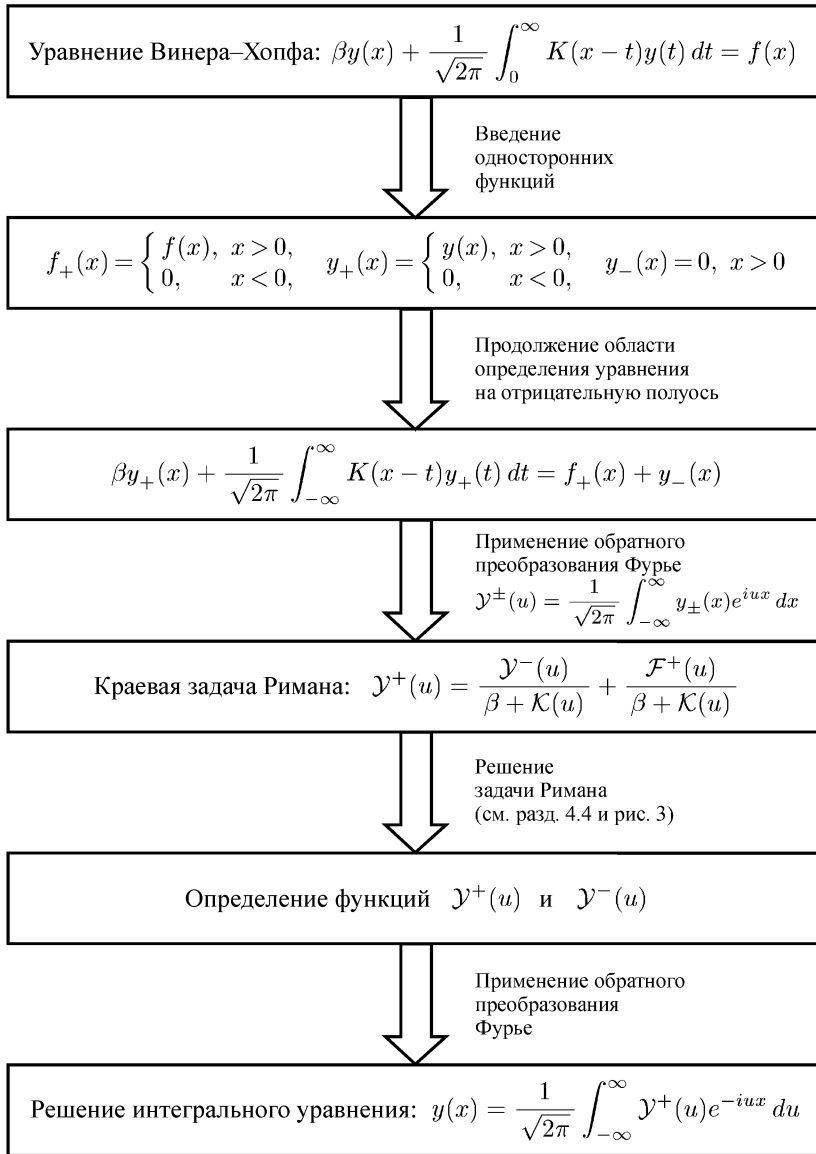


Рис. 4. Схема решения интегральных уравнений Винера–Хопфа. При $\beta = 0$ имеем уравнение первого рода, при $\beta = 1$ — уравнение второго рода.

Пример. Рассмотрим уравнение

$$y(x) + \int_0^\infty (a + b|x-t|)e^{-|x-t|}y(t) dt = f(x), \quad x > 0, \quad (9)$$

где постоянные a и b вещественны и $b \neq 0$. Ядро $K(x-t)$ в уравнении (1) дается выражением

$$K(x) = \sqrt{2\pi} (a + b|x|)e^{-|x|}.$$

Найдем изображение ядра:

$$\mathcal{K}(u) = \int_{-\infty}^\infty (a + b|x|)e^{-|x|+iux} dx = 2 \frac{u^2(a-b) + a+b}{(u^2+1)^2}.$$

Отсюда

$$1 + \mathcal{K}(u) = \frac{P(u)}{(u^2 + 1)^2}, \quad P(z) = z^4 + 2(a - b + 1)z^2 + 2a + 2b + 1.$$

Исходя из условия нормальности, предполагаем, что постоянные a и b таковы, что многочлен $P(z)$ не имеет вещественных корней. Пусть $\alpha + i\beta$ — корень биквадратного уравнения $P(z) = 0$, причем $\alpha > 0$, $\beta > 0$. Тогда, в силу вещественности коэффициентов уравнения, величины $(\alpha - i\beta)$, $(-\alpha + i\beta)$ и $(-\alpha - i\beta)$ будут тремя остальными корнями. Также в силу вещественности функция $1 + \mathcal{K}(u)$ имеет нулевой индекс, так что решение уравнения (9) существует и единственно.

Разлагая на множители, находим $1 + \mathcal{K}(u) = \mathcal{X}^-(u)/\mathcal{X}^+(u)$, где

$$\mathcal{X}^+(u) = \frac{(u + i)^2}{(u + \alpha + i\beta)(u - \alpha + i\beta)}, \quad \mathcal{X}^-(u) = \frac{(u - \alpha - i\beta)(u + \alpha - i\beta)}{(u - i)^2}.$$

Используя этот результат, представим краевое условие (4), (5) в виде

$$\frac{\mathcal{Y}^+(u)}{\mathcal{X}^+(u)} - \frac{(u - i)^2 \mathcal{F}^+(u)}{(u - \alpha - i\beta)(u + \alpha - i\beta)} = \frac{\mathcal{Y}^-(u)}{\mathcal{X}^-(u)}, \quad -\infty < u < \infty. \quad (10)$$

Применяя теорему об аналитическом продолжении и обобщенную теорему Лнувилля (см. п. 10.4-3), получаем возможность приравнять обе части равенства величине

$$\frac{C_1}{u - \alpha - i\beta} + \frac{C_2}{u + \alpha - i\beta},$$

где постоянные C_1 и C_2 подлежат определению. Отсюда

$$\mathcal{Y}^+(u) = \mathcal{X}^+(u) \left(\frac{(u - i)^2 \mathcal{F}^+(u)}{(u - \alpha - i\beta)(u + \alpha - i\beta)} + \frac{C_1}{u - \alpha - i\beta} + \frac{C_2}{u + \alpha - i\beta} \right). \quad (11)$$

Для устранения полюсов $(\alpha + i\beta)$ и $(-\alpha + i\beta)$ необходимо и достаточно положить

$$C_1 = -\frac{(\alpha + i\beta - i)^2 \mathcal{F}^+(\alpha + i\beta)}{2\alpha}, \quad C_2 = -\frac{(-\alpha + i\beta - i)^2 \mathcal{F}^+(-\alpha + i\beta)}{-2\alpha}. \quad (12)$$

Ввиду громоздкости переход от изображения (11) к оригиналу осуществим в два этапа. Сначала найдем оригинал слагаемого

$$\mathcal{Y}_1(u) = \mathcal{X}^+(u) \frac{(u - i)^2 \mathcal{F}^+(u)}{(u - \alpha - i\beta)(u + \alpha - i\beta)} = \frac{1}{1 + \mathcal{K}(u)} \mathcal{F}^+(u) = \mathcal{F}^+(u) + \mathcal{R}(u) \mathcal{F}^+(u).$$

Здесь

$$\mathcal{R}(u) = -\frac{2u^2(a - b) + 2a + 2b}{[u^2 - (\alpha + i\beta)^2][u^2 - (\alpha - i\beta)^2]} = \frac{\mu}{u^2 - (\alpha + i\beta)^2} + \frac{\bar{\mu}}{u^2 - (\alpha - i\beta)^2},$$

$$\mu = i \frac{(\alpha + i\beta)^2(a - b) + a + b}{2\alpha\beta}.$$

Найдем оригинал первой дроби:

$$\mathbf{F}^{-1} \left\{ \frac{\mu}{u^2 - (\alpha + i\beta)^2} \right\} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\mu}{\beta - i\alpha} e^{-(\beta - i\alpha)|x|}.$$

Оригинал второй дроби запишем в виде

$$\mathbf{F}^{-1} \left\{ \frac{\bar{\mu}}{u^2 - (\alpha - i\beta)^2} \right\} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\bar{\mu}}{\beta + i\alpha} e^{-(\beta + i\alpha)|x|}. \quad (13)$$

Таким образом,

$$R(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \rho (e^{i\theta + i\alpha|x|} + e^{-i\theta - i\alpha|x|}) e^{-\beta|x|} = \sqrt{2\pi} \rho e^{-\beta|x|} \cos(\theta + \alpha|x|)$$

и

$$y_1(x) = f(x) + \rho \int_0^\infty e^{-\beta|x-t|} \cos(\theta + \alpha|x-t|) f(t) dt, \quad x > 0, \quad \rho e^{i\theta} = \frac{\mu}{\beta - i\alpha}. \quad (14)$$

Заметим, что одновременно мы нашли резольвенту $R(x - t)$ интегрального уравнения на всей оси

$$y_0(x) + \int_{-\infty}^\infty (a + b|x - t|) e^{-|x-t|} y_0(t) dt = f_0(x), \quad -\infty < x < \infty.$$

Теперь рассмотрим оставшуюся часть изображения (11):

$$\mathcal{Y}_2(u) = \mathcal{X}^+(u) \left(\frac{C_1}{u - \alpha - i\beta} + \frac{C_2}{u + \alpha - i\beta} \right).$$

Вычислив интегралы

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^{-1}\{\mathcal{Y}_2(u)\} = & \frac{C_1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(u+i)^2 e^{-iux} du}{(u+i\beta-\alpha)(u+i\beta+\alpha)(u-\alpha-i\beta)} + \\ & + \frac{C_2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(u+i)^2 e^{-iux} du}{(u+i\beta-\alpha)(u+i\beta+\alpha)(u+\alpha-i\beta)} \end{aligned}$$

с помощью теории вычетов (см. пп. 7.1-4 и 7.1-5) и подставив вместо постоянных C_1 и C_2 их значения (12), получим при $x > 0$

$$\begin{aligned} y_2(x) = & \frac{[\alpha + (\beta - 1)^2]^2}{4\alpha^2\beta} \int_0^{\infty} e^{-\beta(x+t)} \cos[\alpha(x-t)] f(t) dt + \\ & + \frac{\rho_*}{4\alpha^2} \int_0^{\infty} e^{-\beta(x+t)} \cos[\psi + \alpha(x+t)] f(t) dt, \quad \rho_* e^{i\psi} = \frac{(\beta - 1 - i\alpha)^4}{8\alpha^2(\beta - i\alpha)}. \end{aligned} \quad (15)$$

Так как $\mathcal{Y}^+(u) = \mathcal{Y}_1(u) + \mathcal{Y}_2(u)$, то искомое решение будет суммой функций (14) и (15).

11.9-2. Интегральное уравнение второго рода с двумя ядрами

Рассмотрим интегральное уравнение типа свертки второго рода с двумя ядрами в форме $(-\infty < x < \infty)$

$$y(x) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} K_1(x-t)y(t) dt + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 K_2(x-t)y(t) dt = f(x). \quad (16)$$

Заметим, что каждое из ядер $K_1(x)$ и $K_2(x)$ задано на всей вещественной оси. Представляя искомую функцию в виде разности односторонних:

$$y(x) = y_+(x) - y_-(x), \quad (17)$$

запишем уравнение в виде

$$y_+(x) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} K_1(x-t)y_+(t) dt - y_-(x) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} K_2(x-t)y_-(t) dt = f(x). \quad (18)$$

Переходя от оригиналов к изображениям при помощи интегрального преобразования Фурье (см. п. 7.4-3), получим

$$[1 + \mathcal{K}_1(u)]\mathcal{Y}^+(u) - [1 + \mathcal{K}_2(u)]\mathcal{Y}^-(u) = \mathcal{F}(u). \quad (19)$$

Откуда будем иметь

$$\mathcal{Y}^+(u) = \frac{1 + \mathcal{K}_2(u)}{1 + \mathcal{K}_1(u)} \mathcal{Y}^-(u) + \frac{\mathcal{F}(u)}{1 + \mathcal{K}_1(u)}. \quad (20)$$

Здесь $\mathcal{K}_1(u)$, $\mathcal{K}_2(u)$ и $\mathcal{F}(u)$ — интегралы Фурье известных функций. Неизвестные изображения $\mathcal{Y}^+(u)$ и $\mathcal{Y}^-(u)$ являются краевыми значениями функций, аналитических соответственно в верхней и нижней полуплоскостях. Таким образом, получена краевая задача Римана.

1°. Предположим, что выполнены условия нормальности, т. е.

$$1 + \mathcal{K}_1(u) \neq 0, \quad 1 + \mathcal{K}_2(u) \neq 0,$$

и запишем задачу Римана в ее обычной форме (см. п. 10.4-4):

$$\mathcal{Y}^+(u) = \mathcal{D}(u)\mathcal{Y}^-(u) + \mathcal{H}(u), \quad -\infty < u < \infty, \quad (21)$$

где

$$\mathcal{D}(u) = \frac{1 + \mathcal{K}_2(u)}{1 + \mathcal{K}_1(u)}, \quad \mathcal{H}(u) = \frac{\mathcal{F}(u)}{1 + \mathcal{K}_1(u)}. \quad (22)$$

Задача Римана (21), (22) равносильна уравнению (16): они одновременно разрешимы или неразрешимы и имеют в общих решениях одинаковое число произвольных постоянных.

Если индекс

$$\nu = \text{Ind} \frac{1 + \mathcal{K}_2(u)}{1 + \mathcal{K}_1(u)} \quad (23)$$

положителен, то однородное уравнение (16) ($f(x) \equiv 0$) имеет ровно ν линейно независимых решений, а неоднородное уравнение безусловно разрешимо, и его решение зависит от ν произвольных комплексных постоянных.

В случае $\nu \leq 0$ однородное уравнение не имеет отличных от нуля решений. Неоднородное уравнение при $\nu = 0$ безусловно разрешимо, причем решение единственно. Когда индекс ν отрицателен, условия

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathcal{F}(u) du}{\mathcal{X}^+(u)[1 + \mathcal{K}_1(u)](u + i)^k} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, -\nu, \quad (24)$$

необходимы и достаточны для разрешимости неоднородного уравнения.

Во всех случаях, когда решение уравнения (16) существует, его можно найти по формуле

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} [\mathcal{Y}^+(u) - \mathcal{Y}^-(u)] e^{-iux} du, \quad -\infty < x < \infty, \quad (25)$$

где $\mathcal{Y}^+(u)$, $\mathcal{Y}^-(u)$ — построенное по схеме из п. 10.4-4 (см. рис. 3) решение задачи Римана (21), (22).

Итак, решение уравнения (16) равносильно решению краевой задачи Римана и сводится к вычислению некоторого числа интегралов Фурье.

2°. Исследуем теперь исключительный случай интегрального уравнения (16). Допустим, что функции $1 + \mathcal{K}_1(u)$, $1 + \mathcal{K}_2(u)$ могут иметь нули, причем эти нули могут быть как в различных, так и в совпадающих точках контура. Напишем разложение этих функций, выделив совпадающие нули:

$$\begin{aligned} 1 + \mathcal{K}_1(u) &= \prod_{j=1}^s (u - b_j)^{\beta_j} \prod_{k=1}^p (u - d_k)^{\gamma_k} \mathcal{K}_{11}(u), \\ 1 + \mathcal{K}_2(u) &= \prod_{i=1}^r (u - a_i)^{\alpha_i} \prod_{k=1}^p (u - d_k)^{\gamma_k} \mathcal{K}_{12}(u), \quad \sum_{k=1}^p \gamma_k = l. \end{aligned} \quad (26)$$

Здесь $a_i \neq b_j$, но возможно, что отдельные точки d_k ($k = 1, 2, \dots, p$) могут совпадать либо с a_i , либо с b_j . Это будет соответствовать тому случаю, когда функции $1 + \mathcal{K}_1(u)$ и $1 + \mathcal{K}_2(u)$ имеют общий нуль разной кратности. Мы не выделяем такие точки особо, потому что их наличие не оказывает влияния на условия разрешимости и число решений задачи.

Из равенства (19) и условия конечности на контуре решения вытекает, что для разрешимости задачи, а следовательно, и уравнения (16), необходимо, чтобы $\mathcal{F}(u)$ во всех точках d_k обращалась в нуль порядка γ_k , т. е. $\mathcal{F}(u)$ должна иметь вид

$$\mathcal{F}(u) = \prod_{k=1}^p (u - d_k)^{\gamma_k} \mathcal{F}_1(u).$$

Для этого необходимо выполнение $\gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_p = l$ условий

$$\mathcal{F}_u^{(j_k)}(d_k) = 0, \quad j_k = 0, 1, \dots, \gamma_k - 1, \quad (27)$$

или, что все равно, условий

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) x^{j_k} e^{id_k x} dx = 0. \quad (28)$$

Так как функции $\mathcal{K}_1(u)$ и $\mathcal{K}_2(u)$ обращаются в нуль на бесконечности, то бесконечно удаленная точка является обыкновенной точкой $\mathcal{D}(u)$.

Допустим, что условия (28) выполнены. Тогда краевую задачу Римана (20) можно записать в виде (см. пп. 10.4-6 и 10.4-7)

$$\mathcal{Y}^+(u) = \frac{\prod_{i=1}^r (u - a_i)^{\alpha_i} \mathcal{R}_+(u) \mathcal{R}_-(u)}{\prod_{j=1}^s (u - b_j)^{\beta_j} \mathcal{Q}_+(u) \mathcal{Q}_-(u)} \mathcal{D}_2(u) \mathcal{Y}^-(u) + \frac{\mathcal{H}_1(u)}{\prod_{j=1}^s (u - b_j)^{\beta_j}}. \quad (29)$$

Найдя в этом исключительном случае ее общее решение, получим общее решение исходного уравнения по формуле (25).

Сформулируем выводы об условиях разрешимости и числе решений уравнения (16). Для разрешимости уравнения (16) необходимо, чтобы преобразование Фурье свободного члена уравнения удовлетворяло l условиям (27). Если эти условия выполнены, то при $\nu - n > 0$ задача (20) и интегральное уравнение (16) имеют ровно $\nu - n$ линейно независимых решений. При $\nu - n \leq 0$ многочлен $P_{\nu-n-1}(z)$ следует положить тождественно равным нулю, причем от свободного члена в случае $\nu - n < 0$ необходимо потребовать выполнения еще $n - \nu$ условий. При выполнении последних интегральное уравнение будет иметь единственное решение.

Пример. Рассмотрим уравнение (16), для которого

$$K_1(x) = \begin{cases} -(1+\alpha)\sqrt{2\pi}e^{-x}, & x > 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases} \quad K_2(x) = \begin{cases} -(1+\beta)\sqrt{2\pi}e^{-x}, & x > 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x > 0, \\ -\sqrt{2\pi}e^x, & x < 0, \end{cases}$$

где α и β — вещественные постоянные. Тогда $K_1(x-t) = 0$ для $x < t$ и $K_2(x-t) = 0$ для $x < t$. Следовательно, заданное уравнение имеет форму

$$y(x) - (1+\alpha) \int_0^x e^{-(x-t)} y(t) dt - (1+\beta) \int_{-\infty}^0 e^{-(x-t)} y(t) dt = 0, \quad x > 0,$$

$$y(x) - (1+\beta) \int_{-\infty}^x e^{-(x-t)} y(t) dt = -\sqrt{2\pi}e^x, \quad x < 0.$$

Вычислим интегралы Фурье

$$\mathcal{K}_1(u) = -(1+\alpha) \int_0^\infty e^{-x} e^{iux} dx = -\frac{i(1+\alpha)}{u+i}, \quad \mathcal{K}_2(u) = -\frac{i(1+\beta)}{u+i},$$

$$\mathcal{F}(u) = \frac{i}{u-i}, \quad \mathcal{D}(u) = \frac{u-i\beta}{u-i\alpha}.$$

Краевое условие запишем в виде

$$\mathcal{Y}^+(u) = \frac{u-i\beta}{u-i\alpha} \mathcal{Y}^-(u) + \frac{i(u+i)}{(u-i)(u-i\alpha)}. \quad (30)$$

Решение задачи Римана будет различным в зависимости от знаков α и β .

1°. Пусть $\alpha > 0$ и $\beta > 0$. В этом случае $\nu = \text{Ind } \mathcal{D}(u) = 0$. В левой и правой частях краевого условия стоят функции, аналитически продолжимые соответственно в верхнюю и нижнюю полуплоскости. Применяя непосредственно теорему об аналитическом продолжении и обобщенную теорему Лиувилля (см. п. 10.4-3), будем иметь

$$\mathcal{Y}^+(z) = 0, \quad \frac{z-i\beta}{z-i\alpha} \mathcal{Y}^-(z) + \frac{i(z+i)}{(z-i)(z-i\alpha)} = 0.$$

Отсюда

$$y_+(x) = 0, \quad y(x) = -y_-(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty \frac{i(u+i)}{(u-i)(u-i\beta)} e^{-iux} du.$$

Вычисляя последний интеграл в предположении $\beta \neq 1$, по теореме о вычетах (см. пп. 7.1-4 и 7.1-5) получим

$$y(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x > 0, \\ -\frac{\sqrt{2\pi}}{1-\beta} [2e^x - (1+\beta)e^{\beta x}] & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

В случае $\beta = 1$ имеем

$$y(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x > 0, \\ -\sqrt{2\pi}e^x(1+2x) & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

2°. Пусть $\alpha < 0$ и $\beta < 0$. Здесь по-прежнему $\nu = 0$, $\mathcal{X}^+(z) = (z-i\beta)(z-i\alpha)^{-1}$, $\mathcal{X}^-(z) = 1$. Группируя члены, содержащие краевые значения аналитических в каждой из полуплоскостей функций и применяя затем теорему об аналитическом продолжении и обобщенную теорему Лиувилля (см. п. 10.4-3), найдем

$$\frac{\mathcal{Y}^+(z)}{\mathcal{X}^+(z)} + \frac{\beta+1}{i(\beta-1)} \frac{1}{z-i\beta} = \frac{\mathcal{Y}^-(z)}{\mathcal{X}^-(z)} + \frac{2}{i(\beta-1)} \frac{1}{z-i} = 0.$$

Отсюда

$$\mathcal{Y}^+(z) = \frac{\beta+1}{\beta-1} \frac{i}{z-i\alpha}, \quad \mathcal{Y}^-(z) = \frac{2i}{\beta-1} \frac{1}{z-i},$$

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty [\mathcal{Y}^+(u) - \mathcal{Y}^-(u)] e^{-iux} du = \begin{cases} \sqrt{2\pi} \frac{\beta+1}{\beta-1} e^{\alpha x} & \text{при } x > 0, \\ \frac{2\sqrt{2\pi}}{\beta-1} e^x & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

3°. Пусть $\alpha < 0$ и $\beta > 0$, тогда $\nu = 1$. В этом случае, краевое условие (30) запишем в виде

$$\mathcal{Y}^+(u) + \frac{i(1+\alpha)}{1-\alpha} \frac{1}{u-i\alpha} = \frac{u-i\beta}{u-i\alpha} \mathcal{Y}^-(u) - \frac{2i}{1-\alpha} \frac{1}{u-i}.$$

Применяя теорему об аналитическом продолжении и обобщенную теорему Лиувилля (см. п. 10.4-3) получим, что

$$\mathcal{Y}^+(z) + \frac{i(1+\alpha)}{1-\alpha} \frac{1}{z-i\alpha} = \frac{z-i\beta}{z-i\alpha} \mathcal{Y}^-(z) - \frac{2i}{1-\alpha} \frac{1}{z-i} = \frac{C}{z-i\alpha}.$$

Поэтому

$$\mathcal{Y}^+(z) = \left(C - i \frac{1+\alpha}{1-\alpha}\right) \frac{1}{z-i\alpha}, \quad \mathcal{Y}^-(z) = \frac{C}{z-i\beta} - \frac{2i}{1-\alpha} \frac{z-i\alpha}{(z-i)(z-i\beta)},$$

где C — произвольная постоянная. Теперь при помощи обратного преобразования Фурье, получим общее решение интегрального уравнения в форме

$$y(x) = \begin{cases} -\sqrt{2\pi} \left(iC + \frac{1+\alpha}{1-\alpha}\right) e^{\alpha x} & \text{при } x > 0, \\ -\sqrt{2\pi} \left[iC + \frac{2(\alpha-\beta)}{(1-\alpha)(1-\beta)}\right] e^{\beta x} - \frac{2\sqrt{2\pi}}{1-\beta} e^x & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

4°. Пусть $\alpha > 0$ и $\beta < 0$, тогда $\nu = -1$. По теореме Лиувилля (см. п. 10.4-3)

$$\mathcal{Y}^+(z) = \frac{z-i\beta}{z-i\alpha} \mathcal{Y}^-(z) + \frac{i(z+i)}{(z-i)(z-i\alpha)} = 0,$$

так что

$$\mathcal{Y}^+(z) = 0, \quad \mathcal{Y}^-(z) = -\frac{i(z+i)}{(z-i)(z-i\beta)}.$$

Из выражения для $\mathcal{Y}^-(z)$ видно, что особенность функции $\mathcal{Y}^-(z)$ в точке $i\beta$ исчезнет, если положить $\beta = -1$. Последнее равенство и будет условием разрешимости задачи Римана. В этом случае имеем единственное решение

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{i}{u-i} e^{-iux} du = \begin{cases} 0 & \text{при } x > 0, \\ -\sqrt{2\pi} e^x & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

Замечание 1. К рассмотренным в п. 11.9-2 уравнениям приводятся некоторые уравнения, ядра которых входят не разности, а другие их комбинации: произведения или, чаще, отношения. Так, например, уравнение

$$Y(\xi) + \int_0^1 \frac{1}{\tau} N_1\left(\frac{\xi}{\tau}\right) Y(\tau) d\tau + \int_1^\infty \frac{1}{\tau} N_2\left(\frac{\xi}{\tau}\right) Y(\tau) d\tau = g(\xi), \quad \xi > 0, \quad (31)$$

становится обычным уравнением с двумя ядрами, если сделать следующие замены функций и их аргументов: $\xi = e^x$, $\tau = e^t$, $N_1(\xi) = K_1(x)$, $N_2(\xi) = K_2(x)$, $g(\xi) = f(x)$, $Y(\xi) = y(x)$.

11.9-3. Уравнения типа свертки с переменным пределом интегрирования

1°. Рассмотрим интегральное уравнение Вольтерра второго рода

$$y(x) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x K(x-t)y(t) dt = f(x), \quad 0 \leq x < T, \quad (32)$$

где промежуток $[0, T)$ может быть как конечным, так и бесконечным. В отличие от уравнения (1), где ядро задается на всей оси, здесь ядро задается на положительной полуоси.

Уравнение (32) можно рассматривать как частный случай одностороннего уравнения (1) из п. 11.9-1. Для этого достаточно записать его в виде

$$y(x) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty K_+(x-t)y(t) dt = f(x), \quad 0 < x < \infty,$$

приводящемся к следующей краевой задаче:

$$\mathcal{Y}^+(u) = \frac{\mathcal{Y}^-(u)}{1+\mathcal{K}^+(u)} + \frac{\mathcal{F}^+(u)}{1+\mathcal{K}^+(u)}.$$

Здесь коэффициент $[1 + \mathcal{K}^+(u)]^{-1}$ задачи есть функция, аналитически продолжимая в верхнюю полуплоскость, за исключением конечного числа возможных полюсов, являющихся нулями функции $1 + \mathcal{K}^+(z)$ (считаем, что на действительной оси $1 + \mathcal{K}^+(z) \neq 0$). Поэтому индекс ν задачи всегда неположителен, $\nu \leq 0$. Переписав задачу в виде $[1 + \mathcal{K}^+(u)]\mathcal{Y}^+(u) = \mathcal{Y}^-(u) + \mathcal{F}^+(u)$, видим, что $\mathcal{Y}^-(u) \equiv 0$, так что

$$\mathcal{Y}^+(u) = \frac{\mathcal{F}^+(u)}{1 + \mathcal{K}^+(u)}. \quad (33)$$

Рассмотрим следующие случаи.

1.1. Функция $1 + \mathcal{K}^+(z)$ не имеет нулей в верхней полуплоскости (это означает, что $\nu = 0$). Следовательно, уравнение (32) при любой правой части $f(x)$ имеет единственное решение, которое можно выразить через резольвенту:

$$y(x) = f(x) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x R(x-t)f(t) dt, \quad x > 0, \quad (34)$$

где

$$R(x) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathcal{K}^+(u)}{1 + \mathcal{K}^+(u)} e^{-iux} du.$$

1.2. Функция $1 + \mathcal{K}^+(z)$ имеет нули в точках $z = a_1, a_2, \dots, a_m$ верхней полуплоскости (тогда $\nu < 0$, причем ν равно взятому со знаком минус суммарному порядку нулей). Могут представиться две возможности:

(а) Функция $\mathcal{F}^+(z)$ в точках a_1, a_2, \dots, a_m обращается в нуль, причем порядки этих нулей не ниже порядков нулей функции $1 + \mathcal{K}^+(z)$. В этом случае функция $\mathcal{F}^+(z)[1 + \mathcal{K}^+(z)]^{-1}$ опять не будет иметь полюсов, так что по-прежнему уравнение имеет единственное решение (34).

Предложение $d^k \mathcal{F}^+(a_j)/dz^k = 0$ об обращении $\mathcal{F}^+(z)$ в нуль равносильно условиям

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-ia_j t} t^k dt = 0, \quad k = 0, \dots, \eta_j - 1, \quad j = 1, \dots, m, \quad (35)$$

где η_j — кратность нуля функции $1 + \mathcal{K}^+(z)$ в точке a_j . Условия (35) накладываются уже непосредственно на правую часть уравнения.

(б) Функция $\mathcal{F}^+(z)$ не обращается в нуль в точках a_1, a_2, \dots, a_m или обращается с кратностями, меньшими, чем $1 + \mathcal{K}^+(z)$. Тогда функция $\mathcal{F}^+(z)[1 + \mathcal{K}^+(z)]^{-1}$ имеет полюсы, и поэтому функция (33) не принадлежит условленному классу. Уравнение (32) не имеет решений в выбранном классе функций. В рассматриваемом случае условия (35) не выполняются.

Последний результат не противоречит известному факту, что уравнение Вольтерра всегда имеет единственное решение. Уравнение (32) принадлежит классу уравнений типа Вольтерра и поэтому в случае (б) будет также разрешимо, но в более широком пространстве функций с показательным ростом.

2°. Другим простым частным случаем уравнения (1) из п. 11.9-1 будет уравнение с переменным нижним пределом:

$$y(x) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} K(x-t)y(t) dt = f(x), \quad 0 < x < \infty. \quad (36)$$

Это соответствует случаю, когда в уравнении (1) функция $K(x)$ будет левой односторонней: $K(x) = K_-(x)$. Задача Римана при условии $1 + \mathcal{K}^-(u) \neq 0$ примет вид

$$\mathcal{Y}^+(u) = \frac{\mathcal{Y}^-(u)}{1 + \mathcal{K}^-(u)} + \frac{\mathcal{F}^+(u)}{1 + \mathcal{K}^-(u)}. \quad (37)$$

2.1. Функция $1 + \mathcal{K}^-(z)$ не имеет нулей в нижней полуплоскости. Это означает, что оригиналом функции $\mathcal{Y}^-(u)[1 + \mathcal{K}^-(u)]^{-1}$ служит левая односторонняя, а последняя не окажет влияния при $x > 0$ на соотношение между оригиналами равенства (37). Итак, введя для удобства функцию

$$\mathcal{R}^-(u) = -\frac{\mathcal{K}^-(u)}{1 + \mathcal{K}^-(u)},$$

применяя к обеим частям равенства (37) обратное преобразование Фурье и полагая $x > 0$, получим единственное решение уравнения (36)

$$y(x) = f(x) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} \mathcal{R}_-(x-t)f(t) dt, \quad x > 0.$$

2.2. В нижней полуплоскости у функции $1 + \mathcal{K}^-(z)$ есть нули. Так как эта функция на всей вещественной оси, в том числе и на бесконечности, отлична от нуля, то число ее нулей конечно. Задача Римана (37) имеет положительный индекс, как раз равный числу нулей функции в нижней полуплоскости (нули считаются столько раз, какова их кратность):

$$\nu = \text{Ind} \frac{1}{1 + \mathcal{K}^-(u)} = -\text{Ind}[1 + \mathcal{K}^-(u)] = \eta_1 + \dots + \eta_n > 0.$$

Здесь η_k — кратности нулей z_k функции $1 + \mathcal{K}^-(z)$, $k = 1, 2, \dots, n$.

Пусть

$$\frac{C_{1k}}{z - z_k} + \frac{C_{2k}}{(z - z_k)^2} + \dots + \frac{C_{\eta_k k}}{(z - z_k)^{\eta_k}}$$

есть главная часть разложения функции $\mathcal{Y}^-(z)[1 + \mathcal{K}^-(z)]^{-1}$ в ряд Лорана по степеням $(z - z_k)$, $k = 1, 2, \dots, n$. Тогда равенство (37) можно представить в виде

$$\mathcal{Y}^+(u) = \frac{\mathcal{F}^+(u)}{1 + \mathcal{K}^-(u)} + \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^{\eta_k} \frac{C_{jk}}{(z - z_k)^j} + \dots, \quad (38)$$

где многоточие означает функцию, оригинал которой равен нулю при $x > 0$. Переходя в равенстве (38) к оригиналам, при $x > 0$ получим

$$y(x) = f(x) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty R_-(x-t)f(t) dt + \sum_{k=1}^n P_k(x)e^{-iz_k x}, \quad x > 0. \quad (39)$$

Здесь $P_k(x)$ — многочлены степеней $\eta_k - 1$. Можно проверить, что (39) будет решением уравнения (36) при произвольных коэффициентах многочленов. Так как число линейно независимых решений однородного уравнения (36) равно индексу, то найденное решение (39) будет общим решением неоднородного уравнения.

11.9-4. Парное уравнение типа свертки второго рода

Рассмотрим парное интегральное уравнение второго рода

$$\begin{aligned} y(x) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty K_1(x-t)y(t) dt &= f(x), & 0 < x < \infty, \\ y(x) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty K_2(x-t)y(t) dt &= f(x), & -\infty < x < 0, \end{aligned} \quad (40)$$

где функция $y(x)$ является искомой.

Для применения преобразования Фурье (см. пп. 7.4-3, 10.4-1, 10.4-2) доопределим оба условия в уравнении (40), формально записав их для всех действительных значений x . Этого можно достигнуть путем введения в правые части новых неизвестных функций. Последние должны быть выбраны так, чтобы они не нарушали заданных на полуосях условий. Следовательно, верхнее условие (40) должно быть дополнено слагаемым, которое обращается в нуль на положительной полуоси, а нижнее — слагаемым, равным нулю на отрицательной. Таким образом, парное уравнение может быть записано в форме

$$\begin{aligned} y(x) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty K_1(x-t)y(t) dt &= f(x) + \xi_-(x), \\ y(x) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty K_2(x-t)y(t) dt &= f(x) + \xi_+(x), \end{aligned} \quad -\infty < x < \infty, \quad (41)$$

где $\xi_\pm(x)$ — пока неизвестные правая и левая односторонние функции.

Воспользовавшись интегральным преобразованием Фурье, получим

$$[1 + \mathcal{K}_1(u)]\mathcal{Y}(u) = \mathcal{F}(u) + \Xi^-(u), \quad [1 + \mathcal{K}_2(u)]\mathcal{Y}(u) = \mathcal{F}(u) + \Xi^+(u). \quad (42)$$

Здесь неизвестными являются три функции $\mathcal{Y}(u)$, $\Xi^+(u)$ и $\Xi^-(u)$.

Теперь можно на основании (42) найти

$$\mathcal{Y}(u) = \frac{\mathcal{F}(u) + \Xi^-(u)}{1 + \mathcal{K}_1(u)} = \frac{\mathcal{F}(u) + \Xi^+(u)}{1 + \mathcal{K}_2(u)} \quad (43)$$

и, исключая при помощи равенства (43) функцию $\mathcal{Y}(u)$ из соотношений (42), получить краевую задачу Римана в виде

$$\Xi^+(u) = \frac{1 + \mathcal{K}_2(u)}{1 + \mathcal{K}_1(u)} \Xi^-(u) + \frac{\mathcal{K}_2(u) - \mathcal{K}_1(u)}{1 + \mathcal{K}_1(u)} \mathcal{F}(u), \quad -\infty < u < \infty. \quad (44)$$

1°. Предположим, что выполнены условия нормальности, т. е.

$$1 + \mathcal{K}_1(u) \neq 0, \quad 1 + \mathcal{K}_2(u) \neq 0,$$

и запишем теперь задачу Римана (44) в ее обычной форме (см. п. 10.4-4)

$$\Xi^+(u) = \mathcal{D}(u) \Xi^-(u) + \mathcal{H}(u), \quad -\infty < u < \infty, \quad (45)$$

где

$$\mathcal{D}(u) = \frac{1 + \mathcal{K}_2(u)}{1 + \mathcal{K}_1(u)}, \quad \mathcal{H}(u) = \frac{\mathcal{K}_2(u) - \mathcal{K}_1(u)}{1 + \mathcal{K}_1(u)} \mathcal{F}(u). \quad (46)$$

Задача Римана (45), (46) равносильна уравнению (40): они одновременно разрешимы или неразрешимы, имеют в общих решениях одинаковое число произвольных постоянных.

Если индекс

$$\nu = \text{Ind} \frac{1 + \mathcal{K}_2(u)}{1 + \mathcal{K}_1(u)} \quad (47)$$

положителен, то однородное уравнение (40) ($f(x) \equiv 0$) имеет ровно ν линейно независимых решений, а неоднородное уравнение безусловно разрешимо, и его решение зависит от ν произвольных комплексных постоянных.

В случае $\nu \leq 0$ однородное уравнение не имеет отличных от нуля решений. Неоднородное уравнение при $\nu = 0$ безусловно разрешимо, причем решение единственно. Когда индекс ν отрицателен, условия

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathcal{K}_2(u) - \mathcal{K}_1(u)}{\mathcal{X}^+(u)[1 + \mathcal{K}_1(u)]} \mathcal{F}(u) \frac{du}{(u+i)^k} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, -\nu, \quad (48)$$

необходимы и достаточны для разрешимости неоднородного уравнения.

Во всех случаях, когда решение уравнения (40) существует, его можно найти по формуле

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathcal{F}(u) + \Xi^-(u)}{1 + \mathcal{K}_1(u)} e^{-iux} du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathcal{F}(u) + \Xi^+(u)}{1 + \mathcal{K}_2(u)} e^{-iux} du, \quad (49)$$

где $\Xi^+(u)$, $\Xi^-(u)$ — построенное по схеме из п. 10.4-4 (см. рис. 3) решение задачи Римана (45), (46).

2°. Исследуем теперь исключительный случай интегрального уравнения (40). Допустим, что функции $1 + \mathcal{K}_1(u)$, $1 + \mathcal{K}_2(u)$ могут иметь нули, причем эти нули могут быть как в различных, так и в совпадающих точках контура. Возьмем разложение этих функций, выделив совпадающие нули в форме (26), и далее повторим все рассуждения, проведенные для уравнения типа свертки второго рода с двумя ядрами. Найдя в этом исключительном случае общее решение краевой задачи Римана (44) (см. п. 10.4-7), получим общее решение исходного уравнения (40) по формуле (49).

Выводы об условиях разрешимости и числе решений уравнения (40) аналогичны сделанным для уравнения с двумя ядрами в п. 11.9-2.

Замечание 2. Рассмотренные в разд. 11.9 уравнения иногда называют *характеристическими уравнениями типа свертки*.

⊙ *Литература:* Ф. Д. Гахов, Ю. И. Черский (1978).

11.10. Метод Винера–Хопфа

11.10-1. Некоторые замечания

Пусть существует преобразование Фурье функции $y(x)$ (см. п. 7.4-3):

$$\mathcal{Y}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} y(x) e^{izx} dx. \quad (1)$$

Будем считать, что параметр z , входящий в преобразование (1), может принимать и комплексные значения. Исследуем свойства функции $\mathcal{Y}(z)$, рассматриваемой как функция комплексной переменной z . Для этого представим функцию $y(x)$ в виде*

$$y(x) = y^+(x) + y^-(x), \quad (2)$$

где функции $y^+(x)$ и $y^-(x)$ соответственно равны

$$y^+(x) = \begin{cases} y(x) & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x < 0, \end{cases} \quad y^-(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x > 0, \\ y(x) & \text{при } x < 0. \end{cases} \quad (3)$$

Изображение $\mathcal{Y}(z)$ функции $y(x)$ при этом, очевидно, равно сумме изображений $\mathcal{Y}_+(z)$, $\mathcal{Y}_-(z)$ функций $y^+(x)$ и $y^-(x)$. Выясним аналитические свойства функции $\mathcal{Y}(z)$, установив аналитические свойства функций $\mathcal{Y}_+(z)$ и $\mathcal{Y}_-(z)$. Рассмотрим функцию $y^+(x)$, задаваемую соотношениями (3). Ее изображением является

$$\mathcal{Y}_+(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty y^+(x) e^{izx} dx. \quad (4)$$

Можно показать, что если функция $y^+(x)$ удовлетворяет условию

$$|y^+(x)| < M e^{v-x} \quad \text{при } x \rightarrow \infty, \quad (5)$$

где M — некоторая постоянная, то функция $\mathcal{Y}_+(z)$, определенная формулой (4), является аналитической функцией комплексной переменной $z = u + iv$ в области $\text{Im } z > v_-$, причем в этой области $\mathcal{Y}_+(z) \rightarrow 0$ при $|z| \rightarrow \infty$. Можно также показать, что функции $y^+(x)$ и $\mathcal{Y}_+(z)$ связаны следующим соотношением:

$$y^+(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty+iv}^{\infty+iv} \mathcal{Y}_+(z) e^{-izx} dz, \quad (6)$$

где интегрирование производится по любой прямой $\text{Im } z = v > v_-$, параллельной действительной оси на комплексной плоскости z .

При $v_- < 0$ (т. е. для убывающих на бесконечности функций $y(x)$) область аналитичности функции $\mathcal{Y}_+(z)$ содержит действительную ось и в формуле (6) можно проводить интегрирование вдоль действительной оси. Если $v_- > 0$ (т. е. функция $y^+(x)$ растет на бесконечности, но не быстрее, чем экспонента с линейным показателем), то область аналитичности функции $\mathcal{Y}_+(z)$ лежит над действительной осью комплексной плоскости z (при этом на действительной оси интеграл (4) может расходиться). Аналогично, если функция $y^-(x)$ из соотношений (3), удовлетворяет условию

$$|y^-(x)| < M e^{v+x} \quad \text{при } x \rightarrow -\infty, \quad (7)$$

то ее изображение, функция

$$\mathcal{Y}_-(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 y^-(x) e^{izx} dx, \quad (8)$$

является аналитической функцией комплексной переменной z и в области $\text{Im } z < v_+$. Функция $y^-(x)$ выражается через функцию $\mathcal{Y}_-(z)$ с помощью соотношения

$$y^-(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty+iv}^{\infty+iv} \mathcal{Y}_-(z) e^{-izx} dz, \quad \text{Im } z = v < v_+. \quad (9)$$

Если $v_+ > 0$, то область аналитичности функции $\mathcal{Y}_-(z)$ содержит действительную ось.

Очевидно, при $v_- < v_+$ функция $\mathcal{Y}(z)$, определенная по формуле (1), является аналитической функцией комплексной переменной z в полосе $v_- < \text{Im } z < v_+$. При этом функции $y(x)$ и $\mathcal{Y}(z)$ связаны обратным преобразованием Фурье:

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty+iv}^{\infty+iv} \mathcal{Y}(z) e^{-izx} dz, \quad (10)$$

где интегрирование производится по любой прямой, параллельной действительной оси комплексной плоскости z , лежащей в полосе $v_- < \text{Im } z < v_+$. В частности, при $v_- < 0$ и $v_+ > 0$ функция $\mathcal{Y}(z)$ является аналитической в полосе, содержащей действительную ось комплексной плоскости z .

* Введенные в этом разделе функции $y^\pm(x)$ и $\mathcal{Y}_\pm(z)$ не следует путать с функциями $y_\pm(x)$ и $\mathcal{Y}^\pm(x)$, введенными в п. 10.4-2 и использовавшимися при решении краевой задачи Римана на действительной оси.

Пример 1. Функция $K(x) = e^{-\alpha|x|}$ при $\alpha > 0$ обладает изображением

$$\mathcal{K}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2\alpha}{\alpha^2 + z^2},$$

являющимся аналитической функцией комплексной переменной z в полосе $-\alpha < \operatorname{Im} z < \alpha$, содержащей действительную ось.

11.10-2. Однородное уравнение Винера–Хопфа второго рода

Рассмотрим однородное интегральное уравнение Винера–Хопфа второго рода в форме

$$y(x) = \int_0^\infty K(x-t)y(t) dt, \quad (11)$$

где функция $K(x)$ задана на всей действительной оси. Решение этого уравнения, очевидно, находится с точностью до произвольного множителя. Он может быть найден из дополнительных условий задачи, например условий нормировки.

Будем считать, что уравнение (11) определяет функцию $y(x)$ для всех значений переменной x , как положительных, так и отрицательных. Введем функции $y^-(x)$ и $y^+(x)$ по формулам (3). Очевидно, $y(x) = y^+(x) + y^-(x)$, и уравнение (11) можно переписать в виде

$$y^+(x) = \int_0^\infty K(x-t)y^+(t) dt, \quad x > 0 \quad (12)$$

$$y^-(x) = \int_0^\infty K(x-t)y^+(t) dt, \quad x < 0. \quad (13)$$

То есть функция $y^+(x)$ определяется из решения интегрального уравнения (12), а функция $y^-(x)$ выражается через функции $y^+(x)$ и $K(x)$ с помощью формулы (13). При этом имеет место соотношение

$$y^+(x) + y^-(x) = \int_{-\infty}^\infty K(x-t)y^+(t) dt, \quad (14)$$

эквивалентное исходному уравнению (11).

Пусть функция $K(x)$ удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned} |K(x)| &< Me^{v_-x} \quad \text{при } x \rightarrow \infty, \\ |K(x)| &< Me^{v_+x} \quad \text{при } x \rightarrow -\infty, \end{aligned} \quad (15)$$

где $v_- < 0$, $v_+ > 0$. Тогда функция

$$\mathcal{K}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty K(x)e^{izx} dx, \quad (16)$$

является аналитической в полосе $v_- < \operatorname{Im} z < v_+$.

Будем искать решение уравнения (11), удовлетворяющее условию

$$|y^+(x)| < M_1 e^{\mu x} \quad \text{при } x \rightarrow \infty, \quad (17)$$

где $\mu < v_+$ (такое решение существует). При этом интегралы в правых частях соотношений (12) и (13), как можно проверить, являются сходящимися, причем для функции $y^-(x)$ имеет место оценка

$$|y^-(x)| < M_2 e^{v_+x} \quad \text{при } x \rightarrow -\infty. \quad (18)$$

Из условий (17) и (18) следует, что изображения $\mathcal{Y}_+(z)$ и $\mathcal{Y}_-(z)$ функций $y^+(x)$ и $y^-(x)$ являются аналитическими функциями комплексной переменной z при $\operatorname{Im} z > \mu$ и $\operatorname{Im} z < v_+$ соответственно.

Перейдем к решению интегрального уравнения (11) или эквивалентного ему уравнения (14), для чего воспользуемся преобразованием Фурье. С помощью теоремы о свертке (см. п. 7.4-4) на основании (14) получим

$$\mathcal{Y}_+(z) + \mathcal{Y}_-(z) = \sqrt{2\pi} \mathcal{K}(z) \mathcal{Y}_+(z),$$

или

$$\mathcal{W}(z) \mathcal{Y}_+(z) + \mathcal{Y}_-(z) = 0, \quad (19)$$

где

$$\mathcal{W}(z) = 1 - \sqrt{2\pi} \mathcal{K}(z) \neq 0. \quad (20)$$

Итак, с помощью преобразования Фурье удалось перейти от исходного интегрального уравнения к алгебраическому уравнению для изображений. Однако теперь в уравнение (19) входят уже две неизвестные функции. Вообще говоря, из одного алгебраического уравнения нельзя однозначно определить две неизвестные функции. Метод Винера–Хопфа позволяет решить эту задачу для определенного класса функций. Он в первую очередь связан с изучением областей аналитичности входящих в уравнение функций и специальным представлением этого уравнения. Основная идея метода Винера–Хопфа заключается в следующем.

Пусть уравнение (19) представимо в виде

$$\mathcal{W}_+(z)\mathcal{Y}_+(z) = -\mathcal{W}_-(z)\mathcal{Y}_-(z), \quad (21)$$

где левая часть является аналитической в верхней полуплоскости $\text{Im } z > \mu$, а правая — аналитической в нижней полуплоскости $\text{Im } z < \nu_+$, причем $\mu < \nu_+$, так что существует общая полоса аналитичности этих функций $\mu < \text{Im } z < \nu_+$. Тогда в силу единственности аналитического продолжения можно утверждать, что существует единственная целая функция комплексной переменной, совпадающая с левой частью (21) в верхней и правой частью (21) в нижней полуплоскости соответственно. Если при этом известно, что функции, входящие в (21), растут на бесконечности не быстрее, чем конечная степень z , то в силу обобщенной теоремы Лиувилля (см. п. 10.4-3) данная целая функция есть полином. В частности, в случае ограниченной на бесконечности функции получим

$$\mathcal{W}_+(z)\mathcal{Y}_+(z) = -\mathcal{W}_-(z)\mathcal{Y}_-(z) = \text{const}. \quad (22)$$

Отсюда функции $\mathcal{Y}_+(z)$ и $\mathcal{Y}_-(z)$ определяются однозначно.

Итак, применим данную схему к решению уравнения (19). Из проведенных выше рассуждений следует, что области аналитичности функций $\mathcal{Y}_+(z)$, $\mathcal{Y}_-(z)$ и $\mathcal{W}(z) = 1 - \sqrt{2\pi} \mathcal{K}(z)$ соответственно представляют собой верхнюю полуплоскость $\text{Im } z > \mu$, нижнюю полуплоскость $\text{Im } z < \nu_+$ и полосу $\nu_- < \text{Im } z < \nu_+$. Тем самым это уравнение справедливо в полосе* $\mu < \text{Im } z < \nu_+$, являющейся общей областью аналитичности всех входящих в это уравнение функций. Для преобразования уравнения (19) к виду (21) предположим, что возможно разложение функции $\mathcal{W}(z)$:

$$\mathcal{W}(z) = \frac{\mathcal{W}_+(z)}{\mathcal{W}_-(z)}, \quad (23)$$

где функции $\mathcal{W}_+(z)$ и $\mathcal{W}_-(z)$ являются аналитическими при $\text{Im } z > \mu$ и $\text{Im } z < \nu_+$ соответственно. Кроме того, предположим, что в областях своей аналитичности эти функции на бесконечности растут не быстрее, чем z^n , где n — некоторое положительное целое число. Представление (23) аналитической функции $\mathcal{W}(z)$ часто называют ее факторизацией.

Итак, в результате факторизации исходное уравнение приведено к виду (21). Из предыдущих рассуждений следует, что оно определяет некоторую целую функцию комплексной переменной z .

Так как $\mathcal{Y}_\pm(z) \rightarrow 0$ при $|z| \rightarrow \infty$, а $\mathcal{W}_\pm(z)$ растут на бесконечности, как z^n , то данная целая функция может быть лишь полиномом $\mathcal{P}_{n-1}(z)$ степени не выше $n - 1$.

Если функции $\mathcal{W}_\pm(z)$ растут на бесконечности, лишь как первая степень переменной z , то из соотношений (22) в силу теоремы Лиувилля следует, что соответствующая целая функция есть постоянная C . Тогда для неизвестных $\mathcal{Y}_+(z)$ и $\mathcal{Y}_-(z)$ получим выражения

$$\mathcal{Y}_+(z) = \frac{C}{\mathcal{W}_+(z)}, \quad \mathcal{Y}_-(z) = -\frac{C}{\mathcal{W}_-(z)}, \quad (24)$$

определяющие изображения искомого решения с точностью до постоянного множителя, который может быть найден хотя бы из условий нормировки. В общем случае выражения

$$\mathcal{Y}_+(z) = \frac{\mathcal{P}_{n-1}(z)}{\mathcal{W}_+(z)}, \quad \mathcal{Y}_-(z) = -\frac{\mathcal{P}_{n-1}(z)}{\mathcal{W}_-(z)}, \quad (25)$$

определяют изображения искомого решения интегрального уравнения (11) с точностью до неопределенных постоянных, которые можно найти из дополнительных условий задачи. Само решение определяется с помощью обратного преобразования Фурье (6), (9) и (10).

* Для определенности положим $\mu > \nu_-$. В противном случае общей областью аналитичности будет полоса $\nu_- < \text{Im } z < \nu_+$.

Пример 2. Рассмотрим уравнение

$$y(x) = \lambda \int_0^\infty e^{-|x-t|} y(t) dt, \quad 0 < \lambda < \infty, \quad (26)$$

ядро которого имеет вид $K(x) = \lambda e^{-|x|}$.

Найдем изображение функции $K(x)$:

$$\mathcal{K}(z) = \frac{\lambda}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty K(x) e^{izx} dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\lambda}{z^2 + 1}. \quad (27)$$

Функция $\mathcal{K}(z)$ является аналитической функцией комплексной переменной z в полосе $-1 < \operatorname{Im} z < 1$. Представим выражение

$$\mathcal{W}(z) = 1 - \sqrt{2\pi} \mathcal{K}(z) = \frac{z^2 - 2\lambda + 1}{z^2 + 1} \quad (28)$$

в виде (23), где

$$\mathcal{W}_+(z) = \frac{z^2 - 2\lambda + 1}{z + i}, \quad \mathcal{W}_-(z) = z - i. \quad (29)$$

Функция $\mathcal{W}_+(z)$ является аналитической и отличной от нуля функцией z в области $\operatorname{Im} z > \operatorname{Im} \sqrt{2\lambda - 1}$. При $0 < \lambda < \frac{1}{2}$ эта область определяется условием $\operatorname{Im} z > \sqrt{1 - 2\lambda}$, причем $\sqrt{1 - 2\lambda} \leq \mu < 1$. При $\lambda > \frac{1}{2}$ функция $\mathcal{W}_+(z)$ является аналитической и отличной от нуля в области $\operatorname{Im} z > 0$. Функция $\mathcal{W}_-(z)$, очевидно, представляет собой отличную от нуля аналитическую функцию в области $\operatorname{Im} z < 1$. Поэтому при $0 < \lambda < \frac{1}{2}$ обе функции удовлетворяют требуемым условиям в полосе $\mu < \operatorname{Im} z < 1$.

При $\lambda > \frac{1}{2}$ общей областью аналитичности функций $\mathcal{W}_+(z)$ и $\mathcal{W}_-(z)$ является полоса $0 < \operatorname{Im} z < 1$. Таким образом, необходимая факторизация функции (28) произведена.

Рассмотрим выражения $\mathcal{Y}_\pm(z) \mathcal{W}_\pm(z)$. Так как $\mathcal{Y}_\pm(z) \rightarrow 0$ при $|z| \rightarrow \infty$, а $\mathcal{W}_\pm(z)$, согласно (29), растут на бесконечности, как первая степень z , то целая функция $\mathcal{P}_{n-1}(z)$, совпадающая с $\mathcal{Y}_+(z) \mathcal{W}_+(z)$ при $\operatorname{Im} z > \mu$ и с $\mathcal{Y}_-(z) \mathcal{W}_-(z)$ при $\operatorname{Im} z < 1$, может быть лишь полиномом нулевой степени. Поэтому

$$\mathcal{Y}_+(z) \mathcal{W}_+(z) = C. \quad (30)$$

Отсюда

$$\mathcal{Y}_+(z) = C \frac{z + i}{z^2 - 2\lambda + 1} \quad (31)$$

и, согласно (6),

$$y^+(x) = \frac{C}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty+iv}^{\infty+iv} \frac{z + i}{z^2 - 2\lambda + 1} e^{-izx} dz, \quad (32)$$

где $\mu < v < 1$.

Замкнув контур интегрирования при $x > 0$ дугой полуокружности в нижней полуплоскости и оценив интеграл по этой дуге с помощью леммы Жордана (см. пп. 7.1-4 и 7.1-5), после ряда вычислений получим

$$y^+(x) = C \left[\cos(\sqrt{2\lambda - 1} x) + \frac{\sin(\sqrt{2\lambda - 1} x)}{\sqrt{2\lambda - 1}} \right], \quad (33)$$

где C — постоянная. При $0 < \lambda < \frac{1}{2}$ это решение экспоненциально возрастает с ростом x , при $\frac{1}{2} < \lambda < \infty$ — ограничено на бесконечности.

11.10-3. Общая схема метода. Проблема факторизации

В общем случае задача, решаемая методом Винера–Хопфа, сводится к следующей. Требуется определить функции $\mathcal{Y}_+(z)$ и $\mathcal{Y}_-(z)$ комплексной переменной z , аналитические соответственно в полуплоскостях $\operatorname{Im} z > v_-$ и $\operatorname{Im} z < v_+$ ($v_- < v_+$), стремящиеся к нулю при $|z| \rightarrow \infty$ в своих областях аналитичности и удовлетворяющие в полосе ($v_- < \operatorname{Im} z < v_+$) функциональному уравнению

$$A(z) \mathcal{Y}_+(z) + B(z) \mathcal{Y}_-(z) + C(z) = 0. \quad (34)$$

Здесь $A(z)$, $B(z)$, $C(z)$ — заданные функции комплексной переменной z , аналитические в полосе $v_- < \operatorname{Im} z < v_+$, причем $A(z)$ и $B(z)$, отличны от нуля в этой полосе.

Основная идея решения этой задачи основана на возможности факторизации выражения $A(z)/B(z)$, т. е. возможности представления его в виде

$$\frac{A(z)}{B(z)} = \frac{\mathcal{W}_+(z)}{\mathcal{W}_-(z)}, \quad (35)$$

где функции $\mathcal{W}_+(z)$ и $\mathcal{W}_-(z)$ являются аналитическими и отличными от нуля соответственно в полуплоскостях $\text{Im } z > v'_+$ и $\text{Im } z < v'_+$, причем полосы $v_- < \text{Im } z < v_+$ и $v'_- < \text{Im } z < v'_+$ имеют общую часть. Тогда с помощью (35) уравнение (34) можно переписать в виде

$$\mathcal{W}_+(z)\mathcal{Y}_+(z) + \mathcal{W}_-(z)\mathcal{Y}_-(z) + \mathcal{W}_-(z)\frac{C(z)}{B(z)} = 0. \quad (36)$$

Если последнее слагаемое в (36) можно представить в виде

$$\mathcal{W}_-(z)\frac{C(z)}{B(z)} = \mathcal{D}_+(z) + \mathcal{D}_-(z), \quad (37)$$

где функции $\mathcal{D}_+(z)$ и $\mathcal{D}_-(z)$ являются аналитическими в полуплоскостях $\text{Im } z > v''_+$ и $\text{Im } z < v''_+$ соответственно, и все три полосы $v_- < \text{Im } z < v_+$, $v'_- < \text{Im } z < v'_+$ и $v''_- < \text{Im } z < v''_+$ имеют общую часть — полосу $v''_- < \text{Im } z < v''_+$, то в этой полосе имеет место функциональное уравнение

$$\mathcal{W}_+(z)\mathcal{Y}_+(z) + \mathcal{D}_+(z) = -\mathcal{W}_-(z)\mathcal{Y}_-(z) - \mathcal{D}_-(z). \quad (38)$$

Левая часть (38) представляет собой функцию, аналитическую в полуплоскости $v''_- < \text{Im } z$, правая — функцию, аналитическую в области $\text{Im } z < v''_+$. Из равенства этих функций в полосе $v''_- < \text{Im } z < v''_+$ следует, что существует единственная целая функция, совпадающая соответственно с левой и правой частями (38) в областях их аналитичности. Если все функции, входящие в правые части (35) и (37), растут на бесконечности в своих областях аналитичности не быстрее, чем z^n , то из условия $\mathcal{Y}_\pm(z) \rightarrow 0$ при $|z| \rightarrow \infty$ следует, что эта целая функция является полиномом $\mathcal{P}_{n-1}(z)$ степени не выше $n - 1$. Тем самым равенства

$$\mathcal{Y}_+(z) = \frac{\mathcal{P}_{n-1}(z) - \mathcal{D}_+(z)}{\mathcal{W}_+(z)}, \quad \mathcal{Y}_-(z) = \frac{-\mathcal{P}_{n-1}(z) - \mathcal{D}_-(z)}{\mathcal{W}_-(z)} \quad (39)$$

определяют искомые функции с точностью до постоянных. Последние могут быть найдены из дополнительных условий задачи.

Применение метода Винера–Хопфа основано на представлениях (35) и (37). Если функция $\mathcal{G}(z)$ является аналитической в полосе $v_- < \text{Im } z < v_+$, причем в этой полосе $\mathcal{G}(z)$ равномерно стремится к нулю при $|z| \rightarrow \infty$, то в данной полосе возможно представление

$$\mathcal{G}(z) = \mathcal{G}_+(z) + \mathcal{G}_-(z), \quad (40)$$

где функция $\mathcal{G}_+(z)$ — аналитическая в полуплоскости $\text{Im } z > v_-$, а функция $\mathcal{G}_-(z)$ — в полуплоскости $\text{Im } z < v_+$, причем

$$\mathcal{G}_+(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty+iv'_-}^{\infty+iv'_-} \frac{\mathcal{G}(\tau)}{\tau - z} d\tau, \quad v_- < v'_- < \text{Im } z < v_+, \quad (41)$$

$$\mathcal{G}_-(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty+iv'_+}^{\infty+iv'_+} \frac{\mathcal{G}(\tau)}{\tau - z} d\tau, \quad v_- < \text{Im } z < v'_+ < v_+. \quad (42)$$

Интегралы (41) и (42), как интегралы, зависящие от параметра, определяют аналитические функции комплексной переменной z при условии, что точка z не лежит на контуре интегрирования.

В частности, $\mathcal{G}_+(z)$ является аналитической функцией в полуплоскости $\text{Im } z > v'_-$, а $\mathcal{G}_-(z)$ — в полуплоскости $\text{Im } z > v'_+$.

Кроме того, если функция $\mathcal{H}(z)$ является аналитической и отличной от нуля в полосе $v_- < \text{Im } z < v_+$, причем $\mathcal{H}(z)$ равномерно в этой полосе стремится к единице при $|z| \rightarrow \infty$, то в данной полосе имеет место представление

$$\mathcal{H}(z) = \mathcal{H}_+(z)\mathcal{H}_-(z), \quad (43)$$

$$\mathcal{H}_+(z) = \exp\left[\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty+iv'_-}^{\infty+iv'_-} \frac{\ln \mathcal{H}(\tau)}{\tau - z} d\tau\right], \quad v_- < v'_- < \text{Im } z < v_+, \quad (44)$$

$$\mathcal{H}_-(z) = \exp\left[-\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty+iv'_+}^{\infty+iv'_+} \frac{\ln \mathcal{H}(\tau)}{\tau - z} d\tau\right], \quad v_- < \text{Im } z < v'_+ < v_+, \quad (45)$$

где функции $\mathcal{H}_+(z)$ и $\mathcal{H}_-(z)$ являются аналитическими и отличными от нуля соответственно в полуплоскостях $\text{Im } z > v_-$ и $\text{Im } z < v_+$. Представление (43) называется факторизацией функции $\mathcal{H}(z)$.

11.10-4. Неоднородное уравнение Винера–Хопфа второго рода

Рассмотрим уравнение Винера–Хопфа второго рода

$$y(x) - \int_0^\infty K(x-t)y(t) dt = f(x). \quad (46)$$

Будем предполагать, что ядро уравнения $K(x)$ и его правая часть $f(x)$ удовлетворяют условиям (15), и будем искать решение $y^+(x)$ уравнения (46), для которого выполняется условие (17).

Тогда, проводя рассуждения, аналогичные рассуждениям при выводе функционального уравнения (19) для однородного интегрального уравнения, получаем, что в случае уравнения (46) в полосе $\mu < \operatorname{Im} z < v_+$ должно удовлетворяться функциональное уравнение

$$\mathcal{Y}_+(z) + \mathcal{Y}_-(z) = \sqrt{2\pi} \mathcal{K}(z) \mathcal{Y}_+(z) + \mathcal{F}_+(z) + \mathcal{F}_-(z) \quad (47)$$

или

$$\mathcal{W}(z) \mathcal{Y}_+(z) + \mathcal{Y}_-(z) - \mathcal{F}(z) = 0, \quad (48)$$

где $\mathcal{W}(z)$, как и в случае однородного уравнения подчинена условию (20).

Заметим теперь, что уравнение (48) является частным случаем уравнения (34). Функция $\mathcal{W}(z)$ в полосе $v_- < \operatorname{Im} z < v_+$ является аналитической и равномерно стремится к единице при $|z| \rightarrow \infty$, так как $|\mathcal{K}(z)| \rightarrow 0$ при $|z| \rightarrow \infty$. Тогда ее можно представить в виде (см. (43)–(45))

$$\mathcal{W}(z) = \frac{\mathcal{W}_+(z)}{\mathcal{W}_-(z)}, \quad (49)$$

где $\mathcal{W}_+(z)$ является аналитической функцией в верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z > v_-$, а $\mathcal{W}_-(z)$ — в нижней полуплоскости $\operatorname{Im} z < v_+$, причем функции $\mathcal{W}_\pm(z)$ растут на бесконечности не быстрее, чем z^n .

На основании представления (49) уравнение (48) принимает вид

$$\mathcal{W}_+(z) \mathcal{Y}_+(z) + \mathcal{W}_-(z) \mathcal{Y}_-(z) - \mathcal{W}_-(z) \mathcal{F}_-(z) - \mathcal{W}_-(z) \mathcal{F}_+(z) = 0. \quad (50)$$

Для приведения уравнения (50) к виду (38) достаточно разложить последнее слагаемое:

$$\mathcal{F}_+(z) \mathcal{W}_-(z) = \mathcal{D}_+(z) + \mathcal{D}_-(z), \quad (51)$$

на сумму функций $\mathcal{D}_+(z)$ и $\mathcal{D}_-(z)$, являющихся аналитическими в полуплоскостях $\operatorname{Im} z > \mu$ и $\operatorname{Im} z < v_+$ соответственно.

Для обоснования возможности представления (51) заметим, что $\mathcal{F}_+(z)$ является аналитической функцией в верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z > v_-$ и равномерно стремится к нулю при $|z| \rightarrow \infty$. Функция $\mathcal{W}_-(z)$ является аналитической в нижней полуплоскости $\operatorname{Im} z < v_+$, и по способу ее построения можно так провести факторизацию (49), чтобы $\mathcal{W}_-(z)$ оставалась ограниченной в полосе $v_- < \operatorname{Im} z < v_+$ при $|z| \rightarrow \infty$. Отсюда следует (см. (40)–(42)), что для функции $\mathcal{F}_+(z) \mathcal{W}_-(z)$ в полосе $v_- < \operatorname{Im} z < v_+$ выполнены все условия, достаточные для обоснования представления (51).

Проведенные рассуждения позволяют с учетом того, что функции $\mathcal{W}_\pm(z)$ растут на бесконечности не быстрее, чем z^n , представить изображения решения неоднородного интегрального уравнения (46) в виде

$$\mathcal{Y}_+(z) = \frac{\mathcal{P}_{n-1}(z) + \mathcal{D}_+(z)}{\mathcal{W}_+(z)}, \quad \mathcal{Y}_-(z) = \frac{-\mathcal{P}_{n-1}(z) + \mathcal{W}_-(z) \mathcal{F}_-(z) + \mathcal{D}_-(z)}{\mathcal{W}_-(z)}. \quad (52)$$

Само решение может быть получено из (52) с помощью формул обратного преобразования Фурье (6), (9) и (10).

11.10-5. Исключительный случай уравнения Винера–Хопфа второго рода

Рассмотрим исключительный случай уравнения Винера–Хопфа второго рода, когда функция $\mathcal{W}(z) = 1 - \sqrt{2\pi} \mathcal{K}(z)$ имеет конечное число нулей N (с учетом их кратности) в полосе $v_- < \operatorname{Im} z < v_+$. Возможность факторизации сохраняется и в этом случае. Для этого достаточно ввести вспомогательную функцию

$$\mathcal{W}_1(z) = \ln \left[(z^2 + b^2)^{N/2} \mathcal{W}(z) \prod_i (z - z_i)^{-\alpha_i} \right], \quad (53)$$

где α_i — кратность нулей z_i , а постоянная $b > \{|v_-|, |v_+|\}$ выбирается из условия, чтобы функция, стоящая под знаком логарифма, не имела дополнительных нулей в полосе $v_- < \text{Im } z < v_+$.

Однако в исключительном случае метод Винера–Хопфа приводит к результату только тогда, когда число нулей функции $\mathcal{W}(z)$ четно. Это связано с тем, что только в случае четного числа нулей можно добиться необходимого для применения метода Винера–Хопфа поведения функции $(z^2 + b^2)^{N/2}$ на бесконечности (см. Ф. Д. Гахов, Ю. И. Черский (1978), стр. 144–146). Последнее обстоятельство не мешает широкому использованию метода Винера–Хопфа для решения прикладных задач, где обычно ядро интегрального уравнения $K(x)$ является четной функцией, и поэтому все проводимые рассуждения безупречны.

Замечание 1. Уравнение Винера–Хопфа второго рода для функций, убывающих на бесконечности, приводится к краевой задаче Римана на действительной оси (см. п. 11.9-1). Тогда предположения о четности числа нулей функции $\mathcal{W}(z)$ или четности ядра интегрального уравнения $K(x)$ в исключительном случае несущественны.

Замечание 2. Полное решение уравнения Винера–Хопфа второго рода для функций, растущих на бесконечности, приведено в упомянутой книге Ф. Д. Гахова, Ю. И. Черского (1978).

Замечание 3. Метод Винера–Хопфа можно использовать и для решения интегральных уравнений Винера–Хопфа первого рода при условии четности ядер этих уравнений.

⊙ *Литература:* Б. Нобл (1962), А. Г. Свешников, А. Н. Тихонов (1970), В. И. Смирнов (1974), Ф. Д. Гахов (1977), Ф. Д. Гахов, Ю. И. Черский (1978).

11.11. Метод Крейна для уравнения Винера–Хопфа

11.11-1. Некоторые замечания. Проблема факторизации

Рассмотрим уравнение Винера–Хопфа второго рода

$$y(x) - \int_0^\infty K(x-t)y(t) dt = f(x), \quad 0 \leq x < \infty, \quad (1)$$

где $f(x)$, $y(x) \in L_1(0, \infty)$ и $K(x) \in L_1(-\infty, \infty)$. Будем использовать классы функций, представимых как изображения преобразования Фурье (альтернативного преобразования Фурье в несимметричной форме, см. п. 7.4-3) функций из $L_1(-\infty, \infty)$, $L_1(0, \infty)$ и $L_1(-\infty, 0)$. Для краткости вместо этих символов будем просто писать L , L_+ и L_- . Пусть функции $h(x)$, $h_1(x)$, и $h_2(x)$ принадлежат соответственно L , L_+ и L_- , тогда их изображения можно представить в форме

$$\tilde{H}(u) = \int_{-\infty}^\infty h(x)e^{iux} dx, \quad \tilde{H}_1(u) = \int_0^\infty h_1(x)e^{iux} dx, \quad \tilde{H}_2(u) = \int_{-\infty}^0 h_2(x)e^{iux} dx.$$

Через Q , Q_+ и Q_- обозначим классы функций, представимых соответственно в виде

$$\tilde{W}(u) = 1 + \tilde{H}(u), \quad \tilde{W}_1(u) = 1 + \tilde{H}_1(u), \quad \tilde{W}_2(u) = 1 + \tilde{H}_2(u), \quad (2)$$

где функции из Q_+ или Q_- , рассматриваемые как функции комплексной переменной $z = u + iv$, аналитичны при $\text{Im } z > 0$ или $\text{Im } z < 0$ и непрерывны вплоть до вещественной оси.

Пусть $T(x)$ принадлежит L , а $\tilde{T}(u)$ — ее изображение, причем

$$1 - \tilde{T}(u) \neq 0, \quad \text{Ind}[1 - \tilde{T}(u)] = \frac{1}{2\pi} \left\{ \arg[1 - \tilde{T}(u)] \right\}_{-\infty}^\infty = 0, \quad -\infty < u < \infty, \quad (3)$$

тогда существует такое $q(x) \in L$, что

$$\ln[1 - \tilde{T}(u)] = \int_{-\infty}^\infty q(x)e^{iux} dx. \quad (4)$$

Из этой формулы непосредственно следует, что $\ln[1 - \tilde{T}(u)] \rightarrow 0$ при $u \rightarrow \pm\infty$.

Далее будем использовать *факторизацию* непрерывных на промежутке $-\infty \leq u \leq \infty$ функций $\tilde{M}(u)$ класса Q . Под этим будем понимать представление функции $\tilde{M}(u)$ в виде произведения

$$\tilde{M}(u) = \tilde{M}_+(u) \left(\frac{u-i}{u+i} \right)^k \tilde{M}_-(u), \quad (5)$$

где $\check{\mathcal{M}}_-(z)$ и $\check{\mathcal{M}}_+(z)$ — аналитические функции в соответствующих полуплоскостях $\text{Im } z > 0$ и $\text{Im } z < 0$, непрерывные вплоть до вещественной оси. Кроме того,

$$\check{\mathcal{M}}_+(z) \neq 0 \quad \text{при} \quad \text{Im } z \geq 0 \quad \text{и} \quad \check{\mathcal{M}}_-(z) \neq 0 \quad \text{при} \quad \text{Im } z \leq 0. \quad (6)$$

Из (5) можно заключить, что

$$k = \text{Ind } \check{\mathcal{M}}(u).$$

Факторизация (5) называется *канонической*, если $k = 0$.

В дальнейшем будем рассматривать лишь функции вида

$$\check{\mathcal{M}}(u) = 1 - \check{T}(u), \quad (7)$$

такие что $\check{\mathcal{M}}(\pm\infty) = 1$. Можно также считать, что

$$\check{\mathcal{M}}_+(\pm\infty) = \check{\mathcal{M}}_-(\pm\infty) = 1. \quad (8)$$

Сформулируем основные результаты, касающиеся проблемы факторизации.

Для того чтобы функция (7) допускала каноническую факторизацию, необходимо и достаточно наличия двух условий:

$$\check{\mathcal{M}}(u) \neq 0, \quad \text{Ind } \check{\mathcal{M}}(u) = 0. \quad (9)$$

При этом каноническая факторизация единственна. Кроме того, при выполнении условий (9) существует функция $M(x)$ из L такая, что

$$\check{\mathcal{M}}(u) = \exp \left[\int_{-\infty}^{\infty} M(x) e^{iux} dx \right], \quad (10)$$

$$\check{\mathcal{M}}_+(u) = \exp \left[\int_0^{\infty} M(x) e^{iux} dx \right], \quad \check{\mathcal{M}}_-(u) = \exp \left[\int_{-\infty}^0 M(x) e^{iux} dx \right]. \quad (11)$$

Отсюда следует, что $\check{\mathcal{M}}(u) \in Q$ и $\check{\mathcal{M}}_{\pm}(u) \in Q_{\pm}$. Множители в канонической факторизации определяются также следующими формулами:

$$\ln \check{\mathcal{M}}_+(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln \check{\mathcal{M}}(\tau)}{\tau - z} d\tau, \quad \text{Im } z > 0, \quad (12)$$

$$\ln \check{\mathcal{M}}_-(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln \check{\mathcal{M}}(\tau)}{\tau - z} d\tau, \quad \text{Im } z < 0. \quad (13)$$

В общем случае факторизации имеет место следующее предложение. Для того чтобы функция (7) допускала факторизацию (5), необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\check{\mathcal{M}}(u) \neq 0, \quad -\infty < u < \infty.$$

В этом случае равенство (5) можно переписать в виде

$$\left(\frac{u-i}{u+i} \right)^{-k} \check{\mathcal{M}}(u) = \check{\mathcal{M}}_-(u) \check{\mathcal{M}}_+(u), \quad -\infty < u < \infty.$$

Последнее означает каноническую факторизацию для функции

$$\check{\mathcal{M}}_1(u) = \left(\frac{u-i}{u+i} \right)^{-k} \check{\mathcal{M}}(u).$$

Следовательно, для множителей $\check{\mathcal{M}}_{\pm}(u)$ справедливы формулы (10)–(13), если в них заменить $\check{\mathcal{M}}(u)$ на $\check{\mathcal{M}}_1(u)$.

Вернемся теперь к уравнению (1), для которого

$$\check{K}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x) e^{iux} dx. \quad (14)$$

11.11-2. Решение уравнения Винера–Хопфа второго рода

Теорема 1. Для того чтобы уравнение (1) при любом $f(x)$ из L_+ имело одно и только одно решение из L_+ , необходимы и достаточны следующие условия:

$$1 - \check{K}(u) \neq 0, \quad -\infty < u < \infty, \quad (15)$$

$$\nu = -\text{Ind}[1 - \check{K}(u)] = 0. \quad (16)$$

Теорема 2. Если выполнено условие (15), то неравенство $\nu > 0$ является необходимым и достаточным условием того, чтобы однородное уравнение

$$y(x) - \int_0^\infty K(x-t)y(t) dt = 0 \quad (17)$$

имело в L_+ отличные от нуля решения. Множество этих решений имеет базис, состоящий из ν функций $\varphi_k(x)$ ($k = 1, 2, \dots, \nu$), стремящихся к нулю при $x \rightarrow \infty$ и связанных между собою следующими соотношениями:

$$\varphi_k(x) = \int_0^x \varphi_{k+1}(t) dt, \quad k = 1, 2, \dots, \nu-1, \quad \varphi_\nu(x) = \int_0^x \psi(t) dt + C, \quad (18)$$

где C — некоторая отличная от нуля постоянная, а функции $\varphi_k(t)$ и $\psi(t)$ принадлежат L_+ .

Теорема 3. Если выполнено условие (15) и $\nu > 0$, то при любом $f(x) \in L_+$ уравнение (1) имеет бесчисленное множество решений из L_+ .

Если же $\nu < 0$, то при данном $f(x) \in L_+$ уравнение (1) либо вовсе не имеет решений из L_+ , либо имеет единственное решение. Для того чтобы имел место последний случай, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

$$\int_0^\infty f(x)\psi_k(x) dx = 0, \quad k = 1, 2, \dots, |\nu|, \quad (19)$$

где $\psi_k(x)$ — какой-либо базис множества всех решений транспонированного однородного уравнения

$$\psi(x) - \int_0^\infty K(t-x)\psi(t) dt = 0. \quad (20)$$

1°. Если выполнены условия (15), (16), то имеется единственная факторизация:

$$[1 - \check{K}(u)]^{-1} = \check{M}_+(u)\check{M}_-(u), \quad (21)$$

причем

$$\check{M}_+(u) = 1 + \int_0^\infty R_+(t)e^{iut} dt, \quad \check{M}_-(u) = 1 + \int_0^\infty R_-(t)e^{-iut} dt. \quad (22)$$

Резольвента определяется формулой

$$R(x, t) = R_+(x-t) + R_-(t-x) + \int_0^\infty R_+(x-s)R_-(t-s) ds \quad (23)$$

где $0 \leq x < \infty$, $0 \leq t < \infty$, $R_+(x) = 0$ и $R_-(x) = 0$ при $x < 0$, так что при $f(x)$ из L_+ решение уравнения определяется выражением

$$y(x) = f(x) + \int_0^\infty R(x, t)f(t) dt. \quad (24)$$

Формулу (23) можно записать в следующем виде:

$$R(x, t) = R(x-t, 0) + R(0, t-x) + \int_0^\infty R(x-s, 0)R(0, t-s) ds. \quad (25)$$

Если $K(x-t) = K(t-x)$, то формула (25) имеет вид

$$R(x, t) = R(|x-t|, 0) + \int_0^{\min(x, t)} R(x-s, 0)R(t-s, 0) ds. \quad (26)$$

Отметим, что $R_+(x) = R(x, 0)$ и $R_-(x) = R(0, x)$ — единственные в классе L_+ решения уравнений следующего вида ($0 \leq x < \infty$):

$$\begin{aligned} R_+(x) + \int_0^\infty K(x-t)R_+(t)dt &= K(x), \\ R_-(x) + \int_0^\infty K(t-x)R_-(t)dt &= K(-x). \end{aligned} \quad (27)$$

2°. Положим, что выполнено условие (15), но

$$\nu = -\text{Ind}[1 - \tilde{K}(u)] > 0.$$

В этом случае функция $[1 - \tilde{K}(u)]^{-1}$ допускает следующую факторизацию:

$$[1 - \tilde{K}(u)]^{-1} = \tilde{G}_-(u) \left(\frac{u-i}{u+i} \right)^\nu \tilde{G}_+(u), \quad -\infty < u < \infty. \quad (28)$$

Для функций $\tilde{M}_-(u)$ и $\tilde{M}_+(u)$, определенных равенствами

$$\tilde{M}_-(u) = \tilde{G}_-(u) \quad \text{и} \quad \tilde{M}_+(u) = \left(\frac{u-i}{u+i} \right)^\nu \tilde{G}_+(u), \quad (29)$$

имеет место представление (22) и формула (23) для резольвенты.

Кроме того, для $k = 1, 2, \dots, \nu$ имеют место представления

$$\frac{i^k \tilde{M}_+(u)}{(u-i)^k} = \int_0^\infty g_k(x) e^{iux} dx, \quad (30)$$

причем $g_k(x)$ — решения однородного уравнения (17). Через них можно, естественно, выразить и решения $\varphi_k(x)$, упомянутые в теореме 2.

3°. Если $\nu = -\text{Ind}[1 - \tilde{K}(u)] < 0$, то у транспонированного уравнения

$$y(x) - \int_0^\infty K(t-x)y(t)dt = f(x) \quad (31)$$

индекс $-\nu > 0$. Если формула (28) определяет факторизацию для уравнения (1), то для транспонированного уравнения имеем факторизацию

$$[1 - \tilde{K}(u)]^{-1} = \tilde{M}_-(-u)\tilde{M}_+(-u),$$

причем $\tilde{M}_-(-u)$ играет роль $\tilde{M}_+(u)$ и $\tilde{M}_+(-u)$ — роль $\tilde{M}_-(u)$.

11.11-3. Формула Хопфа–Фока

Приведем здесь полезную формулу, позволяющую выразить решение уравнения (1) для произвольной правой части $f(x)$ через решение более простого вспомогательного интегрального уравнения с правой частью экспоненциального вида.

Пусть в уравнении (1)

$$f(x) = e^{i\zeta x}, \quad \text{Im } \zeta > 0, \quad y(x) = y_\zeta(x) \quad (32)$$

и, кроме того, выполнены условия (15), (16). Тогда

$$y_\zeta(x) = e^{i\zeta x} + \int_0^\infty R(x,t)e^{i\zeta t}dt, \quad (33)$$

где $R(x, t)$ имеет вид (25). После некоторых преобразований можно получить, что

$$y_\zeta(x) = \tilde{M}_-(-\zeta) \left[1 + \int_0^x R(t, 0)e^{-i\zeta t}dt \right] e^{i\zeta x}. \quad (34)$$

Полагая $x = 0$ в (34), будем иметь

$$y_\zeta(0) = \tilde{M}_-(-\zeta), \quad (35)$$

причем при четной функции $K(x)$, описывающей ядро интегрального уравнения

$$y_\zeta(0) = \tilde{M}_+(\zeta). \quad (36)$$

Располагая формулой (34), можно получить решение уравнения (1) и в общем случае $f(x)$ (см. также разд. 9.6):

$$y(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \tilde{F}_+(-\zeta)y_\zeta(x)d\zeta, \quad \tilde{F}_+(u) = \int_0^\infty f(x)e^{iux}dx. \quad (37)$$

Замечание 1. Все полученные в разд. 11.11 результаты, касающиеся уравнения Винера–Хопфа второго рода справедливы также для непрерывных, квадратично суммируемых и ряда других классов функций, которые подробно обсуждаются в работе М. Г. Крейна (1958) и книге С. Corduneanu (1973).

Замечание 2. Решение уравнения Винера–Хопфа в других классах функций может быть построено и в исключительном случае, когда $1 - \tilde{K}(u) = 0$ (см. пп. 11.9-1 и 11.10-5).

⊙ *Литература:* В. А. Фок (1942), М. Г. Крейн (1958), П. П. Забрейко, А. И. Кошелев и др. (1968), С. Corduneanu (1973), В. И. Смирнов (1974).

11.12. Методы решения уравнений с разностным ядром на конечном отрезке

11.12-1. Метод Крейна

Рассмотрим метод построения точных аналитических решений линейных интегральных уравнений с произвольной правой частью. Метод основан на построении двух вспомогательных решений более простых уравнений с правой частью равной единице. Вспомогательные решения используются для построения решения исходного уравнения при произвольной правой части.

1°. Пусть дано уравнение

$$y(x) - \int_a^b K(x, t)y(t) dt = f(x), \quad a \leq x \leq b. \quad (1)$$

Одновременно с (1) будем рассматривать два вспомогательных уравнения, зависящих от параметра ξ ($a \leq \xi \leq b$):

$$\begin{aligned} w(x, \xi) - \int_a^\xi K(x, t)w(t, \xi) dt &= 1, \\ w^*(x, \xi) - \int_a^\xi K(t, x)w^*(t, \xi) dt &= 1, \end{aligned} \quad (2)$$

где $a \leq x \leq \xi$. Пусть для любого ξ вспомогательные уравнения (2) имеют единственные непрерывные решения $w(x, \xi)$ и $w^*(x, \xi)$, удовлетворяющие условию $w(\xi, \xi)w^*(\xi, \xi) \neq 0$ ($a \leq \xi \leq b$). Тогда для любой непрерывной функции $f(x)$ единственное непрерывное решение уравнения (1) может быть получено по формуле

$$y(x) = F(b)w(x, b) - \int_x^b w(x, \xi)F'_\xi(\xi) d\xi, \quad F(\xi) = \frac{1}{m(\xi)} \frac{d}{d\xi} \int_a^\xi w^*(t, \xi)f(t) dt, \quad (3)$$

где

$$m(\xi) = w(\xi, \xi)w^*(\xi, \xi).$$

Формула (3) позволяет строить решение уравнения (1) с произвольной правой частью $f(x)$ с помощью решений двух более простых вспомогательных уравнений (2) (зависящих от параметра ξ) с постоянной правой частью равной единице.

2°. Рассмотрим теперь уравнение с ядром, зависящим от разности аргументов:

$$y(x) + \int_a^b K(x - t)y(t) dt = f(x), \quad a \leq x \leq b. \quad (4)$$

Считается, что $K(x)$ — четная функция, интегрируемая на отрезке $[a - b, b - a]$. Одновременно с (4) будем рассматривать вспомогательное уравнение, зависящее от параметра ξ ($a \leq \xi \leq b$):

$$w(x, \xi) + \int_a^\xi K(x - t)w(t, \xi) dt = 1, \quad a \leq x \leq \xi. \quad (5)$$

Пусть для любого ξ вспомогательное уравнение (5) имеет единственное непрерывное решение $w(x, \xi)$. Тогда для любой непрерывной функции $f(x)$ решение уравнения (4) может быть получено по формуле (3), если в ней положить $w^*(x, t) = w(x, t)$.

Укажем здесь еще одну полезную формулу для уравнения с ядром, зависящим от разности аргументов:

$$y(x) + \int_{-a}^a K(x - t)y(t) dt = f(x), \quad -a \leq x \leq a. \quad (6)$$

Считается, что $K(x)$ — четная функция, интегрируемая на отрезке $[-2a, 2a]$. Одновременно с (6) будем рассматривать вспомогательное уравнение, зависящее от параметра ξ ($0 < \xi \leq a$):

$$w(x, \xi) + \int_{-\xi}^\xi K(x - t)w(t, \xi) dt = 1, \quad -\xi \leq x \leq \xi. \quad (7)$$

Пусть для любого ξ вспомогательное уравнение (7) имеет единственное непрерывное решение $w(x, \xi)$. Тогда для любой непрерывной функции $f(x)$ решение уравнения (6) может быть получено по формуле

$$\begin{aligned} y(x) = & \frac{1}{2M(a)} \left[\frac{d}{da} \int_{-a}^a w(t, a) f(t) dt \right] w(x, a) - \\ & - \frac{1}{2} \int_{|x|}^a w(x, \xi) \frac{d}{d\xi} \left[\frac{1}{M(\xi)} \frac{d}{d\xi} \int_{-\xi}^{\xi} w(t, \xi) f(t) dt \right] d\xi - \\ & - \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \int_{|x|}^a \frac{w(x, \xi)}{M(\xi)} \left[\int_{-\xi}^{\xi} w(t, \xi) df(t) \right] d\xi, \end{aligned} \quad (8)$$

где $M(\xi) = w^2(\xi, \xi)$, а последний внутренний интеграл берется по Стильтесу.

11.12-2. Ядра с рациональными преобразованиями Фурье

Рассмотрим уравнение вида

$$y(x) - \int_0^T K(x-t)y(t) dt = f(x), \quad (9)$$

где $0 \leq x \leq T < \infty$. Если ядро $K(x)$ интегрируемо в промежутке $[-T, T]$, то к этому уравнению применима теория Фредгольма.

Поскольку в уравнение входят значения ядра $K(x)$ лишь для $[-T, T]$, то можно продолжить ядро любым образом вне этого отрезка. Пусть ядро продолжено на всю ось с сохранением интегрируемости. Тогда в пространстве $L_2(0, T)$ уравнение (9) в общем случае сводится к краевой задаче теории аналитических функций (задаче Римана) для двух пар неизвестных функций.

Если преобразование Фурье ядра

$$\check{K}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x) e^{iux} dx$$

рационально, то уравнение (9) решается в замкнутом виде. Пусть $1 - \check{K}(u) \neq 0$ ($-\infty < u < \infty$). Тогда изображение решения интегрального уравнения (9) дается формулой

$$\check{Y}(u) = \frac{1}{1 - \check{K}(u)} [\check{F}(u) - \check{W}^+(u) - e^{-iT u} \check{W}^-(u)], \quad (10)$$

в которой

$$\check{W}^{\pm}(u) = \sum_n \sum_{k=1}^{p_n^{\pm}} \frac{M_{nk}^{\pm}}{(u - b_n^{\pm})^k},$$

где b_n^+ и b_n^- — полюсы функции $1 - \check{K}(u)$, лежащие соответственно в верхней и нижней полуплоскости, p_n^{\pm} — их кратности. Постоянные M_{nk}^{\pm} могут быть определены из условий

$$\begin{aligned} \frac{d^s}{du^s} [\check{W}^+(u) + e^{-iT u} \check{W}^-(u) - \check{F}(u)]_{u=a_n^+} &= 0, & s = 0, 1, \dots, q_n^+ - 1, \\ \frac{d^s}{du^s} [\check{W}^+(u) + e^{-iT u} - \check{F}(u)]_{u=a_n^-} &= 0, & s = 0, 1, \dots, q_n^- - 1, \end{aligned}$$

где a_n^+ и a_n^- — нули функции $1 - \check{K}(u)$, лежащие соответственно в верхней и нижней полуплоскости, q_n^{\pm} — их кратности. Постоянные M_{nk}^{\pm} можно определять также с помощью подстановки решения в исходное уравнение. Решение интегрального уравнения (9) получается обращением формулы (10).

11.12-3. Сведение к обыкновенным дифференциальным уравнениям

1°. Рассмотрим специальный случай, когда образ ядра интегрального уравнения (9), полученный с помощью преобразования Фурье, можно представить в виде

$$\check{K}(u) = \frac{\check{\mathcal{M}}(u)}{\check{\mathcal{N}}(u)}, \quad (11)$$

где $\check{\mathcal{M}}(u)$ и $\check{\mathcal{N}}(u)$ некоторые многочлены степеней m и n соответственно:

$$\check{\mathcal{M}}(u) = \sum_{k=0}^m A_k u^k, \quad \check{\mathcal{N}}(u) = \sum_{k=0}^n B_k u^k. \quad (12)$$

В этом случае решение интегрального уравнения (9) (если оно существует) удовлетворяет линейному неоднородному обыкновенному дифференциальному уравнению m -го порядка с постоянными коэффициентами

$$\check{\mathcal{M}}\left(i \frac{d}{dx}\right)y(x) = \check{\mathcal{N}}\left(i \frac{d}{dx}\right)f(x), \quad 0 < x < T. \quad (13)$$

Решение уравнения (13) содержит m произвольных постоянных, которые определяются подстановкой решения в исходное уравнение (9). При этом для определения постоянных получается система линейных алгебраических уравнений.

2°. Рассмотрим уравнение Фредгольма второго рода с разностным ядром, содержащим сумму экспонент:

$$y(x) + \int_a^b \left(\sum_{k=1}^n A_k e^{\lambda_k |x-t|} \right) y(t) dt = f(x). \quad (14)$$

Это уравнение в общем случае можно свести к линейному неоднородному обыкновенному дифференциальному уравнению $2n$ -го порядка с постоянными коэффициентами.

Пример. Рассмотрим уравнение

$$y(x) + \int_a^b e^{\lambda |x-t|} g(t) y(t) dt = f(x), \quad a \leq x \leq b,$$

которое при $g(t) \equiv \text{const}$ будет частным случаем уравнения (14).

1°. Раскроем модуль в подынтегральном выражении. В результате получим

$$y(x) + \int_a^x e^{\lambda(x-t)} g(t) y(t) dt + \int_x^b e^{\lambda(t-x)} g(t) y(t) dt = f(x). \quad (15)$$

Дифференцируя (15) дважды по x , имеем

$$y''_{xx}(x) + 2\lambda g(x)y(x) + \lambda^2 \int_a^x e^{\lambda(x-t)} g(t) y(t) dt + \lambda^2 \int_x^b e^{\lambda(t-x)} g(t) y(t) dt = f''_{xx}(x). \quad (16)$$

Исключая из (15) и (16) интегральные члены, приходим к следующему обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка для функции $y = y(x)$:

$$y''_{xx} + 2\lambda g(x)y - \lambda^2 y = f''_{xx}(x) - \lambda^2 f(x). \quad (17)$$

2°. Выведем граничные условия для уравнения (17). Будем считать, что пределы интегрирования удовлетворяют условиям $-\infty < a < b < \infty$. Полагая в (15) $x = a$ и $x = b$, имеем два следствия:

$$\begin{aligned} y(a) + e^{-\lambda a} \int_a^b e^{\lambda t} g(t) y(t) dt &= f(a), \\ y(b) + e^{\lambda b} \int_a^b e^{-\lambda t} g(t) y(t) dt &= f(b). \end{aligned} \quad (18)$$

Выразим из уравнения (17) произведение $g(x)y$ через y''_{xx} и f''_{xx} и подставим в (18). После интегрирования по частям получим

$$\begin{aligned} e^{\lambda b} \varphi'_x(b) - e^{\lambda a} \varphi'_x(a) &= \lambda e^{\lambda a} \varphi(a) + \lambda e^{\lambda b} \varphi(b), \\ e^{-\lambda b} \varphi'_x(b) - e^{-\lambda a} \varphi'_x(a) &= \lambda e^{-\lambda a} \varphi(a) + \lambda e^{-\lambda b} \varphi(b), \end{aligned} \quad \varphi(x) = y(x) - f(x).$$

Отсюда после некоторых преобразований найдем граничные условия для функции $y(x)$:

$$\varphi'_x(a) + \lambda \varphi(a) = 0, \quad \varphi'_x(b) - \lambda \varphi(b) = 0; \quad \varphi(x) = y(x) - f(x). \quad (19)$$

Уравнение (17) вместе с граничными условиями (19) описывает решение исходного интегрального уравнения. При $g(t) \equiv \text{const}$ соответствующее решение приведено в книге А. Д. Полянина, А. В. Манжирова (1998, стр. 261).

3°. Уравнения с разностным ядром, содержащим сумму гиперболических функций:

$$y(x) + \int_a^b K(x-t)y(t) dt = f(x), \quad K(x) = \sum_{k=1}^n A_k \text{sh}(\lambda_k |x|) \quad (20)$$

также с помощью дифференцирования сводятся к линейным неоднородным обыкновенным дифференциальным уравнениям $2n$ -го порядка с постоянными коэффициентами.

4°. Уравнения с разностным ядром, содержащим сумму тригонометрических функций:

$$y(x) + \int_a^b K(x-t)y(t) dt = f(x), \quad K(x) = \sum_{k=1}^n A_k \sin(\lambda_k |x|) \quad (21)$$

также можно свести к линейным неоднородным обыкновенным дифференциальным уравнениям $2n$ -го порядка с постоянными коэффициентами.

● *Литература:* W. B. Davenport, W. L. Root (1958), И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн (1967), П. П. Забрейко, А. И. Кошелев и др. (1968), А. Д. Полянин, А. В. Манжиров (1998), A. D. Polyanin, A. V. Manzhirov (1998), А. В. Манжиров, А. Д. Полянин (1999, 2000).

11.13. Метод замены ядра вырожденным

11.13-1. Аппроксимация ядра

Для приближенного решения интегрального уравнения Фредгольма второго рода

$$y(x) - \int_a^b K(x,t)y(t) dt = f(x), \quad a \leq x \leq b, \quad (1)$$

где функции $f(x)$ и $K(x,t)$ для простоты будем считать непрерывными, ядро $K(x,t)$ заменяют близким к нему вырожденным ядром

$$K_{(n)}(x,t) = \sum_{k=0}^n g_k(x)h_k(t). \quad (2)$$

Укажем несколько способов такой замены. Если ядро $K(x,t)$ достаточное число раз дифференцируемо по x на отрезке $[a,b]$, то в качестве вырожденного ядра $K_{(n)}(x,t)$ можно взять конечный отрезок ряда Тейлора:

$$K_{(n)}(x,t) = \sum_{m=0}^n \frac{(x-x_0)^m}{m!} K_x^{(m)}(x_0,t), \quad (3)$$

где x_0 — некоторая точка отрезка $[a,b]$. Аналогичный прием можно применить также, если $K(x,t)$ достаточное число раз дифференцируемо по t на отрезке $[a,b]$.

Для построения вырожденного ядра можно также использовать конечный отрезок двойного ряда Тейлора:

$$K_{(n)}(x,t) = \sum_{p=0}^n \sum_{q=0}^n a_{pq} (x-x_0)^p (t-t_0)^q, \quad (4)$$

где

$$a_{pq} = \frac{1}{p!q!} \frac{\partial^{p+q}}{\partial x^p \partial t^q} K(x,t) \Big|_{\substack{x=x_0 \\ t=t_0}}, \quad a \leq x_0 \leq b, \quad a \leq t_0 \leq b.$$

Непрерывное ядро $K(x,t)$ допускает также аппроксимацию тригонометрическим полиномом периода $2l$, где $l = b - a$.

Например, можно положить

$$K_{(n)}(x,t) = \frac{1}{2} a_0(t) + \sum_{k=1}^n a_k(t) \cos\left(\frac{k\pi x}{l}\right), \quad (5)$$

где $a_k(t)$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) — коэффициенты ряда Фурье:

$$a_k(t) = \frac{2}{l} \int_a^b K(x,t) \cos \frac{k\pi x}{l} dx. \quad (6)$$

Аналогичное разложение получается, если поменять ролями переменные x и t . Можно также использовать конечный отрезок двойного ряда Фурье, полагая, например,

$$a_k(t) \approx \frac{1}{2} a_{k0} + \sum_{m=1}^n a_{km} \cos\left(\frac{m\pi t}{l}\right), \quad k = 0, 1, \dots, n, \quad (7)$$

из формул (5)–(7) имеем

$$K_{(n)}(x, t) = \frac{1}{4}a_{00} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n a_{k0} \cos\left(\frac{k\pi x}{l}\right) + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^n a_{0m} \cos\left(\frac{m\pi t}{l}\right) + \\ + \sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^n a_{km} \cos\left(\frac{k\pi x}{l}\right) \cos\left(\frac{m\pi t}{l}\right),$$

где

$$a_{km} = \frac{4}{l^2} \int_a^b \int_a^b K(x, t) \cos\left(\frac{k\pi x}{l}\right) \cos\left(\frac{m\pi t}{l}\right) dx dt. \quad (8)$$

Существуют и другие приемы аппроксимации ядра $K(x, t)$.

11.13-2. Приближенное решение

Если $K_{(n)}(x, t)$ есть вырожденное ядро, аппроксимирующее ядро $K(x, t)$, и функция $f_n(x)$ близка к $f(x)$, то решение $y_n(x)$ интегрального уравнения

$$y_n(x) - \int_a^b K_{(n)}(x, t)y_n(t) dt = f_n(x) \quad (9)$$

можно рассматривать как приближение решения $y(x)$ уравнения (1).

Пусть справедлива следующая оценка погрешности:

$$\int_a^b |K(x, t) - K_{(n)}(x, t)| dt \leq \varepsilon, \quad |f(x) - f_n(x)| \leq \delta,$$

и резольвента $R_n(x, t)$ для уравнения (9) такова, что

$$\int_a^b |R_n(x, t)| dt \leq M_n$$

при $a \leq x \leq b$, причем выполнено неравенство

$$q = \varepsilon(1 + M_n) < 1.$$

Тогда уравнение (1) имеет единственное решение $y(x)$ и

$$|y(x) - y_n(x)| \leq \varepsilon \frac{N(1 + M_n)^2}{1 - q} + \delta, \quad N = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|. \quad (10)$$

Пример. Найдём приближенное решение уравнения

$$y(x) - \int_0^{1/2} e^{-x^2 t^2} y(t) dt = 1. \quad (11)$$

Пользуясь разложением в двойной ряд Тейлора, ядро

$$K(x, t) = e^{-x^2 t^2}$$

заменяем приближенным вырожденным ядром

$$K_{(2)}(x, t) = 1 - x^2 t^2 + \frac{1}{2} x^4 t^4.$$

Отсюда вместо уравнения (11) получаем

$$y_2(x) = 1 + \int_0^{1/2} \left(1 - x^2 t^2 + \frac{1}{2} x^4 t^4\right) y_2(t) dt. \quad (12)$$

Следовательно,

$$y_2(x) = 1 + A_1 + A_2 x^2 + A_3 x^4, \quad (13)$$

где

$$A_1 = \int_0^{1/2} y_2(x) dx, \quad A_2 = - \int_0^{1/2} x^2 y_2(x) dx, \quad A_3 = \frac{1}{2} \int_0^{1/2} x^4 y_2(x) dx. \quad (14)$$

На основании формул (13) и (14) получим систему трех уравнений с тремя неизвестными, решив которую, с точностью до четырех значащих цифр будем иметь

$$A_1 = 0,9930, \quad A_2 = -0,0833, \quad A_3 = 0,0007.$$

Следовательно,

$$y(x) \approx y_2(x) = 1,9930 - 0,0833 x^2 + 0,0007 x^4, \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2}. \quad (15)$$

Оценку погрешности приближенного решения (15) можно произвести по формуле (10).

● *Литература:* С. Г. Михлин (1959), Л. В. Канторович, В. И. Крылов (1962), Б. П. Демидович, И. А. Марон, Е. З. Шувалова (1963), М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко (1968).

11.14. Метод Бейтмена

11.14-1. Общая схема метода

Может оказаться полезной часто не только замена данного ядра вырожденным, но и приближенное его представление в виде суммы ядра, для которого резольвента известна, и вырожденного ядра. Для ядер последнего вида резольвента может быть дана в конечном виде.

Рассмотрим интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$y(x) - \lambda \int_a^b k(x, t) y(t) dt = f(x) \quad (1)$$

с ядром $k(x, t)$, резольвента которого $r(x, t; \lambda)$ известна, т. е. решение (1) может быть представлено в форме

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b r(x, t; \lambda) f(t) dt. \quad (2)$$

Тогда для интегрального уравнения с ядром

$$K(x, t) = \frac{1}{\Delta(a_{ij})} \begin{vmatrix} k(x, t) & g_1(x) & \cdots & g_n(x) \\ h_1(t) & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_n(t) & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad \Delta(a_{ij}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad (3)$$

где $g_i(x)$, $h_i(t)$ и a_{ij} ($i, j = 1, 2, \dots, n$) — произвольные функции и произвольные числа соответственно, резольвента дается в виде

$$R(x, t; \lambda) = \frac{1}{\Delta(a_{ij} + \lambda b_{ij})} \begin{vmatrix} r(x, t; \lambda) & \varphi_1(x) & \cdots & \varphi_n(x) \\ \psi_1(t) & a_{11} + \lambda b_{11} & \cdots & a_{1n} + \lambda b_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_n(t) & a_{n1} + \lambda b_{n1} & \cdots & a_{nn} + \lambda b_{nn} \end{vmatrix}, \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_k(x) &= g_k(x) + \lambda \int_a^b r(x, t; \lambda) g_k(t) dt, \quad \psi_k(x) = h_k(x) + \lambda \int_a^b r(x, t; \lambda) h_k(t) dt, \\ b_{ij} &= \int_a^b g_j(x) h_i(x) dx, \quad k, i, j = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (5)$$

11.14-2. Некоторые частные случаи

Предположим, что

$$K(x, t) = k(x, t) - \sum_{k=1}^n g_k(x) h_k(t), \quad (6)$$

т. е. в формуле (3) $a_{ij} = 0$ при $i \neq j$ и $a_{ii} = 1$. Резольвента для этого случая примет вид

$$\begin{aligned} R(x, t; \lambda) &= \frac{1}{\Delta_*} \begin{vmatrix} r(x, t; \lambda) & \varphi_1(x) & \cdots & \varphi_n(x) \\ \psi_1(t) & 1 + \lambda b_{11} & \cdots & \lambda b_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_n(t) & \lambda b_{n1} & \cdots & 1 + \lambda b_{nn} \end{vmatrix}, \\ \Delta_* &= \begin{vmatrix} 1 + \lambda b_{11} & \lambda b_{12} & \cdots & \lambda b_{1n} \\ \lambda b_{21} & 1 + \lambda b_{22} & \cdots & \lambda b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda b_{n1} & \lambda b_{n2} & \cdots & 1 + \lambda b_{nn} \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (7)$$

Пусть, кроме того, $k(x, t) = 0$, т. е. ядро $K(x, t)$ — вырожденное:

$$K(x, t) = - \sum_{k=1}^n g_k(x) h_k(t). \quad (8)$$

В данном случае, очевидно, что $r(x, t; \lambda) = 0$, и ввиду (7)

$$\varphi_k(x) = g_k(x), \quad \psi_k(x) = h_k(x), \quad b_{ij} = \int_a^b g_j(x)h_i(x) dx.$$

Поэтому резольвента принимает вид

$$R(x, t; \lambda) = \frac{1}{\Delta_*} \begin{vmatrix} 0 & g_1(x) & \cdots & g_n(x) \\ h_1(t) & 1 + \lambda b_{11} & \cdots & \lambda b_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_n(t) & \lambda b_{n1} & \cdots & 1 + \lambda b_{nn} \end{vmatrix}. \quad (9)$$

Рассмотрим интегральное уравнение с некоторым ядром $Q(x, t)$. Выберем произвольно в промежутке (a, b) точки x_1, x_2, \dots, x_n и t_1, t_2, \dots, t_n , и положим в равенстве (3)

$$k(x, t) = 0, \quad g_k(x) = Q(x, t_k), \quad h_k(t) = -Q(x_k, t), \quad a_{ij} = Q(x_i, t_j).$$

Тогда, очевидно, $r(x, t; \lambda) = 0$ и ядро $K(x, t)$ принимает вид

$$K(x, t) = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} 0 & Q(x, t_1) & \cdots & Q(x, t_n) \\ Q(x_1, t) & Q(x_1, t_1) & \cdots & Q(x_1, t_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Q(x_n, t) & Q(x_n, t_1) & \cdots & Q(x_n, t_n) \end{vmatrix}, \quad D = \begin{vmatrix} Q(x_1, t_1) & \cdots & Q(x_1, t_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Q(x_n, t_1) & \cdots & Q(x_n, t_n) \end{vmatrix}.$$

Выражение для ядра удобно записать в виде

$$K(x, t) = Q(x, t) - \frac{1}{D} \begin{vmatrix} Q(x, t) & Q(x, t_1) & \cdots & Q(x, t_n) \\ Q(x_1, t) & Q(x_1, t_1) & \cdots & Q(x_1, t_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Q(x_n, t) & Q(x_n, t_1) & \cdots & Q(x_n, t_n) \end{vmatrix}. \quad (10)$$

Это ядро вырожденное и обладает тем свойством, что совпадает с $Q(x, t)$ на прямых $x = x_i$, $t = t_j$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$). Действительно, если положить $x = x_i$ или $t = t_j$, то определитель, стоящий в числителе второго члена, будет иметь две одинаковых строки или столбца и, следовательно, обратится в нуль, а поэтому

$$K(x_i, t) = Q(x_i, t), \quad K(x, t_j) = Q(x, t_j).$$

Такое совпадение на $2n$ прямых позволяет рассчитывать на то, что $K(x, t)$ близко к $Q(x, t)$, а решение уравнения с ядром $K(x, t)$ — к решению уравнения с ядром $Q(x, t)$. Следует заметить, что если $Q(x, t)$ вырожденное, т. е. имеет вид

$$Q(x, t) = \sum_{k=1}^n g_k(x)h_k(t), \quad (11)$$

то определитель в числителе тождественно равен нулю, а потому в этом случае

$$K(x, t) \equiv Q(x, t). \quad (12)$$

Для ядра $K(x, t)$ резольвента может быть составлена на основании следующих равенств:

$$\begin{aligned} r(x, t; \lambda) &= 0, \quad \varphi_i(x) = g_i(x) = Q(x, t_i), \quad \psi_j(t) = h_j(t) = -Q(x_j, t), \\ b_{ij} &= -\int_a^b Q(x, t_j)Q(x_i, x) dx = -Q_2(x_i, t_j), \quad i, j = 1, 2, \dots, n, \end{aligned} \quad (13)$$

где $Q_2(x, t)$ — второе итерированное ядро для $Q(x, t)$:

$$Q_2(x, y) = \int_a^b Q(x, s)Q(s, t) ds,$$

и, следовательно,

$$R(x, t; \lambda) = \frac{1}{D_\lambda} \begin{vmatrix} 0 & Q(x, t_1) & \cdots & Q(x, t_n) \\ Q(x_1, t) & Q(x_1, t_1) - \lambda Q_2(x_1, t_1) & \cdots & Q(x_1, t_n) - \lambda Q_2(x_1, t_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Q(x_n, t) & Q(x_n, t_1) - \lambda Q_2(x_n, t_1) & \cdots & Q(x_n, t_n) - \lambda Q_2(x_n, t_n) \end{vmatrix}, \quad (14)$$

где

$$D_\lambda = D - \lambda D_2, \quad D_2 = \begin{vmatrix} Q_2(x_1, t_1) & \cdots & Q_2(x_1, t_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_2(x_n, t_1) & \cdots & Q_2(x_n, t_n) \end{vmatrix}.$$

С помощью резольвенты $R(x, t; \lambda)$ можно получить приближенное решение уравнения с ядром $Q(x, t)$. В частности, приближенные значения для собственных значений λ этого ядра найдем, приравняв нулю определитель D_λ , стоящий в знаменателе (14).

Пример. Рассмотрим уравнение

$$y(x) - \lambda \int_0^1 Q(x, t)y(t) dt = 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (15)$$

$$Q(x, t) = \begin{cases} x(t-1) & \text{при } x \leq t, \\ t(x-1) & \text{при } x \geq t. \end{cases}$$

Найдем его характеристические числа. Для этого воспользуемся формулой (14), где для второго итерированного ядра будем иметь

$$Q_2(x, t) = \int_0^1 Q(x, s)Q(s, t) ds = \begin{cases} \frac{1}{6}x(1-t)(2t-x^2-t^2) & \text{при } x \leq t, \\ \frac{1}{6}t(1-x)(2x-x^2-t^2) & \text{при } x \geq t. \end{cases}$$

Выберем равноотстоящие точки x_i и t_j и возьмем $n = 5$, тогда

$$x_1 = t_1 = \frac{1}{6}, \quad x_2 = t_2 = \frac{2}{6}, \quad x_3 = t_3 = \frac{3}{6}, \quad x_4 = t_4 = \frac{4}{6}, \quad x_5 = t_5 = \frac{5}{6}.$$

Приравняем нулю определитель, стоящий в знаменателе (14). Тогда после некоторых преобразований придем к уравнению

$$130\mu^5 - 441\mu^4 + 488\mu^3 - 206\mu^2 + 30\mu - 1 = 0 \quad (\tilde{\lambda} = 216\mu),$$

которое можно записать в форме

$$(\mu - 1)(2\mu - 1)(5\mu - 1)(13\mu^2 - 22\mu + 1) = 0. \quad (16)$$

После решения (16) найдем

$$\tilde{\lambda}_1 = 10,02, \quad \tilde{\lambda}_2 = 43,2, \quad \tilde{\lambda}_3 = 108, \quad \tilde{\lambda}_4 = 216, \quad \tilde{\lambda}_5 = 355,2.$$

Точные величины характеристических значений рассматриваемого уравнения известны:

$$\lambda_1 = \pi^2 = 9,869 \dots, \quad \lambda_2 = (2\pi)^2 = 39,478 \dots, \quad \lambda_3 = (3\pi)^2 = 88,826 \dots,$$

следовательно, ошибка при определении первого собственного значения 2%, второго — 9%, третьего — 20%.

Результат можно улучшить выбором другой совокупности точек x_i и y_i ($i = 1, 2, \dots, 5$). Однако при таком числе ординат очень высокая точность не может быть достигнута, так как само ядро $Q(x, t)$ имеет особенность: производная его разрывна при $x = t$ вследствие чего невозможна хорошая аппроксимация его такими ядрами.

● *Литература:* Н. Bateman (1922), Э. Гурса (1934), Л. В. Канторович, В. И. Крылов (1962).

11.15. Метод коллокации

11.15-1. Общие замечания

Запишем интегральное уравнение Фредгольма второго рода в форме

$$\varepsilon[y(x)] \equiv y(x) - \lambda \int_a^b K(x, t)y(t) dt - f(x) = 0. \quad (1)$$

Будем искать приближенное решение уравнения (1) в виде функции вида

$$Y_n(x) = \Phi(x, A_1, A_2, \dots, A_n) \quad (2)$$

со свободными параметрами A_1, A_2, \dots, A_n . Подставляя выражение (2) в уравнение (1), получим невязку

$$\varepsilon[Y_n(x)] = Y_n(x) - \lambda \int_a^b K(x, t)Y_n(t) dt - f(x). \quad (3)$$

Если $y(x)$ является точным решением, то невязка $\varepsilon[y(x)]$ равна нулю. Поэтому стараются подобрать параметры A_1, A_2, \dots, A_n так, чтобы невязка $\varepsilon[y(x)]$ была бы в определенном смысле возможно малой. Минимизировать невязку $\varepsilon[y(x)]$ можно различными способами. Обычно для простоты выкладок берут функцию $Y_n(x)$, линейно зависящую от параметров A_1, A_2, \dots, A_n . Найдя параметры A_1, A_2, \dots, A_n , получают приближенное решение (2). Если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Y_n(x) = y(x), \quad (4)$$

то можно, взяв достаточно большое число параметров A_1, A_2, \dots, A_n , найти решение $y(x)$ с любой наперед заданной степенью точности.

Перейдем теперь к изложению одного из конкретных методов построения приближенного решения $Y_n(x)$.

11.15-2. Приближенное решение

Положим

$$Y_n(x) = \varphi_0(x) + \sum_{i=1}^n A_i \varphi_i(x), \quad (5)$$

где $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$ — известные *координатные функции* и A_1, A_2, \dots, A_n — неопределенные коэффициенты, причем функции $\varphi_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) линейно независимы. Заметим, что в частности, можно положить $\varphi_0(x) = f(x)$ или $\varphi_0(x) \equiv 0$. Подставляя выражение (5) в левую часть уравнения (1), получим невязку

$$\varepsilon[Y_n(x)] = \varphi_0(x) + \sum_{i=1}^n A_i \varphi_i(x) - f(x) - \lambda \int_a^b K(x, t) \left[\varphi_0(t) + \sum_{i=1}^n A_i \varphi_i(t) \right] dt,$$

или

$$\varepsilon[Y_n(x)] = \psi_0(x, \lambda) + \sum_{i=1}^n A_i \psi_i(x, \lambda), \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} \psi_0(x, \lambda) &= \varphi_0(x) - f(x) - \lambda \int_a^b K(x, t) \varphi_0(t) dt, \\ \psi_i(x, \lambda) &= \varphi_i(x) - \lambda \int_a^b K(x, t) \varphi_i(t) dt, \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (7)$$

Согласно методу коллокации потребуем, чтобы невязка $\varepsilon[Y_n(x)]$ обращалась в нуль в заданной системе *точек коллокации* x_1, x_2, \dots, x_n из отрезка $[a, b]$, т. е. полагаем, что

$$\varepsilon[Y_n(x_j)] = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

где

$$a \leq x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n \leq b.$$

Обычно полагают $x_1 = a$ и $x_n = b$.

Отсюда, на основании формулы (6) для определения коэффициентов A_1, A_2, \dots, A_n получим систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{i=1}^n A_i \psi_i(x_j, \lambda) = -\psi_0(x_j, \lambda), \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (8)$$

Если определитель системы (8):

$$\det[\psi_i(x_j, \lambda)] = \begin{vmatrix} \psi_1(x_1, \lambda) & \psi_1(x_2, \lambda) & \cdots & \psi_1(x_n, \lambda) \\ \psi_2(x_1, \lambda) & \psi_2(x_2, \lambda) & \cdots & \psi_2(x_n, \lambda) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_n(x_1, \lambda) & \psi_n(x_2, \lambda) & \cdots & \psi_n(x_n, \lambda) \end{vmatrix} \neq 0,$$

то из системы (8) можно однозначно определить A_1, A_2, \dots, A_n и, следовательно, найти приближенное решение $Y_n(x)$ по формуле (5).

11.15-3. Собственные функции уравнения

Приравнявая нулю определитель системы (8), получим уравнение

$$\det[\psi_i(x_j, \lambda)] = 0,$$

которое, вообще говоря, позволяет найти приближенные значения характеристических чисел $\tilde{\lambda}_k$ ($k = 1, 2, \dots, n$) ядра $K(x, t)$.

Если положить

$$f(x) \equiv 0, \quad \varphi_0(x) \equiv 0, \quad \lambda = \tilde{\lambda}_k,$$

то вместо системы (8) будем иметь однородную систему

$$\sum_{i=1}^n \tilde{A}_i^{(k)} \psi_i(x_j, \tilde{\lambda}_k) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (9)$$

Определив ненулевые решения $\tilde{A}_i^{(k)}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) системы (9), получим для ядра $K(x, t)$ приближенные собственные функции

$$\tilde{Y}_n^{(k)}(x) = \sum_{i=1}^n \tilde{A}_i^{(k)} \varphi_i(x),$$

отвечающие его характеристическому числу $\lambda_k \approx \tilde{\lambda}_k$.

Пример. Методом коллокации решить уравнение

$$y(x) - \int_0^1 \frac{t^2 y(t)}{x^2 + t^2} dt = x \arctg \frac{1}{x}. \quad (10)$$

Положим

$$Y_2(x) = A_1 + A_2 x.$$

Подставляя это выражение в уравнение (10), получим невязку

$$\varepsilon[Y_2(x)] = -A_1 x \arctg \frac{1}{x} + A_2 \left[x - \frac{1}{2} + \frac{x^2}{2} \ln \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) \right] - x \arctg \frac{1}{x}.$$

Выбирая точки коллокации $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ и учитывая, что

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \arctg \frac{1}{x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) = 0,$$

для определения коэффициентов A_1 и A_2 будем иметь систему:

$$\begin{aligned} 0 \times A_1 - \frac{1}{2} A_2 &= 0, \\ -\frac{\pi}{4} A_1 + \frac{1}{2} (1 + \ln 2) A_2 &= \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Отсюда получаем $A_2 = 0$ и $A_1 = -1$. Таким образом,

$$Y_2(x) = -1. \quad (11)$$

Найденное решение (11), как легко проверить, является точным.

⊙ *Литература:* Л. Коллатц (1958), Б. П. Демидович, И. А. Марон, Е. З. Шувалова (1963), А. Ф. Верлань, В. С. Сизиков (1986).

11.16. Метод наименьших квадратов

11.16-1. Описание метода

Для уравнения

$$\varepsilon[y(x)] \equiv y(x) - \lambda \int_a^b K(x, t) y(t) dt - f(x) = 0, \quad (1)$$

аналогично методу коллокации, полагаем

$$Y_n(x) = \varphi_0(x) + \sum_{i=1}^n A_i \varphi_i(x), \quad (2)$$

на основании формул (7) из п. 11.15-2 имеем

$$\psi_1 = 1 - a \operatorname{sh} x, \quad \psi_2 = x - b \operatorname{ch} x, \quad \psi_0 = -c \operatorname{sh} x.$$

Далее находим (с точностью до четырех значащих цифр после запятой)

$$\begin{aligned} c_{11} &= 2 + a^2 \left(\frac{1}{2} \operatorname{sh} 2 - 1 \right) = 6,4935, & c_{22} &= \frac{2}{3} + b^2 \left(\frac{1}{2} \operatorname{sh} 2 + 1 \right) = 2,1896, \\ c_{12} &= -4(ae^{-1} + b \operatorname{sh} 1) = -8e^{-1} \operatorname{sh} 1 = -3,4586, \\ c_{10} &= ac \left(\frac{1}{2} \operatorname{sh} 2 - 1 \right) = 1,6800, & c_{20} &= -2ce^{-1} = -0,6466, \end{aligned}$$

и получаем систему для определения коэффициентов A_1 и A_2

$$\begin{aligned} 6,4935A_1 - 3,4586A_2 &= -1,6800, \\ -3,4586A_1 + 2,1896A_2 &= 0,6466. \end{aligned}$$

Отсюда имеем $A_1 = -0,5423$, $A_2 = -0,5613$. Таким образом,

$$Y_2(x) = x^2 - 0,5613x - 0,5423. \quad (11)$$

Так как в уравнении (10) ядро

$$K(x, t) = \operatorname{sh}(x + t) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} t + \operatorname{ch} x \operatorname{sh} t$$

вырожденное, то можно получить точное решение:

$$\begin{aligned} y(x) &= x^2 + \alpha \operatorname{sh} x + \beta \operatorname{ch} x, \\ \alpha &= \frac{6 \operatorname{sh} 1 - 4 \operatorname{ch} 1}{2 - \left(\frac{1}{2} \operatorname{sh} 2 \right)^2} = -0,6821, \quad \beta = \alpha \left(\frac{1}{2} \operatorname{sh} 2 - 1 \right) = -0,5548. \end{aligned} \quad (12)$$

Из сравнения формул (11) и (12) заключаем, что приближенное решение $Y_2(x)$ близко к точному $y(x)$, если $|x|$ — малая величина. На концах $x = \pm 1$ расхождение $|y(x) - Y_2(x)|$ довольно значительно.

⊙ *Литература:* Л. В. Канторович, В. И. Крылов (1962), Б. П. Демидович, И. А. Марон, Е. З. Шувалова (1963), М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко (1968).

11.17. Метод Бубнова–Галеркина

11.17-1. Описание метода

Пусть

$$\varepsilon[y(x)] \equiv y(x) - \lambda \int_a^b K(x, t)y(t) dt - f(x) = 0. \quad (1)$$

Аналогично предыдущему, будем искать приближенное решение уравнения (1) в виде конечной суммы

$$Y_n(x) = f(x) + \sum_{i=1}^n A_i \varphi_i(x), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (2)$$

где $\varphi_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) — некоторые известные линейно независимые функции (координатные функции) и A_1, A_2, \dots, A_n — неопределенные коэффициенты. Подставляя выражение (2) в левую часть уравнения (1), получим невязку

$$\varepsilon[Y_n(x)] = \sum_{j=1}^n A_j \left[\varphi_j(x) - \lambda \int_a^b K(x, t)\varphi_j(t) dt \right] - \lambda \int_a^b K(x, t)f(t) dt. \quad (3)$$

Согласно методу Бубнова–Галеркина, искомые коэффициенты A_i определяются из условия ортогональности невязки ко всем координатным функциям $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$. Это дает систему уравнений

$$\int_a^b \varepsilon[Y_n(x)] \varphi_i(x) dx = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

или в силу (3)

$$\sum_{j=1}^n (\alpha_{ij} - \lambda \beta_{ij}) A_j = \lambda \gamma_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (4)$$

где

$$\alpha_{ij} = \int_a^b \varphi_i(x)\varphi_j(x) dx, \quad \beta_{ij} = \int_a^b \int_a^b K(x, t)\varphi_i(x)\varphi_j(t) dt dx,$$

$$\gamma_i = \int_a^b \int_a^b K(x, t)\varphi_i(x)f(t) dt dx.$$

Если определитель системы (4)

$$D(\lambda) = \det[\alpha_{ij} - \lambda\beta_{ij}]$$

отличен от нуля, то из этой системы можно однозначно определить коэффициенты A_1, A_2, \dots, A_n . Тогда формула (2) дает приближенное решение интегрального уравнения (1).

11.17-2. Характеристические числа уравнения

Из уравнения $D(\lambda) = 0$ находятся приближенные характеристические числа $\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, \dots, \tilde{\lambda}_n$ уравнения. Найдя ненулевые решения однородной линейной системы

$$\sum_{j=1}^n (\alpha_{ij} - \tilde{\lambda}_k \beta_{ij}) \tilde{A}_j^{(k)} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

можно построить приближенные собственные функции $\tilde{Y}_n^{(k)}(x)$, соответствующие характеристическим числам $\tilde{\lambda}_k$:

$$\tilde{Y}_n^{(k)}(x) = \sum_{i=1}^n \tilde{A}_i^{(k)} \varphi_i(x).$$

Можно показать, что метод Бубнова–Галеркина равносильен замене исходного ядра $K(x, t)$ некоторым вырожденным ядром $K_{(n)}(x, t)$. Поэтому для приближенного решения $Y_n(x)$ имеется оценка погрешности, аналогичная приведенной в п. 11.13-2.

Пример. Найдём первые два характеристических числа интегрального уравнения

$$\varepsilon[y(x)] \equiv y(x) - \lambda \int_0^1 K(x, t)y(t) dt = 0,$$

где

$$K(x, t) = \begin{cases} t & \text{при } t \leq x, \\ x & \text{при } t > x. \end{cases} \quad (5)$$

На основании (5) имеем

$$\varepsilon[y(x)] = y(x) - \lambda \left\{ \int_0^x ty(t) dt + \int_x^1 xy(t) dt \right\}.$$

Положим $Y_2(x) = A_1 x + A_2 x^2$. Тогда

$$\begin{aligned} \varepsilon[Y_2(x)] &= A_1 x + A_2 x^2 - \lambda \left[\frac{1}{3} A_1 x^3 + \frac{1}{4} A_2 x^4 + x \left(\frac{1}{2} A_1 + \frac{1}{3} A_2 \right) - \left(\frac{1}{2} A_1 x^3 + \frac{1}{3} A_2 x^4 \right) \right] = \\ &= A_1 \left[\left(1 - \frac{1}{2} \lambda \right) x + \frac{1}{6} \lambda x^3 \right] + A_2 \left(-\frac{1}{3} \lambda x + x^2 + \frac{1}{12} \lambda x^4 \right). \end{aligned}$$

Ортогонализуя невязку $\varepsilon[Y_2(x)]$, будем иметь систему

$$\begin{aligned} \int_0^1 \varepsilon[Y_2(x)] x dx &= 0, \\ \int_0^1 \varepsilon[Y_2(x)] x^2 dx &= 0, \end{aligned}$$

или однородную систему двух алгебраических уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{aligned} A_1(120 - 48\lambda) + A_2(90 - 35\lambda) &= 0 \\ A_1(630 - 245\lambda) + A_2(504 - 180\lambda) &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Приравняв нулю определитель системы (6), получим уравнение для определения характеристических чисел:

$$D(\lambda) \equiv \begin{vmatrix} 120 - 48\lambda & 90 - 35\lambda \\ 630 - 245\lambda & 504 - 180\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Откуда

$$\lambda^2 - 26,03\lambda + 58,15 = 0. \quad (7)$$

Из уравнения (7) будем иметь

$$\tilde{\lambda}_1 = 2,462 \dots \quad \text{и} \quad \tilde{\lambda}_2 = 23,568 \dots$$

Для сравнения укажем точные характеристические числа

$$\lambda_1 = \frac{1}{4}\pi^2 = 2,467 \dots \quad \text{и} \quad \lambda_2 = \frac{9}{4}\pi^2 = 22,206 \dots,$$

полученные из решения краевой задачи, эквивалентной исходному уравнению:

$$y''_{xx}(x) + \lambda y(x) = 0; \quad y(0) = 0, \quad y'_x(1) = 0.$$

Таким образом, погрешность $\tilde{\lambda}_1$ равна примерно 0,2%, а $\tilde{\lambda}_2$ — 6%.

⊙ *Литература:* Л. В. Канторович, В. И. Крылов (1962), Б. П. Демидович, И. А. Марон, Е. З. Шувалова (1963), А. Ф. Верлань, В. С. Сизиков (1986).

11.18. Метод квадратур

11.18-1. Общая схема для уравнений Фредгольма второго рода

Сведение задачи решения интегральных уравнений к решению систем алгебраических уравнений, получаемых заменой интегралов конечными суммами, является одним из самых эффективных методов. Метод квадратур относится к аппроксимационным методам. Он широко распространен в практике, поскольку достаточно универсален в отношении принципа построения алгоритмов решения как линейных, так и нелинейных уравнений.

Так же как это было в случае уравнений Вольтерра, в основе метода лежит некоторая квадратурная формула (см. п. 8.7-1):

$$\int_a^b \varphi(x) dx = \sum_{j=1}^n A_j \varphi(x_j) + \varepsilon_n[\varphi], \quad (1)$$

где x_j — узлы квадратурной формулы, A_j — известные коэффициенты, не зависящие от функции $\varphi(x)$, $\varepsilon_n[\varphi]$ — ошибка замены интеграла суммой (остаточный член квадратурной формулы).

Если в линейном неоднородном интегральном уравнении Фредгольма второго рода

$$y(x) - \lambda \int_a^b K(x, t) y(t) dt = f(x), \quad a \leq x \leq b, \quad (2)$$

принять $x = x_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$), то получим исходное для данного метода соотношение

$$y(x_i) - \lambda \int_a^b K(x_i, t) y(t) dt = f(x_i), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (3)$$

из которого после замены интеграла конечной суммой получается система уравнений:

$$y(x_i) - \lambda \sum_{j=1}^n A_j K(x_i, x_j) y(x_j) = f(x_i) + \lambda \varepsilon_n[y]. \quad (4)$$

После отбрасывания в ней малой величины $\lambda \varepsilon_n[y]$ для отыскания приближенных значений y_i решения $y(x)$ в узлах x_1, x_2, \dots, x_n получается система линейных алгебраических уравнений

$$y_i - \lambda \sum_{j=1}^n A_j K_{ij} y_j = f_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (5)$$

где $K_{ij} = K(x_i, x_j)$, $f_i = f(x_i)$.

Решение системы (5) дает значения y_1, y_2, \dots, y_n , по которым путем интерполяции находится приближенное решение интегрального уравнения (2) на всем отрезке $[a, b]$. При этом в качестве приближенного решения можно принять функцию, полученную линейной интерполяцией, т. е. совпадающую с y_i в точках x_i и линейную в каждом из промежутков $[x_i, x_{i+1}]$. Кроме того, в качестве аналитического выражения приближенного решения уравнения принимается функция

$$\tilde{y}(x) = f(x) + \lambda \sum_{j=1}^n A_j K(x, x_j) y_j, \quad (6)$$

также имеющая в узлах x_1, x_2, \dots, x_n значения y_1, y_2, \dots, y_n .

11.18-2. Построение собственных функций

Метод квадратур применяется также для решения однородных уравнений Фредгольма второго рода. В этом случае система (5) становится однородной ($f_i \equiv 0$) и имеет нетривиальное решение лишь в том случае, когда ее определитель $D(\lambda)$ равен нулю. Алгебраическое уравнение $D(\lambda) = 0$ степени n относительно λ позволяет найти корни $\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, \dots, \tilde{\lambda}_n$, представляющие собой приближенные значения n характеристических чисел уравнения. Подстановка любого из значений $\tilde{\lambda}_k$ ($k = 1, 2, \dots, n$) в (5) при $f_i \equiv 0$ приводит к системе уравнений

$$y_i^{(k)} - \tilde{\lambda}_k \sum_{j=1}^n A_j K_{ij} y_j^{(k)} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

ненулевые решения которой $y_i^{(k)}$ позволяют получить приближенные выражения для собственных функций интегрального уравнения:

$$\tilde{y}_k(x) = \tilde{\lambda}_k \sum_{j=1}^n A_j K(x, x_j) y_j^{(k)}.$$

Если λ не равно ни одному из корней $\tilde{\lambda}_k$, то неоднородная система линейных алгебраических уравнений (5) имеет единственное решение. Однородная система уравнений (5) в этом же случае имеет только тривиальное решение.

11.18-3. Особенности применения квадратурных формул

Точность получаемых решений существенно зависит от гладкости ядра и свободного члена. При выборе квадратурной формулы необходимо учитывать, что чем более точную формулу предполагается применить, тем большие требования должны быть предъявлены к гладкости ядра, решения и правой части.

Если правая часть или ядро имеют особенности, то целесообразно предварительно преобразовать исходное уравнение с целью получения более точного приближенного решения. При этом применяются следующие приемы.

Если особенности имеет правая часть $f(x)$, а ядро гладкое, то можно вместо $y(x)$ ввести неизвестную функцию $z(x) = y(x) - f(x)$, использование которой в исходном уравнении позволяет получить уравнение

$$z(x) - \lambda \int_a^b K(x, t)z(t) dt = \lambda \int_a^b K(x, t)f(t) dt,$$

в котором правая часть сглажена, а следовательно, и решение $z(x)$ будет более гладким. По найденной функции $z(x)$ легко найти искомое решение $y(x)$.

В тех случаях, когда ядро $K(x, t)$ или его производные по t имеют разрывы на диагонали $x = t$, решаемое уравнение целесообразно записать в эквивалентном виде:

$$y(x) \left[1 - \lambda \int_a^b K(x, t) dt \right] - \lambda \int_a^b K(x, t)[y(t) - y(x)] dt = f(x),$$

где подынтегральная функция во втором интеграле не имеет особенностей, поскольку на диагонали $x = t$ разность $y(t) - y(x)$ обращается в нуль, а вычисление интеграла $\int_a^b K(x, t) dt$ выполняется без искомых функций и часто возможно в явном виде.

Пример. Рассмотрим уравнение

$$y(x) - \frac{1}{2} \int_0^1 xy(t) dt = \frac{5}{6} x.$$

Выберем узлы $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{1}{2}$, $x_3 = 1$ и вычислим в них значения правой части $f(x) = \frac{5}{6} x$ и ядра $K(x, t) = xt$:

$$\begin{aligned} f(0) &= 0, \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{12}, \quad f(1) = \frac{5}{6}, \\ K(0, 0) &= 0, \quad K\left(0, \frac{1}{2}\right) = 0, \quad K(0, 1) = 0, \quad K\left(\frac{1}{2}, 0\right) = 0, \quad K\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}, \\ K\left(\frac{1}{2}, 1\right) &= \frac{1}{2}, \quad K(1, 0) = 0, \quad K\left(1, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}, \quad K(1, 1) = 1. \end{aligned}$$

Используя квадратурную формулу Симпсона (см. п. 8.7-1)

$$\int_0^1 F(x) dx \approx \frac{1}{6} [F(0) + 4F(\frac{1}{2}) + F(1)]$$

для определения приближенных значений y_i ($i = 1, 2, 3$) решения $y(x)$ в узлах x_i , получим систему

$$\begin{aligned} y_1 &= 0, \\ \frac{11}{12}y_2 - \frac{1}{24}y_3 &= \frac{5}{12}, \\ -\frac{2}{12}y_2 + \frac{11}{12}y_3 &= \frac{5}{6}, \end{aligned}$$

решением которой являются $y_1 = 0$, $y_2 = \frac{1}{2}$, $y_3 = 1$. Приближенное решение в соответствии с выражением (6) можно представить в виде

$$\tilde{y}(x) = \frac{5}{6}x + \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} (0 + 4 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}x + 1 \times 1 \times x) = x.$$

Легко видеть, что оно совпадает с точным решением.

⊙ *Литература:* Н. С. Бахвалов (1973), В. И. Крылов, В. В. Бобков, П. И. Монастырный (1984), А. Ф. Верлань, В. С. Сизиков (1986).

11.19. Системы интегральных уравнений Фредгольма второго рода

11.19-1. Некоторые замечания

Система интегральных уравнений Фредгольма второго рода имеет вид

$$y_i(x) - \lambda \sum_{j=1}^n \int_a^b K_{ij}(x, t) y_j(t) dt = f_i(x), \quad a \leq x \leq b, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (1)$$

Предположим, что ядра $K_{ij}(x, t)$ непрерывны или квадратично интегрируемы в квадрате $S = \{a \leq x \leq b, a \leq t \leq b\}$, а свободные члены $f_i(x)$ непрерывны или квадратично интегрируемы на $[a, b]$. От искомым функций $y_i(x)$ также потребуем, чтобы они были на $[a, b]$ непрерывны либо квадратично интегрируемы. На такие системы полностью распространяется теория, развитая для уравнений Фредгольма второго рода. Так, можно показать, что для системы уравнений (1) последовательные приближения сходятся в среднем к решению этой системы, если λ удовлетворяет неравенству

$$|\lambda| < \frac{1}{B_*}, \quad (2)$$

где

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int_a^b \int_a^b |K_{ij}(x, t)|^2 dx dt = B_*^2 < \infty. \quad (3)$$

Если ядра $K_{ij}(x, t)$ удовлетворяют еще и условию

$$\int_a^b K_{ij}^2(x, t) dt \leq A_{ij}, \quad a \leq x \leq b, \quad (4)$$

где A_{ij} — некоторые постоянные, то последовательные приближения сходятся абсолютно и равномерно.

Если все ядра $K_{ij}(x, t)$ вырожденные, то система (1) сводится к линейной алгебраической системе. Можно установить, что для системы интегральных уравнений Фредгольма справедливы все теоремы Фредгольма.

11.19-2. Метод преобразования системы уравнений в одно уравнение

Систему уравнений (1) можно преобразовать в одно интегральное уравнение Фредгольма второго рода. Действительно, определим функции $Y(x)$ и $F(x)$ на $[a, nb - (n-1)a]$, положив

$$Y(x) = y_i(x - (i-1)(b-a)), \quad F(x) = f_i(x - (i-1)(b-a))$$

при

$$(i-1)b - (i-2)a \leq x \leq ib - (i-1)a.$$

Ядро интегрального уравнения $K(x, t)$ зададим в квадрате

$$S_n = \{a \leq x \leq nb - (n-1)a, a \leq t \leq nb - (n-1)a\},$$

положив

$$K(x, t) = K_{ij}(x - (i-1)(b-a), t - (j-1)(b-a))$$

при

$$(i-1)b - (i-2)a \leq x \leq ib - (i-1)a, \quad (j-1)b - (j-2)a \leq t \leq jb - (j-1)a.$$

Теперь система (1) записывается в виде одного уравнения Фредгольма

$$Y(x) - \lambda \int_a^{nb - (n-1)a} K(x, t)Y(t) dt = F(x), \quad a \leq x \leq nb - (n-1)a.$$

Если ядра $K_{ij}(x, t)$ квадратично интегрируемы в квадрате $S = \{a \leq x \leq b, a \leq t \leq b\}$, а свободные члены $f_i(x)$ — на $[a, b]$, то ядро $K(x, t)$ квадратично интегрируемо в новом квадрате S_n , а свободный член $F(x)$ квадратично интегрируем на $[a, nb - (n-1)a]$.

Если выполнено условие (4), то ядро $K(x, t)$ удовлетворяет следующему неравенству:

$$\int_a^b K^2(x, t) dt \leq A_*, \quad a < x < nb - (n-1)a,$$

где A_* — некоторая постоянная.

● Литература: С. Г. Михлин (1959).

11.20. Метод регуляризации для некоторых уравнений второго рода

11.20-1. Основное уравнение и теоремы Нетера

Рассмотрим интегральное уравнение второго рода в форме

$$y(x) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty K_1(x-t)y(t) dt + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 K_2(x-t)y(t) dt + \int_{-\infty}^\infty M(x, t)y(t) dt = f(x), \quad -\infty < x < \infty. \quad (1)$$

Будем считать, что функции $y(x)$, $f(x)$ и ядра $K_1(x)$, $K_2(x)$, $M(x, t)$ таковы, что их изображения, полученные при помощи интегрального преобразования Фурье, принадлежат $L_2(-\infty, \infty)$ и удовлетворяют условию Гёльдера, причем для ядра $M(x, t)$ — по каждой переменной. Кроме того,

$$\int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty |M(x, t)|^2 dx dt < \infty.$$

Можно заметить, что уравнение (1) при $M(x, t) \equiv 0$ переходит в изученное ранее в п. 11.9-2 интегральное уравнение типа свертки с двумя ядрами.

Союзное с (1) однородное уравнение имеет вид

$$\varphi(x) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty K_1(t-x)\varphi(t) dt + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 K_2(t-x)\varphi(t) dt + \int_{-\infty}^\infty M(t, x)y(t) dt = 0, \quad -\infty < x < \infty. \quad (2)$$

Будем считать, что выполнены условия нормальности (см. п. 11.9-2), т. е.

$$1 + K_1(u) \neq 0, \quad 1 + K_2(u) \neq 0, \quad -\infty < u < \infty. \quad (3)$$

Теорема 1. Числа линейно независимых решений однородного уравнения (1) ($f(x) \equiv 0$) и союзного с ним однородного уравнения (2) конечны.

Теорема 2. Для разрешимости неоднородного уравнения (1) необходимы и достаточны условия

$$\int_{-\infty}^\infty f(t)\varphi_k(t) dt = 0, \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad (4)$$

где $\varphi_k(x)$ — конечное число всех линейно независимых решений союзного однородного уравнения (2).

Теорема 3. Разность числа линейно независимых решений однородного уравнения (1) и числа линейно независимых решений однородного союзного уравнения (2) равна индексу

$$\nu = \text{Ind} \frac{1 + K_2(u)}{1 + K_1(u)} = \frac{1}{2\pi} \left[\arg \frac{1 + K_2(u)}{1 + K_1(u)} \right]_{-\infty}^\infty. \quad (5)$$

11.20-2. Регуляризующие операторы

Одним из методов как теоретического исследования, так и практического решения рассматриваемых уравнений является их регуляризация, т. е. приведение к уравнению Фредгольма второго рода.

Обозначим через \mathbf{K} оператор, определенный левой частью уравнения (1):

$$\begin{aligned} \mathbf{K}[y(x)] \equiv & y(x) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty K_1(x-t)y(t) dt + \\ & + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 K_2(x-t)f(t) dt + \int_{-\infty}^\infty M(x,t)y(t) dt, \end{aligned} \quad (6)$$

и введем еще один аналогичный оператор

$$\begin{aligned} \mathbf{L}[\omega(x)] \equiv & \omega(x) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty L_1(x-t)\omega(t) dt + \\ & + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 L_2(x-t)\omega(t) dt + \int_{-\infty}^\infty Q(x,t)\omega(t) dt. \end{aligned} \quad (7)$$

Найдем оператор \mathbf{L} такой, чтобы произведение \mathbf{LK} определялось левой частью уравнения Фредгольма второго рода с ядром $K(x, t)$:

$$\mathbf{LK}[y(x)] \equiv y(x) + \int_{-\infty}^\infty K(x, t)y(t) dt, \quad \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty |K(x, t)|^2 dx dt < \infty. \quad (8)$$

Оператор \mathbf{L} называется *регуляризующим слева* или *левым регуляризатором*.

Для того чтобы оператор \mathbf{K} интегрального уравнения (1) имел регуляризующий слева оператор \mathbf{L} вида (7), необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия нормальности (3).

Если условия (3) выполнены, то регуляризующий слева оператор \mathbf{L} имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{L}[\omega(x)] \equiv & \omega(x) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty R_1(x-t)\omega(t) dt - \\ & - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 R_2(x-t)\omega(t) dt + \int_{-\infty}^\infty Q(x, t)\omega(t) dt, \end{aligned} \quad (9)$$

где резольвенты $R_1(x-t)$ и $R_2(x-t)$ ядер $K_1(x-t)$ и $K_2(x-t)$ задаются выражениями (см. п. 11.8-1)

$$R_j(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty \frac{\mathcal{K}_j(u)}{1 + \mathcal{K}_j(u)} e^{-iux} du, \quad \mathcal{K}_j(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty K_j(x) e^{iux} dx, \quad (10)$$

где $j = 1, 2$, а функция $Q(x, t)$ может быть любой, удовлетворяющей условию

$$\int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty |Q(x, t)|^2 dx dt < \infty.$$

При условии (3) оператор \mathbf{L} , определенный формулой (9), для оператора \mathbf{K} является одновременно и регуляризующим справа:

$$\mathbf{KL}[y(x)] \equiv y(x) + \int_{-\infty}^\infty K_*(x, t)y(t) dt, \quad (11)$$

где функция $K_*(x, t)$ удовлетворяет условию

$$\int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty |K_*(x, t)|^2 dx dt < \infty.$$

11.20-3. Метод регуляризации

Пусть дано уравнение в виде

$$\mathbf{K}[y(x)] = f(x), \quad -\infty < x < \infty, \quad (12)$$

где оператор \mathbf{K} определен выражением (6).

Существует несколько способов его регуляризации, т. е. приведения к уравнению Фредгольма. Во-первых, можно привести это уравнение к уравнению с ядром Коши. Регуляризовав последнее одним из способов, изложенных в разд. 13.4, можно считать цель достигнутой. Этот путь приемлем, если удастся найти по заданным функциям $K_1(x)$, $K_2(x)$, $M(x, t)$ и $f(x)$ простые выражения для их интегралов Фурье. В противном случае естественно проводить регуляризацию уравнения (12) непосредственно, без перехода к изображениям.

Регуляризация слева уравнения (12) заключается в применении к обоим его частям построенного в предыдущем пункте регуляризующего оператора \mathbf{L} :

$$\mathbf{LK}[y(x)] = \mathbf{L}[f(x)]. \quad (13)$$

В силу (8) уравнение (13) есть уравнение Фредгольма

$$y(x) + \int_{-\infty}^{\infty} K(x, t)y(t) dt = \mathbf{L}[f(x)]. \quad (14)$$

Итак, уравнение (12) регуляризацией слева преобразуется в уравнение Фредгольма с той же неизвестной функцией $y(x)$ и известной правой частью $\mathbf{L}[f(x)]$. Известно, что регуляризация слева не приводит к потере решений: среди решений регуляризованного уравнения содержатся все решения исходного уравнения (12). Однако в общем случае не всякое решение регуляризованного уравнения будет решением исходного.

Регуляризация справа заключается в подстановке в уравнение (12) вместо искомой функции выражения

$$y(x) = \mathbf{L}[\omega(x)], \quad (15)$$

где $\omega(x)$ — новая неизвестная функция. В результате приходим к интегральному уравнению,

$$\mathbf{KL}[\omega(x)] = f(x), \quad (16)$$

которое в силу (10) также является фредгольмовым:

$$\mathbf{KL}[\omega(x)] \equiv \omega(x) + \int_{-\infty}^{\infty} K_*(x, t)\omega(t) dt = f(x), \quad -\infty < x < \infty. \quad (17)$$

Таким образом, от уравнения (12) относительно неизвестной функции $y(x)$ удалось перейти к интегральному уравнению Фредгольма относительно новой неизвестной функции $\omega(x)$. Решив уравнение Фредгольма (17), по формуле (15) найдем решение исходного уравнения (12). Регуляризация справа не может привести к посторонним решениям, но известно, что она может привести к потере решений.

Представляет значительный теоретический и практический интерес решение вопроса о *равносильной регуляризации*, когда не происходит ни потери решений, ни появления посторонних «решений».

Для того чтобы уравнение (12) допускало равносильную регуляризацию слева при любой правой части $f(x)$, необходимо и достаточно, чтобы индекс ν , определенный формулой (5), был неотрицательным числом. В качестве равносильно регуляризующего оператора можно взять оператор \mathbf{L}° , определенный выражением

$$\mathbf{L}^\circ[\omega(x)] \equiv \omega(x) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty R_1(x-t)\omega(t) dt - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 R_2(x-t)\omega(t) dt.$$

Итак, уравнение Фредгольма

$$\mathbf{L}^\circ \mathbf{K}[y(x)] = \mathbf{L}^\circ[f(x)], \quad (18)$$

в случае $\nu \geq 0$ имеет те и только те решения, какие имеет уравнение (12). В случае, когда индекс ν число неположительное, оператор \mathbf{L}° осуществляет равносильную регуляризацию справа уравнения (12) при любой правой части $f(x)$. Действительно, при $\nu \leq 0$, найдя решение уравнения Фредгольма

$$\mathbf{KL}^\circ[\omega(x)] = f(x),$$

по формуле $y(x) = \mathbf{L}^\circ[\omega(x)]$ можно получить все решения исходного уравнения (12).

Известен еще один способ регуляризации Карлемана–Векуа, основывающийся на решении соответствующего характеристического уравнения. Уравнение (12) формально записывается в виде уравнения с двумя ядрами

$$y(x) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty K_1(x-t)y(t) dt + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 K_2(x-t)y(t) dt = f_1(x), \quad (19)$$

$$f_1(x) = f(x) - \int_{-\infty}^\infty M(x, t)y(t) dt.$$

Затем, функция $f_1(x)$ временно считается известной, и решается уравнение (19) (см. п. 11.9-2). Анализ формулы, полученной в результате для функции $y(x)$, показывает, что эта формула при $\nu = 0$ является интегральным уравнением Фредгольма с неизвестной $y(x)$. В случае $\nu > 0$ полученное уравнение будет содержать ν произвольных постоянных. При отрицательном индексе ν к уравнению добавляются условия разрешимости.

● Литература: Ф. Д. Гахов, Ю. И. Черский (1978).

12. Методы решения сингулярных интегральных уравнений первого рода

12.1. Предварительные замечания

12.1-1. Интегральные уравнения первого рода с ядром Коши

Сингулярное интегральное уравнение первого рода с ядром Коши имеет вид

$$\frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau = f(t), \quad i^2 = -1, \quad (1)$$

где L — гладкий замкнутый или разомкнутый контур в комплексной плоскости $z = x + iy$, t и τ — комплексные координаты его точек, $\varphi(t)$ — неизвестная функция, $\frac{1}{\tau - t}$ — ядро Коши, $f(t)$ — некоторая функция, которая называется свободным членом или правой частью уравнения (1). Интеграл в левой части существует только в смысле главного значения по Коши (см. п. 12.2-5).

Частными случаями уравнения (1) являются простейшее сингулярное интегральное уравнение, когда L — гладкий замкнутый контур, уравнение на действительной оси

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(t)}{t - x} dt = f(x), \quad -\infty < x < \infty, \quad (2)$$

а также уравнение с ядром Коши на конечном отрезке

$$\frac{1}{\pi} \int_a^b \frac{\varphi(t)}{t - x} dt = f(x), \quad a \leq x \leq b. \quad (3)$$

Общее сингулярное интегральное уравнение первого рода с ядром Коши имеет вид

$$\frac{1}{\pi i} \int_L \frac{M(t, \tau)}{\tau - t} \varphi(\tau) d\tau = f(t), \quad (4)$$

где $M(t, \tau)$ — известная функция. Его также записывают и в другой эквивалентной форме, которая приведена в п. 12.4-4.

Будем считать, что все функции в уравнениях (1)–(4) удовлетворяют условию Гёльдера (см. п. 12.2-2), причем функция $M(t, \tau)$ — по обоим переменным.

12.1-2. Интегральные уравнения первого рода с ядром Гильберта

Простейшее сингулярное интегральное уравнение первого рода с ядром Гильберта имеет вид

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{ctg} \left(\frac{\xi - x}{2} \right) \varphi(\xi) d\xi = f(x), \quad (5)$$

где $\varphi(x)$ — неизвестная функция ($0 \leq x \leq 2\pi$), $\operatorname{ctg} [\frac{1}{2}(\xi - x)]$ — ядро Гильберта, $f(x)$ — заданная правая часть уравнения.

Общее сингулярное интегральное уравнение первого рода с ядром Гильберта имеет вид

$$-\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} N(x, \xi) \operatorname{ctg} \left(\frac{\xi - x}{2} \right) \varphi(\xi) d\xi = f(x), \quad (6)$$

где $N(x, \xi)$ — известная функция. Уравнение (6) часто записывают в эквивалентной форме, которая приведена в п. 12.4-5.

Будем считать, что все функции в уравнениях (5) и (6) также удовлетворяют условию Гёльдера (см. п. 12.2-2), причем функция $N(x, \xi)$ — по обоим переменным.

Если правые части уравнений (1)–(6) тождественно равны нулю, то уравнения называются однородными, в противном случае — неоднородными.

© Литература: Н. И. Мусхелишвили (1968), Ф. Д. Гахов (1977), А. И. Гусейнов, Х. Ш. Мухтаров (1980), S. G. Mikhlin, S. Prössdorf (1986), S. Prössdorf, B. Silbermann (1991), A. Dzhrayev (1992), И. К. Лифанов (1995).

12.2. Интеграл типа Коши

12.2-1. Определение интеграла типа Коши

Пусть L — некоторый гладкий замкнутый контур* на плоскости комплексного переменного $z = x + iy$. Область, лежащую внутри контура L , будем называть *внутренней* и обозначать Ω^+ , а дополнительную к $\Omega^+ \cup L$ область, содержащую бесконечно удаленную точку, будем называть *внешней* и обозначать Ω^- .

Если $f(z)$ — функция, аналитическая в Ω^+ и непрерывная в $\Omega^+ \cup L$, то согласно известной из теории функций комплексного переменного формуле Коши

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(\tau)}{\tau - z} d\tau = \begin{cases} f(z) & \text{при } z \in \Omega^+, \\ 0 & \text{при } z \in \Omega^-. \end{cases} \quad (1)$$

Если же $f(z)$ аналитична в области Ω^- и непрерывна в $\Omega^- \cup L$, то

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(\tau)}{\tau - z} d\tau = \begin{cases} f(\infty) & \text{при } z \in \Omega^+, \\ -f(z) + f(\infty) & \text{при } z \in \Omega^-. \end{cases} \quad (2)$$

За положительное направление обхода контура L , как обычно, будем принимать то, при котором область Ω^+ остается слева.

Формула Коши дает возможность вычислить значения функции в любой точке области, если известны ее значения на границе области, т. е. формула Коши решает краевую задачу для аналитических функций. Интеграл, стоящий в левой части формул (1) и (2), называется *интегралом Коши*.

Пусть теперь L — гладкий замкнутый или незамкнутый контур, целиком расположенный в конечной части плоскости, τ — комплексная координата его точек и $\varphi(\tau)$ — непрерывная функция точек контура. Тогда интеграл

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z} d\tau, \quad (3)$$

построенный так же, как и интеграл Коши, называется *интегралом типа Коши*. Функция $\varphi(\tau)$ называется его *плотностью*, а $1/(\tau - z)$ — *ядром*.

Для интеграла типа Коши с непрерывной плотностью $\varphi(\tau)$ единственными точками, где подынтегральная функция перестает быть аналитической относительно z , являются точки линии интегрирования L . Последняя является особой линией для функции $\Phi(z)$.

Если L — незамкнутый контур, то $\Phi(z)$ будет функцией, аналитической во всей плоскости с линией особенностей L . Пусть теперь L — замкнутый контур. Тогда $\Phi(z)$ распадается на две самостоятельные функции: $\Phi^+(z)$, определенную в области Ω^+ , и $\Phi^-(z)$, определенную для точек в области Ω^- . Функции эти, вообще говоря, не являются аналитическим продолжением друг друга.

Аналитическую функцию $\Phi(z)$, определяемую в двух дополняющих друг друга до полной плоскости областях Ω^+ , Ω^- двумя самостоятельными выражениями $\Phi^+(z)$, $\Phi^-(z)$, будем называть *кусочно аналитической функцией*.

Отметим одно важное свойство интеграла типа Коши. Функция $\Phi(z)$, представленная интегралом типа Коши (3), в бесконечно удаленной точке обращается в нуль, т. е. $\Phi^-(\infty) = 0$. Это условие является также и достаточным для представимости кусочно аналитической функции интегралом типа Коши.

12.2-2. Условие Гёльдера

Пусть L — гладкая кривая на плоскости комплексного переменного $z = x + iy$ и $\varphi(t)$ — функция точек этой кривой. Говорят, что функция $\varphi(t)$ удовлетворяет на кривой *условию Гёльдера*, если для любых двух точек этой кривой

$$|\varphi(t_2) - \varphi(t_1)| \leq A|t_2 - t_1|^\lambda, \quad (4)$$

где A и λ — положительные числа. Число A называется *постоянной Гёльдера*, а λ — *показателем Гёльдера*. Если бы λ было бы больше единицы, то из условия (4) вытекало бы, что

* Под *гладким контуром* будем понимать простую (без точек самопересечения) замкнутую или незамкнутую линию с непрерывно меняющейся касательной и не имеющую точек возврата (заострения).

производная $\varphi'(t)$ всюду равна нулю и функция $\varphi(t)$ была бы тождественно равна постоянной. Поэтому мы будем считать, что $0 < \lambda \leq 1$. Если $\lambda = 1$, то условие Гёльдера часто называют *условием Липшица*. Иногда условие Гёльдера называют *условием Липшица порядка λ* .

Если t_1, t_2 достаточно близки друг к другу и условие Гёльдера выполняется для некоторого показателя λ_1 , то оно будет, очевидно, выполняться и для всякого показателя $\lambda < \lambda_1$. Обратное, вообще говоря, несправедливо. Таким образом, меньшему λ соответствует более широкий класс функций. Наиболее узким классом будет класс функций, удовлетворяющих условию Липшица.

На основании последнего свойства легко установить, что если функции $\varphi_1(t), \varphi_2(t)$ удовлетворяют условию Гёльдера соответственно с показателями λ_1, λ_2 , то их сумма, произведение, а также частное при условии, что знаменатель не обращается в нуль, удовлетворяют условию Гёльдера с показателем $\lambda = \min(\lambda_1, \lambda_2)$.

Если $\varphi(t)$ дифференцируема и имеет конечную производную, то она удовлетворяет условию Липшица. Обратное, вообще говоря, неверно.

12.2.3. Главное значение сингулярного интеграла

Рассмотрим интеграл

$$\int_a^b \frac{dx}{x-c}, \quad a < c < b.$$

Вычисляя его как несобственный, получим

$$\int_a^b \frac{dx}{x-c} = \lim_{\substack{\varepsilon_1 \rightarrow 0 \\ \varepsilon_2 \rightarrow 0}} \left(-\int_a^{c-\varepsilon_1} \frac{dx}{c-x} + \int_{c+\varepsilon_2}^b \frac{dx}{x-c} \right) = \ln \frac{b-c}{c-a} + \lim_{\substack{\varepsilon_1 \rightarrow 0 \\ \varepsilon_2 \rightarrow 0}} \ln \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}. \quad (5)$$

Предел последнего выражения зависит, очевидно, от способа стремления ε_1 и ε_2 к нулю. Следовательно, интеграл, понимаемый как несобственный, не существует. Его называют *сингулярным интегралом*. Можно, однако, ему придать смысл, если установить некоторую зависимость между ε_1 и ε_2 . Полагая, что вырезаемый интервал расположен симметрично относительно точки c , т. е.

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon, \quad (6)$$

мы приходим к понятию главного значения сингулярного интеграла по Коши.

Главным значением по Коши сингулярного интеграла

$$\int_a^b \frac{dx}{x-c}, \quad a < c < b,$$

называется

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_a^{c-\varepsilon} \frac{dx}{x-c} + \int_{c+\varepsilon}^b \frac{dx}{x-c} \right).$$

Учитывая формулу (5) и условие (6), будем иметь

$$\int_a^b \frac{dx}{x-c} = \ln \frac{b-c}{c-a}. \quad (7)$$

Рассмотрим теперь более общий интеграл

$$\int_a^b \frac{\varphi(x)}{x-c} dx, \quad (8)$$

где $\varphi(x)$ — некоторая функция, удовлетворяющая условию Гёльдера. Этот интеграл аналогично рассмотренному выше будем понимать в смысле главного значения, которое определим следующим образом:

$$\int_a^b \frac{\varphi(x)}{x-c} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_a^{c-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x-c} dx + \int_{c+\varepsilon}^b \frac{\varphi(x)}{x-c} dx \right).$$

Записывая тождество

$$\int_a^b \frac{\varphi(x)}{x-c} dx = \int_a^b \frac{\varphi(x) - \varphi(c)}{x-c} dx + \varphi(c) \int_a^b \frac{dx}{x-c},$$

замечаем, что первый интеграл в правой части сходится как несобственный, поскольку в силу условия Гёльдера

$$\left| \frac{\varphi(x) - \varphi(c)}{x-c} \right| \leq \frac{A}{|x-c|^{1-\lambda}}, \quad 0 < \lambda \leq 1,$$

а второй интеграл совпадает с (7).

Таким образом, получаем, что сингулярный интеграл (8), где $\varphi(x)$ удовлетворяет условию Гёльдера, существует в смысле главного значения по Коши, причем

$$\int_a^b \frac{\varphi(x)}{x-c} dx = \int_a^b \frac{\varphi(x) - \varphi(c)}{x-c} dx + \varphi(c) \ln \frac{b-c}{c-a}.$$

Для обозначения сингулярного интеграла, некоторые авторы употребляют специальные символы, например *v.p.* \int (*valeur principale*). Однако в этом нет особой необходимости, потому что, с одной стороны, если интеграл (8) существует как обыкновенный или как несобственный, то он существует и в смысле главного значения, причем их значения совпадают, с другой же стороны, сингулярный интеграл всегда будем понимать в смысле главного значения. Поэтому сингулярный интеграл будем обозначать обычным знаком интеграла.

12.2-4. Многозначные функции

В задании комплексного числа $z = \rho e^{i\theta}$ модуль ρ определяется однозначно, аргумент же θ с точностью до слагаемого, кратного 2π . Последнее обстоятельство не приводит к многозначности представления числа в силу того, что аргумент входит в это представление через посредство функции $e^{i\theta}$, имеющей период 2π . Но если аналитическая функция такова, что в ее выражение аргумент входит посредством функции не периодической, то она окажется многозначной. Среди элементарных функций к таким принадлежат логарифм:

$$\ln(z - z_0) = \ln|z - z_0| + i \arg(z - z_0) = \ln \rho + i\Theta, \quad (9)$$

и степенная функция с нецелым показателем:

$$(z - z_0)^\gamma = \rho^\gamma e^{i\gamma\Theta} = \rho^\alpha [\cos(\beta \ln \rho) + i \sin(\beta \ln \rho)] e^{i\gamma\theta} e^{i2\pi k\gamma}, \quad \gamma = \alpha + i\beta. \quad (10)$$

Во всех рассуждениях под логарифмом модуля комплексного числа всегда понимается его действительное значение согласно обычному определению. Общее представление аргумента Θ имеет вид $\Theta = \theta + 2\pi k$, где k может принимать любые целые значения ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), а в качестве θ можно взять наименьшее по абсолютной величине значение аргумента.

Каждому выбранному значению k будет соответствовать определенная ветвь многозначной функции. У логарифмической функции число ветвей бесконечно. У степенной при иррациональном или комплексном показателе также бесконечно. Если же показатель рациональный, $\gamma = p/q$, где p/q — несократимая дробь, то степенная функция имеет q ветвей. Ветви логарифма отличаются друг от друга на слагаемое вида $i2\pi m$, а ветви степенной функции на множитель $e^{i2\pi m\gamma}$ (m — целое число). Для задания многозначной функции, очевидно, необходимо указать выбранную ветвь. Однако, в отличие от функций действительного переменного, этого еще недостаточно для полного определения многозначной функции комплексного переменного. Для последних существуют на плоскости точки, обладающие тем свойством, что, когда переменное, изменяясь по замкнутому контуру, окружающему эту точку, возвращается к начальному значению, выбранная ветвь функции не остается неизменной, а переходит в некоторую другую ветвь. Такие точки называются *точками ветвления* многозначной функции.

Для рассматриваемых функций (9) и (10) точками ветвления будут z_0 и бесконечно удаленная. Если переменное описывает контур, окружающий точку z_0 в положительном или отрицательном направлении, то аргумент Θ изменяется на 2π или на -2π . При этом логарифм получает слагаемое $i2\pi$ или $-i2\pi$, а степенная функция множитель $e^{i2\pi\gamma}$ или $e^{-i2\pi\gamma}$. Следовательно, ветвь, соответствующая выбранному значению $k = n$, переходит в соседнюю ветвь, соответствующую значению $k = n + 1$ или $k = n - 1$. Исследование в бесконечно удаленной точке производится, как обычно, путем подстановки $z = 1/\zeta$ и исследования в точке $\zeta = 0$.

Сохранить выбранную ветвь функции удастся лишь в том случае, если сделать невозможным обходы вокруг точек ветвления. Последнее достигается проведением в плоскости разрезов, соединяющих точки ветвления. В рассматриваемых случаях логарифмической и степенной функций нужно провести разрез вдоль некоторой линии, исходящей из точки z_0 и удаляющейся в бесконечность.

Границы изменения аргумента Θ определяются положением разреза. Если, например, разрез проведен по лучу, образующему с осью абсцисс угол θ_0 , то для главной ветви ($k = 0$) $\theta_0 \leq \Theta \leq \theta_0 + 2\pi$. В частности, для разреза, направленного по положительной полуоси абсцисс, $0 \leq \Theta \leq 2\pi$, по отрицательной полуоси, $-\pi \leq \Theta \leq \pi$. Если разрез криволинейный, то границы

изменения аргумента будут функциями точки. Начальное значение аргумента соответствует левому (если смотреть от точки z_0) берегу разреза, конечное — правому. Обозначим значение аргумента на левом и правом берегах разреза соответственно Θ^+ и Θ^- . Тогда $\Theta^- - \Theta^+ = 2\pi$. Разрез для выбранной ветви будет линией разрыва. На берегах разреза выполняются соотношения

$$\ln(z^- - z_0) = \ln(z^+ - z_0) + i2\pi, \quad (z^- - z_0)^\gamma = e^{i2\pi\gamma}(z^+ - z_0)^\gamma.$$

Свойство разрывности ветвей многозначных функций на берегах разреза широко используется при решении краевых задач с разрывными граничными условиями. Логарифм используется в том случае, когда разрывная функция входит в краевое условие в качестве слагаемого, степенная функция, — если множителем.

12.2-5. Главное значение сингулярного криволинейного интеграла

Пусть L — гладкий контур, τ и t — комплексные координаты его точек. Рассмотрим криволинейный сингулярный интеграл

$$\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau. \quad (11)$$

Проведем из точки t контура, как из центра, окружность радиуса ρ , и пусть t_1, t_2 — точки пересечения этой окружности с кривой. Радиус будем считать настолько малым, чтобы окружность не имела с кривой L других точек пересечения, кроме t_1 и t_2 . Обозначим часть контура L , вырезаемую окружностью, через l и возьмем интеграл

$$\int_{L-l} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau. \quad (12)$$

Предел интеграла (12) при $\rho \rightarrow 0$ называется *главным значением сингулярного интеграла* (11). Представляя его в виде

$$\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau = \int_L \frac{\varphi(\tau) - \varphi(t)}{\tau - t} d\tau + \varphi(t) \int_L \frac{d\tau}{\tau - t}$$

и рассуждая так же, как и ранее, получим, что сингулярный интеграл (11) для функции $\varphi(\tau)$, удовлетворяющей условию Гёльдера, существует в смысле главного значения по Коши.

Во всех точках гладкости его можно представить в двух видах:

$$\begin{aligned} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau &= \int_L \frac{\varphi(\tau) - \varphi(t)}{\tau - t} d\tau + \varphi(t) \left(\ln \frac{b-t}{a-t} + i\pi \right), \\ \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau &= \int_L \frac{\varphi(\tau) - \varphi(t)}{\tau - t} d\tau + \varphi(t) \ln \frac{b-t}{t-a}, \end{aligned}$$

где a и b — концевые точки контура L .

В частности, для замкнутого контура, полагая $a = b$, получим

$$\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau = \int_L \frac{\varphi(\tau) - \varphi(t)}{\tau - t} d\tau + i\pi\varphi(t).$$

Пусть L — гладкий контур (замкнутый или незамкнутый) и $\varphi(\tau)$ — функция точек контура, удовлетворяющая условию Гёльдера. Тогда интеграл типа Коши

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z} d\tau \quad (13)$$

имеет предельные значения $\Phi^+(t)$, $\Phi^-(t)$ во всех точках контура L , не совпадающих с его концами, при приближении к контуру слева или справа по любому пути, и эти предельные значения выражаются через плотность интеграла $\varphi(t)$ и сингулярный интеграл (13) по формулам Сохоцкого-Племеля:

$$\Phi^+(t) = \frac{1}{2} \varphi(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau, \quad \Phi^-(t) = -\frac{1}{2} \varphi(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau. \quad (14)$$

Вычитая и складывая формулы (14), получим пару равносильных им формул

$$\Phi^+(t) - \Phi^-(t) = \varphi(t), \quad (15)$$

$$\Phi^+(t) + \Phi^-(t) = \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau, \quad (16)$$

которыми часто пользуются вместо (14).

Формулы Сохоцкого–Племеля для действительной оси имеют вид

$$\Phi^+(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - x} d\tau, \quad \Phi^-(x) = -\frac{1}{2}\varphi(x) + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - x} d\tau. \quad (17)$$

Причем

$$\Phi^+(\infty) = \frac{1}{2}\varphi(\infty), \quad \Phi^-(\infty) = -\frac{1}{2}\varphi(\infty).$$

Отсюда и из (17) имеем

$$\Phi^+(\infty) + \Phi^-(\infty) = 0, \quad (18)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - x} d\tau = 0. \quad (19)$$

Функция, представляемая интегралом типа Коши на действительной оси, необходимо удовлетворяет условию (18). Это условие является также и достаточным для представления кусочно аналитической в верхней и нижней полуплоскостях функции интегралом по действительной оси.

Рассмотрим интеграл типа Коши по действительной оси, считая z не лежащим на ней:

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x - z} dx, \quad (20)$$

где $\varphi(x)$ — комплексная функция действительного переменного x , удовлетворяющая на действительной оси условию Гёльдера (см. п. 10.1-3).

Если аналитическая в верхней полуплоскости функция $\varphi(z)$ непрерывна в замкнутой полуплоскости и на действительной оси удовлетворяет условию Гёльдера, то

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x - z} dx = \begin{cases} \varphi(z) - \frac{1}{2}\varphi(\infty) & \text{при } \operatorname{Im} z > 0, \\ -\frac{1}{2}\varphi(\infty) & \text{при } \operatorname{Im} z < 0. \end{cases} \quad (21)$$

Также справедлива формула

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(\infty)}{x - z} dx = \begin{cases} \frac{1}{2}\varphi(\infty) & \text{при } \operatorname{Im} z > 0, \\ -\varphi(z) + \frac{1}{2}\varphi(\infty) & \text{при } \operatorname{Im} z < 0, \end{cases} \quad (22)$$

если аналитическая в нижней полуплоскости функция $\varphi(z)$ непрерывна в замкнутой полуплоскости и удовлетворяет на действительной оси условию Гёльдера.

12.2-6. Формула перестановки Пуанкаре–Бертрана

Рассмотрим пару следующих повторных сингулярных интегралов:

$$N(t) = \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{d\tau}{\tau - t} \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{K(\tau, \tau_1)}{\tau_1 - \tau} d\tau_1, \quad (23)$$

$$M(t) = \frac{1}{\pi i} \int_L d\tau_1 \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{K(\tau, \tau_1)}{(\tau - t)(\tau_1 - \tau)} d\tau, \quad (24)$$

где L — гладкий контур, а функция $K(\tau, \tau_1)$ удовлетворяет условию Гёльдера по обоим переменным.

Оба интеграла имеют смысл, и хотя N и M отличаются лишь порядком интегрирования, они не равны, что показывает следующая формула перестановки Пуанкаре–Бертрана:

$$\frac{1}{\pi i} \int_L \frac{d\tau}{\tau - t} \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{K(\tau, \tau_1)}{\tau_1 - \tau} d\tau_1 = K(t, t) + \frac{1}{\pi i} \int_L d\tau_1 \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{K(\tau, \tau_1)}{(\tau - t)(\tau_1 - \tau)} d\tau, \quad (25)$$

которую можно записать еще и в следующем виде:

$$\int_L \frac{d\tau}{\tau - t} \int_L \frac{K(\tau, \tau_1)}{\tau_1 - \tau} d\tau_1 = -\pi^2 K(t, t) + \int_L d\tau_1 \int_L \frac{K(\tau, \tau_1)}{(\tau - t)(\tau_1 - \tau)} d\tau. \quad (26)$$

Пример. Вычислим интеграл типа Коши, взятый по единичной окружности $|z| = 1$, с плотностью $\varphi(\tau) = 2/[\tau(\tau - 2)]$, т. е.

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{1}{\tau - 2} \frac{d\tau}{\tau - z} - \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{1}{\tau} \frac{d\tau}{\tau - z}.$$

Функция $1/(z - 2)$ аналитична в Ω^+ , а $1/z$ аналитична в Ω^- и обращается на бесконечности в нуль. Первый интеграл по формуле (1) равен $1/(z - 2)$ для $z \in \Omega^+$ и равен нулю для $z \in \Omega^-$. Второй интеграл по формуле (2) для $z \in \Omega^-$ равен $-1/z$, а для $z \in \Omega^+$ равен нулю. Отсюда

$$\Phi^+(z) = \frac{1}{z - 2}, \quad \Phi^-(z) = \frac{1}{z}.$$

12.3. Краевая задача Римана

12.3-1. Теорема об аналитическом продолжении и теорема Лиувилля

Теорема об аналитическом продолжении (принцип непрерывности). Пусть две области Ω_1 и Ω_2 граничат вдоль некоторой гладкой кривой L . В областях Ω_1 и Ω_2 заданы аналитические функции $f_1(z)$ и $f_2(z)$. Предположим, что при стремлении точки z к кривой L обе функции стремятся к предельным значениям, непрерывным на кривой L , причем эти предельные значения равны между собой. При этих условиях функции $f_1(z)$ и $f_2(z)$ будут аналитическим продолжением друг друга.

Пусть в области Ω , ограниченной контуром L , функция $f(z)$ аналитична, за исключением конечного числа точек, где она может иметь полюсы. Выпишем разложение в ряд в окрестности некоторой точки z_0 :

$$f(z) = c_n(z - z_0)^n + c_{n+1}(z - z_0)^{n+1} + \dots = (z - z_0)^n f_1(z), \quad f_1(z_0) = c_n \neq 0.$$

Число n называется *порядком функции в точке z_0* . Если $n > 0$, то порядок функции есть порядок ее нуля, если $n < 0$, то порядок ее есть порядок полюса с противоположным знаком. Если порядок функции в z_0 есть нуль, то в такой точке функция принимает конечное, отличное от нуля, значение. При рассмотрении бесконечно удаленной точки разность $z - z_0$ нужно заменить на $1/z$. Если точка z_0 лежит на контуре L , то порядком функции будем считать число $\frac{1}{2}n$.

Пусть N_Ω , P_Ω и N_L , P_L соответственно числа нулей и полюсов в области и на контуре, причем каждый из них берется столько раз, какова его кратность. Символом $[\delta]_L$ обозначим приращение величины δ при обходе контура в положительном направлении. Положительным обходом, как всегда, считается тот, при котором рассматриваемая область остается слева.

Принцип аргумента. Пусть $f(z)$ есть функция, аналитическая и однозначная в многосвязной области Ω , ограниченной гладким контуром $L = L_0 + L_1 + \dots + L_m$, за исключением конечного числа точек, где она может иметь полюсы, непрерывная в замкнутой области $\Omega + L$ и имеет на контуре не более чем конечное число нулей целого порядка. Тогда справедлива формула

$$N_\Omega - P_\Omega + \frac{1}{2}(N_L - P_L) = \frac{1}{2\pi}[\arg f(z)]_L.$$

Обобщенная теорема Лиувилля. Пусть функция $f(z)$ аналитична во всей плоскости комплексного переменного, за исключением точек $a_0 = \infty$, a_k ($k = 1, 2, \dots, n$), где она имеет полюсы, причем главные части разложений функции $f(z)$ в окрестности полюсов имеют вид

$$Q_0(z) = c_1^0 z + c_2^0 z^2 + \dots + c_{m_0}^0 z^{m_0} \quad \text{в точке } a_0,$$

$$Q_k\left(\frac{1}{z - a_k}\right) = \frac{c_1^k}{z - a_k} + \frac{c_2^k}{(z - a_k)^2} + \dots + \frac{c_{m_k}^k}{(z - a_k)^{m_k}} \quad \text{в точках } a_k.$$

Тогда функция $f(z)$ есть рациональная функция и может быть представлена формулой

$$f(z) = C + Q_0(z) + \sum_{k=1}^n Q_k\left(\frac{1}{z - a_k}\right),$$

где C — постоянная. В частности, если единственная особенность функции $f(z)$ есть полюс порядка m в бесконечно удаленной точке, то $f(z)$ есть многочлен степени m :

$$f(z) = c_0 + c_1 z + \dots + c_m z^m.$$

Обычно используют следующие обозначения:

- a) $\overline{f(z)}$ — функция, сопряженная с данной функцией $f(z)$;
- b) $f(\bar{z})$ — функция, получаемая из $f(z)$ путем замены в ней z на \bar{z} , т. е. y на $-y$ в $f(z)$;
- c) $\bar{f}(z)$ — функция, определяемая условием $\bar{f}(z) = \overline{f(\bar{z})}$.

Если $z = x + iy$ и $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, то

$$\overline{f(z)} = u(x, y) - iv(x, y), \quad f(\bar{z}) = u(x, -y) + iv(x, -y), \quad \bar{f}(z) = u(x, -y) - iv(x, -y).$$

В частности, если $f(z)$ задана рядом $f(z) = \sum_{k=0}^n c_k z^k$, то

$$\overline{f(z)} = \sum_{k=0}^n \bar{c}_k \bar{z}^k, \quad f(\bar{z}) = \sum_{k=0}^n c_k \bar{z}^k, \quad \bar{f}(z) = \sum_{k=0}^n \bar{c}_k z^k.$$

Для функции, представленной интегралом типа Коши

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z} d\tau,$$

будем иметь

$$\overline{f(z)} = -\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\overline{\varphi(\tau)}}{\bar{\tau} - \bar{z}} d\bar{\tau}, \quad f(\bar{z}) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - \bar{z}} d\tau, \quad \bar{f}(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\overline{\varphi(\tau)}}{\bar{\tau} - z} d\bar{\tau}.$$

Заметим, что если функция удовлетворяет условию $\bar{f}(z) = f(z)$, то для вещественных значений z она принимает чисто действительные значения. Справедливо также и обратное предложение.

12.3-2. Интерполяционный полином Эрмита

Интерполяционный полином Эрмита используется для построения канонической функции неоднородной задачи Римана в пп. 10.4-7 и 12.3-9.

Пусть заданы различные точки z_k ($k = 1, 2, \dots, m$) и пусть каждой точке z_k сопоставлены числа $\Delta_k^{(j)}$ ($j = 0, 1, \dots, n_k - 1$), где n_k — заданные натуральные числа. Требуется построить полином $\mathcal{U}_p(z)$ наименьшей степени, удовлетворяющий условиям

$$\mathcal{U}_p^{(j)}(z_k) = \Delta_k^{(j)}, \quad k = 1, 2, \dots, m, \quad j = 0, 1, \dots, n_k - 1,$$

где $\mathcal{U}_p^{(j)}(z_k)$ — значения производных j -го порядка полинома в точках z_k . Числа z_k называются узлами интерполирования, а n_k — кратностями интерполирования в узлах z_k .

Такой полином существует и имеет следующий вид (см. В. И. Смирнов, Н. А. Лебедев (1964)):

$$\mathcal{U}_p(z) = \sum_{k=1}^m \frac{\zeta(z)}{(z - z_k)^{n_k}} \sum_{r=0}^{n_k-1} A_{k,r} (z - z_k)^r, \quad p = \sum_{k=1}^m n_k - 1,$$

$$\zeta(z) = \prod_{k=1}^m (z - z_k)^{n_k}, \quad A_{k,r} = \sum_{j=0}^r \frac{\Delta_k^{(j)}}{j! (r-j)!} \left[\frac{d^{r-j}}{dz^{r-j}} \frac{(z - z_k)^{n_k}}{\zeta(z)} \right]_{z=z_k},$$

$$k = 1, 2, \dots, m, \quad r = 0, 1, \dots, n_k - 1,$$

причем он определяется единственным образом.

Интерполяционный полином $\mathcal{U}_p(z)$, построенный для функции $f(z)$, в точках z_k должен удовлетворять условиям

$$\mathcal{U}_p^{(j)}(z_k) = \Delta_k^{(j)} = f^{(j)}(z_k), \quad k = 1, 2, \dots, m, \quad j = 0, 1, \dots, n_k - 1,$$

где $f^{(j)}(z_k)$ — значения производных j -го порядка этой функции в точках z_k .

12.3-3. Понятие индекса

Пусть L — гладкий замкнутый контур и $D(t)$ — заданная на нем непрерывная функция, не обращающаяся в нуль.

Индексом ν функции $D(t)$ по контуру L называется разделенное на 2π приращение ее аргумента при обходе кривой L в положительном направлении:

$$\nu = \text{Ind } D(t) = \frac{1}{2\pi} [\arg D(t)]_L. \quad (1)$$

Так как $\ln D(t) = \ln |D(t)| + i \arg D(t)$ и после обхода контура L функция $|D(t)|$ возвращается к начальному значению, то $[\ln D(t)]_L = i[\arg D(t)]_L$ и следовательно,

$$\nu = \frac{1}{2\pi i} [\ln D(t)]_L. \quad (2)$$

Индекс можно представить в виде интеграла

$$\nu = \text{Ind } D(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_L d \ln D(t) = \frac{1}{2\pi} \int_L d \arg D(t). \quad (3)$$

При этом, если $D(t)$ не дифференцируема, но имеет ограниченную вариацию, то интеграл понимается в смысле Стильтьеса. В силу непрерывности $D(t)$ образ Γ замкнутого контура L будет также замкнутым контуром и приращение аргумента $D(t)$ при обходе контура L будет кратным 2π . Следовательно, справедливы следующие утверждения.

1°. Индекс функции, непрерывной на замкнутом контуре и нигде не обращающейся в нуль, есть целое число (возможно, нуль).

2°. Индекс произведения функций равен сумме индексов сомножителей. Индекс частного равен разности индексов делимого и делителя.

Пусть теперь $D(t)$ дифференцируема и представляет собой краевое значение аналитической внутри или вне контура L функции. Тогда

$$\nu = \frac{1}{2\pi i} \int_L d \ln D(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{D'_t(t)}{D(t)} dt \quad (4)$$

оказывается равным логарифмическому вычету функции $D(t)$. Из принципа аргумента (см. п. 12.3-1) вытекают следующие свойства индекса:

3°. Если $D(t)$ есть краевое значение функции, аналитической внутри или вне контура, то индекс ее равен числу нулей внутри контура или соответственно числу нулей вне контура, взятому со знаком минус.

4°. Если функция $D(z)$ аналитична внутри контура, за исключением конечного числа точек, где она может иметь полюсы, то индекс ее равен разности числа нулей и числа полюсов внутри контура.

Нули и полюсы считаются при этом столько раз, какова их кратность. Заметим еще, что индексы комплексно сопряженных функций обратны по знаку.

Пусть контур L описывается уравнением

$$t = t_1(s) + it_2(s), \quad 0 \leq s \leq l.$$

Подставляя выражение комплексной координаты t в функцию $D(t)$, получим

$$D(t) = D(t_1(s) + it_2(s)) = \xi(s) + i\eta(s). \quad (5)$$

Будем рассматривать ξ и η как декартовы координаты. Тогда

$$\xi = \xi(s), \quad \eta = \eta(s)$$

представляет собой параметрическое уравнение некоторой кривой Γ . В силу непрерывности функции $D(t)$ и замкнутости контура L кривая Γ будет замкнутой.

Число витков кривой Γ вокруг начала координат, т. е. число полных оборотов радиус-вектора, когда переменная s изменяется от 0 до l , и будет, очевидно, индексом функции $D(t)$. Число это иногда называют *порядком кривой* Γ относительно начала координат.

Если кривую Γ удастся построить, то число витков усматривается непосредственно. Можно привести много примеров, когда индекс может быть определен по виду кривой Γ . Например, если $D(t)$ — действительная или чисто мнимая функция, не обращающаяся в нуль, то Γ есть отрезок прямой (проходимый четное число раз) и индекс $D(t)$ равен нулю. Если действительная часть $\xi(s)$ или мнимая часть $\eta(s)$ не меняет знака, то индекс, очевидно, также равен нулю и т. п. Если функцию $D(t)$ можно представить в виде произведения или частного функций, являющихся предельными значениями аналитических внутри или вне контура функций, то индекс вычисляется на основании свойств 2°, 3° и 4°.

В общем случае вычисление индекса может быть произведено по формуле (3). Полагая в ней на основании формулы (5)

$$d \arg D(t) = d \arctg \frac{\eta(s)}{\xi(s)}$$

и предполагая ξ и η дифференцируемыми, получим

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{\xi d\eta - \eta d\xi}{\xi^2 + \eta^2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^l \frac{\xi(s)\eta'_s(s) - \eta(s)\xi'_s(s)}{\xi^2(s) + \eta^2(s)} ds. \quad (6)$$

Пример. Вычислить индекс $D(t) = t^n$ по любому контуру L , окружающему начало координат.

1-й способ. Функция t^n есть краевое значение функции z^n , имеющей один нуль порядка n внутри контура. Следовательно,

$$\nu = \text{Ind } t^n = n.$$

2-й способ. Если аргумент t есть φ , то аргумент t^n равен $n\varphi$. Когда точка t , обойдя контур L , возвращается к начальному значению, φ получает приращение 2π . Следовательно,

$$\text{Ind } t^n = n.$$

Индекс может быть определен и при помощи численных методов. В силу целочисленности значений индекса приближенное его значение, найденное с погрешностью, меньшей $\frac{1}{2}$, и округленное до ближайшего целого числа, даст точное значение.

12.3-4. Постановка задачи Римана

Даны простой гладкий замкнутый контур L , делящий плоскость комплексного переменного на внутреннюю область Ω^+ и внешнюю Ω^- , и две функции точек контура $D(t)$ и $H(t)$, удовлетворяющие условию Гёльдера (см. п. 12.2-2), причем $D(t)$ не обращается в нуль.

Задача Римана. Найти две функции (можно говорить об одной кусочно аналитической функции): $\Phi^+(z)$ — аналитическую в области Ω^+ , и $\Phi^-(z)$ — аналитическую в области Ω^- , включая $z = \infty$, удовлетворяющие на контуре L линейному соотношению

$$\Phi^+(t) = D(t)\Phi^-(t) \quad (\text{однородная задача}) \quad (7)$$

или

$$\Phi^+(t) = D(t)\Phi^-(t) + H(t) \quad (\text{неоднородная задача}). \quad (8)$$

Функцию $D(t)$ будем называть *коэффициентом задачи Римана*, а функцию $H(t)$ — ее *свободным членом*.

Рассмотрим предварительно задачу Римана частного вида, которую называют *задачей о скачке*. Пусть на замкнутом контуре L дана функция $\varphi(t)$, удовлетворяющая условию Гёльдера. Требуется найти кусочно аналитическую функцию $\Phi(z)$ ($\Phi(z) = \Phi^+(z)$ при $z \in \Omega^+$, $\Phi(z) = \Phi^-(z)$ при $z \in \Omega^-$), исчезающую на бесконечности и испытывающую при переходе через контур L скачок $\varphi(t)$, т. е. удовлетворяющую условию

$$\Phi^+(t) - \Phi^-(t) = \varphi(t).$$

Функция

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z} d\tau$$

на основании формул Сохоцкого–Племеля (см. п. 12.2-5) дает единственное решение этой задачи.

Таким образом, заданную на замкнутом контуре произвольную функцию $\varphi(t)$, удовлетворяющую условию Гёльдера, можно единственным образом представить в виде разности функций $\Phi^+(t)$ и $\Phi^-(t)$, являющихся краевыми значениями аналитических функций $\Phi^+(z)$ и $\Phi^-(z)$, при дополнительном условии $\Phi^-(\infty) = 0$.

Если отбросить дополнительное условие $\Phi^-(\infty) = 0$, то решение задачи будет даваться формулой

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z} d\tau + \text{const}. \quad (9)$$

Будем искать частное решение однородной задачи (7) в классе функций, не обращающихся на контуре в нуль. Пусть N_+ , N_- — число нулей искомых функций соответственно в областях Ω^+ , Ω^- . Взяв индекс обеих частей равенства (7), на основании его свойств 2° и 3° получим

$$N_+ + N_- = \text{Ind } D(t) = \nu. \quad (10)$$

Индекс ν коэффициента $D(t)$ будем называть *индексом задачи Римана*.

Пусть $\nu = 0$. При этом условии $\ln D(t)$ будет однозначной функцией. Из (10) следует $N_+ = N_- = 0$, т. е. решение не имеет нулей во всей плоскости. Функции $\ln \Phi^\pm(z)$ будут поэтому аналитическими в своих областях и, следовательно, однозначными вместе со своими краевыми значениями $\ln \Phi^\pm(t)$.

Логарифмируя краевое условие (7), получим

$$\ln \Phi^+(t) - \ln \Phi^-(t) = \ln D(t). \quad (11)$$

Для $\ln D(t)$ можно выбрать любую ветвь, поскольку окончательный результат не зависит от ее выбора. Таким образом, необходимо найти кусочно аналитическую функцию $\ln \Phi(z)$ по заданному на L скачку. Решение этой задачи при дополнительном условии $\ln \Phi^-(\infty) = 0$ дается формулой

$$\ln \Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\ln D(\tau)}{\tau - z} d\tau. \quad (12)$$

Обозначим для краткости

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\ln D(\tau)}{\tau - z} d\tau = G(z). \quad (13)$$

Решениями краевой задачи (7), удовлетворяющими условию $\Phi^-(\infty) = 1$, будут, как это непосредственно вытекает из формул Сохоцкого–Племеля, функции

$$\Phi^+(z) = e^{G^+(z)} \quad \text{и} \quad \Phi^-(z) = e^{G^-(z)}. \quad (14)$$

Если отбросить дополнительное условие $\Phi^-(\infty) = 1$, то в формуле (12) нужно добавить произвольное постоянное слагаемое и решение задачи будет иметь вид

$$\Phi^+(z) = C e^{G^+(z)}, \quad \Phi^-(z) = C e^{G^-(z)}, \quad (15)$$

где C — произвольная постоянная. Так как $G^-(\infty) = 0$, то C представляет собой значение $\Phi^-(z)$ на бесконечности.

Таким образом, в случае $\nu = 0$ и при произвольном $\Phi^-(\infty) \neq 0$ решение содержит одну произвольную постоянную, следовательно, имеется одно линейно независимое решение. Если $\Phi^-(\infty) = 0$, то $C = 0$ и задача имеет только тривиальное решение — тождественный нуль, что естественно в силу $N_- = 0$.

Отсюда можно получить важное следствие. Заданную на контуре L произвольную функцию $D(t) \neq 0$, удовлетворяющую условию Гёльдера и имеющую индекс нуль, можно представить в виде отношения функций $\Phi^+(t)$ и $\Phi^-(t)$, являющихся краевыми значениями функций, аналитических в областях Ω^+ , Ω^- и не имеющих в этих областях нулей. Функции эти определяются с точностью до произвольного постоянного множителя и даются формулами (15).

Переходя теперь к общему случаю, будем искать кусочно аналитическую функцию, удовлетворяющую однородному краевому условию (7) и имеющую нулевой порядок во всей плоскости, кроме одной бесконечно удаленной точки, где ее порядок равен индексу задачи.

Канонической функцией (однородной задачи Римана) $X(z)$ назовем функцию, удовлетворяющую краевому условию (7) и кусочно аналитическую всюду в плоскости, за исключением бесконечно удаленной точки, где порядок ее равен индексу задачи.

Эту функцию можно построить приведением к случаю нулевого индекса. Действительно, запишем краевое условие (7) в виде

$$\Phi^+(t) = t^{-\nu} D(t) t^{\nu} \Phi^-(t).$$

Представляя имеющую нулевой индекс функцию $t^{-\nu} D(t)$ как отношение краевых значений аналитических функций

$$t^{-\nu} D(t) = \frac{e^{G^+(t)}}{e^{G^-(t)}}, \quad G(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\ln[\tau^{-\nu} D(\tau)]}{\tau - z} d\tau, \quad (16)$$

получим выражение для канонической функции:

$$X^+(z) = e^{G^+(z)}, \quad X^-(z) = z^{-\nu} e^{G^-(z)}. \quad (17)$$

Из $X^+(t) = D(t) X^-(t)$ следует, что коэффициент задачи Римана может быть представлен в виде отношения канонических функций:

$$D(t) = \frac{X^+(t)}{X^-(t)}. \quad (18)$$

Представление (18) часто называют *факторизацией*.

При $\nu \geq 0$ каноническая функция, имея на бесконечности нуль порядка ν , является одним из частных решений краевой задачи (7). При $\nu < 0$ каноническая функция имеет на бесконечности полюс порядка $|\nu|$ и уже не является решением, но она и в этом случае используется в качестве вспомогательной функции при решении неоднородной задачи.

12.3-5. Решение однородной задачи

Пусть $\nu = \text{Ind } D(t)$ есть любое целое число. Представляя $D(t)$ по формуле (18), приведем краевое условие (7) к виду

$$\frac{\Phi^+(t)}{X^+(t)} = \frac{\Phi^-(t)}{X^-(t)}.$$

В левой части последнего равенства стоит краевое значение функции, аналитической в Ω^+ , а в правой — краевое значение функции, имеющей на бесконечности порядок не ниже $-\nu$. По принципу непрерывности (см. п. 12.3-1), функции в левой и правой частях являются аналитическим продолжением друг друга на всю плоскость, за исключением разве что бесконечно удаленной точки, где в случае $\nu > 0$ возможен полюс порядка не выше ν . Отсюда, при $\nu > 0$ по обобщенной теореме Лиувилля (см. п. 12.3-1) эта единая аналитическая функция является многочленом степени ν с произвольными коэффициентами. Если $\nu < 0$, то вновь по обобщенной теореме Лиувилля (п. 12.3-1), функция есть постоянная. Но так как на бесконечности она должна обратиться в нуль, то отсюда следует, что она есть тождественный нуль. Следовательно, получаем, что при $\nu < 0$ однородная задача имеет только тривиальное решение — тождественный нуль. Будем называть *неразрешимыми* задачи, не имеющие других решений, кроме тривиального. Таким образом, однородная задача (7) при отрицательном индексе неразрешима.

При $\nu > 0$, обозначая многочлен степени ν с произвольными коэффициентами через $P_\nu(z)$, получим решение в виде

$$\Phi(z) = P_\nu(z)X(z),$$

или

$$\Phi^+(z) = P_\nu(z)e^{G^+(z)}, \quad \Phi^-(z) = z^{-\nu}P_\nu(z)e^{G^-(z)}, \quad (19)$$

где $G(z)$ определяется формулой (16).

Итак, если индекс ν краевой задачи Римана неотрицателен, то однородная задача (7) имеет $\nu + 1$ линейно независимых решений

$$\Phi_k^+(z) = z^k e^{G^+(z)}, \quad \Phi_k^-(z) = z^{k-\nu} e^{G^-(z)} \quad (k = 0, 1, \dots, \nu). \quad (20)$$

Общее решение содержит $\nu + 1$ произвольных постоянных и определяется формулой (19). При отрицательном индексе задача (7) неразрешима.

Многочлен $P_\nu(z)$ имеет в комплексной плоскости точно ν нулей. Из формул (19) следует, что число всех нулей решения однородной краевой задачи Римана точно равно индексу ν . В зависимости от подбора коэффициентов многочлена эти нули могут попасть в любую из областей Ω^\pm , а также и на контур. Обозначая, как и ранее, N_\pm число нулей решения в областях Ω^\pm , а N_0 число нулей на контуре L , получим, что в общем случае (без ограничения отсутствия нулей на контуре) формула (10) примет вид

$$N_+ + N_- + N_0 = \nu. \quad (21)$$

12.3-6. Решение неоднородной задачи

Заменяя коэффициент $D(t)$ краевого условия (8) отношением краевых значений канонической функции по формуле (18), приведем (8) к виду

$$\frac{\Phi^+(t)}{X^+(t)} = \frac{\Phi^-(t)}{X^-(t)} + \frac{H(t)}{X^+(t)}. \quad (22)$$

Функция $H(t)/X^+(t)$ удовлетворяет условию Гёльдера. Заменяем ее разностью краевых значений аналитических функций (см. задачу о скачке из п. 12.3-4):

$$\frac{H(t)}{X^+(t)} = \Psi^+(t) - \Psi^-(t),$$

где

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{H(\tau)}{X^+(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - z}. \quad (23)$$

Тогда краевое условие (22) можно будет записать в виде

$$\frac{\Phi^+(t)}{X^+(t)} - \Psi^+(t) = \frac{\Phi^-(t)}{X^-(t)} - \Psi^-(t).$$

Заметим, что при $\nu \geq 0$ функция $\Phi^-(z)/X^-(z)$ будет иметь на бесконечности полюс, а при $\nu < 0$ — нуль порядка $|\nu|$.

Рассуждая совершенно так же, как это делалось при решении однородной задачи, получим следующие результаты.

Пусть $\nu \geq 0$, тогда

$$\frac{\Phi^+(t)}{X^+(t)} - \Psi^+(t) = \frac{\Phi^-(t)}{X^-(t)} - \Psi^-(t) = P_\nu(t).$$

Отсюда имеем решение

$$\Phi(z) = X(z)[\Psi(z) + P_\nu(z)], \quad (24)$$

причем $X(z)$ и $\Psi(z)$ выражаются формулами (17) и (23), а $P_\nu(z)$ — многочлен степени ν с произвольными коэффициентами.

Легко видеть, что формула (24) дает общее решение неоднородной задачи, так как оно содержит в качестве слагаемого общее решение однородной задачи $X(z)P_\nu(z)$.

Пусть $\nu < 0$. В этом случае $\Phi^-(z)/X^-(z)$ равно нулю на бесконечности и

$$\frac{\Phi^+(t)}{X^+(t)} - \Psi^+(t) = \frac{\Phi^-(t)}{X^-(t)} - \Psi^-(t) = 0,$$

откуда

$$\Phi(z) = X(z)\Psi(z). \quad (25)$$

В выражении функции $\Phi^-(z)$ первый множитель на основании формулы (17) имеет на бесконечности полюс порядка $-\nu$, а второй, как интеграл типа Коши (23), имеет на бесконечности в общем случае нуль первого порядка. Следовательно, $\Phi^-(z)$ имеет на бесконечности полюс порядка не выше чем $-\nu - 1$. Таким образом, если $\nu < -1$, неоднородная задача, вообще говоря, неразрешима. Она будет разрешима лишь тогда, когда свободный член удовлетворяет некоторым дополнительным условиям. Для получения их разложим в ряд интеграл типа Коши (23) в окрестности бесконечно удаленной точки:

$$\Psi^-(z) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^{-k}, \quad \text{где } c_k = -\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{H(\tau)}{X^+(\tau)} \tau^{k-1} d\tau.$$

Для аналитичности $\Phi^-(z)$ в бесконечно удаленной точке нужно, чтобы первые $-\nu - 1$ коэффициентов разложения $\Psi^-(z)$ обратились в нуль. Отсюда получаем, что для разрешимости неоднородной задачи в случае отрицательного индекса ($\nu < -1$) необходимо и достаточно, чтобы удовлетворялись следующие $-\nu - 1$ условий:

$$\int_L \frac{H(\tau)}{X^+(\tau)} \tau^{k-1} d\tau = 0, \quad k = 1, 2, \dots, -\nu - 1. \quad (26)$$

Итак, в случае $\nu \geq 0$ неоднородная задача Римана разрешима при любом свободном члене и ее общее решение дается формулой

$$\Phi(z) = \frac{X(z)}{2\pi i} \int_L \frac{H(\tau)}{X^+(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - z} + X(z)P_\nu(z), \quad (27)$$

где каноническая функция $X(z)$ определяется из (17), а $P_\nu(z)$ — полином степени ν с произвольными комплексными коэффициентами. Если $\nu = -1$, то неоднородная задача также разрешима и имеет единственное решение.

В случае $\nu < -1$ неоднородная задача, вообще говоря, неразрешима. Для того чтобы она была разрешима, необходимо и достаточно, чтобы свободный член задачи удовлетворял $-\nu - 1$ условиям (26). При выполнении последних единственное решение задачи дается формулой (27), где нужно положить $P_\nu(z) \equiv 0$.

Важные применения имеет решение с дополнительным требованием, чтобы оно обращалось в нуль в бесконечно удаленной точке. В этом случае вместо многочлена степени ν нужно взять многочлен степени $\nu - 1$. Для разрешимости задачи в случае отрицательного индекса придется потребовать обращения в нуль также и коэффициента $c_{-\nu}$.

Следовательно, при условии $\Phi^-(\infty) = 0$ решение будет задаваться при $\nu \geq 0$ формулой

$$\Phi(z) = X(z)[\Psi(z) + P_{\nu-1}(z)], \quad (28)$$

где при $\nu = 0$ нужно положить $P_{\nu-1}(z) \equiv 0$.

Если $\nu < 0$, то решение по-прежнему будет выражаться формулой (28), где $P_{\nu-1}(z) \equiv 0$, при соблюдении $-\nu$ условий разрешимости:

$$\int_L \frac{H(\tau)}{X^+(\tau)} \tau^{k-1} d\tau = 0, \quad k = 1, 2, \dots, -\nu. \quad (29)$$

В этом случае утверждение о разрешимости неоднородной задачи принимает более симметричный вид. При $\nu \geq 0$ общее решение неоднородной задачи линейно зависит от ν произвольных постоянных. При $\nu < 0$ число условий разрешимости равно $-\nu$. Заметим, что здесь при $\nu = 0$ неоднородная задача безусловно разрешима и притом единственным образом.

На основании изложенного решение краевой задачи Римана сводится в основном к двум следующим операциям:

- 1°. Представление произвольной функции, заданной на контуре, в виде разности краевых значений функций, аналитических в областях Ω^+ и Ω^- (задача о скачке).
- 2°. Представление неисчезающей функции в виде отношения краевых значений аналитических функций (факторизация).

При этом вторая операция может быть сведена к первой путем логарифмирования. Некоторые осложнения при ненулевом индексе вносит только неоднозначность логарифма. Первая операция для произвольной функции равносильна вычислению интеграла типа Коши. В связи с этим решение задачи по формулам (17), (23)–(25) выражается явно (в замкнутой форме) через интегралы типа Коши.

12.3-7. Задача Римана с рациональными коэффициентами

Рассмотрим краевую задачу Римана с контуром, состоящим из конечного числа простых кривых, коэффициент $D(t)$ которой есть рациональная функция, не имеющая нулей и полюсов на контуре. Заметим, что произвольная непрерывная (а тем более удовлетворяющая условию Гёльдера) функция может быть с любой точностью приближена рациональными и решение задачи с рациональными коэффициентами может стать основой ее приближенного решения в общем случае. Предположим, что задача Римана имеет вид

$$\Phi^+(t) = \frac{p(t)}{q(t)} \Phi^-(t) + H(t), \quad (30)$$

где многочлены $p(z)$ и $q(z)$ можно разложить в произведение

$$p(z) = p_+(z)p_-(z), \quad q(z) = q_+(z)q_-(z), \quad (31)$$

причем $p_+(z)$, $q_+(z)$ — многочлены, корни которых лежат в Ω^+ , а $p_-(z)$, $q_-(z)$ — многочлены с корнями в Ω^- . Из свойства 4° индекса (п. 12.3-3) легко получить, что $\nu = m_+ - n_+$, где m_+ и n_+ — числа нулей многочленов $p_+(z)$ и $q_+(z)$.

Ввиду того, что коэффициент задачи есть функция, аналитически продолжимая в области Ω^\pm , здесь целесообразно не пользоваться общими формулами решения, а получить последнее непосредственно, пользуясь аналитическим продолжением, причем роль стандартной функции типа t^ν , используемой для сведения индекса к нулевому, способно играть произведение $\prod_{j=1}^{\nu} (t - a_j)$, где a_1, a_2, \dots, a_ν — любые точки области Ω^+ . Представляя краевое условие в виде

$$\frac{q_-(t)}{p_-(t)} \Phi^+(t) - \frac{p_+(t)}{q_+(t)} \Phi^-(t) = \frac{q_-(t)}{p_-(t)} H(t),$$

где каноническая функция определяется выражениями

$$X^+(z) = \frac{p_-(z)}{q_-(z)}, \quad X^-(z) = \frac{q_+(z)}{p_+(z)}, \quad (32)$$

на основании тех же соображений, что и в п. 12.3-6, получим решение в форме

$$\Phi^+(z) = \frac{p_-(z)}{q_-(z)} [\Psi(z) + P_{\nu-1}(z)], \quad \Phi^-(z) = \frac{q_+(z)}{p_+(z)} [\Psi(z) + P_{\nu-1}(z)], \quad (33)$$

где

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{q_-(\tau)}{p_-(\tau)} \frac{H(\tau) d\tau}{\tau - z}, \quad \Phi^-(\infty) = 0.$$

Если индекс отрицательный, то нужно положить $P_{\nu-1}(z) \equiv 0$ и добавить условия разрешимости

$$\int_L \frac{q_-(\tau)}{p_-(\tau)} H(\tau) \tau^{k-1} d\tau = 0, \quad k = 1, 2, \dots, -\nu, \quad (34)$$

которые согласуются с общей формулой (29) с учетом того, что каноническая функция имеет вид (32).

Заметим, что и в общем случае при практическом решении задачи Римана бывает удобно коэффициент представлять в виде

$$D(t) = \frac{p_+(t)p_-(t)}{q_+(t)q_-(t)} D_1(t),$$

где $D_1(t)$ — функция с нулевым индексом, а многочлены $p_{\pm}(t)$ и $q_{\pm}(t)$ подбираются, исходя из вида коэффициента. При удачном подборе таких многочленов решение может быть получено наиболее простым путем.

Пример. Рассмотрим задачу Римана

$$\Phi^+(t) = \frac{t}{t^2 - 1} \Phi^-(t) + \frac{t^3 - t^2 + 1}{t^3 - t}$$

при условии, что $\Phi^-(\infty) = 0$ и L — произвольный гладкий замкнутый контур следующего вида:

- 1°. Контур L содержит внутри себя точку $z_1 = 0$ и не содержит точек $z_2 = 1$, $z_3 = -1$;
- 2°. Контур L содержит внутри себя точки $z_1 = 0$, $z_2 = 1$ и не содержит точки $z_3 = -1$;
- 3°. Контур L содержит внутри себя точки $z_1 = 0$, $z_2 = 1$, $z_3 = -1$;
- 4°. Контур L содержит внутри себя точки $z_2 = 1$, $z_3 = -1$ и не содержит точки $z_1 = 0$.

Рассмотрим случаи 1°–4° по порядку. Для решения используем метод из п. 12.3-7.

1°. В этом случае будем иметь

$$\begin{aligned} p_+(t) &= t, & p_-(t) &= 1, & m_+ &= 1, \\ q_+(t) &= 1, & q_-(t) &= t^2 - 1, & n_+ &= 0, & \nu &= m_+ - n_+ = 1. \end{aligned}$$

Запишем краевое условие в виде

$$(t^2 - 1)\Phi^+(t) - t\Phi^-(t) = \frac{1}{t}(t^3 - t^2 + 1)(t + 1).$$

Отсюда

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{q_-(\tau)}{p_-(\tau)} H(\tau) \frac{d\tau}{\tau - z} = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\tau^3 - \tau + 1}{\tau - z} d\tau + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{1/\tau}{\tau - z} d\tau,$$

и, значит, в силу формул для интеграла Коши (см. п. 12.2-1) имеем

$$\Psi^+(z) = z^3 - z + 1, \quad \Psi^-(z) = -\frac{1}{z}.$$

Общее решение задачи содержит одно произвольную постоянную. По формуле (33) находим

$$\begin{aligned} \Phi^+(z) &= \frac{1}{z^2 - 1}(z^3 - z + 1 + C) = \frac{z^3 - z + 1}{z^2 - 1} + \frac{C}{z^2 - 1}, \\ \Phi^-(z) &= \frac{1}{z} \left(-\frac{1}{z} + C \right) = -\frac{1}{z^2} + \frac{C}{z}, \end{aligned}$$

где C — произвольная постоянная. Заменяя C на $C - 1$, можно решению придать еще и такую форму:

$$\Phi^+(z) = z + \frac{C}{z^2 - 1}, \quad \Phi^-(z) = -\frac{z + 1}{z^2} + \frac{C}{z}.$$

2°. Имеем

$$p_+(t) = t, \quad p_-(t) = 1, \quad q_+(t) = t - 1, \quad q_-(t) = t + 1, \quad m_+ = n_+ = 1, \quad \nu = 0,$$

$$(t + 1)\Phi^+(t) - \frac{t}{t - 1}\Phi^-(t) = \frac{(t + 1)(t^3 - t^2 + 1)}{t(t - 1)},$$

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\tau^2 + \tau}{\tau - z} d\tau + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{(\tau + 1)/[\tau(\tau - 1)]}{\tau - z} d\tau = \begin{cases} z^2 + z, & z \in \Omega^+, \\ -\frac{z + 1}{z(z - 1)}, & z \in \Omega^-. \end{cases}$$

Задача имеет единственное решение:

$$\begin{aligned}\Phi^+(z) &= \frac{p_-(z)}{q_-(z)} \Phi^+(z) = \frac{1}{z+1} (z^2 + z) = z, \\ \Phi^-(z) &= \frac{q_+(z)}{p_+(z)} \Phi^-(z) = \frac{z-1}{z} \left[-\frac{z+1}{z(z-1)} \right] = -\frac{z+1}{z^2}.\end{aligned}$$

3°. Имеем

$$\begin{aligned}p_+(t) &= t, \quad p_-(t) = 1, \quad q_+(t) = t^2 - 1, \quad q_-(t) = 1, \quad m_+ = 1, \quad n_+ = 2, \quad \nu = -1, \\ \Psi(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\tau}{\tau - z} d\tau + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{1/[\tau(\tau-1)]}{\tau - z} d\tau = \begin{cases} z, & z \in \Omega^+, \\ -\frac{1}{z(z-1)}, & z \in \Omega^-. \end{cases}\end{aligned}$$

Решение задачи существует лишь при выполнении условий разрешимости (34) или, в данном случае, одного условия:

$$\int_L \frac{q_-(\tau)}{p_-(\tau)} H(\tau) d\tau = 0.$$

Вычисляя этот интеграл, находим

$$\int_L \frac{\tau^3 - \tau^2 + 1}{\tau^2 - \tau} d\tau = \int_L \tau d\tau + \int_L \frac{d\tau}{\tau - 1} - \int_L \frac{d\tau}{\tau} = 0 + 2\pi i - 2\pi i = 0.$$

Условие разрешимости, таким образом, выполняется, и единственным решением задачи будет

$$\Phi^+(z) = z, \quad \Phi^-(z) = -\frac{z+1}{z^2}.$$

4°. В этом случае имеем

$$p_+(t) = 1, \quad p_-(t) = t, \quad q_+(t) = t^2 - 1, \quad q_-(t) = 1, \quad \nu = m_+ - n_+ = -2 < 0.$$

Для разрешимости задачи необходимо выполнение двух условий:

$$\int_L \frac{q_-(\tau)}{p_-(\tau)} H(\tau) \tau^{k-1} d\tau = 0, \quad k = 1, 2.$$

Вычисляя последний интеграл при $k = 1$, находим

$$\int_L \frac{\tau^3 - \tau^2 + 1}{\tau(\tau^2 - \tau)} d\tau = \int_L \left(1 - \frac{1}{\tau} - \frac{1}{\tau^2} + \frac{1}{\tau - 1} \right) d\tau = 2\pi i \neq 0.$$

Таким образом, условие разрешимости не выполнено, и поэтому задача не имеет решения. Заметим, что если формально вычислить функцию $\Phi(z)$, то она будет иметь полюс в бесконечно удаленной точке и, следовательно, не может являться решением задачи.

12.3-8. Задача Римана для действительной оси

Пусть контур L есть действительная ось. Как и ранее, задача Римана заключается в том, чтобы найти две ограниченные аналитические соответственно в верхней и нижней полуплоскостях функции $\Phi^+(z)$, $\Phi^-(z)$ (кусочно аналитическую функцию $\Phi(z)$), предельные значения которых на контуре удовлетворяют краевому условию

$$\Phi^+(x) = D(x)\Phi^-(x) + H(x), \quad -\infty < x < \infty. \quad (35)$$

Заданные функции $D(x)$ и $H(x)$ удовлетворяют условию Гёльдера как в конечных точках, так и в окрестности бесконечно удаленной точки контура. Считаем также, что $D(x) \neq 0$.

Главное отличие от рассмотренного ранее случая конечной кривой состоит в том, что здесь бесконечно удаленная точка и начало координат лежат на самом контуре и потому не могут быть приняты в качестве исключительной точки, где для канонической функции допустим ненулевой порядок. Вместо употреблявшейся в предыдущем вспомогательной функции t , имеющей по L индекс, равный единице, здесь будет введена обладающая тем же свойством на действительной оси дробно-линейная функция

$$\frac{x-i}{x+i}.$$

Аргумент этой функции

$$\arg \frac{x-i}{x+i} = \arg \frac{(x-i)^2}{x^2+i} = 2 \arg(x-i)$$

изменяется на 2π , когда x пробегает действительную ось в положительном направлении. Таким образом,

$$\text{Ind} \frac{x-i}{x+i} = 1.$$

Если $\text{Ind} D(x) = \nu$, то функция

$$\left(\frac{x-i}{x+i} \right)^{-\nu} D(x)$$

имеет индекс, равный нулю. Ее логарифм будет на действительной оси функцией однозначной.

Построим каноническую функцию, для которой исключительной точкой будет точка $-i$:

$$X^+(z) = e^{G^+(z)}, \quad X^-(z) = \left(\frac{z-i}{z+i} \right)^{-\nu} e^{G^-(z)}, \quad (36)$$

где

$$G(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \ln \left[\left(\frac{\tau-i}{\tau+i} \right)^{-\nu} D(\tau) \right] \frac{d\tau}{\tau-z}.$$

Пользуясь предельными значениями этой функции, преобразуем краевое условие (35) к виду

$$\frac{\Phi^+(x)}{X^+(x)} = \frac{\Phi^-(x)}{X^-(x)} + \frac{H(x)}{X^+(x)}.$$

Далее, вводя аналитическую функцию

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{H(\tau)}{X^+(\tau)} \frac{d\tau}{\tau-z}, \quad (37)$$

представим краевое условие в форме

$$\frac{\Phi^+(x)}{X^+(x)} - \Psi^+(x) = \frac{\Phi^-(x)}{X^-(x)} - \Psi^-(x).$$

Заметим, что, в отличие от случая конечного контура, здесь, вообще говоря, $\Psi^-(\infty) \neq 0$. Применяя теорему об аналитическом продолжении и учитывая, что единственной особенностью рассматриваемой функции может быть лишь полюс в точке $z = -i$ порядка не выше ν (при $\nu > 0$), на основании обобщенной теоремы Лиувилля (см. п. 12.3-1) будем иметь

$$\frac{\Phi^+(z)}{X^+(z)} - \Psi^+(z) = \frac{\Phi^-(z)}{X^-(z)} - \Psi^-(z) = \frac{P_\nu(z)}{(z+i)^\nu}, \quad \nu \geq 0,$$

где $P_\nu(z)$ — многочлен степени не выше ν с произвольными коэффициентами. Отсюда получаем общее решение задачи

$$\Phi(z) = X(z) \left[\Psi(z) + \frac{P_\nu(z)}{(z+i)^\nu} \right] \quad \text{при } \nu \geq 0, \quad (38)$$

$$\Phi(z) = X(z) [\Psi(z) + C] \quad \text{при } \nu < 0, \quad (39)$$

где C — произвольная постоянная. При $\nu < 0$ функция $X(z)$ имеет в точке $z = -i$ полюс порядка $-\nu$, поэтому для разрешимости задачи нужно положить $C = -\Psi^-(i)$. При $\nu < -1$, кроме того, должны выполняться еще следующие условия:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{H(x)}{X^+(x)} \frac{dx}{(x+i)^k} = 0, \quad k = 2, 3, \dots, -\nu. \quad (40)$$

Таким образом, получены результаты, аналогичные тем, которые имели место в случае конечного контура.

Действительно, при $\nu \geq 0$ однородная и неоднородная краевые задачи Римана для полуплоскости безусловно разрешимы и решение их зависит линейно от $\nu+1$ произвольных постоянных. При $\nu < 0$ однородная задача неразрешима. Неоднородная задача при $\nu < 0$ разрешима однозначно, причем в случае $\nu = -1$ безусловно, а при $\nu < -1$ лишь при выполнении $-\nu-1$ условий (40).

Остановимся на случае исчезающих на бесконечности решений (см. также п. 10.3-4). Подставляя $\Phi^+(\infty) = \Phi^-(\infty) = 0$ в краевое условие, получим $H(\infty) = 0$. Следовательно, чтобы задача Римана имела решение, исчезающее на бесконечности, свободный член краевого условия должен на бесконечности обращаться в нуль. Будем считать это условие выполненным. Для получения решения в рассматриваемом случае следует в (38) вместо $P_\nu(z)$ взять $P_{\nu-1}(z)$, а в (39) постоянную C приравнять нулю. Таким образом,

$$\Phi(z) = X(z) \left[\Psi(z) + \frac{P_{\nu-1}(z)}{(z+i)^\nu} \right]. \quad (41)$$

При $\nu \leq 0$ в этой формуле нужно положить $P_{\nu-1}(z) \equiv 0$. К условиям разрешимости (40) добавится еще одно: $\Psi(-i) = 0$, и в результате они примут вид

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{H(x)}{X^+(x)} \frac{dx}{(x+i)^k} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, -\nu. \quad (42)$$

Теперь при $\nu > 0$ будем иметь решение, зависящее от ν произвольных постоянных, при $\nu \leq 0$ решение единственно, причем при $\nu < 0$ для его существования необходимо и достаточно выполнения $-\nu$ условий.

12.3-9. Исключительные случаи задачи Римана

В постановке краевой задачи Римана требовалось, чтобы коэффициент $D(t)$ удовлетворял условию Гёльдера (что исключало возможность обращения его в бесконечность) и нигде не обращался в нуль. Ограничения эти, как было видно из хода решения (использование $\ln D(t)$), существенны. Пусть теперь $D(t)$ в отдельных точках контура обращается в нуль или бесконечность целых порядков. Будем считать, что контур L состоит из одной замкнутой кривой.

Рассмотрим однородную задачу. Запишем краевое условие однородной задачи Римана в виде

$$\Phi^+(t) = \frac{\prod_{k=1}^{\mu} (t - \alpha_k)^{m_k}}{\prod_{j=1}^{\varkappa} (t - \beta_j)^{p_j}} D_1(t) \Phi^-(t). \quad (43)$$

Здесь α_k ($k = 1, 2, \dots, \mu$) и β_j ($j = 1, 2, \dots, \varkappa$) — некоторые точки контура, m_k и p_j — целые положительные числа, $D_1(t)$ — функция, удовлетворяющая условию Гёльдера и не обращающаяся в нуль. Точки α_k будут нулями функции $D(t)$. Точки β_j будем называть ее *полюсами*. Так как функция $D(t)$ неаналитическая, то применение термина «полюс» не вполне законно. Будем употреблять этот термин для краткости, понимая под этим точку, где функция (неаналитическая) обращается в бесконечность целого порядка. Обозначим

$$\text{Ind } D_1(t) = \nu, \quad \sum_{j=1}^{\varkappa} p_j = p, \quad \sum_{k=1}^{\mu} m_k = m.$$

Решение будем искать в классе функций, ограниченных на контуре.

Пусть $X(z)$ есть каноническая функция задачи Римана с коэффициентом $D_1(t)$. Подставим $D_1(t) = X^+(t)/X^-(t)$ в (43) и запишем краевое условие в виде

$$\frac{\Phi^+(t)}{X^+(t) \prod_{k=1}^{\mu} (t - \alpha_k)^{m_k}} = \frac{\Phi^-(t)}{X^-(t) \prod_{j=1}^{\varkappa} (t - \beta_j)^{p_j}}. \quad (44)$$

Применим к последнему равенству теорему об аналитическом продолжении и обобщенную теорему Лиувилля (см. п. 12.3-1). Точки α_k , β_j не могут быть особыми точками единой аналитической функции, так как это противоречило бы предположению об ограниченности $\Phi^+(t)$ или $\Phi^-(t)$. Следовательно, единственной возможной особенностью является бесконечно

удаленная точка. Порядок на бесконечности $X^-(z)$ есть ν , а порядок $\prod_{j=1}^{\varkappa} (z - \beta_j)^{p_j}$ равен $-p$.

Отсюда порядок на бесконечности функции $\Phi^-(z)/[X^-(z) \prod_{j=1}^{\varkappa} (z - \beta_j)^{p_j}]$ есть $-\nu + p$. При

$\nu - p \geq 0$, согласно обобщенной теореме Лиувилля, имеем

$$\frac{\Phi^+(z)}{X^+(z) \prod_{k=1}^{\mu} (z - \alpha_k)^{m_k}} = \frac{\Phi^-(z)}{X^-(z) \prod_{j=1}^{\infty} (z - \beta_j)^{p_j}} = P_{\nu-p}(z).$$

Поэтому

$$\Phi^+(z) = X^+(z) \prod_{k=1}^{\mu} (z - \alpha_k)^{m_k} P_{\nu-p}(z), \quad \Phi^-(z) = X^-(z) \prod_{j=1}^{\infty} (z - \beta_j)^{p_j} P_{\nu-p}(z). \quad (45)$$

Если $\nu - p < 0$, то нужно положить $P_{\nu-p}(z) \equiv 0$ и, следовательно, задача не имеет решений.

Назовем краевую задачу с коэффициентами $D_1(t)$ *приведенной задачей*. Индекс приведенной задачи ν назовем вместе с тем и *индексом исходной задачи*. Формулы (45) показывают, что степень присутствующего в них многочлена на p единиц меньше индекса задачи ν .

Отсюда следует, что число решений задачи (43) в классе функций, ограниченных на контуре, не изменяется от наличия нулей у коэффициента задачи и уменьшается на суммарный порядок всех полюсов. В частности, если индекс оказывается меньше суммарного порядка полюсов, то задача неразрешима. Если задача разрешима, то ее решение дается формулами (45), в которых каноническая функция приведенной задачи $X(z)$ находится по формулам (16) и (17), причем в них $D(t)$ нужно заменить на $D_1(t)$. Если наложено дополнительное условие $\Phi^-(\infty) = 0$, то число решений уменьшается на единицу и многочлен в (45) нужно взять степени $\nu - p - 1$.

Расширим теперь класс решений, допуская, что одна из искомых функций $\Phi^+(z)$ или $\Phi^-(z)$ может обращаться на контуре в некоторых точках в бесконечность целого порядка, в то время как другая в этих точках остается ограниченной. Легко усмотреть, что такое допущение не повлечет никаких изменений в неисклнчительных точках. Здесь ограниченность одной из функций автоматически влечет за собой ограниченность другой. Иначе обстоит дело в исключительных точках. Запишем краевое условие (43) в виде

$$\frac{\prod_{j=1}^{\infty} (t - \beta_j)^{p_j} \Phi^+(t)}{X^+(t)} = \frac{\prod_{k=1}^{\mu} (t - \alpha_k)^{m_k} \Phi^-(t)}{X^-(t)}. \quad (46)$$

Рассуждая аналогично предыдущему и учитывая, что правая часть имеет на бесконечности полюс порядка $\nu + m$, получим общее решение в виде

$$\Phi^+(z) = X^+(z) \prod_{k=1}^{\mu} (z - \alpha_k)^{-m_k} P_{\nu+m}(z), \quad \Phi^-(z) = X^-(z) \prod_{j=1}^{\infty} (z - \beta_j)^{-p_j} P_{\nu+m}(z). \quad (47)$$

Формулы (47) показывают, что в классе решений с допустимой полярной особенностью у одной из функций число решений по сравнению с классом ограниченных на контуре функций увеличивается (при $\nu > 0$) на суммарный порядок всех нулей и полюсов коэффициента.

Рассмотрим теперь неоднородную задачу. Запишем краевое условие в форме

$$\Phi^+(t) = \frac{\prod_{k=1}^{\mu} (t - \alpha_k)^{m_k}}{\prod_{j=1}^{\infty} (t - \beta_j)^{p_j}} D_1(t) \Phi^-(t) + H(t). \quad (48)$$

Легко видеть, что краевое условие не может быть удовлетворено конечными $\Phi^+(t)$ и $\Phi^-(t)$, если допустить, что $H(t)$ имеет полюсы в точках, отличных от β_j , или если в последних точках порядки полюсов $H(t)$ превышают p_j . Исходя из этого, примем как условие, что $H(t)$ может иметь полюсы только в точках β_j и порядки их не превышают p_j . Для проведения дальнейших рассуждений необходимо также потребовать, чтобы функции $D_1(t)$ и $\prod_{j=1}^{\infty} (t - \beta_j)^{p_j} H(t)$ в исключительных точках были дифференцируемы достаточное число раз.

Заменяем, как и в однородной задаче, $D_1(t)$ отношением $X^+(t)/X^-(t)$ и запишем краевое условие (48) в виде

$$\prod_{j=1}^{\infty} (t - \beta_j)^{p_j} \frac{\Phi^+(t)}{X^+(t)} = \prod_{k=1}^{\mu} (t - \alpha_k)^{m_k} \frac{\Phi^-(t)}{X^-(t)} + \prod_{j=1}^{\infty} (t - \beta_j)^{p_j} \frac{H(t)}{X^+(t)}. \quad (49)$$

Заменяя функцию, представленную вторым слагаемым в правой части (49), разностью крайних значений аналитических функций

$$\prod_{j=1}^{\infty} (t - \beta_j)^{p_j} \frac{H(t)}{X^+(t)} = \Psi^+(t) - \Psi^-(t),$$

где

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \prod_{j=1}^{\infty} (\tau - \beta_j)^{p_j} \frac{H(\tau)}{X^+(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - z}, \quad (50)$$

приведем краевое условие к виду

$$\prod_{j=1}^{\infty} (t - \beta_j)^{p_j} \frac{\Phi^+(t)}{X^+(t)} - \Psi^+(t) = \prod_{k=1}^{\mu} (t - \alpha_k)^{m_k} \frac{\Phi^-(t)}{X^-(t)} - \Psi^-(t).$$

Применяя теорему об аналитическом продолжении и обобщенную теорему Лиувилля, получим

$$\begin{aligned} \Phi^+(z) &= \frac{X^+(z)}{\prod_{j=1}^{\infty} (z - \beta_j)^{p_j}} [\Psi^+(z) + P_{\nu+m}(z)], \\ \Phi^-(z) &= \frac{X^-(z)}{\prod_{k=1}^{\mu} (z - \alpha_k)^{m_k}} [\Psi^-(z) + P_{\nu+m}(z)]. \end{aligned} \quad (51)$$

Последние формулы дают решения, которые, вообще говоря, обращаются в бесконечность в точках α_k, β_k . Для того чтобы решение было ограниченным, необходимо, чтобы функция $\Psi^+(z) + P_{\nu+m}(z)$ имела нули порядков p_j в точках β_j , а функция $\Psi^-(z) + P_{\nu+m}(z)$ — нули порядков m_k в точках α_k . Эти требования накладывают $m + p$ условий на коэффициенты многочлена $P_{\nu+m}(z)$. Если коэффициенты многочлена $P_{\nu+m}(z)$ подобрать в соответствии с наложенными условиями, то формулы (51) дадут решение неоднородной задачи (48) в классе ограниченных функций.

Рассмотрим другой, более удобный способ решения, основанный на построении специального частного решения.

Канонической функцией неоднородной задачи $Y(z)$ называется кусочно аналитическая функция, удовлетворяющая краевому условию (48), имеющая всюду в конечной части плоскости (включая и точки α_k, β_j) нулевой порядок и обладающая на бесконечности наименьшим возможным порядком.

При построении канонической функции будем исходить из решения, даваемого формулами (51). Построим многочлен $U_n(z)$ так, чтобы он удовлетворял следующим условиям:

$$\begin{aligned} U_n^{(i)}(\beta_j) &= \Psi^{+(i)}(\beta_j), & i = 0, 1, \dots, p_j - 1, & \quad j = 1, 2, \dots, \infty, \\ U_n^{(l)}(\alpha_k) &= \Psi^{-(l)}(\alpha_k), & l = 0, 1, \dots, m_k - 1, & \quad k = 1, 2, \dots, \mu, \end{aligned}$$

где $\Psi^{+(i)}(\beta_j), \Psi^{-(l)}(\alpha_k)$ — значения производных i -го и l -го порядков в соответствующих точках. Таким образом, $U_n(z)$ есть интерполяционный многочлен Эрмита для функции

$$\Psi(z) = \begin{cases} \Psi^+(z) & \text{в точках } \beta_j, \\ \Psi^-(z) & \text{в точках } \alpha_k \end{cases}$$

с узлами интерполяции β_j и α_k кратностей соответственно p_j и m_k (см. п. 12.3-2). Такой многочлен определяется единственным образом и его степень n не выше $m + p - 1$.

Каноническая функция неоднородной задачи выражается через интерполяционный многочлен следующим образом:

$$Y^+(z) = X^+(z) \frac{\Psi^+(z) - U_n(z)}{\prod_{j=1}^{\infty} (z - \beta_j)^{p_j}}, \quad Y^-(z) = X^-(z) \frac{\Psi^-(z) - U_n(z)}{\prod_{k=1}^{\mu} (z - \alpha_k)^{m_k}}. \quad (52)$$

Для построения общего решения неоднородной задачи (48) воспользуемся тем, что это общее решение складывается из некоторого частного решения неоднородной задачи и общего

решения однородной. Используя формулы (47) и (52), получим

$$\begin{aligned}\Phi^+(z) &= Y^+(z) + X^+(z) \prod_{k=1}^{\mu} (z - \alpha_k)^{m_k} P_{\nu-p}(z), \\ \Phi^-(z) &= Y^-(z) + X^-(z) \prod_{j=1}^{\infty} (z - \beta_j)^{p_j} P_{\nu-p}(z).\end{aligned}\quad (53)$$

В случае, если $\nu - p < 0$, нужно положить $P_{\nu-p}(z) \equiv 0$. Пользуясь формулой (52), нетрудно подсчитать, что порядок $Y^-(z)$ на бесконечности равен $\nu - p + 1$. Если $\nu < p - 1$, то $Y^-(z)$ имеет в бесконечно удаленной точке полюс и каноническая функция перестает быть решением неоднородной задачи.

Однако, подчиняя свободный член $H(t)$ $p - \nu - 1$ условиям, можно добиться повышения порядка на бесконечности функции $Y(z)$ на $p - \nu - 1$ единиц и тем самым вновь сделать каноническую функцию $Y(z)$ решением неоднородной задачи. Для этого, очевидно, необходимо и достаточно, чтобы в разложении функции $\Psi(z) - \mathcal{U}_n(z)$ в окрестности бесконечно удаленной точки первые $p - \nu - 1$ коэффициентов обращались в нуль. Это и даст $p - \nu - 1$ условий разрешимости задачи в этом случае. Выясним характер этих условий. Разложение $\Psi(z) - \mathcal{U}_n(z)$ можно представить в виде

$$\Psi(z) - \mathcal{U}_n(z) = -a_n z^n - a_{n-1} z^{n-1} - \dots - a_0 + a_{-1} z^{-1} + a_{-2} z^{-2} + \dots + a_{-k} z^{-k} + \dots,$$

где a_0, a_1, \dots, a_n — коэффициенты многочлена $\mathcal{U}_n(z)$, а a_{-k} — коэффициенты разложения функции $\Psi(z)$, вычисляемые по формуле

$$a_{-k} = -\frac{1}{2\pi i} \int_L \prod_{j=1}^{\infty} (\tau - \beta_j)^{p_j} \frac{H(\tau) \tau^{k-1}}{X^+(\tau)} d\tau.$$

Условия разрешимости будут иметь вид

$$a_n = a_{n-1} = \dots = a_{n-p+\nu+2} = 0.$$

Если на решение наложено дополнительное условие $\Phi^-(\infty) = 0$, то при $\nu - p > 0$ в формулах (53) нужно взять многочлен $P_{\nu-p-1}(z)$, а при $\nu - p < 0$ понадобится удовлетворить $p - \nu$ условиям.

12.3-10. Задача Римана для многосвязной области

Пусть $L = L_0 + L_1 + \dots + L_m$ — совокупность $m + 1$ непересекающихся контуров, причем контур L_0 содержит внутри себя все остальные. Пусть Ω^+ — $(m + 1)$ -связная область, лежащая внутри контура L_0 и вне контуров L_1, L_2, \dots, L_m , а Ω^- — дополнение $\Omega^+ + L$ до полной плоскости. Для определенности будем считать начало координат расположенным в области Ω^+ . Положительным обходом контура L считается тот, который оставляет область Ω^+ слева, т. е. контур L_0 нужно обходить против часовой стрелки, а контуры L_1, L_2, \dots, L_m — по часовой.

Прежде всего укажем, что задача о скачке

$$\Phi^+(t) - \Phi^-(t) = H(t)$$

решается при помощи той же формулы

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{H(\tau) d\tau}{\tau - z},$$

что и в случае односвязной области. Это вытекает из формул Сохоцкого–Племеля, которые имеют для многосвязной области тот же вид, что и для односвязной.

Задача Римана (однородная и неоднородная) формулируется совершенно так же, как для односвязной области.

Обозначим $\nu_k = \frac{1}{2\pi} [\arg D(t)]_{L_k}$ (все контуры обходятся в положительном направлении). Индексом задачи назовем величину

$$\nu = \sum_{k=0}^m \nu_k. \quad (54)$$

Если ν_k ($k = 1, 2, \dots, m$) для внутренних контуров равны нулю, то решение задачи имеет совершенно тот же вид, что и для односвязной области.

Для приведения общего случая к простейшему вводим функцию

$$\prod_{k=1}^m (t - z_k)^{\nu_k},$$

где z_k — точки, лежащие внутри контуров L_k ($k = 1, 2, \dots, m$). Учитывая, что $[\arg(t - z_k)]_{L_j} = 0$, если $k \neq j$, и $[\arg(t - z_j)]_{L_j} = -2\pi$, получим

$$\frac{1}{2\pi} \left[\arg \prod_{k=1}^m (t - z_k)^{\nu_k} \right]_{L_j} = \frac{1}{2\pi} [\arg(t - z_j)^{\nu_j}]_{L_j} = -\nu_j, \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

Откуда

$$\left[\arg \left(D(t) \prod_{k=1}^m (t - z_k)^{\nu_k} \right) \right]_{L_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

Вычислим изменение аргумента функции $D(t) \prod_{k=1}^m (t - z_k)^{\nu_k}$ по контуру L_0 :

$$\frac{1}{2\pi} \left[\arg \left(D(t) \prod_{k=1}^m (t - z_k)^{\nu_k} \right) \right]_{L_0} = \frac{1}{2\pi} [\arg D(t)]_{L_0} + \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^m [\nu_k \arg(t - z_k)]_{L_0} = \nu_0 + \sum_{k=1}^m \nu_k = \nu.$$

Так как начало координат лежит в области Ω^+ , то

$$[\arg t]_{L_k} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, m, \quad [\arg t]_{L_0} = 2\pi.$$

Поэтому

$$\left[\arg \left(t^{-\nu} \prod_{k=1}^m (t - z_k)^{\nu_k} D(t) \right) \right]_L = 0. \quad (55)$$

1°. *Однородная задача.* Запишем краевое условие

$$\Phi^+(t) = D(t)\Phi^-(t) \quad (56)$$

в виде

$$\Phi^+(t) = \frac{t^\nu}{\prod_{k=1}^m (t - z_k)^{\nu_k}} \left(t^{-\nu} \prod_{k=1}^m (t - z_k)^{\nu_k} D(t) \right) \Phi^-(t). \quad (57)$$

Функцию $t^{-\nu} \prod_{k=1}^m (t - z_k)^{\nu_k} D(t)$, имеющую на каждом из контуров L_k индекс нуль, можно представить в виде отношения

$$t^{-\nu} \prod_{k=1}^m (t - z_k)^{\nu_k} D(t) = \frac{e^{G^+(t)}}{e^{G^-(t)}}, \quad (58)$$

где

$$G(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \ln \left(\tau^{-\nu} \prod_{k=1}^m (\tau - z_k)^{\nu_k} D(\tau) \right) \frac{d\tau}{\tau - z}. \quad (59)$$

Каноническая функция задачи дается формулами

$$X^+(z) = \prod_{k=1}^m (z - z_k)^{-\nu_k} e^{G^+(z)}, \quad X^-(z) = z^{-\nu} e^{G^-(z)}. \quad (60)$$

Теперь краевое условие (57) может быть записано в форме

$$\frac{\Phi^+(t)}{X^+(t)} = \frac{\Phi^-(t)}{X^-(t)}.$$

Применяя теорему об аналитическом продолжении и обобщенную теорему Лиувилля (п. 12.3-1), получим

$$\Phi^+(z) = \prod_{k=1}^m (z - z_k)^{-\nu_k} e^{G^+(z)} P_\nu(z), \quad \Phi^-(z) = z^{-\nu} e^{G^-(z)} P_\nu(z). \quad (61)$$

Решение, как видим, отличается от полученного ранее решения задачи для односвязной области лишь наличием у функции $\Phi^+(z)$ множителя $\prod_{k=1}^m (z - z_k)^{-\nu_k}$. При дополнительном условии $\Phi^-(\infty) = 0$ в формулах (61) следует брать многочлен $P_{\nu-1}(z)$.

Воспользовавшись формулами Сохоцкого–Племеля, будем иметь

$$G^\pm(t) = \pm \frac{1}{2} \ln[t^{-\nu} \Pi(t) D(t)] + G(t),$$

где $G(t)$ есть главное значение интеграла (59) и

$$\Pi(t) = \prod_{k=1}^m (t - z_k)^{\nu_k}.$$

Переходя теперь в формулах (60) к пределу при $z \rightarrow t$, получим

$$X^+(t) = \sqrt{\frac{D(t)}{t^\nu \Pi(t)}} e^{G(t)}, \quad X^-(t) = \frac{1}{\sqrt{t^\nu \Pi(t) D(t)}} e^{G(t)}. \quad (62)$$

Знак корня определяется выбором ветви функции $\ln[t^{-\nu} \Pi(t) D(t)]$, которая может быть взята произвольно.

2°. *Неоднородная задача.* Рассуждая совершенно аналогично тому, как это делалось ранее, представим краевое условие

$$\Phi^+(t) = D(t) \Phi^-(t) + H(t) \quad (63)$$

в виде

$$\frac{\Phi^+(t)}{X^+(t)} - \Psi^+(t) = \frac{\Phi^-(t)}{X^-(t)} - \Psi^-(t),$$

где $\Psi(z)$ определяется следующей формулой:

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{H(\tau)}{X^+(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - z}.$$

Отсюда получаем общее решение

$$\Phi(z) = X(z)[\Psi(z) + P_\nu(z)] \quad (64)$$

или

$$\Phi(z) = X(z)[\Psi(z) + P_{\nu-1}(z)], \quad (65)$$

если на решение наложено условие $\Phi^-(\infty) = 0$.

При $\nu < 0$ неоднородная задача разрешима тогда и только тогда, когда выполнены условия

$$\int_L \frac{H(t)}{X^+(t)} t^{k-1} dt = 0, \quad (66)$$

где k принимает значения от 1 до $-\nu-1$, если ищутся решения, ограниченные на бесконечности, и от 1 до $-\nu$, если считать, что $\Phi^-(\infty) = 0$.

При выполнении условий (66) решение можно получить из формул (64) или (65), полагая в них $P_\nu(z) \equiv 0$ или $P_{\nu-1}(z) \equiv 0$.

Если отсутствует внешний контур L_0 и область Ω^+ представляет собой плоскость с дырами, то главное отличие от предыдущего случая состоит в том, что теперь нулевой индекс относительно всех контуров L_k ($k = 1, 2, \dots, m$) имеет функция $\prod_{k=1}^m (t - z_k)^{\nu_k} D(t)$, в которую не входит множитель $t^{-\nu}$. Поэтому для получения решения задачи достаточно повторить все прежние рассуждения, опустив этот множитель.

12.3-11. Случаи разрывных коэффициентов и разомкнутых контуров

Пусть функции $D(t)$, $H(t)$ в краевом условии задачи Римана (63) всюду на L удовлетворяют условию Гёльдера, за исключением точек t_1, t_2, \dots, t_m , где они имеют разрывы 1-го рода, причем L — замкнутая кривая. Никакое из предельных значений не обращается в нуль и краевое условие выполняется всюду, кроме точек разрыва, где оно теряет смысл.

Решение задачи разыскивается в классе функций, интегрируемых на контуре. Отсюда вытекает, что решение непрерывно в смысле Гёльдера всюду, кроме разве что точек t_k . В этих точках имеются разные возможности.

1°. Можно требовать ограниченности во всех точках разрыва, отыскивая решение всюду ограниченное.

2°. Можно требовать, чтобы решение было ограниченным в некоторых точках разрыва, допуская интегрируемую бесконечность в остальных точках разрыва.

3°. Можно допустить обращение решения в бесконечность интегрируемого порядка во всех точках, где это допускается условиями задачи.

Первый класс решений является наиболее узким, второй класс является более широким, и самым широким является последний класс. Число решений зависит от того класса, в каком оно отыскивается, и может оказаться, что задача, разрешимая в более широком классе, будет неразрешимой в более узком.

Несколько слов о задаче Римана для разомкнутых контуров. Пусть контур L состоит из совокупности m простых гладких непересекающихся кривых L_1, L_2, \dots, L_m , концы которых a_k и b_k (положительный обход производится от a_k к b_k), и пусть $D(t)$, $H(t)$ — заданные на L функции, удовлетворяющие условию Гёльдера, причем всюду $D(t) \neq 0$.

Требуется определить функцию $\Phi(z)$, аналитическую на всей плоскости, кроме точек контура L , граничные значения $\Phi^+(t)$, $\Phi^-(t)$ которой при приближении к L слева и справа суть интегрируемые функции, удовлетворяющие краевому условию (63).

Задача Римана для разомкнутого контура, как видно из постановки, принципиально отличается от задачи для замкнутого контура тем, что вся плоскость с разрезом по кривой L составляет одну область и приходится отыскивать не две самостоятельные аналитические функции $\Phi^+(z)$ и $\Phi^-(z)$, а одну аналитическую функцию $\Phi(z)$, для которой контур L является линией скачков. Сформулированную задачу можно свести к задаче для замкнутого контура с разрывными коэффициентами.

Более подробно о краевой задаче Римана с разрывными коэффициентами и разомкнутыми контурами можно прочитать в цитируемой в конце раздела литературе.

12.3-12. Краевая задача Гильберта

Пусть дан простой гладкий замкнутый контур L и действительные функции дуги s контура $a(s)$, $b(s)$, $c(s)$, удовлетворяющие условию Гёльдера.

Краевой задачей Гильберта будем называть следующую задачу. Найти аналитическую в области Ω^+ и непрерывную на контуре функцию

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y),$$

предельные значения действительной и мнимой частей которой удовлетворяют на контуре линейному соотношению

$$a(s)u(s) + b(s)v(s) = c(s). \quad (67)$$

При $c(s) \equiv 0$ будем иметь однородную задачу, а при $c(s)$, отличной от нуля, — неоднородную. Краевая задача Гильберта может быть сведена к краевой задаче Римана. Способы такого сведения можно найти в цитируемой ниже литературе.

⊙ Литература: Н. И. Мусхелишвили (1968), Ф. Д. Гахов (1977).

12.4. Сингулярные интегральные уравнения первого рода

12.4-1. Простейшее уравнение с ядром Коши

Пусть дано сингулярное интегральное уравнение первого рода

$$\frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau = f(t), \quad (1)$$

где L — замкнутый контур. Построим его решение. Заменяем в обеих частях переменную t на τ_1 , умножим на $\frac{1}{\pi i} \frac{d\tau_1}{\tau_1 - t}$, проинтегрируем по контуру L и переставим по формуле Пуанкаре–Бертрана (см. п. 12.2-6) порядок интегрирования. Тогда

$$\frac{1}{\pi i} \int_L \frac{f(\tau_1)}{\tau_1 - t} d\tau_1 = \varphi(t) + \frac{1}{\pi i} \int_L \varphi(\tau) d\tau \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{d\tau_1}{(\tau_1 - t)(\tau - \tau_1)}. \quad (2)$$

Вычислим второй интеграл в правой части (2):

$$\int_L \frac{d\tau_1}{(\tau_1 - t)(\tau - \tau_1)} = \frac{1}{\tau - t} \left(\int_L \frac{d\tau_1}{\tau_1 - t} - \int_L \frac{d\tau_1}{\tau_1 - \tau} \right) = \frac{1}{\tau - t} (i\pi - i\pi) = 0.$$

Таким образом,

$$\varphi(t) = \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{f(\tau)}{\tau - t} d\tau. \quad (3)$$

Последняя формула дает решение сингулярного интегрального уравнения первого рода (1) для замкнутого контура L .

Сингулярное интегральное уравнение (1) для произвольного контура L является частным случаем характеристического интегрального уравнения с ядром Коши (см. пп. 13.1-1 и 13.2-1).

12.4-2. Уравнение с ядром Коши на действительной оси

Рассмотрим сингулярное интегральное уравнение первого рода на действительной оси

$$\frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(t)}{t - x} dt = f(x), \quad -\infty < x < \infty. \quad (4)$$

Уравнение (4) является частным случаем характеристического интегрального уравнения на действительной оси (см. п. 13.2-4) и в классе исчезающих на бесконечности функций имеет решение

$$\varphi(x) = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{t - x} dt, \quad -\infty < x < \infty. \quad (5)$$

Обозначая $f(x) = F(x)i^{-1}$ запишем соотношения (4) и (5) в форме

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(t)}{t - x} dt = F(x), \quad \varphi(x) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(t)}{t - x} dt, \quad -\infty < x < \infty. \quad (6)$$

Пару формул (6) называют преобразованием Гильберта (см. п. 7.6-4).

12.4-3. Уравнение первого рода на конечном отрезке

Рассмотрим сингулярное интегральное уравнение первого рода на конечном отрезке

$$\frac{1}{\pi} \int_a^b \frac{\varphi(t)}{t - x} dt = f(x), \quad a \leq x \leq b. \quad (7)$$

Его решения можно построить, опираясь на теорию краевой задачи Римана для разомкнутого контура (см. п. 12.3-11). Приведем окончательные результаты.

1°. Решение, не ограниченное на обоих концах:

$$\varphi(x) = -\frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} \left(\int_a^b \frac{\sqrt{(t-a)(b-t)}}{t-x} f(t) dt + C \right), \quad (8)$$

где C — произвольная постоянная, причем

$$\int_a^b \varphi(t) dt = C. \quad (9)$$

2°. Решение, ограниченное на конце a и не ограниченное на конце b :

$$\varphi(x) = -\frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{x-a}{b-x}} \int_a^b \sqrt{\frac{b-t}{t-a}} \frac{f(t)}{t-x} dt. \quad (10)$$

3°. Решение, ограниченное на обоих концах:

$$\varphi(x) = -\frac{1}{\pi} \sqrt{(x-a)(b-x)} \int_a^b \frac{f(t)}{\sqrt{(t-a)(b-t)}} \frac{dt}{t-x} \quad (11)$$

при условии

$$\int_a^b \frac{f(t) dt}{\sqrt{(t-a)(b-t)}} = 0. \quad (12)$$

Можно построить и решения, имеющие точку сингулярности s внутри отрезка $[a, b]$. Они имеют следующий вид.

4°. Сингулярное решение, не ограниченное на обоих концах:

$$\varphi(x) = -\frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} \left(\int_a^b \frac{\sqrt{(t-a)(b-t)}}{t-x} f(t) dt + C_1 + \frac{C_2}{x-s} \right), \quad (13)$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

5°. Сингулярное решение, ограниченное на одном конце:

$$\varphi(x) = -\frac{1}{\pi} \sqrt{(x-a)(b-x)} \left(\int_a^b \sqrt{\frac{b-t}{t-a}} \frac{f(t)}{t-x} dt + \frac{C}{x-s} \right), \quad (14)$$

где C — произвольная постоянная.

6°. Сингулярное решение, ограниченное на обоих концах:

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= -\frac{1}{\pi} \sqrt{(x-a)(b-x)} \left(\int_a^b \frac{f(t)}{\sqrt{(t-a)(b-t)}} \frac{dt}{t-x} + \frac{A}{x-s} \right), \\ A &= \int_{-1}^1 \frac{f(t) dt}{\sqrt{(t-a)(b-t)}}. \end{aligned} \quad (15)$$

12.4-4. Общее уравнение первого рода с ядром Коши

Рассмотрим *общее уравнение первого рода с ядром Коши*

$$\frac{1}{\pi i} \int_L \frac{M(t, \tau)}{\tau - t} \varphi(\tau) d\tau = f(t), \quad (16)$$

где интеграл, понимаемый в смысле главного значения, берется по замкнутому или разомкнутому контуру L . Заданные на L функции $f(t)$ и $M(t, \tau)$ считаются, как обычно, удовлетворяющими условию Гёльдера, причем последняя по обоим переменным.

Проведя преобразование

$$\frac{M(t, \tau)}{\tau - t} = \frac{M(t, \tau) - M(t, t)}{\tau - t} + \frac{M(t, t)}{\tau - t}$$

и обозначив

$$M(t, t) = b(t), \quad \frac{1}{\pi i} \frac{M(t, \tau) - M(t, t)}{\tau - t} = K(t, \tau), \quad (17)$$

запишем уравнение (16) в виде

$$\frac{b(t)}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau + \int_L K(t, \tau) \varphi(\tau) d\tau = f(t). \quad (18)$$

Из формул (17) следует, что функция $b(t)$ удовлетворяет условию Гёльдера на всем контуре L , а $K(t, \tau)$ всюду, кроме точек $\tau = t$, где для нее справедлива оценка

$$|K(t, \tau)| \leq \frac{A}{|\tau - t|^\lambda}, \quad A = \text{const} < \infty, \quad 0 \leq \lambda < 1.$$

Общее сингулярное интегральное уравнение первого рода с ядром Коши часто записывают в форме (18).

Общее сингулярное интегральное уравнение первого рода является частным случаем полного сингулярного интегрального уравнения, теория которого рассматривается в главе 13. Обычно оно не решается в замкнутой форме. Однако имеется ряд случаев, когда такое решение возможно.

Пусть функция $M(t, \tau)$ в уравнении (16), удовлетворяющая условию Гёльдера по обоим переменным на гладком замкнутом контуре L , аналитически продолжима в область Ω^+ по

каждой переменной. Если $M(t, t) \equiv 1$, то решение уравнения (16) можно получить при помощи формулы Пуанкаре–Бертрана (см. п. 12.2-6). Оно дается формулой

$$\varphi(t) = \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{M(t, \tau)}{\tau - t} f(\tau) d\tau. \quad (19)$$

Уравнение (16) можно решить и не ограничивая функцию $M(t, \tau)$ условием $M(t, t) \equiv 1$. Действительно, пусть функция $M(t, \tau)$ аналитически продолжима в Ω^+ по каждой переменной, и пусть $M(z, z) \neq 0$ для $z \in \overline{\Omega^+}$. Тогда решение уравнения (16) имеет вид

$$\varphi(t) = \frac{1}{\pi i} \frac{1}{M(t, t)} \int_L \frac{M(t, \tau)}{M(\tau, \tau)} \frac{f(\tau)}{\tau - t} d\tau. \quad (20)$$

В разд. 12.5 дан также численный метод решения одного вида общего уравнения первого рода, представляющий самостоятельный интерес с точки зрения его использования для решения прикладных задач.

Замечание 1. Построенные в п. 12.4-4 решения полных сингулярных интегральных уравнений применимы в случае, когда контур L представляет из себя совокупность конечного числа гладких замкнутых контуров без общих точек.

12.4-5. Уравнения первого рода с ядром Гильберта

1°. Рассмотрим простейшее сингулярное интегральное уравнение первого рода с ядром Гильберта

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{ctg} \left(\frac{\xi - x}{2} \right) \varphi(\xi) d\xi = f(x), \quad 0 \leq x \leq 2\pi \quad (21)$$

при дополнительном условии

$$\int_0^{2\pi} \varphi(x) dx = 0. \quad (22)$$

Уравнение (21) может иметь решение только при соблюдении условия разрешимости, которое получается интегрированием обеих частей (21) по x от нуля до 2π и, с учетом

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{ctg} \left(\frac{\xi - x}{2} \right) dx = 0,$$

имеет вид

$$\int_0^{2\pi} f(x) dx = 0. \quad (23)$$

Для построения решения уравнения (21) воспользуемся решением простейшего сингулярного интегрального уравнения первого рода с ядром Коши, считая контур L окружностью единичного радиуса с центром в начале координат (см. п. 12.4-1). Запишем уравнение с ядром Коши и его решение в форме

$$\frac{1}{\pi} \int_L \frac{\varphi_1(\tau)}{\tau - t} d\tau = f_1(t), \quad (24)$$

$$\varphi_1(t) = -\frac{1}{\pi} \int_L \frac{f_1(\tau)}{\tau - t} d\tau, \quad (25)$$

которая получается подстановкой в соотношения из п. 12.4-1 функции $\varphi_1(t)$ вместо $\varphi(t)$ и функции $f_1(t)i^{-1}$ вместо $f(t)$.

Полагая $t = e^{ix}$ и $\tau = e^{i\xi}$ найдем соотношение между ядрами Коши и Гильберта:

$$\frac{d\tau}{\tau - t} = \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \left(\frac{\xi - x}{2} \right) d\xi + \frac{i}{2} d\xi. \quad (26)$$

Подставляя теперь соотношение (26) в уравнение (24) и его решение (25), с учетом замены переменных $\varphi(x) = \varphi_1(t)$ и $f(x) = f_1(t)$ получим

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{ctg} \left(\frac{\xi - x}{2} \right) \varphi(\xi) d\xi + \frac{i}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\xi) d\xi = f(x), \quad (27)$$

$$\varphi(x) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{ctg} \left(\frac{\xi - x}{2} \right) f(\xi) d\xi - \frac{i}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\xi) d\xi. \quad (28)$$

Уравнение (21) при дополнительном условии (22) совпадает с уравнением (27), а значит его решение дается выражением (28). Учтя условие разрешимости (23), на основании (28) запишем решение уравнения (21) в виде

$$\varphi(x) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{ctg}\left(\frac{\xi-x}{2}\right) f(\xi) d\xi. \quad (29)$$

Формулы (21) и (29) вместе с условиями (22) и (23) называются *формулами обращения Гильберта*.

Замечание 2. Уравнение (21) является частным случаем характеристического сингулярного интегрального уравнения с ядром Гильберта (см. пп. 13.1-2 и 13.2-5).

2°. Рассмотрим общее сингулярное интегральное уравнение первого рода с ядром Гильберта

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} N(x, \xi) \operatorname{ctg}\left(\frac{\xi-x}{2}\right) \varphi(\xi) d\xi = f(x). \quad (30)$$

Представим его ядро в форме

$$N(x, \xi) \operatorname{ctg} \frac{\xi-x}{2} = [N(x, \xi) - N(x, x)] \operatorname{ctg} \frac{\xi-x}{2} + N(x, x) \operatorname{ctg} \frac{\xi-x}{2}.$$

Вводя обозначения

$$N(x, x) = -b(x), \quad \frac{1}{2\pi} [N(x, \xi) - N(x, x)] \operatorname{ctg} \frac{\xi-x}{2} = K(x, \xi), \quad (31)$$

запишем уравнение (30) в следующем виде:

$$-\frac{b(x)}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{ctg}\left(\frac{\xi-x}{2}\right) \varphi(\xi) d\xi + \int_0^{2\pi} K(x, \xi) \varphi(\xi) d\xi = f(x), \quad (32)$$

Из формул (31) следует, что функция $b(x)$ удовлетворяет условию Гёльдера, а ядро $K(x, \xi)$ удовлетворяет условию Гёльдера, всюду, кроме, может быть, точек $x = \xi$, где для него справедлива оценка

$$|K(x, \xi)| \leq \frac{A}{|\xi-x|^\lambda}, \quad A = \operatorname{const} < \infty, \quad 0 \leq \lambda < 1.$$

Общее сингулярное интегральное уравнение первого рода с ядром Гильберта часто записывают в форме (32). Оно является частным случаем полного сингулярного интегрального уравнения с ядром Гильберта, которое рассматривается в пп. 13.1-2 и 13.4-8.

● *Литература:* Н. И. Мусхелишвили (1968), Ф. Д. Гахов (1977), Ф. Д. Гахов и Ю. И. Черский (1978), S. G. Mikhlin, S. Prössdorf (1986), И. К. Лифанов (1995).

12.5. Метод Мультиппа–Каландия

Рассмотрим общее сингулярное интегральное уравнение первого рода с ядром Коши на конечном отрезке $[-1, 1]$ вида

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\varphi(t) dt}{t-x} + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 K(x, t) \varphi(t) dt = f(x). \quad (1)$$

Это уравнение часто встречается в приложениях, особенно к аэродинамике и плоской теории упругости.

Приведем способ приближенного решения уравнения (1) в предположении, что оно допускает решение в указанных ниже классах.

12.5-1. Решение, не ограниченное на концах отрезка

Такое решение согласно общей теории сингулярных интегральных уравнений (см., например, Н. И. Мусхелишвили (1968)) может быть представлено в виде

$$\varphi(x) = \frac{\psi(x)}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (2)$$

где $\psi(x)$ — ограниченная функция на $[-1, 1]$. Подставим выражение (2) в уравнение (1) и введем новые переменные θ и τ равенствами $x = \cos \theta$, $t = \cos \tau$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \tau \leq \pi$. Тогда уравнение (1) примет вид

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\psi(\cos \tau) d\tau}{\cos \tau - \cos \theta} + \frac{1}{\pi} \int_0^\pi K(\cos \theta, \cos \tau) \psi(\cos \tau) d\tau = f(\cos \theta). \quad (3)$$

Построим интерполяционный полином Лагранжа для искомой функции $\psi(x)$ по чебышевским узлам

$$x_m = \cos \theta_m, \quad \theta_m = \frac{2m-1}{2n} \pi, \quad m = 1, 2, \dots, n.$$

Известно, что такой полином имеет вид

$$L_n(\psi; \cos \theta) = \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n (-1)^{l+1} \psi(\cos \theta_l) \frac{\cos n\theta \sin \theta_l}{\cos \theta - \cos \theta_l}. \quad (4)$$

Заметим, что дробь в правой части формулы (4) представляет собой при любом l четный тригонометрический полином степени $\leq n-1$. Определив коэффициенты этого полинома с помощью известных равенств

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\cos n\tau d\tau}{\cos \tau - \cos \theta} = \frac{\sin n\theta}{\sin \theta}, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (5)$$

запишем формулу (4) в виде

$$L_n(\psi; \cos \theta) = \frac{2}{n} \sum_{l=1}^n \psi(\cos \theta_l) \sum_{m=0}^{n-1} \cos m\theta_l \cos m\theta - \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n \psi(\cos \theta_l). \quad (6)$$

На основании двух предыдущих равенств выпишем квадратурную формулу для сингулярного интеграла:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\varphi(t) dt}{t-x} = \frac{2}{n \sin \theta} \sum_{l=1}^n \psi(\cos \theta_l) \sum_{m=1}^{n-1} \cos m\theta_l \sin m\theta. \quad (7)$$

Эта формула точна всегда, когда $\psi(t)$ — полином от t порядка $\leq n-1$.

Ко второму интегралу в левой части уравнения (1) применим следующую формулу:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{P(x) dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n P(\cos \theta_l), \quad (8)$$

справедливую всегда, когда $P(x)$ — полином степени $\leq 2n-1$. Тогда в силу (8) будем иметь

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 K(x, t) \varphi(t) dt = \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n K(\cos \theta, \cos \theta_l) \psi(\cos \theta_l). \quad (9)$$

Подставляя соотношения (7) и (9) в уравнение (1), получим

$$\frac{2}{n \sin \theta} \sum_{l=1}^n \psi(\cos \theta_l) \sum_{m=1}^{n-1} \cos m\theta_l \sin m\theta + \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n K(\cos \theta, \cos \theta_l) \psi(\cos \theta_l) = f(\cos \theta). \quad (10)$$

Полагая $\theta = \theta_k$ ($k = 1, 2, \dots, n$), с учетом формулы

$$\sum_{m=1}^{n-1} \cos m\theta_l \sin m\theta_k = \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{\theta_k \pm \theta_l}{2}, \quad (11)$$

где знак плюс берется, когда число $|k-l|$ четное, а минус, когда оно нечетное, получим систему линейных алгебраических уравнений для нахождения приближенных значений ψ_l искомой функции $\psi(x)$ в узловых точках в форме

$$\sum_{l=1}^n a_{kl} \psi_l = f_k, \quad f_k = f(\cos \theta_k), \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (12)$$

$$a_{kl} = \frac{1}{n} \left[\frac{1}{\sin \theta_k} \operatorname{ctg} \frac{\theta_k \pm \theta_l}{2} + K(\cos \theta_k, \cos \theta_l) \right].$$

После решения системы (12) приближенное решение уравнения (1) находится по формулам (2) и (4).

12.5-2. Решение, ограниченное на одном конце отрезка

В этом случае полагаем

$$\varphi(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \zeta(x), \quad (13)$$

где $\zeta(x)$ — ограниченная на отрезке $[0, 1]$ функция.

Оставив узлы интерполяции такими же, как и в п. 12.5-1, заменим $\zeta(x)$ многочленом

$$L_n(\zeta; \cos \theta) = \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n (-1)^{l+1} \zeta(\cos \theta_l) \frac{\cos n\theta \sin \theta_l}{\cos \theta - \cos \theta_l}, \quad (14)$$

и подставим результат в сингулярный интеграл, входящий в выражение (1). Тогда, аналогично предыдущему, получим квадратурную формулу

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\varphi(t) dt}{t-x} = 2 \frac{1-\cos \theta}{n \sin \theta} \sum_{l=1}^n \zeta(\cos \theta_l) \sum_{m=1}^{n-1} \cos m\theta_l \sin m\theta - \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n \zeta(\cos \theta_l). \quad (15)$$

Эта формула точна, если $\zeta(t)$ — многочлен степени $\leq n-1$.

Формула (9) для второго слагаемого в левой части уравнения имеет вид

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 K(x, t) \varphi(t) dt = \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n (1 - \cos \theta_l) K(\cos \theta, \cos \theta_l) \zeta(\cos \theta_l). \quad (16)$$

Она будет точной, если подынтегральное выражение есть полином от t степени $\leq 2n-2$.

Подставляя соотношения (15) и (16) в уравнение (1) и полагая $\theta = \theta_k$ ($k = 1, 2, \dots, n$), с учетом формулы (11) получим систему линейных алгебраических уравнений для приближенных значений ζ_l искомой функции $\zeta(t)$ в узлах в форме

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^n b_{kl} \zeta_l &= f_k, \quad f_k = f(\cos \theta_k), \quad k = 1, 2, \dots, n, \\ b_{kl} &= \frac{1}{n} \left[\operatorname{tg} \frac{\theta_k}{2} \operatorname{ctg} \frac{\theta_k \pm \theta_l}{2} - 1 + 2 \sin^2 \frac{\theta_l}{2} K(\cos \theta_k, \cos \theta_l) \right]. \end{aligned} \quad (17)$$

После решения системы уравнений (17) приближенное решение уравнения (1) определяется по формулам (13) и (14).

12.5-3. Решение, ограниченное на обоих концах отрезка

Ограниченное на отрезке решение (1) обращается в нуль на концах отрезка:

$$\varphi(1) = \varphi(-1) = 0. \quad (18)$$

Будем приближать функцию $\varphi(x)$ четным тригонометрическим полиномом от θ , построенным по узлам интерполяции, являющимися корнями полинома Чебышева второго рода:

$$x_k = \cos \theta_k, \quad \theta_k = \frac{k\pi}{n+1}, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (19)$$

Полином этот будет иметь вид

$$M_n(\varphi; \cos \theta) = \frac{2}{n+1} \sum_{l=1}^n \varphi(\cos \theta_l) \sum_{m=1}^n \sin m\theta_l \sin m\theta. \quad (20)$$

Тогда получим следующую квадратурную формулу:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\varphi(t) dt}{t-x} = -\frac{2}{n+1} \sum_{l=1}^n \varphi(\cos \theta_l) \sum_{m=1}^n \sin m\theta_l \cos m\theta. \quad (21)$$

Она точна всегда, когда $\varphi(x)$ — нечетный тригонометрический полином степени $\leq n$.

К регулярному интегралу в уравнении (1) применим формулу

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} P(x) dx = \frac{\pi}{n+1} \sum_{l=1}^n \sin^2 \theta_l P(\cos \theta_l), \quad (22)$$

имеющую ту же точность, что и формула (8). На основании (22) будем иметь

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 K(x, t) \varphi(t) dt = \frac{1}{n+1} \sum_{l=1}^n \sin \theta_l K(\cos \theta, \cos \theta_l) \varphi(\cos \theta_l). \quad (23)$$

Подставляя соотношения (21) и (23) в уравнение (1) и полагая $\theta = \theta_k$ ($k = 1, 2, \dots, n$), аналогично предыдущему получим систему линейных алгебраических уравнений в форме

$$\sum_{l=1}^n c_{kl} \varphi_l = f_k, \quad k = 1, \dots, n, \quad (24)$$

$$c_{kl} = \frac{\sin \theta_l}{n+1} \left[\frac{2\varepsilon_{kl}}{\cos \theta_l - \cos \theta_k} + K(\cos \theta_k, \cos \theta_l) \right], \quad \varepsilon_{kl} = \begin{cases} 0 & \text{при четных } |k-l|, \\ 1 & \text{при нечетных } |k-l|, \end{cases}$$

где $f_k = f(\cos \theta_k)$, а φ_l — приближенные значения функции $\varphi(t)$ в узлах.

После решения системы (24) приближенное решение интегрального уравнения определяется по формуле (20).

При решении сингулярного уравнения методом Мультиппа–Каландия существенно, чтобы искомые решения представлялись в виде

$$\varphi(x) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta \chi(x), \quad (25)$$

где $\alpha = \pm \frac{1}{2}$, $\beta = \pm \frac{1}{2}$, а $\chi(x)$ — ограниченная функция на отрезке, принимающая определенные значения на концах. При наличии представления (25) метод применим к полному сингулярному интегральному уравнению, которое изучается в главе 13.

Другие методы численного решения сингулярных интегральных уравнений можно найти в цитируемой ниже литературе.

☉ *Литература:* Н. И. Мусхелишвили (1968), А. И. Каландия (1973), С. М. Белоцерковский, И. К. Лифанов (1985), И. К. Лифанов (1995).

13. Методы решения полных сингулярных интегральных уравнений

13.1. Некоторые замечания

13.1-1. Интегральные уравнения с ядром Коши

Полное сингулярное интегральное уравнение с ядром Коши имеет вид

$$a(t)\varphi(t) + \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{M(t, \tau)}{\tau - t} \varphi(\tau) d\tau = f(t), \quad i^2 = -1, \quad (1)$$

где интеграл, понимаемый в смысле главного значения, берется по замкнутому или разомкнутому контуру L , а t и τ — комплексные координаты точек контура. Заданные на L функции $a(t)$, $f(t)$, $M(t, \tau)$ и искомая $\varphi(t)$ удовлетворяют условию Гёльдера (см. п. 12.2-2), причем $M(t, \tau)$ — по обоим переменным.

Интегральное уравнение (1) можно также записать в часто используемой эквивалентной форме. Для этого рассмотрим преобразование ядра

$$\frac{M(t, \tau)}{\tau - t} = \frac{M(t, \tau) - M(t, t)}{\tau - t} + \frac{M(t, t)}{\tau - t}, \quad (2)$$

где обозначим

$$M(t, t) = b(t), \quad \frac{1}{\pi i} \frac{M(t, \tau) - M(t, t)}{\tau - t} = K(t, \tau). \quad (3)$$

Тогда уравнение (1) с учетом (2) и (3) примет вид

$$a(t)\varphi(t) + \frac{b(t)}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau + \int_L K(t, \tau)\varphi(\tau) d\tau = f(t). \quad (4)$$

Из формул (3) следует, что функция $b(t)$ удовлетворяет условию Гёльдера на всем контуре L , а $K(t, \tau)$ всюду, кроме точек $\tau = t$, где для нее справедлива оценка

$$|K(t, \tau)| \leq \frac{A}{|\tau - t|^\lambda}, \quad A = \text{const} < \infty, \quad 0 \leq \lambda < 1.$$

Естественно, что уравнение (4) также называют *полным сингулярным интегральным уравнением с ядром Коши*. Функции $a(t)$ и $b(t)$ называются *коэффициентами* уравнения (4), $\frac{1}{\tau - t}$ — *ядром Коши*, а известная функция $f(t)$ — *правой частью* или *свободным членом* уравнения. Первое и второе слагаемые в левой части уравнения (4) составляют *характеристическую часть* или *характеристику* полного сингулярного уравнения, а третье — его *регулярную часть*, причем функция $K(t, \tau)$ называется *ядром регулярной части*. В силу полученной для ядра регулярной части оценки $K(t, \tau)$ является ядром со слабой особенностью либо фредгольмовым ядром.

Для уравнений (1) и (4) будем использовать и операторную форму записи, которая имеет вид

$$\mathbf{K}[\varphi(t)] = f(t), \quad (5)$$

где оператор \mathbf{K} называется *сингулярным оператором*.

Уравнение

$$\mathbf{K}^\circ[\varphi(t)] \equiv a(t)\varphi(t) + \frac{b(t)}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau = f(t) \quad (6)$$

называется *характеристическим уравнением*, соответствующим полному уравнению (4), а оператор \mathbf{K}° — *характеристическим оператором*.

Вводя для регулярной части уравнения обозначение

$$\mathbf{K}_r[\varphi(t)] \equiv \int_L K(t, \tau)\varphi(\tau) d\tau,$$

где оператор \mathbf{K}_r называется *регулярным (фредгольмовым) оператором*, запишем полное сингулярное уравнение еще в одной операторной форме:

$$\mathbf{K}[\varphi(t)] \equiv \mathbf{K}^\circ[\varphi(t)] + \mathbf{K}_r[\varphi(t)] = f(t), \quad (7)$$

которая будет использоваться в дальнейшем.

Уравнение

$$\mathbf{K}^*[\psi(t)] \equiv a(t)\psi(t) - \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{b(\tau)\psi(\tau)}{\tau - t} d\tau + \int_L K(\tau, t)\psi(\tau) d\tau = g(t), \quad (8)$$

получаемое из уравнения (4) перестановкой переменных в ядре, называется *союзным* с (4) или *транспонированным* к нему. Оператор \mathbf{K}^* называется *союзным* с оператором \mathbf{K} или *транспонированным* к нему.

В частности, уравнение

$$\mathbf{K}^{\circ*}[\psi(t)] \equiv a(t)\psi(t) - \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{b(\tau)}{\tau - t} \psi(\tau) d\tau = g(t) \quad (9)$$

будет уравнением, союзным с характеристическим уравнением (6). Следует отметить, что оператор $\mathbf{K}^{\circ*}$, союзный с характеристическим оператором \mathbf{K}° , не совпадает с оператором $\mathbf{K}^{*\circ}$, характеристическим для союзного уравнения (8). Последний определяется формулой

$$\mathbf{K}^{*\circ}[\psi(t)] \equiv a(t)\psi(t) - \frac{b(t)}{\pi i} \int_L \frac{\psi(\tau)}{\tau - t} d\tau. \quad (10)$$

Всюду в дальнейшем будем считать, что контур L состоит в общем случае из $m + 1$ замкнутых гладких кривых: $L = L_0 + L_1 + \dots + L_m$. Об уравнениях для разомкнутых контуров можно прочитать, например, в книгах Н. И. Мусхелишвили (1968), Ф. Д. Гахова (1977).

Замечание 1. Установленная связь между уравнениями (1) и (4), включающая свойства этих уравнений, нарушается, если предположить, что в уравнении (1) функция $M(t, \tau)$ удовлетворяет условию Гёльдера всюду на контуре за исключением конечного числа точек, где они имеют разрывы первого рода. В этом случае полное сингулярное интегральное уравнение следует каким-либо отличным от преобразования (2) и (3) способом представить в форме (4) с выделенными характеристической и регулярной частями, поскольку упомянутое преобразование уравнения (1) к такому выделению не приводит. Об уравнениях с разрывными коэффициентами можно прочитать в упомянутых выше книгах.

13.1-2. Интегральные уравнения с ядром Гильберта

Полное сингулярное интегральное уравнение с ядром Гильберта имеет вид

$$a(x)\varphi(x) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} N(x, \xi) \operatorname{ctg} \frac{\xi - x}{2} \varphi(\xi) d\xi = f(x), \quad (11)$$

где действительные функции $a(x)$, $f(x)$, $N(x, \xi)$ и искомая $\varphi(x)$ удовлетворяют условию Гёльдера (см. п. 12.2-2), причем $N(x, \xi)$ по обоим переменным.

Интегральное уравнение (11) можно также записать в часто используемой эквивалентной форме. Для этого преобразуем его ядро следующим образом:

$$N(x, \xi) \operatorname{ctg} \frac{\xi - x}{2} = [N(x, \xi) - N(x, x)] \operatorname{ctg} \frac{\xi - x}{2} + N(x, x) \operatorname{ctg} \frac{\xi - x}{2}, \quad (12)$$

где обозначим

$$N(x, x) = -b(x), \quad \frac{1}{2\pi} [N(x, \xi) - N(x, x)] \operatorname{ctg} \frac{\xi - x}{2} = K(x, \xi). \quad (13)$$

Тогда уравнение (11) с учетом (12) и (13) примет вид

$$a(x)\varphi(x) - \frac{b(x)}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{ctg} \frac{\xi - x}{2} \varphi(\xi) d\xi + \int_0^{2\pi} K(x, \xi)\varphi(\xi) d\xi = f(x). \quad (14)$$

Из формул (13) следует, что функция $b(x)$ удовлетворяет условию Гёльдера, а ядро $K(x, \xi)$ удовлетворяет условию Гёльдера, всюду, кроме, может быть точек $x = \xi$, где для него справедлива оценка

$$|K(x, \xi)| \leq \frac{A}{|\xi - x|^\lambda}, \quad A = \text{const} < \infty, \quad 0 \leq \lambda < 1.$$

Уравнение в форме (14) также называют полным сингулярным интегральным уравнением с ядром Гильберта. Функции $a(x)$ и $b(x)$ называются *коэффициентами уравнения* (14), $\operatorname{ctg}[\frac{1}{2}(\xi - x)]$ — *ядром Гильберта*, а известная функция $f(x)$ — *правой частью* или *свободным*

членом уравнения. Первое и второе слагаемые в левой части уравнения (14) составляют *характеристическую часть* или *характеристику* полного сингулярного уравнения, а третье — его *регулярную часть*, причем функция $K(x, \xi)$ называется *ядром регулярной части*.

Уравнение

$$a(x)\varphi(x) - \frac{b(x)}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{ctg} \frac{\xi - x}{2} \varphi(\xi) d\xi = f(x), \quad (15)$$

называется *характеристическим уравнением*, соответствующим полному уравнению (14).

Все рассмотренные и последующие уравнения, правые части которых равны нулю всюду в области их определения, будем, как обычно, называть *однородными*, в противном случае — *неоднородными*.

13.1-3. Об уравнениях Фредгольма второго рода на контуре

Теория Фредгольма и методы решения интегральных уравнений Фредгольма второго рода, представленные в главе 11, остаются справедливыми, если все функции и параметры в уравнениях считать комплексными, а отрезок действительной оси заменить некоторым контуром L . Здесь приведем только некоторые сведения и запишем интегральное уравнение Фредгольма второго рода в форме, удобной для использования в этой главе.

Рассмотрим интегральное уравнение Фредгольма в форме

$$\varphi(t) + \lambda \int_L K(t, \tau) \varphi(\tau) d\tau = f(t), \quad (16)$$

где L — некоторый гладкий контур, t и τ — комплексные координаты его точек, $\varphi(t)$ — искомая функция, $f(t)$ — свободный член или правая часть уравнения, $K(t, \tau)$ — его ядро.

Если при некотором значении параметра λ однородное уравнение Фредгольма имеет нетривиальное решение (или нетривиальные решения), то λ называется *характеристическим числом* (*характеристическим значением*), а сами нетривиальные решения — *собственными функциями* ядра $K(t, \tau)$ или уравнения (16).

Уравнение (16) имеет не более счетного множества характеристических чисел. Если это множество бесконечно, то его предельной точкой является бесконечно удаленная точка. Каждому характеристическому числу соответствует конечное число собственных функций. Множество характеристических чисел интегрального уравнения называется его *спектром*. Спектр интегрального уравнения Фредгольма есть множество дискретное.

Если значение параметра λ не совпадает ни с одним характеристическим числом (в этом случае его называют *правильным* или *регулярным*), т. е. однородное уравнение имеет только тривиальное решение, то неоднородное уравнение (16) разрешимо при любой правой части $f(t)$.

Общее решение дается формулой

$$\varphi(t) = f(t) - \int_L R(t, \tau; \lambda) f(\tau) d\tau, \quad (17)$$

где функция $R(t, \tau; \lambda)$ называется *резольвентой уравнения* или *резольвентой ядра* $K(t, \tau)$ и выражается через последнее.

Если значение параметра λ характеристическое для уравнения (16), то однородное интегральное уравнение

$$\varphi(t) + \lambda \int_L K(t, \tau) \varphi(\tau) d\tau = 0, \quad (18)$$

также как и союзное с ним однородное уравнение

$$\psi(t) + \lambda \int_L K(\tau, t) \varphi(\tau) d\tau = 0, \quad (19)$$

имеют нетривиальные решения, причем число линейно независимых решений уравнения (18) конечно и равно числу линейно независимых решений уравнения (19).

Общее решение однородного уравнения может быть представлено в виде

$$\varphi(t) = \sum_{k=1}^n C_k \varphi_k(t), \quad (20)$$

где $\varphi_1(t), \varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)$ — конечное число всех линейно независимых собственных функций, соответствующих характеристическому числу λ , а C_k — произвольные постоянные.

Если однородное уравнение (18) разрешимо, то неоднородное уравнение (16), вообще говоря, неразрешимо. Оно будет разрешимо тогда и только тогда, когда выполнены условия

$$\int_L f(t) \psi_k(t) dt = 0, \quad (21)$$

где $\psi_k(t)$ ($k = 1, 2, \dots, n$) есть конечный набор всех линейно независимых собственных функций союзнного уравнения, соответствующих характеристическому числу λ .

Если условия (21) выполнены, то общее решение неоднородного уравнения (16) дается формулой (см., например, п. 11.6-5)

$$\varphi(t) = f(t) - \int_L R_g(t, \tau; \lambda) f(\tau) d\tau + \sum_{k=1}^n C_k \varphi_k(t), \quad (22)$$

где $R_g(t, \tau; \lambda)$ называют *обобщенной резольвентой*, а сумма в правой части (22) есть общее решение соответствующего однородного уравнения.

Рассмотрим теперь уравнение второго рода со слабой особенностью на контуре

$$\varphi(t) + \int_L \frac{M(t, \tau)}{|\tau - t|^\alpha} \varphi(\tau) d\tau = f(t), \quad (23)$$

где $M(t, \tau)$ — непрерывная функция и $0 < \alpha < 1$. Такое уравнение при помощи итерации можно привести к интегральному уравнению Фредгольма второго рода (см. замечание 1 из разд. 11.3). Оно обладает всеми свойствами уравнения Фредгольма (см. замечание из разд. 11.5).

В теории сингулярных интегральных уравнений в силу сказанного обычно не делают различий между уравнениями Фредгольма и уравнениями со слабой особенностью и используют общую для них форму записи

$$\varphi(t) + \lambda \int_L K(t, \tau) \varphi(\tau) d\tau = 0, \quad K(t, \tau) = \frac{M(t, \tau)}{|\tau - t|^\alpha}, \quad 0 \leq \alpha < 1, \quad (24)$$

причем интегральное уравнение (24) так же, как и его ядро, называют просто *фредгольмовыми*.

Если в уравнении (24) известные функции удовлетворяют условию Гёльдера, причем $M(t, \tau)$ — по обоим переменным, то любое ограниченное интегрируемое решение уравнения (24) также удовлетворяет условию Гёльдера.

Замечание 2. Ядра регулярных частей рассмотренных выше сингулярных интегральных уравнений в силу приведенных для них оценок являются фредгольмовыми.

Замечание 3. Полные и характеристические сингулярные интегральные уравнения называют иногда сингулярными интегральными уравнениями второго рода.

● *Литература:* С. Г. Михлин (1959), Ф. Трикоми (1960), Н. И. Мусхелишвили (1968), Ф. Д. Гахов (1977), А. И. Гусейнов, Х. Ш. Мухтаров (1980), S. G. Mikhlin, S. Prössdorf (1986), S. Prössdorf, B. Silbermann (1991), A. Dzhruev (1992), И. К. Лифанов (1995).

13.2. Метод Карлемана для характеристических уравнений

13.2-1. Характеристическое уравнение с ядром Коши

Рассмотрим характеристическое уравнение с ядром Коши

$$K^\circ[\varphi(t)] \equiv a(t)\varphi(t) + \frac{b(t)}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau = f(t), \quad (1)$$

где контур L состоит из $m + 1$ замкнутых гладких кривых: $L = L_0 + L_1 + \dots + L_m$.

Решение уравнения (1) можно свести к решению краевой задачи Римана (см. п. 12.3-10) и дать решение уравнения в замкнутой форме.

Введем кусочно аналитическую функцию, заданную интегралом Коши, плотностью которого служит искомое решение характеристического уравнения

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z} d\tau. \quad (2)$$

Согласно формулам Сохоцкого–Племеля (см. п. 12.2-5)

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \Phi^+(t) - \Phi^-(t), \\ \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z} d\tau &= \Phi^+(t) + \Phi^-(t). \end{aligned} \quad (3)$$

Подставляя (3) в уравнение (1) и решая его относительно $\Phi^+(t)$, получим, что кусочно-аналитическая функция $\Phi(z)$ должна являться решением краевой задачи Римана

$$\Phi^+(t) = D(t)\Phi^-(t) + H(t), \quad (4)$$

где

$$D(t) = \frac{a(t) - b(t)}{a(t) + b(t)}, \quad H(t) = \frac{f(t)}{a(t) + b(t)}. \quad (5)$$

В силу того, что искомая функция $\Phi(z)$ представлена интегралом типа Коши, она должна удовлетворять дополнительному условию

$$\Phi^-(\infty) = 0. \quad (6)$$

Индекс ν коэффициента $D(t)$ задачи Римана (4) будем называть *индексом интегрального уравнения* (1). Решив краевую задачу (4), по первой формуле (3) найдем решение уравнения (1).

Таким образом, интегральное уравнение (1) свелось к краевой задаче Римана (4). Чтобы установить равносильность уравнения и краевой задачи, отметим, что, и обратно, $\varphi(t)$, найденная указанным образом из решения краевой задачи, удовлетворяет уравнению (1).

Рассмотрим сначала нормальный (не исключительный) случай, когда коэффициент $D(t)$ задачи Римана (4) не обращается в нуль или бесконечность, что соответствует для уравнения (1) условию

$$a(t) \pm b(t) \neq 0. \quad (7)$$

Для упрощения дальнейших формул будем считать, что коэффициенты уравнения (1) удовлетворяют условию

$$a^2(t) - b^2(t) = 1. \quad (8)$$

К такому случаю всегда можно привести исследуемое уравнение делением обеих его частей на $\sqrt{a^2(t) - b^2(t)}$.

Выпишем решение краевой задачи Римана (4), считая $\nu \geq 0$, и вычислим по формулам Сохоцкого–Племеля предельные значения соответствующих функций (см. пп. 12.2-5, 12.3-6 и 12.3-10)

$$\begin{aligned} \Phi^+(t) &= X^+(t) \left[\frac{1}{2} \frac{H(t)}{X^+(t)} + \Psi(t) - \frac{1}{2} P_{\nu-1}(t) \right], \\ \Phi^-(t) &= X^-(t) \left[-\frac{1}{2} \frac{H(t)}{X^+(t)} + \Psi(t) - \frac{1}{2} P_{\nu-1}(t) \right], \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$\Psi(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{H(\tau)}{X^+(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - t}. \quad (10)$$

Произвольный многочлен взят в форме $-\frac{1}{2} P_{\nu-1}(t)$ для удобства дальнейших обозначений.

Отсюда по формуле (3)

$$\varphi(t) = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{X^-(t)}{X^+(t)} \right] H(t) + X^+(t) \left[1 - \frac{X^-(t)}{X^+(t)} \right] \left[\Psi(t) - \frac{1}{2} P_{\nu-1}(t) \right].$$

Представляя коэффициент задачи Римана в виде $D(t) = X^+(t)/X^-(t)$, и заменяя функцию $\Psi(t)$ ее выражением по формуле (10), будем иметь

$$\varphi(t) = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{1}{D(t)} \right] H(t) + X^+(t) \left[1 - \frac{1}{D(t)} \right] \left[\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{H(\tau)}{X^+(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - t} - \frac{1}{2} P_{\nu-1}(t) \right].$$

Подставляя, наконец, вместо $X^+(t)$ ее выражение, задаваемое формулой (62) из п. 12.3-10, и значения $D(t)$ и $H(t)$ из (5), получим

$$\varphi(t) = a(t)f(t) - \frac{b(t)Z(t)}{\pi i} \int_L \frac{f(\tau)}{Z(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - t} + b(t)Z(t)P_{\nu-1}(t), \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} Z(t) &= [a(t) + b(t)]X^+(t) = [a(t) - b(t)]X^-(t) = \frac{e^{G(t)}}{\sqrt{t^\nu \Pi(t)}}, \\ G(t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_L \ln \left[\tau^{-\nu} \Pi(\tau) \frac{a(\tau) - b(\tau)}{a(\tau) + b(\tau)} \right] \frac{d\tau}{\tau - t}, \quad \Pi(t) = \sum_{k=1}^m (t - z_k)^{\nu_k}, \end{aligned} \quad (12)$$

причем коэффициенты $a(t)$ и $b(t)$ удовлетворяют условию (7). Здесь $\Pi(t) \equiv 1$ в случае, когда L — простой контур, охватывающий односвязную область. Так как функции $a(t)$, $b(t)$, $f(t)$ удовлетворяют условию Гёльдера, то на основании свойств предельных значений интеграла типа Коши функция $\varphi(t)$ также будет удовлетворять условию Гёльдера.

Последний член формулы (11) представляет собой общее решение однородного уравнения ($f(t) \equiv 0$), а первые два члена — некоторое частное решение неоднородного уравнения.

Частное решение уравнения (1) можно записать как $\mathbf{R}[f(t)]$, где \mathbf{R} — оператор, определяемый равенством

$$\mathbf{R}[f(t)] = a(t)f(t) - \frac{b(t)Z(t)}{\pi i} \int_L \frac{f(\tau)}{Z(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - t}.$$

Тогда общее решение уравнения (1) примет вид

$$\varphi(t) = \mathbf{R}[f(t)] + \sum_{k=1}^{\nu} c_k \varphi_k(t), \quad (13)$$

где $\varphi_k(t) = b(t)Z(t)t^{k-1}$ ($k = 1, 2, \dots, \nu$) — собственные функции характеристического уравнения.

Если $\nu < 0$, то задача Римана (4), вообще говоря, неразрешима. Условия ее разрешимости

$$\int_L \frac{H(\tau)}{X^+(\tau)} \tau^{k-1} d\tau = 0, \quad k = 1, 2, \dots, -\nu, \quad (14)$$

будут вместе с тем и условиями разрешимости уравнения (1).

Заменяя $H(\tau)$ и $X^+(\tau)$ их выражениями из (5) и (12), можно записать условия разрешимости в виде

$$\int_L \frac{f(\tau)}{Z(\tau)} \tau^{k-1} d\tau = 0, \quad k = 1, 2, \dots, -\nu. \quad (15)$$

Если условия разрешимости соблюдены, то решение неоднородного уравнения (4) дается формулой (11) при $P_{\nu-1}(t) \equiv 0$.

1°. Если $\nu > 0$, то однородное уравнение $\mathbf{K}^\circ[\varphi(t)] = 0$ имеет ν линейно независимых решений

$$\varphi_k(t) = b(t)Z(t)t^{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots, \nu.$$

2°. Если $\nu \leq 0$, то однородное уравнение неразрешимо (имеет только тривиальное решение).

3°. Если $\nu \geq 0$, то неоднородное уравнение разрешимо при любой правой части $f(t)$ и его общее решение линейно зависит от ν произвольных постоянных.

4°. Если $\nu < 0$, то неоднородное уравнение разрешимо тогда и только тогда, когда его правая часть f удовлетворяет $-\nu$ условиям:

$$\int_L \psi_k(t)f(t) dt = 0, \quad \psi_k(t) = \frac{t^{k-1}}{Z(t)}. \quad (16)$$

Сравнивая перечисленные свойства характеристического сингулярного интегрального уравнения со свойствами интегрального уравнения Фредгольма (см. п. 13.1-3), можно усмотреть между ними существенные различия. Для уравнения Фредгольма в случае разрешимости однородного уравнения неоднородное, вообще говоря, неразрешимо и, наоборот, в случае неразрешимости первого второе безусловно разрешимо. Для сингулярного же уравнения при разрешимости однородного безусловно разрешимо и неоднородное, при неразрешимости же первого, вообще говоря, неразрешимо и второе.

Введем аналогично уравнению Фредгольма в ядро характеристического уравнения параметр λ и рассмотрим уравнение

$$a(t)\varphi(t) + \frac{\lambda b(t)}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau = 0.$$

Как было показано, последнее уравнение разрешимо, если

$$\nu = \text{Ind} \frac{a(t) - \lambda b(t)}{a(t) + \lambda b(t)} > 0.$$

Индекс непрерывной функции изменяется скачкообразно, причем только для таких значений λ , для которых $a(t) \mp \lambda b(t) = 0$. Если в комплексной плоскости $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$ провести кривые $\lambda = \pm a(t)/b(t)$, то они разделят плоскость на области, в каждой из которых индекс будет постоянным. Таким образом, собственные значения характеристического интегрального уравнения заполняют целые области, следовательно, спектр его, в отличие от спектра уравнения Фредгольма, является не дискретным, а сплошным.

13.2-2. Уравнение, союзное с характеристическим

Уравнение

$$\mathbf{K}^{\circ*}[\psi(t)] \equiv a(t)\psi(t) - \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{b(\tau)\psi(\tau)}{\tau - t} d\tau = g(t), \quad (17)$$

союзное с характеристическим уравнением $\mathbf{K}^{\circ}[\varphi(t)] = f(t)$, само не является характеристическим. Однако путем подстановки

$$b(t)\psi(t) = \omega(t) \quad (18)$$

оно превращается в характеристическое уравнение относительно функции $\omega(t)$:

$$a(t)\omega(t) - \frac{b(t)}{\pi i} \int_L \frac{\omega(\tau)}{\tau - t} d\tau = b(t)g(t). \quad (19)$$

Определив из последнего уравнения $\omega(t)$ по формуле получающейся сложением равенств (17) и (18), найдем искомую функцию $\psi(t)$:

$$\psi(t) = \frac{1}{a(t) + b(t)} \left[\omega(t) + \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\omega(\tau)}{\tau - t} d\tau + g(t) \right].$$

Вводя кусочно аналитическую функцию

$$\Phi_*(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\omega(\tau)}{\tau - z} d\tau, \quad (20)$$

придем к краевой задаче Римана

$$\Phi_*^+(t) = \frac{a(t) + b(t)}{a(t) - b(t)} \Phi_*^-(t) + \frac{b(t)g(t)}{a(t) - b(t)}. \quad (21)$$

Коэффициент краевой задачи (21) есть величина, обратная коэффициенту задачи Римана (4), соответствующей уравнению $\mathbf{K}^{\circ}[\varphi(t)] = f(t)$. Следовательно,

$$\nu^* = \text{Ind} \frac{a(t) + b(t)}{a(t) - b(t)} = -\text{Ind} \frac{a(t) - b(t)}{a(t) + b(t)} = -\nu. \quad (22)$$

Заметим, что в силу формул (17) из п. 12.3-4 канонические функции $X^*(z)$ для уравнения (21) и $X(z)$ для (4) будут обратны по величине:

$$X^*(z) = \frac{1}{X(z)}.$$

Аналогично проделанному в п. 13.2-1 получим решение сингулярного интегрального уравнения (17) при $\nu^* = -\nu \geq 0$ в виде

$$\psi(t) = a(t)g(t) + \frac{1}{\pi i Z(t)} \int_L \frac{b(\tau)Z(\tau)g(\tau)}{\tau - t} d\tau + \frac{1}{Z(t)} Q_{\nu^*-1}(t), \quad (23)$$

где $Z(t)$ задается формулой (12), а $Q_{\nu^*-1}(t)$ — многочлен степени $\nu^* - 1$ с произвольными коэффициентами. Если $\nu^* = 0$, то следует положить $Q_{\nu^*-1}(t) \equiv 0$.

Если $\nu^* = -\nu < 0$, то для разрешимости уравнения (17) необходимо и достаточно выполнение условий

$$\int_L b(t)Z(t)g(t)t^{k-1} dt = 0, \quad k = 1, 2, \dots, -\nu^*, \quad (24)$$

при соблюдении которых решение дается формулой (23), где нужно положить $Q_{\nu^*-1}(t) \equiv 0$.

Результаты одновременного исследования характеристического и союзного с ним уравнений показывают существенное отличие их свойств от свойств уравнений Фредгольма (см. п. 13.1-3). Характеристическое и союзное с ним однородные уравнения никогда не бывают одновременно разрешимы. Они или оба неразрешимы при $\nu = 0$, или, при ненулевом индексе, разрешимо то из них, которое имеет положительный индекс.

Отметим, что разность чисел решений характеристического и союзного с ним однородных уравнений равна индексу ν .

Утверждения 1°, 2° и 3°, 4°, сформулированные в п. 7-2.1, называются *первой* и *второй теоремами Нётера* для характеристического уравнения, а отмеченная здесь связь индекса уравнения с количеством решений однородных уравнений $\mathbf{K}^{\circ}[\varphi(t)] = 0$ и $\mathbf{K}^{\circ*}[\psi(t)] = 0$ — *третьей теоремой Нётера*.

13.2.3. Характеристическое уравнение на действительной оси

Теория интеграла типа Коши показывает (см. разд. 12.2), что если плотность интеграла типа Коши, взятого по бесконечной кривой, равна нулю на бесконечности, то свойства интеграла в случаях конечного и бесконечного контуров во всем существенном совпадают. Поэтому теория сингулярного интегрального уравнения на бесконечном контуре в классе исчезающих на бесконечности решений совпадает с теорией уравнения на конечном контуре.

Так же, как в случае конечного контура, характеристическое интегральное уравнение

$$a(x)\varphi(x) + \frac{b(x)}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - x} d\tau = f(x) \quad (25)$$

с помощью интеграла типа Коши

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z} d\tau \quad (26)$$

и формул Сохоцкого–Племеля (см. п. 12.2-5) приводится к краевой задаче Римана для действительной оси (см. п. 12.3-8)

$$\Phi^+(x) = \frac{a(x) - b(x)}{a(x) + b(x)} \Phi^-(x) + \frac{f(x)}{a(x) + b(x)}, \quad -\infty < x < \infty. \quad (27)$$

Будем считать, что

$$a^2(x) - b^2(x) = 1, \quad (28)$$

поскольку уравнение (25) всегда можно привести к случаю (28) делением обеих его частей на $\sqrt{a^2(t) - b^2(t)}$ с последующими переобозначениями, и заметим, что индекс ν интегрального уравнения (25) дается формулой

$$\nu = \text{Ind} \frac{a(x) - b(x)}{a(x) + b(x)}. \quad (29)$$

Тогда при $\nu \geq 0$ получим

$$\varphi(x) = a(x)f(x) - \frac{b(x)Z(x)}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\tau)}{Z(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - x} + b(x)Z(x) \frac{P_{\nu-1}(x)}{(x+i)^\nu}, \quad (30)$$

где

$$Z(x) = [a(x) + b(x)]X^+(x) = [a(x) - b(x)]X^-(x) = \left(\frac{x-i}{x+i}\right)^{-\nu/2} e^{G(x)},$$

$$G(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \ln \left[\left(\frac{\tau-i}{\tau+i}\right)^{-\nu} \frac{a(\tau) - b(\tau)}{a(\tau) + b(\tau)} \right] \frac{d\tau}{\tau - x}.$$

В случае $\nu \leq 0$ следует положить $P_{\nu-1}(x) \equiv 0$ и потребовать при $\nu < 0$ выполнения условий разрешимости

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{Z(x)} \frac{dx}{(x+i)^k} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, -\nu. \quad (31)$$

О решении уравнения (25) в классе ограниченных на бесконечности функций можно прочесть в книге Ф. Д. Гахова (1977).

На действительной оси аналогом характеристического уравнения является уравнение вида

$$a(x)\varphi(x) + \frac{b(x)}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x - z_0}{\tau - z_0} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - x} d\tau = f(x), \quad (32)$$

где z_0 — точка, не лежащая на контуре. Для него справедливы все качественные результаты и формулы, полученные для характеристического уравнения на замкнутом конечном контуре. В частности, оказываются справедливыми формулы обращения интеграла типа Коши

$$\psi(x) = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x - z_0}{\tau - z_0} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - x} d\tau, \quad \varphi(x) = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x - z_0}{\tau - z_0} \frac{\psi(\tau)}{\tau - x} d\tau. \quad (33)$$

13.2.4. Исключительный случай характеристического уравнения

При исследовании характеристического уравнения в п. 7-2.1 исключался случай, когда функции $a(t) \pm b(t)$ обращались на контуре L в нуль. Это было вызвано тем, что коэффициент $D(t)$ задачи Римана, к которой приводится характеристическое уравнение, имеет в этих случаях на контуре

нули и полюсы, и, следовательно, такая задача не подчиняется общей теории. Рассмотрим указанный исключительный случай.

Будем предполагать, что коэффициенты исследуемых сингулярных уравнений таковы, что обеспечивается выполнение дополнительного требования дифференцируемости функций, которое вводилось при рассмотрении исключительных случаев задачи Римана (см. 12.3-9).

Рассмотрим характеристическое уравнение с ядром Коши (1) в предположении, что функции $a(t) - b(t)$ и $a(t) + b(t)$ имеют на контуре нули соответственно в точках $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\mu$ и $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_\eta$ целых порядков и, следовательно, представимы в виде

$$a(t) - b(t) = \prod_{k=1}^{\mu} (t - \alpha_k)^{m_k} r(t), \quad a(t) + b(t) = \prod_{j=1}^{\eta} (t - \beta_j)^{p_j} s(t),$$

где $r(t)$ и $s(t)$ нигде не обращаются в нуль. Все α_k и β_j предполагаются различными.

Будем считать, что коэффициенты уравнения (1) удовлетворяют соотношению

$$a^2(t) - b^2(t) = \prod_{k=1}^{\mu} (t - \alpha_k)^{m_k} \prod_{j=1}^{\eta} (t - \beta_j)^{p_j} = A_0(t). \quad (34)$$

К такому случаю исследуемое уравнение всегда можно привести делением обеих его частей на $\sqrt{s(t)r(t)}$ с последующими очевидными переобозначениями.

Уравнение (1) в исключительном случае, аналогично проделанному в п. 13.2-1, приводится к задаче Римана

$$\Phi^+(t) = \frac{\prod_{k=1}^{\mu} (t - \alpha_k)^{m_k}}{\prod_{j=1}^{\eta} (t - \beta_j)^{p_j}} D_1(t) \Phi^-(t) + \frac{f(t)}{\prod_{j=1}^{\eta} (t - \beta_j)^{p_j} s(t)}, \quad (35)$$

где $D_1(t) = r(t)/s(t)$. Решение этой задачи в классе функций, удовлетворяющих условию $\Phi(\infty) = 0$, определяется формулами

$$\begin{aligned} \Phi^+(z) &= \frac{X^+(z)}{\prod_{j=1}^{\eta} (z - \beta_j)^{p_j}} [\Psi^+(z) - \mathcal{U}_\rho(z) + A_0(z)P_{\nu-p-1}(z)], \\ \Phi^-(z) &= \frac{X^-(z)}{\prod_{k=1}^{\mu} (z - \alpha_k)^{m_k}} [\Psi^-(z) - \mathcal{U}_\rho(z) + A_0(z)P_{\nu-p-1}(z)], \end{aligned} \quad (36)$$

где

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(\tau)}{s(\tau)X^+(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - z}, \quad (37)$$

а $\mathcal{U}_\rho(z)$ — интерполяционный полином Эрмита (см. п. 12.3-2) для функции $\Psi(z)$ степени $\rho = m + p - 1$ с узлами в точках α_k и β_j соответственно кратностей m_k и p_j , где $m = \sum m_k$, а $p = \sum p_j$.

Условимся многочлен $\mathcal{U}_\rho(z)$ рассматривать как оператор, ставящий в соответствие свободному члену $f(t)$ уравнения (1) полином, интерполирующий указанным образом интеграл типа Коши (37). Обозначим этот оператор

$$\frac{1}{2} \mathbf{T}[f(t)] = \mathcal{U}_\rho(z). \quad (38)$$

Коэффициент $\frac{1}{2}$ здесь взят для удобства дальнейших преобразований.

Далее, аналогично тому, как это было сделано в нормальном случае, из (36) найдем

$$\begin{aligned} \Phi^+(t) &= \frac{X^+(t)}{\prod_{j=1}^{\eta} (t - \beta_j)^{p_j}} \left[\frac{1}{2} \frac{f(t)}{s(t)X^+(t)} + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(\tau)}{s(\tau)X^+(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - t} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \mathbf{T}[f(t)] - \frac{1}{2} A_0(t)P_{\nu-p-1}(t) \right], \end{aligned}$$

$$\Phi^-(t) = \frac{X^-(t)}{\prod_{k=1}^{\mu} (t - \alpha_k)^{m_k}} \left[-\frac{1}{2} \frac{f(t)}{s(t)X^+(t)} + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(\tau)}{s(\tau)X^+(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - t} - \frac{1}{2} \mathbf{T}[f(t)] - \frac{1}{2} A_0(t) P_{\nu-p-1}(t) \right].$$

Коэффициент $-\frac{1}{2}$ в последних слагаемых этих формул взят для удобства дальнейших преобразований в силу произвольности коэффициентов многочлена $P_{\nu-p-1}(t)$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \Phi^+(t) - \Phi^-(t) = \frac{\Delta_1(t)f(t)}{s(t)X^+(t)} + \\ &+ \Delta_2(t) \left[\frac{1}{\pi i} \int_L \frac{f(\tau) d\tau}{s(\tau)X^+(\tau)(\tau - t)} - \mathbf{T}[f(t)] - A_0(t) P_{\nu-p-1}(t) \right], \end{aligned} \quad (39)$$

где

$$\Delta_1(t) = \frac{X^+(t)}{2 \prod_{j=1}^{\eta} (t - \beta_j)^{p_j}} + \frac{X^-(t)}{2 \prod_{k=1}^{\mu} (t - \alpha_k)^{m_k}}, \quad \Delta_2(t) = \frac{X^+(t)}{2 \prod_{j=1}^{\eta} (t - \beta_j)^{p_j}} - \frac{X^-(t)}{2 \prod_{k=1}^{\mu} (t - \alpha_k)^{m_k}}.$$

Воспользовавшись обозначением

$$Z(t) = s(t)X^+(t) = r(t)X^-(t), \quad (40)$$

а также соотношением (34), представим формулу (39) в виде

$$\varphi(t) = \frac{1}{A_0(t)} \left[a(t)f(t) - \frac{b(t)Z(t)}{\pi i} \int_L \frac{f(\tau)}{Z(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - t} + b(t)Z(t)\mathbf{T}[f(t)] \right] + b(t)Z(t)P_{\nu-p-1}(t).$$

Вводя оператор $\mathbf{R}_1[f(t)]$ формулой

$$\mathbf{R}_1[f(t)] \equiv \frac{1}{A_0(t)} \left[a(t)f(t) - \frac{b(t)Z(t)}{\pi i} \int_L \frac{f(\tau)}{Z(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - t} + b(t)Z(t)\mathbf{T}[f(t)] \right], \quad (41)$$

окончательно получим

$$\varphi(t) = \mathbf{R}_1[f(t)] + b(t)Z(t)P_{\nu-p-1}(t). \quad (42)$$

Формула (42) дает решение уравнения (1) в исключительном случае при $\nu - p > 0$, которое линейно зависит от $\nu - p$ произвольных постоянных. Если $\nu - p < 0$, то решение существует лишь при выполнении $p - \nu$ специальных условий разрешимости, налагаемых на свободный член $f(t)$ и вытекающих из условий разрешимости соответствующей этому случаю задачи Римана (35).

13.2-5. Характеристическое уравнение с ядром Гильберта

Рассмотрим характеристическое уравнение с ядром Гильберта

$$a(x)\varphi(x) - \frac{b(x)}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{ctg} \frac{\xi - x}{2} \varphi(\xi) d\xi = f(x). \quad (43)$$

Как характеристическое интегральное уравнение с ядром Коши связано с краевой задачей Римана, так и характеристическое уравнение (43) с ядром Гильберта аналитически непосредственно приводится к задаче Гильберта. Задача Гильберта в свою очередь может быть сведена к задаче Римана (см. п. 12.3-12), а значит можно построить аналитическое решение уравнения (43).

При $\nu > 0$ однородное уравнение (43) ($f(x) \equiv 0$) имеет 2ν линейно независимых решений, а неоднородное безусловно разрешимо и зависит линейно от 2ν действительных постоянных.

При $\nu < 0$ однородное уравнение неразрешимо, а неоднородное разрешимо лишь при выполнении -2ν действительных условий разрешимости.

Учитывая, что комплексный параметр содержит два действительных, а комплексное условие разрешимости равносильно двум действительным, заключаем, что при $\nu \neq 0$ качественные результаты исследования характеристического уравнения с ядром Гильберта полностью совпадают с соответствующими результатами для характеристического уравнения с ядром Коши.

13.2-6. Уравнение Трикоми

Сингулярное интегральное уравнение Трикоми имеет вид

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 \left(\frac{1}{\xi - x} - \frac{1}{x + \xi - 2x\xi} \right) \varphi(\xi) d\xi = f(x), \quad 0 \leq x \leq 1. \quad (44)$$

Ядро этого уравнения состоит из двух слагаемых. Первое слагаемое представляет собой ядро Коши. Второе слагаемое непрерывно, если хотя бы одна из переменных x и ξ меняется строго внутри отрезка $[0, 1]$, но если $x = \xi = 0$ или $x = \xi = 1$, то это слагаемое становится бесконечным и неинтегрируемым в квадрате $\{0 \leq x \leq 1, 0 \leq \xi \leq 1\}$.

При помощи кусочно-аналитической в верхней и нижней полуплоскостях функции

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \left(\frac{1}{\xi - z} - \frac{1}{z + \xi - 2z\xi} \right) \varphi(\xi) d\xi$$

уравнение (44) можно привести к задаче Римана с краевым условием на действительной оси. Решение уравнения Трикоми имеет вид

$$\varphi(x) = \frac{1}{1 + \lambda^2 \pi^2} \left[f(x) + \int_0^1 \frac{\xi^\alpha (1-x)^\alpha}{x^\alpha (1-\xi)^\alpha} \left(\frac{1}{\xi - x} - \frac{1}{x + \xi - 2x\xi} \right) f(\xi) d\xi \right] + \frac{C(1-x)^\beta}{x^{1+\beta}},$$

$$\alpha = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg}(\lambda\pi) \quad (-1 < \alpha < 1), \quad \operatorname{tg} \frac{\beta\pi}{2} = \lambda\pi \quad (-2 < \beta < 0),$$

где C — произвольная постоянная.

⊙ Литература: Ф. Трикоми (1960), Н. И. Мусхелишвили (1968), П. П. Забрейко, А. И. Кошелев и др. (1968), Ф. Д. Гахов (1977).

13.3. Полные сингулярные интегральные уравнения, разрешаемые в замкнутой форме

Полные сингулярные интегральные уравнения, в отличие от характеристических и союзных с ними, не решаются в общем случае в замкнутой форме. Однако имеется ряд случаев, когда и полные уравнения могут быть решены в замкнутой форме.

13.3-1. Замкнутое решение при постоянных коэффициентах

Рассмотрим полное сингулярное интегральное уравнение с ядром Коши в форме (см. п. 13.1-1)

$$a(t)\varphi(t) + \frac{b(t)}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau + \int_L K(t, \tau)\varphi(\tau) d\tau = f(t), \quad (1)$$

где L — произвольный замкнутый контур. Покажем, что уравнение (1) решается в замкнутой форме, если $a(t) = a$ и $b(t) = b$ постоянны, а $K(t, \tau)$ — любая функция, аналитически продолжимая в область Ω^+ по каждой переменной.

Уравнение (1) при указанных предположениях имеет вид

$$a\varphi(t) + \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{M(t, \tau)}{\tau - t} \varphi(\tau) d\tau = f(t), \quad (2)$$

где $M(t, \tau) = b + \pi i(t - \tau)K(t, \tau)$, так что $M(t, t) = b = \text{const}$. Пусть $b \neq 0$. Обозначим

$$\psi(t) = \frac{1}{b\pi i} \int_L \frac{M(t, \tau)}{\tau - t} \varphi(\tau) d\tau. \quad (3)$$

Согласно п. 12.4-4 функция $\varphi(t)$ выражается через $\psi(t)$ точно так же, как $\psi(t)$ через $\varphi(t)$. Тогда уравнение (2) запишем в виде

$$a\varphi(t) + b\psi(t) = f(t). \quad (4)$$

Применяя к обеим частям операцию (3), получим

$$a\psi(t) + b\varphi(t) = w(t), \quad \text{где} \quad w(t) = \frac{1}{b\pi i} \int_L \frac{M(t, \tau)}{\tau - t} f(\tau) d\tau. \quad (5)$$

Решая систему уравнений (4) и (5), найдем $\varphi(t)$:

$$\varphi(t) = \frac{1}{a^2 - b^2} \left[af(t) - \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{M(t, \tau)}{\tau - t} f(\tau) d\tau \right] \quad (6)$$

при условии, что $a \neq \pm b$.

Таким образом, при $a \neq \pm b$ и аналитически продолжимом ядре $K(t, \tau)$ уравнение (1) или (2) разрешимо и имеет единственное решение, даваемое формулой (6).

Уравнение (1) рассматривалось при $b \neq 0$. Это предположение естественно ввиду того, что при $b \equiv 0$ уравнение (1) перестает быть сингулярным. Однако, получаемое при $b = 0$ фредгольмово уравнение

$$a\varphi(t) + \int_L K(t, \tau)\varphi(\tau) d\tau = f(t), \quad a = \text{const} \quad (7)$$

разрешимо в замкнутой форме при аналитически продолжимом ядре $K(t, \tau)$.

Пусть функция $K(t, \tau)$ аналитически продолжима в область Ω^+ по каждой переменной и непрерывна при $t, \tau \in L$. Тогда

1°. Функция $\Phi^+(t) = \int_L K(t, \tau)\varphi(\tau) d\tau$ аналитически продолжима в область Ω^+ для любой функции $\varphi(t)$, удовлетворяющей условию Гёльдера.

2°. Если функция $\varphi^+(t)$, удовлетворяющая условию Гёльдера, аналитически продолжима в область Ω^+ , то

$$\int_L K(t, \tau)\varphi^+(\tau) d\tau = 0. \quad (8)$$

Отсюда следует, что

$$\int_L K(t, \tau) \int_L K(\tau, \tau_1)\varphi(\tau_1) d\tau_1 d\tau = 0 \quad (9)$$

для любой (удовлетворяющей условию Гёльдера) функции $\varphi(t)$. Поэтому из (7) находим, что $\int_L K(t, \tau)f(\tau) d\tau = a \int_L K(t, \tau)\varphi(\tau) d\tau$, и тогда

$$\varphi(t) = \frac{1}{a^2} \left[af(t) - \int_L K(t, \tau)f(\tau) d\tau \right]. \quad (10)$$

Следовательно, если ядро $K(t, \tau)$ аналитично в области Ω^+ по каждой переменной и непрерывно при $t, \tau \in L$, то уравнение (7) разрешимо при любой правой части и его решение дается формулой (10).

13.3-2. Замкнутое решение в общем случае

Перейдем к общему случаю разрешимости уравнения (1) в замкнутой форме при условии, что функция $K(t, \tau)[a(t) + b(t)]^{-1}$ аналитична по τ и мероморфна по t в области Ω^+ .

Обозначим для краткости $\mathbf{K}_r[\varphi(t)] = \int_L K(t, \tau)\varphi(\tau) d\tau$ и заметим, что

$$\mathbf{K}_r[\varphi^+(t)] = 0 \quad (11)$$

для всякой функции $\varphi^+(t)$, аналитически продолжимой в область Ω^+ . Полагая $\varphi(t) = \varphi^+(t) - \varphi^-(t)$, приводим уравнение (1) с учетом (11) к соотношению типа задачи Римана

$$\varphi^+(t) - \frac{1}{a(t) + b(t)} \mathbf{K}_r[\varphi^-(t)] = D(t)\varphi^-(t) + H(t), \quad (12)$$

где

$$D(t) = \frac{a(t) - b(t)}{a(t) + b(t)}, \quad H(t) = \frac{f(t)}{a(t) + b(t)}.$$

По предположению имеем

$$\frac{K(t, \tau)}{a(t) + b(t)} = \frac{A^+(t, \tau)}{\Pi^+(t)}, \quad \Pi^+(t) = \prod_{k=1}^n (t - z_k)^{m_k}, \quad (13)$$

где $z_k \in \Omega^+$, m_k — целые положительные числа, а функция $A^+(t, \tau)$ аналитична по t и по τ в Ω^+ .

Соотношение (12) принимает вид

$$\Pi^+(t)\varphi^+(t) + \mathbf{A}^+[\varphi^-(t)] = \Pi^+(t)[D(t)\varphi^-(t) + H(t)], \quad (14)$$

где \mathbf{A}^+ — интегральный оператор с ядром $A^+(t, \tau)$. Так как функция $\mathbf{A}^+\varphi^-(t)$ аналитична в Ω^+ , то последнее соотношение представляет собой обычную задачу Римана, из которой определяются функции $\Pi^+(t)\varphi^+(t) + \mathbf{A}^+[\varphi^-(t)]$ и $\varphi^-(t)$, а следовательно, и $\varphi(t)$. В самом деле, записывая $D(t)$ в виде $D(t) = X^+(t)/X^-(t)$, где $X^\pm(z)$ — каноническая функция задачи Римана,

и приводя соотношение (14) к виду, допускающему применение обобщенной теоремы Лиувилля (см. п. 12.3-1), придем к многочлену степени $\nu - 1 + \sum_{k=1}^n m_k$ с произвольными коэффициентами (в случае $\nu + \sum_{k=1}^n m_k > 0$). Однако наличие множителя $\Pi^+(t)$ перед $\varphi^+(t)$, обращающегося в нуль в Ω^+ с суммарным порядком нулей $\sum_{k=1}^n m_k$, уменьшит число произвольных постоянных в общем решении.

Замечание 1. Аналогично проделанному в п. 13.3-2 может быть рассмотрен случай, когда ядро $K(t, \tau)$ мероморфно и по τ . Тогда уравнение (1) можно свести к задаче Римана типа (12) и некоторой линейной алгебраической системе.

Замечание 2. Построенные в разд. 13.3 решения полных сингулярных интегральных уравнений применимы в случае когда контур L представляет из себя совокупность конечного числа гладких замкнутых контуров без общих точек.

Пример 1. Рассмотрим уравнение

$$\lambda \varphi(t) + \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\cos(\tau - t)}{\tau - t} \varphi(\tau) d\tau = f(t), \quad (15)$$

где L — произвольный замкнутый контур.

Заметим, что функция $M(t, \tau) = \cos(\tau - t)$ обладает свойством $M(t, t) \equiv 1$. Остается воспользоваться формулой (6), так что для уравнения (15) имеем

$$\varphi(t) = \frac{1}{\lambda^2 - 1} \left[\lambda f(t) - \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\cos(\tau - t)}{\tau - t} f(\tau) d\tau \right], \quad \lambda \neq \pm 1.$$

Пример 2. Рассмотрим уравнение

$$\lambda \varphi(t) + \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\sin(\tau - t)}{(\tau - t)^2} \varphi(\tau) d\tau = f(t), \quad (16)$$

где L — произвольный замкнутый контур.

Функция $M(t, \tau) = [\sin(\tau - t)]/(\tau - t)$ обладает свойством $M(t, t) \equiv 1$. Воспользовавшись формулой (6), для уравнения (16) получим

$$\varphi(t) = \frac{1}{\lambda^2 - 1} \left[\lambda f(t) - \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\sin(\tau - t)}{(\tau - t)^2} f(\tau) d\tau \right], \quad \lambda \neq \pm 1.$$

● *Литература:* Ф. Д. Гахов (1977).

13.4. Метод регуляризации для полных сингулярных интегральных уравнений

13.4.1. Некоторые свойства сингулярных операторов

Пусть $\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2$ — сингулярные операторы:

$$\mathbf{K}_1[\varphi(t)] \equiv a_1(t)\varphi(t) + \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{M_1(t, \tau)}{\tau - t} \varphi(\tau) d\tau, \quad (1)$$

$$\mathbf{K}_2[\omega(t)] \equiv a_2(t)\omega(t) + \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{M_2(t, \tau)}{\tau - t} \omega(\tau) d\tau. \quad (2)$$

Оператор $\mathbf{K} = \mathbf{K}_2\mathbf{K}_1$, определяемый формулой $\mathbf{K}[\varphi(t)] = \mathbf{K}_2[\mathbf{K}_1[\varphi(t)]]$, будем называть *композицией* или *произведением* операторов \mathbf{K}_1 и \mathbf{K}_2 .

Составим выражение для оператора \mathbf{K} :

$$\begin{aligned} \mathbf{K}[\varphi(t)] &= \mathbf{K}_2\mathbf{K}_1[\varphi(t)] \equiv a_2(t) \left[a_1(t)\varphi(t) + \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{M_1(t, \tau)}{\tau - t} \varphi(\tau) d\tau \right] + \\ &+ \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{M_2(t, \tau)}{\tau - t} \left[a_1(\tau)\varphi(\tau) + \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{M_1(\tau, \tau_1)}{\tau_1 - \tau} \varphi(\tau_1) d\tau_1 \right] d\tau, \end{aligned} \quad (3)$$

и выделим его характеристическую часть. Для этого сделаем следующие преобразования:

$$\begin{aligned} \int_L \frac{M_1(t, \tau)}{\tau - t} \varphi(\tau) d\tau &= M_1(t, t) \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau + \int_L \frac{M_1(t, \tau) - M_1(t, t)}{\tau - t} \varphi(\tau) d\tau, \\ \int_L \frac{a_1(\tau) M_2(t, \tau)}{\tau - t} \varphi(\tau) d\tau &= a_1(t) M_2(t, t) \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau + \\ &+ \int_L \frac{a_1(\tau) M_2(t, \tau) - a_1(t) M_2(t, t)}{\tau - t} \varphi(\tau) d\tau, \\ \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{M_2(t, \tau)}{\tau - t} d\tau \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{M_1(\tau, \tau_1)}{\tau_1 - \tau} \varphi(\tau_1) d\tau_1 &= M_2(t, t) M_1(t, t) \varphi(t) + \\ &+ \frac{1}{\pi i} \int_L \varphi(\tau_1) d\tau_1 \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{M_2(t, \tau) M_1(\tau, \tau_1)}{(\tau_1 - \tau)(\tau - t)} d\tau. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь использована формула Пуанкаре–Бертрана (см. п. 12.2-6) перестановки порядка интегрирования. Легко видеть, что все ядра интегралов в последних слагаемых правых частей формул (4) являются фредгольмовыми.

Обозначая

$$M_1(t, t) = b_1(t), \quad M_2(t, t) = b_2(t), \quad (5)$$

получим, что характеристический оператор \mathbf{K}° композиции (произведения) двух сингулярных операторов \mathbf{K}_1 и \mathbf{K}_2 выражается формулой

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^\circ[\varphi(t)] &= (\mathbf{K}_2 \mathbf{K}_1)^\circ[\varphi(t)] = \\ &= [a_2(t)a_1(t) + b_2(t)b_1(t)]\varphi(t) + \frac{a_2(t)b_1(t) + b_2(t)a_1(t)}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau. \end{aligned} \quad (6)$$

Запишем операторы \mathbf{K}_1 , \mathbf{K}_2 в форме (3) с явно выделенной характеристической частью:

$$\mathbf{K}_1[\varphi(t)] \equiv a_1(t)\varphi(t) + \frac{b_1(t)}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau + \int_L K_1(t, \tau)\varphi(\tau) d\tau, \quad (7)$$

$$\mathbf{K}_2[\omega(t)] \equiv a_2(t)\omega(t) + \frac{b_2(t)}{\pi i} \int_L \frac{\omega(\tau)}{\tau - t} d\tau + \int_L K_2(t, \tau)\omega(\tau) d\tau. \quad (8)$$

Таким образом, коэффициенты $a(t)$ и $b(t)$ характеристической части произведения операторов $\mathbf{K}_1 \mathbf{K}_2$ выражаются формулами

$$a(t) = a_2(t)a_1(t) + b_2(t)b_1(t), \quad b(t) = a_2(t)b_1(t) + b_2(t)a_1(t). \quad (9)$$

Эти формулы не содержат регулярных ядер K_1 , K_2 и они симметричны относительно индексов 1 и 2. Отсюда заключаем, что характеристическая часть произведения сингулярных операторов не зависит от их регулярной части и не зависит от порядка следования этих операторов в произведении.

Таким образом, изменение порядка операторов, а также изменение их регулярной части оказывает влияние только на регулярную часть произведения операторов, не затрагивая ее характеристической части.

Вычислим коэффициент задачи Римана, соответствующей характеристическому оператору $(\mathbf{K}_2 \mathbf{K}_1)^\circ$:

$$D(t) = \frac{a(t) - b(t)}{a(t) + b(t)} = \frac{[a_2(t) - b_2(t)][a_1(t) - b_1(t)]}{[a_2(t) + b_2(t)][a_1(t) + b_1(t)]} = D_2(t)D_1(t), \quad (10)$$

где через

$$D_1(t) = \frac{a_1(t) - b_1(t)}{a_1(t) + b_1(t)}, \quad D_2(t) = \frac{a_2(t) - b_2(t)}{a_2(t) + b_2(t)} \quad (11)$$

обозначены коэффициенты задач Римана, соответствующих операторам \mathbf{K}_1° , \mathbf{K}_2° . Отсюда вытекает, что коэффициент задачи Римана оператора $(\mathbf{K}_2 \mathbf{K}_1)^\circ$ равен произведению коэффициентов задач Римана операторов \mathbf{K}_1° и \mathbf{K}_2° , и, следовательно, индекс произведения сингулярных операторов равен сумме индексов перемножаемых операторов:

$$\nu = \nu_1 + \nu_2. \quad (12)$$

Полный вид оператора $\mathbf{K}_2 \mathbf{K}_1$ будет определяться выражением

$$\mathbf{K}_2 \mathbf{K}_1[\varphi(t)] \equiv a(t)\varphi(t) + \frac{b(t)}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau + \int_L K(t, \tau)\varphi(\tau) d\tau,$$

где $a(t)$ и $b(t)$ определяются формулами (9), а на основании формул (4) можно выписать явное выражение для регулярного ядра $K(t, \tau)$.

Для сингулярного оператора \mathbf{K} и союзного с ним \mathbf{K}^* (см. п. 13.1-1) справедливы соотношения:

$\int_L \psi(t) \mathbf{K}[\varphi(t)] dt = \int_L \varphi \mathbf{K}^*[\psi(t)] dt$, для любых функций $\varphi(t)$ и $\psi(t)$, удовлетворяющих условию Гёльдера, и $(\mathbf{K}_2 \mathbf{K}_1)^* = \mathbf{K}_1^* \mathbf{K}_2^*$.

13.4-2. Регуляризирующий оператор

Метод регуляризации состоит в приведении сингулярного интегрального уравнения к фредгольмову. Сам процесс такого приведения называется *регуляризацией*.

Если сингулярный оператор \mathbf{K}_2 таков, что оператор $\mathbf{K}_2\mathbf{K}_1$ является регулярным (фредгольмовым), т. е. в нем отсутствует сингулярный интеграл ($b(t) \equiv 0$), то \mathbf{K}_2 называется *регуляризирующим оператором* по отношению к сингулярному оператору \mathbf{K}_1 или, коротко, его *регуляризатором*. Заметим, что если \mathbf{K}_2 является регуляризатором, то регулярным будет и оператор $\mathbf{K}_1\mathbf{K}_2$.

Найдем общий вид регуляризирующего оператора. По определению, должно выполняться равенство

$$b(t) = a_2(t)b_1(t) + b_2(t)a_1(t) = 0, \quad (13)$$

из которого следует, что

$$a_2(t) = g(t)a_1(t), \quad b_2(t) = -g(t)b_1(t), \quad (14)$$

где $g(t)$ — произвольная не обращающаяся в нуль функция, удовлетворяющая условию Гёльдера.

Следовательно, если \mathbf{K} — сингулярный оператор:

$$\mathbf{K}[\varphi(t)] \equiv a(t)\varphi(t) + \frac{b(t)}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau + \int_L K(t, \tau)\varphi(\tau) d\tau, \quad (15)$$

то его регуляризатор $\tilde{\mathbf{K}}$ можно в общем случае представить в форме

$$\tilde{\mathbf{K}}[\omega(t)] \equiv g(t)a(t)\omega(t) - \frac{g(t)b(t)}{\pi i} \int_L \frac{\omega(\tau)}{\tau - t} d\tau + \int_L \tilde{K}(t, \tau)\omega(\tau) d\tau, \quad (16)$$

где $\tilde{K}(t, \tau)$ — произвольное фредгольмово ядро, а $g(t)$ — произвольная функция, удовлетворяющая условию Гёльдера.

Так как индекс регулярного оператора ($b(t) \equiv 0$), очевидно, равен нулю, то из свойства произведения операторов вытекает, что индекс регуляризирующего оператора равен по абсолютной величине и обратен по знаку индексу регуляризуемого оператора. Это же заключение можно сделать непосредственно по виду регуляризирующего оператора (16), исходя из того, что

$$\tilde{D}(t) = \frac{\tilde{a}(t) - \tilde{b}(t)}{\tilde{a}(t) + \tilde{b}(t)} = \frac{a(t) + b(t)}{a(t) - b(t)} = \frac{1}{D(t)}.$$

Таким образом, для любого сингулярного оператора с ядром Коши (15) нормального типа ($a(t) \pm b(t) \neq 0$) существует бесчисленное множество регуляризирующих операторов (16) с характеристической частью, зависящей от произвольной функции $g(t)$, и содержащих произвольное регулярное ядро $\tilde{K}(t, \tau)$.

Произвольными элементами $g(t)$, $\tilde{K}(t, \tau)$ можно, при случае, распорядиться так, чтобы регуляризирующий оператор удовлетворял некоторым дополнительным условиям. Можно, например, добиться в регуляризованном уравнении нормирования коэффициента при $\varphi(t)$, сделав его равным единице. Для этого нужно положить $g(t) = [a^2(t) - b^2(t)]^{-1}$. Если никаких условий не налагается, то естественно воспользоваться простейшими регуляризаторами. Их можно получить, если в формуле (16) положить $g(t) \equiv 1$, $\tilde{K}(t, \tau) \equiv 0$, после чего регуляризатор будет иметь вид

$$\tilde{\mathbf{K}}[\omega(t)] = \mathbf{K}^{*o}[\omega(t)] \equiv a(t)\omega(t) - \frac{b(t)}{\pi i} \int_L \frac{\omega(\tau)}{\tau - t} d\tau, \quad (17)$$

или же положить $g(t) \equiv 1$, $\tilde{K}(t, \tau) = -\frac{1}{\pi i} \frac{b(\tau) - b(t)}{\tau - t}$, тогда

$$\tilde{\mathbf{K}}[\omega(t)] = \mathbf{K}^{o*}[\omega(t)] \equiv a(t)\omega(t) - \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{b(\tau)\omega(\tau)}{\tau - t} d\tau. \quad (18)$$

Простейшие операторы \mathbf{K}^{*o} и \mathbf{K}^{o*} употребляются в качестве регуляризаторов наиболее часто.

Так как перемножение операторов не переместительно, то следует различать два вида регуляризации: регуляризацию слева, когда в результате получается оператор $\tilde{\mathbf{K}}\mathbf{K}$, и регуляризацию справа, когда она приводит к оператору $\mathbf{K}\tilde{\mathbf{K}}$. На основании сделанного выше замечания регуляризатор справа является одновременно и регуляризатором слева, и наоборот. Таким образом, операция регуляризации переместительна.

Если оператор $\tilde{\mathbf{K}}$ является регуляризирующим для оператора \mathbf{K} , то и наоборот, оператор \mathbf{K} является регуляризатором для оператора $\tilde{\mathbf{K}}$. Операторы $\tilde{\mathbf{K}}\mathbf{K}$ и $\mathbf{K}\tilde{\mathbf{K}}$ могут отличаться друг от друга лишь регулярной частью.

13.4-3. Способы регуляризации слева и справа

Пусть дано полное сингулярное интегральное уравнение

$$\mathbf{K}[\varphi(t)] \equiv a(t)\varphi(t) + \frac{b(t)}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau + \int_L K(t, \tau)\varphi(\tau) d\tau = f(t). \quad (19)$$

Используются три способа его регуляризации. Первые два основаны на композиции данного сингулярного оператора и его регуляризатора (регуляризация слева и справа). Третий способ существенно отличается от первых двух, в нем устранение сингулярного интеграла производится путем решения соответствующего характеристического уравнения.

1°. *Регуляризация слева.* Возьмем регуляризирующий оператор (16)

$$\tilde{\mathbf{K}}[\omega(t)] \equiv g(t)a(t)\omega(t) - \frac{g(t)b(t)}{\pi i} \int_L \frac{\omega(\tau)}{\tau - t} d\tau + \int_L \tilde{K}(t, \tau)\omega(\tau) d\tau. \quad (20)$$

Подставляя в $\tilde{\mathbf{K}}[\omega(t)]$ вместо функции $\omega(t)$ выражение $\mathbf{K}[\varphi(t) - f(t)]$, приходим к интегральному уравнению

$$\tilde{\mathbf{K}}\mathbf{K}[\varphi(t)] = \tilde{\mathbf{K}}[f(t)]. \quad (21)$$

По определению оператор $\tilde{\mathbf{K}}\mathbf{K}$ фредгольмов, так как $\tilde{\mathbf{K}}$ — регуляризатор. Следовательно, уравнение (21) есть уравнение Фредгольма. Таким образом, мы преобразовали сингулярное интегральное уравнение (19) в интегральное уравнение Фредгольма (21) относительно той же неизвестной функции $\varphi(t)$.

В этом состоит первый способ регуляризации, который называется *регуляризацией слева*.

2°. *Регуляризация справа.* Подставив в уравнение (19) вместо искомой функции выражение (20):

$$\varphi(t) = \tilde{\mathbf{K}}[\omega(t)], \quad (22)$$

где $\omega(t)$ — некоторая новая неизвестная функция, приходим к интегральному уравнению

$$\mathbf{K}\tilde{\mathbf{K}}[\omega(t)] = f(t), \quad (23)$$

которое также является фредгольмовым. Таким образом, от сингулярного интегрального уравнения (19) относительно неизвестной функции $\varphi(t)$ мы перешли к интегральному уравнению Фредгольма относительно новой неизвестной функции $\omega(t)$.

Решив уравнение Фредгольма (23), по формуле (22) найдем решение исходного уравнения (19). Применение формулы (22) требует только вычисления квадратур (один интеграл обыкновенный и один сингулярный).

В этом состоит второй способ регуляризации, который называется *регуляризацией справа*.

13.4-4. Проблема равносильной регуляризации

В процессе приведения сингулярного интегрального уравнения к регулярному над уравнением производится некоторое функциональное преобразование. Это преобразование может, вообще говоря, или внести посторонние решения, не удовлетворяющие исходному уравнению, или вызвать потерю некоторых из них. Поэтому получаемое уравнение, вообще говоря, не равносильно исходному. Рассмотрим связи между решениями этих уравнений и выясним когда уравнения равносильны.

1°. *Регуляризация слева.* Пусть дано сингулярное уравнение

$$\mathbf{K}[\varphi(t)] = f(t) \quad (24)$$

и соответствующее ему регулярное

$$\tilde{\mathbf{K}}\mathbf{K}[\varphi(t)] = \tilde{\mathbf{K}}[f(t)]. \quad (25)$$

Запишем (25) в форме

$$\tilde{\mathbf{K}}[\mathbf{K}[\varphi(t)] - f(t)] = 0. \quad (26)$$

Так как оператор $\tilde{\mathbf{K}}$ однородный, то всякое решение исходного уравнения (24) (функция, обращающая выражение $\mathbf{K}[\varphi(t)] - f(t)$ в нуль) удовлетворяет также уравнению (26). Следовательно, регуляризация слева не приводит к потере решений. Но не всякое решение регуляризованного уравнения является решением исходного.

Рассмотрим сингулярное интегральное уравнение, соответствующее регуляризируемому оператору

$$\tilde{\mathbf{K}}[\omega(t)] = 0. \quad (27)$$

Пусть $\omega_1(t), \omega_2(t), \dots, \omega_p(t)$ — его полная система решений, т. е. совокупность всех линейно независимых собственных функций регуляризирующего оператора $\tilde{\mathbf{K}}$.

Рассматривая уравнение (26) как сингулярное интегральное уравнение вида (27) с искомой функцией $\omega(t) = \mathbf{K}[\varphi(t)] - f(t)$, будем иметь

$$\mathbf{K}[\varphi(t)] - f(t) = \sum_{j=1}^p \alpha_j \omega_j(t), \quad (28)$$

где α_j — некоторые постоянные.

Таким образом, регуляризованное уравнение равносильно не исходному уравнению (24), а уравнению (28).

Итак, уравнение (25) равносильно уравнению (28), в котором α_j — произвольные или определенные постоянные. Может оказаться, что уравнение (28) разрешимо только при условии, что все $\alpha_j = 0$. В этом случае уравнение (25) будет равносильно исходному уравнению (24), и регуляризатор будет равносильным. В частности, если регуляризатор не имеет собственных функций, то правая часть уравнения (28) тождественно равна нулю, и он обязательно является равносильным. Такой оператор заведомо существует при $\nu \geq 0$. Например, им может быть регуляризатор $\mathbf{K}^{*\circ}$, не имеющий в этом случае собственных функций, так как индекс регуляризатора $\mathbf{K}^{*\circ}$ равен $-\nu \leq 0$.

2°. *Регуляризация справа.* Пусть имеем уравнение (24) и регуляризованное уравнение

$$\mathbf{K}\tilde{\mathbf{K}}[\omega(t)] = f(t), \quad (29)$$

полученное подстановкой

$$\tilde{\mathbf{K}}[\omega(t)] = \varphi(t). \quad (30)$$

Если $\omega_j(t)$ есть какое-нибудь решение уравнения (29), то из формулы (30) получаем соответствующее ему решение исходного уравнения $\varphi_j(t) = \tilde{\mathbf{K}}[\omega_j(t)]$. Следовательно, регуляризация справа не может привести к посторонним решениям.

Пусть, наоборот, $\varphi_k(t)$ есть некоторое решение исходного уравнения. Тогда решение регуляризованного уравнения (29) может быть получено как решение неоднородного сингулярного уравнения $\tilde{\mathbf{K}}[\omega(t)] = \varphi_k(t)$, которое, однако, может оказаться неразрешимым. Таким образом, регуляризация справа может привести к потере решений. Такой потери не произойдет, когда уравнение (30) разрешимо при любой правой части. В этом случае оператор $\tilde{\mathbf{K}}$ будет равносильным регуляризатором справа.

3°. *Равносильная регуляризация.* Оператор $\tilde{\mathbf{K}} = \mathbf{K}^{*\circ}$ является при любом индексе равносильным регуляризатором, причем при $\nu \geq 0$ следует применять регуляризацию слева, а при $\nu \leq 0$ — регуляризацию справа.

В последнем случае получается уравнение относительно новой функции $\omega(t)$, но если она найдена, то можно построить все решения исходного уравнения в квадратурах, причем по свойству регуляризации справа не может возникнуть посторонних решений.

О других способах равносильной регуляризации можно прочесть в цитируемой в конце раздела литературе.

13.4.5. Теоремы Нёгера

Пусть дано полное сингулярное интегральное уравнение

$$\mathbf{K}[\varphi(t)] = f(t). \quad (31)$$

Теорема 1. Число решений сингулярного интегрального уравнения (31) конечно.

Теорема 2. Необходимым и достаточным условием разрешимости сингулярного уравнения (31) является выполнение равенств

$$\int_L f(t) \psi_j(t) dt = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad (32)$$

где $\psi_1(t), \psi_2(t), \dots, \psi_m(t)$ — максимальный линейно независимый набор решений союзного однородного уравнения $\mathbf{K}^*[\psi(t)] = 0$.

Теорема 3. Разность числа n линейно независимых решений сингулярного уравнения $\mathbf{K}[\varphi(t)] = 0$ и числа m линейно независимых решений союзного уравнения $\mathbf{K}^*[\psi(t)] = 0$ зависит лишь от характеристической части оператора \mathbf{K} и равна его индексу, т. е.

$$n - m = \nu. \quad (33)$$

Следствие. Из всех сингулярных уравнений, имеющих данный индекс ν , наименьшее число решений имеют характеристические.

13.4-6. Способ регуляризации Карлемана–Векуа

Перенесем регулярный член сингулярного уравнения в правую часть и запишем его в следующем виде:

$$a(t)\varphi(t) + \frac{b(t)}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau = f(t) - \int_L K(t, \tau)\varphi(\tau) d\tau \quad (34)$$

или, в операторной форме,

$$\mathbf{K}^\circ[\varphi(t)] = f(t) - \mathbf{K}_r[\varphi(t)]. \quad (35)$$

Решим последнее уравнение как характеристическое, рассматривая временно правую часть как известную функцию. Тогда (см. п. 13.2-1)

$$\begin{aligned} \varphi(t) = & \left[a(t)f(t) - \frac{b(t)Z(t)}{\pi i} \int_L \frac{f(\tau)}{Z(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - t} + b(t)Z(t)P_{\nu-1}(t) \right] - \\ & - \left[a(t) \int_L K(t, \tau)\varphi(\tau) d\tau - \frac{b(t)Z(t)}{\pi i} \int_L \frac{d\tau_1}{Z(\tau_1)(\tau_1 - t)} \int_L K(\tau_1, \tau)\varphi(\tau) d\tau \right], \end{aligned} \quad (36)$$

где при $\nu \leq 0$ следует положить $P_{\nu-1}(t) \equiv 0$. Меняя в двойном интеграле порядок интегрирования, запишем выражение в последних круглых скобках следующим образом:

$$\int_L \left[a(t)K(t, \tau) - \frac{b(t)Z(t)}{\pi i} \int_L \frac{K(\tau_1, \tau)}{Z(\tau_1)(\tau_1 - t)} d\tau_1 \right] \varphi(\tau) d\tau.$$

Так как функция $Z(t)$ удовлетворяет условию Гёльдера (следовательно, ограничена) и не обращается в нуль, а $K(\tau_1, \tau)$ вблизи $\tau_1 = \tau$ имеет оценку $|K(\tau_1, \tau)| \leq A|\tau_1 - \tau|^{-\lambda}$ ($0 \leq \lambda < 1$), то и весь интеграл

$$\int_L \frac{K(\tau_1, \tau)}{Z(\tau_1)(\tau_1 - t)} d\tau_1$$

имеет ту же оценку, что и $K(\tau_1, \tau)$. Следовательно, ядро

$$N(t, \tau) = a(t)K(t, \tau) - \frac{b(t)Z(t)}{\pi i} \int_L \frac{K(\tau_1, \tau)}{Z(\tau_1)(\tau_1 - t)} d\tau_1 \quad (37)$$

является фредгольмовым. Переносим все члены, содержащие $\varphi(t)$, в левую часть, получим

$$\varphi(t) + \int_L N(t, \tau)\varphi(\tau) d\tau = f_1(t), \quad (38)$$

где $N(t, \tau)$ — фредгольмово ядро, определяемое формулой (37), а $f_1(t)$ — свободный член, имеющий вид

$$f_1(t) = a(t)f(t) - \frac{b(t)Z(t)}{\pi i} \int_L \frac{f(\tau)}{Z(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - t} + b(t)Z(t)P_{\nu-1}(t). \quad (39)$$

Если индекс уравнения (34) $\nu < 0$, то наряду с уравнением Фредгольма (38) функция должна удовлетворять соотношениям

$$\int_L \left[\int_L \frac{K(t, \tau)}{Z(t)} t^{k-1} dt \right] \varphi(\tau) d\tau = \int_L \frac{f(t)}{Z(t)} t^{k-1} dt, \quad k = 1, 2, \dots, -\nu. \quad (40)$$

Итак, если $\nu \geq 0$, то решение полного сингулярного интегрального уравнения (34) приводится к решению интегрального уравнения Фредгольма (38). Если $\nu < 0$, то уравнение (34) приводится к уравнению (38) (где нужно положить $P_{\nu-1}(t) \equiv 0$) совместно с условиями (40), которые можно записать в форме

$$\begin{aligned} \int_L \rho_k(\tau)\varphi(\tau) d\tau &= f_k, \quad k = 1, 2, \dots, -\nu, \\ \rho_k(\tau) &= \int_L \frac{K(t, \tau)}{Z(t)} t^{k-1} dt, \quad f_k = \int_L \frac{f(t)}{Z(t)} t^{k-1} dt, \end{aligned} \quad (41)$$

где $\rho_k(\tau)$ — известные функции и f_k — известные числа.

Равенства (41) есть условия разрешимости регуляризованного уравнения (38). Однако не все они являются условиями разрешимости исходного сингулярного интегрального уравнения (34). Часть их может оказаться условиями равносильности этих двух уравнений. Выделим условия указанных двух типов.

Пусть среди функций $\rho_k(t)$ имеется h линейно независимых. Можем выбрать нумерацию так, чтобы это были $\rho_1(t), \rho_2(t), \dots, \rho_h(t)$. Тогда будем иметь

$$\int_L \rho_k(t)\varphi(t) dt = f_k, \quad k = 1, 2, \dots, h. \quad (42)$$

Кроме того, будут выполняться $\eta = |\nu| - h$ независимых линейных соотношений

$$\alpha_{j1}\rho_1(t) + \dots + \alpha_{j|\nu|}\rho_{|\nu|}(t) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, \eta.$$

Умножим равенства (40) последовательно на $\alpha_{j1}, \alpha_{j2}, \dots, \alpha_{j|\nu|}$ и сложим. Учитывая последние равенства, будем иметь

$$\int_L f(t)\psi_j(t) dt = 0, \quad \psi_j(t) = \frac{1}{Z(t)} \sum_{k=1}^{|\nu|} \alpha_{jk} t^{k-1}, \quad j = 1, 2, \dots, \eta. \quad (43)$$

Эти равенства, не содержащие искомой функции $\varphi(t)$, будут условиями разрешимости, которым необходимо должен удовлетворять свободный член $f(t)$ для того, чтобы исходное сингулярное уравнение и его регуляризованное были разрешимы. Равенства (42) будут условиями равносильности уравнений исходного сингулярного и регуляризованного. Из решений фредгольмова уравнения (38) данному сингулярному уравнению (34) будут удовлетворять лишь те, которые удовлетворяют условиям (42).

Таким образом, при $\nu \geq 0$ регуляризованное уравнение (38) равносильно исходному сингулярному. При $\nu < 0$ исходное уравнение будет равносильно регуляризованному (вместе с общими для них условиями разрешимости (43)) и условиям (42).

Замечание 1. Если ядро регулярной части полного сингулярного интегрального уравнения с ядром Коши вырожденное, то способом регуляризации Карлемана–Векуа это уравнение можно привести к исследованию системы линейных алгебраических уравнений (см., например, С. Г. Михлин, Х. Л. Смолицкий (1965)).

Замечание 2. Способ регуляризации Карлемана–Векуа иногда называют *регуляризацией решением характеристического уравнения*.

13.4-7. Регуляризация в исключительных случаях

Рассмотрим полное сингулярное уравнение с ядром Коши

$$\mathbf{K}[\varphi(t)] \equiv a(t)\varphi(t) + \frac{b(t)}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau + \int_L K(t, \tau)\varphi(\tau) d\tau = f(t) \quad (44)$$

при тех же предположениях относительно функций $a(t) \pm b(t)$, что и в п. 13.2-4.

Представив его в виде

$$\mathbf{K}^\circ[\varphi(t)] = f(t) - \int_L K(t, \tau)\varphi(\tau) d\tau,$$

применим метод регуляризации Карлемана–Векуа. Тогда по формуле (42) из п. 13.2-4 получим уравнение

$$\varphi(t) + \mathbf{R}_1 \left[\int_L K(t, \tau)\varphi(\tau) d\tau \right] = \mathbf{R}_1[f(t)] + b(t)Z(t)P_{\nu-p-1}(t), \quad (45)$$

где оператор \mathbf{R}_1 определяется формулой (41) из п. 13.2-4.

В выражении для второго слагаемого в левой части (45) операция \mathbf{R}_1 по переменной t и операция интегрирования по τ перестановочны. Тогда уравнение (45) можно записать в форме

$$\varphi(t) + \int_L \mathbf{R}_1^t [K(t, \tau)]\varphi(\tau) d\tau = \mathbf{R}_1[f(t)] + b(t)Z(t)P_{\nu-p-1}(t), \quad (46)$$

где индекс t у символа оператора \mathbf{R}_1^t указывает, что операция производится по переменной t .

Так как оператор \mathbf{R}_1 ограниченный, то полученное интегральное уравнение (46) является фредгольмовым и, следовательно, задача регуляризации сингулярного уравнения (44) решена.

Из общей теории регуляризации следует, что при $\nu - p \geq 0$ уравнение (44) равносильно уравнению (46), а при $\nu - p < 0$ — уравнению (46) и системе некоторых функциональных уравнений.

В заключение заметим, что для рассмотренных случаев сингулярных интегральных уравнений теоремы Нётера оказываются, вообще говоря, несправедливыми.

Замечание. Исключительные случаи сингулярных интегральных уравнений с ядром Коши можно привести к уравнениям нормального типа.

13.4-8. Полное уравнение с ядром Гильберта

Рассмотрим полное сингулярное интегральное уравнение с ядром Гильберта (см. п. 13.1-2)

$$a(x)\varphi(x) - \frac{b(x)}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{ctg}\left(\frac{\xi - x}{2}\right)\varphi(\xi) d\xi + \int_0^{2\pi} K(x, \xi)\varphi(\xi) d\xi = f(x). \quad (47)$$

Покажем, что уравнение (47) можно привести к полному сингулярному интегральному уравнению с ядром Коши, в связи с чем вся теория последнего может быть непосредственно перенесена на уравнение (47). Так как регулярные части у обоих типов уравнений имеют одинаковый характер, то достаточно воспользоваться соотношением между ядром Гильберта и ядром Коши (см. п. 12.4-5)

$$\frac{d\tau}{\tau - t} = \frac{1}{2} \operatorname{ctg}\left(\frac{\xi - x}{2}\right) d\xi + \frac{i}{2} d\xi. \quad (48)$$

Откуда

$$\frac{1}{2} \operatorname{ctg} \left(\frac{\xi - x}{2} \right) d\xi = \frac{d\tau}{\tau - t} - \frac{1}{2} \frac{d\tau}{\tau}, \quad (49)$$

где $t = e^{ix}$ и $\tau = e^{i\xi}$ — комплексные координаты точек контура L , представляющего из себя окружность единичного радиуса.

Заменяя в уравнении (47) ядро Гильберта выражением (49) и подставляя $x = -i \ln t$, $\xi = -i \ln \tau$, $d\xi = -i d\tau/\tau$, после очевидных переобозначений приведем уравнение (47) к полному сингулярному интегральному уравнению с ядром Коши в форме

$$a_1(t)\varphi_1(t) - \frac{ib_1(t)}{\pi i} \int_L \frac{\varphi_1(\tau)}{\tau - t} d\tau + \int_L K_1(t, \tau) d\tau = f_1(t). \quad (50)$$

Коэффициент задачи Римана, соответствующий уравнению (50), имеет вид

$$D(t) = \frac{a_1(t) + ib_1(t)}{a_1(t) - ib_1(t)} = \frac{a(x) + ib(x)}{a(x) - ib(x)}, \quad (51)$$

а индекс выражается формулой

$$\operatorname{Ind} D(t) = 2 \operatorname{Ind}[a(x) + ib(x)]. \quad (52)$$

Пример. Произведем различными способами регуляризацию следующего сингулярного интегрального уравнения:

$$\mathbf{K}[\varphi(t)] \equiv (t + t^{-1})\varphi(t) + \frac{t - t^{-1}}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau - \frac{1}{2\pi i} \int_L (t + t^{-1})(\tau + \tau^{-1})\varphi(\tau) d\tau = 2t^2, \quad (53)$$

где L — единичная окружность.

Регулярная часть ядра является вырожденной, поэтому тем же способом, который применяется при решении уравнений Фредгольма с вырожденным ядром (см. разд. 11.2), уравнение может быть сведено к исследованию характеристического уравнения и линейного алгебраического уравнения и, следовательно, решено в замкнутой форме. Таким образом, здесь нет необходимости в регуляризации. Однако рассматриваемое уравнение удобно для иллюстрации на нем общих методов, поскольку окончательный результат можно получить в замкнутом виде.

Для удобства дальнейших рассуждений предварительно решим данное уравнение. Обозначая

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L (\tau + \tau^{-1})\varphi(\tau) d\tau = A, \quad (54)$$

запишем его в форме характеристического:

$$(t + t^{-1})\varphi(t) + \frac{t - t^{-1}}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau = 2t^2 + A(t + t^{-1}).$$

Для соответствующей краевой задачи Римана

$$\Phi^+(t) = t^{-2}\Phi^-(t) + t + \frac{1}{2}A(1 + t^{-2}) \quad (55)$$

индекс $\nu = -2$ и условия разрешимости (см. п. 13.2-1) будут выполняться только при $A = 0$. При этом $\Phi^+(z) = z$ и $\Phi^-(z) = 0$. Отсюда получим решение уравнения (53) в форме $\varphi(t) = \Phi^+(t) - \Phi^-(t) = t$. Подставляя последнее выражение в равенство (54), убедимся в том, что оно удовлетворяется при $A = 0$. Следовательно, данное уравнение разрешимо и имеет единственное решение $\varphi(t) = t$.

1°. *Регуляризация слева.* Так как индекс уравнения $\nu = -2 < 0$, то любой его регуляризующий оператор будет иметь собственные функции (не менее двух), поэтому регуляризация слева приводит, вообще говоря, к уравнению, не равносильному исходному.

Рассмотрим сначала регуляризацию слева при помощи простейшего регуляризатора \mathbf{K}^{*0} . Найдем собственные функции уравнения

$$\mathbf{K}^{*0}[\omega(t)] \equiv (t + t^{-1})\omega(t) - \frac{t - t^{-1}}{\pi i} \int_L \frac{\omega(\tau)}{\tau - t} d\tau = 0.$$

Соответствующая краевая задача Римана $\Phi^+(t) = t^2\Phi^-(t)$ имеет теперь индекс $\nu = 2$. Находя по формулам из п. 13.2-1 собственные функции оператора \mathbf{K}^{*0} , получим $\omega_1(t) = 1 - t^{-2}$, $\omega_2(t) = t - t^{-1}$.

Регулярное уравнение $\mathbf{K}^{*0}\mathbf{K}[\varphi(t)] = \mathbf{K}^{*0}[f(t)]$ на основании общей теории (см. п. 13.4-4) будет равносильно следующему сингулярному уравнению:

$$\mathbf{K}[\varphi(t)] = f(t) + \alpha_1\omega_1(t) + \alpha_2\omega_2(t), \quad (56)$$

где α_1, α_2 — некоторые постоянные, которые могут оказаться или произвольными или определенными. Учитывая (54), запишем уравнение (56) в форме характеристического:

$$(t + t^{-1})\varphi(t) + \frac{t - t^{-1}}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau = 2t^2 + A(t + t^{-1}) + \alpha_1(1 - t^{-2}) + \alpha_2(t - t^{-1}).$$

Соответствующая ему краевая задача Римана имеет вид

$$\Phi^+(t) = t^{-2}\Phi^-(t) + t + \frac{1}{2}A(1+t^{-2}) + \frac{1}{2}\alpha_1(t^{-1}+t^{-3}) + \frac{1}{2}\alpha_2(1-t^{-2}).$$

Ее решение представляется в форме

$$\Phi^+(z) = z + \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}\alpha_2, \quad \Phi^-(z) = \frac{1}{2}z^2[\alpha_1 z^{-3} + (\alpha_2 - A)z^{-2} - \alpha_1 z^{-1}].$$

Условия разрешимости дают $\alpha_1 = 0$ и $\alpha_2 = A$. Тогда решение уравнения (56) определяется формулой $\varphi(t) = \Phi^+(t) - \Phi^-(t) = t + A$. Подставляя найденное значение $\varphi(t)$ в равенство (54), получим тождество $A = A$. Следовательно, постоянная $\alpha_2 = A$ остается произвольной, и регуляризованное уравнение равносильно не исходному уравнению, а уравнению

$$\mathbf{K}[\varphi(t)] = f(t) + \alpha_2 \omega_2(t),$$

имеющему решение $\varphi(t) = t + A$, где A — произвольная постоянная. Последнее решение удовлетворяет исходному уравнению только при $A = 0$.

2°. *Регуляризация справа.* В качестве регуляризатора справа возьмем простейший оператор $\mathbf{K}^{*\circ}$. Полагая

$$\varphi(t) = \mathbf{K}^{*\circ}[\omega(t)] \equiv (t+t^{-1})\omega(t) - \frac{t-t^{-1}}{\pi i} \int_L \frac{\omega(\tau)}{\tau-t} d\tau, \quad (57)$$

получим уравнение Фредгольма относительно функции $\omega(t)$:

$$\mathbf{K}\mathbf{K}^{*\circ}[\omega(t)] \equiv \omega(t) - \frac{1}{4\pi i} \int_L [t(\tau^2-1+\tau^{-2})+2\tau^{-1}+t^{-1}(\tau^2+3+\tau^{-2})-2\tau^{-2}\tau^{-1}]\omega(\tau) d\tau = \frac{1}{2}t^2. \quad (58)$$

Решая последнее уравнение как вырожденное, будем иметь $\omega(t) = \frac{1}{2}t^2 + \alpha(t-t^{-1}) + \beta(1-t^{-2})$, где α, β — произвольные постоянные.

Таким образом, регуляризованное уравнение имеет относительно $\omega(t)$ два линейно независимых решения, тогда как исходное уравнение (53) решалось однозначно. Подставляя найденное значение $\omega(t)$ в формулу (57), получим

$$\varphi(t) = \mathbf{K}^{*\circ} \left[\frac{1}{2}t^2 + \alpha(t-t^{-1}) + \beta(1-t^{-2}) \right] = t,$$

где $\varphi(t)$ — решение исходного сингулярного уравнения. Результат согласуется с общей теорией, так как при отрицательном индексе регуляризация справа оператором $\mathbf{K}^{*\circ}$ является равносильной.

3°. *Регуляризация Карлемана–Векуа.* Этот способ регуляризации проводится по формулам (36)–(39). Однако нужно помнить, что эти формулы применимы к уравнению, для которого выполняется условие $a^2(t) - b^2(t) = 1$. Поэтому предварительно нужно разделить уравнение (53) на 2. Тогда будем иметь

$$a = \frac{1}{2}(t+t^{-1}), \quad b = \frac{1}{2}(t-t^{-1}), \quad f(t) = t^2, \quad K(t, \tau) = -\frac{1}{4\pi i}(t+t^{-1})(\tau+\tau^{-1}),$$

$$X^+(z) = 1, \quad Z(t) = (a+b)X^+ = t, \quad f_1(t) = \frac{1}{2}(t+t^{-1})t^2 - \frac{(t-t^{-1})t}{2\pi i} \int_L \frac{\tau^2}{\tau} \frac{d\tau}{\tau-t} = t,$$

$$N(t, \tau) = -\frac{1}{2}(t+t^{-1})\frac{1}{4\pi i}(t+t^{-1})(\tau+\tau^{-1}) + \\ + \frac{(t-t^{-1})t(\tau+\tau^{-1})}{2\pi i \cdot 4\pi i} \int_L \frac{\tau_1+\tau_1^{-1}}{\tau_1} \frac{d\tau_1}{\tau_1-t} = -\frac{1}{2\pi i}(\tau+\tau^{-1}).$$

Регуляризованное уравнение имеет вид

$$\varphi(t) - \frac{1}{2\pi i} \int_L (\tau+\tau^{-1})\varphi(\tau) d\tau = t. \quad (59)$$

К нему нужно добавить еще условия (41) при $k = 1, 2$. Решая его как вырожденное, найдем общее решение $\varphi(t) = t + A$, где A — произвольная постоянная. Выпишем условия (42), (43). Здесь

$$\rho_k(\tau) = \int_L \frac{K(t, \tau)}{Z(t)} t^{k-1} dt = -\frac{\tau+\tau^{-1}}{4\pi i} \int_L (1+t^{-2})t^{k-1} dt, \quad k = 1, 2,$$

$$\rho_1(\tau) = 0, \quad \rho_2(\tau) = -\frac{1}{2}(\tau+\tau^{-1}), \quad f_k = \int_L \frac{f(t)}{Z(t)} t^{k-1} dt = \int_L t^k dt, \quad f_1 = f_2 = 0.$$

Функции $\rho_1(t), \rho_2(t)$ линейно зависимы. Зависимость $\alpha_{j1}\rho_1(t) + \dots + \alpha_{j|\nu|}\rho_{|\nu|}(t) = 0$ (см. п. 13.4-6) имеет вид $\alpha_1\rho_1(t) + 0 \cdot \rho_2(t) = 0$. Отсюда условие разрешимости (43) выполняется тождественно. Условие равносильности (42)

$$\int_L \rho_2(\tau)\varphi(\tau) d\tau = -\frac{1}{2} \int_L (\tau+\tau^{-1})(\tau+A) d\tau = 0$$

удовлетворяется лишь при $A = 0$. Следовательно, из множества решений регуляризованного уравнения $\varphi(t) = t + A$ исходному сингулярному удовлетворяет лишь функция $\varphi(t) = t$.

⊙ *Литература:* Н. И. Мусхелишвили (1968), Ф. Д. Гахов (1977), S. G. Mikhlin, S. Prössdorf (1986).

14. Методы решения нелинейных интегральных уравнений

14.1. Некоторые определения и замечания

14.1-1. Нелинейные интегральные уравнения Вольтерра

Нелинейные интегральные уравнения Вольтерра могут быть представлены в следующем виде:

$$\int_a^x K(x, t, y(t)) dt = F(x, y(x)), \quad (1)$$

где $K(x, t, y(t))$ — ядро нелинейного интегрального уравнения, $y(x)$ — неизвестная функция ($a \leq x \leq b$). Все функции в (1) обычно считают непрерывными.

Вид (1) не охватывает все возможные формы нелинейных интегральных уравнений Вольтерра, однако включает часто встречающиеся и более всего изученные. Нелинейное интегральное уравнение (1) называется *интегральным уравнением Вольтерра в форме Урысона*.

В ряде случаев уравнение (1) удастся записать в виде

$$\int_a^x K(x, t, y(t)) dt = f(x). \quad (2)$$

Уравнение (2) называют *уравнением Вольтерра первого рода в форме Урысона*. Аналогично уравнение

$$y(x) - \int_a^x K(x, t, y(t)) dt = f(x) \quad (3)$$

называют *уравнением Вольтерра второго рода в форме Урысона*.

Уравнение (3) заменой $u(x) = y(x) - f(x)$ можно привести к канонической форме

$$u(x) = \int_a^x \mathcal{K}(x, t, u(t)) dt, \quad (4)$$

где $\mathcal{K}(x, t, u(t))$ — ядро* канонического интегрального уравнения.

Ядро $K(x, t, y(t))$ называется *вырожденным*, если

$$K(x, t, y(t)) = \sum_{k=1}^n g_k(x) h_k(t, y(t)).$$

Если в уравнении (1) ядро $K(x, t, y(t)) = Q(x, t)\Phi(t, y(t))$, причем $Q(x, t)$ и $\Phi(t, y)$ — известные функции, то получаем *интегральное уравнение Вольтерра в форме Гаммерштейна*:

$$\int_a^x Q(x, t)\Phi(t, y(t)) dt = F(x, y(x)), \quad (5)$$

где функции $y(x)$, $F(x, y)$, $\Phi(t, y)$ и ядро интегрального уравнения $Q(x, t)$ обычно считают непрерывными.

В ряде случаев уравнение (5) удастся записать в виде

$$\int_a^x Q(x, t)\Phi(t, y(t)) dt = f(x). \quad (6)$$

Уравнение (6) называют *уравнением Вольтерра первого рода в форме Гаммерштейна*. Аналогично уравнение

$$y(x) - \int_a^x Q(x, t)\Phi(t, y(t)) dt = f(x) \quad (7)$$

называют *уравнением Вольтерра второго рода в форме Гаммерштейна*.

Уравнение (7) можно привести к канонической форме

$$u(x) = \int_a^x Q(x, t)\Phi_*(t, u(t)) dt, \quad (8)$$

где $u(x) = y(x) - f(x)$.

* Существуют и другие способы приведения уравнения (3) к форме (4), при этом вид функции \mathcal{K} изменится.

Замечание 1. Поскольку уравнения Вольтерра в форме Гаммерштейна являются частным случаем уравнений Вольтерра в форме Урысона, то все рассмотренные ниже методы для последних безусловно применимы и к первым.

14.1-2. Нелинейные уравнения с постоянными пределами интегрирования

Нелинейные интегральные уравнения с постоянными пределами интегрирования могут быть представлены в виде

$$\int_a^b K(x, t, y(t)) dt = F(x, y(x)), \quad \alpha \leq x \leq \beta, \quad (9)$$

где $K(x, t, y(t))$ — ядро нелинейного интегрального уравнения, $y(x)$ — неизвестная функция. Обычно все функции в (9) считают непрерывными и рассматривают случай $\alpha = a$ и $\beta = b$.

Вид (9) не охватывает все возможные формы нелинейных интегральных уравнений с постоянными пределами интегрирования, однако, аналогично форме (1) для уравнений Вольтерра, включает часто встречающиеся и более всего изученные. Нелинейное интегральное уравнение с постоянными пределами интегрирования (9) будем называть *интегральным уравнением типа Урысона*.

Если уравнение (9) удастся записать в виде

$$\int_a^b K(x, t, y(t)) dt = f(x), \quad (10)$$

то (10) называют *уравнением Урысона первого рода*. Аналогично уравнение

$$y(x) - \int_a^b K(x, t, y(t)) dt = f(x) \quad (11)$$

называют *уравнением Урысона второго рода*.

Уравнение Урысона второго рода можно записать в канонической форме

$$u(x) = \int_a^b K(x, t, u(t)) dt. \quad (12)$$

Замечание 2. Условия существования и единственности решения уравнения Урысона обсуждаются ниже в пп. 14.3-4 и 14.3-5.

Если в уравнении (9) ядро $K(x, t, y(t)) = Q(x, t)\Phi(t, y(t))$, причем $Q(x, t)$ и $\Phi(t, y)$ — известные функции, то получаем *интегральное уравнение типа Гаммерштейна*:

$$\int_a^b Q(x, t)\Phi(t, y(t)) dt = F(x, y(x)), \quad (13)$$

где все функции уравнения, обычно, считаются непрерывными.

Если уравнение (13) удастся записать в виде

$$\int_a^b Q(x, t)\Phi(t, y(t)) dt = f(x), \quad (14)$$

то (14) называют *уравнением Гаммерштейна первого рода*. Аналогично уравнение

$$y(x) - \int_a^b Q(x, t)\Phi(t, y(t)) dt = f(x) \quad (15)$$

называют *уравнением Гаммерштейна второго рода*.

Уравнение Гаммерштейна второго рода можно записать в канонической форме

$$u(x) = \int_a^b Q(x, t)\Phi_*(t, u(t)) dt. \quad (16)$$

Существование канонических форм (4), (8), (12) и (16) свидетельствует о том, что различие между неоднородными и однородными нелинейными интегральными уравнениями носит не принципиальный характер и составляет отличительную особенность по отношению к линейным уравнениям. Еще одной отличительной особенностью нелинейных уравнений по отношению к линейным является наличие, как правило, нескольких решений.

Замечание 3. Поскольку уравнения Гаммерштейна являются частным случаем уравнений Урысона, то все рассмотренные ниже методы для последних безусловно применимы и к первым.

© *Литература:* Н. С. Смирнов (1951), М. А. Красносельский (1956), Ф. Трикоми (1960), П. П. Забрейко, А. И. Кошелев и др. (1968), М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко (1968), М. А. Красносельский, Г. М. Вайникко и др. (1969), А. Ф. Верлань, В. С. Сизиков (1986).

14.2. Нелинейные интегральные уравнения Вольтерра

14.2-1. Метод интегральных преобразований

Рассмотрим интегральное уравнение Вольтерра с квадратичной нелинейностью

$$\mu y(x) - \lambda \int_0^x y(x-t)y(t) dt = f(x). \quad (1)$$

Для его решения используют преобразование Лапласа, которое с учетом теоремы о свертке (см. разд. 7.2) приводит к квадратному уравнению относительно изображения $\tilde{y}(p) = \mathfrak{L}\{y(x)\}$:

$$\mu \tilde{y}(p) - \lambda \tilde{y}^2(p) = \tilde{f}(p).$$

Отсюда имеем

$$\tilde{y}(p) = \frac{\mu \pm \sqrt{\mu^2 - 4\lambda \tilde{f}(p)}}{2\lambda}. \quad (2)$$

Оригинал $y(x) = \mathfrak{L}^{-1}\{\tilde{y}(p)\}$ (если он существует), полученный с помощью обратного преобразования, будет решением уравнения (1). Отметим, что разным знакам в формуле для изображений (2) отвечают два решения исходного уравнения.

Пример 1. Рассмотрим интегральное уравнение

$$\int_0^x y(x-t)y(t) dt = Ax^m, \quad m > -1.$$

Применяя к обеим частям рассматриваемого уравнения преобразование Лапласа, с учетом равенства $\mathfrak{L}\{x^m\} = \Gamma(m+1)p^{-m-1}$ имеем

$$\tilde{y}^2(p) = A\Gamma(m+1)p^{-m-1},$$

где $\Gamma(m)$ — гамма-функция. Извлекая из обеих частей квадратный корень, получим изображения

$$\tilde{y}(p) = \pm \sqrt{A\Gamma(m+1)} p^{-\frac{m+1}{2}}.$$

Используя обратное преобразование Лапласа, находим два решения исходного интегрального уравнения

$$y_1(x) = -\frac{\sqrt{A\Gamma(m+1)}}{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)} x^{\frac{m-1}{2}}, \quad y_2(x) = \frac{\sqrt{A\Gamma(m+1)}}{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)} x^{\frac{m-1}{2}}.$$

14.2-2. Метод дифференцирования интегральных уравнений

В ряде случаев дифференцирование (однократное, двукратное и т. д.) нелинейных интегральных уравнений с последующим исключением интегральных членов с помощью исходного уравнения позволяет свести их к нелинейным обыкновенным дифференциальным уравнениям. Ниже кратко перечислены некоторые уравнения такого типа.

1°. Уравнение вида

$$y(x) + \int_a^x f(t, y(t)) dt = g(x) \quad (3)$$

с помощью дифференцирования приводится к нелинейному уравнению первого порядка:

$$y'_x + f(x, y) - g'_x(x) = 0$$

с начальным условием $y(a) = g(a)$.

2°. Уравнение вида

$$y(x) + \int_a^x (x-t)f(t, y(t)) dt = g(x). \quad (4)$$

с помощью двукратного дифференцирования (с последующим исключением интегрального члена с помощью исходного уравнения) приводится к нелинейному уравнению второго порядка

$$y''_{xx} + f(x, y) - g''_{xx}(x) = 0. \quad (5)$$

Начальные условия для функции $y = y(x)$ имеют вид

$$y(a) = g(a), \quad y'_x(a) = g'_x(a). \quad (6)$$

3°. Уравнение вида

$$y(x) + \int_a^x e^{\lambda(x-t)} f(t, y(t)) dt = g(x) \quad (7)$$

с помощью дифференцирования (с последующим исключением интегрального члена с помощью исходного уравнения) приводится к нелинейному уравнению первого порядка

$$y'_x + f(x, y) - \lambda y + \lambda g(x) - g'_x(x) = 0. \quad (8)$$

Искомая функция $y = y(x)$ должна удовлетворять начальному условию $y(a) = g(a)$.

4°. Уравнения вида

$$y(x) + \int_a^x \operatorname{ch}[\lambda(x-t)] f(t, y(t)) dt = g(x), \quad (9)$$

$$y(x) + \int_a^x \operatorname{sh}[\lambda(x-t)] f(t, y(t)) dt = g(x), \quad (10)$$

$$y(x) + \int_a^x \cos[\lambda(x-t)] f(t, y(t)) dt = g(x), \quad (11)$$

$$y(x) + \int_a^x \sin[\lambda(x-t)] f(t, y(t)) dt = g(x) \quad (12)$$

также приводятся к обыкновенным дифференциальным уравнениям второго порядка с помощью двукратного дифференцирования.

Пример 2. Остановимся подробнее на уравнении (12). Дифференцируя его два раза по x , получим

$$y'_x(x) + \lambda \int_a^x \cos[\lambda(x-t)] f(t, y(t)) dt = g'_x(x), \quad (13)$$

$$y''_{xx}(x) + \lambda f(x, y(x)) - \lambda^2 \int_a^x \sin[\lambda(x-t)] f(t, y(t)) dt = g''_{xx}(x). \quad (14)$$

Исключая из равенства (14) интегральное слагаемое с помощью исходного уравнения, приходим к нелинейному обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка

$$y''_{xx} + \lambda f(x, y) + \lambda^2 y - \lambda^2 g(x) - g''_{xx}(x) = 0. \quad (15)$$

Полагая $x = a$ в исходном уравнении и равенстве (13), имеем следующие начальные условия для функции $y = y(x)$:

$$y(a) = g(a), \quad y'_x(a) = g'_x(a). \quad (16)$$

Уравнение (15) с условиями (16) определяет решение исходного интегрального уравнения. Точные решения нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка (15) для различных функций $f(x, y)$ и $g(x)$ можно найти в книгах В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (1995, 1997).

14.2-3. Метод последовательных приближений

1°. Метод последовательных приближений во многих случаях может быть успешно применен к решению различных видов интегральных уравнений. Принцип построения итерационного процесса остается таким же, как и в случае линейных уравнений. Для уравнения Вольтерра второго рода в форме Урысона

$$y(x) - \int_a^x K(x, t, y(t)) dt = f(x), \quad a \leq x \leq b, \quad (17)$$

соответствующее рекуррентное выражение имеет вид

$$y_{k+1}(x) = f(x) + \int_a^x K(x, t, y_k(t)) dt, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (18)$$

В качестве начального приближения $y_0(x)$ обычно выбирается $y_0(x) \equiv 0$ или $y_0(x) = f(x)$.

В отличие от случая линейных уравнений метод последовательных приближений имеет более ограниченную область сходимости. Приведем условия сходимости итерационного процесса (18), одновременно представляющие и условия существования решения уравнения (17). Пусть для определенности $y_0(x) = f(x)$.

Если для любой пары величин z_1, z_2 имеет место соотношение

$$|K(x, t, z_1) - K(x, t, z_2)| \leq \varphi(x, t) |z_1 - z_2|$$

и, кроме того,

$$\left| \int_a^x K(x, t, f(t)) dt \right| \leq \psi(x),$$

причем

$$\int_a^x \psi^2(t) dt \leq N^2, \quad \int_a^b \int_a^x \varphi^2(x, t) dt dx \leq M^2,$$

где N и M — постоянные, то последовательные приближения сходятся к единственному решению уравнения (17) почти всюду абсолютно и равномерно.

Пример 3. Используем метод последовательных приближений для решения уравнения

$$y(x) = \int_0^x \frac{1 + y^2(t)}{1 + t^2} dt.$$

Если $y_0(x) \equiv 0$, то

$$y_1(x) = \int_0^x \frac{dt}{1 + t^2} = \arctg x,$$

$$y_2(x) = \int_0^x \frac{1 + \arctg^2 t}{1 + t^2} dt = \arctg x + \frac{1}{3} \arctg^3 x,$$

$$y_3(x) = \int_0^x \frac{1 + \arctg t + \frac{1}{3} \arctg^3 t}{1 + t^2} dt = \arctg x + \frac{1}{3} \arctg^3 x + \frac{2}{3.5} \arctg^5 x + \frac{1}{7.9} \arctg^7 x.$$

Продолжая этот процесс, можно заметить, что $y_k(x) \rightarrow \operatorname{tg}(\arctg x) = x$ при $k \rightarrow \infty$, т. е. $y(x) = x$. Подстановка этого результата в исходное уравнение подтверждает его правильность.

Пример 4. Для нелинейного уравнения

$$y(x) = \int_0^x [ty^2(t) - 1] dt$$

необходимо получить три первых приближения. Если принять $y_0(x) = 0$, то

$$y_1(x) = \int_0^x (-1) dt = -x,$$

$$y_2(x) = \int_0^x (t^3 - 1) dt = -x + \frac{1}{4} x^4,$$

$$y_3(x) = \int_0^x [t(\frac{1}{16} t^8 - \frac{1}{2} t^5 + t^2) - 1] dt = -x + \frac{1}{4} x^4 - \frac{1}{14} x^7 + \frac{1}{160} x^{10}.$$

2°. Метод последовательных приближений применим к решению и других видов нелинейных уравнений, например, уравнений вида

$$y(x) = F\left(x, \int_a^x K(x, t)y(t) dt\right),$$

объединяемых тем, что они разрешимы относительно $y(x)$, а интеграл имеет x в качестве верхнего предела. Это позволяет при численной реализации получить решение путем движения малыми шагами по x и линеаризации на каждом шаге, что также обычно обеспечивает единственность результата итераций при произвольном начальном приближении.

3°. Начальное приближение существенно влияет на количество итераций для получения результата с необходимой точностью, поэтому при его выборе обычно пользуются некоторыми дополнительными соображениями. Так для уравнения

$$Ay(x) - \int_0^x Q(x - t)\Phi(y(t)) dt = f(x),$$

где A — некоторая постоянная, хорошее начальное приближение $y_0(x)$ иногда может быть найдено из решения следующего, в общем случае трансцендентного, уравнения относительно $\tilde{y}_0(p)$:

$$A\tilde{y}_0(p) - \tilde{Q}(p)\Phi(\tilde{y}_0(p)) = \tilde{f}(p),$$

где $\tilde{y}_0(p)$, $\tilde{Q}(p)$ и $\tilde{f}(p)$ — изображения соответствующих функций, полученные при помощи преобразования Лапласа. Если $\tilde{y}_0(p)$ определено, то начальное приближение можно найти, воспользовавшись обратным преобразованием Лапласа: $y_0(x) = \mathcal{L}^{-1}\{\tilde{y}_0(p)\}$.

14.2-4. Метод Ньютона–Канторовича

Достоинством итерационных методов применительно к линейным уравнениям Вольтерра второго рода является их неизбежная сходимость при слабых ограничениях на ядро и правую часть. При решении нелинейных уравнений область сходимости метода простых итераций сужается, а если процесс и сходится, то во многих случаях скорость сходимости может оказаться очень низкой. Одним из эффективных методов, позволяющих преодолеть указанные трудности, является метод Ньютона–Канторовича. Основным назначением данного метода является решение нелинейных интегральных уравнений второго рода с постоянными пределами интегрирования. Тем не менее он оказывается полезным и при решении многих задач для уравнений Вольтерра, позволяя значительно ускорить сходимость по сравнению с методом последовательных приближений.

Применим метод Ньютона–Канторовича к решению уравнения Вольтерра второго рода в форме Урысона

$$y(x) = f(x) + \int_a^x K(x, t, y(t)) dt. \quad (19)$$

Тогда получим следующий итерационный процесс:

$$y_k(x) = y_{k-1}(x) + \varphi_{k-1}(x), \quad k = 1, 2, \dots, \quad (20)$$

$$\varphi_{k-1}(x) = \varepsilon_{k-1}(x) + \int_a^x K'_y(x, t, y_{k-1}(t)) \varphi_{k-1}(t) dt, \quad (21)$$

$$\varepsilon_{k-1}(x) = f(x) + \int_a^x K(x, t, y_{k-1}(t)) dt - y_{k-1}(x). \quad (22)$$

В основе алгоритма лежит решение линейного интегрального уравнения (21) относительно поправки $\varphi_{k-1}(x)$ с изменяющимися от шага к шагу ядром и правой частью. Такой процесс обладает быстрой сходимостью, однако достаточно сложен из-за необходимости решения нового уравнения на каждом итерационном шаге. Упрощение может быть достигнуто путем использования вместо (21) уравнения

$$\varphi_{k-1}(x) = \varepsilon_{k-1}(x) + \int_a^x K'_y(x, t, y_0(t)) \varphi_{k-1}(t) dt \quad (23)$$

или уравнения

$$\varphi_{k-1}(x) = \varepsilon_{k-1}(x) + \int_a^x K'_y(x, t, y_m(t)) \varphi_{k-1}(t) dt, \quad (24)$$

ядра которых неизменны. В уравнении (24) m фиксированно и удовлетворяет условию $m < k - 1$.

Уравнение (23) целесообразно использовать при удачно выбранном начальном приближении. В противном случае можно остановиться на некотором m -м приближении и, начиная с него, использовать упрощенное уравнение (24). Получающийся в результате итерационный процесс представляет собой *модифицированный метод Ньютона–Канторовича*. В принципе он сходится медленнее, чем исходный процесс (20)–(22), однако менее сложен при вычислениях.

Пример 5. Применим метод Ньютона–Канторовича к решению уравнения

$$y(x) = \int_0^x [ty^2(t) - 1] dt.$$

Производная подынтегрального выражения по y имеет вид

$$K'_y(t, y(t)) = 2ty(t).$$

Принимая в качестве нулевого приближения $y_0(x) \equiv 0$, получим согласно (20) и (21), что $\varphi_0(x) = -x$ и $y_1(x) = -x$. Далее, $y_2(x) = y_1(x) + \varphi_1(x)$. Согласно (22) имеем

$$\varepsilon_1(x) = \int_0^x [t(-t)^2 - 1] dt + x = \frac{1}{4}x^4.$$

Уравнение относительно поправки имеет вид

$$\varphi_1(x) = -2 \int_0^x t^2 \varphi_1(t) dt + \frac{1}{4}x^4$$

и может быть решено любым из методов решения линейных уравнений Вольтерра второго рода. В данном случае воспользуемся методом последовательных приближений, который приводит к следующим

результатам (номер шага указывается верхним индексом):

$$\begin{aligned}\varphi_1^{(0)} &= \frac{1}{4}x^4, \\ \varphi_1^{(1)} &= \frac{1}{4}x^4 - 2 \int_0^x \frac{1}{4}t^6 dt = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{14}x^7, \\ \varphi_1^{(2)} &= \frac{1}{4}x^4 - 2 \int_0^x t^2 \left(\frac{1}{4}t^4 - \frac{1}{14}x^7 \right) dt = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{14}x^7 + \frac{1}{70}x^{10}.\end{aligned}$$

Ограничившись здесь вторым приближением, получим

$$y_2(x) = -x + \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{14}x^7 + \frac{1}{70}x^{10},$$

и перейдем к третьему итерационному шагу метода Ньютона–Канторовича:

$$\begin{aligned}y_3(x) &= y_2(x) + \varphi_2(x), \\ \varepsilon_2(x) &= \frac{1}{160}x^{10} - \frac{1}{1820}x^{13} - \frac{1}{7840}x^{16} + \frac{1}{9340}x^{19} + \frac{1}{107800}x^{22}, \\ \varphi_2(x) &= \varepsilon_2(x) + 2 \int_0^x t \left(-t + \frac{1}{4}t^4 - \frac{1}{14}t^7 + \frac{1}{70}t^{10} \right) \varphi_2(t) dt.\end{aligned}$$

Ограничившись нулевым приближением при решении последнего уравнения, получим

$$y_3(x) = -x + \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{14}x^7 + \frac{23}{112}x^{10} - \frac{1}{1820}x^{13} - \frac{1}{7840}x^{16} + \frac{1}{9340}x^{19} + \frac{1}{107800}x^{22}.$$

Применение метода последовательных приближений к исходному уравнению приводит к такому же результату на четвертом шаге.

При численном решении интеграл, как обычно, заменяется квадратурной формулой. Основная трудность реализации метода в этом случае может заключаться в определении производной от ядра. Задача упрощается, если ядро задано в виде аналитического выражения, допускающего дифференцирование в аналитическом виде. Если же ядро задано таблицей, то дифференцирование должно выполняться численно.

14.2.5. Метод коллокации

Применительно к решению уравнений Вольтерра первого рода в форме Урысона

$$\int_a^x K(x, t, y(t)) dt = f(x), \quad a \leq x \leq b, \quad (25)$$

метод коллокации состоит в следующем. Промежуток $[a, b]$ разбивается на N участков, на каждом из которых искомое решение представляется в виде функции определенного вида

$$\tilde{y}(x) = \Phi(x, A_1, A_2, \dots, A_m), \quad (26)$$

зависящей от свободных параметров A_i ($i = 1, 2, \dots, m$).

Решаемое уравнение записывается на каждом $(k + 1)$ -м участке $x_k \leq x \leq x_{k+1}$ ($k = 0, 1, \dots, N - 1$) в виде

$$\int_{x_k}^x K(x, t, \tilde{y}(t)) dt = f(x) - \Psi_k(x), \quad (27)$$

где интеграл

$$\Psi_k(x) = \int_a^{x_k} K(x, t, \tilde{y}(t)) dt \quad (28)$$

всегда может быть вычислен по известному на промежутке $a \leq x \leq x_k$ приближенному решению $\tilde{y}(x)$, полученному предварительно для $k - 1$ участков. Начальное значение $y(a)$ искомого решения находится каким-либо вспомогательным способом или считается заданным.

Для решения уравнения (27) используется представление (26), а свободные параметры A_i ($i = 1, 2, \dots, m$) определяются из условия обращения в нуль невязок

$$\varepsilon(A_i, x_{k,j}) = \int_{x_k}^{x_{k,j}} K(x_{k,j}, t, \Phi(t, A_1, A_2, \dots, A_m)) dt - f(x_{k,j}) - \Psi_k(x_{k,j}), \quad (29)$$

где $x_{k,j}$ ($j = 1, 2, \dots, m$) — узлы, соответствующие разбиению отрезка $[x_k, x_{k+1}]$ на m частей (подотрезков). Выражение (29) представляет собой систему m уравнений относительно A_1, A_2, \dots, A_m .

Для удобства вычислений искомое решение на участке целесообразно представлять в виде какого-либо полинома

$$\tilde{y}(x) = \sum_{i=1}^m A_i \varphi_i(x), \quad (30)$$

где $\varphi_i(x)$ — линейно независимые координатные функции. В качестве $\varphi_i(x)$ часто выбираются степенные и тригонометрические полиномы, в том числе, $\varphi_i(x) = x^{i-1}$.

В приложениях конкретный вид функций $\varphi_i(x)$ в формуле (30), а также вид функции Φ в (26), иногда задается из физических соображений или определяется структурой решения более простого модельного уравнения.

14.2-6. Метод квадратур

К решению нелинейного уравнения Вольтерра можно применить метод, основанный на использовании квадратурных формул. Методика составления аппроксимирующей системы уравнений остается такой же, как и в линейном случае (см. п. 9.10-1).

1°. Рассмотрим нелинейное уравнение Вольтерра второго рода в форме Урысона

$$y(x) - \int_a^x K(x, t, y(t)) dt = f(x) \quad (31)$$

на отрезке $a \leq x \leq b$. Будем считать, что $K(x, t, y(t))$ и $f(x)$ — непрерывные функции.

На основании уравнения (31) найдем $y(a) = f(a)$. Возьмем постоянный шаг интегрирования h и рассмотрим дискретное множество точек $x_i = a + h(i-1)$, где $i = 1, 2, \dots, n$. В точках $x = x_i$ уравнение (31) принимает вид

$$y(x_i) - \int_a^{x_i} K(x_i, t, y(t)) dt = f(x_i). \quad (32)$$

Выбирая x_i в качестве узлов квадратурной формулы (см. п. 9.7-1), для которой ошибкой аппроксимации будем пренебрегать, и заменяя ею интеграл в выражении (32), получим следующую систему нелинейных алгебраических (или трансцендентных) уравнений:

$$y_1 = f_1, \quad y_i - \sum_{j=1}^i A_{ij} K_{ij}(y_j) = f_i, \quad i = 2, 3, \dots, n, \quad (33)$$

где A_{ij} — коэффициенты квадратурной формулы на отрезке $[a, x_i]$, y_i — приближенные значения решения $y(x)$ в узлах x_i , $f_i = f(x_i)$ и $K_{ij}(y_j) = K(x_i, t_j, y_j)$.

Соотношения (33) можно записать в виде последовательности рекуррентных нелинейных уравнений

$$y_1 = f_1, \quad y_i - A_{ii} K_{ii}(y_i) = f_i + \sum_{j=1}^{i-1} A_{ij} K_{ij}(y_j), \quad i = 2, 3, \dots, n, \quad (34)$$

для определения приближенного значения искомого решения в узловых точках.

2°. Применительно к уравнению Вольтерра второго рода в форме Гаммерштейна

$$y(x) - \int_a^x Q(x, t) \Phi(t, y(t)) dt = f(x) \quad (35)$$

основные соотношения метода квадратур имеют вид ($x_1 = a$)

$$y_1 = f_1, \quad y_i - \sum_{j=1}^i A_{ij} Q_{ij} \Phi_j(y_j) = f_i, \quad i = 2, 3, \dots, n, \quad (36)$$

где $Q_{ij} = Q(x_i, t_j)$ и $\Phi_j(y_j) = \Phi(t_j, y_j)$. Они приводят к последовательности нелинейных рекуррентных уравнений

$$y_1 = f_1, \quad y_i - A_{ii} Q_{ii} \Phi_i(y_i) = f_i + \sum_{j=1}^{i-1} A_{ij} Q_{ij} \Phi_j(y_j), \quad i = 2, 3, \dots, n, \quad (37)$$

решения которых дают приближенные значения искомой функции.

Пример 6. При решении уравнения

$$y(x) - \int_0^x e^{-(x-t)} y^2(t) dt = e^{-x}, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

где $Q(x, t) = e^{-(x-t)}$, $\Phi(t, y(t)) = y^2(t)$ и $f(x) = e^{-x}$, аппроксимируемое выражение имеет вид

$$y(x_i) - \int_0^{x_i} e^{-(x_i-t)} y^2(t) dt = e^{-x_i}.$$

Используя для замены интеграла формулу трапеций (шаг $h = 0,02$) и отыскивая решение в узлах $x_i = 0, 0,02, 0,04, 0,06, 0,08, 0,1$, получаем согласно (33) следующую систему расчетных соотношений:

$$y_1 = f_1, \quad y_i - 0,01 Q_{ii} y_i^2 = f_i + \sum_{j=1}^{i-1} 0,02 Q_{ij} y_j^2, \quad i = 2, 3, \dots, 6.$$

Таким образом, для нахождения приближенного решения необходимо решить квадратное уравнение для каждого значения y_i , что позволяет записать

$$y_i = 50 \pm 50 \left[1 - 0,04 \left(f_i + \sum_{j=1}^{i-1} 0,02 Q_{ij} y_j^2 \right) \right]^{1/2}, \quad i = 2, 3, \dots, 6.$$

● *Литература:* П. П. Забрейко, А. И. Кошелев и др. (1968), М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко (1968), А. Ф. Верлань, В. С. Сизиков (1986), А. В. Манжиров, А. Д. Полянин (1999, 2000).

14.3. Уравнения с постоянными пределами интегрирования

14.3-1. Нелинейные уравнения с вырожденными ядрами

1°. Рассмотрим уравнение Гаммерштейна второго рода в канонической форме

$$y(x) = \int_a^b Q(x, t) \Phi(t, y(t)) dt, \quad (1)$$

где $Q(x, t)$, $\Phi(t, y)$ — заданные функции, $y(x)$ — искомая функция.

Пусть $Q(x, t)$ — вырожденное ядро, т. е.

$$Q(x, t) = \sum_{k=1}^m g_k(x) h_k(t). \quad (2)$$

В этом случае уравнение (1) принимает вид

$$y(x) = \sum_{k=1}^m g_k(x) \int_a^b h_k(t) \Phi(t, y(t)) dt. \quad (3)$$

Положим

$$A_k = \int_a^b h_k(t) \Phi(t, y(t)) dt, \quad k = 1, 2, \dots, m, \quad (4)$$

где A_k — пока неизвестные постоянные. Тогда в силу (3) будем иметь

$$y(x) = \sum_{k=1}^m A_k g_k(x). \quad (5)$$

Подставляя в равенства (4) выражение (5) для $y(x)$, получим в общем случае m трансцендентных уравнений вида

$$A_k = \Psi_k(A_1, A_2, \dots, A_m), \quad k = 1, 2, \dots, m, \quad (6)$$

содержащих m неизвестных величин A_1, A_2, \dots, A_m .

В случае, когда $\Phi(t, y)$ — многочлен относительно y , т. е.

$$\Phi(t, y) = p_0(t) + p_1(t)y + \dots + p_n(t)y^n, \quad (7)$$

где $p_0(t), p_1(t), \dots, p_n(t)$ есть, например, непрерывные функции t на отрезке $[a, b]$, система (6) превращается в систему нелинейных алгебраических уравнений относительно A_1, A_2, \dots, A_m .

Число решений интегрального уравнения (3) равно числу решений системы (6). Каждое решение системы (6) порождает решение (5) интегрального уравнения.

2°. Рассмотрим уравнение Урысона второго рода с упрощенным вырожденным ядром следующего вида:

$$y(x) + \int_a^b \left\{ \sum_{k=1}^n g_k(x) f_k(t, y(t)) \right\} dt = h(x). \quad (8)$$

Его решение имеет вид

$$y(x) = h(x) + \sum_{k=1}^n \lambda_k g_k(x), \quad (9)$$

где постоянные λ_k определяются путем решения алгебраической (трансцендентной) системы уравнений

$$\lambda_m + \int_a^b f_m(t, h(t) + \sum_{k=1}^n \lambda_k g_k(t)) dt = 0, \quad m = 1, 2, \dots, n. \quad (10)$$

Различным корням этой системы отвечают различные решения нелинейного интегрального уравнения. Возможны ситуации, когда (действительные) решения отсутствуют.

Решение уравнения Урысона второго рода с вырожденным ядром в общей форме

$$f(x, y(x)) + \int_a^b \left\{ \sum_{k=1}^n g_k(x, y(x)) h_k(t, y(t)) \right\} dt = 0 \quad (11)$$

можно записать в неявном виде

$$f(x, y(x)) + \sum_{k=1}^n \lambda_k g_k(x, y(x)) = 0, \quad (12)$$

где параметры λ_k определяются путем решения системы алгебраических (трансцендентных) уравнений

$$\begin{aligned} \lambda_k - H_k(\vec{\lambda}) &= 0, \quad k = 1, 2, \dots, n, \\ H_k(\vec{\lambda}) &= \int_a^b h_k(t, y(t)) dt, \quad \vec{\lambda} = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}. \end{aligned} \quad (13)$$

В систему (13) следует подставить функцию $y(x) = y(x, \vec{\lambda})$, которая получается путем разрешения (12).

Число решений интегрального уравнения определяется числом решений, полученных из (12) и (13). Возможны ситуации, когда решения отсутствуют.

Пример 1. Решим интегральное уравнение

$$y(x) = \lambda \int_0^1 x t y^3(t) dt \quad (14)$$

с параметром λ . Положим

$$A = \int_0^1 t y^3(t) dt. \quad (15)$$

Тогда из (14) будем иметь

$$y(x) = \lambda A x. \quad (16)$$

Подставляя $y(x)$ в форме (16) в соотношение (15), получим

$$A = \int_0^1 t \lambda^3 A^3 t^3 dt.$$

Откуда

$$A = \frac{1}{5} \lambda^3 A^3. \quad (17)$$

При $\lambda > 0$ уравнение (17) имеет три решения:

$$A_1 = 0, \quad A_2 = \sqrt{\frac{5}{\lambda^3}}, \quad A_3 = -\sqrt{\frac{5}{\lambda^3}}.$$

Следовательно, интегральное уравнение (14) также имеет три решения при любом $\lambda > 0$:

$$y_1(x) \equiv 0, \quad y_2(x) = \sqrt{\frac{5}{\lambda^3}} x, \quad y_3(x) = -\sqrt{\frac{5}{\lambda^3}} x.$$

При $\lambda \leq 0$ уравнение (17) имеет только одно тривиальное решение $y(x) \equiv 0$.

14.3-2. Метод интегральных преобразований

1°. Рассмотрим нелинейное интегральное уравнение с квадратичной нелинейностью на полуоси

$$\mu y(x) - \lambda \int_0^\infty \frac{1}{t} y\left(\frac{x}{t}\right) y(t) dt = f(x). \quad (18)$$

Для его решения используют преобразование Меллина, которое с учетом теоремы о свертке (см. разд. 7.3) приводит к квадратному уравнению относительно изображения $\hat{y}(s) = \mathfrak{M}\{y(x)\}$:

$$\mu \hat{y}(s) - \lambda \hat{y}^2(s) = \hat{f}(s).$$

Отсюда имеем

$$\hat{y}(s) = \frac{\mu \pm \sqrt{\mu^2 - 4\lambda \hat{f}(s)}}{2\lambda}. \quad (19)$$

Оригинал $y(x) = \mathfrak{M}^{-1}\{\hat{y}(s)\}$ (если он существует), полученный с помощью обратного преобразования, будет решением уравнения (18). Разным знакам в формуле для изображений (19) отвечают два решения исходного уравнения.

2°. С помощью преобразования Меллина можно решать также нелинейные интегральные уравнения вида

$$y(x) - \lambda \int_0^\infty t^\beta y(xt) y(t) dt = f(x). \quad (20)$$

Преобразование Меллина (см. табл. 2 из разд. 7.3) приводит (20) к функциональному уравнению для изображения $\hat{y}(s) = \mathfrak{M}\{y(x)\}$:

$$\hat{y}(s) - \lambda \hat{y}(s) \hat{y}(1-s+\beta) = \hat{f}(s). \quad (21)$$

Заменяя в (21) s на $1-s+\beta$, имеем следствие

$$\hat{y}(1-s+\beta) - \lambda \hat{y}(s) \hat{y}(1-s+\beta) = \hat{f}(1-s+\beta). \quad (22)$$

Исключая из (21) и (22) квадратичный член, получим связь

$$\hat{y}(s) - \hat{f}(s) = \hat{y}(1-s+\beta) - \hat{f}(1-s+\beta). \quad (23)$$

Выражая отсюда $\hat{y}(1-s+\beta)$ и подставляя в (21), приходим к квадратному уравнению относительно изображения

$$\lambda \hat{y}^2(s) - [1 + \hat{f}(s) - \hat{f}(1-s+\beta)] \hat{y}(s) + \hat{f}(s) = 0. \quad (24)$$

Разрешив (24) относительно $\hat{y}(s)$ с помощью обратного преобразования Меллина можно найти решение исходного интегрального уравнения (20).

14.3-3. Метод дифференцирования интегральных уравнений

1°. Рассмотрим уравнение

$$y(x) + \int_a^b |x-t| f(t, y(t)) dt = g(x). \quad (25)$$

Раскроем модуль в подынтегральном выражении. В результате получим

$$y(x) + \int_a^x (x-t) f(t, y(t)) dt + \int_x^b (t-x) f(t, y(t)) dt = g(x). \quad (26)$$

Дифференцируя (26) по x , имеем

$$y'_x(x) + \int_a^x f(t, y(t)) dt - \int_x^b f(t, y(t)) dt = g'_x(x). \quad (27)$$

Дифференцируя (27), приходим к следующему обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка для функции $y = y(x)$:

$$y''_{xx} + 2f(x, y) = g''_{xx}(x). \quad (28)$$

Выведем теперь граничные условия для уравнения (28). Пусть $-\infty < a < b < \infty$. Полагая в (26) $x = a$ и $x = b$, имеем два следствия:

$$\begin{aligned} y(a) + \int_a^b (t-a)f(t, y(t)) dt &= g(a), \\ y(b) + \int_a^b (b-t)f(t, y(t)) dt &= g(b). \end{aligned} \quad (29)$$

Выразим из уравнения (28) функцию $f(x, y)$ и подставим в (29). После интегрирования по частям получим искомые граничные условия для функции $y(x)$:

$$\begin{aligned} y(a) + y(b) + (b-a)[g'_x(b) - y'_x(b)] &= g(a) + g(b), \\ y(a) + y(b) + (a-b)[g'_x(a) - y'_x(a)] &= g(a) + g(b). \end{aligned} \quad (30)$$

Отметим полезное следствие этих равенств:

$$y'_x(a) + y'_x(b) = g'_x(a) + g'_x(b),$$

которое можно использовать вместо одного из условий (30).

Уравнение (28) вместе с граничными условиями (30) описывает решение исходного интегрального уравнения (отметим, что решений может быть несколько).

2°. Уравнение вида

$$y(x) + \int_a^b e^{\lambda|x-t|} f(t, y(t)) dt = g(x) \quad (31)$$

с помощью двукратного дифференцирования (с последующим исключением интегрального члена с использованием исходного уравнения) приводится к нелинейному уравнению второго порядка

$$y''_{xx} + 2\lambda f(x, y) - \lambda^2 y = g''_{xx}(x) - \lambda^2 g(x). \quad (32)$$

О граничных условиях для этого уравнения см. в книге А. Д. Полянина, А. В. Манжирова (1998, стр. 392).

3°. К обыкновенным дифференциальным уравнениям второго порядка с помощью дифференцирования приводятся также уравнения вида

$$y(x) + \int_a^b \operatorname{sh}(\lambda|x-t|) f(t, y(t)) dt = g(x), \quad (33)$$

$$y(x) + \int_a^b \sin(\lambda|x-t|) f(t, y(t)) dt = g(x). \quad (34)$$

Об этих уравнениях см. в книге А. Д. Полянина, А. В. Манжирова (1998, стр. 393).

14.3-4. Метод последовательных приближений

Рассмотрим нелинейное интегральное уравнение Урысона в канонической форме

$$y(x) = \int_a^b \mathcal{K}(x, t, y(t)) dt, \quad a \leq x \leq b. \quad (35)$$

Итерационный процесс для этого уравнения строится по формуле

$$y_k(x) = \int_a^b \mathcal{K}(x, t, y_{k-1}(t)) dt, \quad k = 1, 2, \dots \quad (36)$$

Если функция $\mathcal{K}(x, t, y)$ непрерывна вместе с производной $\mathcal{K}'_y(x, t, y)$ по совокупности переменных $a \leq x \leq b$, $a \leq t \leq b$, $|y| \leq \rho$ и

$$\int_a^b \sup_y |\mathcal{K}(x, t, y)| dt \leq \rho, \quad \int_a^b \sup_y |\mathcal{K}'_y(x, t, y)| dt \leq \beta < 1, \quad (37)$$

то при любой непрерывной функции начального приближения $y_0(x)$ из области $\{|y| \leq \rho, a \leq x \leq b\}$ последовательные приближения (36) сходятся к непрерывному решению $y^*(x)$, которое расположено в той же области и единственно в ней. Скорость сходимости определяется неравенством

$$|y^*(x) - y_k(x)| \leq \frac{\beta^k}{1 - \beta} \sup_x |y_1(x) - y_0(x)|, \quad a \leq x \leq b, \quad (38)$$

которое дает априорную оценку погрешности k -го приближения. Апостериорная и, вообще говоря, более точная оценка имеет вид

$$|y^*(x) - y_k(x)| \leq \frac{\beta}{1 - \beta} \sup_x |y_k(x) - y_{k-1}(x)|, \quad a \leq x \leq b. \quad (39)$$

Решение уравнения вида (35) с дополнительным слагаемым $f(x)$ в правой части может быть построено аналогичным образом.

Пример 2. Применим метод последовательных приближений для решения уравнения

$$y(x) = \int_0^1 xty^2(t) dt - \frac{5}{12}x + 1.$$

Соответствующая рекуррентная формула имеет вид

$$y_k(x) = \int_0^1 xty_{k-1}^2(t) dt - \frac{5}{12}x + 1, \quad k = 1, 2, \dots$$

В качестве начального приближения возьмем $y_0(x) = 1$. Вычисления показывают, что

$$\begin{aligned} y_1(x) &= 1 + 0,083x, & y_2(x) &= 1 + 0,14x, & y_3(x) &= 1 + 0,18x, & \dots \\ y_8(x) &= 1 + 0,27x, & y_9(x) &= 1 + 0,26x, & y_{10}(x) &= 1 + 0,29x, & \dots \\ y_{16}(x) &= 1 + 0,318x, & y_{17}(x) &= 1 + 0,321x, & y_{18}(x) &= 1 + 0,323x, & \dots \end{aligned}$$

Таким образом, приближения сходятся к точному решению $y(x) = 1 + \frac{1}{3}x$. Видно, что скорость сходимости очень мала.

В п. 14.3-5 это уравнение будет решено более эффективным методом.

14.3-5. Метод Ньютона–Канторовича

Решение нелинейных интегральных уравнений является сложной задачей вычислительной математики, что обусловлено трудностями как принципиального, так и вычислительного характера. В связи с этим разрабатываются методы, специально предназначенные для решения нелинейных уравнений. К таким методам относится метод Ньютона–Канторовича, который во многих случаях позволяет решать вопросы обеспечения и ускорения сходимости итерационных процессов.

Рассмотрим данный метод применительно к уравнению Урысона в канонической форме (35). Итерационный процесс строится следующим образом:

$$y_k(x) = y_{k-1}(x) + \varphi_{k-1}(x), \quad k = 1, 2, \dots, \quad (40)$$

$$\varphi_{k-1}(x) = \varepsilon_{k-1}(x) + \int_a^b \mathcal{K}'_y(x, t, y_{k-1}(t)) \varphi_{k-1}(t) dt, \quad (41)$$

$$\varepsilon_{k-1}(x) = \int_a^b \mathcal{K}(x, t, y_{k-1}(t)) dt - y_{k-1}(x). \quad (42)$$

На каждом шаге алгоритма решается линейное интегральное уравнение относительно поправки $\varphi_{k-1}(x)$. Процесс (40) при определенных условиях обладает быстрой сходимостью, однако достаточно сложен, поскольку на каждой итерации необходимо получать новое ядро $\mathcal{K}'_y(x, t, y_{k-1}(t))$ для уравнения (41).

Упрощение алгоритма достигается путем использования уравнения

$$\varphi_{k-1}(x) = \varepsilon_{k-1}(x) + \int_a^b \mathcal{K}'_y(x, t, y_0(t)) \varphi_{k-1}(t) dt \quad (43)$$

вместо (41). При удачном выборе начального приближения интегральные операторы в (41) и (43) отличаются мало. При этом ядро в (43) в процессе решения остается неизменным.

Метод приближенного решения, состоящий в применении формул (40), (42) и (43), называется *модифицированным методом Ньютона–Канторовича*. В принципе он сходится медленнее, чем исходный (немодифицированный) метод, однако менее сложен при вычислениях и потому часто оказывается предпочтительным.

Пусть функция $\mathcal{K}(x, t, y)$ непрерывна вместе с производными $\mathcal{K}'_y(x, t, y)$ и $\mathcal{K}''_{yy}(x, t, y)$ по совокупности переменных $a \leq x \leq b$, $a \leq t \leq b$ и выполнены следующие условия:

1°. При начальном приближении $y_0(x)$ ядро $\mathcal{K}'_y(x, t, y_0(t))$ имеет резольвенту $\mathcal{R}(x, t)$ такую, что

$$\int_a^b |\mathcal{R}(x, t)| dt \leq A < \infty, \quad a \leq x \leq b.$$

2°. Невязка $\varepsilon_0(x)$ уравнения (42) для приближения $y_0(x)$ удовлетворяет неравенству

$$|\varepsilon_0(x)| = \left| \int_a^b \mathcal{K}(x, t, y_0(t)) dt - y_0(x) \right| \leq B < \infty.$$

3°. В области $|y(x) - y_0(x)| \leq 2(1 + A)B$ имеет место соотношение

$$\int_a^b \sup_y |\mathcal{K}_{yy}''(x, t, y)| dt \leq D < \infty.$$

4°. Постоянные A , B и D подчинены условию

$$H = (1 + A)^2 BD \leq \frac{1}{2}.$$

Тогда при выполнении условий 1°–4° процесс (40) сходится к решению $y^*(x)$ уравнения (35), расположенному в области

$$|y(x) - y_0(x)| \leq (1 - \sqrt{1 - 2H})H^{-1}(1 - A)B, \quad a \leq x \leq b,$$

и единственному в области

$$|y(x) - y_0(x)| \leq 2(1 + A)B, \quad a \leq x \leq b.$$

Скорость сходимости определяется оценкой

$$|y^*(x) - y_k(x)| \leq 2^{1-k}(2H)^{2^k-1}(1 - A)B, \quad a \leq x \leq b.$$

Таким образом, приведенные условия устанавливают сходимость алгоритма, существование, область расположения и область единственности решения нелинейного уравнения (35). Они также предъявляют определенные требования к начальному приближению $y_0(x)$, выбор которого является важной самостоятельной задачей, не имеющей единого подхода. Обычно начальное приближение определяется либо более детальным априорным анализом решаемого уравнения, либо физическими соображениями, вытекающими из существа задачи, описываемой этим уравнением. При удачном выборе начального приближения метод Ньютона–Канторовича обеспечивает высокую скорость сходимости итерационного процесса для получения приближенного решения с заданной точностью.

Замечание. Пусть правая часть уравнения (35) содержит дополнительное слагаемое $f(x)$. Тогда такое уравнение может быть представлено в виде (35) с подынтегральным выражением $K(x, t, y(t)) + (b - a)^{-1}f(x)$.

Пример 3. Применим метод Ньютона–Канторовича для решения уравнения

$$y(x) = \int_0^1 xty^2(t) dt - \frac{5}{12}x + 1. \quad (44)$$

В качестве начального приближения возьмем $y_0(x) = 1$. Определим согласно (42) невязку:

$$\varepsilon_0(x) = \int_0^1 xty_0^2(t) dt - \frac{5}{12}x + 1 - y_0(x) = x \int_0^1 t dt - \frac{5}{12}x + 1 - 1 = \frac{1}{12}x.$$

Необходимая в расчетах производная от ядра $\mathcal{K}(x, t, y) = xty^2(t)$ имеет вид $\mathcal{K}'_y(x, t, y) = 2xty(t)$. В соответствии с (41) составим относительно $\varphi_0(x)$ уравнение

$$\varphi_0(x) = \frac{1}{12}x + 2x \int_0^1 ty_0(t)\varphi_0(t) dt,$$

в котором ядро оказывается вырожденным, что позволяет получить $\varphi_0(x) = \frac{1}{4}x$. Теперь определим первое приближение искомой функции:

$$y_1(x) = y_0(x) + \varphi_0(x) = 1 + \frac{1}{4}x.$$

Продолжая итерационный процесс, получим

$$\varepsilon_1(x) = \int_0^1 xt(1 + \frac{1}{4}t) dt + (1 - \frac{5}{12}x) - (1 + \frac{1}{4}x) = \frac{1}{64}x.$$

Уравнение относительно $\varphi_1(x)$ имеет вид

$$\varphi_1(x) = \frac{1}{64}x + 2x \int_0^1 t(1 + \frac{1}{4}t) dt + (1 - \frac{5}{12}x) - (1 + \frac{1}{4}x),$$

и его решение $\varphi_1(x) = \frac{3}{40}x$. Отсюда

$$y_2(x) = 1 + \frac{1}{4}x + \frac{3}{40}x = 1 + 0,325x.$$

Максимальное отличие точного решения $y(x) = 1 + \frac{1}{3}x$ от приближенного решения $y_2(x)$ наблюдается при $x = 1$ и составляет менее 0,5%.

Данное решение не единственное. Второе решение также может быть получено, если в качестве начального приближения выбрать функцию $y_0(x) = 1 + 0,8x$. В этом случае повторение приведенной выше последовательности приближений приводит к следующим результатам:

$$\begin{aligned} y_1(x) &= 1 + 0,82x, \\ y_2(x) &= 1 + 1,13x, \\ y_3(x) &= 1 + 0,98x, \dots \end{aligned}$$

и последующие приближения стремятся к точному решению $y(x) = 1 + x$.

Мы видим, что скорость сходимости итерационного процесса связанного с методом Ньютона–Канторовича существенно выше, чем для случая метода последовательных приближений (см. пример 2 из п. 14.3-4).

Сравним также скорости сходимости итерационных процессов метода Ньютона–Канторовича и модифицированного метода. Применение модифицированного метода дает

$$y_n(x) = 1 + k_n x; \quad \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline k_0 & k_1 & k_2 & k_3 & k_4 & k_5 & k_6 & k_7 & k_8 & \dots \\ \hline 0 & 0,25 & 0,69 & 0,60 & 0,51 & 0,44 & 0,38 & 0,36 & 0,345 & \dots \\ \hline \end{array}.$$

Итерационный процесс модифицированного метода также сходится к точному решению $y(x) = 1 + \frac{1}{3}x$.

Видно, что модифицированный метод Ньютона–Канторовича менее эффективен, чем метод Ньютона–Канторовича, но более эффективен, чем метод последовательных приближений (см. пример 2 из п. 14.3-4).

14.3-6. Метод квадратур

К решению любого нелинейного уравнения можно применить метод, основанный на использовании квадратурных формул. Методика составления аппроксимирующей системы уравнений остается такой же, как и в линейном случае (см. п. 11.18-1). Рассмотрим ее на примере уравнения Урысона второго рода

$$y(x) - \int_a^b K(x, t, y(t)) dt = f(x), \quad a \leq x \leq b. \quad (45)$$

Положим $x = x_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$), тогда

$$y(x_i) - \int_a^b K(x_i, t, y(t)) dt = f(x_i), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (46)$$

Воспользовавшись квадратурной формулой из п. 11.18-1 и пренебрегая ошибкой аппроксимации, преобразуем соотношения (46) в систему нелинейных уравнений

$$y_i - \sum_{j=1}^n A_j K_{ij}(y_j) = f_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (47)$$

относительно приближенных значений y_i решения $y(x)$ в узлах x_1, x_2, \dots, x_n , где $f_i = f(x_i)$, $K_{ij}(y_j) = K(x_i, t_j, y_j)$, а A_j — коэффициенты квадратурной формулы.

Решение нелинейной системы (47) дает значения y_1, y_2, \dots, y_n , по которым путем интерполяции находится приближенное решение интегрального уравнения (45) на всем отрезке $[a, b]$. В качестве аналитического выражения приближенного решения уравнения может быть взята функция

$$\tilde{y}(x) = f(x) + \sum_{j=1}^n A_j K(x, x_j, y_j). \quad (48)$$

14.3-7. Метод регуляризации Тихонова

Применительно к нелинейному интегральному уравнению Урысона первого рода

$$\int_a^b K(x, t, y(t)) dt = f(x), \quad c \leq x \leq d, \quad (49)$$

где $f(x) \in L_2(c, d)$ и $y(t) \in L_2(a, b)$, метод регуляризации Тихонова приводит к регуляризованному нелинейному интегральному уравнению в форме

$$\alpha y_\alpha(x) + \int_a^b M(t, x, y_\alpha(t), y_\alpha(x)) dt = F(x, y_\alpha(x)), \quad a \leq x \leq b, \quad (50)$$

$$M(t, x, y(t), y(x)) = \int_c^d K(s, t, y(t)) K'_y(s, x, y(x)) ds, \quad (51)$$

$$F(x, y(x)) = \int_c^d K'_y(t, x, y(x)) f(t) dt, \quad (52)$$

где α — параметр регуляризации.

Метод квадратур с использованием формулы трапеций, например, приводит уравнение (50) к системе нелинейных алгебраических уравнений. Приближенное решение (49) строится по принципу, описанному для линейных уравнений (см. разд. 10.8).

● *Литература:* Н. С. Смирнов (1951), Ф. Трикоми (1960), П. П. Забрейко, А. И. Кошелев и др. (1968), А. Ф. Верлань, В. С. Сизиков (1986), А. В. Манжиров, А. Д. Полянин (1999, 2000).

15. Интегральные операторы

15.1. Линейные операторы в нормированных пространствах

15.1-1. Интегральные уравнения и интегральные операторы

Теория операторов является наиболее общим разделом математического анализа, изучающим абстрактные операторные уравнения, частными случаями которых являются различные дифференциальные, интегральные, интегро-дифференциальные и другие уравнения. Успехами своего развития эта теория во многом обязана прогрессу в теории интегральных уравнений. В свою очередь, развитые методы абстрактной теории операторов позволяют эффективно исследовать конкретные случаи, включая интегральные уравнения и системы интегральных уравнений.

Абстрактное операторное уравнение имеет вид

$$Ay = f, \quad y \in E, \quad f \in F, \quad (1)$$

где A — линейный или нелинейный оператор, E и F — некоторые функциональные пространства (например, банаховы или гильбертовы). Примерами линейных и нелинейных интегральных операторов могут служить операторы Фредгольма, Вольтерра, Гаммерштейна, Урысона и др. (названия интегральных операторов совпадают с названиями интегральных уравнений, см. главы 2–8, а также литературу в конце раздела).

В случае, когда оператор A является линейным оператором, уравнение (1) часто называют операторным уравнением первого рода (см. главы 2, 4, 6). Если $A = 1_E - \lambda B$, где 1_E — тождественный оператор (см. определение 1 из п. 15.1-4), B — некоторый линейный оператор в E , а λ — числовой параметр операторного уравнения, то уравнение (1), переписанное в виде

$$y - \lambda By = f, \quad y \in E, \quad f \in E, \quad (2)$$

часто называют операторным уравнением второго рода (см. главы 3, 5, 7).

Ниже рассмотрим элементы теории линейных операторов, связанные с уравнениями 2–7 глав. Будем использовать привычную для теории операторов символику.

Линейные операторы, возникающие в интегральных уравнениях, отображают одно пространство функций в другое. Например, если $K(x, t)$ — некоторая функция на $S = \{a \leq x \leq b, a \leq t \leq b\} = [a, b] \times [a, b]$, и если функция

$$f(x) = \int_a^b K(x, t)y(t) dt$$

является элементом F для любого $y \in E$ (F и E — некоторые линейные пространства функций), где интеграл понимается в обычном лебеговом смысле или рассматривается в смысле главного значения по Коши, то формула

$$(Ay)(x) = \int_a^b K(x, t)y(t) dt \in F, \quad y \in E, \quad (3)$$

определяет линейный оператор $A: E \rightarrow F$. Функция $K(x, t)$ называется *ядром интегрального оператора A* .

15.1-2. Нормированные и евклидовы пространства

Нормированным линейным пространством называется вещественное или комплексное линейное пространство G , снабженное *нормой*, т. е. таким отображением $\|\cdot\|: G \rightarrow \mathbb{R}^+ = [0, \infty)$, что

$$\begin{aligned} \|x\| &= 0 \iff x = 0, \quad x \in G, \\ \|tx\| &= |t| \|x\| \quad \text{для всех чисел } t \text{ и всех } x \in G, \\ \|x + y\| &\leq \|x\| + \|y\|, \quad x, y \in G. \end{aligned}$$

Евклидово пространство E — это линейное пространство (вещественное или комплексное) с заданным скалярным произведением $\{x, y\} \mapsto (x, y)$ (с заданным отображением множества $E \times E$ в числа соответственно вещественные или комплексные) такое, что

$$\begin{aligned} (x, y) &= \overline{(y, x)} \quad \text{для всех } x, y \in E, \\ (x + y, z) &= (x, z) + (y, z) \quad \text{для всех } x, y, z \in E, \\ (tx, y) &= t(x, y) \quad \text{для всех } x, y \in E \text{ и всех чисел } t, \\ (x, x) &\geq 0 \quad \text{для всех } x \in E, \quad \text{причем } x = 0 \iff (x, x) = 0. \end{aligned}$$

Если E — евклидово пространство, то формула $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$, $x \in E$, определяет норму на E . Таким образом, любое евклидово пространство может рассматриваться как нормированное. Векторы $x, y \in E$ называются *ортгогоналными*, если $(x, y) = 0$. Семейство ненулевых векторов $\{e_i, i \in I\} \subset E$ (где I — некоторое семейство индексов) называется *ортгогольной системой* в E , если e_i и e_j ортгогольны для любых $i \neq j, i, j \in I$. Ортгогольная система $\{e_i, i \in I\}$ в E называется *ортонормированной*, если $\|e_i\| = 1$ для всех $i \in I$. Ортгогольная система $\{e_i, i \in I\}$ в E называется *полной*, если любой вектор в E может быть с любой точностью приближен (в смысле нормы в E) конечными линейными комбинациями вида $\sum_i c_i e_i$, где c_i — некоторые числа.

Нормированное линейное пространство называется *полным* или *банаховым*, если в нем выполнен критерий Коши, т. е. если для любой последовательности $\{x_n, n \in \mathbb{N}\}$, $x_n \in G$, где \mathbb{N} — множество натуральных чисел, следующие условия равносильны:

а) существует $x_0 \in G$ такой, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x_0\| = 0$;

б) для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер $N \in \mathbb{N}$, что для всех $m, n > N$ выполняется соотношение $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$.

Полное евклидово пространство называется *гильбертовым пространством*. Ортгогольная система $\{e_i, i \in I\}$ в гильбертовом пространстве E полна тогда и только тогда, когда единственным вектором в E , ортгогольным всем векторам системы $\{e_i, i \in I\}$, является нулевой вектор. Если L — замкнутое линейное подпространство E , то множество L^\perp всех таких векторов $y \in E$, что $(x, y) = 0$ для всех $x \in L$, образует замкнутое линейное подпространство в E , обозначаемое через L^\perp и называемое *ортгогольным дополнением* к L . Любой вектор $x \in E$ может быть единственным образом представлен в виде суммы $x = y + z$, где $y \in L$ и $z \in L^\perp$. В частности, ортгогольное дополнение к L^\perp есть исходное подпространство L .

Пример 1. Линейное пространство $C[a, b]$ всех непрерывных функций на отрезке $[a, b]$ с нормой

$$\|f\|_\infty = \max_{x \in [a, b]} |f(x)|, \quad f \in C[a, b],$$

является банаховым пространством.

Пример 2. Линейное пространство $L_p[a, b]$, $1 \leq p < \infty$, всех (определенных почти всюду, причем $f_1 = f_2$ в $L_p[a, b]$, если $f_1 = f_2$ почти всюду) измеримых функций на отрезке $[a, b]$ с интегрируемой (по Лебегу) p -й степенью модуля и с нормой

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{1/p}, \quad f \in L_p[a, b],$$

является банаховым пространством.

Пример 3. Комплексное линейное пространство $L_2[a, b]$ всех измеримых функций на отрезке $[a, b]$ с интегрируемым по Лебегу квадратом модуля и со скалярным произведением

$$(f, g) = \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx, \quad f, g \in L_2[a, b],$$

является гильбертовым пространством.

Тригонометрическая система

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

где \mathbb{Z} — множество всех целых чисел, является примером полной ортонормированной системы в $H = L_2[-\pi, \pi]$. Ортгогольное дополнение L^\perp к подпространству L функций $f \in H$, равных нулю (почти всюду) при $x < 0$, состоит из функций $f \in H$, равных нулю (почти всюду) при $x > 0$.

15.1-3. Линейные операторы в нормированных пространствах

Определение 1. Пусть E и F — линейные пространства (оба вещественные или оба комплексные), $A: E \rightarrow F$ — линейный оператор. Множество

$$\ker A = \{x : x \in E, Ax = 0 \in F\}$$

называется *ядром** оператора A , а множество

$$\text{Im } A = \{y : y \in F, y = Ax \text{ для некоторого } x \in E\}$$

называется *образом оператора* A .

Ядро и образ линейного оператора $A: E \rightarrow F$ являются линейными подпространствами в E и F соответственно.

* Заметим, что ядро оператора является множеством, в то время как определенное ранее ядро (интегрального) оператора является функцией. Использование такой терминологии традиционно, а из контекста всегда можно понять, о каком из двух математических объектов идет речь.

Определение 2. Пусть E и F — нормированные линейные пространства (оба вещественные или оба комплексные). Линейный оператор $A: E \rightarrow F$ называется *непрерывным*, если

$$x_n \rightarrow x \text{ в } E \implies Ax_n \rightarrow Ax \text{ в } F,$$

и *ограниченным*, если существует такое неотрицательное число C , что

$$\|Ax\|_F \leq C\|x\|_E \text{ для всех } x \in E.$$

Теорема 1. Пусть E и F — нормированные линейные пространства (оба вещественные или оба комплексные). Линейный оператор $A: E \rightarrow F$ непрерывен тогда и только тогда, когда он ограничен.

Обозначим через $\mathcal{L}(E, F)$ множество всех непрерывных линейных операторов из E в F и положим $\mathcal{L}(E, E) = \mathcal{L}(E)$.

Определение 3. Пусть E и F — нормированные линейные пространства (оба вещественные или оба комплексные), и пусть $A \in \mathcal{L}(E, F)$. Число

$$\|A\| = \inf\{C, \|Ax\|_F \leq C\|x\|_E \text{ для всех } x \in E\}$$

называется *нормой линейного оператора* A .

Теорема 2. Пусть E и F — нормированные линейные пространства (оба вещественные или оба комплексные). Линейное пространство $\mathcal{L}(E, F)$ с нормой $A \mapsto \|A\|$, $A \in \mathcal{L}(E, F)$, является нормированным пространством. Это пространство полно (т. е. банахово) тогда и только тогда, когда F полно.

Определение 4. Пусть E — нормированное линейное пространство, вещественные или комплексное, и пусть F — поле вещественных или комплексных чисел соответственно. Банахово пространство $E^* = \mathcal{L}(E, F)$ с нормой $f \mapsto \|A\|$, $f \in E^* = \mathcal{L}(E, F)$, называется *пространством, сопряженным к E* .

Теорема 3. Пусть E и F — нормированные линейные пространства (оба вещественные или оба комплексные), и пусть $A \in \mathcal{L}(E, F)$. Для любого $f \in F^*$ формула $g(x) = f(Ax)$, $x \in E$, корректно определяет непрерывный линейный функционал g на E , и формула $A^*f = g$ или

$$(A^*f)(x) = f(Ax), \quad x \in E, \quad f \in F^*,$$

корректно определяет непрерывный линейный оператор $A^* \in \mathcal{L}(F^*, E^*)$ с нормой $\|A^*\| = \|A\|$.

Определение 5. Пусть E и F — нормированные линейные пространства (оба вещественные или оба комплексные), и пусть $A \in \mathcal{L}(E, F)$. Оператор $A^* \in \mathcal{L}(F^*, E^*)$, построенный в теореме 3, называется *сопряженным к A* .

Определение 6. Множество M в нормированном пространстве N называется *ограниченным*, если существует число C такое, что $\|x\| \leq C$ для любого $x \in M$.

Теорема 4 (принцип равномерной ограниченности). Пусть E — банахово пространство, F — нормированное линейное пространство (оба вещественные или оба комплексные), и пусть $M \subset \mathcal{L}(E, F)$. Множество M ограничено в нормированном пространстве $\mathcal{L}(E, F)$ (см. определение 3 и теорему 2) тогда и только тогда, когда для любого $x \in E$ существует число C_x такое, что $\|Ax\|_F \leq C_x$ для любого $A \in M$.

Теорема 5 (принцип открытости отображения). Пусть E и F — банаховы пространства (оба вещественные или оба комплексные). Если $A \in \mathcal{L}(E, F)$ отображает E на F , то A открыто, т. е. AU открыто в F для любого множества U , открытого в E .

Определение 7. Пусть E и F — банаховы пространства (оба вещественные или оба комплексные). Оператор $A \in \mathcal{L}(E, F)$ называется *обратимым*, если существует такой непрерывный линейный оператор $B \in \mathcal{L}(F, E)$, что $BA = 1_E$ и $AB = 1_F$. В этом случае для оператора B используется обозначение A^{-1} .

Следствие 1 (теорема Банаха об обратном операторе). Пусть E и F — банаховы пространства (оба вещественные или оба комплексные). Если $A \in \mathcal{L}(E, F)$ отображает E на F взаимно однозначно, то оператор A обратим (существует оператор $A^{-1} \in \mathcal{L}(F, E)$ в смысле определения 7).

15.1.4. Резольвента, спектр и корневые подпространства

Определение 1. Пусть E — вещественное или комплексное нормированное линейное пространство, и пусть 1_E — непрерывный линейный оператор в E , определенный формулой $1_E x = x$ для любого $x \in E$, тогда 1_E называется *единичным* или *тождественным оператором* в E . Пусть $A \in \mathcal{L}(E)$. *Резольвентным множеством* $\mathcal{R}(A)$ оператора A называется множество, образованное всеми такими числами μ , что оператор $A - \mu 1_E$ обратим в смысле определения 7 из п. 15.1-3, так что $(A - \mu 1_E)^{-1} \in \mathcal{L}(E)$. Операторнозначная функция

$$\mu \mapsto (A - \mu 1_E)^{-1}, \quad \mu \in \mathcal{R}(A),$$

принимая значения в $\mathcal{L}(E)$ (обозначим эту функцию через $R(\mu, A)$) называется *резольвентой оператора* A . Множество всех чисел, не принадлежащих резольвентному множеству оператора A , называется *спектром оператора* A и обозначается $\sigma(A)$. Таким образом, спектр — это множество всех скаляров μ , для которых оператор $A - \mu 1_E$ не является (непрерывно) обратимым. Иначе говоря, $\mu \in \sigma(A)$ тогда и только тогда, когда либо образ оператора $A - \mu 1_E$ не совпадает со всем пространством E , либо μ есть *собственное значение оператора* A (см. далее определение 2).

Теорема 1. Пусть E — банахово пространство, и пусть $A \in \mathcal{L}(E)$. Тогда $\sigma(A) = \sigma(A^*)$.

Теорема 2. Пусть E — комплексное банахово пространство. Спектр любого оператора $A \in \mathcal{L}(E)$ — непустое ограниченное замкнутое множество на комплексной плоскости \mathbb{C} .

Определение 2. Пусть E — нормированное линейное пространство, A — непрерывный линейный оператор в E . Число $\mu \in \sigma(A)$ называется *собственным значением (числом) оператора* A или *точкой дискретного спектра*, если $\ker(A - \mu 1_E) \neq \{0\}$. Если μ — ненулевое собственное значение оператора A , то $\lambda = 1/\mu$ называется *характеристическим значением (числом) этого оператора*.

Собственные значения оператора A являются точками спектра этого оператора, а множество всех собственных значений называется *дискретным спектром оператора* A .

Определение 3. Пусть E — нормированное линейное пространство, и пусть $A \in \mathcal{L}(E)$. Линейное подпространство

$$E^\mu = E^\mu(A) = \ker(A - \mu 1_E)$$

(оно всегда замкнуто в E) называется *собственным подпространством оператора* A , отвечающим собственному значению μ . Объединение R^μ неубывающего семейства линейных подпространств $E_n^\mu = E^\mu(A^n) = \ker((A - \mu 1_E)^n)$, $n \in \mathbb{N}$, называется *корневым подпространством оператора* A , отвечающим собственному значению μ .

Теорема 3. Пусть E — нормированное линейное пространство, $A \in \mathcal{L}(E)$, $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ — семейство попарно различных собственных значений оператора A , $x_k \in R^{\mu_k}$, $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ — ненулевые элементы соответствующих корневым подпространств. Тогда семейство $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ линейно независимо в E .

15.1-5. Компактные линейные операторы и их свойства

Определение 1. Пусть E и F — нормированные линейные пространства (оба вещественные или оба комплексные). Линейный оператор $A : E \rightarrow F$ называется *компактным*, если образ AU любого ограниченного множества $U \subset E$ относительно компактен в F в обычном смысле, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ существует конечный набор элементов $y_1, y_2, \dots, y_n \in F$ таких, что для любого $y \in AU$ найдется такой y_k , что $\|y - y_k\| < \varepsilon$.

Всякий компактный оператор непрерывен. Однако в бесконечномерном нормированном пространстве E единичный шар не является относительно компактным множеством, поэтому не всякий непрерывный линейный оператор компактен. В частности, единичный оператор 1_E не компактен. Конечномерный линейный оператор, т. е. линейный оператор, образ которого является конечномерным линейным пространством, компактен тогда и только тогда, когда он непрерывен. Многие интегральные операторы компактны (см. разд. 15.3).

Обозначим через $\mathcal{K}(E, F)$ множество всех компактных линейных операторов из E в F и положим $\mathcal{K}(E, E) = \mathcal{K}(E)$.

Теорема 1. Пусть E и F — нормированные линейные пространства (либо оба вещественные, либо оба комплексные), и пусть $A \in \mathcal{L}(E, F)$. Условия $A \in \mathcal{K}(E, F)$ и $A^* \in \mathcal{L}(F^*, E^*)$ равносильны.

Теорема 2 (алгебраические свойства компактных операторов). Пусть E, F, E_1, F_1 — нормированные линейные пространства (либо все вещественные, либо все комплексные), A и $B \in \mathcal{K}(E, F)$, $T \in \mathcal{L}(E_1, E)$, $S \in \mathcal{L}(F, F_1)$. Тогда $A + B \in \mathcal{K}(E, F)$ и $tA \in \mathcal{K}(E, F)$, где t — любое число, $AT \in \mathcal{K}(E_1, F)$ и $SA \in \mathcal{K}(E, F_1)$.

Теорема 3 (альтернатива Фредгольма). Пусть E — банахово пространство, и пусть $A \in \mathcal{L}(E)$. Следующие условия равносильны.

1. Оператор A можно представить в виде суммы $A = B + C$, где $B \in \mathcal{K}(E)$ имеет непрерывный обратный оператор, а $C \in \mathcal{K}(E)$.

2. Уравнения

$$Ax = y, \quad x, y \in E, \quad (4)$$

$$A^*g = f, \quad f, g \in E^*, \quad (5)$$

$$Ax = 0, \quad x \in E, \quad (6)$$

$$A^*g = 0, \quad g \in E^*, \quad (7)$$

обладают следующими свойствами: либо уравнения (4) и (5) разрешимы при любых $y \in E$ и $f \in E^*$ соответственно, и тогда их решения единственны, либо однородные уравнения (6) и (7) имеют конечномерные пространства решений равной (ненулевой) размерности, и если x_1, x_2, \dots, x_n и g_1, g_2, \dots, g_n — базисы в этих пространствах решений соответственно, то уравнения (4) или (5) соответственно разрешимы тогда и только тогда, когда $g_k(y) = 0$ ($k = 1, \dots, n$) или $f(x_k) = 0$ ($k = 1, \dots, n$). При этом общие решения уравнений (4) и (5) имеют вид

$$x = x_0 + \sum_{k=1}^n c_k x_k \quad \text{и} \quad g = g_0 + \sum_{k=1}^n c_k g_k,$$

где x_0 и g_0 — некоторые решения уравнений (4) и (5) соответственно, а c_1, c_2, \dots, c_n — произвольные числа.

Теорема 4. Пусть E и F — нормированные линейные пространства (либо оба вещественные, либо оба комплексные), $A_n \in \mathcal{K}(E, F)$, где $n \in \mathbb{N}$, $A \in \mathcal{L}(E, F)$ и $\|A_n - A\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Тогда $A \in \mathcal{K}(E, F)$.

Определение 2. Пусть E — банахово пространство. Замкнутое линейное подпространство F пространства E называется *дополняемым в E* , если в E существует такое замкнутое линейное подпространство G (*дополняющее подпространство*), что $F \cap G = \{0\}$ и любой элемент $x \in E$ может быть представлен в виде суммы $x = y + z$, где $y \in F$ и $z \in G$.

Теорема 5. Пусть E — банахово пространство, F — дополняемое линейное подпространство E . Размерность $\dim G$ не зависит от выбора дополняющего подпространства G и равна верхней грани числа векторов в семействах $\{e_1, e_2, \dots, e_n\} \subset E$ таких, что $\sum_{k=1}^n c_n e_n \notin F$, если набор скаляров $\{c_1, c_2, \dots, c_n\}$ содержит хотя бы одно число, отличное от нуля.

Определение 3. Пусть E — банахово пространство, F — дополняемое линейное подпространство E . Размерность дополняющего подпространства, которая не зависит от выбора этого подпространства по теореме 5, называется *коразмерностью подпространства F* и обозначается $\text{codim } F$.

Теорема 6 (спектральные свойства компактных операторов). Пусть E — бесконечномерное банахово пространство, и пусть $A \in \mathcal{K}(E)$.

1. Число $0 \in \sigma(A) = \sigma(A^*)$.

2. Если $\mu \neq 0$, то образ оператора $A - \mu 1_E$ замкнут в E , а образ оператора $A^* - \mu 1_{E^*}$ замкнут в E^* . Эти подпространства $\text{Im}(A - \mu 1_E)$ и $\text{Im}(A^* - \mu 1_{E^*})$ дополняемы в E и E^* соответственно, и четыре числа $\dim[\ker(A - \mu 1_E)]$, $\text{codim}[\text{Im}(A - \mu 1_E)]$, $\dim[\ker(A^* - \mu 1_{E^*})]$ и $\text{codim}[\text{Im}(A^* - \mu 1_{E^*})]$ конечны и равны между собой.

3. Если $\mu \neq 0$ и $\mu \in \sigma(A)$, то μ — собственное значение операторов A и A^* . Собственные и корневые подпространства операторов A и A^* , отвечающие μ , конечномерны.

4. Множество $\sigma(A)$ не более чем счетно и не имеет ненулевых предельных точек. Ненулевые точки множества $\sigma(A)$ являются полюсами резольвенты $R(\mu, A)$ оператора A .

⊙ **Литература:** F. Smithies (1958), Г. Е. Шилов (1961), Н. Я. Виленкин, Е. А. Горин и др. (1964), Н. И. Ахиезер, И. М. Глазман (1966), М. А. Красносельский, П. П. Забрейко и др. (1966), К. Иосида (1967), М. А. Красносельский, Г. М. Вайникко и др. (1969), Р. Эдвардс (1969), Н. Данфорд, Дж. Шварц (1962, 1966, 1974), У. Рудин (1975), А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин (1976), Л. В. Канторович, Г. П. Акилов (1977), Ф. Рисс, Б. Сёкефальви-Надь (1979), А. В. Балакришнан (1980), В. А. Треногин (1980), Л. А. Люстерник, В. И. Соболев (1982), М. Рид, Б. Саймон (1977, 1978, 1982), Р. Рихтмайер (1982), В. Б. Коротков (1983), S. G. Mikhlin, S. Prössdorf (1986), S. Prössdorf, B. Silbermann (1991).

15.2. Линейные операторы в евклидовых пространствах

15.2-1. Самосопряженные операторы

Теорема 1. Пусть E — гильбертово пространство. Для любого $f \in E^*$ существует единственный вектор $\tilde{f} \in E$ такой, что $f(x) = (x, \tilde{f})$ для всех $x \in E$, и $\|f\|_{E^*} = \|\tilde{f}\|_E$. Обратно, для любого $y \in E$, формула $\tilde{y}(x) = (x, y)$ определяет непрерывный линейный функционал \tilde{y} на E .

Теорема 2. Пусть E и F — гильбертовы пространства (оба вещественные или оба комплексные), и пусть $A \in \mathcal{L}(E, F)$. Для любого $y \in F$, формула $g(x) = (Ax, y)_F$, $x \in E$, корректно определяет непрерывный линейный функционал g на E . Пусть $z = \tilde{g} \in E$ (см. теорему 1). Формула $A^*y = z$, или

$$(x, A^*y)_E = (Ax, y)_F, \quad x \in E, \quad y \in F,$$

корректно определяет непрерывный линейный оператор $A^* \in \mathcal{L}(F, E)$ с нормой $\|A^*\| = \|A\|$.

Определение 1. Пусть E и F — гильбертовы пространства (оба вещественные или оба комплексные), и пусть $A \in \mathcal{L}(E, F)$. Оператор $A^* \in \mathcal{L}(F, E)$, построенный в теореме 2, называется (евклидово) сопряженным к A .

Определение 2. Пусть E и F — гильбертовы пространства (оба вещественные или оба комплексные), и пусть $U \in \mathcal{L}(E, F)$. Оператор U называется унитарным, если U обратим (в смысле определения 7 из п. 15.1-3) и $U^* = U^{-1}$. Оператор $A \in \mathcal{L}(E)$ называется самосопряженным, если $A^* = A$.

Пример 1. Пусть $L_2(\mathbb{R})$ — гильбертово пространство всех определенных почти всюду измеримых функций на $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ с интегрируемым по Лебегу квадратом модуля и со скалярным произведением

$$(f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)} dx, \quad f, g \in L_2(\mathbb{R}).$$

Формула

$$\tilde{f}(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iux} dx, \quad f \in L_2(\mathbb{R}),$$

где интеграл понимается в смысле главного значения в $L_2(\mathbb{R})$, т. е. как элемент $\tilde{f} \in L_2(\mathbb{R})$, удовлетворяющий условию $\|\tilde{f} - \tilde{f}_A\| \rightarrow 0$ при $A \rightarrow \infty$, где положено

$$\tilde{f}_A(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-A}^{+A} f(x)e^{-iux} dx,$$

для всех $f \in L_2(\mathbb{R})$, определяет унитарный оператор $(\mathcal{F}f) = \tilde{f}$, $\tilde{f} \in L_2(\mathbb{R})$, называемый оператором Фурье–Планишереля. Обратный оператор определяется формулой

$$f(x) = (\mathcal{F}^{-1}\tilde{f})(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(u)e^{iux} du, \quad f \in L_2(\mathbb{R}),$$

где интеграл также понимается в смысле главного значения в $L_2(\mathbb{R})$.

Теорема 3. Пусть E — гильбертово пространство, и пусть $U \in \mathcal{L}(E)$ унитарен, а $A \in \mathcal{L}(E)$ самосопряжен.

1. Множество $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$, а $\sigma(U) \subset \mathbb{T}$, где \mathbb{T} — единичная окружность на комплексной плоскости.

2. Если μ — собственное значение оператора U (или оператора A), то соответствующее собственное подпространство $E^\mu(U)$ (или $E^\mu(A)$) совпадает с корневым подпространством.

3. Если μ_1 и μ_2 — собственные значения оператора U или A и $\mu_1 \neq \mu_2$, то соответствующие собственные подпространства E^{μ_1} и E^{μ_2} ортогональны, т. е. $(x, y) = 0$ для любых $x \in E^{\mu_1}$ и $y \in E^{\mu_2}$.

15.2-2. Самосопряженные компактные операторы

Теорема 1. Пусть E — гильбертово пространство, и пусть $A \in \mathcal{K}(E)$ самосопряжен. Тогда справедливы все утверждения теоремы 6 из п. 15.1-5 и теоремы 3 из п. 15.2-1. Кроме того, если $\{\mu_i\}$ — семейство всех ненулевых собственных значений оператора A и $\{e_k^{\mu_i}\}$ ($k = 1, 2, \dots, \dim[E^{\mu_i}(A)]$) — ортонормированный базис в конечномерном собственном подпространстве $E^{\mu_i}(A) = \ker(A - \mu_i 1_E)$, а $\{e_k^0\}$ ($k = 1, 2, \dots, \dim[E^0(A)]$) — полная ортонормированная система в (возможно, нулевом или, напротив, бесконечномерном) собственном подпространстве $E^0(A) = \ker(A)$, то объединение всех этих ортонормированных систем дает полную ортонормированную систему в E , и если $x \in E$ и $x = \sum_{\mu \in \{\mu_i\} \cup \{0\}} \sum_k c_{k,\mu} e_k^\mu$, то $Ax = \sum_{\mu \in \{\mu_i\}} \sum_k \mu c_{k,\mu} e_k^\mu$, где $i \in I$.

Определение 1. Пусть E — гильбертово пространство, и пусть $A \in \mathcal{L}(E)$. Оператор A называется оператором Гильберта–Шмидта, если для некоторой полной ортонормированной системы $\{e_i\}$ в E ряд из квадратов норм $\sum_i \|Ae_i\|^2$ сходится.

Теорема 2. Оператор Гильберта–Шмидта является компактным оператором, у которого ряд из квадратов модулей собственных чисел является сходящимся.

Теорема 3. Пусть E — гильбертово пространство. Любой оператор $A \in \mathcal{K}(E)$ может быть представлен в виде

$$Ax = \sum_n s_n(x, e_n)f_n, \quad x \in E, \quad (1)$$

где $\{e_n\}$ и $\{f_n\}$ — некоторые ортонормированные системы в E , а $\{s_n\}$ — невозрастающая последовательность неотрицательных чисел, стремящаяся к нулю. Обратно, линейный оператор A в E , определенный формулой (1) для некоторых ортонормированных систем $\{e_n\}$ и $\{f_n\}$ в E

и некоторой невозрастающей последовательности $\{s_n\}$ неотрицательных чисел, стремящейся к нулю, компактен. Этот оператор является оператором Гильберта–Шмидта тогда и только тогда, когда ряд $\sum_n \|s_n\|^2$ сходится.

Определение 2. Пусть E — гильбертово пространство, и пусть $A \in \mathcal{L}(E)$. Оператор A , определенный формулой (1) для некоторых ортонормированных систем $\{e_n\}$ и $\{f_n\}$ в E и некоторой невозрастающей последовательности $\{s_n\}$ неотрицательных чисел, стремящейся к нулю, называется *ядерным*, или *оператором со следом*, если ряд $\sum_n |s_n|$ сходится.

Определение 3. Пусть E — гильбертово пространство, и пусть $A \in \mathcal{L}(E)$ — ядерный оператор, определенный формулой (1) для некоторых ортонормированных систем $\{e_n\}$ и $\{f_n\}$ в E и некоторой невозрастающей последовательности $\{s_n\}$ неотрицательных чисел, для которой ряд $\sum_n |s_n|$ сходится.

Число $\text{tr}(A)$, определяемое как сумма абсолютно сходящегося ряда $\sum_n s_n(f_n, e_n)$, называется *следом* ядерного оператора A .

Теорема 4. Пусть E — гильбертово пространство, и пусть $A \in \mathcal{L}(E)$ — ядерный оператор, определенный формулой (1) для некоторых ортонормированных систем $\{e_n\}$ и $\{f_n\}$ в E и некоторой невозрастающей последовательности $\{s_n\}$ неотрицательных чисел, для которой ряд $\sum_n |s_n|$ сходится. Формула

$$\ln(1_E - \mu A) = - \sum_{n=1}^{\infty} \mu^n A^n / n, \quad |\mu| < 1/\|A\|,$$

корректно определяет оператор $\ln(1_E - \mu A) \in \mathcal{L}(E)$ как предел по норме частичных сумм ряда в правой части формулы, и этот оператор является ядерным.

Определение 4. Пусть E — гильбертово пространство, и пусть $A \in \mathcal{L}(E)$ — ядерный оператор. Функция

$$\mu \mapsto \det(1_E - \mu A) = \text{tr}(\ln(1_E - \mu A)), \quad |\mu| < 1/\|A\|,$$

корректно определенная по теореме 4, называется *характеристическим определителем* ядерного оператора A .

Теорема 5. Пусть E — гильбертово пространство, и пусть $A \in \mathcal{L}(E)$ — ядерный оператор. Резольвента оператора A выражается через его характеристический определитель по формуле

$$R(\mu, A) = F_A(\mu^{-1}) \det(1_E - \mu^{-1} A)^{-1}, \quad |\mu| > \|A\|,$$

где F_A — некоторая целая операторнозначная функция, определяемая оператором A .

© *Литература:* F. Smithies (1958), Г. Е. Шилов (1961), М. А. Красносельский, П. П. Забрейко и др. (1966), К. Иосида (1967), М. А. Красносельский, Г. М. Вайникко и др. (1969), Р. Эдвардс (1969), Н. Данфорд, Дж. Шварц (1962, 1966, 1974), У. Рудин (1975), А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин (1976), Л. В. Канторович, Г. П. Акилов (1977), Ф. Рисс, Б. Сёкефальви-Надь (1979), А. В. Балакришнан (1980), В. А. Треногин (1980), Л. А. Люстерник, В. И. Соболев (1982), Р. Рихтмайер (1982).

15.3. Интегральные операторы. Условия непрерывности и компактности

15.3-1. Условия непрерывности интегральных операторов

Теория компактных линейных операторов развивалась во многом в связи с практической необходимостью решения интегральных уравнений, в частности, интегральных уравнений Фредгольма и уравнений со слабой особенностью (см. главы 4 и 5), а также задач, приводящих к таким интегральным уравнениям. Соответствующие линейные операторы, возникающие в интегральных уравнениях, отображают одно пространство функций в другое. Например, если $K(x, t)$ — некоторое ядро интегрального оператора на $S = [a, b] \times [a, b]$, а E и F — некоторые векторные пространства функций, и если функция

$$f(x) = \int_a^b K(x, t)y(t) dt$$

является элементом пространства F для любого $y \in E$, где интеграл понимается в обычном лебеговом смысле, то формула

$$(A_K y)(x) = \int_a^b K(x, t)y(t) dt \in F, \quad y \in E, \quad (1)$$

определяет линейный оператор $A_K : E \rightarrow F$. Всюду в дальнейшем будем считать, что функция $K(x, t)$ измерима как функция двух переменных.

Теорема 1 (достаточные условия непрерывности).

1. Пусть $0 < \alpha < \infty$, $0 < \beta < \infty$,

$$\left(\int_a^b |K(x, t)|^\alpha dt \right)^{1/\alpha} \leq M_1 \quad (2)$$

для почти всех $x \in [a, b]$, и пусть

$$\left(\int_a^b |K(x, t)|^\beta dt \right)^{1/\beta} \leq M_2 \quad (3)$$

для почти всех $t \in [a, b]$. Если $\alpha/p - \beta/q = \alpha - 1$, $1 \leq p \leq q \leq \infty$, то формула (1) определяет оператор $A_K \in \mathcal{L}(L_p[a, b], L_q[a, b])$, $\|A_K\| \leq M_1^{1-\beta/q} M_2^{\beta/q}$. Кроме того, формула (1) определяет оператор $A_K \in \mathcal{L}(L_p[a, b], L_q[a, b])$, если существует такое число $q_1 \geq q$, что $\alpha/p - \beta/q_1 = \alpha - 1$, $1 \leq p \leq q_1 \leq \infty$.

2. Пусть $1 \leq \alpha \leq \infty$, пусть неравенство (2) выполнено для почти всех $x \in [a, b]$, и пусть $1/p \leq 1 - 1/a$, где $0 < p \leq \infty$ и $0 < q \leq \infty$. Тогда формула (1) определяет оператор $A_K \in \mathcal{L}(L_p[a, b], L_q[a, b])$, $\|A_K\| \leq M_1(b-a)^{1-1/\alpha-1/p+1/q}$.

3. Пусть $1 \leq \beta \leq \infty$, пусть неравенство (3) выполнено для почти всех $y \in [a, b]$, и пусть $0 < q \leq b$. Тогда формула (1) определяет оператор $A_K \in \mathcal{L}(L_1[a, b], L_q[a, b])$, $\|A_K\| \leq M_2(b-a)^{1/q-1/\beta}$.

Следствие 1 (для интегральных операторов с полярными ядрами). Пусть $K(x, t) = \frac{L(x, t)}{|x - t|^\gamma}$, где $L(x, t)$ — ограниченная функция на $S = [a, b] \times [a, b]$, непрерывная при $x \neq t$, $0 \leq \gamma < 1$.

1. Если $1 < p \leq \infty$ и $0 < q < \infty$, и если $1/p - 1/q < 1 - \gamma$, то формула (1) определяет оператор $A_K \in \mathcal{L}(L_p[a, b], L_q[a, b])$.

2. Если $0 < q < 1/\gamma$, то формула (1) определяет непрерывный линейный оператор A_K из $L_1[a, b]$ в $L_q[a, b]$.

15.3.2. Условия компактности интегральных операторов

Теорема 1 (достаточные условия компактности).

1. Пусть функция $K(x, t)$ непрерывна на $S = [a, b] \times [a, b]$. Тогда формула (1) определяет компактный оператор из $C[a, b]$ в $C[a, b]$, из $L_p[a, b]$ в $C[a, b]$, из $C[a, b]$ в $L_q[a, b]$, и из $L_p[a, b]$ в $L_q[a, b]$, если $1 \leq p \leq \infty$ и $0 \leq q \leq \infty$.

2. Пусть $1 \leq r \leq \infty$ и интеграл $\int_a^b \int_a^b |K(x, t)|^r dx dt$ существует (т. е. конечен). Если $r' \leq p \leq \infty$, $0 < q \leq r$, где r' определен формулой $r^{-1} + r'^{-1} = 1$ ($r \in [1, \infty]$, $\infty^{-1} = 0$), то $A_K \in \mathcal{K}(L_p[a, b], L_q[a, b])$. В частности, если интеграл $\int_a^b \int_a^b |K(x, t)|^2 dx dt$ существует, то $A_K \in \mathcal{K}(L_2[a, b])$.

3. Пусть $0 < \alpha \leq \infty$, $0 < \beta < \infty$, неравенства (2) и (3) выполнены для почти всех $x \in [a, b]$ и $y \in [a, b]$ соответственно и существует такое $q_1 \geq q$, что $\alpha/p - \beta/q_1 < \alpha - 1$, $1 < p \leq q_1 < \infty$, $b < q_1$. Тогда формула (1) определяет оператор $A_K \in \mathcal{K}(L_p[a, b], L_q[a, b])$.

4. Пусть $0 < \alpha \leq \infty$ и неравенство (2) выполнено для почти всех $x \in [a, b]$. Пусть $0 < p \leq q$, $0 < q \leq \infty$ и $1/p < 1 - 1/a$. Тогда формула (1) определяет оператор $A_K \in \mathcal{K}(L_p[a, b], L_q[a, b])$.

5. Будем говорить, что функция $K(x, t)$ квазиравностепенно непрерывна по x в каждой точке $x \in [a, b]$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое множество S_x меры меньшей ε и такая окрестность U точки x , что

$$|K(z, t) - K(x, t)| < \varepsilon \quad \text{для всех } (z, t) \in U \times ([a, b] \setminus S_x).$$

Пусть $0 < \alpha$, неравенство (2) выполнено для почти всех $x \in [a, b]$ и функция $K(x, t)$ квазиравностепенно непрерывна по x в каждой точке $x \in [a, b]$. Если $0 < p \leq \infty$ и $1/p < 1 - 1/a$, то формула (1) определяет оператор $A_K \in \mathcal{K}(L_p[a, b], C[a, b])$.

6. Оператор $A \in \mathcal{L}(C[a, b], C[c, d])$ компактен тогда и только тогда, когда он имеет вид $A = A_K$, где A_K определен формулой (1) для некоторой функции $K(x, t)$ на $[a, b] \times [c, d]$, удовлетворяющей следующим условиям:

а) функция $t \mapsto K(x, t)$, $t \in [c, d]$, интегрируема для любого $x \in [a, b]$;

- б) функция $x \mapsto \int_B K(x, t) dt$, $x \in [a, b]$, непрерывна для каждого борелевского подмножества B в $[c, d]$;
- в) величина $\sup_{x \in [a, b]} \int_c^d |K(x, t)| dt$ конечна;
- г) предельное соотношение $\lim_{x \rightarrow x_0} \int_c^d |K(x, t) - K(x_0, t)| dt = 0$ выполняется для каждого $x_0 \in [a, b]$.

Следствие 1 (для интегральных операторов с полярными ядрами). Пусть $K(x, t) = \frac{L(x, t)}{|x - t|^\gamma}$, где $L(x, t)$ — ограниченная функция на $S = [a, b] \times [a, b]$, непрерывная при $x \neq t$, а $0 \leq \gamma < 1$. Если $p > 1/(1 - \gamma)$, то формула (1) определяет оператор $A_K \in \mathcal{K}(L_p[a, b], L_q[a, b])$.

Теорема 2 (спектральные свойства интегральных операторов).

1. Пусть функция $K(x, t)$ измерима (как функция двух переменных) на $S = [a, b] \times [a, b]$. Кроме того, пусть

$$K(x, t) = \overline{K(t, x)} \quad \text{для всех точек } (x, t) \in S \quad (1)$$

и пусть выполняются соотношения

$$\int_a^b |K(x, t)|^2 dt < \infty \quad \text{для всех } x \in [a, b] \quad (2)$$

и

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \int_a^b |K(x, t) - K(x_0, t)|^2 dt = 0 \quad \text{для всех } x, x_0 \in [a, b]. \quad (3)$$

Тогда линейный оператор A_K , определяемый формулой (1) в евклидовом пространстве $C_2[a, b]$, образованном непрерывными на $[a, b]$ функциями со скалярным произведением из $L_2[a, b]$, компактен, т. е. $A_K \in \mathcal{K}(C_2[a, b])$. Пусть μ_j — последовательность всех попарно различных ненулевых собственных значений оператора A_K , пусть n_k — последовательность, определенная равенствами $n_0 = 0$ и $n_k - n_{k-1} = \dim(E^{\mu_k})$ при $k > 0$, пусть $\lambda_i = 1/\mu_k$ для $n_{k-1} < i \leq n_k$ при всех $k = 1, 2, \dots$ (так что λ_i — последовательность всех характеристических значений оператора A_K , каждое из которых повторено столько раз, какова его кратность), и пусть $\{e_i\}$, $n_{k-1} < i \leq n_k$, $k = 1, 2, \dots$, — некоторый ортонормированный базис в спектральном подпространстве $E^{\mu_k}(A)$. Если число λ не совпадает ни с одним из характеристических значений оператора A_K , то для каждой непрерывной функции $f(x)$ уравнение

$$y - \lambda A_K y = f \quad \text{или} \quad y(x) - \lambda \int_a^b K(x, t) y(t) dt = f(x) \quad (4)$$

(см. теорему 3 из п. 15.1-5) имеет единственное непрерывное решение $y(x)$, определяемое формулой

$$y(x) = f(x) + \lambda \sum_{i>0} \frac{(f, e_i)}{(\lambda_i - \lambda)} e_i(x),$$

где ряд в правой части сходится абсолютно и равномерно по $x \in [a, b]$. Кроме того,

$$\sum_{i>0} \frac{1}{\lambda_i^2} \leq \int_a^b \int_a^b |K(x, t)|^2 dx dt.$$

2. Пусть выполнены условия первого пункта теоремы, и пусть функция $x \mapsto K(x, t)$ непрерывна по x при каждом фиксированном t . Тогда ряд

$$\sum_{i>0} \frac{|e_i(x)|^2}{\lambda_i^2}$$

сходится равномерно, и его сумма равна

$$\int_a^b |K(x, t)|^2 dt.$$

3. Пусть выполнены условия второго пункта теоремы. Если число λ не совпадает ни с одним из характеристических значений λ_i , то ряд

$$R(x, t; \lambda) = \sum_{i>0} \frac{e_i(x) \overline{e_i(t)}}{\lambda_i - \lambda}$$

сходится абсолютно и равномерно по совокупности переменных $x, t \in [a, b]$. Кроме того, решение $y(x)$ уравнения (4) имеет вид

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b R(x, t; \lambda) f(t) dt.$$

● *Литература:* F. Smithies (1958), Г. Е. Шилов (1961), М. А. Красносельский, П. П. Забрейко и др. (1966), М. А. Красносельский, Г. М. Вайникко и др. (1969), Р. Эдвардс (1969), Н. Данфорд, Дж. Шварц (1962, 1966, 1974), А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин (1976), Л. В. Канторович, Г. П. Акилов (1977), Ф. Рисс, Б. Сёкефальви-Надь (1979), А. В. Балакришнан (1980), В. А. Треногин (1980), Л. А. Люстерник, В. И. Соболев (1982), Р. Рихтмайер (1982), В. Б. Коротков (1983).

15.4. Сингулярные интегральные операторы

15.4.1. Сингулярные операторы Гильберта и Коши

Интегральный оператор, в котором подынтегральное выражение, не является функцией, интегрируемой по Лебегу, и интеграл понимается в смысле главного значения, называется *сингулярным интегральным оператором*. Среди других сингулярных интегральных операторов чаще всего встречаются сингулярные интегральные операторы с ядрами Коши и Гильберта (см. главы 6 и 7).

Определение 1. Для суммируемой функции f на $[0, 2\pi]$, *сингулярный интеграл Гильберта* или *преобразование Гильберта* функции f на окружности определяется как несобственный интеграл

$$(Hf)(x) = \tilde{f}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{ctg}\left(\frac{\xi - x}{2}\right) f(\xi) d\xi, \quad (1)$$

понимаемый в смысле главного значения по Коши.

Теорема 1. Для любой суммируемой функции f на $[0, 2\pi]$ интеграл (1) существует почти всюду, и отображение $f \mapsto Hf$, $f \in L_1[0, 2\pi]$, сохраняет класс функций, удовлетворяющих условию Гёльдера с показателем α , $0 < \alpha < 1$. Для любого p , $0 < p < 1$, существует такое $k_p > 0$, что для любой ограниченной измеримой функции f выполняется соотношение

$$\|Hf\|_{L_p} \leq k_p \|f\|_{L_1},$$

а также для некоторых $C, C_1 > 0$ и для любой ограниченной измеримой функции f выполняется неравенство

$$\|Hf\|_{L_1} \leq C \int_0^{2\pi} |f| \ln^+ |f| dx + C_1,$$

где $\ln^+ t = \ln \max(1, t)$, $t > 0$. Кроме того, преобразование Гильберта (1) переводит в себя класс $L_p[0, 2\pi]$, $1 < p < \infty$, причем $H \in \mathcal{L}(L_p[0, 2\pi])$. При этом ядро $\ker H$ оператора H совпадает с подпространством постоянных функций, а на дополнительном подпространстве $L_p^0 \subset L_p$ функций f , интеграл которых по $[0, 2\pi]$ равен нулю, имеет место формула обращения

$$f = -H(Hf), \quad f \in L_p[0, 2\pi],$$

и соотношение

$$\|Hf\|_{L_2} = \|f\|_{L_2}.$$

Функция Hf называется *сопряженной* к f .

Определение 2. Если $f \in L_2(\mathbb{R})$, то сингулярный интеграл Гильберта, или преобразование Гильберта функции f на прямой определяется как несобственный интеграл

$$(\mathcal{H}f)(x) = \tilde{f}(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{t - x} dt, \quad (2)$$

понимаемый в смысле главного значения по Коши по отношению к сходимости в среднем квадратичном (он существует также почти всюду в смысле главного значения).

Теорема 2. $\|\mathcal{H}f\|_{L_2} = \|f\|_{L_2}$ и $\mathcal{H}(\mathcal{H}f) = -f$ для всех $f \in L_2(\mathbb{R})$.

Определение 3. Пусть L — замкнутый или незамкнутый гладкий контур на комплексной плоскости и пусть τ — комплексная координата на L , а $f(\tau)$ — непрерывная функция точки на контуре. Сингулярный интеграл

$$\Phi(z) = \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{f(\tau)}{\tau - z} d\tau, \quad (3)$$

понимаемый в смысле главного значения по Коши соответствующего криволинейного интеграла, если точка z находится на контуре L , называется *интегралом типа Коши с плотностью f* , а функция $\frac{1}{\tau - z}$ называется *ядром Коши*.

Частным случаем преобразования (3) является вариант преобразования Гильберта, связанный с единичной окружностью и определяемый формулой

$$(Hf)(e^{it}) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i\tau}}{e^{i\tau} - e^{it}} f(e^{i\tau}) d\tau, \quad f \in E = L_2[-\pi, \pi].$$

Отметим, что оператор $P = (1_E + H)/2$ в $E = L_2[0, 2\pi]$ является ортогональным проектором на пространство Харди H_2 .

15.4.2. Пространства ВМО и VMO

Определение 1. Комплекснозначная локально интегрируемая функция $f(x)$ на \mathbb{R}^n называется элементом пространства ВМО (bounded mean oscillation, ограниченное среднее колебание), если

$$\|f\|_{\text{ВМО}} = \sup_Q \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(x) - m_Q(f)| dx < \infty, \quad (4)$$

где верхняя грань берется по всем кубам Q в \mathbb{R}^n , $|Q|$ обозначает объем куба Q , и

$$m_Q(f) = \frac{1}{|Q|} \int_Q f(x) dx. \quad (5)$$

Пространство таких функций, рассматриваемых по модулю постоянных функций, является банаховым пространством с нормой, определяемой выражением в левой части неравенства (4).

Обозначим через VMO (vanishing mean oscillation, исчезающее среднее колебание) если замыкание семейства $\text{UC} \cap \text{ВМО}$ в ВМО по норме (4), где UC — семейство всех равномерно непрерывных функций на \mathbb{R} .

Символом QC обозначим (quasi-continuous, квазинепрерывность) пересечение $\text{ВМО} \cap L_\infty$.

Пространства ВМО, VMO и QC на окружности определяются аналогично.

15.4.3. Условия ограниченности и компактности сингулярных операторов

Пусть M_f — оператор умножения на функцию f в E . Пусть D — дифференциальный оператор в E с областью определения \mathcal{D} , состоящей из всех функций f таких, что f абсолютно непрерывна, а ее производная $df(e^{it})/dt$ квадратично интегрируема на $[0, 2\pi]$. Прямое вычисление показывает, что коммутатор $[H, M_f]$ в $E = L_p[0, 2\pi]$, $0 < p < \infty$, является сингулярным интегральным оператором вида

$$((HM_f - M_fH)g)(e^{it}) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(e^{i\tau}) - f(e^{it})}{e^{i\tau} - e^{it}} e^{i\tau} g(e^{i\tau}) d\tau, \quad g \in E,$$

а оператор $D[H, M_f]$ принимает вид

$$D((HM_f - M_fH)g)(e^{it}) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_f(e^{i\tau}, e^{it}) g(e^{i\tau}) d\tau,$$

где

$$K_f(e^{i\tau}, e^{it}) = \frac{ie^{i\tau} f'(e^{it})}{e^{i\tau} - e^{it}} - \frac{(ie^{i\tau})(f(e^{i\tau}) - f(e^{it}))(ie^{it})}{(e^{i\tau} - e^{it})^2}.$$

Теорема 1. Справедливы следующие утверждения:

1. Для любого p , $1 < p < \infty$, существует такая положительная постоянная C_p , что

$$\|HM_f - M_fH\|_{L_p} \leq C_p \|f\|_{\text{ВМО}}.$$

Оператор $HM_f - M_fH$ компактен в некотором пространстве L_p , $1 < p < \infty$, тогда и только тогда, когда он компактен во всех пространствах L_p , $1 < p < \infty$, или тогда и только тогда, когда $f \in \text{QC}$ (см. определение (1) из п. 15.4.2).

2. Пусть f — липшицева функция на окружности $\mathbb{T} = \{e^{it}, t \in \mathbb{R}\}$, и пусть B — замыкание оператора $D(HM_f - M_fH)$ с областью определения \mathcal{D} . Тогда оператор B всюду определен на $E = L_2[0, 2\pi]$ и непрерывен, причем существует $C > 0$ такое, что

$$\|B\| \leq C \|f'\|_{\text{ВМО}}.$$

Если, кроме того, $f' \in \text{ВМО}$, то оператор B компактен в E .

3. Пусть f — липшицева функция на прямой \mathbb{R} , пусть

$$K_f(x, t) = \frac{f(x) - f(t)}{(x - t)^2}, \quad x, t \in \mathbb{R},$$

и пусть A_f — сингулярный интегральный оператор с ядром $K_f(x, t)$ в $E = L_2(\mathbb{R})$, т. е.

$$(A_f g)(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{|x-t| > \varepsilon} K_f(x, t) g(t) dt, \quad g \in E.$$

Тогда функция $A_f g$ корректно определена почти всюду, и операторная норма оператора A_f в $E = L_2[0, 2\pi]$ эквивалентна \sup -норме производной функции f , т. е. существует $C > 0$ такое, что $\|f'\|_\infty \leq C \|A_f\|_{\mathcal{L}(E)}$ и $\|A_f\|_{\mathcal{L}(E)} \leq \|f'\|_\infty$, где $\|f\|_\infty = \inf\{C : |f(x)| \leq C \text{ для почти всех } x \in \mathbb{R}\}$.

В заключение приведем результат об ограниченности сингулярных интегральных операторов общего вида, использующий понятие ограниченности множества в локально выпуклом (счетно-нормированном) пространстве и пространства, сопряженного к такому пространству, применительно к пространству Шварца.

Теорема 2. Пусть A — ограниченный оператор из пространства Шварца $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ в его сопряженное. Предположим, что существует такая непрерывная функция K на $\Omega = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \setminus \Delta$, где $\Delta = \{(x, t), x = t\}$, и такие положительные постоянные $\delta \in (0, 1]$ и C , что

$$1. |K(x, t)| \leq \frac{C}{|x-t|^n} \text{ для всех } (x, t) \in \Omega.$$

$$2. |K(z, t) - K(x, t)| + |K(t, z) - K(t, x)| \leq C \frac{|z-x|^\delta}{|x-t|^{n+\delta}} \text{ для всех } x, z, t \text{ таких, что}$$

$$|z-x| < \frac{1}{2}|x-t|.$$

3. Для всех функций $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ с непересекающимися носителями, значение $\langle Tf, g \rangle$ функционала Tf на элементе g равно интегралу

$$\iint_{\Omega} K(x, t) f(t) g(x) dt dx.$$

Такой оператор T может быть продолжен до ограниченного линейного оператора в $L_2(\mathbb{R}^n)$ в том и только том случае, когда выполнены следующие три условия:

- существует такая постоянная $c > 0$, что для любой функции $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ с нулевым интегралом выполняется неравенство $|\langle T1, g \rangle| \leq c \|g\|_{H_1}$, где H_1 — пространство Харди на \mathbb{R}^n ;
- существует такая постоянная $c > 0$, что для любой функции $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ с нулевым интегралом выполняется неравенство $|\langle T^*1, g \rangle| \leq c \|g\|_{H^1}$, где T^* — сопряженный оператор, связанный с ядром $L(x, t) = K(t, x)$, $x, t \in \mathbb{R}^n$;
- для любого ограниченного множества $B \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ существует такая постоянная $c > 0$, что для любых функций $g_1 g_2 \in B$, для всех $x \in \mathbb{R}^n$ и всех $R > 0$ выполняется неравенство $|\langle T g_1^{x,R}, g_2^{x,R} \rangle| \leq c R^n$, где $g_i^{x,R}$ определено равенством $g_i^{x,R}(t) = g_i((t-x)/R)$, $i = 1, 2$, $x, t \in \mathbb{R}^n$.

● *Литература:* F. Smithies (1958), P. Эдвардс (1969), D. Sarason (1975), Л. В. Канторович, Г. П. Акилов (1977), G. David, J.-L. Journé (1984), S. G. Mikhlin, S. Prössdorf (1986), S. Prössdorf, B. Silberman (1991), P. S. Muhly, J. Xia (1995).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. — М.: Наука, 1979.
- Александров В. М. Асимптотические методы механики сплошной среды: задачи со смешанными граничными условиями // ПММ, 1993, т. 57, вып. 2, с. 321–327.
- Александров В. М., Коваленко Е. В. Задачи механики сплошных сред со смешанными граничными условиями. — М.: Наука, 1986.
- Арутюнян Н. Х. Некоторые вопросы теории ползучести. — М.–Л.: Гостехиздат, 1952.
- Арутюнян Н. Х. Плоская контактная задача теории ползучести // ПММ, 1959, т. 23, вып. 5.
- Ахиезер Н. И., Глазман И. М. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. — М.: Наука, 1966.
- Бабенко Ю. И. Тепломассообмен: Метод расчета тепловых и диффузионных потоков. — М.: Химия, 1986.
- Балакришнан А. В. Прикладной функциональный анализ. — М.: Наука, 1980.
- Бахвалов Н. С. Численные методы. — М.: Наука, 1973.
- Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований. Том 1. — М.: Наука, 1969.
- Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Том 1. — М.: Наука, 1973.
- Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Том 2. — М.: Наука, 1974.
- Беллман Р., Кук К. Дифференциально-разностные уравнения. — М.: Мир, 1967.
- Белоцерковский С. М., Лифанов И. К. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях. — М.: Наука, 1985.
- Бутковский А. Г. Характеристики систем с распределенными параметрами. — М.: Наука, 1979.
- Васильева А. Б., Тихонов Н. А. Интегральные уравнения. — М.: Физматлит, 2002.
- Верлань А. Ф., Сизиков В. С. Методы решения интегральных уравнений с программами для ЭВМ. — Киев: Наукова Думка, 1986.
- Виарда Г. Интегральные уравнения. — М.–Л.: ОНТИ, 1933.
- Виленкин Н. Я., Горин Е. А. и др. Функциональный анализ. — М.: Наука, 1964.
- Вольтерра В. Теория функционалов, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1982.
- Ворович И. И., Александров В. М., Бабешко В. А. Неклассические смешанные задачи теории упругости. — М.: Наука, 1974.
- Гахов Ф. Д. Краевые задачи. — М.: Наука, 1977.
- Гахов Ф. Д., Черский Ю. И. Уравнения типа свертки. — М.: Наука, 1978.
- Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве и ее приложения. — М.: Наука, 1967.
- Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. — М.: Наука, 1975.
- Гурса Э. Курс математического анализа. Том 3, часть 2. Интегральные уравнения. Вариационное исчисление. — Л.: Гостехиздат, 1934.
- Гусейнов А. И., Мухтаров Х. Ш. Введение в теорию нелинейных сингулярных уравнений. — М.: Наука, 1980.
- Данфорд Н., Шварц Дж. Линейные операторы. Том 1. Общая теория. — М.: Иностранная литература, 1962.
- Данфорд Н., Шварц Дж. Линейные операторы. Том 2. Спектральная теория. Самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве. — М.: Мир, 1966.
- Данфорд Н., Шварц Дж. Линейные операторы. Том 3. Спектральные операторы. — М.: Мир, 1974.
- Двайт Г. Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы. — М.: Наука, 1977.
- Демидович Б. П., Марон И. А., Шувалова Э. З. Численные методы анализа. — М.: Физматгиз, 1963.
- Дёч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z-преобразования. — М.: Наука, 1971.
- Диткин В. А., Прудников А. П. Справочник по операционному исчислению. — М.: Наука, 1965.

- Диткин В. А., Прудников А. П. Интегральные преобразования и операционное исчисление. — М.: Наука, 1974.
- Забрейко П. П., Кошелев А. И. и др. Интегральные уравнения. — М.: Наука, 1968.
- Зайцев В. Ф., Полянин А. Д. Справочник по линейным обыкновенным дифференциальным уравнениям. — М.: Факториал, 1997.
- Зайцев В. Ф., Полянин А. Д. Справочник по нелинейным обыкновенным дифференциальным уравнениям. — М.: Факториал, 1997.
- Зайцев В. Ф., Полянин А. Д. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям: Точные решения. — М.: Наука, 1995.
- Зайцев В. Ф., Полянин А. Д. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. — М.: Физматлит, 2001.
- Иосида К. Функциональный анализ. — М.: Мир, 1967.
- Каландия А. И. Математические методы двумерной упругости. — М.: Наука, 1973.
- Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. — М.: Наука, 1976.
- Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. — М.-Л.: Физматлит, 1962.
- Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. — М.: Наука, 1977.
- Коллатц Л. Численные методы решения дифференциальных уравнений. — М.: Иностранная литература, 1958.
- Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1976.
- Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. — М.: Наука, 1984.
- Коротков В. Б. Интегральные операторы. — Новосибирск: Наука, 1983.
- Краснов М. Л., Киселев А. И., Макаренко Г. И. Интегральные уравнения. — М.: Наука, 1968.
- Красносельский М. А. Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений. — М.: Гостехиздат, 1956.
- Красносельский М. А., Забрейко П. П. и др. Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. — М.: Наука, 1966.
- Красносельский М. А., Вайникко Г. М. и др. Приближенное решение операторных уравнений. — М.: Наука, 1969.
- Крейн М. Г. Интегральные уравнения на полупрямой с ядром, зависящим от разности аргументов // Успехи математических наук, 1958, т. 13, вып. 5 (83).
- Крылов, В. И., Бобков, В. В., Монастырный, П. И. Начала теории вычислительных методов. Интегральные уравнения, некорректные задачи и улучшение сходимости. — Минск: Наука и техника, 1984.
- Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. Том 1. — М.-Л.: Физматгиз, 1951.
- Лаврентьев М. М., Романов В. Г., Шишатский С. П. Некорректные задачи математической физики и анализа. — М.: Наука, 1980.
- Лифанов И. К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. — М.: ТОО "Янус", 1995.
- Ловитт У. В. Линейные интегральные уравнения. — М.: Гостехиздат, 1957.
- Люстерник Л. А., Соболев В. И. Краткий курс функционального анализа. — М.: Высшая школа, 1982.
- Манжиров А. В., Полянин А. Д. Методы решения интегральных уравнений. — М.: Факториал, 1999.
- Манжиров А. В., Полянин А. Д. Справочник по интегральным уравнениям: Методы решения. — М.: Факториал, 2000.
- Михлин С. Г. Интегральные уравнения и их приложения. — М.-Л.: Гостехиздат, 1949.
- Михлин С. Г. Лекции по линейным интегральным уравнениям. — М.: Физматгиз, 1959.
- Михлин С. Г., Смолицкий Х. Л. Приближенные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений. — М.: Наука, 1965.
- Мухелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. — М.: Наука, 1968.
- Мышкис А. Д. Математика для ВТУЗОВ: Специальные курсы. — М.: Наука, 1971.
- Мюнц Г. М. Интегральные уравнения. — Л.: Гостехиздат, 1934.
- Никольский С. М. Квадратурные формулы. — М.: Наука, 1979.

- Нобл Б. Применение метода Винера–Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. — М.: Иностранная литература, 1962.
- Петров Г. А. Асимптотические разложения для тонких осесимметричных каверн // Журн. прикл. мех. и техн. физики, 1986, № 5, с. 45–50.
- Петровский И. Г. Лекции по теории интегральных уравнений. — М.: Гостехиздат, 1951.
- Полянин А. Д., Манжиров А. В. Метод модельных решений в теории линейных интегральных уравнений // Докл. АН, 1997, т. 354, № 1, с. 30–34.
- Полянин А. Д., Манжиров А. В. Справочник по интегральным уравнениям: Точные решения. — М.: “Факториал”, 1998.
- Привалов И. И. Интегральные уравнения. — М.–Л.: ОНТИ, 1935.
- Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. Элементарные функции. — М.: Наука, 1981.
- Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. Специальные функции. — М.: Наука, 1983.
- Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. Дополнительные главы. — М.: Наука, 1986.
- Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Таблицы неопределенных интегралов. — М.: Наука, 1986.
- Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Том 1. Функциональный анализ. — М.: Мир, 1977.
- Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Том 2. Гармонический анализ. Самосопряженность. — М.: Мир, 1978.
- Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Том 3. Теория рассеяния. — М.: Мир, 1982.
- Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Том 4. Анализ операторов. — М.: Мир, 1982.
- Рихтмайер Р. Принципы современной математической физики. — М.: Мир, 1982.
- Рудин У. Функциональный анализ. — М.: Мир, 1975.
- Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. — Минск: Наука и техника, 1987.
- Свешиников А. Г., Тихонов А. Н. Теория функций комплексного переменного. — М.: Наука, 1970.
- Смирнов В. И., Лебедев Н. А. Конструктивная теория функций комплексного переменного. — М.–Л.: Наука, 1964.
- Смирнов В. И. Курс высшей математики. Том 4, часть 1. — М.: Наука, 1974.
- Смирнов Н. С. Введение в теорию нелинейных интегральных уравнений. — М.: Гостехиздат, 1951.
- Снеддон И. Преобразования Фурье. — М.: Иностранная литература, 1955.
- Титчмарш Е. Введение в теорию интегралов Фурье. — М.–Л.: Гостехиздат, 1948.
- Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. — М.: Наука, 1979.
- Треногин В. А. Функциональный анализ. — М.: Наука, 1980.
- Трикоми Ф. Интегральные уравнения. — М.: Иностранная литература, 1960.
- Уиттекер Э. Т., Ватсон Д. Ж. Курс современного анализа. Часть 1. — М.: Физматлит, 1963.
- Фок В. А. О некоторых интегральных уравнениях математической физики // Докл. АН СССР, 1942, т. 26, № 4–5, с. 147–151.
- Хиршман И. И., Уиддер Д. В. Преобразования типа свертки. — М.: Иностранная литература, 1958.
- Шилов Г. Е. Математический анализ: Специальный курс. — М.: Физматлит, 1961.
- Цлаф Л. Я. Вариационное исчисление и интегральные уравнения. — М.: Наука, 1970.
- Эдвардс Р. Функциональный анализ. Теория и приложения. — М.: Мир, 1969.
- Atkinson K. E. The Numerical Solution of Integral Equations of the Second Kind. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1997.
- Bateman H. On the numerical solution of linear integral equations // Proc. Roy. Soc. (A), 1922, Vol. 100, No. 705.
- Beyer W. H. CRC Standard Mathematical Tables and Formulae. — Boca Raton: CRC Press, 1991.
- Brakhage H., Nickel K., Rieder P. Auflösung der Abelschen Integralgleichung 2. Art. // ZAMP, 1965, Vol. 16, Fasc. 2, S. 295–298.

- Brychkov Yu. A., Prudnikov A. P. *Integral Transforms of Generalized Functions*. — New York: Gordon & Breach Sci. Publ., 1989.
- Cochran J. A. *The Analysis of Linear Integral Equations*. — New York: McGraw-Hill Book Co., 1972.
- Corduneanu C. *Integral Equations and Stability of Feedback Systems*. — New York: Academic Press, 1973.
- Corduneanu C. *Integral Equations and Applications*. — Cambridge–New York: Cambridge Univ. Press, 1991.
- Davenport W. B., Root W. L. *An Introduction to the Theory of Random Signals and Noise*. — New York: McGraw-Hill Book Co., 1958.
- David G., Journé J.-L. A boundedness criterion for generalized Calderón–Zygmund operators // *Ann. of Math.* Vol. 120. 1984.
- Davis B. *Integral Transforms and Their Applications*. — New York: Springer-Verlag, 1978.
- Delves L. M., Mohamed J. L. *Computational Methods for Integral Equations*. — Cambridge–New York: Cambridge Univ. Press, 1985.
- Dzhuraev A. *Methods of Singular Integral Equations*. — New York: J. Wiley, 1992.
- Hilbert D. *Grundzuge einer allgemeinen Theorie der lineare Integralgleichungen*. — New York: Chelsea, 1953 (First publ. Leipzig–Berlin, 1912).
- Golberg A., Ed. *Numerical Solution of Integral Equations*. — New York: Plenum Press, 1990.
- Gorenflo R., Vessella S. *Abel Integral Equations: Analysis and Applications*. — Berlin–New York: Springer-Verlag, 1991.
- Gripenberg G., Londen S.-O., Staffans O. *Volterra Integral and Functional Equations*. — Cambridge–New York: Cambridge Univ. Press, 1990.
- Hackbusch W. *Integral Equations: Theory and Numerical Treatment*. — Boston: Birkhäuser Verlag, 1995.
- Jerry A. J. *Introduction to Integral Equations with Applications*. — New York–Basel: Marcel Dekker, 1985.
- Kanwal R. P. *Linear Integral Equations*. — Boston: Birkhäuser, 1996.
- Kondo J. *Integral Equations*. — Oxford: Clarendon Press, 1991.
- Mikhlin S. G., Prössdorf S. *Singular Integral Operators*. — Berlin–New York: Springer-Verlag, 1986.
- Miles J. W. *Integral Transforms in Applied Mathematics*. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1971.
- Muhly P. S., Xia J. Calderón–Zygmund operators, local mean oscillation and certain automorphisms of the Toeplitz algebra // *Amer. J. Math.*, 1995, Vol. 117, pp. 1157–1201.
- Oldham, K. B. and Spanier, J. *The Fractional Calculus*. — London: Academic Press, 1974.
- Polyanin A. D., Manzhirov A. V. *Handbook of Integral Equations*. — Boca Raton–New York: CRC Press, 1998.
- Polyanin A. D., Zaitsev V. F. *Handbook of Exact Solutions for Ordinary Differential Equations*. — Boca Raton–New York: CRC Press, 1995.
- Porter D., Stirling D. S. G. *Integral Equations: A Practical Treatment, from Spectral Theory to Applications*. — Cambridge–New York: Cambridge Univ. Press, 1990.
- Prössdorf S., Silbermann B. *Numerical Analysis for Integral and Related Operator Equations*. — Basel–Boston: Birkhäuser Verlag, 1991.
- Prudnikov A. P., Brychkov Yu. A., Marichev O. I. *Integrals and Series. Volume 5. Inverse Laplace Transforms*. — New York: Gordon & Breach Sci. Publ., 1992.
- Sakhnovich L. A. *Integral Equations with Difference Kernels on Finite Intervals*. — Basel–Boston: Birkhäuser Verlag, 1996.
- Sarason D. Functions of vanishing mean oscillation // *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1975, Vol. 207, pp. 391–405.
- Smithies F. *Integral Equations*. — New York: Cambridge Univ. Press, 1958.
- Titchmarsh E. C. *Introduction to the Theory of Fourier Integrals*. — Oxford: Clarendon Press, 1948.
- Zwillinger D. *Handbook of Differential Equations*. — San Diego: Academic Press, 1989.