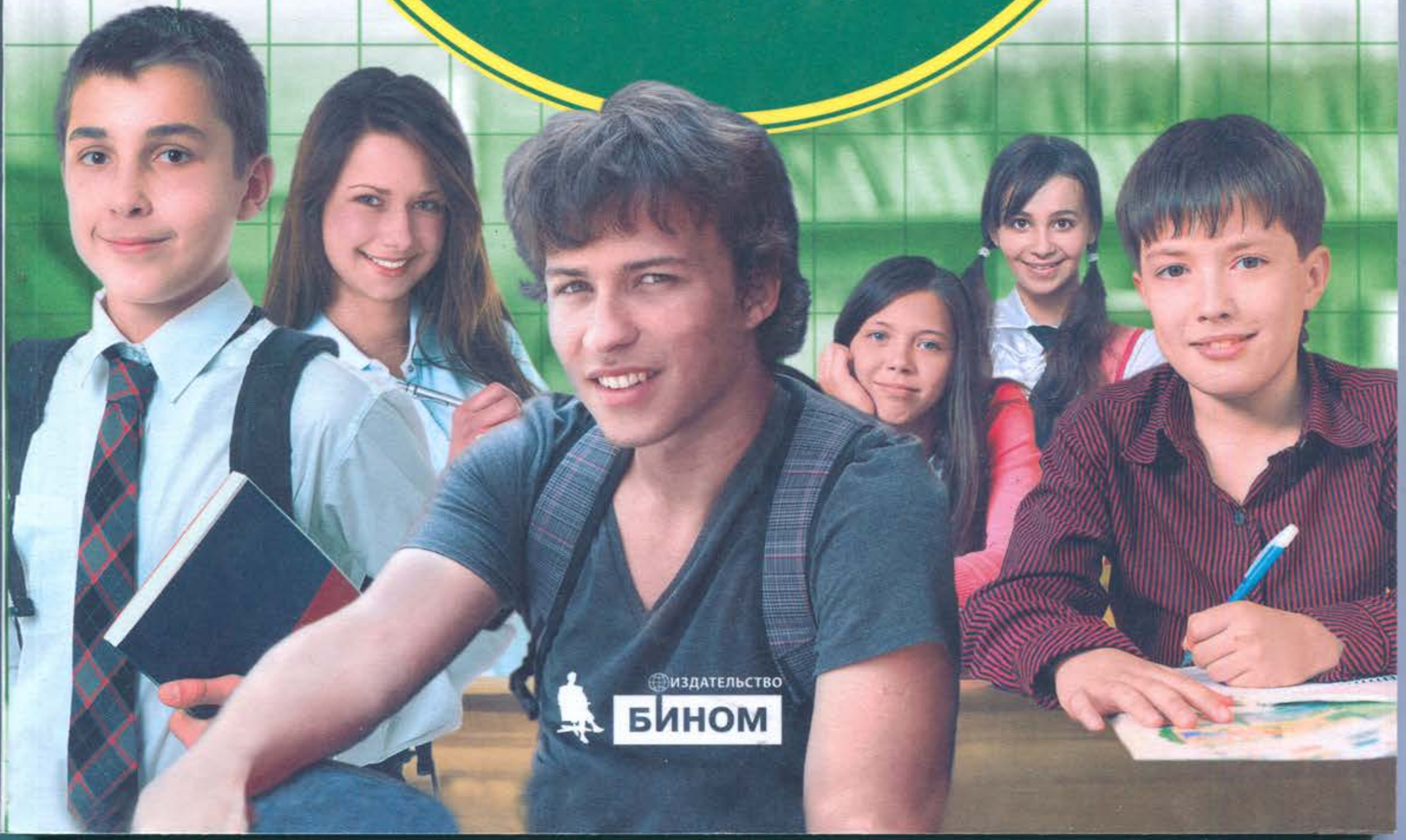
ФГОС

Л. Г. Петерсон, Н. Х. Агаханов, А. Ю. Петрович,
О. К. Подлипский, М. В. Рогатова, Б. В. Трушин

Алгебра
8 класс
Часть 3



Издательство
БИНОМ

УДК 373:51
ББК 22.1я721
П 29

Образовательная система Л. Г. Петерсон

«УЧУСЬ УЧИТЬСЯ»

Непрерывный курс математики
для дошкольников, учащихся начальной и основной
школы 1–9 (от 3 до 15 лет)

П 29 Петерсон, Л. Г. Алгебра. 8 класс : учебник (в 3 частях). Ч. 3 / Л. Г. Петерсон, Н. Х. Агаханов, А. Ю. Петрович, О. К. Подлипский, М. В. Рогатова, Б. В. Трушин. — 2-е изд., стереотип. — М. : Просвещение, 2021. — 144 с. + [4 с., вкл.] : ил. — ISBN 978-5-09-080502-5.

Учебник ориентирован на развитие мышления и творческих способностей учащихся, формирование у них системы прочных математических знаний, общеучебных умений, развитие личностных качеств, познавательного интереса и ценностного отношения к образованию.

Является частью непрерывного УМК по математике «Учусь учиться» для дошкольников, учащихся начальной и основной школы (от 3 до 15 лет). Соответствует федеральному государственному образовательному стандарту основного общего образования.

Реализует дидактическую систему деятельностного метода обучения Л. Г. Петерсон. Отмечен Премией Президента РФ в области образования.

Может использоваться во всех типах школ.

Курсовую и методическую поддержку по реализации УМК «Учусь учиться» осуществляет НОУ ДПО «Институт системно-деятельностной педагогики». Подробную информацию можно получить на сайте www.sch2000.ru.

УДК 373:51
ББК 22.1я721

ISBN 978-5-09-080502-5 (Ч. 3)
ISBN 978-5-09-080500-1

ФГОС
ООО

Л. Г. Петерсон, Н. Х. Агаханов, А. Ю. Петрович,
О. К. Подлипский, М. В. Рогатова, Б. В. Трушин

Алгебра

8 класс

Учебник

(в 3 частях)

Часть 3

2-е издание, стереотипное

Допущено
к использованию при реализации имеющих государственную
аккредитацию образовательных программ начального общего,
основного общего, среднего общего образования

Москва
«Просвещение»
2021

Чтобы учебником было удобно пользоваться,
в нём введены следующие обозначения:

К – задачи по новой теме для работы в классе,

Д – задачи для домашней работы,

П – повторение ранее пройденного,

С – задачи на смекалку,

– задания базового уровня,

– более сложные задания по новым темам и темам повторения,

* – задания, требующие умения находить нестандартные способы решения,

■ – завершение доказательства теоремы,

*** – более сложный материал для тех, кому интересно,

Т – тест для самостоятельной проверки своих знаний: http://metodist.lbz.ru/authors/matematika/6/

Глава 5

Рациональные уравнения и неравенства

§ 2. Дробно-рациональные уравнения

5.2.1. Дробно-рациональные уравнения

Тот, кто ищет методы, не имея в виду какой-либо конкретной задачи, в большинстве случаев терпит неудачу.

Дэвид Гильберт (1862–1943),
немецкий математик

Теория алгебраических дробей, с которой мы познакомились в предыдущем параграфе, расширяет наши возможности при решении практических задач. В данном пункте мы научимся решать задачи, математические модели которых содержат алгебраические дроби. Раньше такие задачи нам уже встречались, но решить мы могли лишь некоторые из них и достаточно громоздкими способами – методом перебора, методом проб и ошибок. Теперь мы можем вывести удобный общий алгоритм их решения.

Рассмотрим вначале следующую задачу.

Задача.

Длина стороны первого квадрата на 3 см больше, чем длина стороны второго квадрата. Если площадь первого квадрата уменьшить на 7 см^2 и разделить на длину стороны второго квадрата, то результат окажется на 12 см больше, чем результат от деления площади некоторой фигуры, равной 2 см^2, на длину стороны второго квадрата. Найти площадь второго квадрата.

***Решение*:**

Пусть длина стороны первого квадрата равна x, тогда длина стороны второго квадрата равна $x - 3$. Так как обе длины – величины положительные, $x > 3$.

Математическая модель задачи будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2-7}{x-3}=\dfrac{2}{x-3}+12 \\ x>3 \end{cases} \longrightarrow \boxed{(x-3)^2=?}$$

Для того чтобы ответить на вопрос задачи, нам надо найти корни полученного уравнения. Общего способа его решения у нас нет, так как оно содержит дробно-рациональные выражения. Вместе с тем такие уравнения встречаются достаточно часто, поэтому нам надо научиться их решать.

Сначала введём определение уравнений нового типа.

Определение 1. Уравнение, одна из частей которого является целым рациональным выражением, а другая дробно-рациональным или обе части которого являются дробно-рациональными выражениями, называется ***дробно-рациональным уравнением.***

Например, дробно-рациональными являются следующие уравнения:

$$\frac{x-2}{x+3}=0; \qquad 5y=\frac{2+4y}{3y-7}+14; \qquad \frac{6x+5y}{11xy}=\frac{xy}{2x+12y}.$$

При этом в первых двух уравнениях используется только одна переменная. Поэтому их называют *дробно-рациональными уравнениями с одной переменной*. Именно такие уравнения мы и рассмотрим в данном пункте.

Уравнение нового типа отличается от известных нам уравнений – в нём содержатся дробно-рациональные выражения, которые теряют смысл при значении переменной, обращающей знаменатель в ноль. Поэтому, решая дробно-рациональное уравнение, нужно следить за тем, чтобы среди его корней таких значений не оказалось. Для построения нового алгоритма нам необходимо ввести понятие *области допустимых значений* уравнения.

Определение 2. ***Областью допустимых значений*** (ОДЗ) уравнения называется множество значений переменной, при которых имеют смысл все выражения, входящие в уравнение.

Из этого определения следует, что для нахождения ОДЗ дробно-рационального уравнения надо найти пересечение областей определения всех алгебраических дробей, стоящих в его левой и правой частях. Так, ОДЗ уравнения $\frac{x^2-7}{x-3}=\frac{2}{x-3}+12$, полученного в задаче, представляет собой множество всех чисел, не равных 3: $x \neq 3$.

Чтобы понять, как решать уравнения нового типа, вспомним, как решаются уже известные нам аналогичные уравнения с дробями, знаменатели которых не содержали переменной, например:

$$\frac{x-7^{(3}}{6}=\frac{2^{(6}}{3}+\frac{2x^{(2}}{9} \Leftrightarrow \frac{3(x-7)}{18}=\frac{12}{18}+\frac{4x}{18} \Leftrightarrow 3x-21=12+4x \Leftrightarrow x=-33.$$

Мы умножили обе части уравнения на наименьший общий знаменатель данных дробей, равный 18, привели уравнение к целым коэффициентам, а затем нашли x.

Попробуем теперь решить уравнение нового типа, применяя тот же способ *на области его допустимых значений*: $x \neq 3$.

Приведём все слагаемые к общему знаменателю $x-3$:

$$\frac{x^2-7}{x-3}=\frac{2}{x-3}+12 \Leftrightarrow \frac{x^2-7}{x-3}=\frac{2+12(x-3)}{x-3}.$$

Домножая обе части уравнения на общий знаменатель, получим:

$$x^2-7=2+12(x-3) \Leftrightarrow x^2-12x+27=0.$$

Найдем корни квадратного уравнения по теореме, обратной теореме Виета:

$$x=3 \text{ или } x=9.$$

Проверим, что полученные корни принадлежат ОДЗ уравнения ($x \neq 3$). Корень $x=3$ не принадлежит ОДЗ, и его нужно исключить из множества решений. Такие корни называют ***посторонними корнями.*** Корень $x=9$ принадлежит ОДЗ. Именно он и будет решением исходного уравнения.

Мы приходим к следующему алгоритму.

Алгоритм решения дробно-рациональных уравнений

1. Найти ОДЗ уравнения.
2. Привести обе части уравнения к общему знаменателю.
3. Домножить обе части уравнения на общий знаменатель.
4. Найти корни полученного уравнения.
5. Проверить, принадлежат ли найденные корни ОДЗ.
6. Записать в ответе те из найденных корней, которые принадлежат ОДЗ.

Теперь вернёмся к задаче, рассмотренной в начале пункта. Чтобы завершить её решение, нам осталось проверить, что найденный нами корень 9 удовлетворяет второму неравенству из математической модели: $9 > 3$ (истинно).

Найдем требуемую в условии задачи величину: $(x-3)^2 = (9-3)^2 = 36$.

Ответ: площадь второго квадрата равна 36 см^2.

Для решения задачи мы вывели общий алгоритм решения дробно-рациональных уравнений, основанный на преобразовании дробно-рациональных выражений к целым на ОДЗ уравнения. Однако в ряде случаев дробно-рациональное уравнение удобнее решать, пользуясь ***условием равенства дроби нулю***:

$$\frac{A}{B}=0 \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} A=0 \\ B\neq 0 \end{cases}$$

В соответствии с этим алгебраическая дробь равна нулю при тех, и только тех значениях переменных, при которых её числитель равен нулю, а знаменатель нет. Значит, если дробно-рациональное уравнение удаётся свести к виду $\frac{A(x)}{B(x)} = 0$, то мы сразу можем перейти к решению системы: целого рационального уравнения $A(x)=0$ и неравенства $B(x)\neq 0$.

$$\frac{A(x)}{B(x)}=0 \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} A(x)=0 \\ B(x)\neq 0 \end{cases}$$

Поэтому, чтобы решить дробно-рациональное уравнение, можно собрать все его члены в левой части, привести дроби к общему знаменателю, а затем перейти к решению системы, равносильной исходному уравнению. Например, уравнение, полученное нами выше при решении задачи, можно решить с помощью этого способа следующим образом:

$$\frac{x^2-7}{x-3}=\frac{2}{x-3}+12 \;\Leftrightarrow\; \frac{x^2-7}{x-3}-\frac{2}{x-3}-12=0 \;\Leftrightarrow\; \frac{x^2-7-2-12(x-3)}{x-3}=0 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-12x+27}{x-3}=0 \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} x^2-12x+27=0 \\ x\neq 3 \end{cases}$$

Уравнение $x^2 - 12x + 27 = 0$, как мы видели, имеет два корня, поэтому система распадается на две системы:

$$\begin{cases} x^2-12x+27=0 \\ x\neq 3 \end{cases} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} x=3 \text{ или } x=9 \\ x\neq 3 \end{cases} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} x=3 \\ x\neq 3 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x=9 \\ x\neq 3 \end{cases}.$$

Первая система не имеет решения, а вторая – имеет решение $x = 9$. Значит, мы получили тот же самый ответ, что и в предыдущем случае: исходное уравнение имеет один корень $x = 9$.

Таким образом, решение дробно-рационального уравнения можно свести к решению системы посредством следующего алгоритма.

Алгоритм решения дробно-рациональных уравнений
(с помощью условия равенства дроби нулю)

1. Перенести все слагаемые из правой части в левую, изменив их знаки на противоположные.
2. Привести все слагаемые в левой части уравнения к общему знаменателю (тем самым записать уравнение в виде $\frac{A}{B}=0$).
3. Составить систему $\begin{cases} A=0 \\ B\neq 0 \end{cases}$.
4. Решить первое уравнение системы и проверить, удовлетворяют ли полученные корни второму соотношению системы.
5. Записать в ответ те из найденных корней, которые удовлетворяют второму соотношению системы.

Мы получили два способа решения дробно-рациональных уравнений, основанные на преобразовании дробных выражений в целые с учётом ОДЗ и на условии равенства алгебраической дроби нулю.

Пример 1.

Решить уравнение: $\frac{4}{x+2}+3=\frac{3x^2-8}{x^2-4}$.

Решение:

Способ 1.

$\frac{4}{x+2}+3=\frac{3x^2-8}{x^2-4}$.

ОДЗ: $x\neq\pm 2$.

$\frac{4(x-2)+3(x^2-4)}{(x-2)(x+2)}=\frac{3x^2-8}{(x-2)(x+2)}$

$4x-8+3x^2-12=3x^2-8$

$4x-12=0$

$x=3$

$3\in$ ОДЗ.

Ответ: 3.

Способ 2.

Перенесём все слагаемые из правой части в левую и приведём их к общему знаменателю:

$$\frac{4}{x+2}+3-\frac{3x^2-8}{x^2-4}=0 \Leftrightarrow \frac{4(x-2)+3(x^2-4)-(3x^2-8)}{(x-2)(x+2)}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{4x-8+3x^2-12-3x^2+8}{(x-2)(x+2)}=0 \Leftrightarrow \frac{4x-12}{(x-2)(x+2)}=0$$

Составим и решим систему:

$$\begin{cases} 4x-12=0 \\ (x-2)(x+2)\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ (x-2)(x+2)\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x=3$$

Ответ: 3.

Напомним, что равносильными называются уравнения, множества решений которых совпадают. А преобразование уравнения называется равносильным, если оно приводит к уравнению, равносильному данному.

При решении сложных, в том числе дробно-рациональных, уравнений нам потребуются следующие понятия.

Определение 3. Уравнение A является *следствием* уравнения B, если все корни уравнения B являются корнями уравнения A.

Определение 4. Уравнения называются *равносильными на множестве* M, если множества корней этих уравнений, принадлежащих множеству M, совпадают.

Например, уравнение $x^2 = 4$ является следствием уравнения $x = 2$ (из равенства чисел следует равенство их квадратов), но эти уравнения не равносильны (у первого уравнения есть решение $x = -2$, не являющееся решением второго). При этом эти уравнения равносильны на множестве $M = [0; +\infty)$.

Аналогично, уравнение $x^2 - 1 = 0$ является следствием уравнения $\frac{x^2-1}{x-1}=0$, но эти уравнения не являются равносильными. При этом данные уравнения равносильны на ОДЗ $x \neq 1$ исходного уравнения $\frac{x^2-1}{x-1}=0$.

При решении уравнений нужно либо следить за равносильностью преобразований, либо после решения уравнения-следствия сделать проверку найденных корней, подставив их в исходное уравнение.

К **1** 1) Какие из дробно-рациональных выражений не имеют смысла при $x = 3$?

а) $\frac{x-3}{x}$; б) $\frac{x}{x-3}$; в) $x-3+\frac{3}{10-x}$; г) $\frac{1}{x^2-9}$.

2) Может ли -3 являться корнем уравнения $\frac{x+1}{2x-6}+\frac{9}{x^2-9}=\frac{x}{2x+6}$?

3) Укажите значения x, при которых потеряют смысл дробно-рациональные выражения, входящие в уравнение $\frac{2x-2}{x+3}+\frac{18}{x^2-9}=\frac{x-6}{x-3}$.

4) Укажите множество значений переменной, при которых имеют смысл все выражения, входящие в уравнение $\frac{2x-2}{x+3}=\frac{18}{x^2-9}$.

5) Предположите, какое множество значений переменной называют *областью допустимых значений* уравнения. Проверьте свое предположение с помощью учебника.

2 Проанализируйте таблицу и попытайтесь составить определение дробно-рациональных уравнений, сопоставьте свой вариант с определением, приведённым в учебнике.

Рациональные уравнения	
Целые уравнения	**Дробно-рациональные уравнения**
$2x-7=0$	$\frac{1}{x+1}=0$
$\frac{1}{2}x-5=x-4$	$\frac{2}{x}-5=3x$
$x^2-2x+0{,}75=0$	$\frac{2}{x-2}+\frac{1}{x}=\frac{5}{x(x-2)}$
$\frac{x-1}{5}+3=\frac{x+5}{2}$	$\frac{x+1}{x-4}+\frac{9}{x^2-16}=\frac{x}{2x+8}$

3 а) Чем похожи и чем отличаются данные уравнения:

$$\frac{x-3}{5}+\frac{1}{4}=\frac{x+5}{20} \text{ и } \frac{x-6}{x-4}+\frac{1}{x}=\frac{x-12}{x(x-4)}?$$

Укажите область допустимых значений для каждого из уравнений.

б) Решите уравнение $\frac{x-3}{5}+\frac{1}{4}=\frac{x+5}{20}$ известным вам способом.

в) Решите данным способом дробно-рациональное уравнение $\frac{x-6}{x-4}+\frac{1}{x}=\frac{x-12}{x(x-4)}$.

Какие дополнительные шаги необходимо выполнить при его решении?

г) Подойдёт ли способ, который вы использовали при решении этого уравнения для решения всех дробно-рациональных уравнений? Составьте алгоритм решения дробно-рациональных уравнений и сопоставьте его с алгоритмом на с. 5.

4 1) При каких значениях переменной равна нулю дробь?

а) $\frac{a-5}{8}$; б) $\frac{x+10}{x}$; в) $\frac{2}{x-5}$; г) $\frac{2y-2}{y-1}$; д) $\frac{a}{b}$.

2) Найдите корни уравнений, используя результаты выполнения предыдущего задания:

$\frac{a-5}{8}=0$; $\frac{x+10}{x}=0$; $\frac{2}{x-5}=0$; $\frac{2y-2}{y-1}=0$.

3) Используя идею решения предыдущих уравнений, решите дробно-рациональное уравнение:

$$\frac{1}{x-1}+\frac{x^2+x-4}{x^2-1}+\frac{2}{x+1}=0.$$

4) Составьте ещё один алгоритм решения дробно-рациональных уравнений и сопоставьте его с алгоритмом на с. 6.

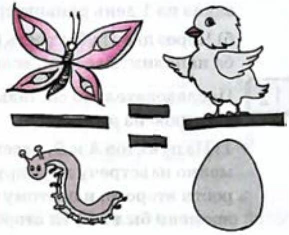
5 Решите дробно-рациональное уравнение двумя различными способами:

$$\frac{3}{8-5x}+\frac{5}{2-7x}=0.$$

Какой из них вам больше понравился?

6 а) Рассмотрите ещё один способ решения этого уравнения.

$$\frac{3}{8-5x}+\frac{5}{2-7x}=0.$$



ОДЗ: $x \neq 1{,}6$; $x \neq \frac{2}{7}$.

$$\frac{3}{8-5x}=\frac{5}{7x-2}$$

$3(7x-2)=5(8-5x)$

$21x-6=40-25x$

$46x=46$

$x=1$; $1 \in$ ОДЗ.

Ответ: 1.

Какое свойство лежит в основе этого решения?

б) Укажите уравнение, при решении которого удобнее использовать основное свойство пропорции:

$5x+\frac{6}{x}=11$; $\quad \frac{4}{x^2-9}+\frac{x+1}{x-3}=1$; $\quad \frac{x-4}{x+1}=\frac{x-9}{x}$; $\quad \frac{4-x}{x^2-9}=0$.

7 Решите дробно-рациональное уравнение:

а) $\frac{5x^2+25x}{x+1}=0$; $\quad$ в) $\frac{2}{x+2}+\frac{1}{x}=1$; $\quad$ д) $\frac{x}{x-2}-\frac{7}{x+2}=\frac{8}{x^2-4}$;

б) $\frac{x^2-4x}{x-4}=0$; $\quad$ г) $1+\frac{3}{x+4}=\frac{3}{x}$; $\quad$ е) $\frac{x}{x-1}+\frac{3}{x+1}=\frac{2}{x^2-1}$.

8 Решите дробно-рациональное уравнение:

а) $\frac{2x-7}{x^2-9x+14}-\frac{1}{x^2-3x+2}=\frac{1}{x-1}$;

б) $\frac{x-1}{x^3+3x^2+x+3}+\frac{1}{x^4-1}=\frac{x+1}{x^3+3x^2-x-3}$.

Решите задачи № 9–13, составив дробно-рациональное уравнение.

9 а) Пешеход должен был пройти 6 км за определённый срок. Однако он задержался с выходом на полчаса, поэтому, чтобы прийти вовремя, он шёл со скоростью, превышающей намеченную на 1 км/ч. С какой скоростью шёл пешеход?

б) Поезд был задержан на станции на 20 минут. Чтобы наверстать потерянное время, машинист увеличил скорость на 10 км/ч и на отрезке пути в 100 километров ликвидировал отставание. С какой скоростью поезд шёл до задержки на станции?

10 а) Катер прошёл 27 км по течению реки и 42 км против течения, затратив на путь по течению на 1 ч меньше, чем на путь против течения. Какова скорость катера против течения реки, если скорость течения реки равна 3 км/ч?

б) Прогулочный теплоход в 10:00 вышел вниз по течению реки из пункта A в пункт B. Пробыв в пункте B 3 часа, теплоход отправился назад и вернулся в пункт A в 22:00. Определите собственную скорость теплохода, если известно, что скорость течения реки 1,5 км/ч, а расстояние между пунктами A и B равно 32,4 км (ответ выразите в км/ч).

11 а) Завод заключил договор на выполнение 180 станков к определённому сроку. Перевыполняя запланированную дневную норму на 2 станка, завод выполнил заказ на 1 день раньше срока. За сколько дней завод выполнил заказ?

б) Через две трубы треть бассейна наполнится за 2 ч. За сколько часов каждая труба наполнит бассейн, если одной потребуется на 9 ч больше, чем другой?

12 Последовательно составьте математические модели каждой из задач и решите последнюю из них:

1) Из пунктов A и B, расстояние между которыми составляет 6 км, вышли одновременно навстречу друг другу два пешехода. Скорость первого на 3 км/ч больше скорости второго, и поэтому он потратил на путь на 1 час меньше, чем второй. Сколько времени был в пути второй пешеход, если шли они по одной и той же дороге?

2) Железнодорожные пути между пунктами A и B проходят только по одному маршруту, длиной в 324 км. Из пункта A в пункт B выехал поезд. Через 1 ч 30 мин из пункта B в пункт A выехал второй поезд. В пункты назначения они прибыли одновременно. Найдите скорость второго поезда, если она на 5 м/с больше скорости первого (ответ выразите в км/ч).

3) Из двух пунктов, расстояние между которыми равно 30 км, выехали навстречу друг другу велосипедист и мотоциклист. Мотоциклист выехал на 40 минут позже велосипедиста. Встретились они на середине пути. Скорость мотоциклиста на 30 км/ч больше скорости велосипедиста. Найдите их скорости, если эти пункты соединяет только одна дорога.

13 Последовательно составьте математические модели каждой из задач и решите последнюю из них.

1) Два велосипедиста одновременно выехали из пункта A в пункт B, расстояние между которыми равно 45 км. Скорость первого на 3 км/ч больше скорости второго, поэтому он прибыл в пункт B на 30 мин раньше второго. Найдите скорость второго.

2) Из города A в город B, расстояние между которыми равно 120 км, выехал автобус. Через 1 ч вслед за ним по той же дороге выехала легковая машина, скорость которой на 20 км/ч больше, чем скорость автобуса. Легковая машина прибыла в пункт B одновременно с автобусом. Найдите скорости автобуса и легкового автомобиля.

3) Из пункта A в пункт B, расстояние между которыми равно 60 км, выехал автобус. А через 20 минут вслед за ним выехал легковой автомобиль, скорость которого на 20 км/ч больше скорости автобуса. Автобус пришел в пункт B на 10 минут позже легкового автомобиля. Найдите скорости автобуса и легкового автомобиля.

П **14** Запишите выражение в виде алгебраической дроби:

а) $\left(\frac{a^3}{b^4}\right)^4$; б) $\left(-\frac{m^2s^5}{6a^3}\right)^3$; в) $\left(-\frac{2a^2}{bn}\right)^3 \cdot \left(-\frac{n^3}{3a^3b}\right)^2$.

15 Упростите выражение:

а) $\frac{m+2}{m-3}\left(m-\frac{5m}{2+m}\right)$; б) $\left(\frac{b-2}{b+2}-\frac{b+2}{b-2}\right):\frac{b^2}{b^2-4}$.

16 Разделите многочлен на многочлен:

а) $(3x^3+2x^2-x-4):(x-1)$; б) $(x^5-3x^4-3x^2-5x+2):(x+1)$.

17 Выделите целую часть алгебраической дроби:

а) $\dfrac{x^3-2x^2-x+2}{x+2}$; б) $\dfrac{x^5-3x^4+3x-5}{x-5}$.

18 Решите систему, используя подходящую замену переменных:

а) $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{5}{y}=-2 \\ \dfrac{1}{x}-\dfrac{6}{y}=9 \end{cases}$; б) $\begin{cases} \dfrac{x-1}{2x}+\dfrac{y-1}{3y}=1 \\ \dfrac{3}{x}-\dfrac{2}{y}=-0{,}2 \end{cases}$; в) $\begin{cases} \dfrac{5}{2x+y}+\dfrac{6}{y-2x}=3 \\ \dfrac{1}{2x+y}-\dfrac{18}{2x-y}=-5 \end{cases}$.

19 Решите задачу, составив систему уравнений.

а) Сумма двух чисел равна −10. Если из большего числа вычесть меньшее, то получится 120. Найдите эти числа.

б) В билетной кассе железнодорожного вокзала в первой половине дня продали 25 взрослых и 12 детских билетов до Санкт-Петербурга, а во второй половине дня – 15 взрослых и 20 детских билетов. При этом выручка в первой половине дня оказалась на 10 080 рублей больше, чем во второй половине дня. Каковы стоимость детского и взрослого билетов, если стоимость детского билета составляет 35% стоимости взрослого билета?

20 В колбе было 150 г 80%-го раствора кислоты. Лаборант отлил из колбы некоторое количество раствора и затем добавил в неё столько же воды, чтобы получить 60%-й раствор кислоты. Сколько граммов воды добавил лаборант?

Д **21** Решите дробно-рациональное уравнение:

а) $\dfrac{x^2-7x}{x+7}=0$; г) $1+\dfrac{2}{x+4}=\dfrac{5}{x}$;

б) $\dfrac{x^2+2x}{2x+4}=0$; д) $\dfrac{x}{x-3}-\dfrac{5}{x+3}=\dfrac{18}{x^2-9}$;

в) $\dfrac{3}{2x+1}+\dfrac{1}{x+1}=4$; е) $\dfrac{x^2}{x^2-1}-\dfrac{4}{x^2+1}=\dfrac{2}{x^4-1}$.

22 Решите уравнение:

а) $\dfrac{x+3}{x^2+x}-\dfrac{12}{x^2+3x}+\dfrac{1}{x}=0$; б) $\dfrac{x+2}{x^3-1}+\dfrac{3}{x^2+x+1}=\dfrac{1}{x-1}$.

23 Товарный поезд был задержан в пути на 18 минут, но затем на оставшихся 60 км пути наверстал упущенное время, увеличив скорость на 10 км/ч. Найдите первоначальную скорость поезда.

24 Катер прошёл 8 км по течению реки и 16 км против течения реки, затратив на весь путь $1\frac{1}{3}$ ч. Какова скорость катера по течению, если собственная скорость катера равна 20 км/ч?

25 Завод заключил договор на выполнение 800 запасных деталей к определённому сроку. Перевыполняя запланированную дневную норму на 20 деталей, завод выполнил заказ на 2 дня раньше срока. За сколько дней завод выполнил этот заказ?

26 Сравните условия задач. Составьте математические модели обеих задач и решите одну из них.

1) Из пункта A в пункт B, расстояние между которыми 20 км, выехал мотоциклист. Через 6 минут вслед за ним выехал автобус, скорость которого на 10 км/ч больше скорости мотоциклиста. Найдите скорости автобуса и мотоциклиста, если автобус приехал в пункт B на 4 минуты раньше мотоциклиста.

2) Из двух пунктов, расстояние между которыми равно 24 км, выехали навстречу друг другу два велосипедиста. Скорость первого, который выехал на 20 минут раньше второго, на 6 км/ч меньше скорости второго. Встретились они на середине пути. Найдите их скорости.

27 Выполните действия:

а) $\dfrac{b-3a}{2ab}-\dfrac{b-a}{2ab}$;

б) $\dfrac{3-p}{12p^2}-\dfrac{3p+2}{8p^2}$;

в) $\dfrac{m-n}{mn^2}-\dfrac{n-m}{m^2n}$;

г) $\dfrac{x+2}{x^2-9}-\dfrac{2}{x^2-3x}$;

д) $\dfrac{3d^2}{2k}\cdot\dfrac{4k^4}{9d^3}$;

е) $\dfrac{c^2-1}{v^5+v^3}\cdot\dfrac{v^2+1}{c^2-c}$;

ж) $\dfrac{z^2-s^2}{5t+5k}:\dfrac{zs-s^2}{t+k}$;

з) $\dfrac{a^3-d^3}{y^2+2yr+r^2}:\dfrac{a^2+ad+d^2}{y+r}$;

и) $\dfrac{4b^2-2ab+a^2}{a^3+8b^3}\cdot\dfrac{a^2-4b^2}{(a-2b)^2}$;

к) $\dfrac{3xy^2-12x^3}{8x^3-y^3}:\dfrac{3x^2+6xy}{4x^2+2xy+y^2}$;

л) $\dfrac{a-6}{a^2-a-30}\cdot\dfrac{a^2+10a+25}{3a^2+15a}$;

м) $\dfrac{a^4-1}{a^3-1}\cdot\dfrac{a^2+a+1}{a+1}$.

28 Выделите целую часть алгебраической дроби: $\dfrac{3x^3+x^2-x+19}{x+3}$.

29 Решите систему, используя подходящую замену переменных:

$$\begin{cases}\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{5}{y-1}=1\\[2mm] \dfrac{5}{x+2}+\dfrac{3}{y-1}=-2\end{cases}.$$

30 Решите задачу, составив систему уравнений.

а) Скорость моторной лодки по течению реки составила 20 км/ч, а против течения – 15 км/ч. Найдите собственную скорость лодки и скорость течения реки.

б) На двух полках 64 книги. Если переставить со второй полки третью часть книг на первую, то на первой станет в три раза больше книг, чем останется на второй. Сколько книг было на каждой полке?

C **31*** При каких значениях параметра a уравнение $\dfrac{1}{x-a}+\dfrac{1}{x-1}=\dfrac{2}{(x-a)(x-1)}$ не имеет решения?

32* Найдите все тройки положительных чисел, для которых выполняется равенство $a^2(a-1)+b^2(b-1)+c^2(c-1)=a(a-1)+b(b-1)+c(c-1)$.

5.2.2.* Способы решения дробно-рациональных уравнений

Мне кажется, что, как правило, следует всегда выбирать простейший путь, а при одинаковых трудностях – наиболее ясный...

Лазар Карно (1753–1823),
французский государственный деятель, инженер и учёный

В предыдущем пункте мы вывели алгоритмы решения дробно-рациональных уравнений, основанные на преобразовании дробных выражений к целым с учётом ОДЗ и на условии равенства алгебраической дроби нулю. Но известны и другие способы решения дробно-рациональных уравнений, которые позволяют в ряде случаев существенно упростить решение. Познакомимся с несколькими такими способами на конкретных примерах.

Замена переменной

При решении дробно-рациональных уравнений нередко эффективной бывает уже знакомая нам замена переменной.

Пример 1.
Решите уравнение: $\dfrac{7}{x-4}=3\left(\dfrac{2}{x-4}-5\right)+9$.

Решение:

Заметим, что, обозначив $\dfrac{1}{x-4}$ с помощью новой переменной y, то есть сделав замену $y=\dfrac{1}{x-4}$, мы сможем представить наше уравнение в виде

$$7y = 3\,(2y-5)+9.$$

Тем самым от дробно-рационального уравнения с переменной x мы перешли к линейному уравнению с переменной y. Решим последнее уравнение.

$$7y = 3(2y-5)+9 \;\Leftrightarrow\; 7y = 6y-15+9 \;\Leftrightarrow\; y=-6.$$

Вернемся к переменной x. Так как $y=\dfrac{1}{x-4}$, то $\dfrac{1}{x-4}=-6$. Мы получили уравнение, равносильное данному, но имеющее существенно более простой вид:

$$\frac{1}{x-4}=-6.$$

Решим его по известному алгоритму. ОДЗ полученного уравнения: $x \neq 4$.

$$1=-6\,(x-4) \;\Leftrightarrow\; 1=-6x+24 \;\Leftrightarrow\; -6x=-23 \;\Leftrightarrow\; x=\frac{23}{6} \;\Leftrightarrow\; x=3\frac{5}{6}.$$

Так как $3\dfrac{5}{6} \neq 4$, то полученное значение x является корнем исходного уравнения.

Ответ: $\left\{3\dfrac{5}{6}\right\}$.

В рассмотренном примере мы ввели новое обозначение для алгебраической дроби. Иногда же для упрощения решения уравнения бывает полезно обозначить новой переменной более сложное повторяющееся выражение.

Пример 2.

Решите уравнение $\dfrac{1}{x-3+\dfrac{8}{x}}-\dfrac{1}{x+2+\dfrac{8}{x}}=\dfrac{5}{24}$.

Решение:

Сделав замену $t=x+\dfrac{8}{x}$, мы можем упростить первоначальное уравнение:

$$\frac{1}{t-3}-\frac{1}{t+2}=\frac{5}{24}.$$

Найдем ОДЗ полученного уравнения: $t\neq 3$, $t\neq -2$.

Приведем обе части уравнения к общему знаменателю, равному $24(t-3)(t+2)$, и домножим на него обе части уравнения:

$$24(t+2)-24(t-3)=5(t-3)(t+2).$$

Упростим полученное уравнение и найдём его корни:

$$120=5(t^2-3t+2t-6)\ \Leftrightarrow\ t^2-t-30=0\ \Leftrightarrow\ t_1=6,\ t_2=-5.$$

Полученные корни не равны ни 3, ни -2, то есть оба принадлежат ОДЗ. Поэтому исходное уравнение распадается на два уравнения. Решим их.

1) $x+\dfrac{8}{x}=6$ ОДЗ: $x\neq 0$ $x^2-6x+8=0$ По теореме, обратной теореме Виета: $x_1=2$, $x_2=4$	2) $x+\dfrac{8}{x}=-5$ ОДЗ: $x\neq 0$ $x^2+5x+8=0$ $D=25-32<0$ $\varnothing$

Корни первого уравнения не равны нулю, значит, они принадлежат ОДЗ и являются корнями исходного уравнения. Второе уравнение не имеет корней.

Ответ: $\{2; 4\}$.

Иногда замена переменных бывает не столь явной, и прежде чем понять, какое выражение удобно заменить новой переменной, уравнение требуется преобразовать.

Пример 3.

Решите уравнение: $\dfrac{x^2-2x}{4x-3}+5=\dfrac{16x-12}{2x-x^2}$.

Решение:

Преобразуем данное уравнение:

$$\frac{x^2-2x}{4x-3}+5=\frac{16x-12}{2x-x^2}\ \Leftrightarrow\ \frac{x^2-2x}{4x-3}+5=\frac{4(4x-3)}{2x-x^2}\ \Leftrightarrow\ \frac{x^2-2x}{4x-3}+5=\frac{4}{\dfrac{2x-x^2}{4x-3}}.$$

Теперь легко видеть, что удобно сделать замену $t=\dfrac{x^2-2x}{4x-3}$, тогда уравнение примет вид $t+5=-\dfrac{4}{t}$. Решим его.

ОДЗ: $t\neq 0$.

Домножим на t обе части уравнения и найдём его корни:

$$t^2+5t+4=0 \;\Leftrightarrow\; t_1=-1,\ t_2=-4.$$

Полученные корни не равны 0, то есть оба принадлежат ОДЗ. Поэтому исходное уравнение распадается на два уравнения. Решим их.

1) $\dfrac{x^2-2x}{4x-3}=-1$ ОДЗ: $x\neq 0{,}75$ $x^2-2x=-4x+3$ $x^2+2x-3=0$ $x_1=1,\ x_2=-3.$	2) $\dfrac{x^2-2x}{4x-3}=-4$ ОДЗ: $x\neq 0{,}75$ $x^2-2x=-4(4x+3)$ $x^2+14x-12=0$ $x_{1,2}=-7\pm\sqrt{61}$

Все полученные корни не равны $0{,}75$, то есть принадлежат ОДЗ.

Ответ: $\{1;\ -3;\ -7+\sqrt{61};\ -7-\sqrt{61}\}$.

Как мы видим, при использовании метода замены переменной нет необходимости сразу выписывать ОДЗ исходного уравнения. Достаточно сначала найти ОДЗ уравнения, полученного в результате замены переменной, а потом ОДЗ одного или нескольких уравнений, полученных после возврата к «старой» переменной.

* * *

Одним из эффективных способов решения дробно-рациональных уравнений является выделение целой части алгебраической дроби.

Выделение целой части

Пример 4.

Решите уравнение: $\dfrac{12x-31}{3x-9}-\dfrac{6x+23}{3x+9}=\dfrac{10x-9}{2x-2}-\dfrac{6x+7}{2x+2}$.

Решение:

Найдем ОДЗ – это множество рациональных чисел, кроме $x=3$; $x=-3$; $x=1$; $x=-1$.

Выделим целые части во всех алгебраических дробях. Для этого разделим «в столбик» их числители на знаменатели.

На ОДЗ данного уравнения мы можем разделить числители всех алгебраических дробей на их знаменатели. Тогда получаем:

$$4+\frac{5}{3x-9}-2-\frac{5}{3x+9}=5+\frac{1}{2x-2}-3-\frac{1}{2x+2} \;\Leftrightarrow\; \frac{5}{3(x-3)}-\frac{5}{3(x+3)}=\frac{1}{2(x-1)}-\frac{1}{2(x+1)}.$$

Приведём каждую часть полученного уравнения к общему знаменателю и упростим получившееся уравнение:

$$\frac{5(x+3)-5(x-3)}{3(x^2-9)}=\frac{x+1-(x-1)}{2(x^2-1)} \;\Leftrightarrow\; \frac{10}{x^2-9}=\frac{1}{x^2-1}.$$

Теперь воспользуемся основным свойством пропорции. Это можно сделать, так как на ОДЗ знаменатели дробей не равны нулю. Тогда получаем следующее уравнение:

$$10(x^2-1)=x^2-9$$

Преобразуем это уравнение и найдём его корни:

$10x^2-10=x^2-9 \Leftrightarrow 9x^2-1=0 \Leftrightarrow (3x-1)(3x+1)=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{3}$ или $x=-\frac{1}{3}$.

Полученные корни принадлежат ОДЗ.

Ответ: $\left\{-\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right\}$.

При решении дробно-рациональных уравнений часто бывает полезным комбинирование способов выделения целой части и замены переменной.

Выделение целой части и замена переменной

Пример 5.

Решите уравнение: $\frac{4x-9}{x+3}=5+\frac{6}{x+3}$.

Решение:

Найдем ОДЗ: $x\neq-3$.

Выделим целую часть дроби $\frac{4x-9}{x+3}$. Для этого разделим «в столбик» её числитель на знаменатель:

$$\begin{array}{r|l} -\,4x-9 & x+3 \\ \cline{2-2} \underline{4x+12} & 4 \\ -21 & \end{array}$$

Тогда на области допустимых значений данного уравнения оно преобразуется к виду:

$$4-\frac{21}{x+3}=5+\frac{6}{x+3}.$$

Обозначив $y=\frac{1}{x+3}$, сделаем замену переменной и решим полученное уравнение:

$$4-21y=5+6y \Leftrightarrow 4-5=21y+6y \Leftrightarrow 27y=-1 \Leftrightarrow y=-\frac{1}{27}$$

Теперь вернёмся к «старой» переменной: $\frac{1}{x+3}=-\frac{1}{27}$.

Так как $x\neq-3$, воспользуемся основным свойством пропорции и решим полученное уравнение:

$$-(x+3)=27 \Leftrightarrow -x-3=27 \Leftrightarrow -x=30 \Leftrightarrow x=-30.$$

Так как -30 принадлежит ОДЗ, то -30 является корнем исходного уравнения.

Ответ: $\{-30\}$.

К **33** Проанализируйте уравнение: $\frac{7}{x-4}=3\left(\frac{2}{x-4}-5\right)+9$.

1) Что интересного вы замечаете в записи этого уравнения?

2) Какой приём поможет упростить решение этого уравнения?

Решите данное уравнение с помощью этого приема. Сравните свой способ решения со способом, предложенным на с. 13.

34 Решите уравнение с помощью замены переменной:

а) $-\frac{2x}{x-4}=13-4\left(\frac{2x}{x-4}+1\right)$;

б) $x^2-2x-\frac{3}{x^2-2x}=2$.

35 Решите уравнение с помощью замены переменной:

а) $\frac{7}{x-\frac{3}{x}+1}-\frac{2}{x-\frac{3}{x}-1}=\frac{1}{3}$;

б) $\frac{x^2+5x}{3x-1}+\frac{9x-3}{x^2+5x}=4$.

36 Решите уравнение, используя выделение целой части алгебраической дроби:

а) $\frac{3x-1}{x-2}+\frac{2x-1}{x+2}=9$;

б) $\frac{3x+2}{x-3}-9=\frac{5}{x-3}$.

П **37** Велосипедист проехал 18 км с одной скоростью. А оставшиеся 6 км — со скоростью, на 6 км/ч меньшей первоначальной. Найдите скорость велосипедиста на втором участке пути, если на весь путь он потратил 1,5 часа.

38 Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} 3x-|y|=-1 \\ 4x+2y=7 \end{cases}$;

б) $\begin{cases} 5x-4y=1 \\ |3x+9y|=12 \end{cases}$;

в) $\begin{cases} -3|x|+4y=1 \\ 5|x|-3y=13 \end{cases}$.

39 Решите систему уравнений способом подстановки. Выполните проверку полученного результата, решив систему способом алгебраического сложения:

$$\begin{cases} x+2y+z=-1 \\ -3x+5y-3z=14 \\ 4x-5y+6z=9. \end{cases}$$

40 Решите квадратное неравенство:

а) $x^2+6x<0$;

б) $x^2+15x+56\geqslant 0$;

в) $-3x^2+8x-5>0$;

г) $x^2+x+1>0$.

Д **41** Решите уравнение:

а) $\dfrac{14x-7}{5x+2}-2=5\left(\dfrac{4x-2}{5x+2}-1\right)$;

б) $x^2+3x-\dfrac{27}{x^2+3x}=6$.

42 Решите уравнение:

а) $\dfrac{1}{x+\dfrac{2}{x}-2}+\dfrac{8}{x+\dfrac{2}{x}+1}=3$;

б) $\dfrac{x^2-5x}{x+1}+\dfrac{28x+28}{x^2-5x}+16=0$.

43 Решите уравнение:

а) $\dfrac{3x+16}{x+3}+\dfrac{5x-22}{x-3}=2$;

б) $\dfrac{5x+11}{2x+5}=2+\dfrac{3}{2x+5}$.

44 Велосипедист проехал с определённой скоростью 10 км от города до турбазы. Возвращаясь обратно, он снизил скорость на 5 км/ч. На путь туда и обратно велосипедист затратил 1ч 40 мин. С какой скоростью возвращался велосипедист?

45 Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} 2|x|+y=5 \\ 3x-2y=4 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 2x+y=3 \\ |x-y|=6 \end{cases}$.

46 Решите квадратное неравенство:

а) $4x^2-1\leqslant 0$; б) $x^2-2x-99>0$; в) $3x^2+2x+5>0$.

С **47*** Если в произведении двух чисел первый множитель увеличить на 1, а второй уменьшить на 1, то произведение увеличится на 2011. Как изменится произведение исходных чисел, если, наоборот, первый множитель уменьшить на 1, а второй увеличить на 1?

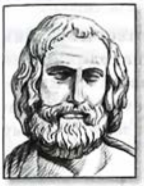
48* У двух братьев день рождения в один день, но один родился в XX веке, а второй уже в XXI. На праздновании своего общего дня рождения они обнаружили, что и у того, и у другого возраст равен сумме цифр года рождения. Найдите разницу в возрасте братьев.

49* Докажите, что для любого натурального числа n можно выбрать такое натуральное число a, чтобы число $a(n+1)-(n^2+n+1)$ нацело делилось на n^3.

Т Выполните тест № 7 для самостоятельной проверки знаний.

§ 3. Рациональные неравенства

5.3.1. Решение рациональных неравенств. Метод интервалов



Ни одна вещь не возникает, не уничтожается, но каждая составляется из смешения существующих вещей или выделяется из них.

Анаксагор (ок. 500–428 до н.э.), древнегреческий философ

Мы уже умеем решать линейные и квадратные неравенства, которые были получены нами как математические модели практических задач. В данном пункте мы расширим свои возможности по решению неравенств, возникающих в процессе математического моделирования окружающего мира.

Рассмотрим, например, следующую задачу.

Задача.

Семья дачников пешком отправилась в путешествие к озеру, для этого им пришлось преодолеть расстояние в 6 км. На обратный путь они потратили на 1 ч больше, чем на путь к озеру. Разница между скоростью движения к озеру и скоростью на обратном пути составила не менее 1 км/ч. Сколько времени они добирались к озеру?

Решение:

Пусть время, затраченное на путь к озеру, составило x ч, где $x > 0$. Тогда:

	Расстояние, км	Время, ч	Скорость, км/ч
К озеру	6	x	$\frac{6}{x}$
Обратно	6	$x+1$	$\frac{6}{x+1}$

По условию, разница между скоростью движения к озеру и скоростью на обратном пути составила не менее 1 км/ч. Следовательно, математическая модель задачи выглядит так:

$$\begin{cases} \frac{6}{x} - \frac{6}{x+1} \geqslant 1 \\ x > 0 \end{cases} \longrightarrow \boxed{x - ?}$$

При решении этой задачи нами получены так называемые *рациональные* неравенства. Как и в случае рациональных выражений, выделяются *целые* и *дробно-рациональные* неравенства. Введём следующие определения.

Определение 1. ***Рациональным неравенством*** называется неравенство, обе части которого являются рациональными выражениями.

Определение 2. ***Целым неравенством*** называется рациональное неравенство, обе части которого являются целыми выражениями.

Определение *3. **Дробно-рациональным неравенством*** называется рациональное неравенство, одна из частей которого является целым рациональным выражением, а другая дробно-рациональным или обе части которого являются дробно-рациональными выражениями.

Разберёмся сначала со способом решения целых неравенств. Некоторые из них – линейные и квадратные неравенства – мы уже умеем решать. Выведем на этой основе общий способ решения любых рациональных неравенств.

При решении квадратных неравенств мы использовали графики соответствующих функций. Например, чтобы решить неравенство $x^2 - 5x + 6 \geqslant 0$, мы находили нули функции $y = x^2 - 5x + 6$ и определяли её знак на каждом из образовавшихся интервалов (рис. 1). Корнями трёхчлена $x^2 - 5x + 6$ являются числа 2 и 3 (точки на оси закрашены, так как неравенство нестрогое), ветви параболы направлены вверх. Поэтому неравенству удовлетворяет любой x из множества $(-\infty; 2] \cup [3; +\infty)$.

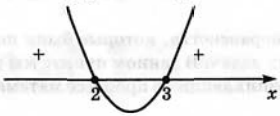


Рис. 1

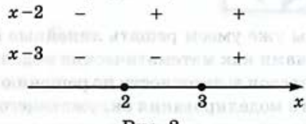


Рис. 2

В общем случае график целой функции степени больше 2 построить непросто. Однако, по сути, для решения неравенств требуется не сам график, а лишь знание интервалов по оси x, где многочлен сохраняет свой знак: «+» (положителен) или «–» (отрицателен). Такие интервалы называют ***интервалами (промежутками) знакопостоянства***. Попробуем их найти другим способом, без построения графика функции.

Разложим наш квадратный трёхчлен на множители, тогда:

$$x^2 - 5x + 6 \geqslant 0 \iff (x-2)(x-3) \geqslant 0.$$

Отметим на оси x закрашенными точками числа 2 и 3, где $(x-2)(x-3) = 0$, и определим знак каждого множителя и знак всего произведения на полученных промежутках (рис. 2).

$$x - 2 > 0 \iff x > 2; \qquad\qquad x - 2 < 0 \iff x < 2.$$

Значит, двучлен $x - 2$ положителен справа от своего корня 2 и отрицателен слева от 2. Аналогично, второй множитель $x - 3$ положителен справа от 3 и отрицателен слева от 3. Знак произведения определим по правилам знака произведения двух множителей. Мы получаем тот же результат: $(-\infty; 2] \cup [3; +\infty)$.

Приведённый способ решения неравенств называют ***методом интервалов***. Как мы видели, он включает в себя следующие шаги:

1. Выделить на числовой оси x интервалы знакопостоянства.
2. Определить знак выражения на каждом из интервалов.
3. Выбрать те интервалы, которые соответствуют знаку неравенства.
4. Если неравенство нестрогое, включить в ответ концы интервалов.

Метод интервалов даёт нам ключ к решению любого целого неравенства. Действительно, любой многочлен можно разложить в произведение линейных множителей и квадратных трёхчленов с отрицательным дискриминантом (примем пока это утверждение без доказательства), а их знаки мы определять умеем. Тогда знак всего многочлена мы найдём по известным нам правилам знака произведения, а затем просто выберем нужные интервалы.

Решим методом интервалов следующее целое неравенство.

Пример 1.

Решить неравенство $(2x-1)^2(x-2)^3(-5x+15)<0.$

Решение:

1) Прежде всего упростим исходное неравенство, выполнив равносильные преобразования.

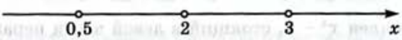
Избавимся от отрицательного коэффициента при старшем члене третьего множителя. Для этого умножим обе части неравенства на (-1), изменяя знак неравенства на противоположный. Получим неравенство:

$$(2x-1)^2(x-2)^3(5x-15)>0.$$

Разделив обе части равенства на $2^2\cdot 5=20$, приходим к неравенству, в левой части которого стоит произведение множителей вида $(x-a)^n$:

$$(x-0{,}5)^2(x-2)^3(x-3)>0.$$

2) Найдём корни каждого множителя: $x_1=0{,}5$, $x_2=2$, $x_3=3$, отметим их на оси x. Мы получим 4 промежутка, на каждом из которых знак выражения в левой части неравенства не меняется. Поскольку неравенство строгое, отмеченные точки не войдут в решение неравенства – «выколем» их.



3) Определим последовательно знаки каждого множителя и всего произведения на всех выделенных промежутках.

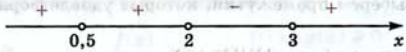
На самом правом промежутке все двучлены $x-0{,}5$, $x-2$, $x-3$ положительны и поменяют знак с + на – при переходе через свои корни.

Выражение $x-2$ поменяет свой знак при переходе через точку 2, значит, и множитель $(x-2)^3$ в силу нечётности показателя степени его тоже поменяет.

Смены знака не будет только у квадрата двучлена $x-0{,}5$, так как любая его чётная степень положительна при всех $x\neq 0{,}5$.

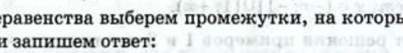
Теперь, зная знаки множителей, мы можем определить знак всего произведения на каждом из промежутков. Получаем:

$(x-0{,}5)^2$	+	+	+	+
$(x-2)^3$	–	–	+	+
$x-3$	–	–	–	+
$(x-0{,}5)^2(x-2)^3(x-3)$	+	+	–	+



4) В соответствии со знаком неравенства выберем промежутки, на которых левая часть неравенства положительна, и запишем ответ:

$(x-0{,}5)^2(x-2)^3(x-3)$	+	+	–	+



Ответ: $x\in(-\infty;\,0{,}5)\cup(0{,}5;\,2)\cup(3;\,+\infty).$

Заметим, что знаки на выделенных интервалах можно было получить быстрее. Поскольку все точки первого справа интервала расположены правее любого из отмеченного нами корней, на нем *любой* из двучленов нашего неравенства вида $x-a$ имеет знак «+». Значит, и знак произведения этих двучленов и их степеней тоже «+».

При этом смена знака одного из множителей приведёт к смене знака всего произведения. Поэтому, зафиксировав знак «+» на самом правом интервале, знаки произведения множителей вида $(x-a)^n$ на остальных интервалах можно определить *без всяких вычислений* по следующему правилу.

Правило смены знаков произведения множителей вида $(x-a)^n$

При переходе через точку a знак произведения:

- не меняется, если множитель $(x-a)$ имеет чётную степень;
- меняется на противоположный, если множитель $(x-a)$ имеет нечётную степень.

В некоторых случаях, прежде чем применять метод интервалов, неравенство требуется преобразовать. Решим следующий пример, используя приведённое правило «быстрого» определения знака произведения.

Пример 2.

Решить неравенство $x(x^3+2) \geqslant 2x+1$.

Решение:

1) Перенесем все слагаемые влево и упростим полученное выражение:

$$x(x^3+2) \geqslant 2x+1 \quad \Leftrightarrow \quad x^4+2x-2x-1 \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^4-1 \geqslant 0.$$

Разложим многочлен x^4-1, стоящий в левой части неравенства, на множители $(x-1)(x+1)(x^2+1)$.

Квадратный трёхчлен x^2+1 имеет отрицательный дискриминант, а старший коэффициент $a=1>0$, поэтому он всегда положителен, и при решении неравенства его можно не учитывать. Приходим к неравенству:

$$x^4-1 \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-1)(x+1)(x^2+1) \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-1)(x+1) \geqslant 0.$$

2) Отметим на числовой прямой точки 1 и -1, при которых $(x-1)(x+1)=0$. Учитывая, что неравенство нестрогое, точки закрашиваем, их следует включить в решение неравенства.

На первом интервале справа ставим знак «+», а при переходе через каждую отмеченную нами точку меняем знак на противоположный.

3) Выберем промежутки, которые удовлетворяют знаку неравенства, и запишем ответ.

Ответ: $x \in (-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$.

Опыт решения примеров 1 и 2 показывает, что целое неравенство можно привести к неравенству, в левой части которого стоит произведение множителей вида $(x-a)^n$, а в правой части – 0, используя следующие равносильные преобразования:

- слагаемые можно переносить из одной части неравенства в другую, изменяя знак на противоположный;
- многочлены можно раскладывать на множители по изученным ранее правилам;
- старшие коэффициенты всех множителей можно привести к 1 путем умножения и деления обеих частей неравенства на одно и то же число, отличное от 0 (если число положительное, знак неравенства не меняется, а если отрицательное – меняется на противоположный);

- квадратный трёхчлен $x^2 + px + q$ с отрицательным дискриминантом $D < 0$ положителен на всей числовой прямой, поэтому на знак произведения он не влияет и при решении неравенства его можно отбросить[2].

Знак произведения множителей вида $(x - a)^n$ в первом справа интервале всегда «+», а в остальных интервалах его можно определять автоматически по приведённому выше правилу смены знаков.

Итак, мы приходим к следующему *алгоритму решения целых рациональных неравенств методом интервалов*.

Алгоритм решения целых рациональных неравенств методом интервалов

1. Используя равносильные преобразования, привести правую часть неравенства к нулю, а левую – к произведению множителей вида $(x - a)^n$, где $n \in N$.
2. Отметить на числовой прямой точки, при которых полученное произведение равно нулю (закрашенные либо выколотые в зависимости от строгости неравенства).
3. Указать знак «+» полученного произведения на первом справа интервале.
4. Последовательно проставить знаки в остальных интервалах, пользуясь **правилом смены знаков** произведения множителей вида $(x - a)^n$.
5. Определить по схеме интервалы и (или) точки, удовлетворяющие знаку неравенства (или то, что таких нет).
6. Записать ответ.

Перейдём теперь к решению дробно-рациональных неравенств. Очевидно, что любое дробно-рациональное неравенство можно привести путём равносильных преобразований (перенос слагаемых, приведение к общему знаменателю) к одному из неравенств вида:

$$\frac{f(x)}{g(x)} > 0,\ \frac{f(x)}{g(x)} < 0,\ \frac{f(x)}{g(x)} \geqslant 0,\ \frac{f(x)}{g(x)} \leqslant 0.$$

Поскольку знаки произведения и частного чисел совпадают, мы можем записать следующие утверждения для строгого и нестрогого неравенств $>$ и $\geqslant$:

$$\frac{f(x)}{g(x)} > 0 \Leftrightarrow f(x)\cdot g(x) > 0; \qquad \frac{f(x)}{g(x)} \geqslant 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)\cdot g(x) \geqslant 0 \\ g(x) \neq 0 \end{cases}$$

Аналогичные утверждения можно составить для неравенств со знаками, соответственно, $<$ и $\leqslant$.

$$\frac{f(x)}{g(x)} < 0 \Leftrightarrow f(x)\cdot g(x) < 0; \qquad \frac{f(x)}{g(x)} \leqslant 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)\cdot g(x) \leqslant 0 \\ g(x) \neq 0 \end{cases}$$

Таким образом, решение дробно-рациональных неравенств сводится к решению целых неравенств.

---

[2] При этом следует определить знак дискриминанта и обосновать преобразование положительностью выражения, на которые делятся обе части неравенства.

Алгоритм решения дробно-рациональных неравенств методом интервалов

1. Привести путем равносильных преобразований левую часть неравенства к виду $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, а правую – к нулю.
2. Заменить полученное неравенство равносильным целым неравенством, в левой части которого стоит $f(x)\cdot g(x)$, а справа 0 (для нестрогих неравенств записать дополнительное условие $g(x)\neq 0$).
3. Решить полученное целое неравенство (для нестрогих неравенств исключить из решения точки, где $g(x)=0$).
4. Записать ответ.

Применим данный алгоритм к решению дробно-рационального неравенства, полученного нами в задаче, сформулированной в начале этого пункта:

$$\frac{6}{x}-\frac{6}{x+1}\geqslant 1.$$

Перенесём все слагаемые из правой части неравенства в левую:

$$\frac{6}{x}-\frac{6}{x+1}\geqslant 1 \;\Leftrightarrow\; \frac{6}{x}-\frac{6}{x+1}-1\geqslant 0.$$

Приведём все слагаемые в левой части к общему знаменателю:

$$\frac{6(x+1)-6x-x(x+1)}{x(x+1)}=\frac{6x+6-6x-x^2-x}{x(x+1)}=\frac{-x^2-x+6}{x(x+1)}.$$

В числителе коэффициент при старшем члене отрицательный, поэтому обе части неравенства домножим на (-1) и изменим его знак:

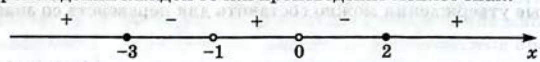
$$\frac{-x^2-x+6}{x(x+1)}\geqslant 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{x^2+x-6}{x(x+1)}\leqslant 0.$$

Разложим числитель дроби на множители и заменим полученное неравенство равносильной ему системой:

$$\frac{(x-2)(x+3)}{x(x+1)}\leqslant 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x(x+1)(x-2)(x+3)\leqslant 0\\ x(x+1)\neq 0\end{cases}$$

Неравенство нестрогое, поэтому все точки «из числителя» включаем в решение. Точки «из знаменателя» выкалываем.

В крайнем правом интервале ставим знак «+». Все множители в первой степени, поэтому при прохождении каждой точки произведение меняет знак.



Укажем промежутки, которые удовлетворяют знаку неравенства, и запишем их объединение $x\in[-3;-1)\cup(0;2]$.

Выберем из этих промежутков значения x, удовлетворяющие второму соотношению системы $(x>0)$, получим $x\in(0;2]$.

Ответ: дачники потратили на путь к озеру не более 2 ч.

В заключение разберём ещё один пример решения неравенства с необычной формой ответа.

Пример 3.

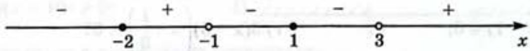
Решите неравенство $\dfrac{(x^3+8)(x^4-1)^2}{(x-3)^3(x+1)} \geqslant 0$.

Решение:

$$\frac{(x^3+8)(x^4-1)^2}{(x-3)^3(x+1)} \geqslant 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{(x+2)(x^2-2x+4)(x-1)^2(x+1)^2(x^2+1)^2}{(x-3)^3(x+1)} \geqslant 0.$$

Квадратные трёхчлены $x^2 - 2x + 4$ и $x^2 + 1$ всегда положительны ($D < 0$), поэтому при решении неравенства их можно не учитывать.

$$\frac{(x+2)(x-1)^2(x+1)^2}{(x-3)^3(x+1)} \geqslant 0 \;\Leftrightarrow\; \begin{cases}(x+2)(x-1)^2(x+1)^3(x-3)^3 \geqslant 0\\ (x-3)^3(x+1) \neq 0\end{cases}.$$



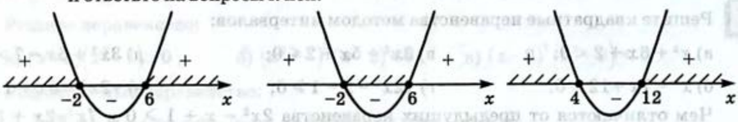
В соответствии со схемой, помимо двух промежутков, знаку неравенства удовлетворяет и отдельно стоящая точка 1, включим её в ответ.

Ответ: $x \in [-2;-1) \cup \{1\} \cup (3;+\infty)$.

Замечание. В ходе решения этого неравенства мы получили алгебраическую дробь, числитель и знаменатель которой имели общий множитель $(x + 1)$. Однако сокращение мы не произвели, так как данное преобразование неравенства не является равносильным.

Вообще говоря, для решения дробно-рациональных неравенств методом интервалов необязательно переносить множители из знаменателя в числитель. Дело в том, что правило смены знаков, аналогичное тому, что мы сформулировали для произведения, выполняется и для частного. И с учетом «выкалывания» точек «из знаменателя» им тоже можно пользоваться. Однако при решении последнего неравенства переход от дробно-рационального неравенства к целому помог нам обойтись без ряда дополнительных рассуждений.

50 Выберите схему, которая получена при решении неравенства $x^2 - 4x - 12 \geqslant 0$, и ответьте на вопросы к ней.



а) На каком из интервалов квадратный трёхчлен $x^2 - 4x - 12$ имеет знак «–»? знак «+»?

б) Выпишите три интервала, на которые корни трёхчлена $x^2 - 4x - 12$ разбивают числовую прямую.

в) Меняет ли знак функция $y = x^2 - 4x - 12$ на каждом из этих интервалов? Прочитайте в учебнике, как называются такие интервалы.

51 1) При каком x двучлен $x - 6$ равен нулю? Укажите интервал, на котором этот двучлен отрицателен. Укажите интервал, на котором этот двучлен положителен. Выполните это задание для двучлена $x + 2$.

2) На каком промежутке двучлен $x - a$ положителен, а на каком отрицателен?

52 Используя результаты выполнения предыдущего задания, дополните схему. Объясните знаки произведения $(x-6)(x+2)$, указанные на ней:

$x-6$	□	□	□
$x+2$	□	□	□
$(x-6)(x+2)$	$+$	$-$	$+$
x		-2	6

Сделайте вывод о способе нахождения интервалов знакопостоянства для произведения $(x-a)(x-b)$.

53 Какое из этих неравенств не является равносильным остальным неравенствам:

а) $3x^2-10x+3<0$;

б) $(x-3)(3x-1)<0$;

в) $-3x^2+10x-3<0$;

г) $3(x-3)\left(x-\frac{1}{3}\right)<0$?

54 Как можно решить неравенство $x^2-4x-12\geqslant 0$, не используя график соответствующей функции?
Подойдет ли способ, который вы предложили для решения этого неравенства для решения всех квадратных неравенств? Как бы вы назвали этот метод, сопоставьте его с методом, описанным на с. 20.

55 Решите неравенство:

а) $(x-7)(x+8)>0$;

б) $(x-3)(x+2)<0$;

в) $(x+1)(x-5)\geqslant 0$;

г) $(x-1)(x+2)\leqslant 0$;

д) $x(x-5)<0$;

е) $x(x+2)\geqslant 0$.

56 Решите неравенства методом интервалов:

а) $4x^2-4x+1>0$;

б) $x^2-2x+1<0$;

в) $9x^2+6x+1\leqslant 0$;

г) $9x^2-24x+16\geqslant 0$.

Чем похожи эти неравенства?

57 Решите квадратные неравенства методом интервалов:

а) $x^2+3x+2<0$;

б) $x^2-7x+12>0$;

в) $2x^2+5x+2\leqslant 0$;

г) $12x^2-x-1\geqslant 0$;

д) $3x^2+5x-7>0$;

е) $-2x^2-5x+1\geqslant 0$.

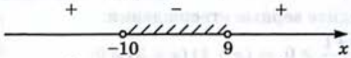
Чем отличаются от предыдущих неравенства $2x^2-x+1\geqslant 0$ и $7x^2-2x+3<0$? Решите их.

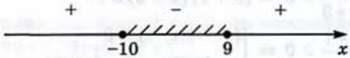
58 1) Решите методом интервалов неравенство $(x-1)^2(x-2)^3>0$.
Изменяется ли знак $(x-2)^3$ при переходе через точку 2?
Изменяется ли знак $(x-1)^2$ при переходе через точку 1?
Как можно обобщить результаты этих наблюдений для всех степеней двучлена $(x-a)^n$?
2) Решите методом интервалов неравенство $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)>0$.
Какой знак имеет каждый из его множителей на самом правом промежутке?
Как изменяется знак *всего* произведения $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ при переходе через каждую из отмеченных на числовой прямой точек?
Можно ли не выписывать знаки каждого из множителей на выделенных интервалах? Почему?

3) Можно ли обобщить полученные вами выводы для всех произведений множителей вида $(x-a)^n$? Сопоставьте свои выводы с правилом смены знаков, указанным на стр. 22.

59 Соотнесите неравенство со схемой его решения:

а) $(x-9)(x+10)>0$; 1) 

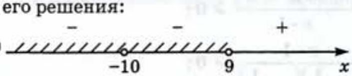
б) $(x-9)(x+10)<0$; 2) 

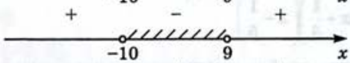
в) $(x-9)(x+10)\leqslant 0$; 3) 

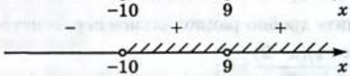
г) $(x-9)(x+10)\geqslant 0$; 4) 

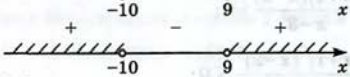
Запишите ответ к каждому из неравенств.

60 Соотнесите неравенство со схемой его решения:

а) $(x-9)^3(x+10)<0$; 1) 

б) $(x-9)(x+10)^2<0$; 2) 

в) $(x-9)^2(x+10)>0$; 3) 

г) $(x-9)(x+10)^3>0$; 4) 

Запишите ответ к каждому из неравенств.

61 Решите неравенство:

а) $(x-1)^3(x+2)^2(x-3)>0$; в) $(x+10)(x+9)^2(x+8)^4\geqslant 0$;

б) $(x-3)^4(x+5)^5(x-7)<0$; г) $(x-1)^4(x+2)^2(x+5)\leqslant 0$.

62 Решите неравенство:

а) $(x-1)(x^2-1)>0$; б) $(x^2-4)^3(x-2)<0$; в) $(x-9)^2(x^2-9)\leqslant 0$.

63 Решите целые неравенство:

а) $-x(3x^4+2x+5)<2-3x^5$; б) $(x^3+27)(2x-4)\geqslant 0$.

Какой способ вы использовали при решении этих неравенств? Какие равносильные преобразования можно использовать при решении неравенств?

Составьте свой вариант алгоритма решения целых неравенств и сопоставьте его с алгоритмом на с. 23.

64 Решите неравенство:

а) $4x^3-20x^2>x-5$; б) $x^3-4x^2-8x+8\leqslant 0$.

65 1) Сопоставьте неравенство $\dfrac{x+4}{x-3}\geqslant 0$ с неравенством $(x+4)(x-3)\geqslant 0$.

От чего зависит знак дроби? От чего зависит знак произведения?

Может ли $x=3$ являться решением первого неравенства? Почему?

2) Решите неравенство $\frac{x+4}{x-3} \geqslant 0$. Подойдёт ли способ, использованный вами при решении этого неравенства, для решения любого дробно-рационального неравенства? Какие ещё случаи возможны?

3) Составьте свой вариант алгоритма решения дробно-рациональных неравенств и сопоставьте его с алгоритмом на с. 24.

66 Найдите верные утверждения:

а) $\frac{x+1}{x+3} \geqslant 0 \Leftrightarrow (x+1)(x+3) \geqslant 0$;

б) $\frac{x+7}{x-1} \geqslant 0 \Leftrightarrow \begin{cases}(x+7)(x-1) \geqslant 0\\ x-1 \neq 0\end{cases}$;

в) $\frac{x+1}{x+3} < 0 \Leftrightarrow (x+1)(x+3) < 0$;

г) $\frac{x+7}{x-1} \leqslant 0 \Leftrightarrow \begin{cases}(x+7)(x-1) < 0\\ x-1 \neq 0\end{cases}$.

67 Решите дробно-рациональное неравенство:

а) $\frac{\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{1}{5}\right)}{x-1} \geqslant 0$;

б) $\frac{x-1}{\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{1}{5}\right)} \geqslant 0$;

в) $\frac{\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{1}{5}\right)}{x-1} < 0$;

г) $\frac{x-1}{\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{1}{5}\right)} > 0$.

68 Решите дробно-рациональное неравенство:

а) $\frac{(x+1)(x-2)}{x-3} > 0$;

б) $\frac{(x+1)^2(x-2)^5}{x-3} \leqslant 0$;

в) $\frac{(x-1)(x-2)^3(x-3)^2}{(x-4)^5(x-5)^4} \geqslant 0$;

г) $\frac{x(x+3)(x-2)^2}{(x^2+x+1)(x+1)} > 0$.

69 Решите неравенства:

а) $\frac{8-x}{x-10} \leqslant \frac{2}{2-x}$;

б) $\frac{2}{x+1} + \frac{3}{x+2} > 2$.

70 Решите неравенство: $\frac{(x+5)(3x^2-3x+1)}{x^2-6x+9} > \frac{(x+5)(x^2+2x-1)}{x^2-6x+9}$.

71 Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases}\frac{2-x}{x+1} \geqslant 1\\ \frac{2-x}{x+2} \leqslant 2\end{cases}$;

б) $\begin{cases}\frac{1}{x-2} + \frac{2}{x} > \frac{3}{x-1}\\ |x-2| > 1\end{cases}$.

72 Решите задачу с помощью дробно-рационального неравенства:
На покупку сувениров для гостей запланировали потратить 450 руб. Позже выяснилось, что количество гостей увеличилось на 1. Сколько человек пришли в гости, если на сувениры была потрачена вся выделенная сумма, а разница между запланированной ранее и новой ценой сувенира составила не менее пяти рублей?

73 Решите уравнение методом замены переменной:

а) $6\cdot\left(\frac{2x+3}{3x+2}\right)^2 - 13\cdot\frac{2x+3}{3x+2} + 6 = 0$;

б) $\dfrac{x^2+4x}{7x-2}-\dfrac{12-42x}{x^2+4x}=7$;

в) $\dfrac{1}{x+\dfrac{18}{x}-3}-\dfrac{1}{x+\dfrac{18}{x}+3}=\dfrac{1}{12}$.

74 Решите уравнение методом выделения целой части:

$$\frac{15x-58}{3x-12}-\frac{9x+38}{3x+12}=\frac{8x-39}{2x-10}-\frac{4x+21}{2x+10}.$$

75 Решите уравнение методом выделения целой части и замены переменной:

а) $\dfrac{x+2}{x+1}+\dfrac{x+10}{x+5}=4$; б) $\dfrac{2x-1}{x+1}+\dfrac{3x-1}{x+2}=\dfrac{x-7}{x-1}+4$.

76 Перепишите функции в виде кусочно-линейных, выделяя промежутки, на которых выражения под знаком модуля не меняют своего знака.
Постройте графики этих функций и найдите наибольшее и наименьшее значения функции на заданном отрезке:

а) $y=|2x-3|$ на отрезке $[0;\ 1{,}5]$;

б) $y=x-1-|x-1|$ на отрезке $[-1;\ 0]$;

в) $y=|x+2|+2|x-1|-x$ на отрезке $[-2;\ 2]$.

77 Разбейте на две группы следующие записи:

а) $x>2$ и $x>3$;

б) $x>2$ или $x>3$;

в) $\begin{cases}x>2\\x>3\end{cases}$;

г) «число x больше двух» $\vee$ «число x больше 3»;

д) «число x больше двух» $\wedge$ «число x больше 3»;

е) $\left[\begin{array}{l}x>2\\x>3\end{array}\right.$.

Какие из них становятся истинными высказываниями при $x=2{,}5$? при $x=5$? при $x=0$?

78 Найдите записи, равносильные записям в таблице. Поставив букву соответствующей записи в таблицу, вы узнаете фамилию французского философа XVII века, автора следующих слов: *«Образование – клад, труд – ключ к нему»*.

А	$\begin{cases}x\geqslant 1\\x\leqslant 1{,}5\end{cases}$	**У**	$\left[\begin{array}{l}x<1\\x>1{,}5\end{array}\right.$	**С**	$x<1{,}5$ и $x<1$
Т	«число x не меньше 2» $\vee$ «число x не больше 3»				
Б	«число x не меньше 2» $\wedge$ «число x не больше 3»				

1)	2)	3)	4)	5)
$x\in(-\infty;3]\cap[2;+\infty)$	$x\in(-\infty;1)\cup(1{,}5;+\infty)$	$1\leqslant x\leqslant 1{,}5$	$\begin{cases}x<1{,}5\\x<1\end{cases}$	$\left[\begin{array}{l}x\geqslant 2\\x\leqslant 3\end{array}\right.$

Познакомьтесь и с другими высказываниями этого философа. Выберите то, с которым вы согласны, зашифруйте его для своих одноклассников с помощью математического содержания.

79 Решите систему линейных неравенств и выпишите все целые решения:

а) $\begin{cases}6x+7{,}2>0\\5{,}6\geqslant 2{,}8x\end{cases}$;

б) $\begin{cases}17x-2<12x-1\\-3-9x<1-x\end{cases}$;

в) $\begin{cases}\dfrac{x-1}{2}-\dfrac{x-3}{3}\geqslant 2\\\dfrac{x}{2}-1>x\end{cases}$;

г) $\begin{cases}3a-1>4a-3\\5a-1>6-2a\\a-7\leqslant 0\end{cases}$.

80 Решите совокупность линейных неравенств:

а) $\left[\begin{array}{l}2(x-1)-3(x-2)\leqslant x\\-6x-3\leqslant 17-(x-5)\end{array}\right.$;

б) $\left[\begin{array}{l}4-\dfrac{x-1}{3}>x\\\dfrac{7x-1}{8}\geqslant 6\end{array}\right.$;

в) $\left[\begin{array}{l}\dfrac{5x-1}{6}-\dfrac{2x-2}{2}>0\\1-\dfrac{x+4}{3}<0\end{array}\right.$;

г) $\left[\begin{array}{l}b-4>8\\2b+5>13\\3-b>1\end{array}\right.$.

81 Найдите область допустимых значений выражения:

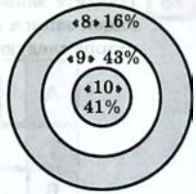
а) $\sqrt{12-4x}+\sqrt{-2x-1}$; б) $\dfrac{\sqrt{x+1}}{x}$; в) $\dfrac{\sqrt{-x}}{\sqrt{x+1}}$.

82 Решите:

а) $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}3x-1<5\\2x-5>7\end{cases}\\\begin{cases}2x-3\geqslant 3\\3-2x\geqslant 3(1-x)\end{cases}\end{array}\right.$;

б) $\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x<15\\3-6x>15\end{array}\right.\\\left[\begin{array}{l}4x-2\leqslant 26\\2x-1\geqslant 11\end{array}\right.\end{cases}$.

83 В отделе работают 6 человек: начальник отдела и 5 инженеров. Средняя заработная плата инженеров составляет 20 000 рублей в месяц, а средняя заработная плата всех сотрудников отдела составляет 25 000 рублей в месяц. Какова заработная плата начальника отдела?



84 На диаграмме показаны результаты стрельбы спортсмена по мишени (количество очков и процент попадания). Найдите среднее количество очков при одном выстреле спортсмена.

Д **85** Решите квадратное неравенство методом интервалов:

а) $x^2-3x+2>0$; в) $2x^2-3x-2\geqslant 0$; д) $x^2-16x+64>0$;

б) $x^2-9x+20<0$; г) $3x^2+8x-3\leqslant 0$; е) $4x^2+4x+1\leqslant 0$.

86 Решите неравенство:

а) $(x+2)^5(x-3)^4(x+1)>0$; в) $(x+7)(x-3)^2(x+2)^5\leqslant 0$;

б) $x^4(x-3)^3(x+11)<0$; г) $(x+5)^2(x+1)^4(x-7)^3\geqslant 0$.

87 Решите неравенство:

а) $(x+2)(x^2-4)>0$; б) $(x^2-1)^5(x-1)^3<0$; в) $(x+25)^2(x^2-25)\leqslant 0$.

88 Решите неравенство:

а) $x(11x^3+5x+1)>7-x+11x^4$; б) $(x^3-1)(5x-3)\geqslant 0$.

89 Решите неравенство:

а) $4x^3+4x^2>x+1$; б) $x^3+3x^2-9x-27\leqslant 0$.

90 Решите неравенство:

а) $\dfrac{(x+5)(2x+3)}{x+4}>0$; в) $\dfrac{(x+1)(x-7)^5(x-4)^2}{(x+1)^2(x-2)^3}\geqslant 0$;

б) $\dfrac{(x-1)^3(x+2)^3}{(x+3)^2}\geqslant 0$; г) $\dfrac{x^3(x+2)^2(x-5)^5}{(x^2-2x+3)^3(x-1)^2}>0$.

91 Решите неравенство:

а) $\dfrac{5}{5-x}\geqslant\dfrac{x+1}{x-3}$; б) $\dfrac{4}{5+x}-\dfrac{3}{x-2}<2$.

92 Решите неравенство: $\dfrac{(x-2)^5(4x^2+2x-3)}{(x^2+2x+1)^3}\geqslant\dfrac{(x-2)^5(x^2-x+3)}{(x^2+2x+1)^3}$.

93 Решите уравнение методом замены переменной:

а) $2\cdot\left(\dfrac{x+3}{x-1}\right)^2-7\cdot\dfrac{x+3}{x-1}+5=0$; б) $\left(\dfrac{5x+1}{2x-3}\right)^2+\left(\dfrac{3-2x}{5x+1}\right)^2=\dfrac{82}{9}$.

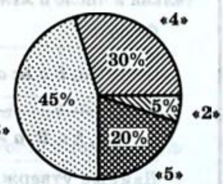
94 Решите систему линейных неравенств:

а) $\begin{cases}3x+7>(x+2)-(2x-1)\\ \dfrac{7-2x}{6}>\dfrac{3x-7}{12}\end{cases}$; б) $\begin{cases}5\leqslant x^2-x(x+1)\\ 3(2x-2{,}4)\geqslant 2(4{,}5-x)-56{,}2\end{cases}$.

95 Решите совокупность линейных неравенств:

а) $\left[\begin{array}{l}2x-(x-4)<6\\ x>3(2x-1)+18\end{array}\right.$; б) $\left[\begin{array}{l}2x-\dfrac{1-x}{5}<x+1\\ x-\dfrac{7x-1}{4}\leqslant 1\end{array}\right.$.

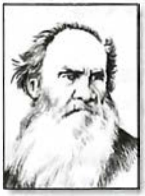
96 На диаграмме показаны результаты выпускного экзамена по математике (отметка и процент получивших её учеников). Найдите средний балл, полученный выпускниками на этом экзамене.



C **97*** Найдите наименьшее целое x, удовлетворяющее неравенству $x\geqslant\dfrac{200}{x}$.

98* Назовем число n^2-1 *почти квадратом* натурального числа n. Докажите, что произведение двух почти квадратов натуральных чисел всегда равно разности каких-то двух квадратов натуральных чисел.

5.3.2. Доказательство неравенств. Некоторые замечательные неравенства



...Большинство жизненных задач решаются как алгебраические уравнения: приведением их к самому простому виду.

Л. Н. Толстой (1828–1910),
русский писатель, мыслитель

Решая неравенство, мы находим такие значения переменной, при которых данное неравенство становится истинным высказыванием. Однако существуют неравенства, истинные при любых значениях входящих в них букв. Простейшими примерами таких неравенств являются, например, неравенства:

$$a^2 \geqslant 0, \qquad |x| \geqslant 0, \qquad -y^2 - 1 < 0.$$

Истинность данных неравенств очевидна. Первое следует из свойств произведения, второе – из определения модуля числа, а третье – из правил сложения действительных чисел.

Однако в большинстве случаев доказать истинность неравенства не так просто. В этом пункте мы будем учиться доказывать неравенства.

Введем несколько определений, которые нам потребуются.

Определение 1. ***Доказать неравенство*** – это значит обосновать, что оно выполняется при всех допустимых значениях входящих в него переменных (или для какого-то заданного множества их значений).

Мы знаем, что понятия «больше», «меньше», «равно» возникли в связи со счётом предметов и необходимостью сравнивать различные величины. Однако наглядные представления недостаточны для строгого доказательства буквенных неравенств. Поэтому сформулируем алгебраические определения соотношений «больше» и «меньше», основанные, тем не менее, на имеющемся у нас опыте сравнения и действий с числами, а именно: вычитая из большего числа меньшее, мы получаем положительное число, а из меньшего большее – отрицательное.

Определение 2. Говорят, что число *a больше* числа *b*, если разность $a - b$ положительна и число *a меньше* числа *b*, если разность $a - b$ отрицательна.

Отсюда:

$\forall a, b \in \mathbf{R}: a > b \Leftrightarrow a - b > 0$	$\forall a, b \in \mathbf{R}: a < b \Leftrightarrow a - b < 0$
$\forall a, b \in \mathbf{R}: a \geqslant b \Leftrightarrow a - b \geqslant 0$	$\forall a, b \in \mathbf{R}: a \leqslant b \Leftrightarrow a - b \leqslant 0$

Данные утверждения помогут нам доказывать неравенства. Так для доказательства неравенства $P(x) > Q(x)$ на заданном множестве значений достаточно составить разность $P(x) - Q(x)$ и убедиться в том, что она положительна при любом x.

Разберёмся с применением этого способа на следующем примере.

Пример 1.

Доказать неравенство $(a^2+1)^2 \geqslant a^4+1$.

Доказательство:

Перенесём все члены неравенства влево и докажем, что полученная разность $(a^2+1)^2-(a^4+1)$ неотрицательна.

Преобразуем полученное выражение:

$$(a^2+1)^2-(a^4+1)=a^4+2a^2+1-a^4-1=2a^2.$$

Полученное произведение $2a^2$ неотрицательно при любых значениях a, значит, $(a^2+1)^2 \geqslant a^4+1$, что и требовалось доказать. ■

В рассмотренном нами примере мы ссылались на то, что выражение $2a^2$ неотрицательно при любых значениях a. Этой идеей часто пользуются при доказательстве неравенств. Для этого все члены неравенства переносят в одну сторону и преобразуют полученное выражение к явно неотрицательному виду (к квадрату некоторого выражения или сумме нескольких квадратов).

Пример 2.

Доказать, что для любого положительного значения x выполняется неравенство $x+\frac{1}{x} \geqslant 2$ (сумма двух взаимно обратных положительных чисел не менее двух), причём равенство имеет место только при $x=1$.

Доказательство:

Рассмотрим разность:

$$x+\frac{1}{x}-2=\frac{x^2+1-2x}{x}=\frac{(x-1)^2}{x}.$$

Числитель дроби является квадратом двучлена, значит, её знак зависит только от знаменателя. По условию $x>0$. На всем заданном множестве дробь положительна и обращается в нуль только при $x=1$, что и требовалось доказать. ■

Пример 3 (*неравенство Коши-Буняковского*).

Доказать, что для любых чисел a, b, c, d верно неравенство:

$$(ab+cd)^2 \leqslant (a^2+c^2)(b^2+d^2),$$

причём равенство имеет место тогда и только тогда, когда $ad=bc$, то есть когда пара чисел a, c пропорциональна паре чисел b, d.

Доказательство:

Рассмотрим разность $(a^2+c^2)(b^2+d^2)-(ab+cd)^2$.

Преобразуем полученное выражение:

$$a^2b^2+b^2c^2+a^2d^2+c^2d^2-a^2b^2-c^2d^2-2abcd=a^2d^2+b^2c^2-2abcd=(ad-bc)^2$$

Квадрат разности всегда неотрицателен и обращается в нуль тогда и только тогда, когда $(ad-bc)^2=0$, то есть $ad=bc$.

Значит, исходное неравенство верно, что и требовалось доказать. ■

Для доказательства всех трёх приведённых неравенств использовался один и тот же метод. Представим его в обобщённом виде.

При доказательстве неравенства можно *выполнять следующие шаги:*

1) составить разность левой и правой частей неравенства;
2) с помощью равносильных преобразований привести полученную разность к выражению, знак которого очевиден;
3) сделать вывод о выполнении исходного неравенства.

В математике есть так называемые ***«замечательные неравенства»***, которые помогают доказывать другие неравенства. Многие из них связаны с понятием *среднего* двух чисел. Мы уже знаем, что число $\dfrac{a+b}{2}$ называется ***средним арифметическим*** двух чисел a и b. Познакомимся ещё с одним средним двух чисел – *средним геометрическим*.

Определение 3. ***Средним геометрическим*** (или средним пропорциональным) двух неотрицательных чисел a и b называется число $\sqrt{ab}$.

Установим неравенство, связывающее эти средние значения.

1. Среднее геометрическое двух неотрицательных чисел не превосходит их среднего арифметического:

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab},$$

причём равенство имеет место тогда и только тогда, когда $a = b$.

Доказательство:

Составим разность левой и правой частей неравенства и выполним преобразования:

$$\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}=\frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2}=\frac{\left(\sqrt{a}\right)^2+\left(\sqrt{b}\right)^2-2\sqrt{a}\sqrt{b}}{2}=\frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}{2}\geqslant 0.$$

Значит, $\dfrac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$. При этом данное нестрогое неравенство обращается в равенство тогда и только тогда, когда $\sqrt{a}=\sqrt{b}$, то есть $a = b$, что и требовалось доказать. ■

Рассмотрим пример доказательства неравенства, в котором применяется доказанное нами соотношение между средними значениями.

Пример 4.

Доказать, что неравенство $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{d}+\dfrac{d}{a} \geqslant 4$ справедливо для любых положительных чисел a, b, c, d.

Доказательство:

Рассмотрим левую часть неравенства. Применим к первому и третьему, а затем ко второму и четвертому слагаемым неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим. Получим:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d} \geqslant 2\sqrt{\frac{ac}{bd}} \text{ и } \frac{b}{c}+\frac{d}{a} \geqslant 2\sqrt{\frac{bd}{ac}}.$$

Теперь применим то же неравенство к числам $\sqrt{\dfrac{ac}{bd}}$ и $\sqrt{\dfrac{bd}{ac}}$:

$$\sqrt{\frac{ac}{bd}}+\sqrt{\frac{bd}{ac}} \geqslant 2\sqrt{\sqrt{\frac{ac}{bd}}\sqrt{\frac{bd}{ac}}}=2\sqrt{\frac{abcd}{abcd}}=2\sqrt{1}=2.$$

Значит, $\sqrt{\dfrac{ac}{bd}}+\sqrt{\dfrac{bd}{ac}} \geqslant 2$. Отсюда,

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{d}+\frac{d}{a}=\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{d}{a}\right) \geqslant 2\sqrt{\frac{ac}{bd}}+2\sqrt{\frac{bd}{ac}}=2\left(\sqrt{\frac{ac}{bd}}+\sqrt{\frac{bd}{ac}}\right) \geqslant 2\cdot 2=4$$

Таким образом, $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{d}+\dfrac{d}{a} \geqslant 4$, что и требовалось доказать. ■

Зафиксируем способ доказательства, который был использован в данном примере.

> Для доказательства неравенства можно *оценивать части неравенства, используя ранее доказанные неравенства.*

* * *

Познакомимся с ещё несколькими неравенствами для средних. Для этого введём следующие определения.

Определение 4. ***Средним гармоническим двух положительных чисел*** a и b называется число $\dfrac{2ab}{a+b}$.

Определение 5. ***Средним квадратичным двух положительных чисел*** a и b называется число $\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$.

Легко видеть, что если $a = b$, то все рассмотренные нами средние значения равны общему значению a и b. Если $a \neq b$ (пусть для определённости $a < b$), то на числовой прямой все эти средние значения расположены между числами a и b.

Докажем это на примере среднего гармонического.

Пример 5.

Доказать, что среднее гармоническое чисел a и b, где $0 < a < b$, расположено между этими числами:

$$a<\frac{2ab}{a+b}<b.$$

Доказательство:

Составим разность левой и правой частей каждого из двух искомых неравенств и выполним преобразования.

$$\frac{2ab}{a+b}-a=\frac{2ab-a^2-ab}{a+b}=\frac{ab-a^2}{a+b}=\frac{a(b-a)}{a+b}>0,$$

$$b-\frac{2ab}{a+b}=\frac{ab+b^2-2ab}{a+b}=\frac{b-ab^2}{a+b}=\frac{b(b-a)}{a+b}>0.$$

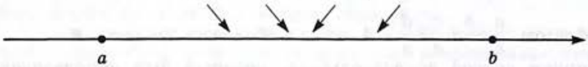
В обоих случаях мы получили положительные разности, так как все множители в числителе и знаменатели положительны.

Значит, $a<\dfrac{2ab}{a+b}<b$, что и требовалось доказать. ■

Остальные неравенства о расположении среднего арифметического, среднего геометрического и среднего квадратичного этих чисел a и b между этими же числами попробуйте доказать самостоятельно.

Естественно задаться вопросом, в каком же порядке располагаются эти средние на числовой прямой. Оказывается, для любых неотрицательных[3] чисел a и b имеет место следующая цепочка неравенств:

$$\frac{2ab}{a+b} \leqslant \sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2} \leqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$



Соотношение между средним арифметическим и средним геометрическим мы уже рассмотрели. При доказательстве остальных неравенств мы будем использовать то, что для неотрицательных чисел m, n справедливо следующее равносильное преобразование:

$$m < n \Leftrightarrow m^2 < n^2$$

Другими словами, *если обе части неравенства неотрицательны, то при их возведении в квадрат получится равносильное неравенство.*

Сравним сначала среднее арифметическое и среднее квадратичное, а затем – среднее гармоническое и среднее геометрическое.

2. Среднее арифметическое двух неотрицательных чисел не превосходит их среднего квадратичного:

$$\frac{a+b}{2} \leqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}},$$

причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда $a = b$.

Доказательство:

Так как обе части неравенства неотрицательны, то при возведении в квадрат получим неравенство, равносильное исходному:

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \left(\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{(a+b)^2}{4} \leqslant \frac{a^2+b^2}{2}.$$

Составим разность и приведем её к выражению, знак которого очевиден:

$$\frac{a^2+b^2}{2} - \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{2a^2+2b^2-a^2-2ab-b^2}{4} = \frac{a^2-2ab+b^2}{4} = \frac{(a-b)^2}{4} \geqslant 0.$$

Значит,

$$\frac{a^2+b^2}{2} \geqslant \frac{(a+b)^2}{4} \Leftrightarrow \frac{a+b}{2} \leqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

Равенство имеет место тогда и только тогда, когда $a = b$, что и требовалось доказать.

3. Среднее гармоническое двух положительных чисел не превосходит их среднего геометрического:

$$\frac{2ab}{a+b} \leqslant \sqrt{ab},$$

причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда $a = b$.

Доказательство:

Так как обе части неравенства неотрицательны, то

$$\frac{2ab}{a+b} \leqslant \sqrt{ab} \Leftrightarrow \frac{4a^2b^2}{(a+b)^2} \leqslant ab$$

[3] Левое из неравенств имеет место для любых положительных чисел a и b.

Составим разность и приведем ее к выражению, знак которого очевиден:

$$ab-\frac{4a^2b^2}{(a+b)^2}=\frac{ab\left(a^2+2ab+b^2\right)-4a^2b^2}{(a+b)^2}=\frac{ab\left(a^2+2ab+b^2-4ab\right)}{(a+b)^2}=\frac{ab(a-b)^2}{(a+b)^2}\geqslant 0.$$

Значит,

$$\frac{4a^2b^2}{(a+b)^2}\leqslant ab \;\Leftrightarrow\; \frac{2ab}{a+b}\leqslant\sqrt{ab}.$$

Так как $a>0$ и $b>0$, равенство имеет место тогда и только тогда, когда $a=b$, что и требовалось доказать. ■

Зафиксируем способ доказательства, который мы использовали в последних примерах и который может быть полезен при доказательстве разнообразных неравенств.

> При доказательстве неравенства можно *заменять неравенство другим равносильным ему неравенством.*

Замечание. Вообще, одно и то же неравенство часто может быть доказано несколькими способами. В математике, как и в жизни, ценится тот способ, который позволяет достичь цели путем наименьших затрат.

Так, например, последнее неравенство можно доказать гораздо проще:

$\dfrac{2ab}{a+b}\leqslant\sqrt{ab}$ | разделим обе части неравенства на $\sqrt{ab}$ $\left(\sqrt{ab}>0\right)$;

$\dfrac{2\sqrt{ab}}{a+b}\leqslant 1$ | умножим на $\dfrac{a+b}{2}$ ($\dfrac{a+b}{2}>0$, так как $a>0$ и $b>0$ по условию);

$\sqrt{ab}\leqslant\dfrac{a+b}{2}$ (истинно).

Истинность полученного неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим позволяет утверждать, что и исходное неравенство верно.

В заключение заметим, что классические средние, рассмотренные нами в этом пункте, были известны ещё античным математикам. Они играли большую роль, например, в древнегреческой теории музыки. Однако неравенства для средних и сами средние применяются до сих пор, причём не только в алгебре и геометрии, но и в других науках, например в статистике при обработке результатов измерений.

К **99** Укажите множество значений a, при которых неравенство обращается в истинное утверждение:

а) $1-a<5$; б) $\dfrac{a}{9}\leqslant\dfrac{1}{3}$; в) $a^2+3>0$; г) $(a-4)(a+3)\geqslant 0$.

Какое из неравенств отличается от остальных? Приведите ещё один пример неравенства, которое истинно при любых значениях входящих в него букв.

100 Сравните числа:

а) 2 и 5; б) −5 и −2; в) $\sqrt{c}$ и $2\sqrt{c}$; г) a^2 и a^4.

Найдите разность этих чисел. Что вы замечаете?

Объясните, когда число a *меньше* числа b, на математическом языке.

Сформулируйте алгебраическое определение соотношений «меньше» и «больше». Сопоставьте свой вариант с определением на с. 32.

101 Докажите неравенство $(a^2+2)^2 > a^4+1$, используя введенное определение «больше». Сформулируйте шаги этого метода доказательства неравенств и сопоставьте его с вариантом, изложенным на с. 34.

102 Докажите неравенство:

а) $\dfrac{x^2+y^2}{2} \geqslant xy$; б) $2xy - x^2 \leqslant y^2$.

103 Докажите неравенство $1+x \geqslant 2\sqrt{x}$ при $x \geqslant 0$.

104 Докажите неравенство $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y} \geqslant \dfrac{4}{x+y}$ при $x, y > 0$.

105 Докажите неравенство $2\left(x^2+y^2\right) \geqslant (x+y)^2$.

106 Найдите среднее арифметическое следующих чисел:

а) 2 и 4; б) 200 и 300; в) 0,6 и 0,7; г) a и b.

Как расположено среднее арифметическое двух чисел по отношению к этим числам на числовой прямой? Запишите это свойство среднего арифметического с помощью двойного неравенства (пусть для определенности $a < b$).

Докажите это неравенство.

107 Познакомьтесь с другими средними, описанными на с. 34–35. Сформулируйте и докажите для них свойства, аналогичные свойству среднего арифметического.

108 В одном из древних математических текстов, автором которых считается древнегреческий математик Архит (ок. 428–365 гг. до н.э.), среднее арифметическое m, среднее геометрическое g и среднее гармоническое h определялись как равные средние члены соответственно арифметической, геометрической и гармонической «пропорций»:

$$a - m = m - a; \quad a : g = g : a; \quad (a-h) : a = (h-b) : b.$$

Получите из этих «древних» равенств современные равенства, определяющие описанные Архитом средние.

109* Докажите для неотрицательных чисел двойное неравенство

$$x^2+y^2+z^2 \geqslant xy+yz+zx \geqslant x\sqrt{yz}+y\sqrt{zx}+z\sqrt{xy}.$$

П **110** Решите неравенство методом интервалов:

а) $(x-7)(x+10)>0$;

б) $(x+3)(x-1)(5-x)<0$;

в) $-4x+8x(4+x) \geqslant (3x-4)(3x+4)+4(7x-5)$;

г) $-3x^2+4x+4 \leqslant 0$;

д) $(x-3)^2(x-5)(x+8)(x-6)>0$;

е) $x^2(x-4)(x+2)(x+5) \leqslant 0$.

111 Решите неравенство:

а) $\left(x^2-4\right)\left(x^2+x-2\right) \leqslant 0$;

б) $\left(x^2-7x+12\right)\left(3x-x^2-7\right)>0$;

в) $(x+6)(x+1)(x-2)^3(3-x)^2(8-x) \leqslant 0$.

112 Решите дробно-рациональное неравенство методом интервалов:

а) $\dfrac{5x-12}{5x+12} \leqslant 0$; в) $\dfrac{x^3(x-1)^4(x+5)}{(1-5x)(x+2)^6(x-8)} < 0$;

б) $\dfrac{(x+3)(4-x)(2x+5)}{(3x-1)(x+4)} \geqslant 0$; г) $\dfrac{(x-2)(x^2-1)(x^2-5x+6)}{x+3} \geqslant 0$.

113 Найдите число целых решений неравенства $\dfrac{x+2}{x} - \dfrac{3}{x-2} \leqslant 0$.

114 Найдите область допустимых значений выражения:

а) $\sqrt{(x^2-16)(8-3x)}$; б) $\sqrt{\dfrac{1-4x+4x^2}{x^2-9}}$.

115 Найдите целое положительное значение a, при котором множество решений неравенства $(1-x)(x-a) \geqslant 0$ содержит пять целых решений.

116 Расположив числа по убыванию, прочитайте русскую народную поговорку:

$1-\sqrt{2}$	$\dfrac{5}{6}$	$\dfrac{6}{7}$	$(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})$	$\dfrac{12}{11}$	$\sqrt{2}$	$\dfrac{11}{10}$
сладок	его	плод	да	горек	корень	ученья

117 Сравните числа a и b, если известно, что:

а) $a + 4{,}5 = b + 4{,}5$; д) $a : 5 = b$;

б) $a = b + \sqrt{2}$; е) $a = 0{,}5b$;

в) $a - 3 = b - 5$; ж) $5a = 2b$;

г) $a + \sqrt{3} = b - \sqrt{3}$; з) $\dfrac{a}{5} = \dfrac{b}{2}$.

118 Множества M и N заданы числовыми промежутками:

а) $M = (-8; 2)$, $N = (-1; 8]$;

б) $M = \left[-\sqrt{7}; \sqrt{7}\right]$, $N = (-\infty; -\sqrt{7}]$.

Найдите $M \cup N$, $M \cap N$.

119 Решите системы неравенств, содержащие модуль:

а) $\begin{cases} |x-6| \leqslant 7 \\ 2x-3 \geqslant 7 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 14{,}2-2x > 10-x \\ 8 \geqslant -4x \\ |x-4| < 1 \end{cases}$.

120 Решите систему неравенств, содержащую модуль, графическим способом:

а) $\begin{cases} |x-2| \leqslant 5 \\ |x-4| \geqslant 2 \end{cases}$; б) $\begin{cases} |x|+x-2 \leqslant 0 \\ |x-1|+|x-2|-3 > 0 \end{cases}$.

121 Найдите область допустимых значений выражения:

а) $\sqrt{7-|x|} \cdot \sqrt{x+6}$; б) $\dfrac{\sqrt{5x-6}}{\sqrt{|x-2|-2}}$.

122 В таблице приведены данные о добыче угля на одном из российских месторождений:

Номер шахты	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Количество добытого угля за смену (в т)	12	8	9	9	8	8	9	12	11	8

Найдите:

а) среднее количество добытого угля за смену в шахтах этого месторождения;

б) моду набора значений количества угля;

в) медиану набора значений количества угля.

Д **123** Докажите, что при $a \neq 0$ выполняется неравенство

$$a^2 + \frac{16}{a^2} \geqslant 8.$$

124 Докажите неравенство $\frac{1+8x}{1+8x^2} \leqslant 2$.

125 Докажите неравенство $2\left(x^2+y^2\right) \geqslant (x-y)^2$.

126 Решите дробно-рациональное неравенство методом интервалов:

а) $\frac{2-3x}{2+3x} \geqslant 0$; б) $\frac{3x^2-9x}{-2x^2+3x+2} < 0$; в) $\frac{x(x-3)^2(x+7)^5(4x+1)}{(x-4)(x+5)^4} \geqslant 0$.

127 Решите системы неравенств, содержащие модуль:

а) $\begin{cases} |x-2| < 5-x \\ 2x-9 \leqslant 7x-14 \end{cases}$; б) $\begin{cases} |3-x| \geqslant 1 \\ -10 < 2x+4 \\ 28-7x \geqslant 21-6x \end{cases}$.

128 В таблице приведены данные о возрастном составе участников школьных соревнований:

Возраст (сколько лет)	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Число участников	1	2	3	6	5	3	2	2	1

Найдите:

а) средний возраст участников соревнований;

б) моду набора значений возраста участников соревнований;

в) медиану набора значений возраста участников соревнований.

С **129*** Докажите неравенство $x^4+y^4+8 \geqslant 8xy$.

130* Даны действительные числа a, b, c, причем $a > b > c$. Докажите неравенство

$$a^2b+b^2c+c^2a > b^2a+a^2c+c^2b.$$

131* Докажите неравенство $(x+y)(y+z)(z+x) \geqslant 8xyz$ при $x, y, z \geqslant 0$.

5.3.3.* Задачи на максимум и минимум

Ещё почти никогда ... не бывало, чтобы та самая голова, которая впервые натолкнулась на ту или иную новую идею, до конца исчерпала бы её.

Л.Э. Больцман (1844–1906),
австрийский физик,
иностранный почётный член Петербургской АН

При изучении квадратного трёхчлена мы научились находить его наибольшее и наименьшее значения. Однако практические задачи требуют умения оценивать значения и других выражений. В этом пункте мы познакомимся с новым способом решения задач на максимум и минимум.

Рассмотрим следующую задачу.

Задача 1.

Чтобы огородить участок земли под посадку клубники, купили сетку длиною P метров. Какую максимальную площадь может иметь огороженный участок, если он должен иметь прямоугольную форму? Как в этом случае следует расположить изгородь?

Решение:

Данную задачу можно переформулировать следующим образом: «Найти наибольшую возможную площадь прямоугольника, если периметр его равен P».

Обозначим стороны прямоугольника a и b метров, тогда $P = 2(a + b)$ м, а площадь прямоугольника $S = ab$ м^2. Нам необходимо установить наибольшее значение произведения чисел ab при постоянной их сумме $a + b = \frac{P}{2}$.

Применим к длинам сторон прямоугольника неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$.

Для рассматриваемых в задаче величин оно означает $\frac{P}{4} \geqslant \sqrt{S}$. Выполним равносильные преобразования (по условию $P > 0$):

$$\frac{P}{4} \geqslant \sqrt{S} \iff \sqrt{S} \leqslant \frac{P}{4} \iff S \leqslant \frac{P^2}{16}.$$

Мы получили неравенство, в котором зафиксирована оценка площади: $S \leqslant \frac{P^2}{16}$. Нестрогое неравенство о среднем арифметическом и среднем геометрическом обращается в равенство, если числа, среднее значение которых мы находили, равны. Значит, свое максимальное значение $\frac{P^2}{16}$ площадь принимает при $a = b$, то есть в случае, когда прямоугольник является квадратом со стороной $\frac{P}{4}$ м.

Ответ: сетка длиною P м позволяет огородить участок максимальной площади $\frac{P^2}{16}$ м^2. Сетку следует обнести вокруг участка квадратной формы со стороной $\frac{P}{4}$ м.

Как мы видим, в некоторых случаях *задача нахождения наибольшего или наименьшего значения выражения решается с помощью уже известных неравенств* (например, доказанного нами в предыдущем пункте неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим).

Решим теперь с помощью этого неравенства несколько задач на максимум и минимум и, выявив особенности этого решения, сформулируем способ нахождения наибольшего (наименьшего) значения выражений.

Пример 1.

Найти наименьшее значение выражения $x+\frac{9}{x}$ при $x > 0$.

Решение:

Применим к числам x и $\frac{9}{x}$ неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим:

$$x+\frac{9}{x} \geqslant 2\sqrt{x\cdot\frac{9}{x}} \iff x+\frac{9}{x} \geqslant 2\sqrt{9} \iff x+\frac{9}{x} \geqslant 6.$$

Мы получили неравенство $x+\frac{9}{x} \geqslant 6$, в котором зафиксирована оценка суммы. Оно говорит о том, что любое значение суммы, в том числе и наименьшее, не меньше 6. Но не дает информации, каким является наименьшее значение: 6, 9, 25, 1000? А в этом как раз и состоит вопрос задачи.

Для ответа на этот вопрос воспользуемся вновь неравенством между средним арифметическим и средним геометрическим. Мы знаем, что оно обращается в равенство, если числа, средние которых находят, равны. Значит, наше равенство имеет место тогда и только тогда, когда $x=\frac{9}{x}$, то есть при $x^2 = 9$. Так как $x > 0$, то $x = 3$.

Ответ: наименьшее значение достигается при $x = 3$ и равно 6.

Итак, при решении задач на наибольшие и наименьшие значения *нужно точно устанавливать, при каких значениях переменных полученное нестрогое неравенство обращается в равенство (или доказать, что такие значения переменных существуют).* Иначе можно получить неверный ответ. Так, например, при всех $x > 0$ выполняется неравенство $x+\frac{9}{x} \geqslant 1$, но наименьшее значение этого выражения равно не единице, а шести.

Пример 2.

Найти наименьшее значение выражения $\frac{(x+2)(x+3)}{x}$ при $x > 0$.

Решение:

Преобразуем данное выражение так, чтобы к нему можно было применить неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим.

$$\frac{(x+2)(x+3)}{x}=\frac{x^2+5x+6}{x}=x+\frac{6}{x}+5.$$

Теперь к числам x и $\frac{6}{x}$ мы можем применить неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим.

При всех $x > 0$ имеет место неравенство:

$$x+\frac{6}{x} \geqslant 2\sqrt{x\cdot\frac{6}{x}}=2\sqrt{6}.$$

Значит, $x+\frac{6}{x}+5 \geqslant 2\sqrt{6}+5$. Причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда $x=\frac{6}{x}$, то есть при $x=\sqrt{6}$. Значит, наименьшее значение равно $2\sqrt{6}+5$.

Ответ: наименьшее значение выражения $\frac{(x+2)(x+3)}{x}$ при $x > 0$ равно $2\sqrt{6}+5$ и достигается при $x=\sqrt{6}$.

Как мы видим, в некоторых случаях, чтобы применить известное неравенство *исходное выражение следует преобразовать.*

Итак, мы приходим к следующему способу нахождения наименьшего (наибольшего) значения выражения.

Чтобы найти наименьшее (наибольшее) значение выражения $P(x)$, можно:

1) преобразовать выражение $P(x)$ так, чтобы его значение можно было оценить с помощью известных неравенств;
2) получить оценку выражения в виде нестрогого неравенства $P(x) \geqslant k$ $(P(x) \leqslant k)$, где k – некоторое число;
3) найти значения переменной x, при котором имеет место равенство $P(x) = k$ (или доказать, что такое значение x существует);
4) записать, что наименьшее (наибольшее) значение $P(x)$ равно k.

Рассмотрим несколько примеров применения полученного нами способа.

Пример 3.

Найти наименьшее значение выражения $\frac{x^4+x^2+1}{x^2+1}$.

Решение:

1) Преобразуем выражение так, чтобы его значение можно было оценить с помощью уже известных нам неравенств:

$$\frac{x^4+x^2+1}{x^2+1}=\frac{x^4+2x^2+1-x^2-1+1}{x^2+1}=\frac{\left(x^2+1\right)^2-\left(x^2+1\right)+1}{x^2+1}=x^2+1+\frac{1}{x^2+1}-1.$$

2) Так как $x^2+1>0$ при всех значениях x, то из неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим следует, что $x^2+1+\frac{1}{x^2+1} \geqslant 2$. Тогда $\frac{x^4+x^2+1}{x^2+1}=x^2+1+\frac{1}{x^2+1}-1 \geqslant 2-1=1$.

3) Равенство имеет место тогда и только тогда, когда $x^2+1=\frac{1}{x^2+1}$:

$$x^2+1=\frac{1}{x^2+1} \Leftrightarrow (x^2+1)^2=1 \Leftrightarrow x^2+1=1 \Leftrightarrow x=0.$$

Ответ: наименьшее значение $\frac{x^4+x^2+1}{x^2+1}$ равно 1 и достигается при $x=0$.

Заметим, что это значение можно было найти и проще. Преобразовав алгебраическую дробь в сумму двух дробей и выполнив сокращение, получим:

$$\frac{x^4+x^2+1}{x^2+1}=1+\frac{x^4}{x^2+1} \geqslant 1.$$

Равенство достигается, когда числитель дроби $\frac{x^4}{x^2+1}$ равен нулю, то есть при $x=0$.

Пример 4.

Найти наибольшее значение выражения $\dfrac{x}{x^2+3x+16}$ при $x > 0$.

Решение:

Рассмотрим дробь, обратную данной $\dfrac{x^2+3x+16}{x} = x + \dfrac{16}{x} + 3$.

Аналогично рассмотренным выше примерам при всех $x > 0$ выполняется неравенство $x + \dfrac{16}{x} \geqslant 2\sqrt{x \cdot \dfrac{16}{x}} = 8$. Значит, $\dfrac{x^2+3x+16}{x} = x + \dfrac{16}{x} + 3 \geqslant 8 + 3 = 11$.

Равенство имеет место при $x = \dfrac{16}{x}$, то есть $x = 4$.

Тогда для обратной положительной величины при $x = 4$ имеем: $\dfrac{x}{x^2+3x+16} \leqslant \dfrac{1}{11}$.

Ответ: наибольшее значение выражения $\dfrac{x}{x^2+3x+16}$ при $x > 0$ равно $\dfrac{1}{11}$ и достигается при $x = 4$.

* * *

Пример 5.

Найти наименьшую возможную длину диагонали прямоугольника, если площадь его равна S.

Решение:

Пусть длины сторон прямоугольника равны a и b. Тогда длина диагонали d по теореме Пифагора равна $\sqrt{a^2+b^2}$, а площадь $S = ab$. Применим к длинам сторон неравенство между средним квадратичным и средним геометрическим: $\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}} \geqslant \sqrt{ab}$.

Для рассматриваемых в задаче величин оно означает, что $\dfrac{d}{\sqrt{2}} \geqslant \sqrt{S}$.

Равенство имеет место при $a = b$, то есть когда прямоугольник является квадратом.

Ответ: если площадь прямоугольника равна S, то наименьшую возможную длину диагонали, равную $\sqrt{2S}$, имеет квадрат со стороной $\sqrt{S}$.

К **132** Найдите среднее арифметическое и среднее геометрическое чисел:

а) 4 и 9; б) 5 и 20; в) 100 и 100; г) 33 и 55.

Сравните полученные в каждом случае значения. Какое свойство позволяет сделать это без всяких вычислений?

В каком случае среднее арифметическое равно среднему геометрическому?

133 Прямоугольник имеет стороны a и b, периметр P и площадь S. Запишите среднее арифметическое сторон этого прямоугольника, выразите его через периметр прямоугольника P. Запишите среднее геометрическое сторон этого прямоугольника, выразите его через площадь прямоугольника S.

134 1) Найдите наибольшую возможную площадь прямоугольника, периметр которого равен P. Какое из «замечательных неравенств» может в этом помочь?

2) Сопоставьте свой способ решения этой задачи с решением на с. 41.

3) Сформулируйте еще один способ, с помощью которого можно решить задачу на максимум и сопоставьте его с изложенным на с. 43.

135 Найдите наименьшее значение выражения $\dfrac{4x^4+25x^2+100}{x^2}$.

136 Найдите наибольшее значение выражения $\dfrac{x}{3x^2+x+27}$ при $x>0$.

137 Докажите неравенство:

а) $a^2-ab+b^2\geqslant 0$; б) $(b+1)(3-b)<5$; в) $-a^2+8ab-17b^2<0$.

138 Изобразите на координатной плоскости множества решений неравенств:

а) $5x+2y+2\geqslant 0$; б) $-x+y-8<0$; в) $4y-1<0$.

139 Изобразите на координатной плоскости множество решений системы неравенств:

а) $\begin{cases}-x-y\geqslant 0\\-x+y\leqslant 0\end{cases}$; б) $\begin{cases}x-2y+2<0\\x+y-4\geqslant 0\end{cases}$.

140 Записан рост (в сантиметрах) шести учащихся восьмого класса: 160, 166, 158, 172, 164, 170. На сколько отличается среднее арифметическое этого набора чисел от его медианы?

141 Фирма изготавливает и продаёт футболки с логотипом предстоящего спортивного праздника. Стоимость заказа из 20 футболок составляет 1000 рублей, а заказа из 50 футболок – 2250 рублей. На сколько процентов стоимость одной футболки при заказе 20 штук больше, чем при заказе 50 штук? (Ответ округлите до целого числа процентов.)

142 Найдите среднее арифметическое и среднее геометрическое чисел:

а) 6 и 24; б) 8 и 32; в) 5 и 45; г) 111 и 444.

Придумайте пару чисел, среднее арифметическое которых совпадает со средним геометрическим.

143 Найдите наименьшее значение выражения $\dfrac{x^4+4x^2+4}{x^2}$.

144 Найдите наибольшее значение выражения $\dfrac{x}{x^2+x+1}$ при $x>0$.

145 Докажите неравенство:

а) $4a^2+25b^2\geqslant 20ab$; б) $a^2+2b^2+c^2\geqslant 2b(a+c)$; в) $b^2+6>2b$.

146 Изобразите на координатной плоскости множества решений неравенств:

а) $4x-8y-1\leqslant 0$; б) $-x-y+3>0$; в) $5x+5>0$.

147* Что больше — $123\,456\,789\cdot 123\,456\,787$ или $123\,456\,788^2$?

148* Какое наименьшее количество чисел нужно исключить из набора 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 так, чтобы оставшиеся числа можно было разбить на две группы с одинаковым произведением чисел в группах? Приведите пример такого разбиения на группы.

Выполните тест № 8 для самостоятельной проверки знаний.

Задачи для самоконтроля к главе 5

149 Найдите область определения алгебраической дроби:

а) $\frac{x+5}{x(x-5)}$; б) $\frac{x}{9x^2-4}$; в) $\frac{2x-1}{4x^2+4x+1}$; г) $\frac{x-2}{x^3-8}$.

150 Сократите алгебраическую дробь:

а) $\frac{40(a^2b)^3}{72a^3b^4}$; б) $\frac{9m}{3m^2-9m}$; в) $\frac{n^2-36}{2n^2+12n}$; г) $\frac{5t-10}{5t^2-20t+20}$.

151 Выполните действия:

а) $\frac{2+3d}{14d}+\frac{d-3}{21d}$; б) $\frac{7}{x+3}-\frac{7}{x-3}$; в) $5-\frac{5v}{v-4}+\frac{5v-20}{v^2-8v+16}$.

152 Выполните действия:

а) $-\frac{72k^6}{p^8}\cdot\frac{p^4}{12k^6}$; г) $\frac{8a-b}{2a+3b}:\frac{16a-2b}{9b^2+12ab+4a^2}$;

б) $\frac{q-4s}{s-q}\cdot\frac{q^2-s^2}{20s-5q}$; д) $\frac{y^3+64}{y+8}:\frac{y^2+8y+16}{y^2+12y+32}$;

в) $\frac{p^2-4p-21}{p^2}\cdot\frac{p^6}{p-7}$; е) $\frac{z^2+4z-21}{z}\cdot\frac{z}{9-6z+z^2}:\frac{14+2z}{z}$.

153 Упростите выражение и найдите его значение при $x=\sqrt{5}+5$ и $y=\sqrt{5}-5$:

$$\left(\frac{2}{x-y}+\frac{2}{x+y}\right):\frac{x}{x^2+y^2-2xy}.$$

154 При каких значениях x, где $x\in Z$, алгебраическая дробь является целым числом?

а) $\frac{2x+4}{x-1}$; б) $\frac{5x^2+x-10}{x+2}$.

155 Решите дробно-рациональное уравнение:

а) $\frac{3x^2-21x}{x-1}=0$; б) $\frac{2x+3}{x-1}=\frac{x+1}{x}$; в) $\frac{4}{x+1}-\frac{1}{x}=1$.

156 Решите дробно-рациональное уравнение:

а) $\frac{2}{x^2-1}-\frac{2}{x-1}=\frac{x}{x+1}$; б) $\frac{2}{x+2}+\frac{3}{x^2+x-2}=\frac{1}{x^2-x}$.

157 Найдите все значения a, при которых уравнение $\frac{x^2+9x-36}{x+a}=0$ имеет единственный корень.

158 Решите задачи, составив дробно-рациональное уравнение:

а) Расстояние между пристанями равно 84 км. По течению реки катер прошёл это расстояние на 1 час быстрее, чем обратный путь. Найдите собственную скорость катера, если скорость течения реки равна 1 км/ч.

б) Моторная лодка рыбоохранной службы, выйдя на дежурство, прошла 8 км против течения и вернулась обратно, затратив на обратный путь на 20 минут меньше, чем на движение против течения. Определите собственную скорость лодки, если скорость течения равна 2 км/ч.

в) От пристани отправился по течению плот. Через 5 ч 20 мин вслед за плотом с той же пристани отправилась моторная лодка, которая догнала плот, пройдя 20 км. Найдите скорость движения плота, если известно, что моторная лодка двигалась на 12 км/ч быстрее, чем плот.

г) Через две трубы $\frac{4}{5}$ бассейна заполняется за 8 часов. За сколько часов наполнит бассейн первая труба, если она это делает на 15 часов быстрее второй трубы?

д) Поезд был задержан в пути на 12 минут. Чтобы наверстать потерянное время, машинист увеличил скорость на 10 км/ч и на отрезке пути в 40 километров ликвидировал отставание. С какой скоростью поезд должен был идти по расписанию?

159 Решите уравнение:

$x^2-4x+\frac{15}{x^2-4x}=8.$

160 Решите уравнение:

а) $\left(\frac{x^2+20}{x}\right)^2-18=\frac{7x^2+140}{x}$; б) $4\left(\frac{x-2}{x+3}\right)^2+\left(\frac{x+3}{x-2}\right)^2=5.$

161 Решите неравенство методом интервалов:

а) $(x-5)(x+1)>0$; г) $-x(-0{,}5-x)\leqslant 0$;

б) $x(x+4)\leqslant 0$; д) $x^2-12x+27\geqslant 0$;

в) $(4-x)(x-8)>0$; е) $-3x^2+5x-2>0$.

162 Решите систему неравенств $\begin{cases}x^2-10x-24<0\\2x-16>0\end{cases}$.

163 Решите двойное неравенство $5x-20\leqslant x^2\leqslant 8x$.

164 Решите неравенство методом интервалов:

а) $(x-4)^5(x-1)^2(7-x)<0$; б) $(x-3)^2(x+1)^3(x-5)\geqslant 0$.

165 Решите неравенство методом интервалов:

а) $\frac{(x-1)^4(x-9)}{x(x+9)^3}\geqslant 0$; б) $\frac{x^2+2x-48}{x(x-6)}\geqslant 0$; в) $\frac{1}{x-2}+\frac{2}{x}<\frac{3}{x-1}$.

166 Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases}\frac{x}{x-1}>2\\\frac{1-x}{x-2}\geqslant 1\end{cases}$; б) $\begin{cases}\frac{2x-5}{x^2-7x+10}<0\\|2x-5|\geqslant 1\end{cases}$.

167 Докажите неравенство $a^2+b^2-8a+6b+26>0$ при любых значениях a и b.

168 Найдите наименьшее значение выражения $\frac{x^4+16x^2+16}{x^2}$.

Глава 6

Элементы комбинаторики, теории вероятностей и статистики

§ 1. Элементы комбинаторики

6.1.1. Задача систематического перебора вариантов

О сколько нам открытий чудных
Готовят просвещенья дух
И опыт, сын ошибок трудных,
И гений, парадоксов друг...

Александр Пушкин, (1799–1837)
великий русский поэт, драматург и прозаик

На практике нам часто бывает нужно решать задачи, связанные с перебором вариантов, чтобы узнать их количество или чтобы из среди всех возможных комбинаций выбрать оптимальную по некоторым заданным признакам. Например, играя в шашки, шахматы или какую-нибудь компьютерную игру, требуется выбирать ходы, ведущие к выигрышу.

Мы уже знаем, что при решении таких задач перебор следует осуществлять не случайным образом, а *систематически*, по определённому правилу. При этом часто помогают инструменты, известные нам ещё из начальной школы – таблица и схема, которую мы называли «дерево» возможных вариантов.

Обобщим имеющиеся у нас знания, рассмотрев, например, следующие задачи, связанные с перебором возможных вариантов и их подсчётом.

Задача 1.

Какие двузначные коды можно составить из букв А, Б, В, Г, Д, Е, Ж, З, И, если на первом месте может стоять гласная, а на втором согласная? Достаточно ли их будет для кодирования экзаменационных листов 20 учащихся?

Решение:

Выпишем все комбинации, которые можно составить из этих букв указанным способом. Чтобы ничего не пропустить, упорядочим перебор с помощью таблицы.

	Б	В	Г	Д	Ж	З
А	АБ	АВ	АГ	АД	АЖ	АЗ
Е	ЕБ	ЕВ	ЕГ	ЕД	ЕЖ	ЕЗ
И	ИБ	ИВ	ИГ	ИД	ИЖ	ИЗ

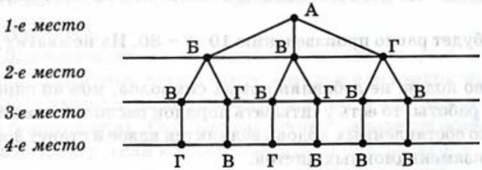
Из таблицы видно, что таких кодов 18, а значит, для кодирования 20 работ их будет недостаточно. Чтобы увеличить число кодов, можно, например, ввести ещё одну согласную букву, тогда количество кодов увеличится на 3 и составит 21.

Задача 2.

Какие различные пароли, состоящие из четырёх различных букв, можно составить, если в пароле могут быть использованы только буквы А, Б, В, Г? Сколько таких паролей существует?

Решение:

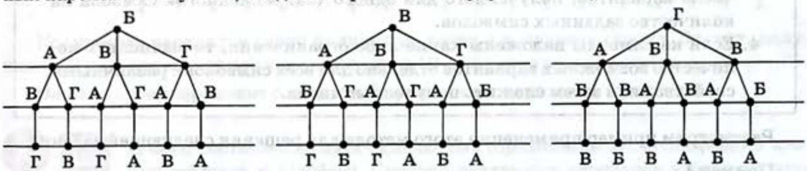
Рассмотрим сначала случай, когда на первом месте нашего пароля стоит буква А. В данной задаче пароль четырёхзначный, и для того, чтобы выписать все возможные варианты с этой буквой, таблица уже не подойдёт. Поэтому составим для этого следующую схему:



Из схемы ясно видно, что в этом случае на втором месте могут стоять только буквы Б, В и Г. Если на втором месте стоит буква Б, то на третьем месте могут стоять только буквы В и Г, а на четвёртом, соответственно, буквы Г и В. Аналогично, по два варианта получается, если на втором месте стоят буква В и буква Г. Таким образом, общее число возможных вариантов в случае, когда на первом месте стоит буква А, равно шести:

АБВГ	АВБГ	АГБВ
АБГВ	АВГБ	АГВБ

Поскольку, согласно условию задачи, никаких ограничений на способ расположения букв в пароле не наложено, аналогичным образом мы получим по шесть различных паролей и в случаях, когда на первом месте будут стоять буквы Б, В или Г.



Итак, общее число возможных паролей равно $6 \times 4 = 24$. Все варианты паролей можно выписать из полученных нами схем, двигаясь по каждой из «ветвей» схемы сверху вниз.

Ответ: всего можно составить 24 различных пароля.

Если возможные варианты нужно просто подсчитать, то можно попробовать обойтись без непосредственного выписывания всех этих вариантов.

Задача 3.

Сколько двузначных кодов можно составить из всех цифр и букв А, Б, В, Г, Д, Е, Ж, З, если на первом месте может стоять цифра, а на втором буква? Достаточно ли их будет для кодирования экзаменационных листов 160 учащихся?

Решение:

Для понимания общего числа кодов в данном случае нам достаточно заполнить лишь первую строку таблицы, выписывая все возможные комбинации из указанных букв и цифры 0.

	А	Б	В	Г	Д	Е	Ж	З
0	0А	0Б	0В	0Г	0Д	0Е	0Ж	0З
...								

Мы видим, что кодов с цифрой 0 будет восемь – столько же, сколько различных букв используется в коде. Ясно, что в остальных строках, где на первом месте будет стоять любая из девяти оставшихся цифр, мы также получим по восемь различных кодов: 1А, 1Б, 1В, 1Г, 1Д, 1Е, 1Ж, 1З; 2А, 2Б, 2В, 2Г, 2Д, 2Е, 2Ж, 2З и т. п.

Значит, общее число кодов будет равно произведению $10 \cdot 8 = 80$. Их не хватит для кодирования 160 листов.

Чтобы увеличить количество кодов, не добавляя новых символов, можно парами 1А и А1 кодировать различные работы, то есть учитывать порядок расположения буквы и цифры. В этом случае число составленных кодов увеличится вдвое и станет достаточным для кодирования 160 экзаменационных листов.

Итак, для подсчёта числа комбинаций из различных объектов можно использовать *метод систематического перебора*, который состоит в следующем.

Метод систематического перебора
(подсчёт числа комбинаций из различных символов)

1. Закрепить на первом месте комбинации один из символов, принадлежащих множеству заданных в задаче символов.
2. Для выделенного случая выписать возможные варианты, используя таблицу, схему или др. Подсчитать полученное число вариантов.
3. Если по условию задачи каждый из символов может занимать любую позицию, то общее количество возможных вариантов равно произведению числа вариантов, полученного для одного «закреплённого» символа на количество заданных символов.
4. Если на символы наложены какие-либо ограничения, то вычислить количество возможных вариантов отдельно для всех символов с различными свойствами, а затем сложить полученные числа.

Рассмотрим пример применения этого метода для решения следующей задачи.

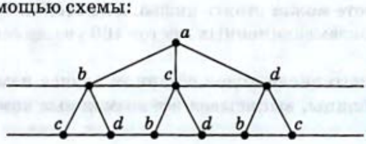
Пример 1.

Сколькими способами можно подарить по открытке трём своим подругам, если куплены четыре различные открытки?

Решение:

Обозначим открытки буквами a, b, c, d. Пусть запись (c, a, d) означает, что первой подруге мы подарим открытку c, а второй – a, а третьей – d. Таким образом, задача сводится к подсчёту комбинаций из трех символов множества $\{a, b, c, d\}$.

Закрепив на первом месте комбинации букву a, систематически переберём возможные варианты с помощью схемы:



Получим следующие варианты (a, b, c), (a, b, d), (a, c, b), (a, c, d), (a, d, b), (a, d, c) – всего шесть.

По условию задачи каждый из символов может занимать любую позицию, поэтому общее количество возможных вариантов равно произведению полученного числа 6 на количество букв рассматриваемого нами множества $\{a, b, c, d\}$, то есть

$$6 \cdot 4 = 24.$$

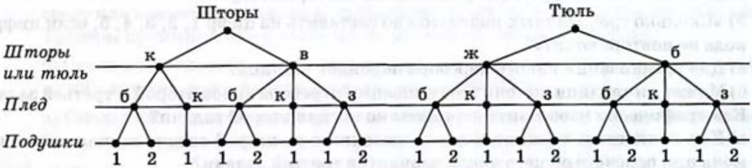
Рассмотрим теперь, как с помощью метода систематического перебора можно решить задачу, в которой на заданные символы наложены некоторые ограничения.

Пример 2.

Для оформления спальни текстилем дизайнер мог выбрать плед бежевого, кремового или золотистого тона, а также круглые или квадратные подушки. Для окон дизайнер мог использовать либо шторы (кораллового или вишневого цвета), либо тюль (жёлтого или белого цвета). Сколько различных вариантов оформления комнаты сможет составить дизайнер, если коралловые шторы не сочетаются с золотистым пледом, а с кремовым пледом «смотрятся» только круглые подушки?

Решение:

Составим схему, указывая названия деталей интерьера, их цвета обозначим первыми буквами, круглые и квадратные подушки соответственно цифрами 1 и 2. При этом учтём те ограничения на составление интерьера, которые заданы в условии задачи.



Количество вариантов равно количеству точек в последней строке. Значит, получилось 8 различных вариантов с шторами и 10 с тюлем, а всего 18 интерьеров.

Ответ: дизайнер может составить 18 различных вариантов интерьера.

К **169** а) Флаг составлен из двух одинаковых горизонтальных полос разных цветов: жёлтого и голубого. Сколько различных вариантов удовлетворяют этому условию?

б) Флаг составлен из трёх одинаковых горизонтальных полос разных цветов: красного, белого и синего. Сколько различных вариантов удовлетворяют этому условию?

в) Флаг составлен из четырёх одинаковых горизонтальных полос разных цветов: красного, жёлтого, синего и зелёного. Сколько различных вариантов удовлетворяют этому условию?

В каком случае вариантов было больше? В какой из задач потребовалось записывать, как вы перебираете возможные варианты?

Знаете ли вы, какие из рассмотренных вами вариантов действительно являются государственными флагами?

170 Посчитайте, сколько слов русского языка состоят из одной буквы. Как организовать выполнение этого задания, чтобы не потерять ни одного однобуквенного слова?

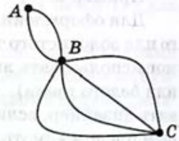
171 Прочитайте задачу: «Какие двузначные коды можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, если полученный код должен образовать четное число (цифры кода не повторяются)? Достаточно ли их будет для кодирования 30 проектов, представленных для участия в конкурсе?»

Ответьте на вопросы:

а) Как нужно выписывать эти коды, чтобы не потерять ни одного кода и не допустить дублей?

б) Какая таблица может помочь в организации систематического перебора? Выполните перебор всех возможных вариантов, используя данную таблицу.

172 Из пункта A в пункт B существует две дороги, а из пункта B в пункт C существует четыре дороги. Изобразите разными цветами на схеме все возможные маршруты, с помощью которых можно попасть из пункта A в пункт C через пункт B. Сколько вариантов вы нашли?



173 Чем отличаются данные задачи? Решите их.

1) «Какие двузначные коды можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, если на первом месте кода может стоять цифра 1 или 2 (цифры кода не повторяются)?»

2) «Какие трехзначные коды можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, если на первом месте кода стоит цифра 1 (цифры кода не повторяются)?»

3) «Сколько трёхзначных кодов можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, если цифры кода не повторяются?»

а) Для организации какого перебора подойдёт таблица?

б) Может ли таблица помочь в организации перебора кодов второй и третьей задач? Как графически изобразить варианты кодов для второй задачи?

в) Как количество вариантов для выделенного во второй задаче случая может помочь при подсчёте общего числа вариантов третьей задачи?

174 Перечислите все возможные блюда, которые можно составить из рыбы, мяса, курицы и следующих гарниров: картофель жареный, картофельное пюре, гречка, рис и макароны. Организуйте перебор с помощью таблицы, закрасьте ячейки с самыми вкусными на ваш взгляд комбинациями. Сколько всего вариантов получилось?

175 Перечислите все возможные варианты обедов из трёх блюд, если предлагается следующее меню. На первое: щи и борщ; на второе: плов, жаркое и овощное рагу; на третье: компот и сок. Сколько всего вариантов получилось?

176 Проанализируйте решение предыдущих задач. Обобщите, какими способами можно организовать систематический перебор вариантов комбинирования различных элементов. Можно ли упростить процесс подсчёта числа вариантов?

177 а) В некоторой стране есть четыре города: A, B, C и D. Есть 5 дорог из города A в город B, 4 дороги из города B в город C и 6 дорог из города С в D. Дорог из A в D, из A в C и из B в D нет. Сколькими способами можно добраться из города A в город D?

б) В некоторой стране есть четыре города: A, B, C и D. Есть 3 дороги из города A в город B, 4 дороги из города B в город C и 5 дорог из города С в D. Дорог из A в D нет. Сколькими способами можно добраться из города A в город D, если две дороги из города C в город D на ремонте?

178 В гардеробе у Кати есть короткая и длинная юбки, чёрные и серые брюки, а также белая, голубая и зелёная блузки. Ещё у Кати есть два платка – шёлковый и шерстяной. Сколько различных нарядов, состоящих из юбки, кофты и платка, либо из брюк, кофты и платка, может составить Катя из этих вещей, если:

а) все вещи хорошо смотрятся вместе?

б) голубая блузка не подходит ни под одну из юбок, а с брюками Маша шерстяной платок не носит?

179 В алфавите племени Ни-Бум-Бум три буквы. Словом является любая последовательность из трёх букв, в которой есть хотя бы две одинаковые буквы. Сколько слов в языке племени Ни-Бум-Бум?

180 Кубик бросают дважды. Среди всех возможных последовательностей результатов есть такие, в которых хотя бы один раз встречается шестёрка. Сколько их?

181 а) Администратор детского спортивного центра составлял расписание секций на следующий месяц, распределяя занятия по баскетболу, футболу, волейболу, гимнастике и лапте по рабочим дням недели (выходные были посвящены соревнованиям и спортивным праздникам). Укажите, сколькими способами можно составить расписание, удовлетворив следующие просьбы тренеров. Тренер по футболу попросил, чтобы его занятия были во вторник или в среду; тренер по баскетболу – чтобы его занятия были в среду или в четверг; тренер по волейболу мог работать только во вторник или пятницу. Тренеры по гимнастике и лапте могли работать в любые дни недели.

б) Сколькими способами можно посадить в одном ряду шесть девочек, если четыре из них дружат, и все подружки хотят сидеть рядом?

в) Сколькими способами могут разместиться пять человек в пятиместном автомобиле, если только один из них не умеет управлять автомобилем?

182 а) Учащиеся седьмого класса изучают 8 различных предметов. Сколькими способами можно составить расписание уроков на один день, так чтобы в этот день было 5 различных уроков?

б) Сколькими способами можно сшить штору, состоящую из четырёх одинаковых вертикальных полос различных цветов, если имеются ткани 6 цветов?

в) Сколько различных трёхзначных чисел можно составить из цифр 2, 4, 6, 8, если цифры в числе могут повторяться?

П **183** Докажите неравенство $\frac{1}{4a}+a \geqslant 1$ при $a>0$.

184 Найдите наименьшее значение выражения $x+\frac{36}{x}$ при $x>0$.

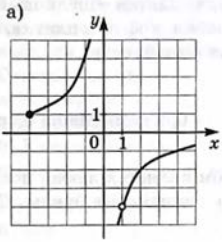
185 Найдите наименьшее значение выражения $\frac{(x+10)(x+20)}{x}$ при $x>0$.

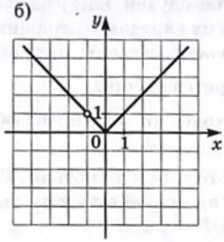
186 Решите графически уравнение:

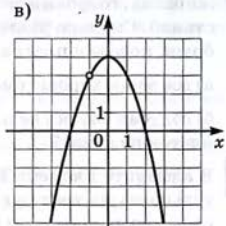
а) $-4x-4=x^2$; б) $x^3=x$; в) $\frac{2}{x}=-x$.

Проверьте свое решение, решив уравнение аналитически.

187 Напишите область определения функции, график которой изображён на рисунке:

а)


б)


в)


188 Постройте график функции:

а) $y = \begin{cases} (x-1)^2 + 3, \text{ если } x \geqslant 2; \\ x^2, \text{ если } 0 < x < 2; \\ -x, \text{ если } x \leqslant 0 \end{cases}$ б) $y = \begin{cases} -x^2 + 6, \text{ если } x \leqslant 2; \\ |x|, \text{ если } x > 2 \end{cases}$ в)* $y = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, \text{ если } |x| \geqslant 1; \\ x, \text{ если } |x| < 1 \end{cases}$

«Прочитайте» каждый график по известному плану.

189 а) В магазине «Турист» продаётся 8 видов палаток и 5 различных складных столов. Сколькими способами можно купить в этом магазине палатку и стол?

б) У Коли есть красный, зелёный, жёлтый и синий кубики. Сколькими способами он может построить из них башню высотой в 4 кубика?

190 а) Между городом B и A имеется 7 дорог, а между городом A и C – 6 дорог. Между городами B и C дорог нет. Сколькими способами можно добраться из города B в город C?

б) В меню школьной столовой 3 вида салатов, 2 вида первых блюд и 2 вида вторых блюд. Сколькими способами можно купить в школьной столовой обед из салата, первого и второго блюда?

в) Сколько различных шестизначных паролей из букв X и Z и цифр 1, 3, 5, 7 можно составить, если цифры и буквы в пароле не должны повторяться?

191 Под тремя напёрстками спрятаны два одинаковых шарика (возможно, что оба под одним наперстком). Сколько разных вариантов расположения шариков под напёрстками?

192 а) В седьмом классе одной из школ в расписании занятий на среду должны быть следующие предметы: геометрия, русский язык, информатика, физкультура, иностранный язык. Укажите, сколькими способами можно составить расписание, удовлетворив следующие просьбы учителей. Учителю физкультуры нужно, чтобы его урок был третьим или четвёртым; учителю иностранного языка – чтобы его урок был вторым или третьим; учителю информатики – чтобы его урок был вторым или четвёртым. Остальные учителя не высказывали никаких просьб.

б) Сколькими способами можно сложить в стопку шесть журналов и две газеты, так чтобы все журналы лежали рядом друг с другом?

в) Сколько различных четырёхзначных чисел, делящихся на 2, можно составить из цифр 2, 4, 7, 8, если цифры в искомом числе не повторяются?

193 Сколько различных четырёхзначных чисел можно составить из цифр 1, 3, 5, 7, 9, если цифры в числе могут повторяться?

194 Найдите наименьшее значение выражения $x+\dfrac{100}{x}$ при $x>0$.

195 Решите графически уравнение:

а) $x^2=-6x+7$; б) $(x+1)^2=-3x-5$; в) $-\dfrac{1}{x}=x+2,5$.

Как можно проверить свое решение?

196 Постройте график кусочно-заданной функции и «прочитайте» его по известному плану

$$y=\begin{cases}\sqrt{x}, \text{ если } x\geqslant 4;\\ \dfrac{1}{2}x, \text{ если } 0\leqslant x<4;\\ -(x+2)^2+4, \text{ если } x<0\end{cases}$$

C **197*** Баскетбольный матч российской суперлиги между ЦСКА и «Динамо» (Москва) окончился победой ЦСКА со счетом 77: 53. В этом матче был момент, когда ЦСКА уже забросил столько мячей, сколько «Динамо» (Москва) забросил после этого момента. Сколько мячей к этому моменту было в сумме заброшено обеими командами?

198* Сумму двух целых чисел умножили на их произведение. Могло ли получиться число 2517?

6.1.2. Задача подсчёта различных вариантов. Правило произведения

Первое условие, которое надлежит выполнять в математике, – это быть точным, второе – быть ясным и, насколько можно, простым.

Лазар Карно (1753–1823),
французский военный деятель, инженер, учёный

В предыдущем пункте мы использовали метод систематического перебора всех возможных комбинаций элементов некоторого множества. Но чаще всего в задачах требуется найти не сами комбинации, а их количество, то есть ответить на вопросы типа: «Сколько вариантов существует?», «Сколькими способами можно это сделать?». Так, если мы захотим выяснить время, необходимое для проведения в школьном зале первенства по волейболу в один круг (каждая команда играет с каждой другой один раз), нам потребуется сосчитать количество встреч между парами команд. И если мы знаем, сколько времени в среднем длится одна встреча, то, умножив это время на количество встреч, мы получим оценку времени проведения первенства.

В настоящее время для ответа на этот вопрос мы должны вначале осуществить систематический перебор всех встреч, а затем сосчитать их количество. Пусть, например, в школе имеется 6 команд. Выпишем все возможные варианты встреч в таблице, учитывая, что, во-первых, команда не будет играть сама с собой, поэтому вместо игр

1 – 1, 2 – 2 и т. д. поставим прочерки. И во-вторых, чтобы не дублировать запись одной и той же игры, договоримся на первом месте указывать меньший номер команды. Например, игру 1-й и 2-й команд запишем 1 – 2 (а не 2 – 1).

№ команды	1	2	3	4	5	6
1	–					
2	1 – 2	–				
3	1 – 3	2 – 3	–			
4	1 – 4	2 – 4	3 – 4	–		
5	1 – 5	2 – 5	3 – 5	4 – 5	–	
6	1 – 6	2 – 6	3 – 6	4 – 6	5 – 6	–

Непосредственный подсчёт записанных в таблице пар даст нам общее количество игр, которые сыграют 6 команд: $5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15$.

Естественно, что чем больше команд, тем труднее непосредственно выписать и пересчитать все пары. Поэтому проще найти какие-либо общие закономерности, которые позволят получить результат быстрее. Кто-то заметит, что количество пар с каждой последующей цифрой уменьшается на один. Тогда общее количество игр, которые сыграют, например, 10 команд, равно: $9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + + 3 + 2 + 1 = 45$. Другой заметит, что количество заполненных ячеек в таблице в два раза меньше числа ячеек, не стоящих на диагонали, поэтому оно равно половине разности квадрата числа и самого числа, значит: $(10^2 - 10) : 2 = 45$. А кто-то, возможно, проведёт другие рассуждения, которые также приведут к ответу 45.

Однако чаще всего подобные задачи содержат огромное число вариантов и их непосредственный перебор практически невозможен. Упростить же перебор не всегда удаётся, так как всякий раз для этого требуется некоторая «догадка». Поэтому гораздо удобнее один раз и навсегда составить общие правила для задач того или иного вида, а затем лишь применять готовые формулы. В связи с этим несколько столетий назад в математическом знании выделился специальный раздел – *комбинаторика*, получивший впоследствии мощное развитие и широкое применение.

Определение. ***Комбинаторикой*** называется раздел математики, изучающий способы подсчёта количества комбинаций, образованных из элементов конечных множеств по определенным правилам.

В качестве элементов множества могут выступать не только числа, но и любые объекты – буквы, предметы, люди, команды, как в рассмотренной нами задаче, и т. д. Поэтому правила и формулы, установленные в комбинаторике, позволяют решать самые разные задачи, совершенно друг на друга не похожие на первый взгляд.

Познакомимся с этими формулами и мы. Для начала рассмотрим несколько комбинаторных задач.

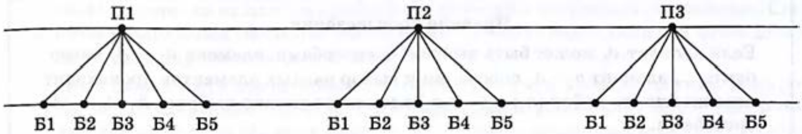
Задача 1.

У Светы 3 нарядных платья и 5 бус. Чтобы найти самые красивые и неожиданные их комбинации, Света решила примерить платья и бусы всеми возможными способами. Сколько вариантов ей пришлось перебрать?

Решение:

Ясно, что Света должна примерить все пять бус сначала с первым платьем, затем – со вторым платьем, и наконец, – с третьим. При этом каждый раз будет получаться по пять различных комбинаций.

Обозначив платья П1, П2 и П3, а бусы Б1, Б2, Б3, Б4 и Б5, можно изобразить все возможные варианты пар на следующей схеме:



Отсюда, каждому из трёх платьев соответствует пять вариантов бус, всего $3 \cdot 5 = 15$ вариантов (общее количество вариантов равно количеству «веток» в схеме).

Задача 2.

Найти количество двузначных чисел, у которых первая цифра – нечётная, а вторая – меньше 6.

Решение:

Начнем выписывать все указанные в задаче числа в порядке возрастания:

10, 11, 12, 13, 14, 15,
30, 31, 32, 33, 34, 35,
50, 51, ..., 55,
70, 71, ..., 75,
90, 91, ..., 95.

Легко заметить закономерность: с каждой из пяти нечётных цифр начинаются ровно шесть чисел. Всего получается пять раз по шесть чисел, то есть 30 чисел.

Иначе этот результат можно объяснить так: на первое место мы можем поставить любую из пяти нечётных цифр. Зафиксируем её. Вне зависимости от выбора этой цифры на втором месте может стоять любая из шести цифр от 0 до 5. То есть каждому из пяти вариантов с фиксированной первой цифрой соответствуют шесть вариантов с выбором второй цифры, всего $5 \cdot 6 = 30$ вариантов.

Обобщая способ решения этих задач, мы можем сделать важный вывод: *если первый элемент какой-то пары может быть выбран А способами, и для каждого из этих способов второй элемент может быть выбран В способами, то эту пару можно выбрать А · В способами.*

Применим полученный вывод к решению следующей задачи.

Задача 3.

Петя красит лавочки и стол на даче. Первую лавку он хочет покрасить одним из четырёх цветов: синим, голубым, белым или зелёным, вторую – одним из трех цветов – красным, жёлтым или коричневым, а стол – любым из перечисленных семи цветов. Сколько разных вариантов покраски стола и лавок есть у Пети?

Решение:

Первая лавка может быть покрашена *любым* из 4 цветов. Для каждого выбранного варианта покраски первой лавки имеется 3 цвета покраски второй лавки. Всего получается $4 \cdot 3 = 12$ вариантов покраски лавок. Теперь для каждого из 12 выбранных вариантов покраски лавок имеется 7 вариантов покраски стола. Всего получается $12 \cdot 7 = 84$ варианта.

Иначе этот ответ может быть получен как произведение $4 \cdot 3 \cdot 7 = 84$.

Обобщив способ, использованный нами для подсчёта вариантов в этих задачах, получаем следующее правило.

Правило произведения

Если элемент a_1 может быть выбран A_1 способами, элемент a_2 – A_2 способами, ..., элемент a_n – A_n способами и выбор разных элементов происходит независимо, то набор $(a_1; a_2; ...; a_n)$ элементов можно выбрать $A_1 \cdot A_2 \cdot ... \cdot A_n$ способами.

Применим это правило к решению задач.

Пример 1.

Сколько паролей, состоящих из четырёх букв, можно составить, если в пароле могут быть использованы буквы С, Т, О, П?

Решение:

Согласно условию задачи, подсчитывая количество возможных паролей, мы должны учитывать и те пароли, буквы в которых будут повторяться.

В качестве первой буквы пароля можно выбрать любую из четырёх указанных в задаче букв. Значит, первую букву в пароле можно выбрать 4 способами.

Аналогично, каждую из второй, третьей и четвёртой буквы пароля также можно выбрать четырьмя способами. Значит, всего можно составить $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 256$ различных паролей.

Пример 2.

Сколько различных паролей, состоящих из четырёх различных букв, можно составить, если в пароле могут быть использованы только буквы С, Т, О, П?

Решение:

В отличие от предыдущего примера буквы в пароле не должны повторяться. Первой в пароле может стоять любая из четырёх букв, второй – любая из трёх оставшихся, третьей – любая из двух оставшихся, четвертой – одна.

Значит, всего будет $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ различных пароля.

В завершение покажем, каким образом правило произведения может быть использовано при решении задачи о первенстве по волейболу при игре 10 команд.

В каждой игре участвует две команды, поэтому нам надо сосчитать количество пар, которые можно составить из 10 команд. Если бы выбор команд в пару осуществлялся вне зависимости от порядка их перечисления, то первой в паре могла оказаться любая из 10 команд, а второй – любая из 9 оставшихся. По правилу произведения общее количество пар будет равно $10 \cdot 9 = 90$. Однако при этом каждая игра подсчитана дважды (сначала при подсчёте пар одного участника игры, а затем – при подсчёте пар его соперника). Значит, на самом деле игр будет сыграно вдвое меньше $\frac{10 \cdot 9}{2} = 45$.

Теперь мы можем решить и общую задачу подсчёта количества игр при участии n команд. Проводя аналогичные рассуждения, мы получим $\frac{n \cdot (n-1)}{2} = \frac{n^2 - n}{2}$.

Скоро мы узнаем формулу, которая позволит решить эту и подобные ей комбинаторные задачи в одну строку без таких подробных рассуждений.

К **199** 1) Чем похожи эти задачи:

а) «К Маше в гости пришел Ваня, и она решила его чем-нибудь угостить. У себя в буфете она нашла семь различных печений и пять разных пирожных. Сколькими различными способами Маша может угостить Ваню, если она хочет дать ему лишь одно пирожное и одно печенье?»

б) «К Ване в гости пришла Маша, и он решил её чем-нибудь угостить. Ваня, отыскав в холодильнике три яблока и четыре груши, решил дать Маше пару различных фруктов: одно яблоко и одну грушу. Сколько различных вариантов угощения может он составить (все фрукты отличаются друг от друга и цветом, и размером)?»

2) Попробуйте решить эти задачи без непосредственного перебора всех возможных вариантов угощения. Сформулируйте правило нахождения числа пар, каждый элемент которых имеет несколько вариантов выбора. Сравните его с выводом на стр. 58.

200 В классе учатся 14 мальчиков и 15 девочек. Сколькими способами можно составить пару девочка-мальчик для открытия школьного бала?

201 На дне рождении собрались 10 юношей и 10 девушек. Сколькими способами из них можно выбрать пару для участия в очередном танце?

202 В классе 25 человек. Сколькими способами можно выбрать старосту класса и его помощника?

203 1) Прочитайте задачу: «К Маше в гости в очередной раз пришел Ваня, и она решила его чем-нибудь угостить. Маша нашла в буфете семь различных печений, пять разных пирожных и десять разных конфет. Сколько есть у неё способов составить угощение для Вани, если она хочет дать ему одну конфету, одно печенье и одно пирожное?»

2) Чем отличается эта задача от предыдущих задач про угощение? Попробуйте решить её. Как выводы, сделанные при решении предыдущих задач, смогут помочь для подсчёта числа способов в этой задаче. Сформулируйте правило, которым вы пользовались. Сравните его с правилом на с. 58.

204 Сколько существует пятизначных чисел, в записи которых есть только цифры 1, 2, 3, 4, 5 и они а) встречаются ровно по одному разу; б) могут повторяться?

205 Найдите количество трёхзначных чисел, у которых первая цифра – нечётная, вторая – чётная, а третья – делится на 3.

206 Найдите количество прямоугольников со сторонами, параллельными осям координат, таких что точка (14; 22) содержится внутри (но не на границе) каждого из них, абсциссы вершин являются натуральными числами меньше 29, а ординаты – натуральны и меньше, чем 31.

207 Как известно, все символы в компьютере закодированы «двоичным кодом», то есть представлены с помощью всего двух символов 1 и 0, которые легко представляются сигналами. В современных ЭВМ, в зависимости от типа операционной системы и конкретных прикладных программ, используются 8-разрядные и 16-разрядные коды. Так, в 8-разрядном коде символ «пробел» переводится на машинный язык последовательностью из восьми цифр: 00101000. Какое наибольшее число символов может быть закодировано 8-разрядным кодом? Какое наибольшее число символов может быть закодировано 16-разрядным кодом?

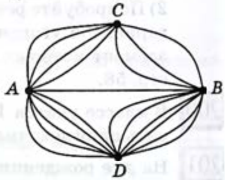
208 а) Монету бросают трижды и каждый раз записывают, что выпало: «орел» или «решка». Сколько разных последовательностей «орлов» и «решек» можно при этом получить?

б) Монетку бросают десять раз и каждый раз записывают, что выпало: «орел» или «решка». Сколько различных последовательностей из «орлов» и «решек» может при этом получиться?

209 а) Каждую клетку квадратной таблицы 2×2 можно покрасить в черный или белый цвет. Сколько существует различных раскрасок этой таблицы?

б) Каждую клетку квадратной таблицы 3×3 можно покрасить в синий или белый цвет. Сколько существует различных раскрасок этой таблицы?

210 Из города A в город B ведет одна дорога, в город C – четыре, в D – пять, из города C в город B – три дороги, а из D в B – шесть. Сколько существует способов доехать из города A в город B, если считать, что по дорогам можно ехать лишь в одном направлении – слева направо?



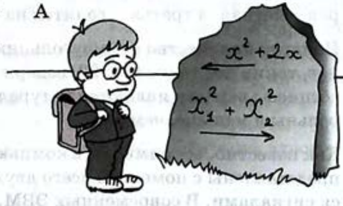
211 1) Прочитайте задачу: «В очередной раз к Маше в гости пришел Ваня, и она решила его чем-нибудь угостить. Маша, отыскав в буфете семь печений, пять пирожных и десять конфет, решила дать Ване только две какие-нибудь сладости (печенье с пирожным, пирожное с конфетой или конфету с печеньем). Сколько различных вариантов угощения может она составить?»

2) Чем отличается эта задача от предыдущих задач про угощения? Из каких простых задач, способ решения которых уже известен, она состоит? Попробуйте решить задачу и сформулировать способ решения аналогичных задач.

3) Придумайте для своего соседа по парте аналогичную задачу, обменяйтесь придуманными задачами, проверьте условие на корректность и решите составленную соседом задачу.

212 Сколькими способами можно прочитать слово «КОМБИНАТОРИКА», двигаясь вправо или вниз?

К О М Б И Н А Т О Р И К А
О М Б И Н А Т О Р И К А
М Б И Н А Т О Р И К А
Б И Н А Т О Р И К А
И Н А Т О Р И К А
Н А Т О Р И К А
А Т О Р И К А
Т О Р И К А
О Р И К А
Р И К А
И К А
К А
А



213 Сколькими способами можно поставить на шахматную доску:
а) чёрную и белую ладью;
б) чёрного и белого слона;
в) чёрного и белого коня;
так, чтобы они не били друг друга?

214 а) Сколько существует шестизначных чисел, все цифры которых нечётные?

б) Сколько существует шестизначных чисел, все цифры которых чётные?

в) Сколько существует шестизначных чисел, в записи которых содержится хотя бы одна цифра 5?

г) Сколько существует шестизначных чисел, делящихся на 5?

д) Сколько существует шестизначных чисел, которые одинаково читаются слева направо и справа налево?

215 В алфавите племени Тумба-Юмба шесть букв. Словом является любая последовательность из шести букв, в которой есть хотя бы две одинаковые буквы. Сколько слов в языке племени Тумба-Юмба?

П **216** Боря точно помнит, что в формуле угольной кислоты подряд идут буквы H, C, O и что есть два нижних индекса 2 и 3. Но вот у каких букв они стоят и в каком порядке, он не помнит. У него есть возможность использовать программу, которая по введённой формуле отражает название кислоты. Нарисуйте схему, с помощью которой он переберёт все возможные варианты формулы. Сколько вариантов ему придётся ввести в программу, чтобы определить нужную формулу в «худшем» случае? Можно ли ответить на этот вопрос без схемы?

217 Какие из следующих функций являются чётными, а какие нечётными?

а) $y = x^4 - 1$; б) $y = \dfrac{1}{x+2}$; в) $y = \dfrac{x}{x^2-4}$; г) $y = x^2 - |x| + 3$.

218 а) Для функции $f(x) = -x^2$ найдите $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$; $f(a)$; $f(-a+3)$.

б) Для функции $f(x) = x^3$ найдите $f(3)$; $f(a)$; $0{,}1f(-a^2)$.

в) Для функции $f(x) = -\dfrac{1}{x^3}$ найдите $f(0)$; $f(0{,}2a)$; $-\dfrac{1}{f(a^3)}$.

г) Для функции $f(x) = -\sqrt{x}$ найдите $f(-9)$; $f(0)$; $f(81)$; $f((a-1)^2)$.

219 Решите графически систему уравнений:

а) $\begin{cases} y = \dfrac{12}{x} \\ y = 2x - 2 \end{cases}$; б) $\begin{cases} y = -\dfrac{1}{2}x^2 + 2x + \dfrac{1}{2} \\ y = -x + 3 \end{cases}$; в) $\begin{cases} y = -\sqrt{x} \\ y = -\dfrac{2}{3}x + \dfrac{1}{3} \end{cases}$.

220 Упростите выражение:

а) $\left(0{,}2\sqrt{3}\right)^2$; д) $2\sqrt{1{,}6} + 0{,}5\sqrt{40} - 8\sqrt{0{,}1}$; и) $\sqrt{\left(9+2\sqrt{7}\right)^2} + \left(1-\sqrt{7}\right)^2$;

б) $\sqrt{2{,}25 - \sqrt{1{,}96}}$; е) $\sqrt{\sqrt{7}-\sqrt{5}} \cdot \sqrt{\sqrt{7}+\sqrt{5}}$; к) $\sqrt{0{,}1^3 \cdot 0{,}001}$;

в) $\left(\sqrt{6}+2\right)^2 - 6 - 2\sqrt{6}$; ж) $\sqrt{2}(\sqrt{72} - \sqrt{50})$; л) $\sqrt{54} - \sqrt{96}$;

г) $\dfrac{3}{\sqrt{7}-2}$; з) $\sqrt{1\dfrac{37}{324} : \dfrac{1}{18}}$; м) $\sqrt{4{,}9 \cdot 8{,}1}$.

Д **221** В классе 24 человека. Сколькими способами можно выбрать старосту класса и его помощника?

222 Сколько различных четырёхзначных паролей можно составить из букв К, Р, У, Г, если а) буквы в пароле не повторяются; б) буквы в пароле могут повторяться?

223 Монету подбрасывают шесть раз подряд и каждый раз записывают, что выпало: «орел» или «решка». Сколько различных последовательностей «орлов» и «решек» можно получить в результате такого подбрасывания?

224 Сколько существует шестизначных чисел, в записи которых цифры 1, 2, 3, 4, 5, 6 встречаются ровно по одному разу?

225 а) Игральный кубик с гранями красного, оранжевого, жёлтого, зелёного, голубого и синего цветов бросают 4 раза и записывают цвет, выпавший на верхней грани. Сколько различных последовательностей цветов можно было получить, если на последнем броске всегда выпадает красный цвет?

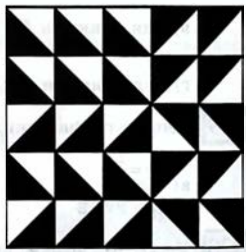
б) Номер паспорта в некотором государстве состоит из двух, трёх или четырёх цифр. Серия паспорта состоит из трёх букв. Сколько существует в этом государстве паспортов, номер которых начинается на 98, если в номере могут быть использоваться все десять арабских цифр, а в серии используются все буквы русского алфавита, кроме буквы Ы?

226 Решите графически систему уравнений:

а) $\begin{cases} y=\dfrac{6}{x} \\ y=-2x+8 \end{cases}$; б) $\begin{cases} y=x^2-5x+6 \\ x+y=2 \end{cases}$.

227 Расположите числа в порядке возрастания: $6\sqrt{2}$; $\dfrac{\pi}{2}$; $\sqrt{9}$; $\sqrt{1\dfrac{7}{9}}$; $2\sqrt{6}$; $\sqrt{1\dfrac{17}{64}}$.

С **228*** Квадрат разбит на единичные клетки. Его покрывают 25 чёрных и 25 белых прямоугольных равнобедренных треугольников, так что каждую клетку закрывают два треугольника. «Шахматным» будем называть такие покрытия, что любые два треугольника, имеющие общую сторону, разного цвета. Сколько существует различных «шахматных» покрытий? (Одно из возможных «шахматных» покрытий изображено на рисунке.)



229* Три путника решили устроить привал и вместе пообедать. У первого было 5 бутербродов, у второго – 4 бутерброда. У третьего ничего не было, поэтому он заплатил первым двум за свою порцию 36 р. Все путники ели поровну. Как следует распределить между первым и вторым путниками деньги, заплаченные третьим, чтобы взнос каждого из путников в совместную трапезу был одинаковым?

230* В конструкторе имеются три вида фигур: цилиндры, конусы, параллелепипеды. Все фигуры одного вида одинаковые. Шесть цилиндров, четыре конуса и три параллелепипеда весят 1200 г, а четыре цилиндра, шесть конусов и семь параллелепипедов весят 1700 г. Сколько весят цилиндр, конус и параллелепипед вместе?

6.1.3. Перестановки. Формула числа перестановок

Книга – книгой,
А мозгами двигай...

Владимир Маяковский (1893–1930),
поэт, драматург, публицист

В предыдущем пункте мы установили правило произведения для подсчёта *количества возможных способов составления комбинаций из элементов* какого-либо множества. Это правило поможет нам вывести общую формулу для решения распространенного в комбинаторике типа задач.

Рассмотрим следующие задачи.

Задача 1.

В финал соревнования вышли трое участников. Сколькими способами они могут занять призовые места?

Решение:

Обозначим участников финала числами 1, 2 и 3, а место, занятое участником, начиная с первого, соответственно цифрой сотен, десятков и единиц. Например, запись 132 означает, что первое место занял участник 1, второе – участник 3, а третье – 2.

Получим следующие *перестановки* элементов множества $\{1, 2, 3\}$, всего 6 способов:

$$123;\ 132;\ 213;\ 231;\ 312;\ 321.$$

Этот же ответ мы можем получить быстрее, используя правило произведения. Действительно, первое место может занять любой из трёх финалистов – три способа выбора, тогда второе место – один из двух оставшихся финалистов, два способа выбора, а третье – один оставшийся финалист, один способ выбора. Значит, места между участниками соревнования могут быть распределены $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ способами.

Ответ: 6.

Задача 2.

Сколько семизначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, если цифры в числе не повторяются?

Решение:

Для ответа на вопрос задачи нам надо узнать, сколькими способами можно *переставить* элементы множества $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Чтобы выписать все возможные семизначные числа и подсчитать их количество требуется не менее 5 часов. Поэтому естественно применить правило произведения, которое позволит нам получить ответ моментально.

Действительно, рассуждая, как в задаче 1, получим, что первую цифру семизначного числа можно выбрать 7 различными способами, вторую, соответственно, – 6, третью – 5, четвёртую – 4, пятую – 3, шестую – 2 и седьмую – одним. Значит, в соответствии с правилом произведения, семизначных чисел из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6 и 7 существует всего $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040$.

Ответ: 5040.

Как мы видим, в обеих задачах ставился вопрос о том, *скольким способами можно расположить в разном порядке все элементы некоторого множества*.

Обобщив способ, использованный нами для подсчета вариантов в этих задачах, получаем следующее правило:

> n элементов множества можно переставить $\boldsymbol{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$ способами.

Выведем полученную формулу решения таких задач, используя понятия, принятые в комбинаторике. Вначале сформулируем задачу в общем виде.

Общая постановка задачи.

Имеется множество из n различных элементов. Сколькими способами можно упорядочить элементы данного множества?

Упорядоченный набор всех элементов заданного множества принято называть ***перестановкой***, а число перестановок множества из n элементов обычно обозначают $\boldsymbol{P_n}$ (от начальной буквы французского слова «*permutation*» – перестановка).

Докажем, что количество перестановок $\boldsymbol{P_n = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$.

Доказательство.

Первый элемент можно выбрать из элементов данного множества n различными способами; при фиксированном первом элементе второй можно выбрать $(n-1)$ различными способами и т. д. Если первые $(n-1)$ элементов уже фиксированы, то для последнего элемента остается всего одна возможность.

Следовательно, на основании правила произведения элементы данного множества можно упорядочить $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ способами, что и требовалось доказать. ■

Полученную формулу можно записать короче. Для этого запишем множители $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ в обратном порядке $1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1) \cdot n$ и используем символ $n!$, которым обозначают подобные произведения.

Определение. Произведение n первых натуральных чисел называют ***факториалом числа n*** и обозначают $\boldsymbol{n!}$ Читают: «эн факториал».

Другими словами,

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n.$$

Таким образом, для подсчёта количества перестановок n элементов некоторого конечного множества будем применять следующую формулу:

> **Формула количества перестановок из n элементов**
>
> $P_n = n!$, где $n = 1, 2, \ldots$

Заметим, что:

$1! = 1$	$3! = 6$	$5! = 120$	$7! = 5040$	$9! = 362\,880$
$2! = 2$	$4! = 24$	$6! = 720$	$8! = 40\,320$	$10! = 3\,628\,800$

Мы видим, что с ростом n число $n!$ очень быстро растет. Так, например, $20! = 2\,432\,902\,008\,176\,640\,000$ (19-значное число), а $50!$ – это 65-значное число. Чтобы представить, насколько велико это число, укажем, что объём земного шара в кубических миллиметрах составляет приблизительно 10^{30}, а это «всего лишь» 31-значное число. Вообразим теперь, что перед нами 10^{30} наших земных шаров. Подсчитав, сколько кубических миллиметров поместится в это гигантское количество шаров, мы получим 61-значное число.

Рассмотрим примеры применения установленной формулы.

Пример 1.

Сколькими способами можно составить список учеников класса, в котором учится 28 человек и нет однофамильцев?

Решение:

Для ответа на вопрос этой задачи мы должны узнать, сколькими способами можно *переставить* 28 фамилий учеников.

Искомое число равно числу перестановок $P_{28} = 28!$. Заметим, что $28!$ – это очень большое число, приблизительно равное $3 \cdot 10^{29}$. Поэтому вычислять значение $28!$ мы не будем и оставим ответ в такой форме.

Ответ: $28!$.

Пример 2.

Сколько семизначных чисел, кратных 25, можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, если цифры в числе не повторяются?

Решение:

Если натуральное число делится на 25, то две его последние цифры либо 00, либо 25, либо 50, либо 75. В нашем случае это могут быть только цифры 25.

Итак, последние две цифры уже зафиксированы. Первые пять цифр образуют пятизначное число, составленное из цифр 1, 3, 4, 6, 8, которые не повторяются. По формуле количества перестановок из n элементов таких чисел $P_5 = 5! = 120$. Следовательно, искомых семизначных чисел тоже 120.

Ответ: 120.

К **231** а) В магазине спортивных товаров продаётся 5 видов горных лыж и 8 различных видов палок. Сколькими способами можно купить в этом магазине горные лыжи и палки к ним?

б) У Оли есть синий, зелёный, оранжевый и фиолетовый шарфы. Сколькими способами она может сложить их в стопку?

232 1) Что общего во всех этих задачах:

а) Сколькими способами могут встать в очередь в билетную кассу 3 человека?

б) Сколькими способами можно выложить в ряд 6 разноцветных кубиков?

в) Сколько пятизначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5 (цифры в числе не повторяются)?

2) Решите эти задачи и обобщите использованный вами способ для решения всех подобных задач. Сколькими способами можно расположить в разном порядке все элементы некоторого множества? Сравните свой ответ с правилом на с. 64.

3) Как называются комбинации, которые следует пересчитать во всех этих задачах? Познакомьтесь с их названием на с. 64 и выводом общего способа решения подобных комбинаторных задач.

233 Вычислите:

а) $3!$; в) $5!$; д) $4! + 3!$; ж) $4! \cdot 5!$;
б) $4!$; г) $6!$; е) $4! + 3$; з) $4 \cdot 5!$.

234 Девочке мама на завтрак дала йогурт, конфету, пряник, булочку. Сколько различных порядков «поедания» этих сладостей есть у девочки, если она хочет съесть их все?

235 Сколькими способами на полку можно поставить 10 разных книг?

236 Сколько различных шестизначных паролей из цифр 2 и 7 и букв A, B, C, D можно составить, если цифры и буквы в пароле не должны повторяться?

237 Сравните условия задач и решите их последовательно:

а) Сколькими различными способами можно расставить в ряд 7 девочек?
б) Сколькими различными способами 7 девочек могут водить хоровод?
в) Сколько различных ожерелий можно составить из 7 разных бусин?

П **238** Сравните числа:

а) 8 и $\sqrt{37}$; б) $7\sqrt{2}$ и $3\sqrt{7}$; в) $\sqrt{11}+\sqrt{5}$ и $\sqrt{3}+\sqrt{13}$; г) $\sqrt{8}$ и $\sqrt{5}+\sqrt{3}$.

239 Упростите выражение:

а) $(\sqrt{15}-2\sqrt{5})(\sqrt{15}+2\sqrt{5})$; д) $\sqrt{\left(2-\sqrt{5}\right)^2}+\sqrt{\left(3-\sqrt{5}\right)^2}$;

б) $\sqrt{\left(1-\sqrt{13}\right)^2}$; е) $\left(2-\sqrt{13}\right)^2+4\sqrt{17-4\sqrt{13}}$;

в) $\sqrt{17-12\sqrt{2}}$; ж) $\dfrac{\sqrt{11+\sqrt{21}}}{\sqrt{11-\sqrt{21}}}+\dfrac{\sqrt{11-\sqrt{21}}}{\sqrt{11+\sqrt{21}}}$;

г) $\sqrt{21-12\sqrt{3}}$; з) $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)\left(\dfrac{2-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}+\dfrac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}\right)$.

240 Решите неравенства:

а) $5x^2+4x \leqslant 0$; б) $\dfrac{x^2}{\sqrt{2}} < \sqrt{72}$; в) $(6-x)(x+1)^2 \leqslant 0$.

241 В таблице указаны данные отчета одной из фирм, занимающейся установкой кондиционеров, о количестве кондиционеров, установленных в летние и весенние месяцы за последний год.

Март	126	Июнь	601
Апрель	204	Июль	855
Май	312	Август	704

1) Вычислите среднее количество кондиционеров, установленных за один летний месяц; за один весенний месяц. Дайте возможное объяснение тому, что найденные показатели существенно отличаются друг от друга.

2) Найдите медиану данных за летние месяцы. В каком месяце были зафиксированы средние за лето показатели продаж? Найдите медиану данных за весенние месяцы. В каком месяце были зафиксированы средние за весну показатели продаж? Найдите медиану данных за все эти месяцы.

3) Вычислите размах указанных в таблице значений. Дайте возможное объяснение тому, что этот показатель достаточно значителен. Будет ли так значителен размах продаж: а) за летние месяцы; б) за весенние месяцы? Проверьте свое предположение, вычислив эти показатели.

242 Решите уравнения:

а) $x^3 - 9x^2 + x - 9 = 0$; в) $5z^3 + 55z^2 + 10z + 110 = 0$;

б) $y^4 - 6y^3 + 8y^2 - 48y = 0$; г) $2t^4 + 18t^3 + 7t^2 + 63t = 0$.

Д **243** а) На витрину в ряд выставили три торта: «Наполеон», «Прага» и «Птичье молоко». Сколько вариантов их размещения могли быть получены?

б) Из цифр 4, 6, 8 составляют трёхзначное число, сколько таких чисел можно получить, если цифры в числе не повторяются?

244 Прочитайте задачи:

а) В коробку кладут 5 разноцветных фломастеров: розовый, жёлтый, зелёный, красный и оранжевый. Сколькими способами их можно выложить в коробку?

б) Соня взяла в библиотеке журналы «Всё о комнатных растениях» за январь, февраль, март, апрель и май. Сколькими способами можно сложить в стопку эти журналы?

в) В конкурсе участвуют 5 школьников. Сколькими способами могут быть распределены места между ними?

Сравните эти задачи, что вы замечаете? Придумайте аналогичную задачу и запишите её решение.

245 Пятнадцать девушек водят хоровод. Сколькими различными способами они могут встать в круг?

246 Упростите выражение:

а) $\left(\sqrt{13}-3\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{13}+3\sqrt{3}\right)$; в) $\sqrt{\left(5-\sqrt{7}\right)^2}+\frac{1}{4}\left(\sqrt{7}+2\right)^2$;

б) $\sqrt{\left(5-\sqrt{17}\right)^2}$; г) $\left(1-\sqrt{7}\right)^2+2\sqrt{8-2\sqrt{7}}$.

247 Решите уравнения:

а) $x^3 - 5x^2 + 2x - 10 = 0$; б) $2y^4 - 8y^3 + 3y^2 - 12y = 0$.

С **248*** Имеется 17 чисел равных 2,3 и 19 чисел равных 2,33. Можно ли их разбить на две группы так, чтобы сумма чисел в одной группе равнялась сумме чисел в другой группе?

249* Два пловца стартовали одновременно от одного бортика бассейна и стали плавать по одной дорожке вперед и назад без остановки до того момента пока оба одновременно не оказались у того бортика, от которого стартовали. Первый проплывал от одного конца бассейна до другого за 3 минуты, а второй – за 5 минут. Сколько раз за время этого плавания первый пловец обогнал второго?

§2. Элементы статистики и теории вероятностей

6.2.1. Еще о статистических характеристиках. Дисперсия

Числа не управляют миром, но показывают, как управляется мир.

Иоганн Вольфганг Гёте (1749–1832),
немецкий поэт и философ

В 7-м классе мы познакомились с простейшими статистическими характеристиками, такими как среднее значение, мода, медиана и размах. Однако в статистике имеются и другие показатели, которые позволяют более точно описывать и анализировать собранную информацию.

Прежде чем познакомиться с ними, введём определение.

Определение 1. Набор чисел ***упорядочен по возрастанию***, если числа набора записаны так, что каждое последующее число не меньше предыдущего. Набор чисел ***упорядочен по убыванию***, если числа набора записаны так, что каждое последующее число не больше предыдущего.

Для удобства анализа набора чисел его лучше упорядочить. Рассмотрим пример. В таблице выписаны результаты школьной олимпиады по математике в восьмых классах:

Участник	Аня	Оля	Вова	Соня	Катя	Маша	Толя	Вика	Рома
Баллы	54	63	57	59	68	64	73	59	61

Тогда упорядоченный по возрастанию набор баллов, набранных школьниками, выглядит следующим образом:

$$54, 57, 59, 59, 61, 63, 64, 68, 73.$$

С помощью такой записи гораздо проще определить уже знакомые нам статистические характеристики. Например, найти типичный балл, набранный восьмиклассниками, – *моду набора*, равную 59.

Упорядоченный ряд чисел позволяет также легко находить число, стоящее посередине ряда, – *медиану*. Она указывает, что средний результат показал Рома, потому что есть четверо учеников, которые написали работу лучше него, и четверо, которые справились с ней хуже.

Если бы мы искали медиану баллов, набранных девочками, то их упорядоченный ряд выглядел бы следующим образом: 54, 59, 59, 63, 64, 68. Как мы знаем, медиану в таком случае рассчитывают как среднее арифметическое двух чисел, находящихся посередине: $\frac{59+63}{2}=61$.

Нам известна ещё одна статистическая характеристика – *размах набора*, позволяющая определить, как велик разброс данных в наборе. Чтобы найти его, нам нужно вычислить разность минимального и максимального значения: 73 – 54 = 19. Недостаток этого показателя заключается в том, что он зависит только от двух крайних значений в ряду чисел и не характеризует, как отличаются числа друг от друга внутри этого набора.

Рассмотрим следующий пример.

Два соседа каждый день ездят на работу в одно и то же место. У них есть два варианта поездки: на метро или на машине. В течение недели один из них ездил на метро, а второй – на машине. Время своих поездок (в минутах) они указали в следующей таблице:

День недели / Транспорт	Пн	Вт	Ср	Чт	Пт	Сб
На метро	28	30	29	29	31	27
На машине	32	28	27	35	36	25

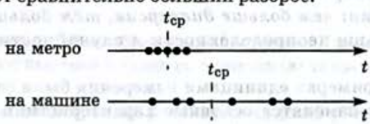
Оба варианта поездки занимают в среднем примерно одно и то же время:

(28 + 30 + 29 + 29 + 31 + 27): 6 = 174: 6 = 29 – на метро;

(32 + 28 + 27 + 35 + 36 + 25): 6 = 183: 6 = 30,5 – на машине.

Однако второй вариант подвержен гораздо большему влиянию внешних обстоятельств (машина может сломаться, на улицах есть светофоры, бывают пробки и т. д.), и поэтому значения в первой строке отличаются друг от друга меньше, чем значения в нижней строке.

Наглядно это удобно показать на рисунке. Отметим на числовой оси время, затраченное на эти ежедневные поездки. На рисунке, описывающем поездки на метро, точки будут лежать очень густо, мало *отклоняясь* от среднего значения, а на рисунке, который описывает поездку на машине, заметны очень большие *отклонения* от среднего – эти значения имеют сравнительно больший разброс.



Для того чтобы различать такого рода ситуации, мы использовали ещё одну статистическую характеристику – *отклонения от среднего значения*. Чтобы понять, как вычисляется набор отклонений от среднего, вернёмся к примеру с поездками на работу.

Среднее время поездки на метро составляло 29 минут, тогда отклонения времени поездок будут равны:

На метро	28	30	29	29	31	27
Отклонение от среднего	–1	1	–1	–1	2	–2

Среднее время поездки на машине составляло 30,5 минуты, тогда отклонения времени поездок будут равны:

На машине	32	28	27	35	36	25
Отклонение от среднего	1,5	– 2,5	– 3,5	4,5	5,5	– 5,5

Во втором случае модули найденных нами отклонений отличаются существеннее, чем в первом, – этот ряд является более «разбросанным» по своим значениям, что и продемонстрировано нами на числовых осях.

Однако при таком анализе нам приходится оперировать целыми наборами чисел, что не всегда удобно, ведь чисел может быть много. Поэтому в статистике выделяется ещё один показатель, позволяющий находить среднее арифметическое квадратов отклонений от среднего значения. Его называют *дисперсией* (от латинского слова dispersio – рассеиваю). Введем следующее определение.

Определение 2. Пусть M – среднее (арифметическое) значение набора чисел. ***Дисперсией набора чисел*** называется отношение суммы квадратов разностей между элементами этого набора и числом M к количеству этих элементов.

Дисперсию набора принято обозначать D, тогда для числового набора $x_1, x_2, \ldots x_n$ выполняется:

$$D = \frac{(x_1 - M)^2 + (x_2 - M)^2 + \ldots (x_n - M)^2}{n}.$$

Вычислим дисперсию набора рассмотренных выше данных о времени, затраченном для поездки на работу.

Вычислим дисперсию набора значений времени поездки на метро, пользуясь определением:

$$D = \frac{(28-29)^2 + (30-29)^2 + (29-29)^2 + (29-29)^2 + (31-29)^2 + (27-29)^2}{6} = \frac{10}{6} = 1\frac{2}{3}.$$

Вычислим дисперсию набора значений времени поездки на машине, пользуясь найденными нами значениями отклонений:

$$D = \frac{1{,}5^2 + (-2{,}5)^2 + (-3{,}5)^2 + 4{,}5^2 + 5{,}5^2 + (-5{,}5)^2}{6} = \frac{71{,}25}{6} = 11{,}875.$$

Как мы видим, дисперсия характеризует отклонения результатов измерений от среднего их значения: *чем больше дисперсия, тем больше разброс значений в наборе чисел*, тем больше неопределённости и случайности в анализируемой ситуации.

В рассмотренных примерах единицами измерения были сантиметры (рост), штуки, и так далее. А как изменятся основные характеристики данных, если измерения производить в других единицах? Например, в метрах, десятках штук. Понятно, что каждое значение при указанных изменениях уменьшится в 10 раз, соответственно и среднее значение также уменьшится в 10 раз. А дисперсия, что следует из ее определения, уменьшится в $10^2 = 100$ раз. А как быть, когда единицы измерения изменяются по более сложным формулам? Например, как будут связаны характеристики набора данных температуры в городе в 15-00 в течение июля, если её измерять в градусах Цельсия (°C, набор данных X), и в градусах Фаренгейта (°F, набор данных Y). Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_{31}$ – это значения температуры в °C в разные дни месяца, а $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{31}$ – это значения температуры в °F. Согласно правилам перевода, $Y_1 = X_1 \cdot 1{,}8 + 32, \ldots, Y_{31} = X_{31} \cdot 1{,}8 + 32$. Поэтому среднее значение

$$MY = \frac{Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_{31}}{31} = \frac{X_1 \cdot 1{,}8 + 32 + X_2 \cdot 1{,}8 + 32 + \ldots + X_{31} \cdot 1{,}8 + 32}{31} =$$

$$= \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_{31}}{31} \cdot 1{,}8 + 32 = MX \cdot 1{,}8 + 32.$$

Найдем теперь связь между дисперсиями:

$$DY = \frac{(Y_1 - MY)^2 + \ldots + (Y_{31} - MY)^2}{31} =$$

$$= \frac{(X_1 \cdot 1,8 + 32 - MX \cdot 1,8 - 32)^2 + \ldots + (X_{31} \cdot 1,8 + 32 - MX \cdot 1,8 - 32)^2}{31} =$$

$$= \frac{(X_1 - MX)^2 + \ldots + (X_{31} - MX)^2}{31} \cdot (1,8)^2 = DX \cdot (1,8)^2.$$

Так же доказывается теорема в общем случае линейного преобразования имеющегося набора данных.

Теорема. Если наборы данных X и Y связаны соотношением $Y = a \cdot X + b$ (это означает, что для каждого k выполняется равенство: $Y_k = aX_k + b$), то их средние (арифметические) значения и дисперсии связаны соотношениями: $MY = a \cdot MX + b$, $DY = a^2 \cdot DX$.

В частности, если $Y = a \cdot X$, то $MY = a \cdot MX$, $DY = a^2 \cdot DX$, а если $Y = X + b$, то $MY = MX + b$, $DY = DX$.

К **250** В таблице представлены результаты забега семиклассников в соревнованиях по бегу на дистанцию 100м:

Фамилия	Результат	Фамилия	Результат	Фамилия	Результат
Авдеев	15,3	Зуев	15,5	Петин	19,9
Виданов	16,1	Карцев	18,3	Тараскин	15,3
Дятлов	17,0	Мжельский	21,7	Шептунов	20,2

Пользуясь данными этой таблицы, выполните задания:

1) Укажите среднее, наибольшее и наименьшее значения, размах и моду этого набора чисел.

2) Расположите результаты забега по возрастанию. Какие из найденных вами ранее характеристик быстрее находить с помощью такого способа представления данных?

3) Кто из ребят показал лучший результат, худший результат?

4) Кто из ребят показал средний результат? Какую характеристику вы использовали для ответа на этот вопрос?

251 В таблице показаны результаты измерения количества осадков за первую неделю октября (мм в сутки) в двух российских городах.

	1.10	2.10	3.10	4.10	5.10	6.10	7.10
Омск	32	18	2	15	12	10	16
Уфа	28	1	30	0	29	15	2

1) Проанализируйте таблицу и ответьте на следующие вопросы:

а) Жители какого города должны были пользоваться зонтом регулярно?

б) Жители какого города за эту неделю то попадали под сильные или затяжные дожди, то наслаждались солнцем?

в) В каком из городов полученные измерения сильнее отличаются друг от друга?

2) Пользуясь данными этой таблицы, выполните следующие задания:

а) Найдите среднее количество осадков, выпавших за неделю в каждом из городов. Сравните полученные показатели. Характеризует ли этот показатель, что числа второго набора сильнее отличаются друг от друга, чем числа первого?

б) Определите размах измерений количества осадков за неделю в каждом из этих городов. Сравните полученные показатели. Характеризует ли этот показатель, что числа второго набора сильнее отличаются друг от друга, чем числа первого?

в) Могут ли известные вам характеристики показать, как сильно отличаются числа друг от друга внутри набора? Какие новые характеристики набора чисел вы могли бы предложить для ответа на этот вопрос? Сравните свой вариант со статистическими характеристиками, описанными в учебнике на с. 69–70.

252 Найдите отклонения от среднего значения для следующих наборов чисел:

а) 20, 30, 40, 50, 60; б) 1, 2, 2, 3, 2, 2; в) 24; 11, 15, 16, 16, 28, 30.

Найдите сумму отклонений для каждого набора. Как вы можете объяснить полученные результаты?

Вычислите дисперсию одного из этих наборов.

253 В таблице представлены данные о количестве бутылок кваса (в тысячах), проданных в весенние и летние месяцы за два года (по данным компании-производителя). Вычислите дисперсию набора чисел (при необходимости воспользуйтесь калькулятором):

а) за 2012 год; за весенний период 2012 года;

б) за 2013 год; за летний период 2013 года.

Сравните полученные показатели.

Как вы можете пояснить результаты анализа?

	2012	2013
март	50	52
апрель	52	54
май	56	55
июнь	59,5	64
июль	60	62
август	55,5	61

П **254** Найдите медиану в следующих наборах чисел:

а) (14; 16; 18; 20; 22; 24; 26; 28; 30) и (16; 18; 20; 22; 24; 26; 28);

б) (13; 15; 17; 19; 21; 23) и (15; 17; 19; 21).

Что интересного вы замечаете? Чем отличается второй набор от первого? Можно ли обобщить результаты этих наблюдений на все наборы такого вида?

255 В некотором городе живет 100 000 трудоспособных жителей. Из них

- 5 000 безработные (их месячная зарплата равна 0 рублей);
- 30 000 жителей получают зарплату 7 000 рублей;
- 20 000 жителей – 10 000 рублей;
- 20 000 жителей – 15 000 рублей;
- 10 000 жителей – 20 000 рублей;
- 5 000 жителей – 30 000 рублей;
- 5 000 жителей – 40 000 рублей;
- 2 000 жителей – 50 000 рублей;

• 2 000 жителей – 100 000 рублей;
• 1000 жителей – 500 000 рублей.

Вычислите среднее значение, медиану и моду зарплаты в этом городе. Какая из характеристик лучше отражает уровень жизни людей в этом городе?

256 Решите квадратное уравнение устно:

а) $x^2 - 8x + 12 = 0$; б) $x^2 - 11x + 30 = 0$; в) $x^2 + x - 6 = 0$.

257 Уравнение $x^2 - 4x - 5 = 0$ имеет корни x_1 и x_2. Составьте уравнение, корнями которого являются числа $3x_1 - 1$ и $3x_2 - 1$.

258 Для корней x_1 и x_2 уравнения $2x^2 - 5x + 2 = 0$ найдите значения выражений:

а) $x_1^2 + x_2^2$; б) $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} + 2$.

259 Один из корней квадратного уравнения $x^2 + 2x - c = 0$ равен $1 - \sqrt{5}$. Найдите другой корень и значение параметра c.

260 Разложите на множители квадратный трёхчлен, если это возможно:

а) $x^2 - 17x + 60$; б) $-6x^2 + 7x - 2$; в) $x^2 - 8$; г) $3x^2 + 4x + 5$.

261 Решите задачу:

а) Площадь прямоугольника равна 40 см², а его периметр равен 28 см. Найдите стороны прямоугольника.

б) Гипотенуза прямоугольного треугольника больше одного из его катетов на 3 см, а другой катет на 1,5 см больше первого. Найдите стороны треугольника.

262 При каких значениях параметра k уравнение $x^2 - 8x + k = 0$ не имеет корней?

263 При каких значениях параметра a уравнение $ax^2 + (a - 2)x + a - 2 = 0$ имеет ровно один корень?

264 При каких значениях параметра m следующее уравнение имеет два различных корня: $x^2 - 2(1 + 3m)x + 7(3 + 2m) = 0$?

265 Найдите корни многочлена:

1) $x^2 - 2x - 8$; 4) $3x^2 - 13x + 4$;
2) $x^2 - 7x + 12$; 5) $0{,}05x^2 - 0{,}12x + 0{,}04$;
3) $-x^2 + 11x - 18$; 6) $-0{,}02x^2 - 0{,}04x + 0{,}7$.

Определите для каждого из многочленов, каким промежуткам принадлежат найденные корни:

а) $(-8; 6)$; б) $[0; 5)$; в) $[-2; 5]$; г) $(1; 10)$; д) $(0; 2]$; е) $[2; 4]$.

Д **266** Найдите дисперсию следующего набора чисел:

а) 200, 201, 202, 199, 200; б) 0,2; 0; 0,2; 0,3; 0,1; 0,2; 0,2; 0,4.

267 В лаборатории производится анализ крови. Таблица содержит результаты пяти измерений гемоглобина (г/л) в одной пробе крови пациентки Петровой.

Номер измерения	1	2	3	4	5
Результат измерения (г/л)	120	150	110	50	120

а) Содержание гемоглобина в крови вычисляется как среднее значение результатов нескольких измерений. Найдите содержание гемоглобина в этой пробе.

б) Найдите дисперсию измерений.

в) Следуя правилу: *если квадрат отклонения некоторого значения x превышает дисперсию больше чем в 3,5 раза, то это значение выбраковывается (считается ненадежным) и в дальнейшем не учитывается*, определите, считается ли значение 50 надежным.

г) Найдите среднее арифметическое всех надежных значений. Что вы можете сказать о содержании гемоглобина у этой пациентки, если норма содержания гемоглобина в крови у женщин 120 – 150 г/л?

268 Найдите моду, медиану и размах следующего упорядоченного по возрастанию набора чисел:

а) 10, 20, 30, 40, 50; б) 1, 2, 2, 3, 4, 7; в) 11, 15, 16, 16, 28, 30.

269 В одной из компаний курьер получает 72 тысячи рублей в год. 20 специалистов этой компании получают по 120 тысяч в год. 10 ведущих специалистов этой компании получают по 180 тысяч рублей в год, начальники всех четырёх департаментов этой компании получают по 240 тысяч рублей в год. Президент компании получает 600 тысяч рублей в год. Других работников в компании нет. Представьте эти данные в виде упорядоченного по возрастанию числового набора.

Найдите среднее значение, моду и медиану этого набора. На какой должности должен работать сотрудник, чтобы получать среднюю зарплату в этой компании? Сколько этот служащий получает в месяц?

270 Решите устно квадратное уравнение:

а) $x^2 + 12x + 20 = 0$; б) $x^2 - 4x - 12 = 0$; в) $x^2 + x + 7 = 0$.

271 Для корней x_1 и x_2 уравнения $x^2 - x - 12 = 0$ найдите значение выражения $x_1^2 + x_2^2$.

272 Разложите на множители квадратный трехчлен, если это возможно:

а) $x^2 + 2x - 48$; б) $-7x^2 + 34x + 41$; в) $x^2 - 7$; г) $-2x^2 + x - 3$.

273 Площадь прямоугольника равна 90 м², а его периметр равен 38 м. Найдите стороны прямоугольника.

274 При каких значениях параметра t уравнение $x^2 - 6x - t = 0$ не имеет корней?

С **275*** Если к половине возраста Сашиного папы прибавить 8, то получится его возраст 15 лет назад. Сколько лет Сашиному папе?

276* В офисе одной компании работает 150 человек. Причём часть сотрудников этой компании всегда говорит правду, а все остальные всегда лгут. Каждому из сотрудников компании был задан вопрос: «Если не считать Вас, то кого больше среди остальных сотрудников компании – лжецов или тех, кто говорит правду?» Когда 76 участников на этот вопрос ответили, что лжецов больше, опрос прекратили. Можно ли по результатам этого опроса определить, сколько в компании лжецов?

6.2.2. Анализ статистических данных

Если запастись терпением и проявить старание, то посеянные семена знания непременно дадут добрые всходы.

Леонардо да Винчи (1452–1519), итальянский художник, учёный и изобретатель

Как мы знаем, существуют разные способы представления и анализа статистических данных и многие из них нам уже знакомы. В этом пункте мы расширим свои знания о статистическом анализе, что увеличит наши возможности при работе с информацией.

Диаграммы рассеивания

Существуют разные способы представления и анализа статистических данных. В некоторых случаях, когда данные представляются парами значений, удобно изобразить эти данные точками на координатной плоскости. Такое представление мы назовём *диаграммой рассеивания*. Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Какова связь между ростом и возрастом школьников?

На основе таблицы, в которой указаны рост (в см) и возраст (в годах) нескольких мальчиков, построим диаграмму.

Рост (см)	130	138	135	140	136	145	150	145	152	158
Возраст (лет)	9	9	10	10	11	11	12	12	13	13

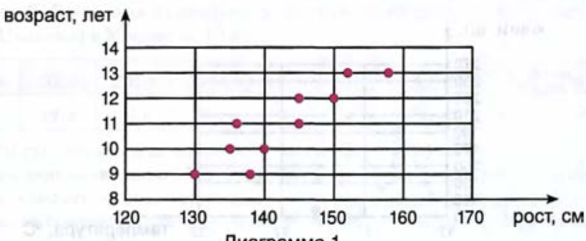


Диаграмма 1

Из диаграммы видно, что люди разного возраста могут иметь одинаковый рост, и иногда даже младшие дети могут быть выше старших. Но в целом для данной группы наблюдается закономерность: чем старше ребёнок, тем он выше.

Пример 2. Какова связь между температурой воздуха и объёмом проданного кваса?

В таблицу записали для одной из недель июля максимальную дневную температуру (в градусах Цельсия) и объём проданного кваса (в литрах) в небольшом магазине.

День недели	пн	вт	ср	чт	пт	сб	вс
Температура (°С)	21	25	18	23	29	27	29
Объём кваса (л)	250	310	200	250	380	450	500

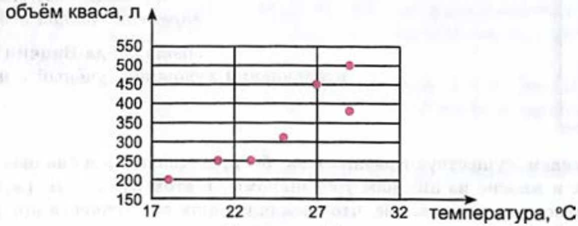


Диаграмма 2

Из диаграммы видно, что в более жаркие дни продажи кваса увеличивались. Но на продажи влияли и другие факторы. Например, в выходные дни продажи увеличились по сравнению с рабочими днями.

Пример 3. Какова связь между температурой воздуха и количеством проданных книг?

Для той же недели июля в таблицу записали максимальную дневную температуру (в градусах Цельсия) и количество книг (в штуках), проданных в книжном магазине.

День недели	пн	вт	ср	чт	пт	сб	вс
Температура (°С)	21	25	18	23	29	27	29
Книги (шт.)	123	97	170	210	251	210	135

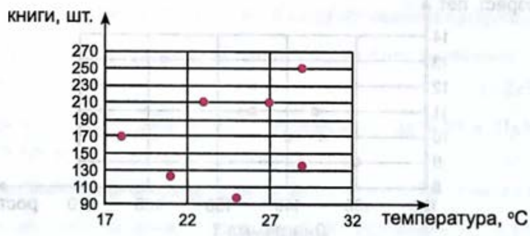


Диаграмма 3

Из диаграммы видно, что явной зависимости между количеством проданных книг и температурой не наблюдается. Можно предположить, что увеличение числа проданных книг в середине недели связано, например, с появлением в продаже ожидаемой книжной новинки.

Таким образом, диаграмма рассеивания в некоторых случаях (примеры 1, 2) может показывать связи в статистических данных.

Случайная изменчивость

Многие процессы в природе, окружающем нас мире, быту описываются численными величинами. Значения этих величин могут изменяться. В одних случаях мы можем понять причины этих изменений и степень их влияния, в других случаях это сделать затруднительно. Для описания таких процессов вводится термин *«случайная изменчивость»*. При анализе полученных данных важно установить закономерности в изменчивых величинах, понять причины изменчивости, сформировать правила, позволяющие делать выводы (принимать решения) на основе наборов данных, получаемых при исследовании аналогичных процессов.

Одним из важных примеров случайной изменчивости является процесс измерения физических величин, например величины напряжения.

Пример 4. Во многих европейских странах, а с 2015 года и в России, напряжение в бытовой электрической сети должно составлять 230 В. Означает ли это, что при подключении к розетке вольтметра он всегда будет показывать ровно 230 В?

Приведём результаты эксперимента, в ходе которого в произвольные моменты времени замерили напряжение в розетке: {225 В; 229 В; 235 В; 230 В; 237 В; 235 В; 231 В; 226 В; 228 В; 229 В}. Как мы видим, напряжение меняется в течение дня. Иногда оно равно 230 В, иногда больше, иногда меньше. Это может быть обусловлено разными причинами. Например, в вечерние часы, когда жильцы дома наиболее активно пользуются бытовыми приборами, напряжение может понизиться.

Зная об изменчивости величин, производители приборов обеспечивают стабильность их работы при незначительных отклонениях от нормы. На некоторых электрических приборах (холодильник, стиральная машина) вы можете увидеть табличку с указанием «220–240 В».

Найдем статистические характеристики полученного набора данных.

Среднее значение равно 230,5 В, медиана равна 229,5 В, размах составляет 12 В. Отсюда можно сделать вывод, что в среднем напряжение близко к требуемому, размах незначителен, то есть бытовые электроприборы будут работать нормально.

Пример 5. В таблице приведены значения среднемесячной температуры июня (в градусах Цельсия) в Москве за 10 лет.

2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017
15,6	17,3	18,8	19,1	17,1	19,8	16,1	18	18,2	14,5

Найдём статистические характеристики этого набора данных.

Среднее значение равно 17,5 °C, медиана равна 17,7 °C, размах составляет 5,3 °C.

Можно сделать вывод, что среднемесячная температура июня обычно не сильно отличается от среднего значения. Однако бывают годы с существенным отклонением от нормы.

На среднемесячную температуру влияет множество факторов, и причины её изменчивости сложны и разнообразны. Тем не менее можно предполагать, что и в ближайшие годы среднемесячная температура июня будет около 17,5 °C, хотя возможны и отклонения от нормы.

Случайные выбросы

Иногда при анализе статистических данных видно, что некоторые значения значительно отличаются от основной массы данных. Такие данные называются *случайными выбросами*. Причинами случайных выбросов могут быть человеческие или технические ошибки, попадание в выборку редких случаев и т. п. Иногда случайные выбросы легко заметить не только потому, что они сильно отличаются от других данных, но и потому, что они противоречат, например, физическим законам.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 6. Медсестра в журнал записала рост (в см) учащихся 8 класса, сидящих на первом ряду.

У нее получился следующий набор данных: {157; 165; 158; 171; 164; 1165; 150; 158; 164; 167}.

Легко увидеть, что 1165 см – случайный выброс. Причина – описка при записи.

Пример 7. Группу студентов спросили, за какое время (в секундах) каждый из них пробегает дистанцию в 100 м. Был получен следующий набор данных: {13,8; 15,0; 14,3; 13,5; 10,6; 14,8; 14,2; 13,7; 14,1; 14,3}.

В данном случае результат 10,6 с – случайный выброс. Возможно, и здесь была допущена ошибка при записи. Однако такой результат мог быть верным, если отвечавший студент – кандидат в мастера спорта.

Пример 8. Осенью в течение недели записывали данные электронного уличного термометра в 12 часов дня (температуру в градусах Цельсия). Был получен следующий набор данных: {10; 11; 8; 9; 13; 29; 11}.

В этом наборе данных значение 29 °С – случайный выброс. Помимо ошибочной записи, возможны и другие причины. Например, термометр испорчен. Также возможно, что датчик термометра неправильно установили, и на него попадали прямые солнечные лучи, а суббота оказалась солнечным днем. Две последние причины ставят под сомнение правильность всего набора данных.

При анализе статистической информации в случае обнаружения случайного выброса нужно понять возможные причины его появления. В некоторых случаях случайные выбросы следует исключить из данных для анализа. А иногда может потребоваться (как в примере 8) повторный сбор статистической информации.

Как случайные выбросы влияют на статистические характеристики?

Несложно видеть, что случайный выброс может сильно изменить среднее значение. В то же время медиана набора меняется незначительно.

Так, в примере 6 среднее значение равно 262 см, а медиана 164,5 см. Если исключить случайный выброс, то среднее значение станет равным примерно 162,7 см, а медиана 164 см. Если случайный выброс будет перепроверен и в тетрадь будет внесен правильный рост (165 см), то среднее значение будет равно 162 см, а медиана 164,5 см.

К **277** На автодроме для трёх автомобилей замерили длину тормозного пути в метрах на сухой дороге и скорость в км/ч перед началом торможения. Данные записали в таблицу.

	Автомобиль 1				Автомобиль 2				Автомобиль 3			
Скорость (км/ч)	40	50	60	80	45	55	60	70	50	65	75	90
Тормозной путь (м)	11	16	23	42	18	27	32	43	19	32	43	62

Составьте диаграмму рассеивания, изобразив эти данные точками на координатной плоскости, отложив по оси Ox скорость (км/ч), а по оси Oy длину тормозного пути (м).

Какую закономерность вы наблюдаете?

Верны ли утверждения:

а) если у автомобилей одинаковая скорость, то у них одинаковый тормозной путь;

б) чем больше скорость, тем длиннее тормозной путь?

278 Днем в тир пришло несколько человек. Каждый из них сделал по 5 выстрелов по мишени.

Для каждого из стрелков в таблицу записали его возраст и сумму выбитых им очков (из 50 возможных).

Возраст (лет)	12	15	22	15	25	35	17	41	27	55	31	35
Количество очков	15	40	10	29	38	49	25	21	41	45	35	30

Составьте диаграмму рассеивания, изобразив эти данные точками на координатной плоскости, отложив по оси Ox возраст (лет), а по оси Oy количество очков.

Наблюдаете ли вы какую-либо закономерность?

Верно ли, что чем старше стрелок, а) тем он лучше стреляет, б) тем он хуже стреляет?

279 Дорога от дома до школы в течение недели (с понедельника по субботу) занимала у Пети соответственно 18, 17, 18, 17, 13, 19 минут.

Какое из данных существенно отличается от других?

В один из дней недели Петя проспал и вынужден был идти в школу очень быстрым шагом. Какой это был день недели?

Найдите среднее значение и медиану данных о времени дороги до школы. Какими были бы эти характеристики, если убрать случайный выброс?

Сравните их между собой. Какие выводы можно сделать?

280 В газете напечатали таблицу со среднемесячными температурами января (в градусах Цельсия) в Москве за 10 лет.

2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017
–5,8	–5,6	–14,5	–7,5	–6,8	–8,5	–8,6	–4,4	10,1	–7,8

Какое из данных существенно отличается от других? Какой может быть причина случайного выброса?

Найдите среднее значение и медиану приведённых данных. Какими были бы эти характеристики, если исправить данные случайного выброса?

П **281** Решите линейное неравенство:

а) $8d - 15 + 11d < -5d + 10 - d$; б) $9p + 3(4p - 5) \le 6(3p + 1) + 3p$.

282 Найдите все значения x, удовлетворяющие неравенству с параметром:

а) $x - a \geqslant 8$; в) $2x - 33m > 11n - 9x$; д) $x < c - \frac{x}{b}$;

б) $a - x > c + 5$; г) $6x - d \leqslant 14x + q$; е) $x - m \geqslant \frac{x}{n}$.

Д **283** Отмерьте расстояние в 100 м (либо в 60 м); подойдёт, например, беговая дорожка у вас в школе. Посчитайте вместе с друзьями, сколько шагов каждому из вас потребовалось на преодоление дистанции. Для каждого из ребят вычислите среднюю длину шага и в таблицу запишите его рост (в см) и среднюю длину его шага (в см).

Составьте диаграмму рассеивания по этим данным.

Наблюдаете ли вы какую-либо закономерность?

284 В черте города на реке начало ледохода наблюдалось в течение 7 лет соответственно 10, 12, 11, 16, 14, 25, 13 апреля. Определите случайный выброс в данном наборе. Какими причинами его можно объяснить?

285 В газете опубликовали таблицу, в которую записали количество очков, набранных победителем чемпионата России по футболу за несколько лет.

Чемпионат	2008	2009	2010	2011/12	2012/13	2013/14	2014/15	2015/16	2016/17
Очки	60	63	68	88	64	64	67	65	69

Определите случайный выброс в данном наборе. Какими причинами его можно объяснить?

286 В течение 8 уроков учитель математики поставил в 8 «а» классе 8, 11, 6, 9, 7, 25, 6, 8, 9, 7 оценок. Объясните причину случайного выброса.

287 Решите линейное неравенство:

а) $5b - 2 + b > -7 + 6b$; б) $7(4 - 11m) \geqslant -56(2 + m)$.

288 Найдите все значения y, удовлетворяющие неравенству:

а) $y + 7 < d$; в) $17b + 20y > 8b - 7y$; д) $b + y \leqslant \dfrac{y}{d}$;

б) $b - 2y \leqslant 12 - d$; г) $y + b \geqslant 6y + d$; е) $y > \dfrac{y}{a} + c$.

6.2.3. Случайные события и их частота

...Случайность главным образом зависит от нашего знания.

Якоб Бернулли (1654–1708), швейцарский математик

В предыдущем пункте мы вспомнили, какие статистические показатели нам известны, и научились рассчитывать новый показатель – дисперсию набора. Как мы знаем, дисперсия характеризует **разброс значений в наборе чисел**, чем она значительнее, тем больше неопределённости и случайности в анализируемой ситуации. В этом пункте мы подробнее остановимся на случайном характере многих окружающих нас явлений, для этого выявим ещё одну новую для нас статистическую характеристику.

Рассмотрим следующий пример.

В таблице собраны данные о посещаемости одного из кинотеатров в зимние каникулы (число посетителей указано с точностью до десятков).

Понедельник 31.12	60	Понедельник 07.01	200
Вторник 01.01	50	Вторник 08.01	200
Среда 02.01	70	Среда 09.01	200
Четверг 03.01	120	Четверг 10.01	180
Пятница 04.01	300	Пятница 11.01	200
Суббота 05.01	430	Суббота 12.01	360
Воскресенье 06.01	340	Воскресенье 13.01	300

Сначала вычислим *среднее значение* ряда этих чисел:

$$\frac{60+50+70+120+300+430+340+200+200+200+180+200+360+300}{14}=\frac{3010}{14}=215.$$

Теперь вычислим характеристики разброса.

Вычислим *размах* этого набора чисел: $430 - 50 = 380$, его величина показывает, что посещаемость очень неравномерна по своим значениям. При этом существенно отличаются друг от друга не только крайние показатели посещаемости, но и остальные числа внутри этого набора. Поэтому *дисперсия*, характеризующая отклонения результатов измерений от среднего их значения, будет очень значительной (составит около 13 000).

Как мы видим, посещаемость изменяется день ото дня. Это происходит потому, что она зависит от самых разнообразных факторов: от погоды – в морозную погоду вместо прогулки лучше пойти в кино; от пробок на дороге – из-за них можно опоздать на киносеанс и т. д.

События реальной жизни различаются по степени своей определённости: одни из них наступят однозначно, другие не произойдут никогда, а некоторые могут либо произойти, либо нет. Например, после марта точно наступит апрель, но не наступит январь, а вот выпадение снега в начале апреля может как произойти, так и не произойти. Соответственно, события можно разделить на *достоверные*, *невозможные* и *случайные*. Уточним эти понятия.

Определение 1. Событие называется ***достоверным***, если оно заведомо произойдёт.

Определение 2. Событие называется ***невозможным***, если оно заведомо не произойдёт.

Определение 3. Событие называется ***случайным***, если оно может произойти, а может и не произойти.

На практике мы иногда относимся к случайным событиям как к достоверным (рассчитываем, что они произойдут) или как к невероятным (рассчитываем, что они не произойдут). Скажем, восьмиклассник Митя перебегает дорогу в неположенном месте. Он считает аварию практически невозможным событием и не принимает во внимание такой исход.

Митя делает две серьёзные ошибки.

В однократном эксперименте разумно не учитывать маловероятные исходы, но если повторять эксперимент достаточно много раз, то и маловероятные события осуществятся: в больших городах дорожные происшествия по вине пешеходов случаются каждый день.

Кроме того, нужно учитывать ещё и последствия редких событий. Если Митя, выходя из дому и рассчитывая на солнечную погоду, не взял бы зонтик и промок под дождем, это было бы неприятно, но не трагично. А в бизнесе, в медицине, в космических полетах цена ошибки может быть настолько велика, что учитывать надо и очень маловероятные события.

В реальной практике зачастую требуется как можно точнее знать, насколько часто случайные события приводят нас к недопустимому (или наоборот, очень нужному) результату. Так, посещаемость кинотеатра – случайное событие, и директор кинотеатра интересуется прежде всего тем, как часто посещаемость выше среднего значения 215. В нашей таблице таких случаев 5 из 14 (они выделены жирным шрифтом), то есть более чем в трети случаев. Однако если эти 5 случаев встретятся в годовой таблице, то это составит уже менее 2% – принципиально иная картина. Поэтому чтобы судить о частоте нужного события, следует учитывать не только количество подходящих результатов, но и отношение этого числа к общему числу рассмотренных результатов.

Частота события – ещё одна важная статистическая характеристика, которая широко используется на практике. Для её определения, как правило, проводят специальные эксперименты, в которых вычисляют число нужных (*благоприятных*) результатов и делят его на общее число результатов. В математике производимые действия (например, подбрасывание игральной кости – кубика, на гранях которого отмечены точки от 1 до 6) называют ***испытаниями***, а их результаты (выпало то или иное число точек) – ***исходами***. Тогда математическое определение частоты события можно сформулировать так.

Определение 4. ***Частотой*** события A в данной серии испытаний называется отношение числа M испытаний, в которых это событие произошло, к числу N всех проведённых испытаний, то есть $W(A)=\dfrac{M}{N}$, где $W(A)$ – частота события A.

Например, если нам требуется установить частоту выпадения пяти очков при подбрасывании игрального кубика, а в серии из 30 бросков пять очков выпало 7 раз, то частота выпадения пяти очков в нашей серии испытаний равна $\dfrac{7}{30}$.

Замечание. Очевидно, что частота случайного события выражается правильной дробью, значение которой заключается между 0 и 1. Чем ближе эта дробь к 1, тем чаще происходило данное событие, а чем ближе к 0 – тем реже. Частота достоверного события равна 1, так как $M = N$; а частота невозможного события равна нулю, так как $M = 0$. Как и любую долю величины, частоту можно выразить в процентах.

Рассмотрим примеры нахождения частоты случайного события.

Пример 1.

Чтобы определить, каким образом форма крыльев самолёта влияет на его скорость, в классе проводили эксперимент по запуску бумажных самолётиков. Ученики разбились на тройки: двое запускали самолётики – один с узкими, а другой – с широкими крыльями. Третий определял, какой самолёт прилетел быстрее, и подсчитывал результаты.

Результаты испытаний каждая группа фиксировала в таблице, например:

Результаты группы 1											
№ испытания / Исход испытания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Результат
С узкими крыльями	∨			∨		∨		∨		∨	5
С широкими крыльями		∨	∨		∨		∨		∨		5

После того как каждая из девяти групп повторила испытание 10 раз, они просуммировали результаты каждой группы и свели их в общую таблицу:

Общее число испытаний	Число исходов случайного события	
	С узкими крыльями	С широкими крыльями
$10 \cdot 9$	$5+7+8+8+9+8+8+10+9$	$5+3+2+2+1+2+2+0+1$

Сравните частоты прилета самолета каждого вида. Какую гипотезу могли выдвинуть ребята в результате проведения этой серии экспериментов?

Решение:

Общее число всех испытаний, проведённых девятью группами, равно 90. Число исходов, в которых быстрее был самолёт с узкими крыльями, равно 72. Отсюда частота этого события составляет $72 : 90 = 0{,}8$. Число исходов, в которых быстрее был самолёт с широкими крыльями, равно 18. Частота этого события составляет $18 : 90 = 0{,}2$.

Сравнивая полученные частоты, мы видим, что самолёт с узкими крыльями чаще прилетал первым. Ребята могли предположить, что чем у́же крылья самолета, тем бо́льшую скорость он может развивать. Действительно, самолету с небольшими по площади крыльями приходится преодолевать меньшее сопротивление воздуха, и поэтому он может развивать бо́льшую скорость.

Обратим внимание на то, что учащиеся из первой группы, опираясь только на свои результаты, могли выдвинуть неверную гипотезу: форма крыльев самолёта не влияет на скорость самолёта. Именно поэтому для повышения достоверности полученных результатов эксперимент повторяют *многократно*.

Мы можем теперь сформулировать следующий способ нахождения частоты.

Чтобы найти частоту случайного события, нужно:

1. Сформулировать событие, частоту которого необходимо найти.
2. Многократно повторить эксперимент, воспроизводящий это событие, либо воспользоваться статистическими данными о его проведении.
3. Подсчитать число всех проведенных испытаний – N.
4. Подсчитать число исходов, в которых это событие произошло – M.
5. Вычислить частоту события $W(A) = \dfrac{M}{N}$.

Пример 2.

В таблице приведено количество выпадения решки в серии опытов, проведённых восьмиклассниками на уроке математики. Чему равна частота выпадения решки: а) в каждом из испытаний; б) в общем итоге?

Номер испытания	Количество выпадения решки	Количество испытаний
1	4	10
2	53	100
3	101	200
Итого:	158	310

Решение:

Искомые частоты находим по формуле $W(A)=\dfrac{M}{N}$.

а) $W(A_1)=0{,}4$; $W(A_2)=0{,}53$; $W(A_3)=0{,}505$; б) $W(A_{1-3})=0{,}50967...\approx 0{,}51$.

Ответ: 0,4; 0,53; 0,505; 0,51.

Из рассмотренных нами примеров видно, что значение частоты одного и того же случайного события зависит от количества проведенных испытаний. Так, в эксперименте с решкой частота её выпадения в первом испытании составляет 0,4, во втором – 0,53, в третьем – 0,505, а при итоговом подсчёте она приблизительно равна 0,51. Однако можно заметить, что *при увеличении количества испытаний* значения относительной частоты выпадения решки *все меньше и меньше отличаются друг от друга*.

Этот опыт с монетой неоднократно проводили выдающиеся математики прошлого: Паскаль, Ферма, Гаусс. Для этого каждому экспериментатору пришлось подбрасывать монету до нескольких тысяч раз. Сейчас подобный опыт можно смоделировать на компьютере. Одни из его результатов описаны с помощью графика на рис. 1.

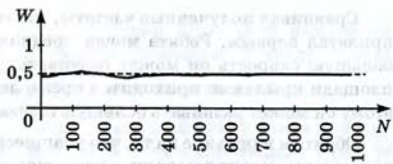


Рис. 1

Анализируя график зависимости частоты W от числа испытаний N, можно заметить, что частота выпадения решки обладает свойством устойчивости, а именно: с ростом числа испытаний её значения устанавливаются вблизи одного и того же числа 0,5.

Оказывается, подобная устойчивость частоты свойственна и другим массовым случайным событиям, например демографическим явлениям.

Исследователи, анализирующие большие массивы *случайных* событий, пришли к удивительному выводу: ***случайные события подчиняются определённым правилам***. О том, какие это правила и как они используются на практике, мы поговорим в следующем пункте.

289 Наташа выписала свои отметки по алгебре за IV четверть и получила следующий набор значений: 3, 2, 3, 4, 5, 4, 4, 5, 5, 5. Она решила сравнить свои отметки за IV четверть с отметками, полученными ею за III четверть, и тоже выписала их: 4, 5, 4, 4, 5, 5, 5, 4.

1) Укажите среднее значение, размах и моду набора отметок за IV четверть.

2) Дисперсия какого набора выше за III или IV четверть? В какой из четвертей Наташа показывала более стабильные результаты?

3) Какую из отметок получала Наташа чаще других отметок в III четверти? в IV четверти?

4) В какой из этих четвертей Наташа получала «отлично» чаще? Достаточно ли для ответа на этот вопрос указать количество пятерок за каждую из четвертей? Какую новую статистическую характеристику вы могли бы предложить для ответа на этот вопрос? Сравните свой вариант со статистической характеристикой, описанной в учебнике на с. 82.

290 На дне рождения гости играли в «Фанты». В мешке для фантов оказались: часы наручные, брелок от ключей, три сотовых телефона, браслет и два кольца.

1) Среди следующих высказываний, описывающих продолжение этой игры, найдите истинные и ложные.

а) Сотовый телефон вынимали из мешка 3 раза.

б) Браслет вынимали из мешка 2 раза.

в) Частота, с которой вынимали сотовый телефон, составила 0,375.

г) Частота, с которой вынимали часы, равна 0,125.

д) Кольца из мешка вынимали с той же частотой, что и телефоны.

2) Предположите, по какому признаку следующие события были распределены в три группы?

1	2	3
Первым из мешка вынут брелок.	Из мешка вынули предмет, принадлежащий одному из гостей.	Из мешка вынули 4 телефона.
Сотовый телефон вынимали из мешка 3 раза подряд.	На девятый раз мешок оказался пуст.	Из мешка вынули белого кролика.

3) Дайте названия этим группам, сопоставьте свои варианты с классификацией событий на стр. 81.

291 Игральный кубик подбросили 500 раз. При этом число 1 выпало 99 раз, число 2 – 63 раза, число 3 – 76 раз, число 4 – 96 раз, число 5 – 84 раза, а число 6 – 82 раза. Вычислите (с точностью до сотых) частоту наступления следующих случайных событий:

а) выпадение числа 1; в) выпадение числа 3; д) выпадение числа 5;

б) выпадение числа 2; г) выпадение числа 4; е) выпадение числа 6.

292 а) Проведите 15 испытаний по подбрасыванию пятирублевой монеты и запишите, сколько раз у вас выпал «орел» и сколько раз выпала «решка». Используя калькулятор, вычислите с точностью до сотых частоту выпадения «решки» в проведенной серии испытаний.

б) Проведите 30 испытаний по подбрасыванию пятирублевой монеты и запишите, сколько раз у вас выпал «орел» и сколько раз выпала «решка». Вычислите частоту выпадения «решки» в проведенной серии испытаний. Как изменилась частота выпадения «решки»?

Сравните свои результаты с результатами ваших одноклассников.

в) Занесите результаты всех испытаний по подбрасыванию монеты в вашем классе в одну таблицу и вычислите с точностью до сотых частоту выпадения «решки». Как изменилась частота? Что вы замечаете?

Замечание. Уточните условия исследования а) – в), изложенные выше, и подумайте, как можно сэкономить время его проведения.

293 а) При проведении социологического опроса был задан вопрос: «Какие книги вы в основном читаете: бумажные или электронные?». Ответ «Бумажные» выбрали 189 человек. После подсчёта оказалось, что частота данного ответа среди всех ответов, полученных на данный вопрос, равна 0,63. Сколько человек принимало участие в этом опросе? Сколько человек назвали другой вариант ответа?

б) При проведении социологического опроса, в котором приняли участие 250 человек, был задан вопрос: «Делаете ли вы по утрам зарядку?». После подсчёта оказалось, что частота ответа «да, каждый день» среди всех ответов, составила 0,34. Сколько из опрошенных делают по утрам зарядку? Сколько человек назвали другие варианты ответа?

294 В задании приведено стихотворение Николая Заболоцкого, содержащее 456 букв. Используя калькулятор, вычислите (с точностью до тысячных) частоту появления букв «О», «И», «Т», «К».

Я воспитан природой суровой,
Мне довольно заметить у ног
Одуванчика шарик пуховый,
Подорожника твёрдый клинок.
Чем обычней простое растенье,
Тем живее волнует меня
Первых листьев его появленье
На рассвете весеннего дня.
В государстве ромашек, у края,
Где ручей, задыхаясь, поёт,
Пролежал бы всю ночь до утра я,
Запрокинув лицо в небосвод.
Жизнь потоком светящейся пыли
Всё текла бы, текла сквозь листы,
И туманные звёзды светили,
Заливая лучами кусты.
И, внимая весеннему шуму
Посреди очарованных трав,
Всё лежал бы и думал я думу
Беспредельных полей и дубрав.

По статистике эти буквы повторяются в осмысленных текстах со следующей частотой: из 1000 знаков буква «О» встречается в среднем 109 раз; «И» – 75; «Т» – 63; «К» – 34 раза. Почему полученные вами частоты не совпадают с приведенными статистическими данными?

295 Термин «функция» (лат. functio – «исполнение», «совершение») впервые появляется в 1692 г. в трудах немецкого учёного Г. Лейбница, притом совсем не в том понимании, в котором его используют сейчас. И только в 1718 г. этот термин уже в смысле, близком к современному его толкованию, встречается у совсем другого учёного.

Решите эти квадратные неравенства с помощью графика квадратичной функции. Расположив наименьшие целые неотрицательные решения каждого из них в порядке убывания, узнайте имя этого швейцарского учёного:

И	$4x^2+4x+1 \geqslant 0$	**Е**	$x^2-4x-21>0$	**У**	$4-x^2<0$
Л	$-16x^2-10x+9 \leqslant 0$	**Л**	$15x^2-4x-35>0$	**Н**	$2x^2-8x>0$
Р	$x^2-3x-18>0$	**Б**	$x^2-19x+90 \leqslant 0$		

296 Найдите значения x, при которых данное выражение имеет смысл:

а) $\sqrt{x^2+5x}$; в) $\sqrt{x^2+13x+42}$; д) $\sqrt{-x^2+3x-4}$;

б) $\sqrt{x^2-27}$; г) $\sqrt{x^2+x+9}$; е) $\sqrt{-9x^2+42x-49}$.

297 При каких значениях параметра a решением неравенства $x^2 - ax + 4 > 0$ является любое действительное число?

298 При каких значениях параметра a неравенство $x^2 + (a+1)x + 4 \geqslant 0$ имеет хотя бы одно решение?

299 Сократите дробь:

а) $\dfrac{a^2-12a+36}{a^2-36}$; б) $\dfrac{9-6t+t^2}{27-t^3}$; в) $\dfrac{d^2-64}{d^2+d-56}$; г) $\dfrac{c^2+3c-10}{c^2-10c+16}$.

300 Выполните действия:

а) $\dfrac{m}{3d-9}+\dfrac{m}{5d-15}$; б) $\dfrac{n+10k}{n^2-25k^2}-\dfrac{n+5k}{n^2-5nk}$; в) $\dfrac{b^2+9b+2}{b^3-1}-\dfrac{1-4b}{b^2+b+1}-\dfrac{4}{b-1}$.

301 Упростите выражение и найдите его значение при $m = -0{,}0127$:

$$\frac{8-9m^2}{9m^2+24m+16}:\left(\frac{1}{6m+8}-\frac{1}{6m-8}-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{6m+8}{16-12m}.$$

302 Упростите выражение:

а) $\dfrac{4\sqrt{mn}}{m-n}+\dfrac{\sqrt{m}-\sqrt{n}}{\sqrt{m}+\sqrt{n}}$; б) $\dfrac{m\sqrt{m}+m\sqrt{n}}{n\sqrt{m}-n\sqrt{n}}:\dfrac{m+2\sqrt{mn}+n}{mn-n^2}$.

303 При каких значениях k, где $k \in \mathbf{Z}$, алгебраическая дробь $\dfrac{k^3+9k^2-7k+1}{k-1}$ является целым числом?

Д **304** С помощью напарника или группы одноклассников проведите следующее исследование:

1) Проведите 20 испытаний по подбрасыванию игрального кубика и запишите в таблице результат каждого испытания. Вычислите с точностью до сотых частоту выпадения 6 очков в проведённой серии испытаний.

2) Проведите 40 испытаний по подбрасыванию игрального кубика и запишите в таблице результат каждого испытания. Вычислите частоту выпадения 6 очков в проведённой серии испытаний.

Что вы замечаете? Увеличьте число испытаний. Подтвердили ли ваши испытания известное вам свойство частоты?

305 а) При проведении социологического опроса выпускникам школы задали вопрос: «Какие профессии вы считаете наиболее перспективными?» Ответ «Инженер» выбрали 105 человек. Подсчёт показал, что частота этого ответа среди всех ответов на данный вопрос равна 0,21. Сколько ребят принимало участие в этом опросе?

б) В социологическом опросе 450 участникам предметных олимпиад был задан вопрос: «Для чего вы участвуете в олимпиадах?». После подсчёта всех ответов на данный вопрос оказалось, что частота ответа «Чтобы проявить себя, проверить свои знания» равна 0,38. Сколько ребят дали такой ответ?

306 Используя калькулятор, вычислите (с точностью до 0,001), частоту появления букв «А», «Н», «П» в приведённом ниже отрывке из романа А. Грина «Алые паруса».

«Не помня, как оставила дом, Ассоль бежала уже к морю, подхваченная неодолимым ветром события; на первом углу она остановилась почти без сил; ее ноги подкашивались, дыхание срывалось и гасло, сознание держалось на волоске. Вне себя от страха потерять волю, она топнула ногой и оправилась. Временами то крыша, то забор скрывали от нее алые паруса; тогда, боясь, не исчезли ли они, как простой призрак, она торопилась миновать мучительное препятствие и, снова увидев корабль, останавливалась облегчённо вздохнуть.»

По статистике из 1000 знаков осмысленного текста буква «А» встречается в среднем 75 раз, «Н» – 63 раза, а «П» – 28 раз. Почему полученные вами частоты не совпадают с приведёнными статистическими данными?

307 Решите квадратное неравенство:

а) $2x^2 - 5x + 3 \leqslant 0$; в) $-x^2 + 6x - 9 \geqslant 0$; б) $81 - x^2 \geqslant 0$; г) $4x^2 - 2x + 1 < 0$.

308 При каких значениях параметра a неравенство $-x^2 + (a+1)x - 4 > 0$ не имеет решений?

309 Сократите дробь:

а) $\dfrac{b^2+14b+49}{b^2-49}$; б) $\dfrac{a^3-125}{a^2-10a+25}$; в) $\dfrac{k^2-17k+72}{k^2-18k+81}$; г) $\dfrac{m^2-m-20}{m^2+m-12}$.

310 Упростите выражение:

а) $\dfrac{b}{a-b} - \dfrac{a^3-ab^2}{a^2+b^2} \cdot \left(\dfrac{a}{a^2-2ab+b^2} - \dfrac{b}{a^2-b^2}\right)$; б) $\left(d - \dfrac{1-2d^2}{1-d} + 1\right) : \left(1 - \dfrac{1}{1-d}\right)$.

311* Из натурального числа вычли сумму его цифр, из полученного числа снова вычли сумму его (полученного числа) цифр и т. д. После одиннадцати таких вычитаний получился нуль. С какого числа начинали?

312* Чтобы открыть сейф, нужно ввести код — число, состоящее из семи цифр: двоек и троек. Сейф откроется, если двоек больше, чем троек, а код делится и на 3, и на 4. Придумайте код, открывающий сейф.

6.2.4. Случайные события и их вероятность

Теория вероятностей по существу представляет собой не что иное, как здравый смысл, сведённый к вычислениям.

П.-С. Лаплас (1749–1827),
французский математик, физик, астроном,
один из создателей теории вероятностей

В предыдущем пункте мы выделяли достоверные, невозможные и случайные события. Так, например, при бросании двух игральных костей выпадение суммы очков, равной 1, является невозможным событием, суммы очков, большей 1 – достоверным событием, а суммы в 7 очков – случайным событием.

При этом определить достоверное и невозможное события можно чисто теоретически (например, сделать вывод о том, что сумма очков при бросании двух кубиков всегда больше 1). А вот найти частоту *случайного* события можно лишь путем большого числа испытаний.

Возникает вопрос: возможно ли судить о частоте *случайных* событий без проведения испытаний? Подобное суждение очень пригодилось бы на практике, ведь нам часто бывают нужны различные прогнозы – погоды, шансов на победу того или иного участника соревнований и т. д.

Потребность прогнозировать *случайные* события возникла давно и привела к «рождению» нового раздела математики – ***теории вероятностей***. В данном пункте мы познакомимся с основными понятиями этой теории и задачами, которые она позволяет решать.

Вначале рассмотрим *равновозможные* и *несовместные* события. Уточним эти понятия.

События являются ***равновозможными***, если ни один из его исходов не имеет преимущества перед остальными. Например, бросая игральную кость, мы можем ожидать *в равной степени* любой из шести исходов: «выпало 1 очко», «выпало 2 очка», ..., «выпало 6 очков». Если же к одной из граней кубика приклеить кусочек пластилина, то больше шансов, что брошенный кубик упадет на стол именно этой гранью. В этом случае указанные исходы перестанут быть равновозможными.

Если мы будем бросать сразу два кубика, то на одном кубике может выпасть, например, 4 очка, а на другом – 3 очка, поэтому такие события называют ***совместными***. А вот выпадение 3 очков и выпадение 4 очков на одном и том же кубике одновременно произойти не могут, поэтому такие события называют ***несовместными***.

В реальной жизни равновозможные элементарные исходы встречаются не только при бросании игральной кости или монетки. Это и выбор «наудачу» бочонка при игре в лото, и выбор «случайного прохожего» для проведения соцопроса, и случайно выбранная ручка в магазине из кучи ничем не отличающихся таких же. В этих случаях говорят, что происходит *случайный выбор*.

Определение. *Случайным* называется выбор одного объекта из нескольких, при котором у всех объектов одинаковая вероятность оказаться выбранным.

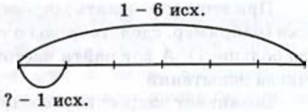
Замечание 1. Отметим, что на практике (если это не монетка или игральная кость) довольно сложно организовать случайный выбор. Не так просто организовать процесс выбора, чтобы можно было гарантировать выполнение условия одинаковой вероятности оказаться выбранным для каждого из объектов. Хотя бы потому, что непонятно, как посчитать эту вероятность.

В математике для оценки достоверности равновозможных и несовместных событий используется новая для нас численная характеристика. Чтобы её ввести, решим следующую задачу.

Задача 1. Оценить, какой из двух прогнозов об исходе броска игрального кубика более вероятен (правдоподобен): «Выпадет максимальное число очков» или «Выпадет чётное число очков».

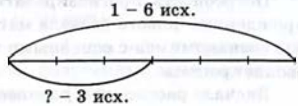
Решение:

При бросании игрального кубика имеется всего шесть возможных исходов: 1, 2, 3, 4, 5 и 6 очков, эти исходы несовместны.



1) Максимально возможное число очков получается только в одном случае – когда выпадет 6. Все события равновозможны, поэтому доля, которая приходится на данный исход, составляет $1 : 6 = \frac{1}{6}$.

Значит, достоверность выпадения максимального числа очков равна $\frac{1}{6}$.



2) Событие «выпадет чётное число очков» произойдет в трёх несовместных случаях: когда выпадет либо 2, либо 4, либо 6 очков.

Следовательно, на часть, соответствующую чётному числу очков, приходится 3 из 6 равновозможных исходов. Значит, достоверность выпадения чётного числа очков можно выразить частным $3 : 6 = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0{,}5$.

3) Мы можем сравнить полученные численные характеристики и на этом основании ответить на вопрос задачи.

Так как $\frac{1}{6} < \frac{1}{2}$, то выпадение максимального числа очков менее вероятно, чем чётного числа очков. Разумность этого вывода подтверждается практикой.

Ответ: более правдоподобен прогноз о выпадении чётного числа очков.

Обобщим наши рассуждения. Рассмотрим некоторое испытание, которое может завершиться одним из n возможных исходов, и все они *попарно несовместны* и *равновозможны*. Пусть m из этих n исходов приводят к наступлению некоторого события A (будем называть такие события *благоприятными для* A). Тогда *вероятностью* события A при данном испытании естественно считать число $\frac{m}{n}$.

Классическое определение вероятности

Вероятностью случайного события называют отношение числа благоприятных исходов к числу всех возможных исходов (для испытаний с равновозможными попарно несовместными исходами)[4].

Обозначение: $p(A) = \frac{m}{n}$, где $p(A)$ – вероятность случайного события A, m – количество возможных благоприятных исходов, n – количество всех возможных исходов.

Замечание 2. Применим данное определение к невозможному и достоверному событиям. Событие C невозможно, если не существует ни одного благоприятного исхода. Значит, в этом случае $m = 0$ и, следовательно, $p(C) = \frac{0}{n} = 0$.

Для достоверного события D все исходы испытания являются благоприятными, поэтому в данном случае $m = n$, и, значит, $p(D) = \frac{n}{n} = 1$.

[4] В современном варианте этого определения используются понятия множества, подмножества и их элементов. С ними вы познакомитесь позже.

Ясно, что значение вероятности наступления случайного события заключается между 0 и 1, и чем ближе это значение к единице, тем достовернее его наступление.

Далее равновозможные события в соответствии с принятой в математике терминологией мы будем называть ***равновероятными***. Корректность такого определения легко объяснить. Пусть B – один из n равновозможных исходов некоторого испытания. Тогда для наступления события B имеется ровно один благоприятный исход, поэтому $p(B)=\frac{1}{n}$. Такую же вероятность будут иметь и все остальные исходы.

Решим несколько примеров, в которых применяется введённое определение.

Пример 1. В лыжных соревнованиях восьмиклассников приняли участие 6 учеников из 8 «А», 5 – из 8 «Б» и 9 – из 8 «В». Судья произвольным образом раздал им номера: от 1 до 20. Какова вероятность того, что первый номер достанется ученику 8 «А»?

Решение:

Пусть все участники соревнований до раздачи номеров были выписаны в список. Тогда равновероятными являются следующие события: первый номер достался первому по списку, второму по списку, ..., двадцатому по списку участнику. Поэтому количество всех возможных исходов: кому достанется первый номер, есть $n = 20$. Благоприятными для события A = «первый номер достался ученику из 8 «А» являются $m = 6$ исходов.

Поэтому искомая вероятность равна $p(A)=\frac{6}{20}=0{,}3$.

Ответ: 0,3.

Пример 2. Одновременно подброшены три монеты. Определите вероятность того, что ровно две из них упадут орлом вверх.

Решение:

Если подбросить монету, то два результата «выпал орел» и «выпала решка» являются равновероятными.

Обозначим выпадение орла буквой О, а решки – буквой Р, и выпишем все возможные исходы этого испытания: ООО, РОО, ОРО, ООР, ОРР, РОР, РРО, РРР – их всего восемь, и они несовместны и равновероятны.

Благоприятными для события A = «ровно две из трех монет упадут орлом» являются три исхода: Р<u>ОО</u>, <u>ОО</u>Р, <u>О</u>Р<u>О</u>. Поэтому искомая вероятность равна $p(A)=\frac{3}{8}=0{,}375$.

Ответ: 0,375.

Обобщая способ решения примеров 1 и 2, приходим к следующему способу анализа и решения «вероятностных» задач.

Чтобы вычислить вероятность случайного события, нужно:

1. Установить, в чём состоит испытание, рассматриваемое в задаче.
2. Понять, что исходы испытания несовместны и равновероятны.
3. Подсчитать число всех возможных исходов испытания – n.
4. Сформулировать событие A, вероятность наступления которого необходимо найти.
5. Подсчитать число исходов испытания, благоприятствующих рассматриваемому событию – m.
6. Вычислить вероятность рассматриваемого события: $p(A)=\frac{m}{n}$.

Рассмотрим задачи, где нужно найти и сравнить вероятности нескольких событий.

Пример 3. Три подруги собрались пойти в гости и решили с помощью жребия определить, кому из них идти в магазин за тортом. Они договорились бросить две монеты, и если выпадут два орла, то за тортом пойдёт Аня, орел и решка – Вика, две решки – Даша. Является ли такой жребий справедливым?

Решение:

Жребий является справедливым, если вероятности выпадения указанных в условии задачи комбинаций монет (два орла, орел и решка; две решки) будут одинаковы. Вычислим эти вероятности.

Испытание имеет 4 несовместных равновероятных исхода: ОО, ОР, РО, РР. Нам нужно найти вероятности событий A = «выпало два орла», B = «выпали орел и решка» и C = «выпали две решки». По определению вероятности, они равны:

$$p(A) = \frac{1}{4},\ p(B) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2},\ p(C) = \frac{1}{4}.$$

Значит, вероятность отправиться за тортом у Вики вдвое выше, чем у любой из двух других девочек.

Ответ: описанный в задаче жребий справедливым не является.

Пример 4. При бросании двух игральных костей сумма выпавших очков может принимать значения от 2 до 12. Выпадение какой суммы имеет наименьшую, а какой – наибольшую вероятность?

Решение:

Составим таблицу возможных исходов испытания, в которой верхний ряд указывает количество очков, выпавших на первой кости, левый – на второй кости, а на пересечении соответствующих им столбцов и строк – суммарное количество выпавших очков.

первая кость

вторая кость	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Как мы видим из таблицы, суммы 2 и 12 встречаются по одному разу, 3 и 11 – по два раза, ..., сумма 7 – шесть раз.

Обозначим A_n событие «Сумма выпавших очков равна n», где $2 \leqslant n \leqslant 12$. Из таблицы видно, что наименьшую вероятность имеют события A_2 и A_{12}, их вероятности равны:

$$p(A_2) = \frac{1}{36} \text{ и } p(A_{12}) = \frac{1}{36}.$$

Наибольшая вероятность – у события A_7, она равна $p(A_7) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

Ответ: наименьшую вероятность имеет выпадение суммы в 2 и в 12 очков, а наибольшую вероятность – выпадение суммы в 7 очков.

Итак, классическое определение вероятности случайного события «работает» только в случае, когда каждый из исходов испытания является равновозможным. Но в реальной жизни события, как правило, неравновозможны. Например, форма объектов всегда имеет отклонения от идеальной формы геометрических тел, пусть и минимальные; плотность материала, из которого сделан некоторый предмет, в разных его точках различна и т. д. Как же определить вероятность наступления того или иного *реального* события?

Как мы видели в предыдущем пункте, в подобных случаях частота случайного события устанавливается с помощью реальных испытаний. Однако уже достаточно давно, сотни лет назад, сравнивая результаты практических опытов с результатом, который дает теоретический расчет, учёные прошлого обнаружили удивительную закономерность: *частота случайного события при достаточно большом числе испытаний близка к его вероятности*. Так, ранее мы выяснили, что частота выпадения «решки» устанавливается *вблизи* числа $\frac{1}{2}$, и точно то же самое значение получается при вычислении вероятности выпадения решки по формуле: $\frac{m}{n}=\frac{1}{2}$.

Этот вывод послужил основанием для введения понятия *статистической вероятности*.

Определение статистической вероятности

Статистической вероятностью случайного события A называется число, около которого принимает значения частота этого события ***при достаточно большом числе испытаний***.

Приведём пример использования статистической вероятности.

Пример 4. По информации из родильных домов города выяснилось, что из 1200 младенцев, появившихся на свет в прошедшем году, 606 оказались мальчиками. Исходя из этих данных, найти статистическую вероятность рождения мальчика в этом городе.

Решение:

Переведём статистическую информацию «из 1200 младенцев 606 мальчиков» на язык теории вероятности: в результате 1200 испытаний событие A = «родился мальчик» произошло 606 раз.

Частоту рождения мальчика находим по формуле $W(A)=\frac{M}{N}=\frac{606}{1200}=0{,}505$. Значит, статистическая вероятность рождения мальчика в этом городе приблизительно равна 0,505.

Ответ: $p_{\text{стат.}} \approx 0{,}505$.

Связь классической и статистической вероятностей можно описать следующим образом. Классическая вероятность вычисляется *по формуле* без проведения каких-либо испытаний. Статистическая вероятность, напротив, вычисляется *эмпирически* после проведения большого числа испытаний. При достаточно большом количестве испытаний эти вероятности примерно равны.

Статистическая вероятность широко применяется в естествознании, экономике, производстве, сельском хозяйстве, медицине. Например, только экспериментальным путем можно выявить признаки заболевания, позволяющие с высокой вероятностью поставить человеку правильный диагноз; определить всхожесть семян в данной почве, чтобы грамотно провести посев и получить высокий урожай, и т. д.

Итак, для расчёта вероятности случайного события можно использовать следующий алгоритм:

Исходы испытания **равновозможны?**

да → Для расчета используем классическое определение вероятности: $p(A) = \frac{m}{n}$

нет → Для расчета используем определение статистической вероятности: $p_{\text{стат.}} = W(A)$

313 Определите, каким – невозможным, достоверным или случайным – является следующие событие.

1) При измерении двух углов равнобедренного треугольника получены одинаковые градусные меры.

2) При измерении двух углов при основании равнобедренного треугольника получены одинаковые градусные меры ($\pm 1°$).

3) При измерении углов треугольника получено два прямых угла.

4) На любом развороте книги номера страниц одинаковой чётности.

5) На любом развороте книги номера страниц разной чётности.

6) На любом развороте книги номер одной из страниц делится на 5.

Придумайте свои примеры невозможного, достоверного и случайного события.

314 Выберите пару, события которой могут произойти одновременно:

1) «сейчас утро» – «сейчас идет снег»;
2) «сейчас утро» – «сейчас месяц июль»;
3) «сейчас месяц июль» – «сейчас идет снег».

Какие события представлены в оставшейся паре? Познакомьтесь с их названием, обратившись к тексту с. 89.

315 Из событий: «Восьмиклассник Коля получил за итоговый тест по алгебре 10 баллов»; «Восьмиклассник Коля получил за итоговый тест по алгебре 1 балл»; «Восьмиклассница Оля получила за итоговый тест по алгебре 10 баллов» составьте пару совместных и пару несовместных событий.

316 1) Восьмиклассник подбросил игральный кубик 10 раз и определил, что частота исхода «выпало менее 7 очков» равна 1, а частота исхода «выпало более 7 очков» равна нулю. Можно ли было определить эти частоты *до* проведения испытания?

2) Оцените, какой прогноз об исходе броска игрального кубика является более правдоподобным: «Выпадет менее 7 очков» или «Выпадет более 7 очков»? Какой из этих исходов имеет явное преимущество перед другим?

3) Имеется ли преимущество одних исходов над другими среди исходов: «выпало 1 очко», «выпало 2 очка», ..., «выпало 6 очков»? Как можно назвать такие исходы? Познакомьтесь с их названием на с. 89.

317 1) Игральный кубик брошен 10 раз. Можно ли сделать точный прогноз о частоте исхода «на кубике выпало чётное количество очков»?

2) Попробуйте оценить, какой из двух прогнозов об исходе броска более правдоподобен: «выпадет максимальное число очков» или «выпадет чётное число очков».

3) Сопоставьте свой способ оценки прогнозов со способом, предложенным на с. 90–91. Какая числовая характеристика используется в математике для подобных оценок?

318 К праздничному концерту было подготовлено три выступления семиклассников, четыре – восьмиклассников и пять – девятиклассников. Чтобы определить порядок выступлений, ребята «вслепую» вытаскивают карточки с номерами от 1 до 12. Какова вероятность того, что первыми выступят восьмиклассники?

319 1) В сборнике билетов по физике всего 20 билетов, в восьми из них встречается вопрос по оптике. Найдите вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете школьнику а) достанется вопрос по оптике; б) не достанется вопроса по оптике.

2) В таксопарке 12 иномарок и 10 машин отечественного производства. Найдите вероятность того, что после заказа такси к клиенту приедет а) иномарка; б) машина отечественного производства.

Найдите сумму полученных в каждой из задач вероятностей. Как вы думаете, почему получено такое значение сумм? Будет ли в аналогичных ситуациях наблюдаться такое же свойство? Сформулируйте гипотезу о сумме вероятностей исходов испытания.

320 1) Докажите следующее свойство. Пусть испытание имеет n исходов. Если m исходов благоприятствуют событию A, а остальные $n - m$ исходов – событию B, то $p(A)+p(B)=1$. Как называются события A и B, рассматриваемые в этом свойстве?

2) Являются ли события «достанется билет по оптике» и «не достанется билет по оптике» из предыдущей задачи 1 несовместными? Являются ли события «приедет иномарка» и «приедет отечественный автомобиль» из предыдущей задачи 2 несовместными? Пользуясь доказанным свойством, решите предыдущее задание (1б; 2б) другим способом.

321 В ящике находятся 4 белых, 1 красный и 3 чёрных шара. Наугад вынимается один шар. Найдите вероятность того, что вынутый шар:

а) белый;	в) чёрный;	д) не синий;	ж) чёрный или белый
б) красный;	г) синий;	е) не белый;	з) красный или белый.

322 В 8 «А» классе 25 человек. Из них по жребию выбирают двух дежурных. Найдите вероятность того, что дежурить пойдет ученик этого класса Вася Петров.

323 На чемпионате по прыжкам в воду выступают 40 спортсменов, среди них семь прыгунов из Голландии и два прыгуна из Боливии. Порядок выступлений определяется жеребьёвкой.

а) Найдите вероятность того, что первым будет выступать прыгун из Боливии.

б) Найдите вероятность того, что первым будет выступать прыгун из Голландии.

324 Известно, что Серёжа родился в ноябре. Найдите вероятность того, что он родился а) 31-го числа; б) 13-го числа; в) до 13-го числа (не включительно); г) после 13-го числа.

325 Одновременно бросили 3 кубика. Найдите вероятность того, что сумма выпавших очков а) равна 2; б) равна 3; в) меньше 20; г) больше 20; д) равна 17; е) равна 15.

326 Книга раскрыта в произвольном месте. Найдите вероятность того, что:

а) разность номеров страниц на развороте равна 0;

б) разность номеров страниц на развороте равна 1;

в) сумма номеров страниц на развороте оканчивается цифрой 2;

г) сумма номеров страниц на развороте оканчивается цифрой 3;

д) произведение номеров страниц на развороте оканчивается цифрой 1;

е) произведение номеров страниц на развороте оканчивается цифрой 0;

ж) произведение номеров страниц на развороте оканчивается цифрой 8.

327 Двое бросают монету: один бросил её 10 раз, другой − 11 раз. Чему равна вероятность того, что у второго монета упала орлом большее число раз, чем у первого?

П **328** «Выиграл сражение не тот, кто дал хороший совет, а тот, кто взял на себя *ответственность* за его выполнение и приказал выполнить». Это слова одного из выдающихся военачальников и государственных деятелей XVIII–XIX веков. Он имел исключительную память, работоспособность, тонкий ум, полководческий и дипломатический гений. Этот великий человек так сильно поразил народное воображение и породил столько споров, что они не утихают до сих пор. Вы сможете узнать, о ком идёт речь, расположив наименьшие (или единственные) корни дробно-рациональных уравнений в порядке возрастания:

Л	$\dfrac{x^2-7x}{x^2-49}=0$	Е	$\dfrac{1}{x^2+2x+4}+\dfrac{1}{x-2}=\dfrac{x^2-2x+4}{x^3-8}$
Н	$1+\dfrac{5}{x+2}-\dfrac{16}{(x+1)(x+2)}=0$	Н	$\dfrac{3(x-1)^2}{(2-3x)(3x+2)}=\dfrac{3x^2-7x+3}{9x^2-4}$
О	$\dfrac{4}{9x^2-1}+\dfrac{1}{3x^2-x}=\dfrac{4}{(3x-1)^2}$	О	$\dfrac{2}{2x-1}+\dfrac{3}{x-3}=\dfrac{x+1}{x-3}+\dfrac{x}{2x-1}$

А	$\frac{x}{x-4}-\frac{2}{x+4}=\frac{32}{x^2-16}$		П	$\frac{6x^2+12x}{x+6}=0$

Как связано это имя с историей нашего отечества?

329 Найдите все значения a, при которых уравнение $\frac{x^2+10x-24}{x-a}=0$ имеет единственный корень.

330 Решите задачу, составив дробно-рациональное уравнение.

а) В 6 часов утра туристы отправились в поход по реке на плоту, а в 8 ч 40 мин вслед вышел катер и догнал плот, пройдя 10 км. Какова скорость течения реки, если катер шел быстрее плота на 12 км/ч?

б) Две бригады ателье получили заказ на изготовление мужских костюмов. За 4 дня их совместной работы было выполнено $\frac{2}{3}$ заказа. За сколько дней можно было бы выполнить заказ каждой бригадой, если первая бригада могла выполнить его на 5 дней быстрее, чем вторая?

331 Решите уравнение:

а) $\frac{12}{x-\frac{6}{x}-1}-\frac{12}{x-\frac{6}{x}+1}=1$;

б) $3\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-\left(x+\frac{1}{x}\right)=24$;

в) $\left(x+\frac{2}{x}\right)^2-5\frac{x^2+2}{x}+6=0$.

332 Решите неравенство:

а) $(x-1)^2(x-2)^3\geqslant 0$;

б) $x^2-17x+60>0$;

в) $\frac{(x-9)(x+4)}{(x+5)^2(x-1)^7}\leqslant 0$;

г) $\frac{x^2-25}{x^2-x-6}<0$.

333 Докажите неравенство $(a+8)(a+6)<(a+7)^2$.

334 Найдите наименьшее значение выражения $\frac{x^4+2x^2+16}{x^2}$.

Д **335** Бросают игральный кубик, у которого одна грань окрашена в красный цвет, а остальные в синий. Являются ли исходы испытания: «выпала красная грань», «выпала синяя грань» равновозможными? Что надо изменить в кубике, чтобы эти исходы стали равновозможными? Придумайте свой пример равновозможных событий.

336 Определите, какие из приведённых событий A и B являются совместными, а какие – несовместными.

а) Брошены две игральные кости: A = «сумма выпавших очков равна 6», B = «на одной из костей выпало 2 очка».

б) Брошены две игральные кости: A = «сумма выпавших очков равна 6», B = «на одной из костей выпало 6 очков».

в) На контрольной по математике: A = «ученики 8 «А» класса получили 10 пятёрок», B = «ученики 8 «Б» класса получили 9 пятёрок».

г) На контрольной по математике: A = «ученики 8 «А» класса получили 10 пятёрок», B = «ученики 8 «А» и 8 «Б» классов вместе получили 9 пятёрок».

337 В группе 5 девушек и 11 юношей. По жребию разыгрывается билет в театр. Какова вероятность того, что билет получит девушка?

338 На экзамене по биологии 33 билета. Ко дню сдачи экзамена Вася успел выучить только 21 билет. Вычислите вероятность того, что, взяв экзаменационный билет наугад, Вася выберет билет, который он успел выучить.

339 Из 90 велосипедов, привезённых на склад магазина, 12 имеют дефекты различного рода. Вычислите вероятность того, что случайно выбранный для витрины велосипед окажется без дефектов.

340 Бросают два игральных кубика. Вычислите вероятность того, что:

а) на верхних гранях этих кубиков выпало в сумме десять очков;

б) сумма очков на выпавших гранях чётная и хотя бы на одном из кубиков выпало 3 очка;

в) сумма очков, выпавших на верхних гранях, не меньше 7;

г) сумма очков, выпавших на верхних гранях, не меньше 8 и не больше 10;

д) сумма выпавших на верхних гранях очков равна шести, а модуль их разности равен четырем;

е) сумма выпавших на верхних гранях очков равна пяти, а их произведение равно шести.

341 На карточках написаны целые числа от 1 до 200. Карточки перемешали, а затем, не глядя, вытащили одну из них. Вычислите вероятность того, что число на вытащенной карточке:

а) делится на 7; б) делится на 4 и на 5.

342 Известно, что Света родилась в декабре. Найдите вероятность того, что день её рождения приходится а) на 31-е число; б) на число, кратное 3; в) на число, содержащее цифру 3.

343 Двое бросают монету. Один бросил её 13 раз, второй – 12 раз. Чему равна вероятность того, что у первого монета упала решкой большее число раз, чем у второго?

344 Решите уравнение:

а) $\dfrac{2x-5}{x+5}=\dfrac{3x+21}{2x-1}$; б) $\dfrac{x-14}{x^3-8}=\dfrac{5}{x^2+2x+4}-\dfrac{1}{x-2}$; в) $x^2+3x=\dfrac{8}{x^2+3x-2}$.

345 Расстояние между двумя пристанями по реке – 40 км. Катер проходит этот путь туда и обратно за 4 ч 10 мин. Определите собственную скорость катера, если скорость течения равна 4 км/ч.

346 Решите неравенство:

а) $x(x^2-16)<0$;

б) $x^2-7x+16<0$;

в) $\dfrac{15x^2+3x}{3x-1}\geqslant 0$;

г) $\dfrac{-x^2-2x+24}{x^2-12x+35}>0$.

С **347*** Ваня и Вася живут в одном подъезде. Ваня живет на 6-м этаже. Выходя от Вани, Вася пошел не вниз, как ему было нужно, а вверх. Дойдя до последнего этажа, Вася понял свою ошибку и пошел вниз на свой этаж. Оказалось, что Вася прошел в полтора раза больше, чем если бы он сразу пошел вниз. Сколько этажей в доме?

348* В самолете 100 мест. При посадке в самолёт выстроилась очередь из 100 пассажиров, у каждого из которых имеется билет на одно из этих мест. Первой в очереди стоит старушка. Она вбегает в салон и садится на случайное место (возможно, и на свое). Далее пассажиры по очереди занимают свои места, а в случае, если свое место уже занято, садятся случайным образом на одно из свободных мест. Какова вероятность того, что последний пассажир займёт свое место?

Т Выполните тест № 9 для самостоятельной проверки знаний.

Задачи для самоконтроля к главе 6

349 а) Флаг составлен из четырех одинаковых горизонтальных полос красного, белого, синего и жёлтого цветов. Сколько различных флагов удовлетворяют этому условию?

б) Сколько различных пятизначных чисел, цифры в которых не повторяются, можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 9?

350 а) В магазине продаётся 7 моделей пиджаков и 3 модели юбок для школы. Сколько вариантов костюма для школы можно купить в этом магазине?

б) Сколько различных шестизначных паролей из букв П, А, Р, О, Л, Ь можно составить, если буквы в пароле не должны повторяться?

351 В меню столовой предлагается 6 основных блюд, 5 закусок и 7 напитков. Сколько вариантов обеда из основного блюда, закуски и напитка можно приобрести в этой столовой? Сколькими способами можно перекусить в этой столовой, приобретя только закуску и напиток?

352 а) Сколькими способами можно разместить на одной полке пять дисков с кинокомедиями и три диска с фильмами в стиле фэнтези, так чтобы все диски с кинокомедиями стояли рядом?

б) Сколько пятизначных чисел, кратных 5, можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, если цифры в искомом числе могут повторяться?

353 Сколько можно получить «слов» путем перестановки букв в слове «ФУНКЦИЯ» (под «словом» считать все слова, полученные при перестановке, даже не имеющие смысла).

354 а) Учащиеся первого класса изучают 6 различных предметов. Сколькими способами можно составить расписание уроков на один день так, чтобы в этот день было 6 различных уроков?

б) Сколько различных пятизначных чисел можно составить из цифр 5, 6, 7, 8, 9, если цифры не могут повторяться?

355 а) Сколько четырёхзначных паролей для входа на сайт мог составить Андрей, используя буквы из своего имени (буквы в пароле могут повторяться)?

б) Сколько шестизначных паролей мог для входа на сайт мог составить Олег, используя буквы из своего имени (буквы в пароле могут повторяться)?

356 а) Шифр для кодирования экзаменационной работы состоит не более чем из трёх цифр и не содержит цифры 0, 1 и 2. Можно ли такими шифрами закодировать 400 работ?

б) Известно, что код для чемодана является последовательностью цифр длиной не более пяти символов. Сколько существует вариантов такого кода?

357 Дан ряд чисел: 2; −1; 2; 3; 2; 4; 2; 2.

а) Найдите частоту, с которой в данном ряду встречается число 2.

б) Вычислите дисперсию набора. Что интересного вы заметили при вычислениях? Как изменится дисперсия набора, если в данный набор добавить ещё одну двойку? Почему?

358 а) На экзамене по истории 45 билетов. Соня не успела выучить 5 билетов. Вычислите вероятность того, что, взяв экзаменационный билет наугад, Соня получит билет, который она не успела выучить.

б) В лотерее 1000 билетов без выигрыша и 20 билетов с выигрышем. Чему равна вероятность, купив один билет, выиграть в эту лотерею?

в) Пирог разделили на 15 кусков, в двух из которых находятся сюрпризы. Чему равна вероятность, взяв кусок пирога наугад, получить пирог с сюрпризом?

359 Ученика попросили назвать число от 1 до 300. Какова вероятность того, что он назовет чётное число? число, кратное трём? число, кратное пяти?

360 При статистике отдела контроля качества одного из производств из 1000 случайно отобранных деталей 5 деталей оказываются бракованными. В магазин поступили детали, произведённые на этом предприятии, найдите вероятность того, что купленная деталь окажется бракованной. Сколько бракованных деталей можно ожидать среди 100 таких деталей, закупленных магазином на этом предприятии?

Глава 7
Развитие математической теории
§ 1. Теория множеств

7.1.1. Основные понятия теории множеств. Числовые множества

Бог создал натуральные числа; всё остальное — дело рук человеческих.

Леопольд Кронекер (1823–1891),
немецкий математик

Любая наука в своем развитии стремится к обобщению и систематизации знаний. Одним из наиболее общих математических понятий, позволяющих выявить общие свойства объектов из самых разных областей знаний – математики и физики, химии и биологии, экономики, лингвистики и др., является понятие *множества*.

С начальными представлениями о множествах мы познакомились ещё в младших классах школы, а затем работали с множествами чисел, функций и геометрических фигур, слов и предложений, растений и животных и др. Мы использовали отношения и операции над множествами для обоснования суждений, решения логических задач, выявления аналогии свойств объектов различной природы. Для дальнейшего движения вперёд уточним свои представления о теоретико-множественных понятиях и познакомимся с новыми.

Сформулируем основные понятия теории множеств, начиная с уточнения понятия множества. В современной математике ***множеством*** называют любую совокупность произвольных объектов. Эти объекты называют *элементами множества*.

Приведём примеры различных множеств:

1) B – множество всех учеников класса; его элементы – все ученики данного класса;

2) C – множество всех книг в школьной библиотеке; его элементы – все книги библиотеки;

3) N – множество натуральных чисел; его элементы – все натуральные числа;

4) A – множество всех треугольников на плоскости; его элементы – все треугольники на плоскости.

Для обозначения того факта, что объект a является или не является элементом множества A, мы применяем запись $a \in A$ или $a \notin A$. Например, для множества натуральных чисел верно: $3 \in N$; $\frac{1}{2} \notin N$. Такую же запись можно использовать и для нечисловых множеств. Так, если A – множество произведений А.С. Пушкина, a – роман «Евгений Онегин», b – роман «Война и мир», то $a \in A$, $b \notin A$.

Один или несколько элементов, принадлежащих множеству, можно рассматривать как ещё одно множество, тогда оно будет подмножеством исходного множества.

Определение 1. Множество A называется ***подмножеством*** множества B, если каждый элемент A является также элементом B.

Мы обозначаем это следующим образом: $A \subset B$, а читаем «множество A содержится в множестве B» или «множество B включает множество A» и т. п.

Приведем примеры подмножеств различных множеств.

1) $\boldsymbol{Q} \subset \boldsymbol{R}$, где $\boldsymbol{Q}$ – множество рациональных чисел; $\boldsymbol{R}$ – множество действительных чисел;

2) $B \subset A$, где A – множество точек некоторого прямоугольника; B – множество вершин этого прямоугольника;

3) $B \subset C$, где C – множество учеников данного класса; B – множество учеников данного класса с фамилией Иванов.

В случае, если в классе нет учеников с фамилией Иванов, B будет являться примером пустого множества.

Определение 2. Множество называется **пустым**, если оно не содержит ни одного элемента (обозначаем знаком $\varnothing$).

Считается, что пустое множество является подмножеством любого множества. Кроме того, любое множество можно считать своим же подмножеством. Зафиксируем эти факты в виде свойства.

Свойство 1. Любое множество A (кроме пустого) имеет хотя бы два подмножества: пустое множество $\varnothing$ и само себя – A.

$$\forall A\colon \varnothing \subset A,\ A \subset A.$$

Для множеств и их подмножеств выполняется ещё одно свойство (транзитивность включения множеств).

Свойство 2. Если $A \subset B$ и $B \subset C$, то $A \subset C$.

Доказательство:

Пусть элемент $a \in A$. Так как $A \subset B$, то $a \in B$; так как $B \subset C$, то $a \in C$. Итак, любой элемент множества A является также элементом C; значит, $A \subset C$. ■

Отношения между множествами мы иллюстрируем диаграммами Эйлера–Венна. Только что доказанное свойство 2 становится очевидным из рис. 1.

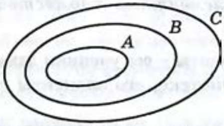


Рис. 1

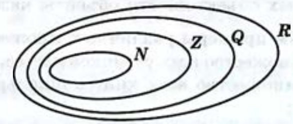


Рис. 2

Подобное отношение связывает известные нам *числовые* множества, которые мы постепенно открывали для себя, расширяя понятие числа (от натуральных чисел к целым, от целых к рациональным, от рациональных к действительным). Их диаграмма изображена на рис. 2.

Пример 1.

Опишите, как на диаграмме, изображенной на рис. 2, расположены числа: 2; $\frac{77}{11}$; -4; $\frac{1}{2}$; 3,(01); $\sqrt{100}$; $\sqrt{6}$; $\frac{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}{5}$; 0,123456789101112... (после запятой выписаны подряд все натуральные числа).

Решение:

1) $2 \in N$.

2) $\frac{77}{11} = 7$, $\frac{77}{11} \in N$.

3) $-4 \notin N$, $-4 \in Z$.

4) $\frac{1}{2} \notin Z$; $\frac{1}{2} \in Q$.

5) Мы знаем, что любая бесконечная периодическая дробь может быть записана в виде рационального числа, поэтому $3,(01) \in Q$. При этом $3,(01) \notin Z$.

6) $\sqrt{100} = 10$, $\sqrt{100} \in N$.

7) $\sqrt{6}$ – иррациональное – не принадлежит Q; $\sqrt{6} \in R$.

8) $\frac{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}{5} = \frac{3-1}{5} = 0{,}4$, значит, $\frac{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}{5} \in Q$. При этом это число не принадлежит множеству целых чисел.

9) Эта дробь не является периодической. Значит, это число не является рациональным и $0{,}123456789101112... \in R$.

Теперь уточним ещё одно определение, касающееся отношений между несколькими множествами.

Определение 3. Два множества A и B называются ***равными***, если $A \subset B$ и одновременно $B \subset A$ (то есть каждый элемент A является также элементом B и каждый элемент B является также элементом A; иными словами это означает, что A и B – это одно и то же множество).

Для обозначения равенства множеств применяется естественная запись $A = B$. Рассмотрим пример применения данного определения.

Пример 2.

Даны два множества $A = \{1,(09);\ 0,11(2);\ 0,55;\ 1,775\}$ и $B = \left\{\frac{12}{11}; \frac{101}{900}; \frac{11}{20}; \frac{71}{40}\right\}$. Являются ли эти множества равными?

Решение:

1) Представим десятичные дроби множества A в виде обыкновенных.

- Пусть $x = 1,(09)$, тогда $100x = 109,(09)$.

  Значит, $100x - x = 109{,}09... - 1{,}09... \Leftrightarrow 99x = 108 \Leftrightarrow x = \frac{108}{99} = \frac{12}{11}$.

  Получили $1,(09) = \frac{12}{11}$ и является элементом множества B.

- Пусть $x = 0,11(2)$, тогда $100x = 11,(2)$ и $10 \cdot 100x = 112,(2)$.

  Значит, $1000x - 100x = 112{,}2... - 11{,}2... \Leftrightarrow 900x = 101 \Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow x = \frac{101}{900}$; $0,11(2) \in B$.

- $0{,}55 = \frac{55}{100} = \frac{11}{20}$; $0{,}55 \in B$.

- $1{,}775 = \frac{1575}{1000} = \frac{355}{200} = \frac{71}{40}$; $1{,}775 \in B$.

$$\begin{array}{r|l} -12 & 11 \\ \underline{11} & 1{,}0909... \\ -100 & \\ \underline{99} & \\ -100 & \\ \underline{99} & \\ 1... & \end{array}$$

2) Так как каждый элемент A является также элементом B и каждый элемент B является также элементом A, эти множества равны.

Отметим, что для доказательства равенства мы могли обыкновенные дроби из множества B записывать в виде десятичных. Так, например, разделив числитель на знаменатель дроби $\frac{12}{11}$, получили бы, что $\frac{12}{11} = 1,(09)$.

Ответ: $A = B$.

Теперь зафиксируем ещё несколько свойств множеств, связанных с их равенством.

Свойство 3. Если $A = B$ и $B = C$, то $A = C$.

Свойство 4. Если $A \subset B$ и $B = C$, то $A \subset C$.

Свойство 3 верно, так как из первых двух равенств следует, что все множества совпадают и поэтому $A = C$. Свойство 4 вытекает из свойства 2 (так как равенство множеств является частным случаем их включения).

Перейдем к важнейшему понятию теории множеств – **соответствию между множествами** (закону или правилу, по которому некоторым элементам множества A ставится в соответствие один или несколько элементов множества B).

Для примера рассмотрим соответствие между множеством учеников школы (A) и множеством билетов, заказанных школой на один из театральных спектаклей (B). Ситуацию, когда какие-то из учеников школы (возможно, и не все) приобрели один или несколько билетов, можно рассматривать как задание соответствия между множествами A и B.

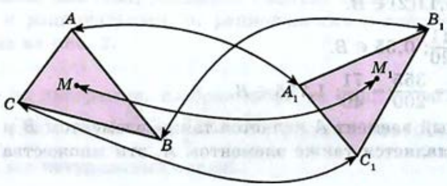
Если же каждый ученик приобрёл ровно один билет и все билеты, заказанные школой, оказались раскуплены учениками, можно говорить о взаимно однозначном соответствии между множеством A и B.

Определение 4. Соответствие между множествами A и B называется ***взаимно однозначным***, если *каждому* элементу множества A поставлен в соответствие ровно один элемент множества B, и обратно, *каждому* элементу множества B при этом соответствует ровно один элемент множества A.

Рассмотрим примеры соответствий между множествами и установим, какие из них будут взаимно однозначными.

1) Пусть A – множество учеников данного класса, N – множество натуральных чисел. Соответствие между A и N, при котором каждому ученику класса ставится в соответствие год его рождения, не является взаимно однозначным. Действительно, каждому элементу множества A поставлен в соответствие ровно один элемент множества N, а вот *обратное* не верно. Во-первых, потому что не все элементы множества N при этом задействованы, а, во-вторых, потому что многие ученики класса имеют один и тот же год рождения.

2) Соответствие между точками двух равных треугольников на плоскости, осуществляемое при соответствующем движении плоскости, переводящем один треугольник в другой, является взаимно однозначным.



3) Соответствие между множеством N натуральных чисел и множеством чётных натуральных чисел, осуществляемое по правилу $n \to 2n$ (то есть каждому числу n соответствует число $2n$, а именно $1 \to 2$; $2 \to 4$; $3 \to 6$ и т.д.) и обратно $2n \to n$, является взаимно однозначным.

Понятие взаимно однозначного соответствия даёт нам возможность сравнивать множества.

Определение 5. Два множества A и B называются *эквивалентными* (*равномощными*), если между ними можно установить взаимно однозначное соответствие.

Ясно, что два конечных множества эквивалентны тогда и только тогда, когда они содержат одинаковое число элементов. С бесконечными множествами дело обстоит более сложно. Так, рассмотренный нами выше пример соответствия между множеством N и множеством чётных натуральных чисел говорит о том, что эти множества эквивалентны, но при этом, как это ни странно, одно из них является подмножеством другого.

Рассмотрим ещё один подобный пример.

Пример 3.

Являются ли множество натуральных чисел и множество целых чисел эквивалентными?

Решение:

Поставим в соответствие каждому натуральному числу n число $z_n = \frac{(-1)^n}{2}\left(n - \frac{1-(-1)^n}{2}\right)$.

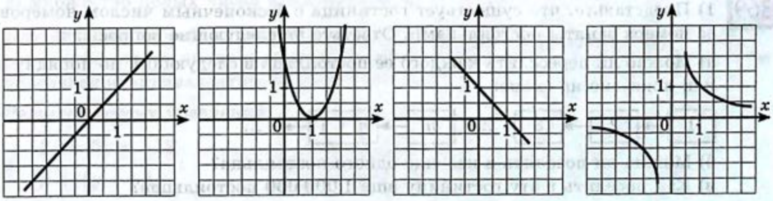
Если n – чётное, то $z_n = \frac{n}{2}$; если n – нечётное, то $z_n = -\frac{1}{2}(n-1)$.

Итак, $1 \to 0$; $2 \to 1$; $3 \to -1$; $4 \to 2$; $5 \to -2$; $6 \to 3$; $7 \to -3$ и т. д. Ясно, что введённая нами формула ставит в соответствие каждому натуральному числу n целое число z_n, причём каждое из целых чисел получается по этой формуле – ровно один раз. При этом обратное тоже будет верно. Нами построено взаимно однозначное соответствие между множествами, значит, они эквивалентны.

Два конечных множества эквивалентны тогда и только тогда, когда в них одинаковое количество элементов. Поэтому естественно считать, что если одно бесконечное множество эквивалентно другому, то в нём «столько же» элементов. Однако не следует думать, что все бесконечные множества эквивалентны. Отметим, что множество R не является равномощным множеству Q. Можно сказать, что действительных чисел в каком-то смысле «больше», чем рациональных. Примем пока это утверждение без доказательства. Мы сможем разобраться, почему это так, чуть позже, в пункте «Счётные и несчётные множества».

К **361** Дано множество $M = \left\{\frac{1}{4};\ 6\frac{3}{8};\ 7\frac{23}{25};\ 8\frac{3}{6}\right\}$. Запишите множество N, состоящее из элементов множества M, представленных в виде десятичных дробей.

362 Даны множества функций G и F. G – множество функций, заданных следующими графиками:



F – множество функций, заданных следующими формулами:

$F = \left\{y = 2(x-1)^2;\ y = x;\ y = -x + 1;\ y = \dfrac{1}{x}\right\}$.

Сопоставьте функции, заданные графиками, и функции, заданные формулами. Что интересного вы наблюдаете?

363 Даны два множества $A = \{2{,}5;\ 3{,}01;\ 4{,}1;\ 5{,}0125\}$ и $B = \left\{3\dfrac{1}{100};\ 5\dfrac{1}{80};\ 2\dfrac{1}{2};\ 4\dfrac{1}{10}\right\}$. Сопоставьте элементы множества A и множества B. Что вы замечаете?

364 1) Предположите, как можно назвать множества G и F, множества A и B из предыдущих заданий.

2) Опираясь на то, что множество A равно множеству B, а множество G равно множеству F, сформулируйте свой вариант определения равных множеств. Сравните его с определением равных множеств на с. 103.

365 1) а) Покажите, что дробь $\dfrac{2}{5}$, помимо своего естественного представления в виде конечной десятичной дроби $\dfrac{2}{5} = 0{,}4$, имеет ещё одно представление в виде периодической дроби с девяткой в периоде: $\dfrac{2}{5} = 0{,}3999... = 0{,}3(9)$.

б) Запишите обыкновенные дроби $\dfrac{1}{2};\ \dfrac{3}{4};\ \dfrac{4}{25}$ в виде десятичной дроби двумя способами.

в) Сделайте вывод о вариантах представления конечной десятичной дроби в виде периодической дроби.

2) Даны множества $A = \{3{,}(7);\ 2{,}1(34);\ 0{,}2(348);\ 0{,}7(9)\}$ и $B = \left\{\dfrac{34}{9};\ \dfrac{789}{1665};\ \dfrac{2113}{990};\ \dfrac{4}{5}\right\}$. Являются ли эти множества равными?

366 Какие из элементов множества $A = \left\{3;\ \dfrac{72}{3};\ -6;\ \dfrac{1}{8};\ -2{,}(02);\ \sqrt{144};\ \sqrt{15};\ \dfrac{(\sqrt{7}+1)(\sqrt{7}-1)}{5};\ 0{,}24681012...\right\}$ (после запятой в последнем числе выписаны подряд все чётные натуральные числа) принадлежат: а) множеству натуральных чисел; б) множеству целых чисел; в) множеству рациональных чисел?

367 Являются ли данные множества эквивалентными друг другу:

а) $A = \{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5\}$ и $B = \{-1;\ -2;\ -3;\ -4;\ -5;\ -6\}$;

б) $A = \left\{\dfrac{1}{2};\ \dfrac{1}{3};\ \dfrac{1}{4};\ ...\right\}$ и $B = \left\{-\dfrac{1}{2};\ -\dfrac{1}{3};\ -\dfrac{1}{4};\ ...\right\}$;

в) множество натуральных чисел и множество натуральных чисел, кратных пяти?

368 Назовите два способа, которыми можно установить, что каждому из гостей хватит стульев, чтобы сесть за стол. Какой из этих способов использует определение эквивалентности двух множеств?

369 1) Представьте, что существует гостиница с бесконечным числом номеров и все её номера заняты постояльцами. Ответьте на следующие вопросы:

а) Можно ли переселить каждого её постояльца в следующий по порядку номер, как показано на схеме:

$\boxed{1} \rightarrow \boxed{2} \rightarrow \boxed{3}\ \ ...\ \ \boxed{n} \rightarrow \boxed{n+1} \rightarrow\ ...$

б) Можно ли поселить в неё ещё одного постояльца?

в) Как поселить в эту гостиницу ещё 1 000 000 постояльцев?

2) Докажите, что, если к множеству, которое эквивалентно множеству натуральных чисел, добавить ещё один элемент, получится множество, которое снова эквивалентно множеству натуральных чисел.

3) Докажите, что, если к множеству, которое эквивалентно множеству натуральных чисел, добавить конечное множество элементов, получится множество, которое также эквивалентно множеству натуральных чисел.

370 Решите уравнение:

а) $1{,}5x - 1{,}7 = 1{,}3$; в) $x + 7{,}6 = 0{,}2x + 6$;

б) $6{,}4x - 1{,}4 = 1{,}8$; г) $0{,}5x + 3{,}1 = -x + 2{,}5$.

371 Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} 5x + 3y = -11 \\ 7x + 2y = 0 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ 5x - 3y = 2 \end{cases}$; в) $\begin{cases} x - 2y = 6 \\ |x - 3| - y = 3 \end{cases}$.

372 Решите уравнение:

а) $12{,}5x^2 = 2$; в) $x^2 + 6{,}5x - 3{,}5 = 0$;

б) $8x^2 - 0{,}5 = 0$; г) $0{,}5x^2 = 9 - 1{,}5x$.

373 Решите задачу:

Два автомобиля, работая вместе, могут перевезти груз за 15 ч. Один автомобиль работал на 6 ч меньше, чем второй, и перевез 40% груза, а второй – оставшийся груз. Сколько часов работал каждый автомобиль?

374 Решите уравнение: $(x^2 + 6x)^2 = -10x^2 - 60x - 16$.

375 1) Запишите целые числа, кратные 9 и принадлежащие промежутку $[3; 53]$. Обозначьте полученное множество A.

2) Запишите целые числа, кратные 3 и принадлежащие промежутку $[4; 46]$. Обозначьте полученное множество B.

3) Выпишите из множества B числа, кратные 9. Обозначьте полученное множество C.

4) Что вы можете сказать о множествах B и C? Запишите ответ на математическом языке. Что вы можете сказать о множествах A и C? Запишите ответ на математическом языке.

376 Являются ли данные множества эквивалентными друг другу:

а) $A = \{1; 2; 3; 4; 5\}$ и $B = \{-1; -2; -3; -4\}$;

б) $A = \left\{\frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{5} \dots\right\}$ и $B = \left\{\frac{2}{3}; \frac{2}{4}; \frac{2}{5} \dots\right\}$;

в) множество целых чисел и множество целых чисел, кратных трём?

377 Назовите два способа, которыми можно установить, что число накрытых приборов соответствует числу пришедших гостей. Какой из этих способов использует определение эквивалентности двух множеств?

378 Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} 2x + 5y = -12 \\ x + 4y = -6 \end{cases}$; б) $\begin{cases} |x - 2| - 2y = 2 \\ x - y = -3 \end{cases}$.

379 Решите уравнение:

а) $x^2 + 3{,}5x - 7{,}5 = 0$; б) $0{,}3x^2 = 12 + 1{,}8x$.

380 Решите задачу:

На уборке снега работают две снегоочистительные машины. Одна из них может убрать всю улицу за один час, а другая за 75% этого времени. Начав уборку одновременно, обе машины проработали вместе 20 минут, после чего первая машина прекратила работу. Сколько нужно времени, чтобы одна вторая машина закончила работу?

C **381*** Коля отправился за грибами между восемью и девятью часами утра в момент, когда часовая и минутная стрелки его часов были совмещены. Домой он вернулся между двумя и тремя часами дня, при этом часовая и минутная стрелки его часов были направлены в противоположные стороны. Сколько времени продолжалась Колина прогулка?

382* Каких треугольников с целочисленными сторонами больше: имеющих периметр 1997 или имеющих периметр 2000?

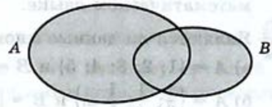
7.1.2. Операции над множествами

Подобно другим естественным наукам, математика представляет собой игру, в которую мы играем с окружающим миром... Самые лучшие математики и самые хорошие преподаватели – это, очевидно, люди, которые прекрасно разбираются в её правилах, а также получают удовольствие от самого процесса игры.

Мартин Гарднер (1914–2010),
американский специалист в области занимательной математики

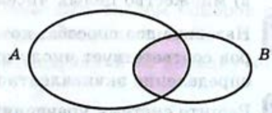
В предыдущем пункте мы уточнили основные понятия теории множеств, в этом пункте мы вспомним, какие операции над множествами нам известны и для чего они нужны. Кроме того, мы познакомимся и с новыми операциями над множествами и выясним область их применения.

Определение 1. ***Объединением двух множеств*** A и B называется множество, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат либо A, либо B, либо и тому, и другому множеству одновременно (обозначаем $A \cup B$).



$A \cup B$

Определение 2. ***Пересечением двух множеств*** A и B называется множество, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат одновременно и A, и B (обозначаем $A \cap B$).



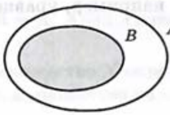
$A \cap B$

Объединение и пересечение множеств на диаграммах Эйлера–Венна мы иллюстрируем штриховкой.

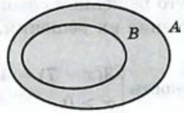
Приведём примеры объединения и пересечения множеств в таблице.

множество A	множество B	$A \cap B$	$B \cup A$
ученики $9^А$ класса	мальчики из $9^А$ и $9^Б$	мальчики из $9^А$	весь $9^А$ и мальчики $9^Б$
натуральные числа, кратные 3	чётные натуральные числа	натуральные числа, кратные 6	натуральные числа, дающие при делении на 6 остатки 0, 2, 3, 4
прямоугольники на плоскости	ромбы на плоскости	квадраты на плоскости	параллелограммы, у которых углы и/или стороны равны

Легко видеть, что если $B \subset A$, то $A \cap B = B$; $A \cup B = A$:

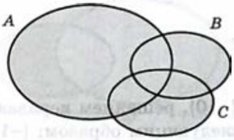


$A \cap B$



$A \cup B$

Можно найти объединение и пересечение более двух множеств:



$A \cup B \cup C$

$A \cap B \cap C$

Теперь, когда мы уточнили свои представления о пересечении и объединении множеств, вспомним, в каких ситуациях мы использовали эти операции.

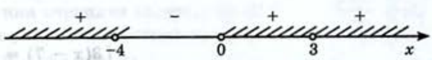
Мы применяли операцию объединения множеств, например, при решении неравенств методом интервалов.

Пример 1.

Решить неравенство $x(x-3)^2(x+4) > 0$.

Решение.

Отметив на числовой прямой точки, при которых произведение $x(x-3)^2(x+4)$ равно нулю, и расставив знаки этого произведения на полученных интервалах, получим:



Множество решений неравенства состоит из тех и только тех чисел, которые принадлежат одному из промежутков $(-\infty; -4)$, $(0; 3)$ и $(3; +\infty)$, то есть их объединению. Для записи ответа используем знак $\cup$.

Ответ: $x \in (-\infty; -4) \cup (0; 3) \cup (3; +\infty)$.

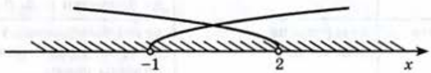
Также операцию объединения множеств мы применяли при решении совокупности неравенств.

Пример 2.

Решить $\left[\begin{array}{l}3x - 6 < 0 \\ 2x + 2 > 0\end{array}\right.$.

Решение.

Решением первого неравенства является луч $(-\infty; 2)$, второго – луч $(-1; +\infty)$, а их объединением является множество $(-\infty; +\infty)$.



$(-\infty; 2) \cup (-1; +\infty) = (-\infty; +\infty)$

Ответ: $(-\infty; +\infty)$.

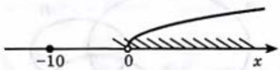
При решении совокупности неравенств мы находили объединение решений каждого из них. Ясно, что решением совокупности, например, уравнения и неравенства также будет объединение их решений.

Пример 3.

Решить совокупность $\left[\begin{array}{l}3(x - 7) = 4x - 11 \\ x > 0\end{array}\right.$.

Решение.

$$\left[\begin{array}{l}3(x - 7) = 4x - 11 \\ x > 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}3x - 21 = 4x - 11 \\ x > 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = -10 \\ x > 0\end{array}\right.$$



Решением уравнения является множество $\{-10\}$, решением неравенства – открытый луч $(0; +\infty)$, а их объединение запишем следующим образом: $\{-10\} \cup (0; +\infty)$.

Ответ: $\{-10\} \cup (0; +\infty)$.

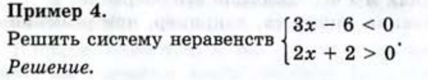
Операцию *пересечения множеств* мы применяли при решении систем.

Пример 4.

Решить систему неравенств $\left\{\begin{array}{l}3x - 6 < 0 \\ 2x + 2 > 0\end{array}\right.$.

Решение.

Решением первого неравенства системы является открытый луч $(-\infty; 2)$, второго – открытый луч $(-1; +\infty)$, а их пересечением является множество $(-1; 2)$.



$(-\infty; 2) \cap (-1; +\infty) = (-1; 2)$

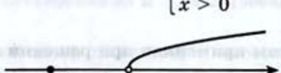
Ответ: $(-1; 2)$.

Пример 5.

Найти множество x, удовлетворяющих системе $\left\{\begin{array}{l}3(x - 7) = 4x - 11 \\ x > 0\end{array}\right.$.

Решение.

$$\left\{\begin{array}{l}3(x - 7) = 4x - 11 \\ x > 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}3x - 21 = 4x - 11 \\ x > 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}x = -10 \\ x > 0\end{array}\right.$$



Решением уравнения является множество $\{-10\}$, решением неравенства – открытый луч $(0; +\infty)$, а их пересечением является пустое множество.

Ответ: $\varnothing$.

Теперь введём несколько новых операций для множеств.

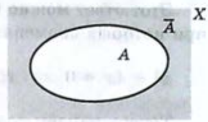


Рис. 1

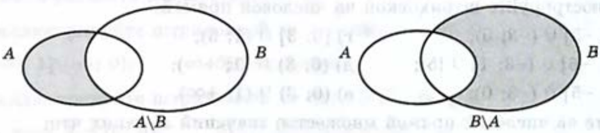
Определение 3. Пусть имеется некоторое множество X. *Дополнением множества* A называется множество, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат X, но не принадлежат A (обозначается $\overline{A}$).

На диаграмме Эйлера–Венна $\overline{A}$ – это множество точек, не попавших в множество A (рис. 1).

Очевидно, что $\overline{\overline{A}} = A$. Аналогичное равенство мы уже составляли для отрицания высказываний.

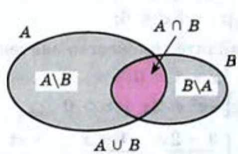
В дальнейшем множество X определяется из смысла задачи. Например, если в задаче рассматриваются множества на числовой прямой, то X – это вся числовая прямая.

Определение 4. *Разностью множеств* A и B называется множество тех и только тех элементов, которые принадлежат A, но не принадлежат B (обозначается $A\backslash B$).



Как мы видим $A\backslash B$ и $B\backslash A$ – это разные, причём непересекающиеся множества. Приведём примеры разностей различных множеств.

множество A	множество B	$A\backslash B$	$B\backslash A$
ученики 9[А] класса	мальчики из 9[А] и 9[Б]	девочки из 9[А]	мальчики из 9[Б]
натуральные числа, кратные 3	чётные натуральные числа	натуральные числа, дающие при делении на 6 остаток 3	натуральные числа, дающие при делении на 6 остатки 2 или 4



Отметим, что объединение множеств $A \cup B$ содержит три непересекающихся множества: $A \cup B = (A\backslash B) \cup (A \cap B) \cup (B\backslash A)$.

Из этого же рисунка очевидна справедливость еще одного свойства разности множеств A и B:

$$A \cup B = A \cup (B\backslash A).$$

Эта новая для нас операция разности тоже имеет свое применение. Например, её можно использовать при нахождении области допустимых значений алгебраической дроби, а значит, и при решении дробно-рациональных уравнений.

Как мы помним, область определения алгебраической дроби – это множество, из которого исключают все значения переменных, обращающих её знаменатель в ноль. Так в случае дроби с одной переменной мы находим разность множества $\boldsymbol{R}$ и множества чисел, обращающих знаменатель алгебраической дроби в ноль.

Пример 6.

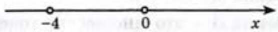
Найти область определения алгебраической дроби $\dfrac{x}{x^2 + 4x}$.

Ответ: $x \in (-\infty; -4) \cup (-4; 0) \cup (0; +\infty)$.

Этот ответ можно получить, рассуждая следующим образом. Найдем значения x, при которых знаменатель дроби обращается в нуль:

$$x^2 + 4x = 0 \ \Leftrightarrow \ x(x + 4) = 0 \ \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \ x \in \{0; -4\}.$$

Теперь найдём разность множества R и полученного множества $\{0; -4\}$.



$$R \setminus \{0; -4\} = (-\infty; -4) \cup (-4; 0) \cup (0; +\infty).$$

При записи ответа можно использовать как привычный нам знак объединения, так и новый знак разности.

383 Покажите на числовой прямой множества:

а) $(-3; 0)$; б) $[-3; 0]$; в) $\{-3; 0\}$.

Найдите $(-3; 0) \cup [-3; 0]$; $(-3; 0) \cap [-3; 0]$; $(-3; 0) \cup \{-3; 0\}$; $(-3; 0) \cap \{-3; 0\}$.

384 Проиллюстрируйте штриховкой на числовой прямой:

а) $(-\infty; -5] \cup (-3; 0)$; г) $[0; 3] \cap (1; 5)$;

б) $[-10; -5] \cup (-3; 1] \cup \{5\}$; д) $(0; 3) \cap (1; +\infty)$;

в) $(-\infty; -5] \cap (-3; 0)$; е) $(0; 3) \cup (1; +\infty)$.

385 Укажите на числовой прямой множество значений x, таких что:

а) $10 - 1{,}5(x - 5) < 9{,}5 - 3{,}5x$; в) $\dfrac{(x + 3)(5 - x)}{2x - 5} > 0$;

б) $(1{,}5x + 0{,}3)(x - 6) < 0$; г) $\dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 3x + 2} \geqslant 1$.

386 Найдите множество корней уравнения, переходя к совокупности линейных уравнений:

а) $(x - 2)(2x + 7) = 0$; б) $(2x - 2)(x + 7)(3x - 1{,}2) = 0$.

387 Укажите на числовой прямой множество значений x, для которых выполняется неравенство:

а) $|x^2 - 5x| < 6$; б) $|2x^2 - 9x + 15| \geqslant 20$.

388 Найдите множество значений x:

а) $\begin{cases} x - 1 > 0 \\ -x^2 + 2x + 8 > 0 \end{cases}$; в) $\begin{cases} x^2 - 9x + 20 \leqslant x - 1 \\ x - 1 \leqslant x^2 - 13 \end{cases}$;

б) $\left[\begin{array}{l} \dfrac{3 - 2x}{5} < \dfrac{1 - x}{2} \\ 2 - 3x > x \end{array}\right.$; г) $\begin{cases} |x^2 + 5x| < 6 \\ |x + 1| \leqslant 1 \end{cases}$.

389 Множество A – все люди, живущие на Земле, множество B – люди, которые носят очки.

а) Какая из диаграмм соответствует данному условию?

б) Опишите множество, элементы которого принадлежат множеству A, но не принадлежат множеству B.

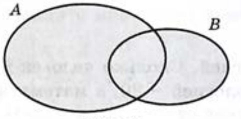


Рис. 1

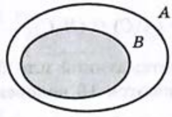


Рис. 2

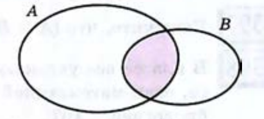


Рис. 3

в) Опишите множество, элементы которого не принадлежат множеству A.

г) Предположите, как называется множество, состоящее из тех элементов, которые не принадлежат множеству A. Сравните свои предположения с определением 3 на с. 111.

390 Даны множества $A = \{5; 10; 15; 20; 25; 30\}$, $B = \{10; 20; 30\}$, $C = \{5; 15; 25\}$. Выполните для этих множеств следующие задания:

а) Сопоставьте элементы данных множеств. Что вы замечаете?

б) Предположите, какая операция была выполнена с множествами A и B, если в ее результате получили множество C.

в) Опираясь на то, что множество C является *разностью* множеств A и B, сформулируйте свой вариант определения разности множеств. Сравните его с определением разности множеств на с. 111.

391 Проиллюстрируйте штриховкой на числовой прямой:

а) $(-\infty; 1]\backslash(-3; 0)$; б) $[-1; 5]\backslash\{2\}$.

392 Проиллюстрируйте штриховкой на числовой прямой:

а) $\overline{A}$, если $A = [0; 3]$; б) $\overline{A}$, если $A = \{0; 5; 7\}$.

393 Найдите область определения алгебраической дроби:

а) $\dfrac{x}{3x-9}$; б) $\dfrac{n}{n^2-4}$; в) $\dfrac{2}{x^2+13x+30}$; г) $\dfrac{6a}{a^2+(a+1)^2-(a+2)^2}$.

Запишите ответ двумя способами.

394 Операции объединения и пересечения множеств обладают следующими свойствами:

Коммутативное свойство	Ассоциативное свойство	Дистрибутивное свойство
$A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$	$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

Докажите эти свойства, используя диаграммы Эйлера–Венна.

395 Операции объединения, пересечения и дополнения множеств обладают следующими свойствами, которые называют формулами де Моргана:

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}; \quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

Докажите эти свойства. Сравните их с изученными в 8 классе формулами де Моргана для высказываний

396 Докажите следующие свойства операций над множествами:

1) $A\backslash B = A \cap \overline{B}$;

2) $A = (A\backslash B) \cup (A \cap B)$.

397 Докажите, что $(A \cap B) \backslash C = (A \backslash C) \cap (B \backslash C)$.

398 В классе все увлекаются математикой или биологией. Сколько человек в классе, если математикой увлекаются 15 человек, биологией – 20, а математикой и биологией – 10?

399 В первом пенале лежат лиловая ручка, зелёный карандаш и красный ластик; во втором – синяя ручка, зелёный карандаш и жёлтый ластик; в третьем – лиловая ручка, оранжевый карандаш и жёлтый ластик. Содержимое этих пеналов характеризуется такой закономерностью: в каждых двух из них ровно одна пара предметов совпадает и по цвету, и по назначению. Что должно лежать в четвёртом пенале, чтобы эта закономерность сохранилась?

400 Среди математиков каждый седьмой – философ, а среди философов каждый девятый – математик. Кого больше: философов или математиков?

401 В детский сад завезли карточки для обучения чтению: на некоторых написано «МА», на остальных – «НЯ». Каждый ребенок взял три карточки и стал составлять из них слова. Оказалось, что слово «МАМА» могут сложить из своих карточек 20 детей, слово «НЯНЯ» – 30 детей, а слово «МАНЯ» – 40 детей. У скольких ребят все три карточки одинаковы?

П **402** Найдите значение выражения:

а) $16 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 - 8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4$; б) $3 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^2 + 16 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2$; в) $18 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 - 15 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^2$.

403 Упростите выражение:

а) $\dfrac{\frac{1}{a} - \frac{1}{b+c}}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b+c}} \cdot \left(1 + \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right) : \dfrac{a - b - c}{abc}$;

б) $\left(\dfrac{1}{a^2 + 3a + 2} + \dfrac{2a}{a^2 + 4a + 3} + \dfrac{1}{a^2 + 5a + 6}\right)^2 \cdot \dfrac{(a-3)^2 + 12a}{2}$.

404 Один из корней уравнения $4x^2 - x + 3m = 0$ равен 1. Найдите второй корень.

405 Не решая уравнения $3x^2 - 5x - 2 = 0$, найдите сумму кубов его корней.

406 Решите задачи:

а) Из города A в город B, расстояние между которыми 30 км, выехал грузовик, а через 10 мин вслед за ним отправился легковой автомобиль, скорость которого на 20 км/ч больше скорости грузовика. Найдите скорость легкового автомобиля, если известно, что он приехал в город B на 5 мин раньше грузовика.

б) Из пунктов A и B, расстояние между которыми 38 км, вышли одновременно навстречу друг другу два туриста и встретились в 20 км от пункта B, причём турист, шедший из пункта A, сделал в пути часовой привал. Найдите скорость туриста, вышедшего из B, если известно, что он шёл со скоростью на 1 км/ч меньше, чем другой турист.

Д **407** Проиллюстрируйте штриховкой на числовой прямой:

а) $(-\infty; 0] \backslash (-7; -6)$; в) $\overline{A}$, если $A = [1; 5)$;

б) $[-100; -75] \backslash \{-75\}$; г) $\overline{A}$, если $A = \{0\}$.

408 Найдите множество значений x:

а) $\begin{cases} x - 2 > 0 \\ -2x + 7 \geqslant 0 \end{cases}$; б) $\left[\begin{array}{l} \dfrac{2x - 3{,}5}{5} < \dfrac{1 - 4x}{2} \\ 12 - 5x > x \end{array}\right.$.

409 Найдите множество значений x, удовлетворяющих системе:

а) $\begin{cases} x + 1 > 0 \\ x^2 - 8x + 7 \leqslant 0 \end{cases}$; в) $\begin{cases} 3\left(1 - \dfrac{x}{2}\right) > 2x - 1 \\ |x - 1| + |x - 2| < 3 - x \end{cases}$;

б) $\begin{cases} 2 + x - x^2 \leqslant -1 - x \\ x^2 + 1 \geqslant 8x - 6 \end{cases}$; г) $\begin{cases} \dfrac{2x + 1}{2} - \dfrac{2 - x}{7} > 1 \\ -4x - 1 < 0 \end{cases}$.

410 Найдите область определения алгебраической дроби:

а) $\dfrac{x}{3 - 9x}$; б) $\dfrac{n}{11 - n^2}$; в) $\dfrac{2}{x^2 + 13x + 12}$; г) $\dfrac{a^2}{a^4 - 16}$.

Запишите ответ двумя способами.

411 Докажите, что $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$.

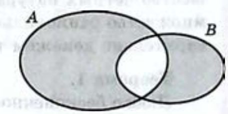
412 Решите задачу:

В 9 часов самоходная баржа вышла из A вверх по реке и прибыла в пункт B, 2 ч спустя после прибытия в B эта баржа отправилась обратно и прибыла в пункт A в 19 ч 20 мин того же дня. Течение реки 3 км/ч. Определить, в каком часу баржа прибыла в пункт B. Расстояние между пунктами A и B – 60 км.

413 Упростите выражение: $\left(\dfrac{m}{m^2 - 49} - \dfrac{m + 7}{m^2 - 5m - 14}\right) \cdot \dfrac{m^2 + 9m + 14}{-12m - 49}$.

С **414*** Прочитайте определение ещё одной операции над множествами.

Определение. Объединение множеств $A \setminus B$ и $B \setminus A$ называется *симметрической разностью* множеств A и B (обозначается $A \triangle B$).



$A \triangle B$ закрашено

Пользуясь этим определением:

а) Приведите примеры симметрической разности двух множеств.

б) Докажите, что $(A \triangle C) \cap (B \triangle C) \subset (A \cap B) \triangle C$.

Примечание: обратите внимание, что здесь не равенство, а вложение. Равенства

$$(A \triangle C) \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle C$$

может и не быть. Например, если A – множество чётных натуральных чисел; B – множество натуральных чисел, делящихся на 3; C – множество натуральных чисел, делящихся на 5).

415* Аня, Боря и Вася составляли слова из заданных букв. Все составили разное число слов: больше всех – Аня, меньше всех – Вася. Затем ребята просуммировали очки за свои слова. Если слово есть у двух игроков, за него даётся 1 очко, у одного игрока – 2 очка, слова, общие у всех трёх игроков, вычёркиваются. Могло ли так случиться, что больше всех очков набрал Вася, а меньше всех – Аня?

7.1.3.* Счётные и несчётные множества

Моя теория как скала; всякая стрела, направленная в эту скалу, тотчас же отскакивает от неё и устремляется к выпустившему её. Уверен я в этом потому, что изучил её со всех сторон за многие годы, ...я исследовал её корни, так сказать, до первой подлинной причины всего сотворенного.

Георг Кантор (1845–1918),
немецкий математик, основатель теории множеств

Говоря об известных нам числовых множествах в пункте 7.1.1, мы указали на то, что рациональных чисел «не очень много» – в некотором смысле столько же, сколько и натуральных чисел, а вот действительных чисел «значительно больше».

Впервые идею о том, что бесконечные множества имеют неодинаковую мощность, а потому их можно сравнивать друг с другом высказал немецкий математик Георг Кантор во второй половине XIX века. Идеи Кантора оказались столь неожиданными и противоречащими интуиции, что вызвали множество нападок его современников. Учитель Кантора, один из авторитетных математиков того времени, называл своего ученика «шарлатаном». Сейчас открытия Кантора не вызывают сомнений, а его самого считают основоположником теории множеств.

Попытаемся разобраться с вопросом сравнимости бесконечных множеств и мы. Сначала введём определение.

Определение. Множество A называется *счётным*, если можно установить взаимно однозначное соответствие между A и множеством натуральных чисел.

Иными словами, множество называется счётным, если оно бесконечно и все его элементы можно занумеровать натуральными числами: $a_1, a_2, ..., a_n, ...$.

Исходя из примеров, разобранных нами в пункте 7.1.1, счётными являются множество чётных натуральных чисел, а также множество целых чисел. Оказывается, множество рациональных чисел также является счётным. Чтобы показать это, предварительно докажем три вспомогательных утверждения.

Теорема 1.
Любое бесконечное множество A содержит счётное подмножество.

Доказательство.
Выберем некоторый элемент $a_1 \in A$. Так как множество A бесконечное, то можно выбрать элемент a_2 среди оставшихся элементов A, элемент a_3 среди элементов, оставшихся после выбора a_1 и a_2, и т. д. Построенное множество $\{a_1, a_2, ..., a_n, ...\}$ счётно и принадлежит A (возможно, совпадает с A). ■

Теорема 2.
Любое бесконечное подмножество счётного множества счётно.

Доказательство.
Пусть A – счётное, B – бесконечное подмножество, $B \subset A$. Докажем, что B – счётное множество. Занумеруем элементы A: $A = \{a_1, a_2, ..., a_n, ...\}$. Выберем первый из номеров (n_1) такой, что $a_{n_1} \in B$. Из оставшихся номеров $n > n_1$ выберем первый (n_2) такой, что $a_{n_2} \in B$. Ясно, что $n_2 > n_1$. Из оставшихся номеров $n > n_2$ выберем первый (n_3) такой, что $a_{n_3} \in B$; ясно, что $n_3 > n_2 > n_1$, и т. д. Так как A – счётное

множество, то все элементы B будут сюда включены: $a_{n_1} = b_1$, $a_{n_2} = b_2$, $a_{n_3} = b_3$ и т. д. Каждый из элементов B имеется среди $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, и через конечное число шагов он будет обозначен: $a_{n_k} = b_k$. Таким образом, все элементы B занумерованы: $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_k, \ldots\}$, то есть B – счётное множество. ■

Теорема 3.

Объединение конечного и счётного множеств, объединение двух счётных множеств – счётные.

Доказательство.

1. Пусть A – счётное, B – конечное множество. Тогда $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$ (свойство разности из п. 7.1.2). Так как $B \setminus A \subset B$, то $B \setminus A = \{b_1, b_2, \ldots, b_k\}$ – конечное множество (может быть, даже пустое). Если $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$, то занумеруем множество $A \cup B$: $\{b_1, \ldots, b_k, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$. Итак, $A \cup B$ – счётное множество.

2. Пусть A и B счётны. Тогда $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$. Если множество $B \setminus A$ конечно, то осталось применить первую часть теоремы. Если $B \setminus A$ бесконечно, то $B \setminus A$ – счётно (по теореме 2). Тогда $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$, $B \setminus A = \{b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots\}$. Множество $A \cup B$ можно занумеровать так: $A \cup B = \{a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_n, b_n, \ldots\}$. Итак, $A \cup B$ – счётное множество. ■

Теперь мы готовы к тому, чтобы доказать *теорему о счётности множества рациональных чисел*.

Теорема 4.

Множество рациональных чисел Q – счётное.

Доказательство.

1. Докажем сначала, что множество положительных рациональных чисел счётное (обозначим его Q_+).

Выпишем положительные дроби, как показано на рис. 1. Ясно, что при этом в каждой строке бесконечно много дробей и количество строк также бесконечно.

$$\begin{array}{ccccc}
\frac{1}{1} & \frac{2}{1} & \frac{3}{1} & \frac{4}{1} & \ldots \\[6pt]
\frac{1}{2} & \frac{2}{2} & \frac{3}{2} & \frac{4}{2} & \ldots \\[6pt]
\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{3}{3} & \frac{4}{3} & \ldots \\[6pt]
\frac{1}{4} & \frac{2}{4} & \frac{3}{4} & \frac{4}{4} & \ldots \\[6pt]
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots
\end{array}$$

Рис. 1

Рис. 2

Пронумеруем элементы этого множества, как показано на рис. 2. Таким «хитрым» способом мы выстроили в последовательность все положительные рациональные числа, причём с повторениями ($\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \ldots$ и т. д.). Полученное счётное множество будет содержать бесконечное подмножество Q_+ (в котором элементы уже не повторяются); и по теореме 2 множество Q_+ будет счётным.

Множество отрицательных рациональных чисел Q_- эквивалентно Q_+ (взаимно однозначное соответствие переводит положительное рациональное число r в отрицательное рациональное число $-r$), поэтому Q_- – также счётно.

2. Тогда так как множество рациональных чисел является объединением двух счётных и одного конечного множества ($Q = Q_+ \cup Q_- \cup \{0\}$), то, по теореме 3, оно является счётным. ■

Говоря о множестве действительных чисел можно утверждать, что оно, наоборот, несчётное.

Теорема 5.

Множество действительных чисел R не является счётным.

Для доказательства этого утверждения показывают, что несчётно множество чисел, принадлежащих полуинтервалу [0; 1). Отсюда следует и несчётность R, так как если бы R было счётно, то и его бесконечное подмножество [0; 1), по теореме 2, также было бы счётным.

* * *

Докажем несчётность полуинтервала [0; 1) методом от противного.

1. Пусть [0; 1) – счётное множество. Тогда все числа полуинтервала [0; 1), записанные как бесконечные десятичные дроби, можно занумеровать:

$$a_1 = 0,\ \alpha_1^{(1)}\,\alpha_2^{(1)}\,\alpha_3^{(1)}\ldots\ \alpha_k^{(1)}\ldots$$
$$a_2 = 0,\ \alpha_1^{(2)}\,\alpha_2^{(2)}\,\alpha_3^{(2)}\ldots\ \alpha_k^{(2)}\ldots$$
$$a_3 = 0,\ \alpha_1^{(3)}\,\alpha_2^{(3)}\,\alpha_3^{(3)}\ldots\ \alpha_k^{(3)}\ldots$$
$$\ldots$$
$$a_n = 0,\ \alpha_1^{(n)}\,\alpha_2^{(n)}\,\alpha_3^{(n)}\ldots\ \alpha_k^{(n)}\ldots$$
$$\ldots$$

В написанных десятичных дробях верхний индекс, взятый в скобки, обозначает номер числа в занумерованной последовательности; нижний индекс означает номер десятичного разряда в десятичной записи числа.

2. Рассмотрим число $a = 0,\beta_1\,\beta_2\,\beta_3\ldots\,\beta_k\ldots$ такое, что $\beta_1 \neq \alpha_1^{(1)}$, $\beta_2 \neq \alpha_2^{(2)}$, $\beta_3 \neq \alpha_3^{(3)}, \ldots$, $\beta_k \neq \alpha_k^{(k)}$ и т. д., причем все цифры $\beta_1, \beta_2, \beta_3\ldots$ отличны от 0 и 9 (последнее условие нужно для того, чтобы число a единственным образом представлялось в виде бесконечной десятичной дроби). Ясно, что число a отлично от всех чисел $a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots$.

3. Мы получили противоречие тому, что все числа полуинтервала [0; 1) занумерованы. Полученное противоречие показывает, что множество [0; 1) несчётно. ■

Отметим, что бесконечное множество, не являющее счётным, по теореме 1, содержит счётное подмножество, то есть бесконечное несчётное множество «более мощно», чем множество натуральных чисел. Значит, мы можем сделать вывод о том, что *действительных чисел в каком-то смысле больше, чем рациональных*.

Используя это утверждение, нетрудно вывести, что множество иррациональных чисел также не является счётным. Предположим, что множество иррациональных чисел счётное. Тогда так как множество рациональных чисел тоже счётно, то множество действительных чисел, как объединение этих двух множеств, также было бы счётным, а это не так.

Пример 1.

Доказать, что множество чисел любого конечного интервала $(a; b)$ несчётно.

Доказательство.

Сначала уточним, что множество чисел интервала $(0; 1)$ несчётно. Если бы оно было счётным, то при добавлении к нему конечного множества $\{0\}$ получили бы счётное множество (по теореме 3). Однако выше мы показывали, что $[0; 1)$ не является счётным множеством.

Теперь установим взаимно однозначное соответствие между интервалами $(0; 1)$ и $(a; b)$ с помощью формулы $x = a + t(b - a)$, где $t \in (0; 1)$. Ясно, при $t = 0$, $x = a$, а при $t = 1$, $x = a + b - a = b$. Тогда если $0 < t < 1$, то $x > a$ и $x < b$, то есть $x \in (a; b)$.

Обратно, если $x \in (a; b)$, то $t = \dfrac{x - a}{b - a} \in (0; 1)$. Значит, $(a; b)$ – несчётное множество.

К **416** Какие из данных множеств конечные, а какие бесконечные?

а) множество учеников школы;

б) множество жителей нашей планеты;

в) множество чисел, использованных для нумерации страниц учебника;

г) множество натуральных чисел.

417 Назовите два способа, которыми можно установить, что каждому из гостей найдется пара для танцев. Какой из этих способов использует определение эквивалентности двух множеств?

418 1) Представьте, что существует гостиница с бесконечным числом номеров, и все её номера заняты постояльцами. Ответьте на следующие вопросы:

а) Можно ли переселить каждого постояльца гостиницы в комнату, номер которой вдвое превосходит исходный номер, как это показано на схеме?

б) Можно ли поселить в эту гостиницу столько же постояльцев, сколько в ней уже живет? Объясните, как это сделать.

2) Докажите, что при объединении двух множеств, каждое из которых эквивалентно N, вновь получается множество, эквивалентное N.

419 Докажите, что счётным является:

а) множество целых чисел, дающих при делении на 4 остаток 1;

б) множество точек плоскости, обе координаты которых рациональны.

420 Докажите, что несчётным является:

а) множество точек луча $(a; +\infty)$; б) множество $[a; b] \cup [c; d]$, где $a < b < c < d$.

П **421** Сократите дробь:

а) $\dfrac{3m^4 - 15m^3}{24m^3 - 120m^2}$; б) $\dfrac{a^2 + 3a + 9}{a^3 - 27}$; в) $\dfrac{b^2 - 36}{b^2 + 2b - 24}$.

422 Решите уравнение:

а) $\dfrac{2}{3 - x} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{6}{x(3 - x)}$; г) $8x^4 + x^3 + 64x + 8 = 0$;

б) $\dfrac{x + 2}{x + 1} + \dfrac{x + 6}{x + 3} + \dfrac{x + 10}{x + 5} = 6$; д) $\dfrac{1}{x^2 + 2} - \dfrac{1}{x^2 + 3} = \dfrac{1}{12}$;

в) $(x + 3)^3 - (x + 1)^3 = 56$; е) $\dfrac{21}{x^2 - 4x + 10} - x^2 + 4x = 6$.

423 Решите задачу:
По двум параллельным железнодорожным путям навстречу друг другу следуют скорый и пассажирский поезда, скорости равны соответственно 80 км/ч и 50 км/ч. Длина пассажирского поезда равна 800 метрам. Найдите длину скорого поезда, если время, за которое он прошёл мимо пассажирского поезда, равно 36 секун-дам. Ответ дайте в метрах.

424 При каком целом значении p уравнения $3x^2 - 4x + p - 2 = 0$ и $x^2 - 2px + 5 = 0$ имеют общий корень? Найдите этот корень.

425 Даны высказывания A и B.
A: натуральное число a делится на 3;
B: натуральное число a оканчивается на 3.
Сформулируйте высказывание $A \vee B$, придайте ему «более красивый» вид и постройте отрицание этого сложного предложения $\overline{A \vee B}$.

D **426** Какие из данных множеств конечные, а какие бесконечные?

а) множество цветов на клумбе;
б) множество цветов, растущих на нашей планете;
в) множество чисел, использованных для написания цен в супермаркете;
г) множество целых чисел, оканчивающихся нулем.

427 Докажите, что множество корней квадратных уравнений с рациональными коэффициентами является счётным.

428 Сократите дробь:

а) $\dfrac{2a^3 + 6a^2}{18a^5 + 54a^4}$; б) $\dfrac{c^2 + 8c + 16}{c^3 + 64}$; в) $\dfrac{d^2 - 7d - 30}{d^2 - 100}$.

429 Решите уравнения:

а) $\dfrac{1}{2 - x} + \dfrac{1}{4} = -\dfrac{4}{x(2 - x)}$; б) $\dfrac{7}{x^2 + 3x - 9} + x^2 + 3x = 1$.

430 Решите задачу:
Железнодорожный состав длиной 1 км прошел бы мимо столба за 2 мин, а через туннель (от входа локомотива до выхода последнего вагона) при той же скорости за 4 мин. Какова длина туннеля (в км)?

431 Даны высказывания A и B.
A: натуральное число m делится на 5;
B: натуральное число m делится на 9.
Сформулируйте высказывание $A \vee B$, придайте ему «более красивый» вид и постройте отрицание этого сложного предложения $\overline{A \vee B}$.

C **432*** (Новогодний парадокс.) У Деда Мороза в мешке бесконечное число конфет, занумерованных натуральными числами. За минуту до Нового года он начинает дарить детям конфеты. Сначала он дарит детям конфету с номером 1. За полминуты до Нового года он дарит 2 конфеты с номерами 2 и 3, а конфету с номером 1 отбирает, за 15 секунд до Нового года он дарит 4 конфеты с номерами 4, 5, 6, 7, а 2 конфеты с номерами 2 и 3 отбирает, и т.д., за $\dfrac{1}{2^n}$ долю минуты до Нового года Дед Мороз дарит 2^n конфет с номерами от 2^n до $2^{n+1} - 1$ и отбирает 2^{n-1} конфет с номерами от 2^{n-1} до $2^n - 1$. Сколько конфет будет у Деда Мороза и у детей в момент встречи Нового года?

7.1.4. Применение понятий теории множеств

На свете существует очень много наук, и все науки тесно связаны друг с другом. ...Но есть одна наука без которой невозможна никакая другая. Это – математика. Её понятия, представления и символы служат тем языком, на котором говорят, пишут и думают другие науки...

Сергей Львович Соболев (1908–1989),
российский математик

Как мы видели, понятия теории множеств применяются во многих изученных нами вопросах математики. Однако область применения этих понятий намного шире, чем та, которую мы выявили в предыдущих пунктах. Так, например, понятие взаимно однозначного соответствия между множествами неразрывно связано с уже знакомым нам понятием функции. В этом пункте мы рассмотрим связь понятий теории множеств с другими разделами математики.

Ключевым понятием математики является понятие функции. Вспомним, как звучит ее определение.

Определение 1. *Функцией* называется правило (закон), по которому каждому элементу некоторого *множества X* – области определения функции, *ставится* в соответствие единственный элемент другого *множества Y* – области значений функции.

При формулировке этого определения мы использовали понятия теории множеств («множество» и «соответствие между множествами»). Новый взгляд на это определение позволит нам расширить свои представления о функции.

На данный момент более привычными для нас являются *числовые функции*, то есть функции, у которых как область определения, так и область значений являются числовыми множествами. И, если это не было оговорено отдельно, под термином функция мы понимали именно числовую функцию.

Однако, как мы теперь понимаем, функция может устанавливать соответствие и между нечисловыми множествами.

Рассмотрим *примеры функций*.

1. Пусть A – множество высказываний, каждое из которых либо истинно, либо ложно, а B – множество из двух слов: «истинно», «ложно». Тогда функцией с областью определения A и множеством значений B является постановка в соответствие каждому высказыванию из множества A одного из слов множества B, указывающего на истинность или ложность этого высказывания.

Эта функция может быть задана таблицей.

Элемент множества A	Элемент множества B
Все слоны зелёного цвета	ложно
Поганки – съедобные грибы	ложно
Все слоны – не птицы	истинно
Мухоморы не выращивают в теплицах	истинно
В баскетбол играют на льду	ложно
В хоккей на льду играют клюшками	истинно

2. Функцией множества костюмов, продаваемых в магазине, является указанная на каждом элементе этого множества (костюме) его цена.

3. Функцией каждого дня года в определённом регионе является установившаяся в этот день минимальная температура воздуха. Эту функцию также можно задать таблицей.

Дата	Минимальная температура, °C
1 января	−13,6
2 января	− 14,2
3 января	− 16,1
...	...
30 декабря	− 9,3
31 декабря	− 8,7

Числовые функции мы чаще всего задаем аналитически (то есть в виде формулы, описывающей, как вычислить значения функции по значениям её аргументов – чисел из области определения), иногда – графически или таблично, гораздо реже – словесным описанием. Приведём пример числовой функции, заданной аналитически.

4. Линейная функция $y = 3x - 1$. Эта функция, например, числу 3 из области определения ставит в соответствие число 8 из множества значений, а числу −5 из области определения – число −16 из множества значений, так как $3 \cdot 3 - 1 = 8$ и $3 \cdot (-5) - 1 = -16$.

* * *

Рассмотрим взаимосвязь понятий «взаимно однозначное соответствие» и «функция». Ясно, что любое взаимно однозначное соответствие между множествами задаёт две функции (при этом как прямое, так обратное соответствие будут являться функциями).

Функция же может и не осуществлять взаимно однозначного соответствия между множествами. Так, в первом примере, рассмотренном нами выше, функция задаёт соответствие $A \to B$, при котором каждому элементу A соответствует единственный элемент B, а вот обратным соответствием $B \to A$ каждому элементу из В ставится сразу несколько высказываний. Функция из последнего примера осуществляет взаимно однозначное соответствие между множествами. Соответствие $X \to Y$ задается формулой $y = 3x - 1$, а соответствие $Y \to X$ задается обратной функцией $x = \dfrac{y+1}{3}$.

Как мы видели, в определении функции используются понятия теории множеств. Оказывается, язык теории множеств позволяет формулировать определения не только в теории функций, но и в других разделах математики, например в теории вероятностей.

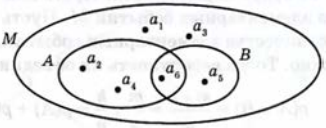
В п. 6.2.4 мы формулировали определение вероятности в классическом его варианте. Это определение звучало практически так же, как в работах французского математики Пьера Симона Лапласа ещё в начале XIX века. Современный же его вариант формулируется на языке теории множеств.

Познакомимся с этим вариантом, но сначала введём несколько вспомогательных понятий.

Пусть некоторое испытание может иметь ровно n различных исходов, и все они попарно несовместны и равновероятны. Такие исходы называются ***элементарными событиями***, а множество M, состоящее из всех элементарных событий, – ***простран-***

ством элементарных событий. Тогда каждое непустое его подмножество $A \subset M$ – это *событие*, состоящее из нескольких элементарных событий, которые называются *благоприятствующими* событию A.

Так при одном бросании игральной кости пространство элементарных событий состоит из исходов: «выпало 1 очко», «выпало 2 очка», ..., «выпало 6 очков». Его подмножествами являются, например, события: A = «выпало чётное число очков», состоящее из трех элементарных событий («выпало 2 очка», «выпало 4 очка», «выпало 6 очков»), а также событие B = «выпало больше 4 очков», состоящее из двух элементарных событий («выпало 5 очков», «выпало 6 очков»). Как мы видим, подмножества пространства элементарных событий могут пересекаться, или, иначе, одно элементарное событие (в данном примере – «выпало 6 очков») может благоприятствовать двум разным событиям.



Как мы видим, пространство элементарных событий определяется с помощью понятия «множество», а событие A определяется через понятие «подмножество».

Если событие достоверное, то ему соответствует все множество M элементарных событий, а невозможному событию соответствует пустое множество.

Благодаря этому мы можем перенести все изученные ранее операции над множествами, такие как дополнение, пересечение и объединение, и на пространство элементарных событий. Поэтому при решении задач теории вероятностей удобно использовать диаграммы Эйлера–Венна.

Определение 2. *Противоположным событием* к событию A называется событие $\bar{A}$ из того же пространства элементарных событий M, состоящее из всех элементарных событий, не входящих в A:

$$\bar{A} = M \setminus A.$$

Объединением событий A и B называется событие $A \cup B$, состоящее из всех элементарных событий, входящих хотя бы в одно из событий A или B.

Пересечением событий A и B называется событие $A \cap B$, состоящее из всех элементарных событий, входящих как в событие A, так и в событие B.

Определение 3. Пусть n – количество равновероятных элементов пространства элементарных событий M, а m – количество элементарных событий, благоприятствующих событию A, $A \subset M$. Тогда число $p(A) = \frac{m}{n}$ называют *вероятностью события А*.

Решим задачу на расчет вероятности события, используя новое определение.

Пример 1.

Бросают две игральные кости. Найдите вероятность выпадения дубля (то есть выпадения на обеих костях одинакового количества очков).

очки на первой кости

очки на второй кости	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

Решение.

Найдем количество элементов пространства элементарных событий M:

$$n = 6 \cdot 6 = 36.$$

Отметим штриховкой элементарные события, благоприятствующие событию A = «на обеих костях выпало одинаковое количество очков» в таблице. Количество m элементарных событий, благоприятствующих событию A, равно шести.

Отсюда $p(A) = \frac{m}{n} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

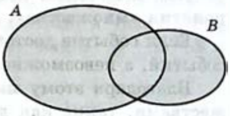
Ответ: $\frac{1}{6}$.

Если события несовместны (то есть не могут произойти одновременно), то соответствующие им множества не будут пересекаться. Пусть даны два несовместных события A и B из пространства элементарных событий M. Пусть n – количество элементов пространства M, m *и* k – количества элементарных событий, благоприятствующих событиям A *и* B соответственно. Тогда вероятность их объединения

$$p(A \cup B) = \frac{m+k}{n} = \frac{m}{n} + \frac{k}{n} = p(A) + p(B)$$

равна сумме их вероятностей.

Два события A и B, которые не являются несовместными, изображены на рисунке. Если мы сложим количества элементарных событий, благоприятствующих событиям A и B, то дважды посчитаем элементарные события, входящие одновременно в A и B. Поэтому



$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B).$$

В жизни бывают события, которые связаны друг с другом. Например, вероятность того, что сегодня пойдёт снег, зависит от времени года. Но есть и несвязанные события – если вы подбрасываете две монетки, то вероятность выпадения «орла» на второй никак не зависит от того, что выпало на первой.

Определение 4. События A и B называются *независимыми*, если вероятность наступления события B не зависит от наступления события A.

Позже мы покажем, что для независимых событий справедлива формула $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$. Например, вероятность того, что на двух игральных костях выпадет по единице равна $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$. А вероятность выпадения двух «орлов» на двух монетах равна $0{,}5 \cdot 0{,}5 = 0{,}25$.

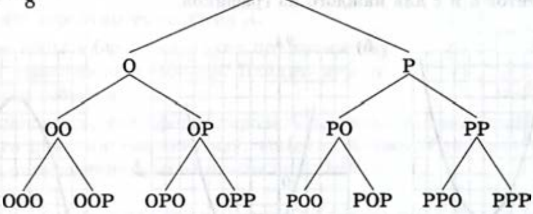
Определение 5. Два испытания называются независимыми, если вероятность наступления любого события B из второго испытания не зависит от наступления любого события A из первого.

Замечание. Независимые события встречаются не только в независимых испытаниях. Например, при случайном выборе карты из колоды события «выбрана дама» и «выбрана карта пиковой масти», очевидно, независимы. Но события «выбрана дама» и «выбрана семерка» зависимы, так как вероятность «семерки» зависит от того, «дама» это или нет. Поэтому независимых испытаний здесь нет.

Если провести серию из n попарно независимых испытаний, то вероятность того, что в них последовательно случатся события $A_1, A_2, ..., A_n$, можно посчитать, используя формулу произведения вероятностей для независимых событий:

$$p(A_1 \cap A_2) = p(A_1) \cdot p(A_2),$$
$$p(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = p(A_1 \cap A_2) \cdot p(A_3) = p(A_1) \cdot p(A_2) \cdot p(A_3),$$
$$p(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = p(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \cdot p(A_4) = p(A_1) \cdot p(A_2) \cdot p(A_3) \cdot p(A_3),$$
$$...,$$
$$p(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n) = p(A_1) \cdot p(A_2) \cdot ... \cdot p(A_n).$$

Для иллюстрации серии испытаний удобно использовать представление в виде «дерева исходов». Например, на этой схеме изображено дерево исходов серии из трёх бросков монетки. Вероятность каждого исхода из первой строки равна $\frac{1}{2}$, из второй – $\frac{1}{4}$, а из третьей – $\frac{1}{8}$.



* * *

В теории вероятностей часто требуется найти вероятность некоторого события при условии, что другое событие уже произошло. Например, вероятность того, что при случайном выборе натурального числа от 1 до 100 мы выберем число 82, равна $\frac{1}{100}$. Но эта вероятность становится $\frac{1}{50}$, если мы знаем, что выбранное число чётное.

Определение 6. *Условная вероятность* — это вероятность наступления одного события при условии, что другое событие уже произошло.

Вероятность события A при условии, что событие B уже произошло, обозначается $p(A|B)$. Для условной вероятности справедлива формула

$$p(A|B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}.$$

Если события A и B несовместны и $p(A) > 0$, $p(B) > 0$, то

$$p(A|B) = p(B|A) = 0,$$

так как $p(A \cap B) = p(\varnothing) = 0$.

Рассмотрим пространство элементарных событий M и множество попарно несовместных событий $B_1, B_2, B_3, ..., B_k$, в объединении дающих все множество M:

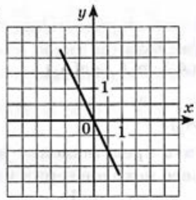
$$p(B_i \cap B_j) = 0 \text{ при } i = j,$$
$$p(B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup ... \cup B_k) = 1.$$

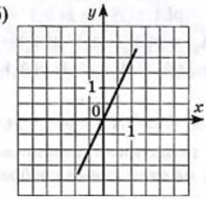
Пусть произошло некоторое событие A. Мы точно знаем, что произошло какое-то событие B_i, и притом только одно. Поэтому справедливо равенство

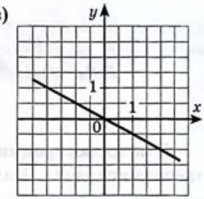
$$p(A) = p(A \cap B_1) + p(A \cap B_2) + p(A \cap B_3) + + p(A \cap B_k) =$$
$$= p(A|B_1) \cdot p(B_1) + p(A|B_2) \cdot p(B_2) + p(A|B_1) \cdot p(B_2) + ... + p(A|B_1) \cdot p(B_k).$$

Полученная формула носит название ***формула полной вероятности***.

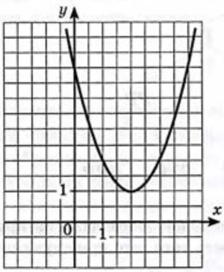
433 На рисунке изображены графики функций, задаваемых формулами вида $y = kx$. Укажите для каждого графика соответствующую ему формулу.

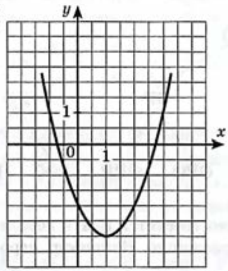
а) 

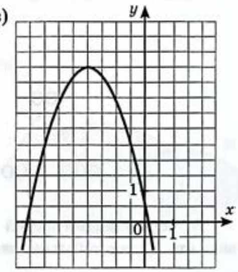
б) 

в) 

434 На рисунке изображены графики функций вида $y = ax^2 + bx + c$. Укажите знаки коэффициентов a и c для каждого из графиков.

а) 

б) 

в) 

435 Укажите область определения функции и постройте ее график.

а) $y = \dfrac{x+4}{x^2+4x}$; б) $y = \dfrac{x^2+x-12}{x+4}$; в) $y = \dfrac{x^4-13x^2+36}{(x+2)(x-3)}$.

436 Линейная функция $y = \dfrac{1}{3}x + 1$ задана на области определения $[0; 3]$. Между какими множествами она задаёт соответствие?

Найдите значение x, при котором $y = 1$; $y = 1{,}4$; $y = 2$; $y = 4$. Как можно преобразовать формулу $y = \dfrac{1}{3}x + 1$, чтобы быстрее ответить на эти вопросы?

437 1) Линейная функция $y = 2x$ задана на области определения $[0; 10]$. Между какими множествами она задает соответствие?

2) Заполните таблицу:

x	0	1	2	3	4	5	$6\frac{1}{3}$	8,5	10
y									

3) Рассмотрите соответствие, которое ставит всем полученным вами значениям функции $y = 2x$ в нижней строке значения из верхней строки. Задайте его формулой. Является ли оно функцией?

4) Осуществляет ли функция $y = 2x$ взаимно однозначное соответствие?

438 Любая ли функция осуществляет взаимно однозначное соответствие между множествами? Проверьте свое предположение, рассмотрев функцию $y = x^2$ и формулу, которая задаёт обратное ей соответствие.

439 Сформулируйте определение функции. Какие понятия используются в этом определении? Приведите примеры нечисловых функций.

440 1) Игральный кубик бросают дважды.

а) Сколько элементов в множестве исходов этого испытания?

б) Сколько элементов в множестве исходов, благоприятствующих событию A = «хотя бы один раз выпало число, меньшее 3»?

в) Найдите вероятность события A.

2) Какое событие соответствует подмножеству исходов, отмеченных в таблице? Найдите вероятность этого события.

очки на первой кости

очки на второй кости	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

3) Предположите, как сформулировать основные понятия теории вероятностей, используя понятия «множество», «подмножество». Сопоставьте свои предположения с определением вероятности на с. 125.

441 Из 1400 новых карт памяти в среднем 56 неисправны. Какова вероятность того, что случайно выбранная карта памяти исправна?

442 Какова вероятность того, что случайно выбранное натуральное число от 30 до 54 делится на 2?

443 Какова вероятность того, что при бросании трех игральных кубиков выпадут числа, сумма которых делится на 9?

444 В мешке лежит сто шаров. На них написаны различные натуральные числа от 1 до 100. Наугад из мешка вытаскивают один шар. Найдите вероятность того, что число на этом шаре:

а) не делится на 9; б) делится на 9 или на 2; в) не делится ни на 9, ни на 2.

445 Мама подарила три воздушных шара (белый, синий и красный) трем дочерям – Маше, Свете и Наташе. Считая, что каждый из шаров равновероятно мог достаться каждой из девочек, рассмотрим события A: «Белый шар достался Маше» и B: «Синий шар достался Свете».

а) Являются ли эти события независимыми?

б) Являются ли эти события несовместными?

в) Найдите вероятности событий A, B, $A \cup B$, $A \cap B$. Убедитесь в справедливости формулы

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B).$$

г) Опишите события, противоположные событиям $A \cup B$ и $A \cap B$.

446 При каких значениях x трёхчлен $x^2 + 11x + 24$:

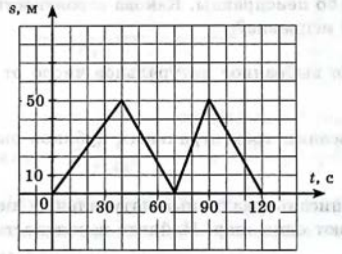
1) обращается в нуль;
2) принимает значение, равное 14;
3) принимает значение, равное -14;
4) принимает значение, равное значению двучлена $10 + 2x$?

447 При каком значении p отношение корней уравнения $x^2 + px - 16 = 0$ равно -4?

448 Решите уравнение: $\left(x - \frac{8}{x}\right)^2 + 7 = 8x - \frac{64}{x}$.

449 Решите задачу:
Теплоход, собственная скорость которого равна 30 км/ч, проходит по течению реки и после стоянки возвращается в исходный пункт. Скорость течения равна 2 км/ч, стоянка длится 3 ч, а в исходный пункт теплоход возвращается через 18 часов после отплытия из него. Сколько километров прошёл теплоход за весь рейс?

450 Команда пловцов участвовала в эстафетном заплыве 4×50 м. На рисунке изображен график, показывающий зависимость расстояния s (в метрах) между пловцом и местом старта от времени движения t (в секундах). Какое из следующих утверждений неверно?



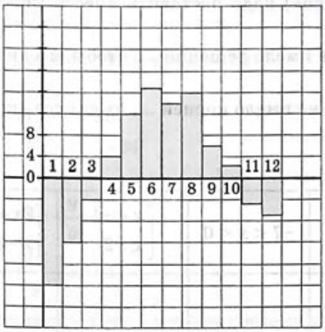
1) Пловец, плывший на первом этапе, проплыл свой этап за 40 с.
2) Команда проплыла дистанцию за 2 мин.
3) Средняя скорость пловца, плывшего на втором этапе, выше средней скорости пловца, плывшего на третьем этапе.
4) Вторую половину дистанции команда преодолела быстрее, чем первую.

451 Укажите область определения функции и постройте ее график.

а) $y = \frac{x + 1}{x^2 + x}$; б) $y = \frac{x^2 + x - 12}{x + 4}$; в) $y = \frac{x^2 - x - 12}{x + 3}$.

452 В сборнике билетов по геометрии всего 35 билетов, в 14 из них встречается вопрос о прямоугольном треугольнике. Найдите вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете школьнику достанется вопрос с прямоугольным треугольником.

453 На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха в одном из городов России за каждый месяц 1975 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали – температура в градусах Цельсия. Сколько месяцев среднемесячная температура была: а) ниже – 8 °С? б) выше 10 °С?



454 Последовательно сделали два броска игральной кости. Рассмотрим события A: «Сумма выпавших очков нечётна» и B: «Произведение выпавших очков чётно».

а) Являются ли эти события независимыми?
б) Являются ли эти события несовместными?
в) Найдите вероятности событий A, B, $A \cup B$, $A \cap B$.

455 Решите задачу:
Первый турист, проехав 1,5 ч на велосипеде со скоростью 16 км/ч, делает остановку на 1,5 ч, а затем продолжает путь с первоначальной скоростью. Четыре часа спустя после отправки в дорогу первого туриста вдогонку ему выезжает на мотоцикле второй турист со скоростью 56 км/ч. Какое расстояние проедет второй турист, прежде чем он догонит первого?

C **456*** В классе больше 20, но меньше 30 учеников, дни рождения у всех различны. Петя сказал: «Тех, кто старше меня в классе, в два раза больше тех, кто младше меня». Катя сказала: «Тех, кто старше меня в классе, в три раза меньше тех, кто младше меня». Сколько учеников в классе?

457 Назовем слонопотамом такую шахматную фигуру, которая может ходить и как слон, и как конь, причем если слонопотам сделал ход как конь, то следующим ходом он должен пойти как слон; если же он сделал ход как слон, то следующим ходом он должен пойти как конь. Может ли слонопотам обойти клетки доски 5×5, побывав на каждой клетке ровно по одному разу, и при этом закончить обход на клетке, соседней по стороне с клеткой начала обхода?

T Выполните тест № 10 для самостоятельной проверки знаний.

Задачи для самоконтроля по курсу 8 класса

458 Определите, какое слово или словосочетание (только «необходимо», только «достаточно» или «необходимо и достаточно») надо поставить вместо многоточия, чтобы высказывание стало истинным.

а) Для того чтобы квадратное уравнение имело решение ..., чтобы его дискриминант был больше нуля.

б) Для того чтобы квадратное уравнение не имело корней ..., чтобы его дискриминант был меньше нуля.

459 Заполните таблицу:

Сложное предложение	$x \geqslant 0$	$x \leqslant 1{,}8$	$-7 < x < 0$	$\left[\begin{array}{l} x < -4 \\ x > 2 \end{array}\right.$	$\begin{cases} 2x + y = -3 \\ x - y = 0 \end{cases}$
Простые предложения	$x > 0$				
	$x = 0$				
Логическая связка	или				

460 Определите истинность данных высказываний.

A: Обыкновенную дробь $\frac{3}{5}$ можно записать как 0,6.

B: Обыкновенную дробь $\frac{3}{5}$ можно записать как 0,5(9).

Сформулируйте конъюнкцию и дизъюнкцию этих высказываний. Установите истинность полученных сложных высказываний.

461 У полиции есть пятеро подозреваемых в краже, и вот их показания.

Андреева: Я не брала чужого. Я никогда в жизни ничего не воровала. Это сделал Петров.

Борисов: Я не брал чужого. У меня достаточно своих средств. Сидоров знает, кто это сделал.

Иванов: Я не виноват. Это сделал Петров. С Сидоровым я познакомился только вчера.

Петров: Я не брал чужого. В краже виновен Сидоров. Андреева лжёт, утверждая, что это я совершил кражу.

Сидоров: Я ничего не крал. Виноват Борисов. Иванов может поручиться за меня, так как знает меня с рождения.

В ходе расследования выяснилось, что каждый из подозреваемых два раза сказал правду и один раз солгал. Определите, кто совершил кражу.

462 Определите, пересекаются ли графики уравнений, при положительном ответе найди точки пересечения:

а) $-3y + x + 5 = 0$ и $7 - 5y = -2x$;

б) $x + 5 = 3y$ и $x - 3y = -5$;

в) $7 + 2x - 5y = 0$ и $\frac{2}{3}x - 1\frac{2}{3}y + 2 = 0$;

г) $-0{,}5x + 0{,}25y = -4$ и $\frac{1}{3}x + 2 = \frac{2}{5}y$.

463 Решите системы уравнений:

а) $\begin{cases} 7x-8=3y \\ 4x+9y=-24 \end{cases}$;

б) $\begin{cases} 4x+\dfrac{9}{y}=21 \\ \dfrac{18}{y}+3x=17 \end{cases}$;

в) $\begin{cases} 3y+1-\dfrac{3(x-5y)}{4}=x-\dfrac{27y+22}{8} \\ x+3-\dfrac{5x-9y}{6}=3y-\dfrac{3-5x}{9} \end{cases}$;

г) $\begin{cases} \dfrac{5}{2x+y}-5=-\dfrac{4}{2x-3y} \\ \dfrac{2}{2x-3y}-5=-\dfrac{15}{2x+y} \end{cases}$

464 Решите задачу, составив систему уравнений:

а) В двух шкафах находится 80 книг. Если из первого шкафа переложить во второй 8 книг, то во втором шкафу будет в $1\frac{2}{3}$ раза больше, чем в первом. Сколько книг было в каждом шкафу?

б) Сумма цифр двузначного числа равна 12. Если цифры этого числа переставить, то получится число, составляющее $\frac{4}{7}$ первоначального. Найдите это двузначное число.

в) Если длину прямоугольного участка уменьшить на 10 м, а ширину увеличить на 10 м, то площадь участка увеличится на 0,05 га; если же длину увеличить на 15 м, а ширину уменьшить на 10 м, то площадь участка увеличится на 0,01 га. Определите площадь земельного участка.

г) За 2 ч катер прошёл 25 км по течению реки и 12 км против течения. В другой раз тот же катер за 3 ч прошёл 35 км по течению и 20 км против течения. Определите собственную скорость катера и скорость течения реки.

465 Решите:

а) $\begin{cases} 2x \geqslant -3 \\ 2x-1<3 \end{cases}$; б) $\left[\begin{array}{l} 5x \leqslant -4 \\ x-1>2x \end{array}\right.$; в) $-1{,}5 < \frac{x-2}{6} < 3$.

466 Найдите решение системы неравенств:

а) $\begin{cases} 3x-4<1{,}5(4x-3)+8 \\ 1+x<1{,}5x+2{,}5 \end{cases}$;

б) $\begin{cases} 3x-2>-\dfrac{2x-13}{11} \\ \dfrac{x}{6}+\dfrac{2}{3}(x-7)<\dfrac{3x-20}{9} \end{cases}$.

467 Решите систему уравнений с модулями: $\begin{cases} \big||x+1|+|y-1|=5 \\ \big||x+1|-4y=-4 \end{cases}$.

468 Выясните, при каких значениях a система уравнений имеет единственное решение:
$$\begin{cases} 3x+ay=5+a \\ x+2{,}5y=4 \end{cases}.$$

469 Изобразите на координатной плоскости множество решений системы неравенств:
$$\begin{cases} x-2y>4 \\ 3x-y\leqslant 6 \end{cases}.$$

470 Постройте график функции: А) $f(x)=-x^2$; Б) $f(x)=-x^3$.

1) Сравните $f(-4)$ и $f(-1{,}5)$; $f(-4)$ и $f(0)$; $f(-78)$ и $f(78)$.

2) Определите, какое минимальное и максимальное значение функции на отрезках: а) $[-3; 3]$; б) $[0; 1{,}5]$; в) $[-1{,}5; 0]$.

3) Укажите, на каких промежутках из области определения функция положительна, отрицательна, равна нулю.

471 В качестве домашнего задания учитель задал восьмиклассникам начертить график линейной функции, степенной функции и прямой пропорциональности. Один из восьмиклассников начертил только один график, но задание оказалось выполненным полностью. График какой функции он начертил? Начертите этот график.

472 Обратная пропорциональность задана формулой $y=\dfrac{16}{x}$.

Найдите значение функции, соответствующее значению аргумента, равному $-0{,}04$; $-1{,}6$; $0{,}8$; 20; 800; -3200.

Определите, принадлежат ли графику функции точки $A\,(-4; -4)$; $B\,(-0{,}2; 80)$; $C\left(\dfrac{4}{5}; 20\right)$; $F\,(-0{,}08; -200)$.

473 Задайте формулой обратную пропорциональность, если известно, что график функции проходит через точку:

а) $M\,(-4; -0{,}4)$; б) $C\,(1{,}5; -12)$; в) $L\left(\dfrac{11}{12}; 24\right)$.

474 Решите графически систему уравнений:

а) $\begin{cases} y=-\dfrac{7}{x} \\ x-y=8 \end{cases}$; б) $\begin{cases} y=\dfrac{4}{x} \\ 4x-y=0 \end{cases}$.

475 Докажите, что функция, заданная формулой $y=0{,}2x^6+5x^4$, является чётной.

476 Докажите, что функция, заданная формулой $y=\dfrac{5}{x}-1{,}2x^3$, является нечётной.

477 Дана функция $y = \begin{cases} x^2, \text{ если } x \geqslant -2; \\ -\dfrac{2}{x}, \text{ если } -8 < x < -2. \end{cases}$

Как она называется? Найдите $y(-6)$, $y(-4)$, $y(-2)$, $y\left(-\dfrac{1}{3}\right)$, $y(0)$, $y\left(\dfrac{1}{4}\right)$.

478 Дана кусочно-заданная функция

$$y = \begin{cases} -\dfrac{4}{x}, \text{ если } 4 < x \leqslant 6; \\ x, \text{ если } 0 < x \leqslant 4; \\ x^3, \text{ если } -2 \leqslant x \leqslant 0; \\ \dfrac{1}{x}, \text{ если } -6 \leqslant x < -2 \end{cases}$$

а) найдите $y(-4)$, $y(-2)$, $y(-0{,}5)$, $y(0)$, $y(1{,}5)$; $y(3)$; $y(5)$; $y(6)$;

б) постройте график функции;

в) найдите наибольшее и наименьшее значения функции на её области определения.

479 Найдите значение выражения:

а) $\sqrt{900}$; в) $\left(\sqrt{16}\right)^2$; д) $\sqrt{169} \cdot \sqrt{49}$; ж) $\sqrt{1{,}21} + \sqrt{0{,}16}$;

б) $\sqrt{0{,}81}$; г) $\left(-3\sqrt{3}\right)^2$; е) $\sqrt{0{,}0036} : \sqrt{0{,}09}$; з) $\sqrt{92 + \sqrt{64}}$.

480 Упростите:

а) $\sqrt{361 \cdot 16}$; в) $\sqrt{\dfrac{225}{400}}$; д) $-21 \cdot \sqrt{(-4)^2}$;

б) $\sqrt{88} \cdot \sqrt{22}$; г) $\dfrac{\sqrt{448}}{\sqrt{7}}$; е) $2{,}4 \cdot \sqrt{5^4}$.

481 Упростите выражение:

а) $\sqrt{x^2 - 12x + 36}$, если $x > 6$; б) $\sqrt{2{,}5x^2 - 2x + 0{,}4}$, если $x < 0{,}4$.

482 Внесите множитель под знак корня:

а) $3\sqrt{2}$; б) $5\sqrt{0{,}6}$; в) $4\sqrt{0{,}5}$; г) $a\sqrt{\dfrac{b}{a}}$; д) $\dfrac{a}{2c}\sqrt{\dfrac{c}{a}}$.

483 Освободите дробь от иррациональности в знаменателе:

а) $\dfrac{5}{\sqrt{5}}$; б) $\dfrac{10}{3\sqrt{5}}$; в) $\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}$; г) $\dfrac{7-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}$; д) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}-1}$.

484 Упростите выражение:

а) $(\sqrt{12} - 2\sqrt{27} + 3\sqrt{75}) \cdot \sqrt{3}$; в) $\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right) \cdot \left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\right)$;

б) $(\sqrt{20} - \sqrt{45} + 3\sqrt{125}) : 2\sqrt{5}$; г) $\left(5 - 2\sqrt{3}\right) \cdot \left(6 + 5\sqrt{3}\right)$.

485 Решите графически уравнения:

а) $2\sqrt{x} = x$; б) $-x^2 = x - 2$; в) $\frac{4}{x} = 1$; г) $-\frac{3}{x} = \frac{x}{3}$.

486 Решите уравнения:

а) $0{,}5x^2 - 2 = 0$; д) $x^2 + 6x + 8 = 0$; и) $5x^2 - 6x + 1 = 0$;

б) $x^2 + 2x = 0$; е) $x^2 - 10x + 9 = 0$; к) $x^2 - 10x - 11 = 0$;

в) $4x^2 + 1 = 0$; ж) $x^2 + x = 2$; л) $\sqrt{2}x^2 - 10x + 8\sqrt{2} = 0$;

г) $(x - 2)^2 - 9 = 0$; з) $x^2 - \frac{2}{7}x - 47 = 0$; м) $1022x^2 + 1021x - 1 = 0$.

487 При каких значениях x трёхчлен $x^2 - 2x + 8$:

1) обращается в нуль;

2) принимает значение, равное 7;

3) принимает значение, равное -10;

4) принимает то же значение, что и двучлен $(4 - x)$?

488 Решите квадратные уравнения с параметром a:

а) $x^2 - 3ax + 2a^2 = 0$; б) $x^2 - ax - 2a^2 = 0$.

489 Решите квадратные уравнения с параметрами a и b:

а) $x^2 - 2ax + a^2 - b^2 = 0$; б) $x^2 - 2(a + b)x + 4ab = 0$.

490 Составьте квадратное уравнение по данным его корням:

а) 5 и 2; б) $-0{,}1$ и 10; в) $\frac{1}{3}$ и $-\frac{1}{4}$; г) $\sqrt{2}$ и $\sqrt{3}$.

491 Решите биквадратные уравнения:

а) $9x^4 + 8x^2 - 1 = 0$; в) $20x^4 - x^2 - 1 = 0$;

б) $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$; г) $4x^4 - 5x^2 + 1 = 0$.

492 Разложите на множители трехчлены:

а) $x^2 + 7x + 10$; д) $2x^2 + 3x - 6{,}48$;

б) $x^2 + 3x - 108$; е) $30x^2 + 37x + 10$;

в) $x^2 - 17x + 72$; ж) $x^4 - 12x^2 + 32$;

г) $x^2 + 5{,}9x + 8{,}5$; з) $6x^4 - 5x^2 + 1$.

493 Решите задачу, составляя уравнение:

а) Сумма квадратов двух последовательных натуральных чисел равна 1201. Найти эти числа.

б) Чему равен периметр прямоугольника, площадь которого равна 80 см², и одна из сторон на 2 см больше другой?

в) Если одну сторону квадрата уменьшить на 2 м, а вторую – на 4 м, то площадь полученного прямоугольника станет равной 120 м². Найти сторону квадрата.

494 Найдите значение k так, чтобы уравнение имело два равных: 1) положительных корня; 2) отрицательных корня:

а) $5x^2 + 2kx + 5 = 0$; б) $kx^2 - (k-7)x + 9 = 0$.

495 При каких значениях коэффициента m уравнение имеет два равных корня:

а) $4x^2 + mx + 9 = 0$; б) $mx^2 + 4x + 1 = 0$.

496 Вычислите координаты вершины параболы:

а) $y = x^2 - 8x + 7$; б) $y = x^2 + 4x + 3$; в) $y = x^2 - x + 2{,}25$;

497 Постройте график функции:

а) $y = (x+2)^2 + 3$; б) $y = -(x-1)^2$.

498 Решите квадратное неравенство:

а) $6x^2 - x - 2 \geqslant 0$; в) $2(x+2)^2 - 3{,}5 \geqslant 0$;

б) $\frac{1}{3}x^2 + 3x + 6 < 0$; г) $x > \frac{x^2}{2} - 4x + 15$.

499 Найдите значения x, при которых данное выражение имеет смысл:

а) $\sqrt{2 - x - x^2}$; б) $\frac{1}{\sqrt{9x^2 - 3x - 2}}$.

500 Постройте график функции:

а) $f(x) = \begin{cases} x^2 + x, & \text{если } -3 \leqslant x \leqslant 0; \\ -x^2 + 2x + 4, & \text{если } 0 < x \leqslant 3 \end{cases}$

б) $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4x - 3, & \text{если } -1 < x \leqslant 4; \\ x^2 + 4x - 5, & \text{если } -6 < x \leqslant -1 \end{cases}$

501 Решите системы неравенств:

а) $\begin{cases} x^2 - 4x - 5 > 0 \\ x^2 + 2x - 3 < 0 \end{cases}$; б) $\begin{cases} -0{,}5x^2 + 3x + 8 \leqslant 0 \\ \frac{1}{3}x^2 + 5x + 12 \geqslant 0 \end{cases}$.

502 При каких значениях параметра m неравенство $x^2 - mx + 4 \geqslant 0$ не имеет решений?

503 Сократите дробь:

а) $\frac{14b^5 + 7b^4c}{10bc^3 + 5c^4}$; в) $\frac{12x^4 + 27x^3c}{16x^3c + 36x^2c^2}$; д) $\frac{39a^2b^3 - 36ab^4}{65a^3b - 60a^2b^2}$;

б) $\frac{7a^3b + 7ab^3}{a^4 - b^4}$; г) $\frac{(a+1)^3}{a^3 - a}$; е) $\frac{x^3 + y^3}{2(x+y)^2}$.

504 Выполните действия:

а) $\frac{a-b}{2(a+b)} + \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}$; д) $-\frac{14a^2b^3c}{39d^5s^7} \cdot \frac{9d^7s}{35a^4b^5}$;

б) $\frac{2a^2 + b^2}{a^2 - b^2} - \frac{a+b}{2(a-b)}$; е) $\frac{2a(p^2 - q^2)^2}{bp} \cdot \frac{p^3}{(p-q)(p+q)}$;

в) $\dfrac{2a+3x}{2a-3x}-\dfrac{2a-3x}{3x-2a}$;

г) $\dfrac{4a+x}{4a-x}+\dfrac{4a-x}{x-4a}$;

ж) $\dfrac{2x^4-36x^2+162}{3x+6}:\dfrac{x^4y-81y}{6x^2+12x}$;

з) $\dfrac{6m^2-6n^2}{m^2-2mn+n^2}:\dfrac{3m+3n}{2m^3-2n^3}$.

505 Выполните действия:

а) $\left[\dfrac{a^2-x^2}{a+b}\cdot\dfrac{a^2-b^2}{ax+x^2}\cdot\left(-x+\dfrac{ax}{a-x}\right)\right]:\dfrac{a^3-ab^2}{5x^3}$;

б) $\left[\dfrac{a^2+ab}{2b}:\left(a^2-b^2\right)\right]\cdot\left[\dfrac{(a+b)^2}{4ab}-1\right]$.

506 Решите уравнение:

а) $\dfrac{24}{x}-\dfrac{17-x}{x-1}=1$;

б) $\dfrac{x}{x-1}=\dfrac{4x}{x+5}-3$;

в) $\dfrac{3-2x}{2-x}-\dfrac{3x-2}{2+x}-\dfrac{16x-x^2-17}{x^2-4}=0$;

г) $\dfrac{x}{3x+1}=\dfrac{8x-1}{3x-1}+\dfrac{21x^2+2}{1-9x^2}$.

507 Решите задачи:

а) Двум рабочим было поручено изготовить по 100 одинаковых деталей. Один из них изготовлял на 5 деталей в час больше, чем другой. Сколько часов работал каждый рабочий, если на всю работу было затрачено 9 часов?

б) Два самолёта одновременно вылетели из одного города в другой. Первый самолёт летел со скоростью на 50 км/ч больше, чем второй, и прилетел к месту назначения на 1 час раньше. Определите скорость каждого самолёта, если расстояние между городами 1500 км.

в) Расстояние 105 км пароход проходит по течению на два часа быстрее, чем против течения. Определите скорость течения, если собственная скорость парохода равна 18 км/ч.

г) Дробь, у которой знаменатель на 3 больше числителя, будучи сложена с обратной ей дробью, дает в сумме 2,9. Найти эту дробь.

д) Площади двух участков квадратной формы относятся как 16 : 9. Длина стороны первого участка на 60 м больше длины стороны второго участка. Определите стороны каждого участка.

е) Два автомобиля, работая вместе, могут перевезти груз за 15 часов. Один автомобиль работал на 6 часов меньше, чем второй, и перевез 40% груза, а второй – оставшийся груз. Сколько часов работал каждый автомобиль?

508 Докажите, что значение этого дробно-рационального выражения при допустимых значениях переменных не зависит от a и b:

$$\frac{a^2+b^2}{(a+b)^2}+\frac{\dfrac{2}{ab}}{\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)^2}.$$

509 Решите уравнение с помощью замены переменной:

а) $\dfrac{3y-4}{3y+4}+\dfrac{3y+4}{3y-4}=2$; б) $2x^2+x+\dfrac{7}{2x^2+x}=8$.

510 Решите уравнение, используя выделение целой части алгебраической дроби:

а) $\dfrac{2x-3}{x+1}+\dfrac{4x-1}{x-1}=6$; б) $\dfrac{3x+2}{x-3}-9=\dfrac{5}{x-3}$.

511 Решите неравенство:

а) $x^2-3x+2<0$; в) $x^2+2{,}5x+1\leqslant 0$; д) $7x^2+5x-2>0$;
б) $1{,}5x^2-3{,}5x+2>0$; г) $x^2-x-12\geqslant 0$; е) $-x^2-5x+6\geqslant 0$.

512 Найдите, при каких значениях x выражение имеет смысл:

а) $\sqrt{\dfrac{x^2-7x+12}{x^2-2x-3}}$; б) $\sqrt{5-x-\dfrac{6}{x}}$.

513 Решите неравенство:

а) $\dfrac{1}{2-x}+\dfrac{5}{2+x}<1$; в) $\dfrac{3x^2-10x+3}{x^2-10x+25}>0$; д) $\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}\geqslant 1$;

б) $\dfrac{1}{x+2}<\dfrac{3}{x-3}$; г) $\dfrac{x^4+x^2+1}{x^2-4x-5}<0$; е) $\dfrac{x^3-x^2+x-1}{x+8}\leqslant 0$.

514 «... я поднялся на капитанский мостик и увидел огромные, как горы, волны и нос корабля, который уверенно их резал. И я спросил себя, почему корабль побеждает волны, хотя их так много, а он один? И понял – причина в том, что у корабля есть цель, а у волн – нет. Если у нас есть цель, мы всегда придем туда, куда хотим». Эти слова принадлежат талантливому писателю, журналисту, британскому военному (полковнику) XX века. Расположив наибольшие целые решения неравенств в порядке убывания, узнайте его имя:

Р	$\dfrac{(x-5)^2(x-6)}{(x+5)(x+6)^5}<0$	Ч	$\dfrac{x(3-x)}{x+3}\geqslant 0$
Ь	$\dfrac{x}{-x^2-6x+7}>0$	И	$\dfrac{x^2-4}{9x^2-3x}\leqslant 0$
Е	$x^2-49<0$	Ч	$(x-8)(x+1)\leqslant 0$
Л	$x^2(x+3)^3(x+1)\leqslant 0$	Л	$4x-2x^2>0$

Какой государственный пост занимал этот человек?

515 Решите двойное неравенство $-1{,}5<\dfrac{x-2}{x+5}<3$.

516 Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} x^2+x<12 \\ x^2-x-2>0 \end{cases}$; б) $\begin{cases} |x-3|<2 \\ x^2+x>6 \end{cases}$; в) $\begin{cases} 2x+3>0 \\ |x^2-5x+6|\leqslant 2 \end{cases}$.

517 Решите задачу с помощью неравенства:
В двузначном числе цифра десятков на 3 больше цифры единиц. Найти это число, если известно, что оно больше 35 и меньше 74.

518 Докажите неравенство:

а) $\dfrac{x^2}{a}+\dfrac{a^2}{x}\geqslant a+x$, если $a>0$, $x>0$; б) $x^3+y^3\geqslant xy\,(x+y)$, если $x>0$, $y>0$.

519 В таблице показано, сколько миллионов зрителей посмотрело фильм «Человек-паук» (2002 г.) в кинотеатрах разных стран мира (значения округлены с точностью до целых).

Страна	Количество зрителей, млн чел.	Страна	Количество зрителей, млн чел.
Аргентина	2	Испания	5
Бразилия	9	США	70
Великобритания	6	Франция	2
Германия	5	Япония	5

Используя данные таблицы, ответьте на вопросы:
а) В какой из этих стран фильм посмотрели больше всего зрителей? Дайте возможное объяснение этому факту.
б) Найдите моду этих данных.
в) Найдите размах этих данных.
г) Найдите среднее значение этого ряда данных.
д) Найдите медиану этого ряда данных.

520 Столбчатая диаграмма показывает, сколько миллионов зрителей посмотрели фильм «Новый человек-паук» (2012 г.) в кинотеатрах разных стран мира (значения округлены с точностью до целых).

Используя данные диаграммы, ответьте на вопросы:
а) В какой из этих стран фильм посмотрело больше всего зрителей?
б) Найдите моду этих данных
в) Найдите размах этих данных.

г) Найдите среднее значение этого ряда данных.
д) Найдите медиану этого ряда данных.

521 Пользуясь информацией двух предыдущих заданий, ответьте на вопросы:

а) По каким странам можно провести сравнительный анализ данных за 2002 и за 2012 годы? Занесите эти данные в таблицу. Выясните, какой фильм вызвал больший интерес в каждой из них.

б) Выпишите числовые наборы данных кинопроката за 2002 и за 2012 годы. Дисперсия какого набора будет больше? Можно ли ответить на этот вопрос без вычислений?

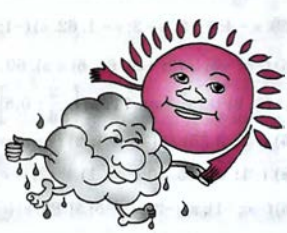
522 В Олином пенале лежат цветной и простой карандаши, линейка и три шариковых ручки разного цвета. Оля выложила их в ряд и начала раскладывать в разном порядке. Сколько различных вариантов расположения этих предметов могло получиться у Оли?

523 а) В фирме такси в данный момент свободно 20 машин, среди которых 12 иномарок. По вызову выехала одна из машин, случайно оказавшихся ближе всего к заказчику. Найдите вероятность того, что к нему приедет машина отечественного производства.

б) В сборнике экзаменационных билетов по геометрии всего 25 билетов, в двух из них встречается вопрос об окружности. На экзамене школьнику достаётся один случайно выбранный билет. Найдите вероятность того, что в этом билете не будет вопроса об окружности.

524 Ученика попросили назвать число от 1 до 100. Какова вероятность того, что он назовет

а) чётное число;
б) число, кратное трем;
в) число, кратное пяти?



525 За лето в Санкт-Петербурге было 69 пасмурных дней. Чему равна частота пасмурных дней, солнечных дней?

526 В таблице представлены результаты стрелков, показанные ими на тренировке. Кого из стрелков вы бы порекомендовали для участия в соревнованиях?

Стрелок	Число выстрелов	Число попаданий
Зоркин	60	39
Прицелкин	30	21
Промашкин	40	31

527 По статистическим данным, полученным от электролампового завода A, на каждые 1000 лампочек приходится 4 бракованные. По статистическим данным, полученным от электролампового завода B, на каждые 300 лампочек приходится 1 бракованная. Чему равны вероятности покупки исправной лампочки каждого из этих производителей? Лампочки какого завода вы бы приобрели? Поясните свой ответ.

Выполните итоговый тест для самостоятельной проверки знаний.

Ответы

1. 1) б) $\frac{x}{x-3}$; г) $\frac{1}{x^2-9}$; 2) Нет. 3) $x = \pm 3$. 4) $(-\infty; -3) \cup (-3; 3) \cup (3; +\infty)$. **3.** а) $(-\infty; +\infty)$; $(-\infty; 0) \cup (0; 4) \cup (4; +\infty)$; б) $\{4\}$; в) $\{2\}$. **5.** $\{1\}$. **7.** а) $\{-5; 0\}$; б) $\{0\}$; в) $\{-1; 2\}$; г) $\{-6; 2\}$; д) $\{3\}$; е) $\{-5\}$. **8.** а) $\{0\}$; б) $\{-1,5\}$. **9.** а) 4 км/ч; б) 50 км/ч. **10.** а) 21 км/ч; б) 7,5 км/ч. **11.** а) 9 дней; б) 9 ч, 18 ч. **12.** 1) $\frac{6}{x}-\frac{6}{x+3}=1$; 2) $\frac{324}{x}-\frac{324}{x+18}=1{,}5$; 3) $\frac{15}{x}-\frac{15}{x+30}=\frac{2}{3}$; 15 км/ч и 45 км/ч. **13.** 1) $\frac{45}{x}-\frac{45}{x+3}=0{,}5$; 2) $\frac{120}{x}-\frac{120}{x+20}=1$; 3) $\frac{60}{x}-\frac{60}{x+20}=0{,}5$; 40 км/ч, 60 км/ч. **14.** а) $\frac{a^{12}}{b^{16}}$; б) $-\frac{m^6s^{15}}{216a^9}$; в) $-\frac{8n^3}{9b^5}$. **15.** а) m; б) $-\frac{8}{b}$. **16.** а) $3x^2 + 5x + 4$; б) $x^4 - 5x^3 + 10x^2 - 23x + 41$ (ост. -80). **18.** а) $(\frac{1}{3}; -1)$; б) $(-5; -5)$; в) $(1; -1)$. **21.** а) $\{0; 7\}$; б) $\{0\}$; в) $\left\{-\frac{7}{8}; 0\right\}$; г) $\{-5; 4\}$; д) $\{-1\}$; е) $\{-\sqrt{2}; \sqrt{2}\}$. **22.** а) $\{1\}$; б) $\{2\}$. **23.** 40 км/ч. **24.** 24 км/ч. **25.** 8 дней. **27.** а) $-\frac{1}{b}$; б) $-\frac{11}{24p}$; в) $\frac{m^2-n^2}{m^2n^2}$; г) $\frac{x^2-6}{x(x^2-9)}$; д) $\frac{2k^3}{3d}$; е) $\frac{c+1}{cv^3}$; ж) $\frac{z+s}{5s}$; з) $\frac{a-d}{y+r}$; и) $\frac{1}{a-2b}$; к) $-\frac{y+2x}{x+2y}$; л) $\frac{1}{3a}$; м) a^2+1. **29.** $(-6; -3)$. **30.** а) 17,5 км/ч и 2,5 км/ч; б) 24 и 40 книг. **33.** $\left\{3\frac{5}{6}\right\}$. **34.** а) $\{12\}$; б) $\{-1; 3; 1\}$. **35.** а) $\left\{-1; 3; \frac{13+\sqrt{181}}{2}; \frac{13-\sqrt{181}}{2}\right\}$; б) $\{-1; 1; 3\}$. **36.** а) $\{-3; 3\}$; б) $\{4\}$. **39.** $(-16; 1; 13)$. **41.** а) $\{-1\}$; б) $\left\{\frac{-3-3\sqrt{5}}{2}; \frac{-3+3\sqrt{5}}{2}\right\}$. **42.** а) $\{1; 2\}$; б) $\{1; 2; -2; -7\}$. **43.** а) $\{-4; 4\}$; б) $\{2\}$. **51.** 1) $(-\infty; 6)$; $(-\infty; -2)$. **56.** а) $(-\infty; 0{,}5) \cup (0{,}5; +\infty)$; б) $\varnothing$; в) $\left\{-\frac{1}{3}\right\}$; г) $(-\infty; +\infty)$. **59.** а – 4; б – 2; в – 3; г – 1. **62.** а) $(-1; 1) \cup (1; +\infty)$; б) $(-\infty; -2)$; в) $[-3; 3] \cup \{9\}$. **63.** а) $(-\infty; -2) \cup (-0{,}5; +\infty)$; б) $(-\infty; -3] \cup [2; +\infty)$. **66.** б) и в). **69.** а) $(-\infty; 2) \cup \{6\} \cup (10; +\infty)$; б) $(-2; -1{,}5) \cup (-1; 1)$. **70.** $(-5; 0{,}5) \cup (2; 3) \cup (3; +\infty)$. **71.** а) $\left[-\frac{2}{3}; 0{,}5\right]$; б) $(0; 1) \cup (3; 4)$. **75.** а) $\{-3; 0\}$; б) $\{-1{,}25; 5\}$. **80.** а) $[-5; +\infty)$; б) $(-\infty; 3{,}25) \cup [7; +\infty)$; в) $(-\infty; +\infty)$; г) $(-\infty; 2) \cup (4; +\infty)$. **81.** а) $(-\infty; -0{,}5]$; б) $[-1; 0) \cup (0; +\infty)$; в) $(-1; 0]$; **85.** а) $(-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$; б) $(4; 5)$; в) $(-\infty; -0{,}5] \cup [2; +\infty)$; г) $\left[-3; \frac{1}{3}\right]$. **87.** а) $(2; +\infty)$; б) $(-\infty; -1)$; в) $\{-25\} \cup [-5; 5]$. **88.** а) $(-\infty; -1{,}4) \cup (1; +\infty)$; б) $(-\infty; 0{,}6] \cup [1; +\infty)$. **89.** а) $(-1; -0{,}5) \cup (0{,}5; +\infty)$; б) $(-\infty; 3]$. **92.** $[-2; -1) \cup (-1; 1] \cup [2; +\infty)$. **93.** а) $\left\{3\frac{2}{3}\right\}$; б) $\left\{-\frac{6}{13}; 0; \frac{8}{11}; 10\right\}$. **94.** а) $(-1; 3)$; б) $\{-5\}$. **96.** 3,65. **99.** а) $(-4; +\infty)$; б) $(-\infty; 3]$; в) $(-\infty; +\infty)$; г) $(-\infty; -3] \cup [4; +\infty)$. **100.** а) $2 < 5$; б) $-5 < -2$; в) $\sqrt{c} < 2\sqrt{c}$; г) Если $a \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$, то $a^2 < a^4$. Если $a \in (-1; 0) \cup (0; 1)$, то $a^2 > a^4$. **113.** 3 целых решения. **114.** а) $(-\infty; -4] \cup \left[2\frac{2}{3}; 4\right]$; б) $(-\infty; -3) \cup \{0{,}5\} \cup (3; +\infty)$. **115.** $a = 5$. **119.** а) $[5; 13]$; б) $(3; 4{,}2)$. **120.** а) $[-3; 2] \cup [6; 7]$; б) $(-\infty; 0)$. **121.** а) $[-6; 7]$; б) $(4; +\infty)$. **122.** а) 9,4; б) 8; в) 9. **126.** а) $\left(-\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right]$; б) $(-\infty; -0{,}5) \cup (0; 2) \cup (3; +\infty)$; в) $(-\infty; -7) \cup [-0{,}25; 0] \cup \{3\} \cup (4; +\infty)$. **127.** а) $[1; 3{,}5)$; б) $(-7; 2] \cup [4; 7]$. **128.** а) 10,8; б) 10; в) 11. **132.** а) 6,5 и 6; б) 12,5 и 10; в) 100 и 100; г) 44 и $11\sqrt{15}$. **136.** Наибольшее значение $\frac{1}{19}$ (при $x = 3$). **142.** а) 15 и 12; б) 20 и 16; в) 25 и 15; г) 277,5 и 222. **143.** 8 при $x = \pm\sqrt{2}$. **144.** $\frac{1}{3}$ при $x = 1$. **149.** а) $(-\infty; 0) \cup (0; 5) \cup (5; +\infty)$; б) $\left(-\infty; -\frac{2}{3}\right) \cup \left(-\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$; в) $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$; г) $(-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$.

150. а) $\frac{5a^3}{9b}$; б) $\frac{3}{m-3}$; в) $\frac{n-6}{2n}$; г) $\frac{1}{t-2}$. **152.** а) $-\frac{6}{p^4}$; б) $\frac{q+s}{5}$; в) $p^4(p+3)$; г) $\frac{3b+2a}{2}$; д) $y^2-4y+16$; е) $\frac{z}{2(z-3)}$. **153.** $4\sqrt{5}$. **154.** а) $\{-5; -2; -1; 0; 2; 3; 4; 7\}$; б) $\{-10; -6; -4; -3; -1; 0; 2; 6\}$. **155.** а) $\{0; 7\}$; б) $\left\{-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}; -\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right\}$; в) $\{1\}$. **158.** а) 13 км/ч; б) 10 км/ч; в) 3 км/ч; г) 15 ч; д) 40 км/ч. **159.** $\{-1; 5; 2-\sqrt{7}; 2+\sqrt{7}\}$. **160.** а) $\{4; 5\}$; б) $\left\{-\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; 7\right\}$. **162.** (8; 12). **163.** [0; 8]. **164.** а) $(-\infty; 1) \cup (1; 4) \cup (7; +\infty)$; б) $(-\infty; -1] \cup \{3\} \cup [5; +\infty)$. **166.** а) [1,5; 2); б) $(-\infty; 2) \cup [3; 5)$. **168.** 24 при $x = 2$; -2. **169.** а) 2; б) 6; в) 24. **174.** 15. **175.** 12. **177.** а) 120; б) 36. **178.** а) 24; б) 14. **179.** 21. **180.** 11. **181.** а) 8; б) 144; в) 96. **182.** а) 6720; б) 360; в) 64. **189.** а) 40; б) 24. **190.** а) 42; б) 12; в) 720. **191.** 6. **194.** 20. **195.** $\{-7; 1\}$; б) $\{-2; -3\}$; в) $\{-2; -0,5\}$. **199.** 1) а) 35; б) 12. **200.** 210. **201.** 100. **203.** 1) 350. **207.** 256; 65 536. **208.** а) 8; б) 1024. **209.** а) 16; б) 512. **210.** 43. **211.** 1) 155. **212.** 4096. **215.** 45 936. **216.** 6. **217.** а) чётная; б) ни чётная, ни нечётная; в) нечётная; г) чётная. **220.** а) 0,12; б) 0,1; в) $4+2\sqrt{6}$; г) $\sqrt{7}+2$; д) $\sqrt{10}$; е) $\sqrt{2}$; ж) 2; з) 19; и) 17; к) 0,001; л) $-\sqrt{6}$; м) 6,3. **221.** 552. **222.** а) 24; б) 256. **223.** 64. **224.** 720. **226.** а) (1; 6); (3; 2); б) (2; 0). **227.** $\sqrt{1\frac{17}{64}}$; $\sqrt{1\frac{7}{9}}$; $\frac{\pi}{2}$; $\sqrt{9}$; $2\sqrt{6}$; $6\sqrt{2}$. **233.** а) 6; б) 24; в) 120; г) 720; д) 30; е) 27; ж) 2880; з) 480. **234.** 24. **235.** 3 628 800. **236.** 720. **240.** а) $[-0,8; 0]$; б) $\left(-2\sqrt{3}; 2\sqrt{3}\right)$; в) $\{-1\} \cup [6; +\infty)$. **241.** 1) 720; 214; 2) 704; 204; 3) 254; 186. **242.** а) $\{9\}$; б) $\{0; 6\}$; в) $\{-11\}$; г) $\{0, -9\}$. **243.** а) 6; б) 6. **245.** 87 178 291 200. **247.** а) $\{5\}$; б) $\{0; 4\}$. **251.** 2) а) 15; 15; б) 30; 30. **253.** а) $13\frac{1}{6}$; $6\frac{2}{9}$; б) $20\frac{1}{3}$; $1\frac{5}{9}$. **258.** а) 4,25; б) 6,25. **259.** $x_2 = \sqrt{5}-3$; $c = 8-4\sqrt{5}$. **262.** $(16; +\infty)$. **263.** $\left\{2; 0; -\frac{2}{3}\right\}$. **264.** $\left(-\infty; -1\frac{1}{9}\right) \cup (2; +\infty)$. **265.** 1) а, в; 2) а, б, в, г, е; 3) г; 4) а, б, в; 5) а, б, в, д; 6) а. **267.** а) 110; б) 1080; г) 125. **269.** 162 000; 120 000; 120 000. **270.** а) $\{-10; -2\}$; б) $\{-2; 6\}$; в) $\varnothing$. **271.** 25. **273.** 10 м; 9 м. **274.** $(-\infty; -9)$. **293.** а) 300; 111; б) 85; 165. **297.** $a \in (-4; 4)$. **299.** а) $\frac{a-6}{a+6}$; б) $\frac{3-t}{9+3t+t^2}$; в) $\frac{d-8}{d-7}$; г) $\frac{c+5}{c-8}$. **300.** а) $\frac{8m}{15(d-3)}$; б) $-\frac{25k^2}{n(n^2-25k^2)}$; в) $\frac{b+1}{b^2+b+1}$. **301.** −1. **302.** а) $\frac{\left(\sqrt{m}+\sqrt{n}\right)^2}{m-n}$; б) m. **305.** а) 500; б) 171. **308.** при $a \in (-5; 3)$. **309.** а) $\frac{b+7}{b-7}$; б) $\frac{a^2+5a+25}{a-5}$; в) $\frac{k-8}{k-9}$; г) $\frac{m-5}{m-3}$. **310.** а) −1; б) $-d$. **313.** 1) случайное; 2) достоверное; 3) невозможное; 4) невозможное; 5) достоверное; 6) случайное. **318.** $\frac{1}{3}$. **319.** 1) а) 0,4; б) 0,6; 2) а) $\frac{6}{11}$ б) $\frac{5}{11}$. **321.** а) 0,5; б) 0,125; в) 0,375; г) 0; д) 1; е) 0,5; ж) 0,875; з) 0,625. **322.** 0,08. **323.** а) 0,05; б) 0,175. **324.** а) 0; б) $\frac{1}{30}$; в) 0,4; г) $\frac{17}{30}$. **325.** а) 0; б) $\frac{1}{216}$; в) 1; г) 0; д) $\frac{1}{72}$; е) $\frac{5}{108}$. **326.** а) 0; б) 1; в) 0; г) 0,2; д) 0; е) 0,4; ж) 0. **327.** 0,5. **329.** $a=-12, a=2$. **330.** а) 3 км/ч; б) 10 дней и 15 дней. **331.** а) ±1; ±6; б) $\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$; 3; $\frac{1}{3}$; в) 1; 2. **332.** а) $\{1\} \cup (2; +\infty)$; б) $(-\infty; 5) \cup (12; +\infty)$; в) $(-\infty; -5) \cup (-5; -4] \cup (1; 9]$; г) $(-5; -2) \cup (3; 5)$. **334.** 10 при $x=-2$, $x=2$. **335.** Нет; 3 красных и 3 синих. **337.** $\frac{5}{16}$. **338.** $\frac{7}{11}$. **339.** $\frac{13}{15}$. **340.** а) $\frac{1}{12}$; б) $\frac{5}{36}$; в) $\frac{7}{12}$; г) $\frac{1}{3}$; д) $\frac{1}{18}$; е) $\frac{1}{18}$.

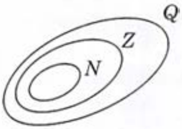
341. а) $\frac{7}{50}$; б) $\frac{1}{20}$. **342.** а) $\frac{1}{31}$; б) $\frac{10}{31}$; в) $\frac{5}{31}$. **343.** 0,5. **344.** а) −2; 50; б) 0; в) −4; −2; −1; 1. **345.** 20 км/ч. **349.** а) 24; б) 120. **350.** а) 21; б) 720. **351.** 210; 35. **352.** а) 2880;б) 625. **353.** 5040. **354.** а) 720; б) 120. **355.** а) 6^4; б) 4^6. **356.** б) 11 110. **357.** а) 0,625; б) 1,75; уменьшится. **358.** а) $\frac{1}{9}$; б) $\frac{1}{51}$; в) $\frac{2}{15}$. **359.** $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{5}$. **360.** $\frac{1}{200}$; 1. **378.** а) (−6; 0); б) (−2; 1). **379.** а) {−5; 1,5}; б) {−4; 10}. **380.** 10 мин. **398.** 25. **402.** а) 0,5; б) 1,12; в) −0,4. **403.** а) $\frac{a(a-b-c)}{2}$; б) 2. **404.** −0,75. **405.** $7\frac{26}{27}$. **406.** а) 60 км/ч; б) 5 км/ч. **408.** (2;3,5]; б) (−∞;2). **409.** а) [1; 7]; б) $(-\infty; -1] \cup [7; +\infty)$; в) $\left(0; 1\frac{1}{7}\right)$; г) $\left(\frac{11}{16}; +\infty\right)$. **412.** В 14 часов. **413.** $\frac{1}{m-7}$. **421.** а) $\frac{m}{8}$; б) $\frac{1}{a-3}$; в) $\frac{b-6}{b-4}$. **422.** а) 4; б) $\left\{0; \frac{-9\pm2\sqrt{3}}{3}\right\}$; в) {−5; 1}; г) {−2; −0,125}; д) {−1; 1}; е) {1; 3}. **423.** 500 метров. **424.** При $p = 3$; $x = 1$. **428.** а) $\frac{1}{9a^2}$; б) $\frac{c+4}{c^2-4c+16}$; в) $\frac{d+3}{d+10}$. **429.** а) {−2; 8}; б) $\left\{\frac{-3\pm\sqrt{41}}{2}; \frac{-3\pm\sqrt{17}}{2}\right\}$. **430.** 1 км. **432.** Все конфеты будут у Деда Мороза. **447.** ± 6. **448.** −1; 8; $\frac{1\pm\sqrt{33}}{2}$. **449.** 448 км. **451.** а) $(-\infty; -1) \cup (-1; 0) \cup (0; +\infty)$; б) $(-\infty; -4) \cup (-4; +\infty)$; в) $(-\infty; -3) \cup (-3; +\infty)$. **455.** 56 км. **458.** а) достаточно; б) необходимо и достаточно. **461.** Борисов. **463.** а) $\left(0; -2\frac{2}{3}\right)$; б) (5; 9); в) $\left(6; \frac{2}{3}\right)$; г) (2; 1). **464.** а) 38 и 42 книги; б) 84; в) 39 100 м²; г) $v_{соб.} = 18$ км/ч; $v_{т.} = 2$ км/ч. **465.** а) [−1,5; 2); б) (−∞; −0,8]; в) (−7; 20). **466.** а) (−2,5; +∞); б) $\left(1; 4\frac{8}{9}\right)$. **467.** (3; 2); (−5; 2). **468.** $(-\infty; 7{,}5) \cup (7{,}5; +\infty)$. **473.** а) $y = \frac{1{,}6}{x}$; б) $y = -\frac{18}{x}$; в) $y = \frac{22}{x}$. **474.** а) (1; −7); (7; −1); б) (1; 4); (−1; −4). **477.** $\frac{1}{3}$; 0,5; 4; $\frac{1}{9}$; 0; $\frac{1}{16}$. **478.** а) −0,25; −8; −0,125; 0; 1,5; 3; −0,8; $-\frac{2}{3}$; в) $y_{наиб.} = 4$; $y_{наим.} = -8$. **479.** а) 30; б) 0,9; в) 16; г) 27; д) 91; е) 0,2; ж) 1,5;з) 10. **480.** а) 76; б) 44;в) 0,75; г) 8; д) − 84; е) 60. **481.** а) $x - 6$; б) $(0{,}4 - x)\sqrt{2{,}5}$. **482.** а) $\sqrt{18}$; б) $\sqrt{15}$; в) $\sqrt{8}$; г) $\sqrt{ab}$; д) $\sqrt{\frac{a}{4c}}$. **483.** а) $\sqrt{5}$; б) $\frac{2\sqrt{5}}{3}$; в) $2 - \sqrt{3}$; г) $\frac{13-5\sqrt{5}}{2}$; д) $-\frac{\sqrt{6}+2\sqrt{3}+3\sqrt{2}}{4}$. **484.** а) 33; б) 7; в) 1; г) $13\sqrt{3}$. **485.** а) {0; 4}; б) {−2; 1}; в) {4}; г) ∅. **487.** 1) ∅; 2) 1; 3) ∅; 4) ∅. **488.** а) {a; $2a$}; б) {$-a$; $2a$}. **489.** а) $\{a-b; a+b\}$; б) $\{2a; 2b\}$. **493.** а) 24 и 25; б) 36 см; в) 14 м. **496.** а) (4; − 9); б) (− 2; − 1); в) (0,5; 2). **499.** а) [−2; 1]; б) $\left(-\infty; -\frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$. **505.** а) $\frac{5x^4}{a(a+b)}$; б) $\frac{a-b}{8b^2}$. **507.** а) 4ч и 5 ч; б) 250 км/ч и 300 км/ч; в) 3 км/ч; г) $\frac{2}{5}$; д) 180 м и 240 м; е) 12 ч и 18 ч. **510.** а) {4}; б) {4}. **511.** а) (1; 2); б) $(-\infty; 1) \cup \left(1\frac{1}{3}; +\infty\right)$; в) [−2; −0,5]; г) $(-\infty; -3] \cup [4; +\infty)$; д) $(-\infty; -1) \cup \left(\frac{2}{7}; +\infty\right)$; е) [−6; 1]. **512.** а) $(-\infty; -1) \cup [4; +\infty)$; б) $(-\infty; 0) \cup [2; 3]$. **515.** $(-\infty; -8{,}5) \cup (-2{,}2; +\infty)$. **516.** а) $(-4; -1) \cup (2; 3)$; б) (2; 5); в) [1; 4]. **517.** 41; 52; 63. **522.** 720. **523.** а) 0,4; б) 0, 92. **524.** а) 0,5; б) 0,33; в) 0,2. **525.** 0,75; 0,25. **526.** Промашкин. **527.** $\frac{249}{250}$ и $\frac{299}{300}$; завода B.

Предметный указатель

Оглавление

* – звездочкой помечены пункты, содержание которых выходит за рамки программы базового курса математики

ЧИСЛОВЫЕ МНОЖЕСТВА



$N = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$ — множество натуральных чисел

$Z = \{\dots -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ — множество целых чисел

$Q = \{\frac{p}{q}$, где $p \in Z, q \in N\}$ — множество рациональных чисел

$$N \subset Z \subset Q$$

Основные свойства сложения и умножения

$a + b = b + a$ и $a \cdot b = b \cdot a$	переместительное свойство
$(a + b) + c = a + (b + c)$ и $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$	сочетательное свойство
$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$	распределительное свойство

Перевод обыкновенной дроби в десятичную

1. Любую обыкновенную дробь можно записать в виде конечной десятичной или бесконечной периодической десятичной дроби. Для этого можно числитель дроби разделить на знаменатель.

$$\frac{7}{250} = 0{,}028 \qquad \frac{8}{11} = 0{,}727272\dots = 0{,}(72) \qquad \frac{5}{12} = 0{,}4166666\dots = 0{,}41(6)$$

2. *Несократимую* обыкновенную дробь можно записать в виде конечной десятичной тогда и только тогда, когда знаменатель дроби не имеет простых делителей, отличных от 2 и 5.

$$\frac{7}{250} = \frac{7}{2 \cdot 5^3} = 0{,}028$$

Перевод десятичной дроби в обыкновенную

1. Чтобы *конечную десятичную дробь* перевести в обыкновенную, можно записать эту дробь в числителе, отбросив запятую, а в знаменателе записать единицу со столькими нулями, сколько цифр справа от запятой.

$$0{,}028 = \frac{28}{1000} = \frac{7}{250}$$

2. Чтобы *бесконечную периодическую десятичную дробь* перевести в обыкновенную, можно:
   1) из числа, стоящего до второго периода, вычесть число, стоящее до первого периода, и записать эту разность в числитель;
   2) в знаменателе записать цифру 9 столько раз, сколько цифр в периоде, и после девяток записать столько нулей, сколько цифр между запятой и первым периодом.

$$0{,}(72) = \frac{72 - 0}{99} = \frac{72}{99} = \frac{8}{11} \qquad 0{,}41(6) = \frac{416 - 41}{900} = \frac{375}{900} = \frac{5}{12}$$

Правила сравнения рациональных чисел

1. Любое положительное число больше 0 и больше любого отрицательного числа.
2. Любое отрицательное число меньше 0 и меньше любого положительного числа.
3. Из двух отрицательных чисел больше то, модуль которого меньше.

Стандартная форма записи числа

Большие числа удобно записывать в **стандартном виде:**

$$a \cdot 10^n, \text{ где } 1 \leqslant |a| < 10,\ n \in N$$

$1\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000 = 1 \cdot 10^{24}$ $\qquad$ $6370\,000 = 6{,}37 \cdot 10^6$

УРАВНЕНИЯ

Решить уравнение — это значит найти все значения входящих в него переменных, при которых равенство становится верным. Эти значения переменных называют **корнями** уравнения.

Правила равносильных преобразований неравенств

1. Если к обеим частям уравнения прибавить или вычесть одно и то же число, то получится уравнение равносильное данному.
2. Если обе части уравнения умножить или разделить на одно и то же число, отличное от нуля, то получится уравнение, равносильное данному.
3. Слагаемое можно переносить из одной части уравнения в другую, меняя при этом его знак на противоположный (правило переноса).

Решение линейного уравнения

Линейным уравнением с одной переменной x называется уравнение, которое имеет вид $kx + b = 0$, где k, b — некоторые числа.

Алгоритм решения линейного уравнения с одним неизвестным

$kx > c$, где $k, c \in Q$

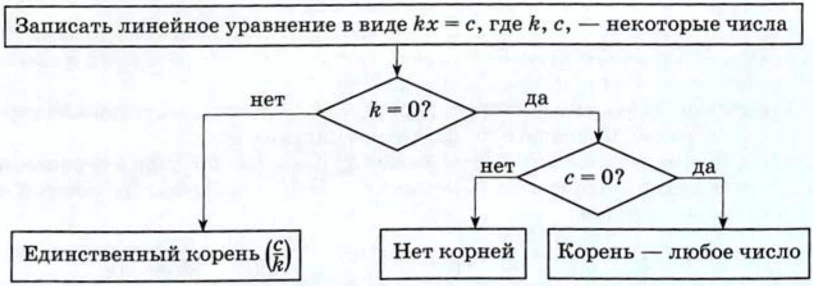


Таблица квадратов двузначных чисел

Десятки	Единицы									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361
2	400	441	484	529	576	625	676	729	784	841
3	900	961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521
4	1600	1681	1764	1849	1936	2025	2116	2209	2304	2401
5	2500	2601	2704	2809	2916	3025	3136	3249	3364	3481
6	3600	3721	3844	3969	4096	4225	4356	4489	4624	4761
7	4900	5041	5184	5329	5476	5625	5776	5929	6084	6241
8	6400	6561	6724	6889	7056	7225	7396	7569	7744	7921
9	8100	8281	8464	8649	8836	9025	9216	9409	9604	9801

Учебное издание

Петерсон Людмила Георгиевна
Агаханов Назар Хангельдыевич
Петрович Александр Юрьевич
Подлипский Олег Константинович
Рогатова Марина Викторовна
Трушин Борис Викторович

АЛГЕБРА

8 класс
Учебник
(в 3 частях)
Часть 3

Научный редактор ***Д. Л. Абраров***
Ведущий редактор ***Н. А. Шихова***
Художники ***П. А. Северцов, С. Ю. Гаврилова, А. Ю. Горнов***
Оформление ***Н. А. Новак***
Технический редактор ***Е. В. Денюкова***
Компьютерная верстка ***Р. Ю. Шаповалов***
Корректор ***Е. Н. Клитина***

Налоговая льгота — Общероссийский классификатор продукции ОК 005-93—953000. Изд. лиц. Серия ИД № 05824 от 12.09.01. Подписано в печать 18.11.2020. Формат 84х108/16. Объем 9,0 печ. л. 15,12 усл. печ. л. Бумага офсетная. Печать цифровая. Гарнитура Школьная. Тираж 600 экз. Заказ № 62701СМ.

Акционерное общество «Издательство «Просвещение»
Российская Федерация, 127473, г. Москва, ул. Краснопролетарская, д. 16, стр. 3, этаж 4, помещение I.

Предложения по оформлению и содержанию учебников — электронная почта «Горячей линии» — fpu@prosv.ru.

Отпечатано в России

Отпечатано в филиале «Смоленский полиграфический комбинат»
АО «Издательство «Высшая школа». Российская Федерация,
214020, г. Смоленск, ул. Смольянинова, 1.
Тел.: +7(4812) 31-11-96. Факс: +7(4812) 31-31-70.
E-mail: spk@smolpk.ru http://www.smolpk.ru

ИЗДАТЕЛЬСТВО
БИНОМ

Алгебра

ISBN 978-5-09-080502-5
9 785090 805025