

V 1975

9

3

2

TY 19-32-73

0

1

ДИА  ИЛЬМ

07-3-121

По заказу Министерства просвещения РСФСР

# СТЕПЕННАЯ ФУНКЦИЯ С ЦЕЛЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

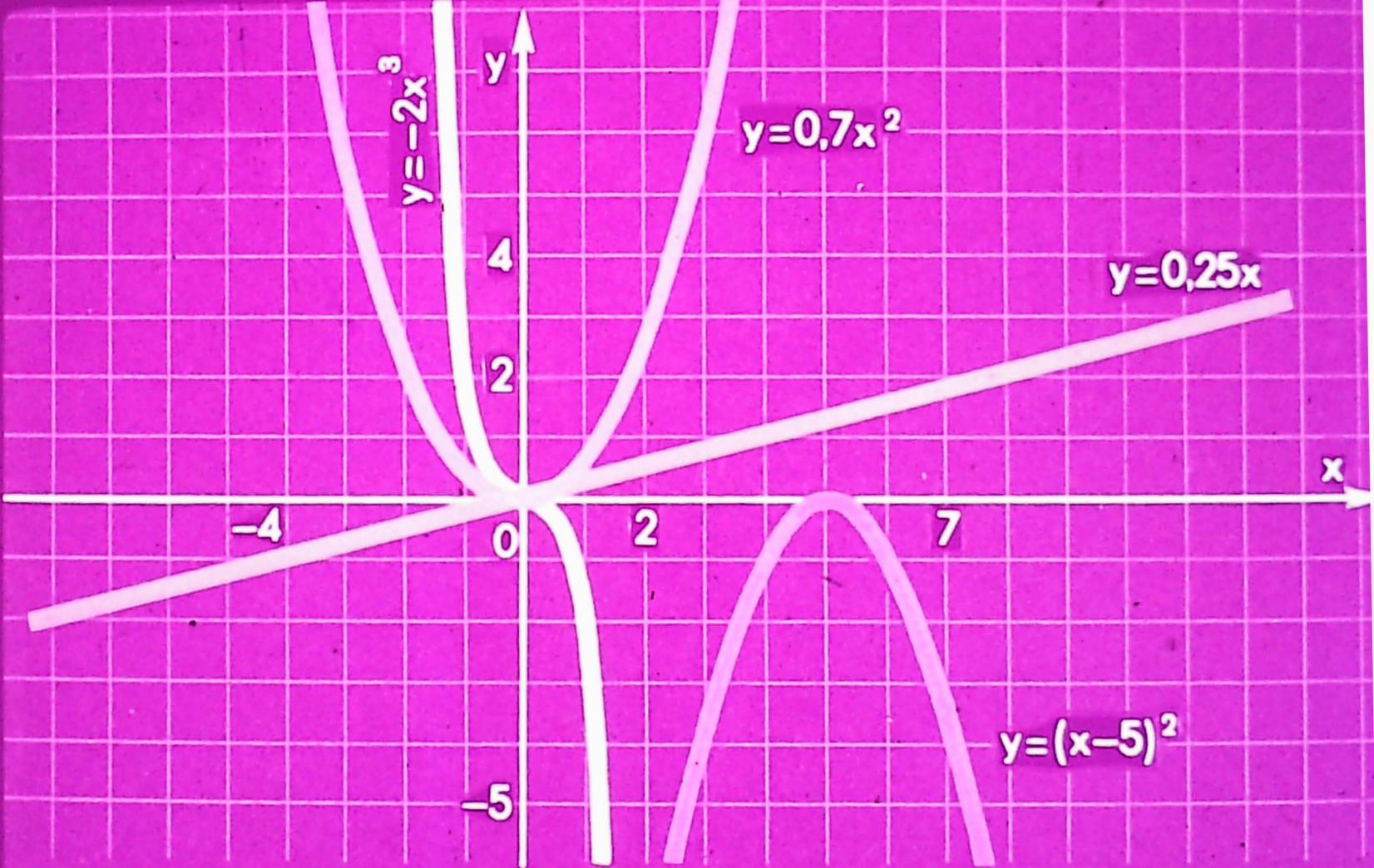
Диафильм по математике для средней школы

# I Определение степенной функции.

## Свойства графика степенной функции с целым показателем

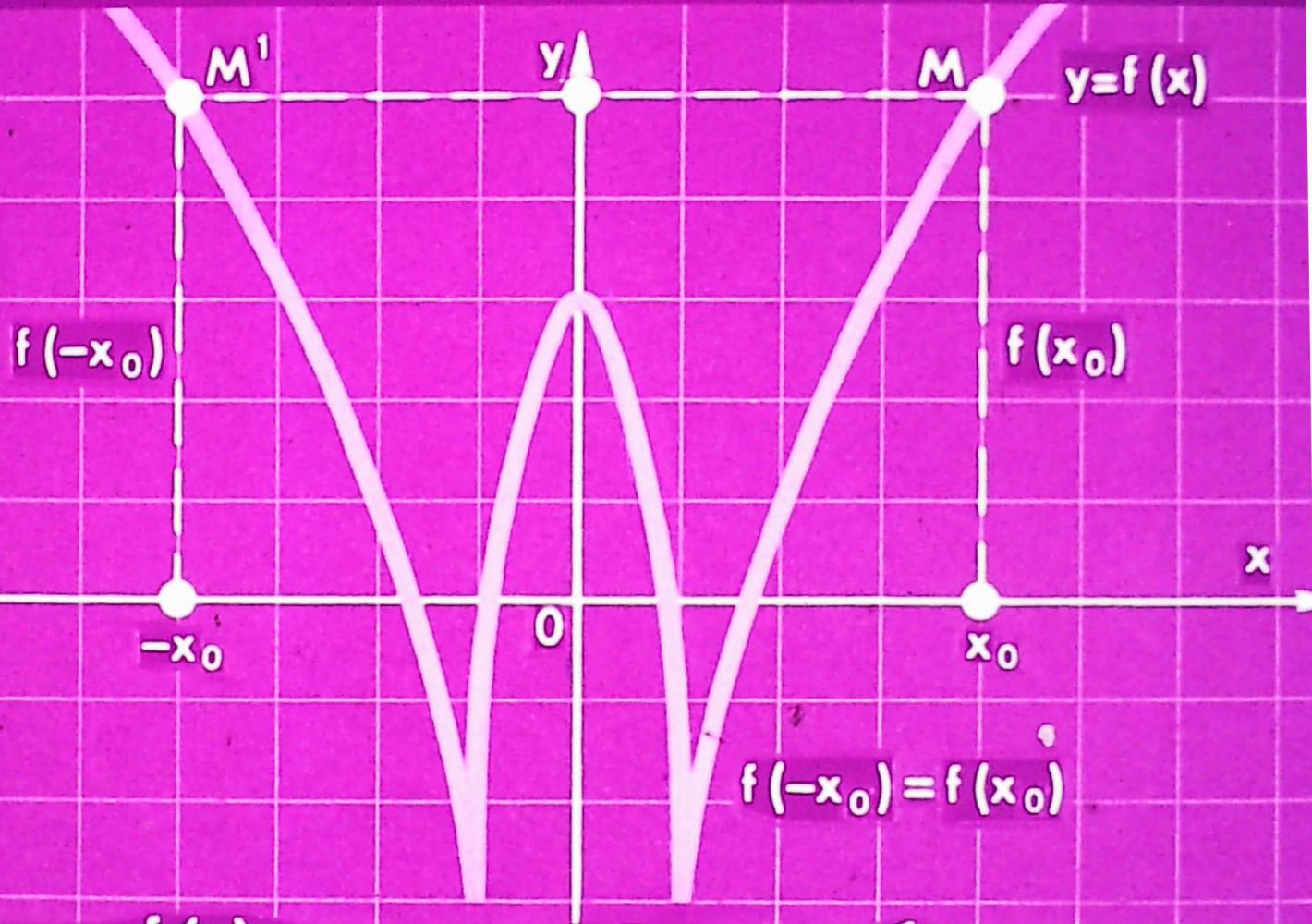
С помощью уравнений  $S=vt$ ;  $S=\frac{1}{2}qt^2$ ;  $F=\gamma m_1 m_2 r^{-2}$  и ряда других выражаются процессы, изучаемые в физике. Эти уравнения имеют вид  $y=ax^n$ .

Функция, которую можно задать уравнением вида  $y=ax^n$ , где  $a$  и  $n$ —заданные числа, причём  $n$ —целое, а  $x$  и  $y$ —переменные, называется степенной функцией с целым показателем.



Какие из функций, графики которых здесь изображены, степенные? Дайте объяснение.

4



Функцию  $f(x)$ , для которой при любых значениях аргумента  $x$  выполняется тождество  $f(-x)=f(x)$ , называют чётной. Докажите, что график чётной функции симметричен относительно оси  $y$ , и наоборот.

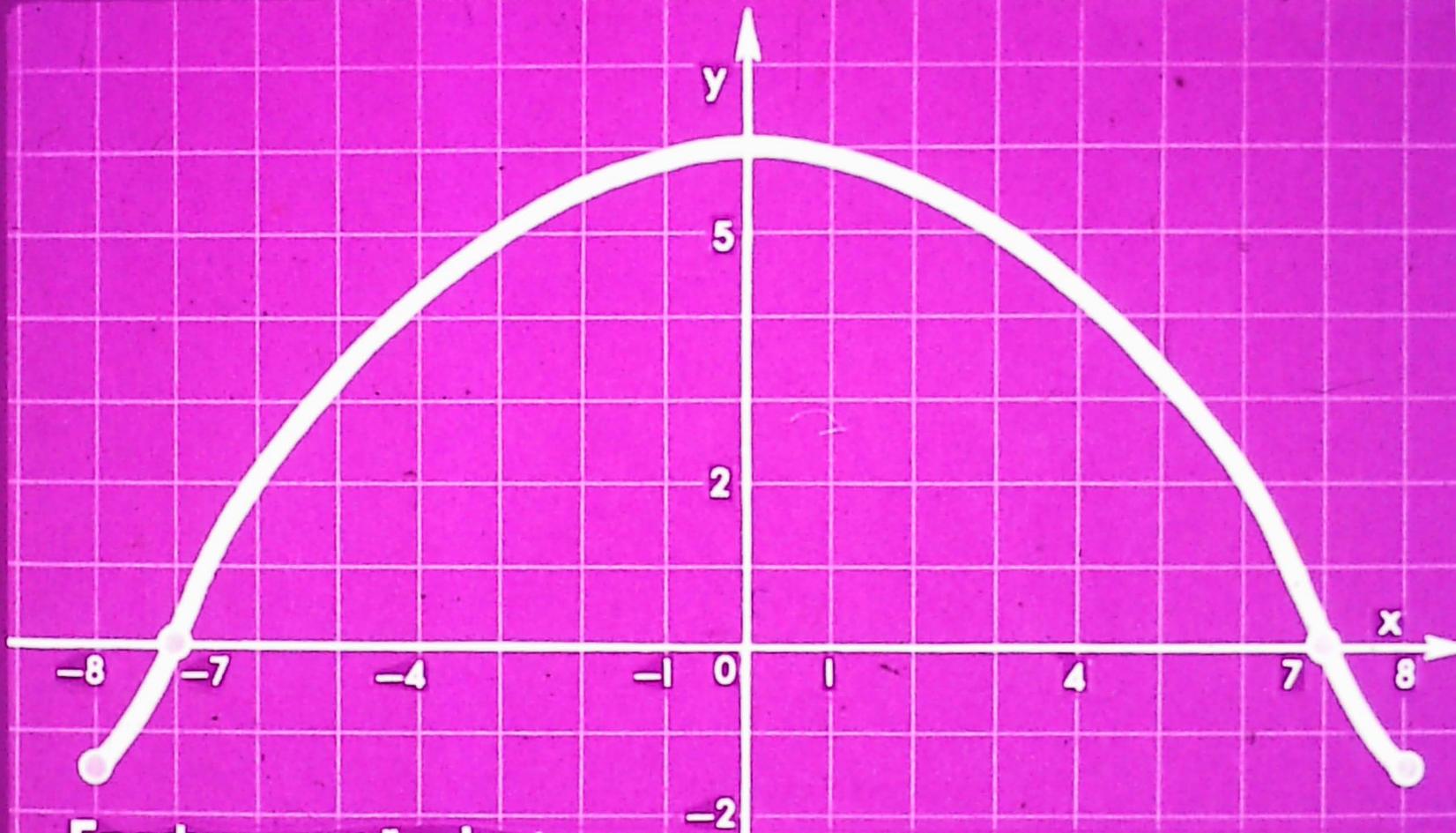
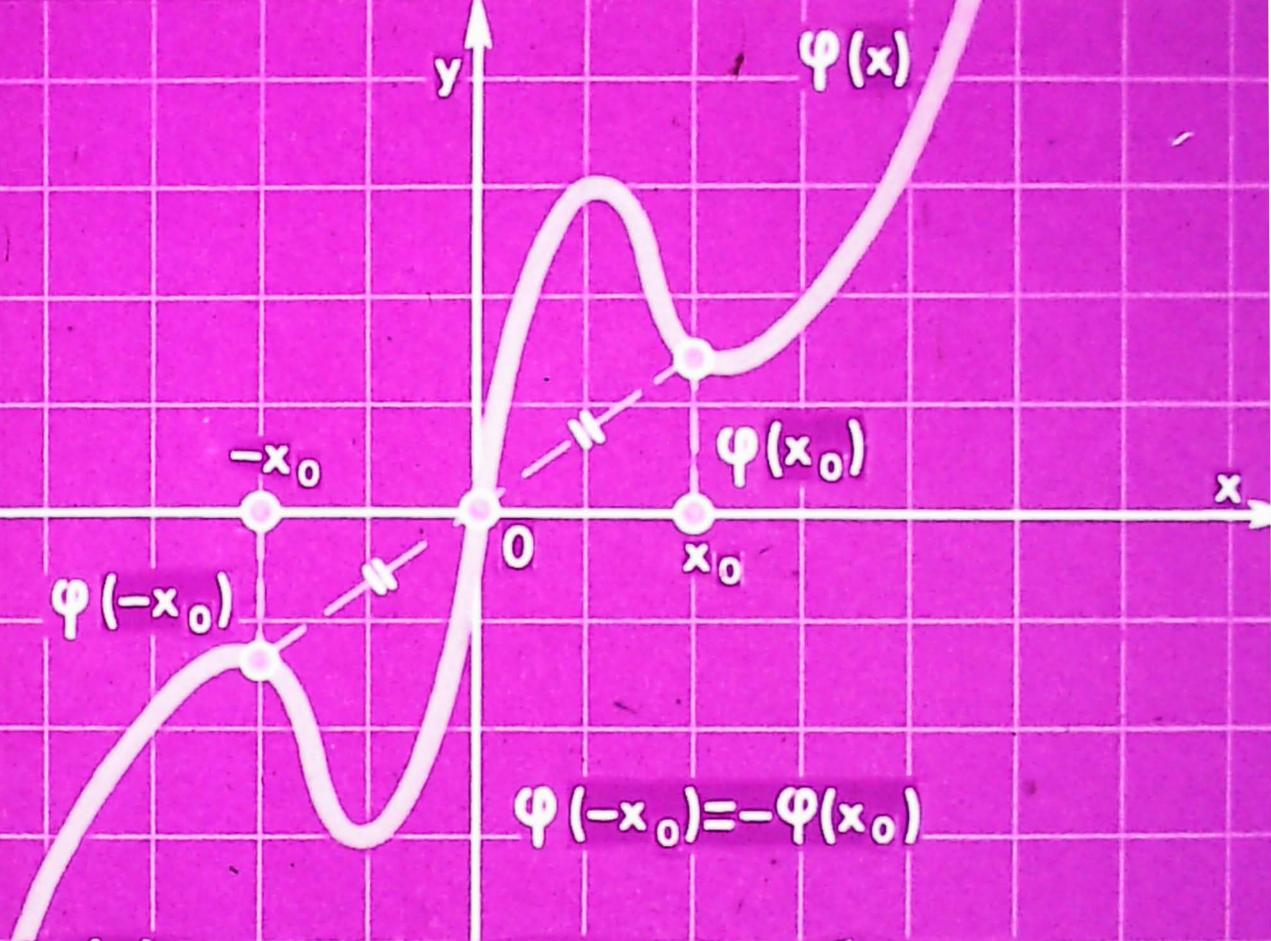


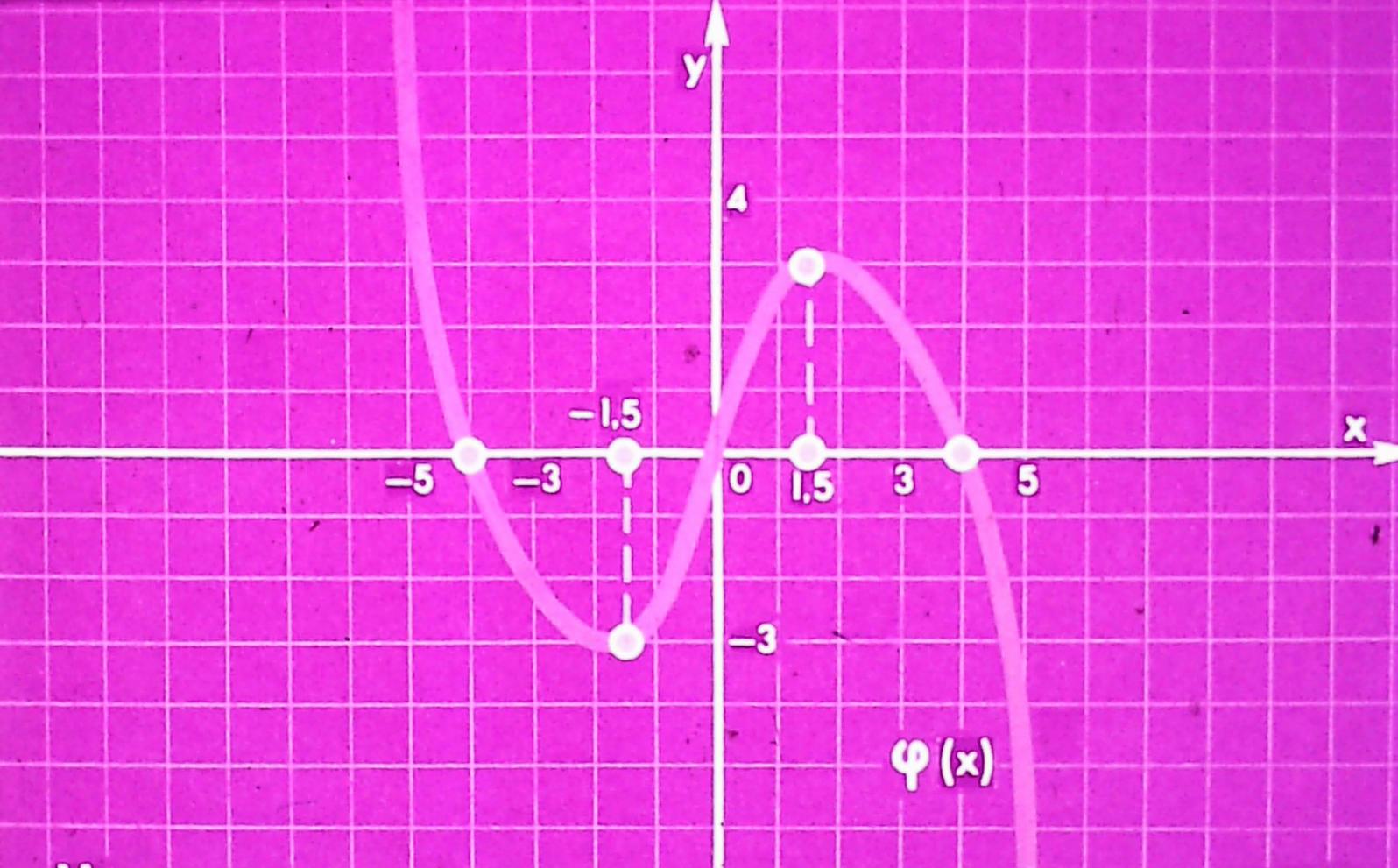
График этой функции симметричен относительно оси  $y$ . Рассматривая функцию при  $-8 \leq x \leq 8$ , назовите промежутки или точки, в которых  $f(x)=0$ ;  $f(x)>0$ ;  $f(x)<0$ ;  $f(x)$  убывает. Сравните свойства этой функции при  $0 \leq x \leq 8$  и при  $-8 \leq x \leq 0$ .



Здесь изображена лишь часть графика чётной функции  $y=f(x)$ , которая определена в промежутке  $-9 \leq x \leq 9$ . Перечислите основные свойства этой функции (сначала для  $0 \leq x \leq 9$ , затем для  $-9 \leq x < 0$ ). Принадлежат ли графику точки: А (3; 6), В (-3; 6), С (-1; 0), D (9; 0)?

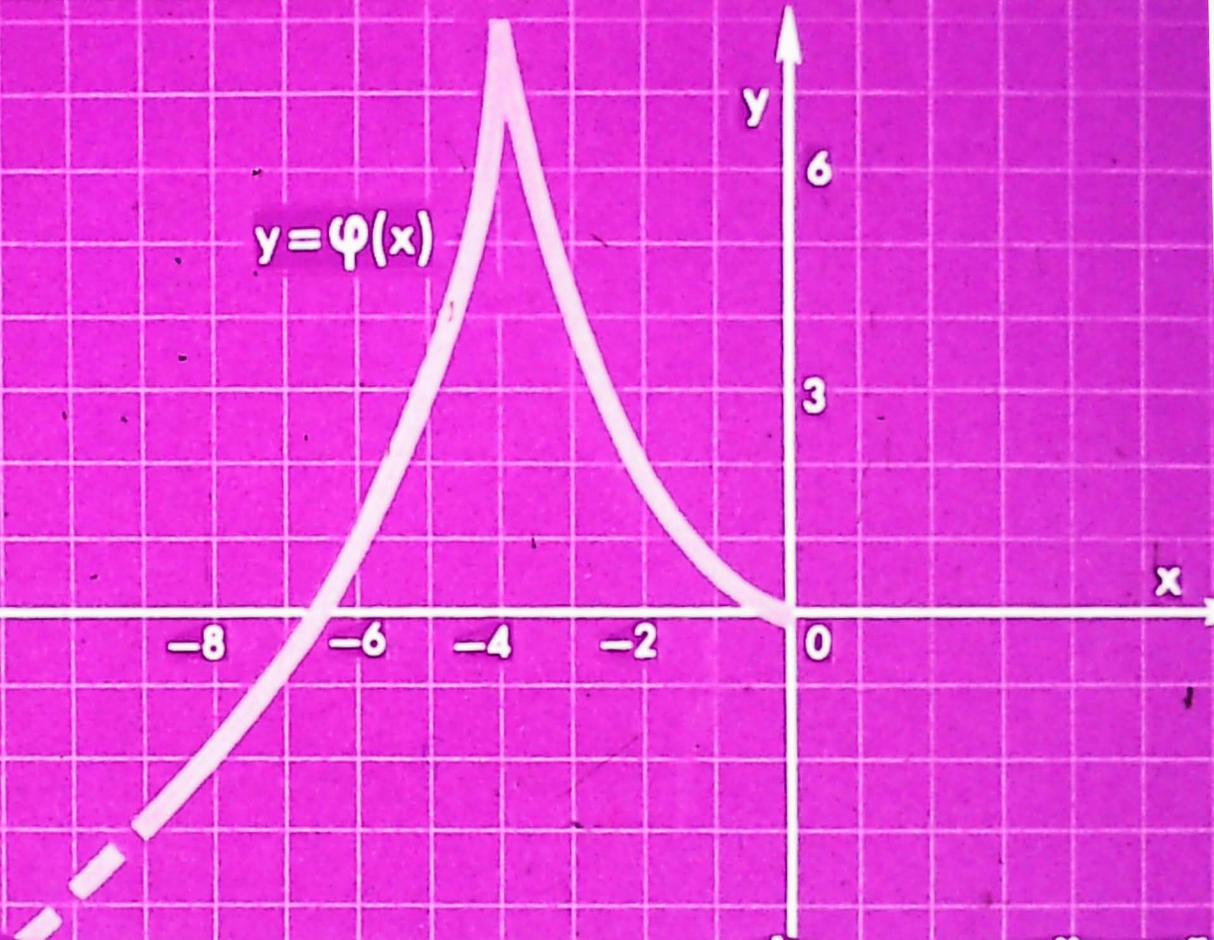


Функцию  $\varphi(x)$ , для которой при любых значениях аргумента  $x$  выполняется тождество  $\varphi(-x) = -\varphi(x)$ , называют нечётной. Докажите, что график нечётной функции симметричен относительно начала координат, и наоборот.



Назовите промежутки или точки, в которых нечётная функция  $\varphi(x) = 0$ ,  $\varphi(x) < 0$ ,  $\varphi(x) > 0$ ,  $\varphi(x)$  убывает; возрастает. Сравните свойства этой функции при  $x > 0$  и при  $x < 0$ .

$$y = \varphi(x)$$



Здесь изображена лишь часть графика нечётной функции  $y = \varphi(x)$ , определённой на множестве действительных чисел. Перечислите основные свойства этой функции. Принадлежат ли графику точки: К (4; -8), М (-8; -2), Р (8; 2), Q (4; 0)?

$$y=0,5x^2$$

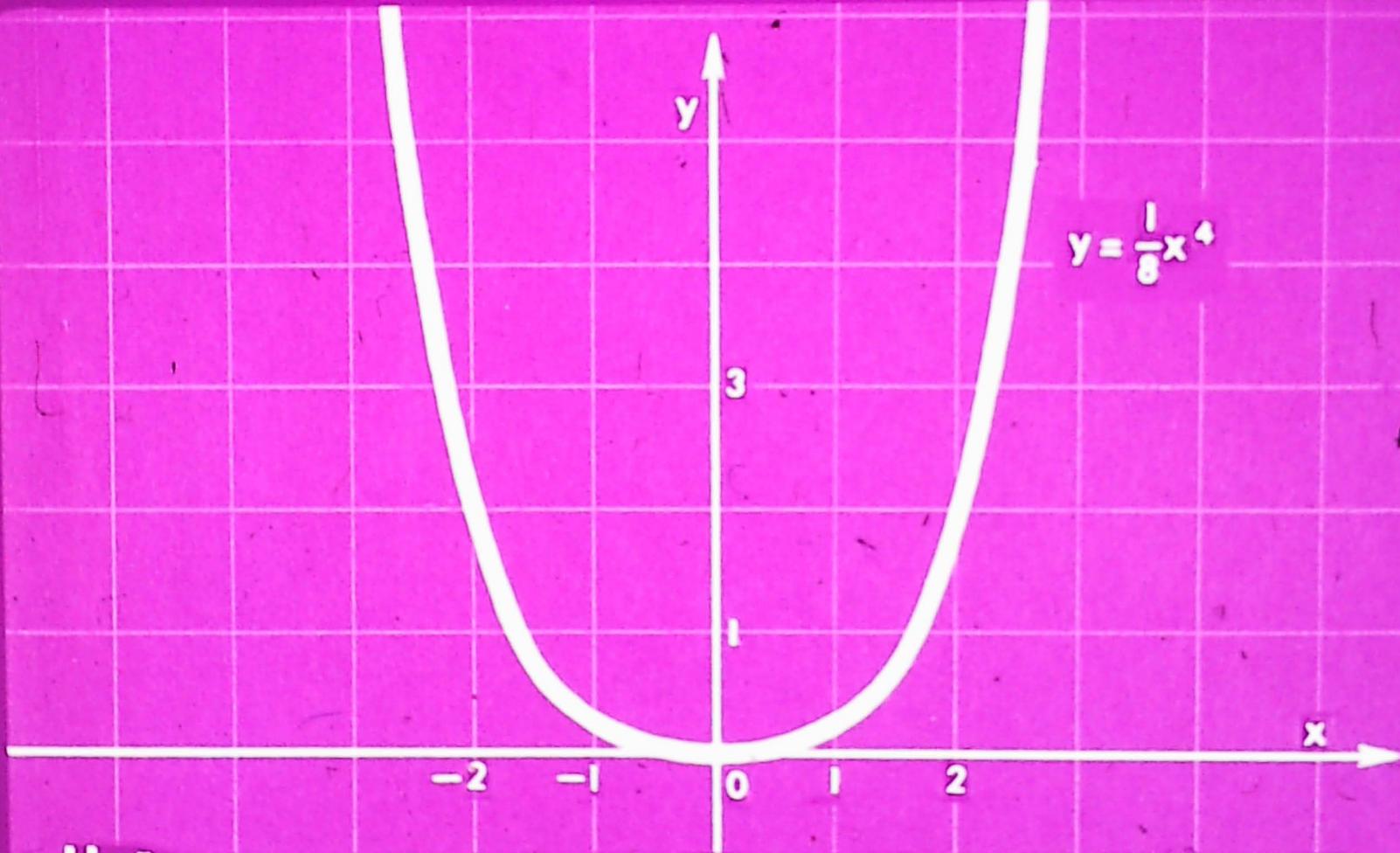
$$y=\frac{1}{4}x^5$$

$$y=1,5x-6$$

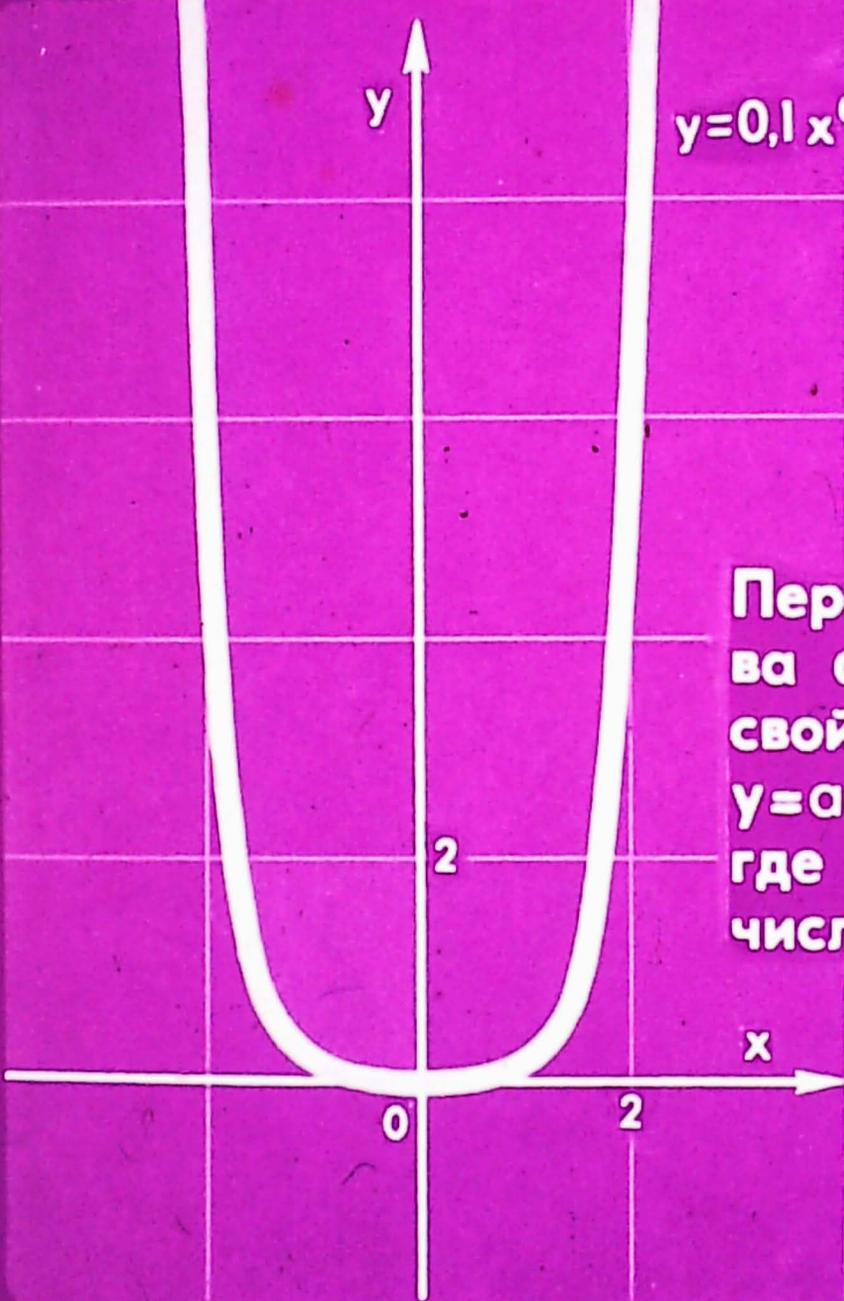
$$y=x^3-3x$$

Какие из этих функций степенные? Какие из них чётные, какие нечётные, какие не относятся к чётным или нечётным? Дайте объяснение.

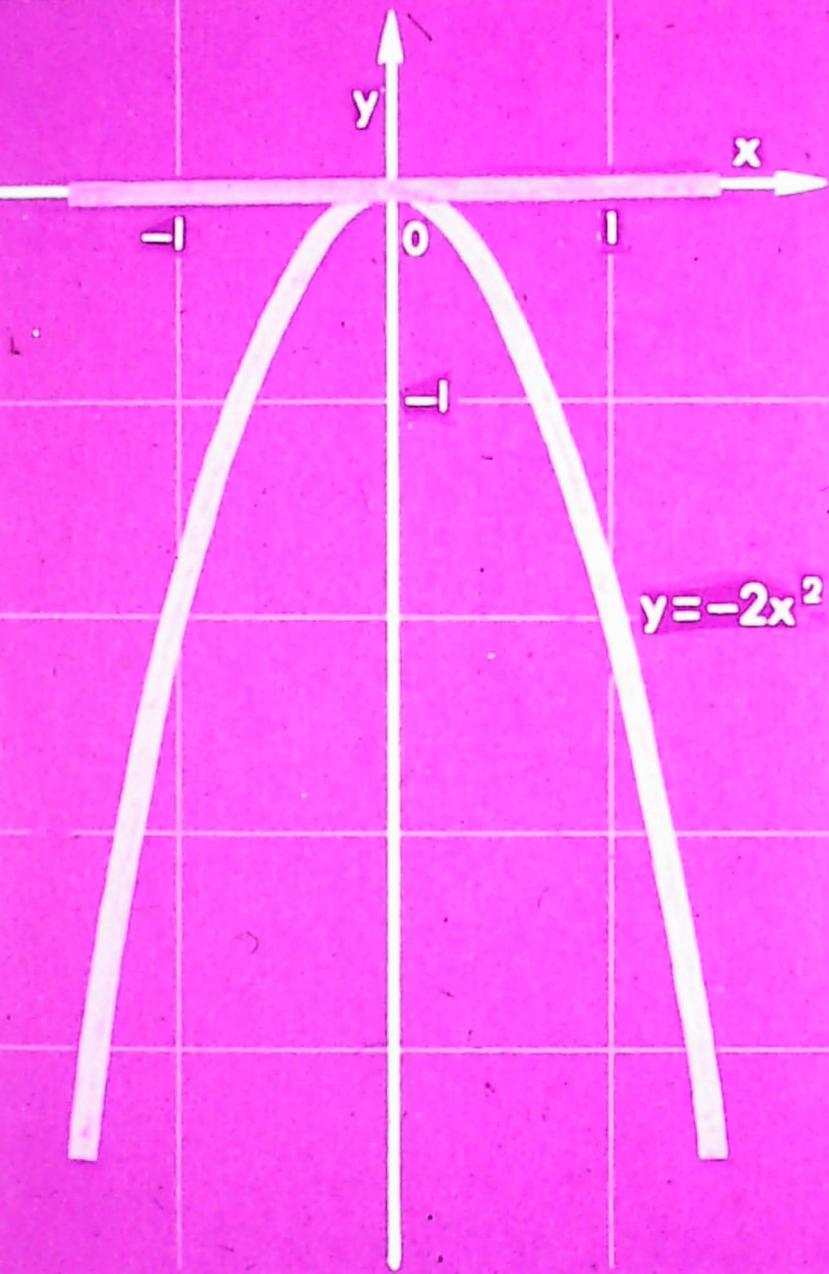
**II. Свойства  
степенной функции  
с натуральным  
показателем**



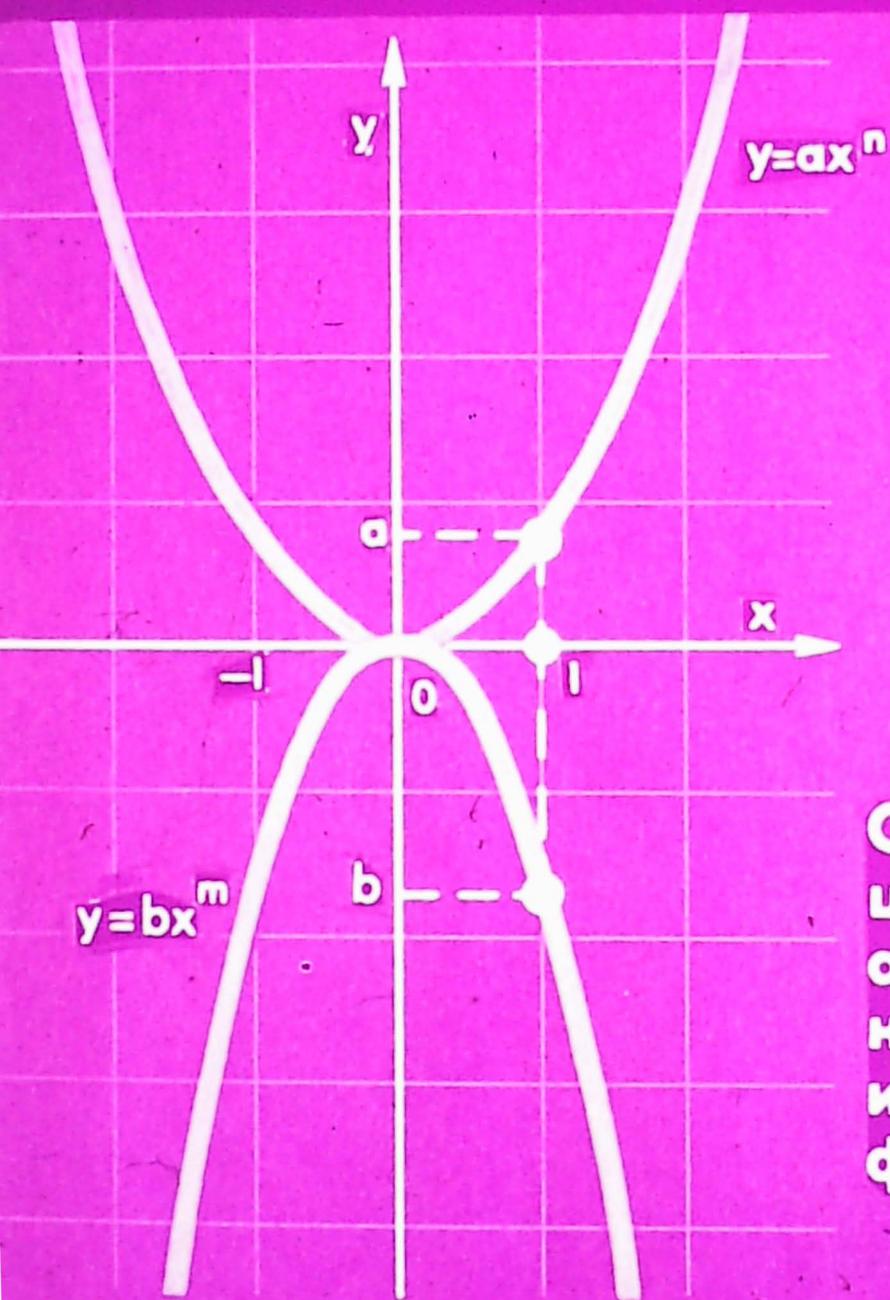
Найдите промежутки или точки, в которых степенная функция  $f(x) = \frac{1}{8}x^4$  равна нулю; положительна; отрицательна; возрастает; убывает; принимает наибольшее или наименьшее значения.



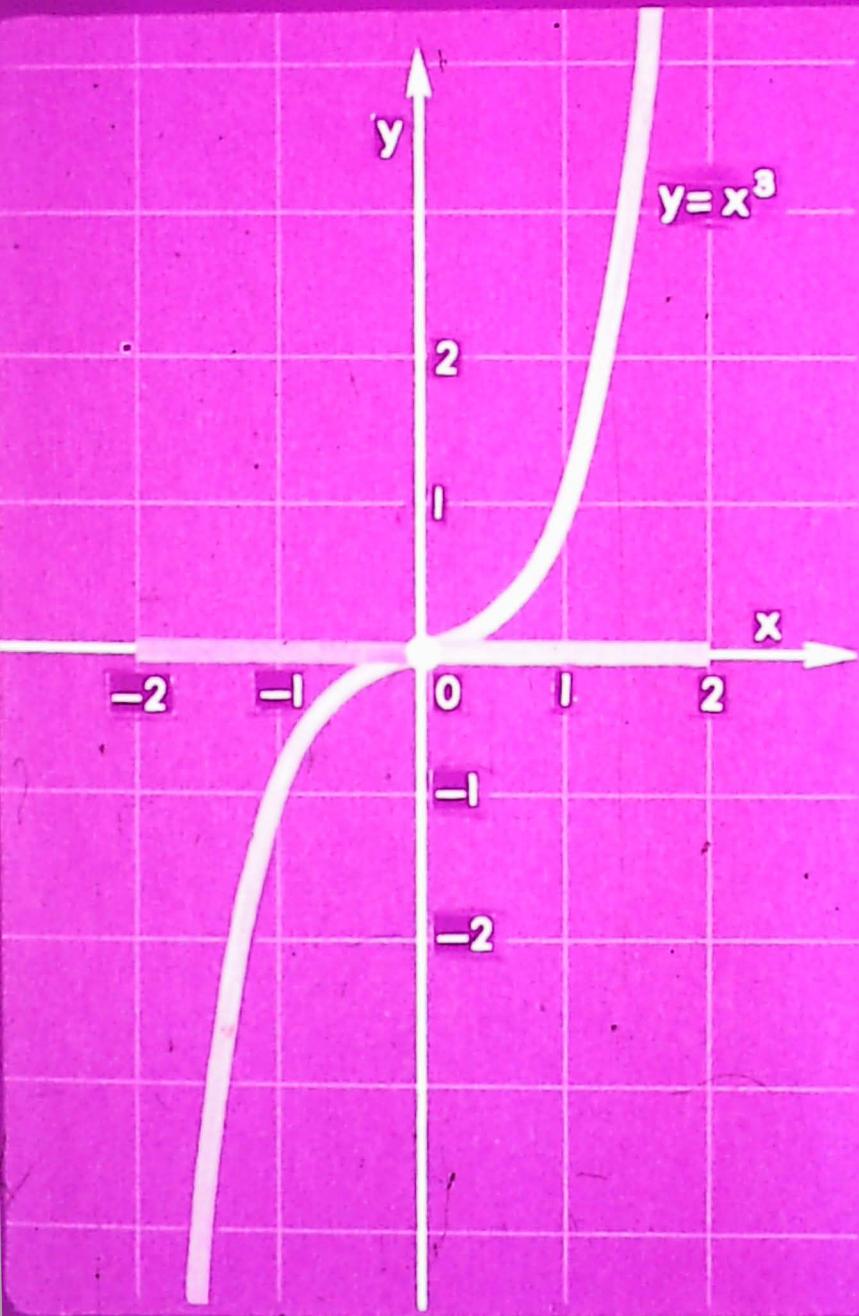
Перечислите основные свойства функции  $y = 0.1x^6$ . Каковы свойства функции  $y = 237x^{12}$ ,  $y = ax^{30}$ , где  $a > 0$ ;  $y = 0.005x^n$ , где  $n$  — чётное натуральное число?



Прочитайте свойства  
функции  $y = -2x^2$ ;  
 $y = -87x^n$ , где  $n$  — чётное  
натуральное число;  
 $y = ax^{102}$ , где  $a < 0$ .



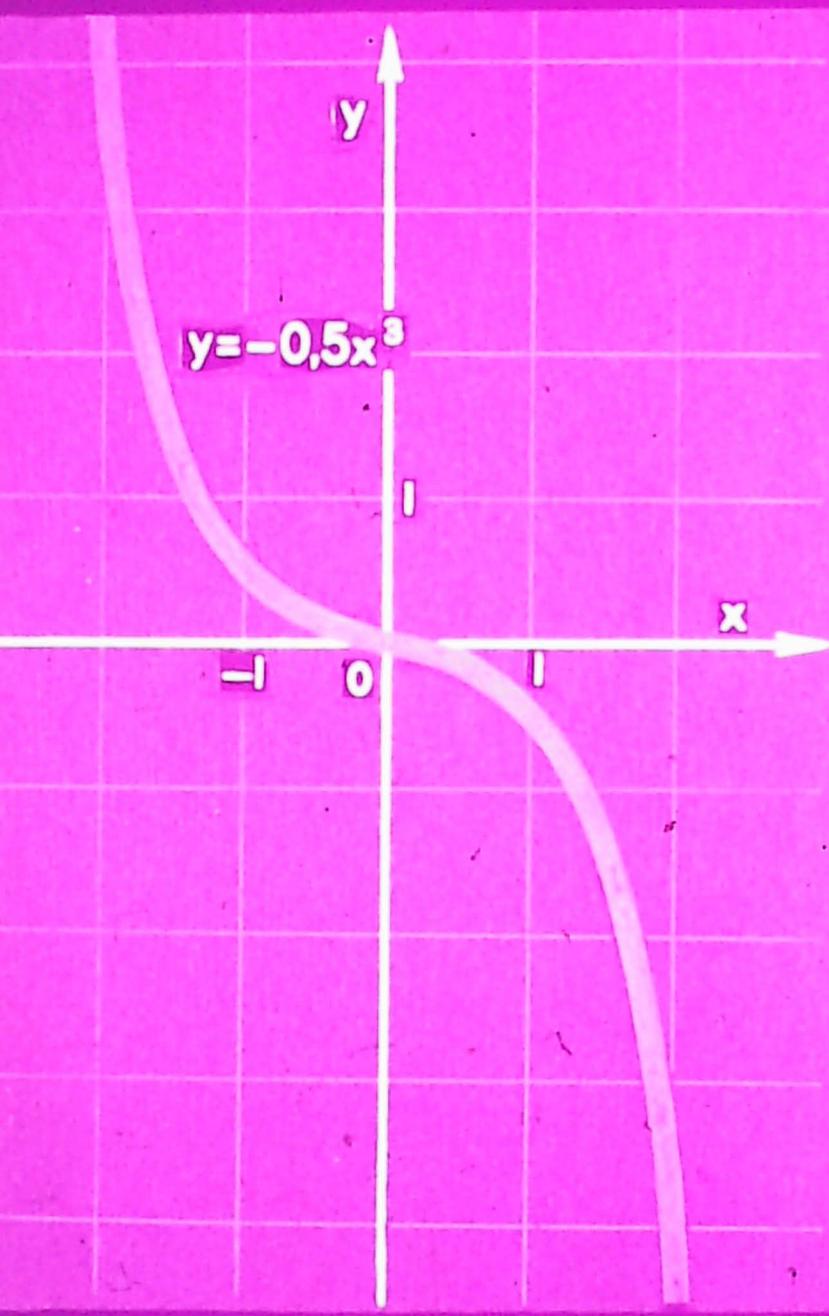
Сравните свойства функций  $y=ax^n$  и  $y=bx^m$ , где  $a>0$ ,  $b<0$ ,  $n$  и  $m$ —чётные натуральные числа, и расположение их графиков.



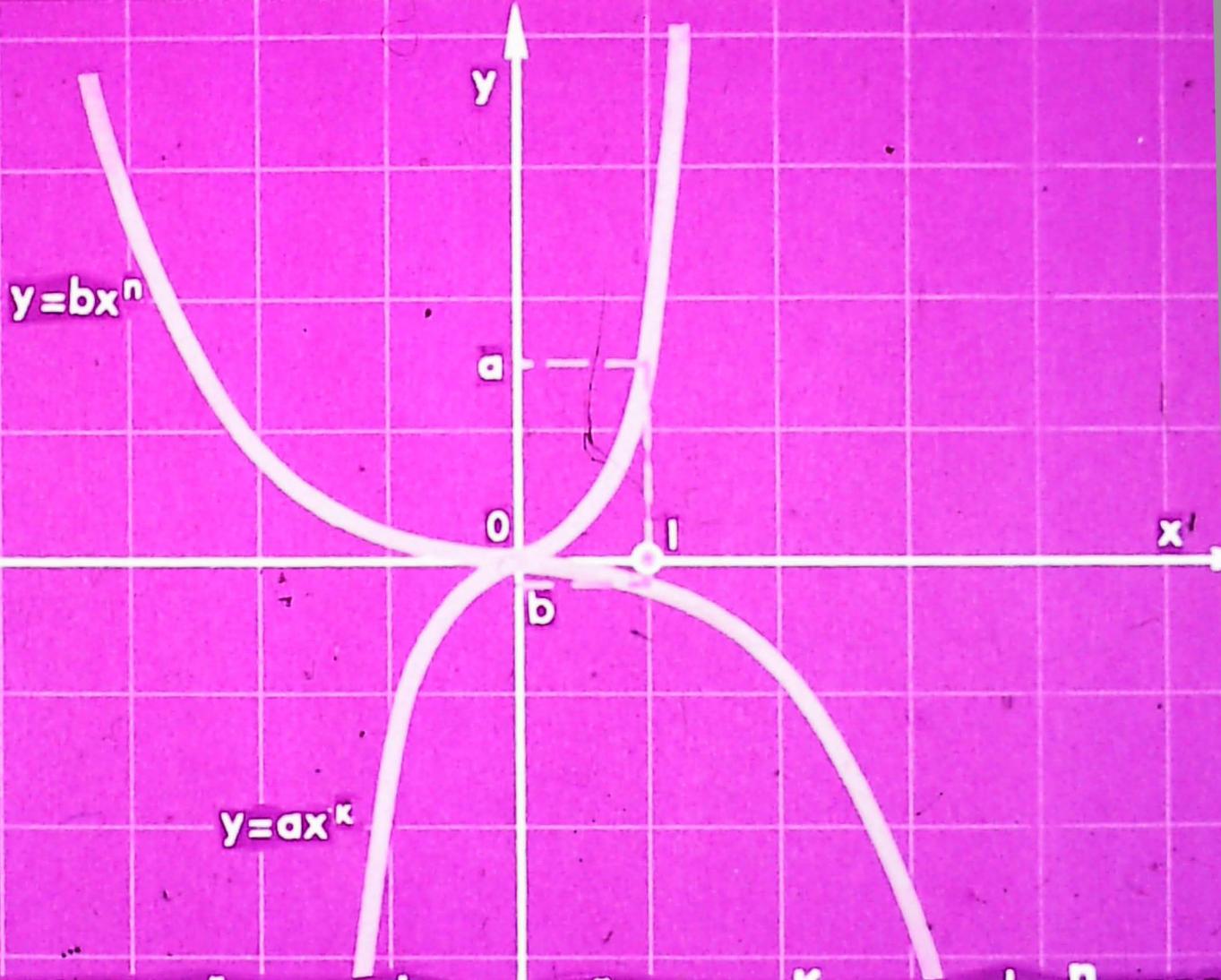
**Выясните основные свойства функции  $y = x^3$ .**



Перечислите свойства функции  $y=0,2x^5$ ;  $y=x$ ;  $y=ax^{11}$ , где  $a>0$ ;  $y=1,0009x^n$ , где  $n$ —нечётное натуральное число.



Выясните свойства функции  $y = -\frac{1}{2}x^3$ ;  $y = -5.03x^n$ , где  $n$  — нечётное число.



Сравните свойства функций  $y = ax^k$  и  $y = bx^n$ , где  $a > 0$ ,  $b < 0$ ,  $k$  и  $n$  — нечётные числа, и расположение их графиков.

$$y = ax^n$$

y

0

I

$a > 0$

x

$$y = ax^n$$

y

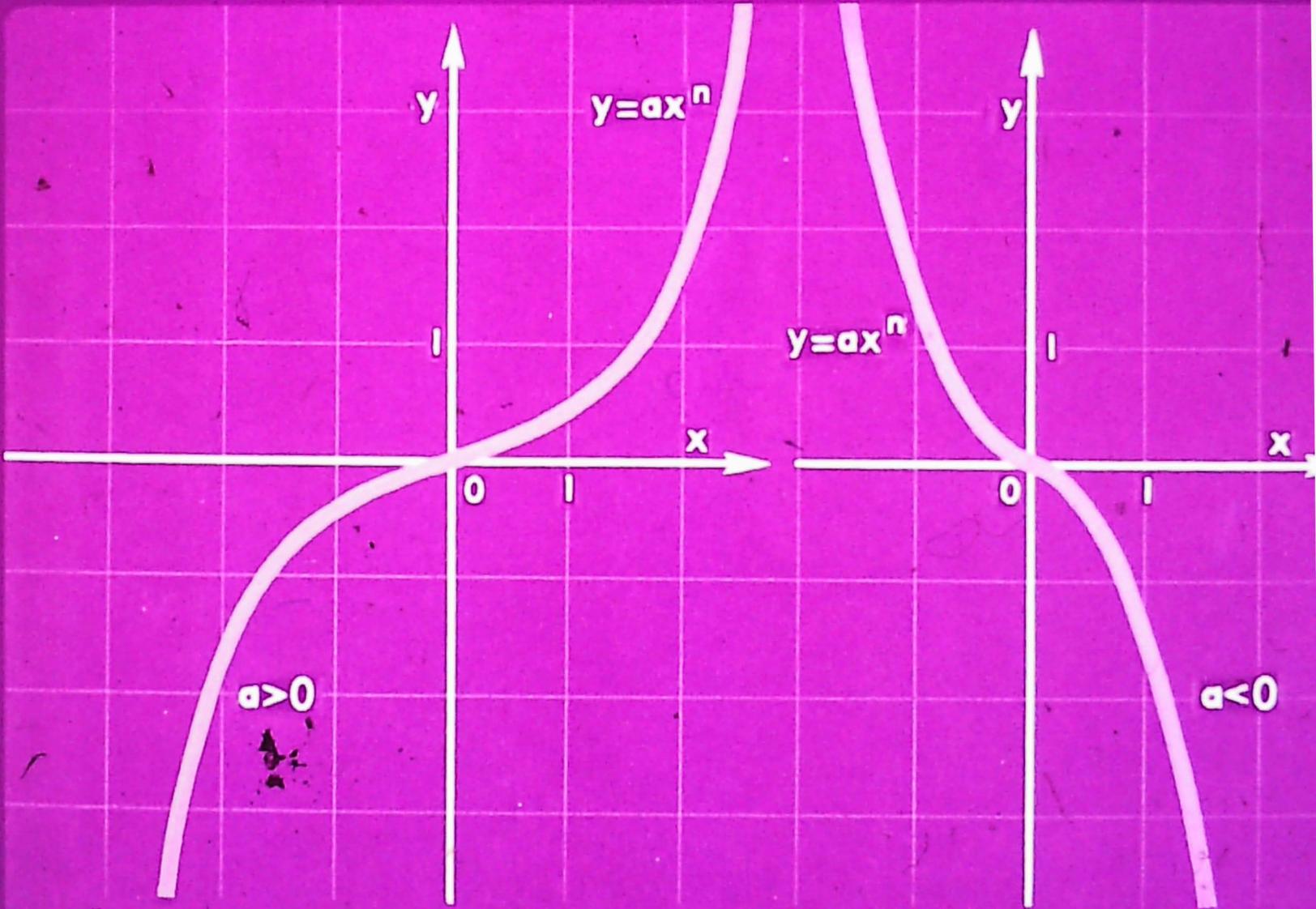
0

I

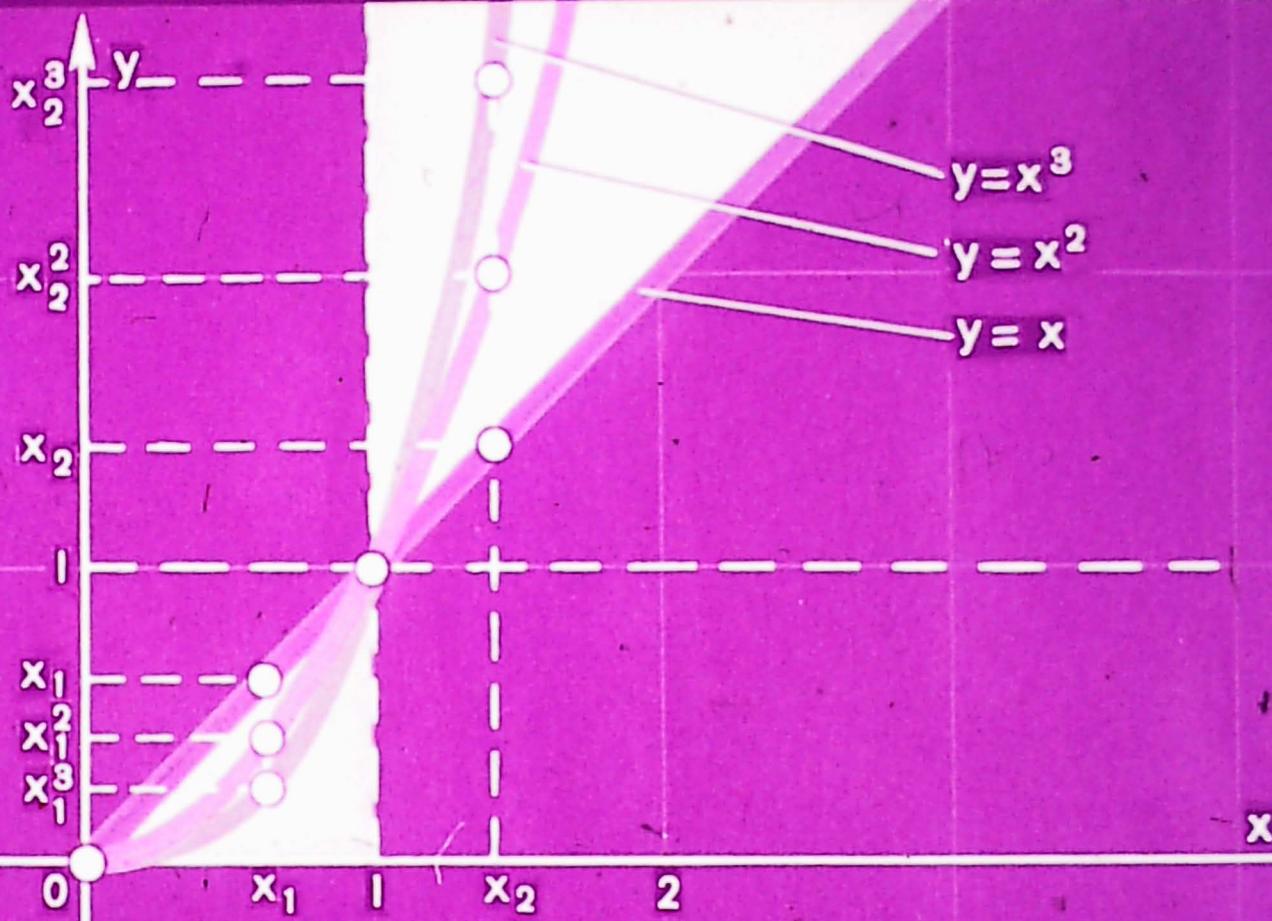
$a < 0$

x

Мы выяснили, что график степенной функции  $y = ax^n$  с натуральным показателем расположен: а) при чётном  $n$  в I и II четвертях, если  $a > 0$ , и в III и IV четвертях, если  $a < 0$ ;

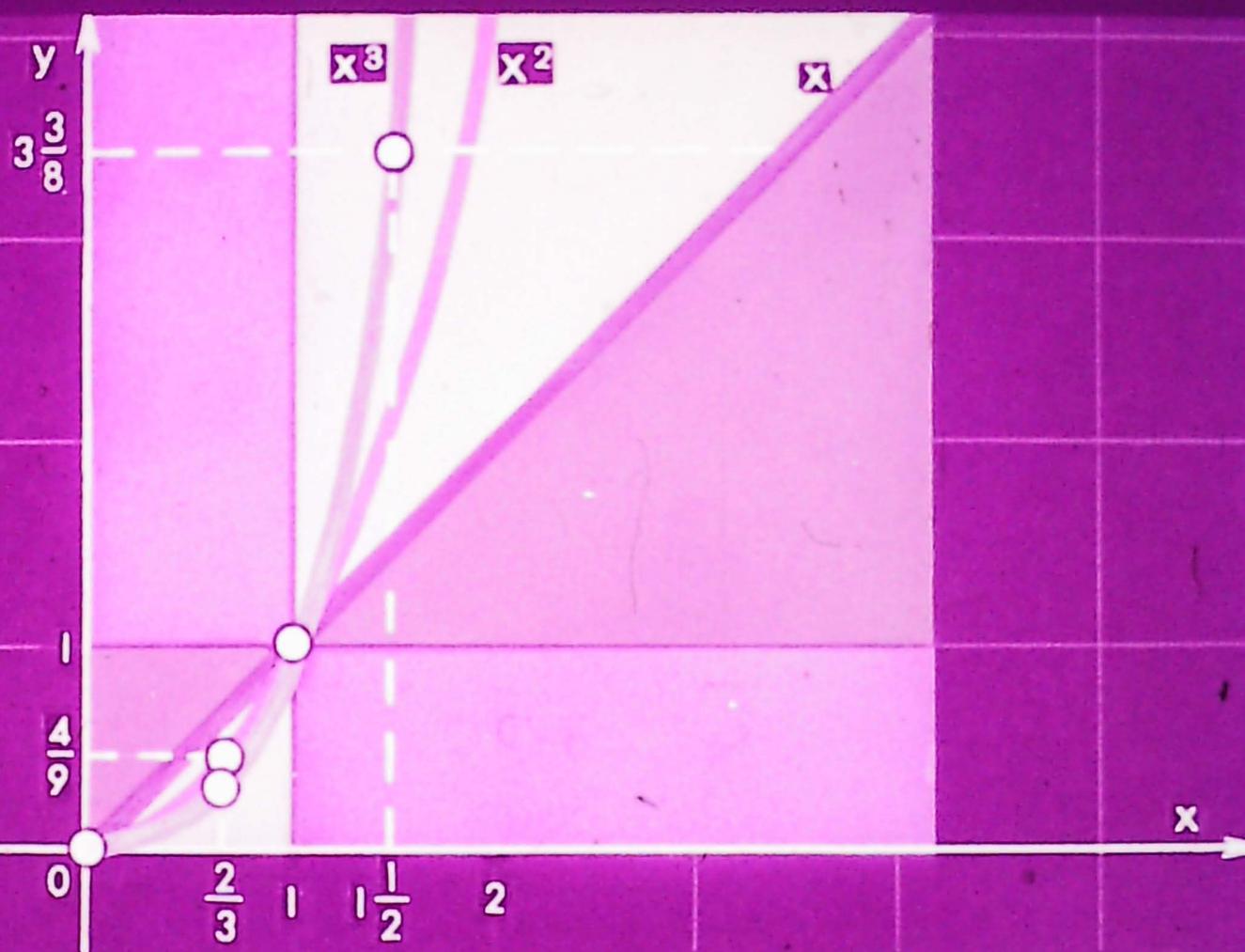


б) при нечётном  $n$  в I и III четвертях, если  $a > 0$ , и во II и IV четвертях, если  $a < 0$ .

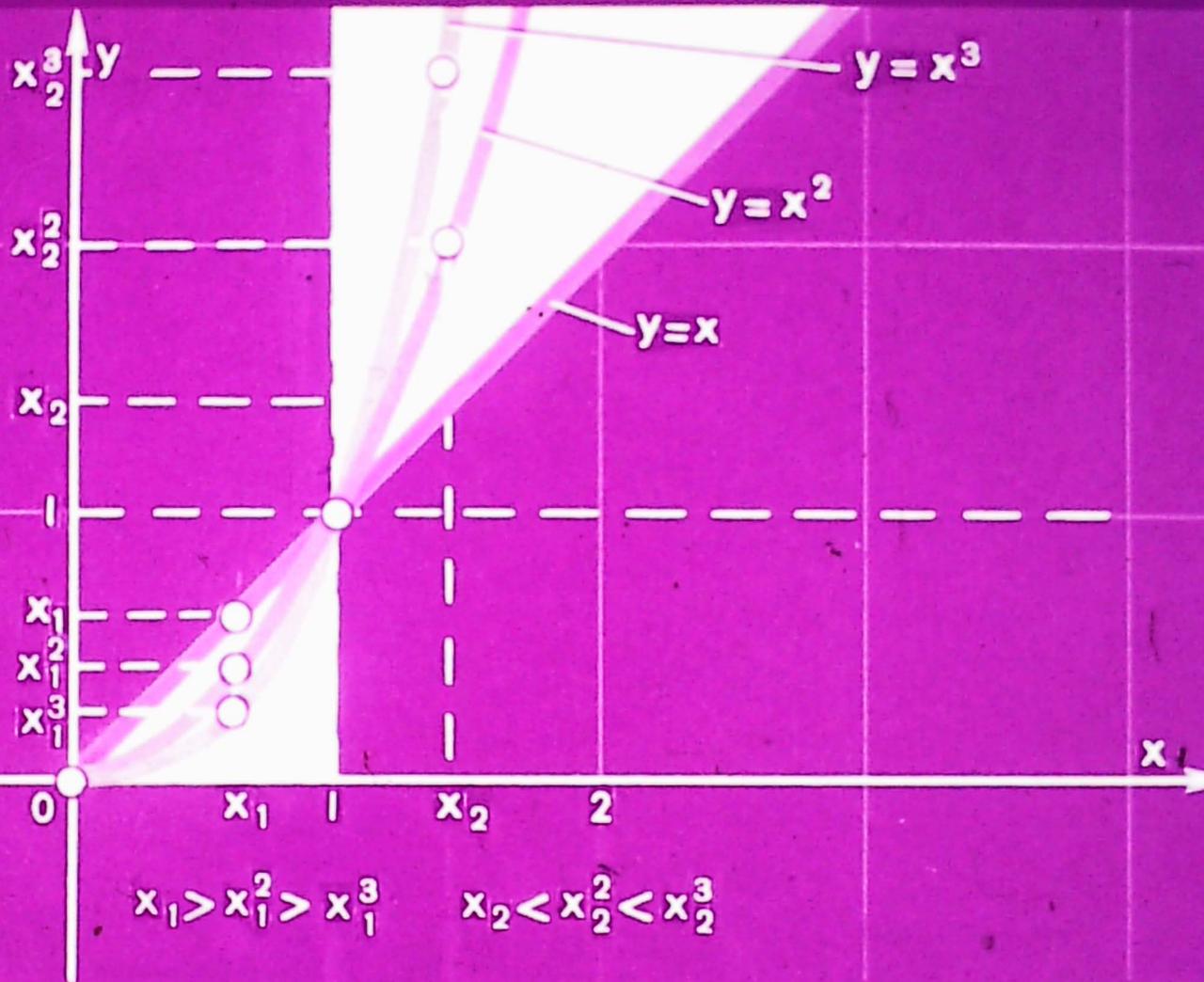


$$x_1 > x_1^2 > x_1^3 \quad x_2 < x_2^2 < x_2^3$$

Сравните значения  $x$ ,  $x^2$  и  $x^3$ , рассмотрев случаи:  
 а)  $0 < x < 1$ ; б)  $x = 1$ ; в)  $x > 1$ . Что больше  $\frac{17}{105}$  или  $(\frac{17}{105})^3$ ;  
 $(\frac{11}{10})^2$  или  $(\frac{11}{10})^3$ ?

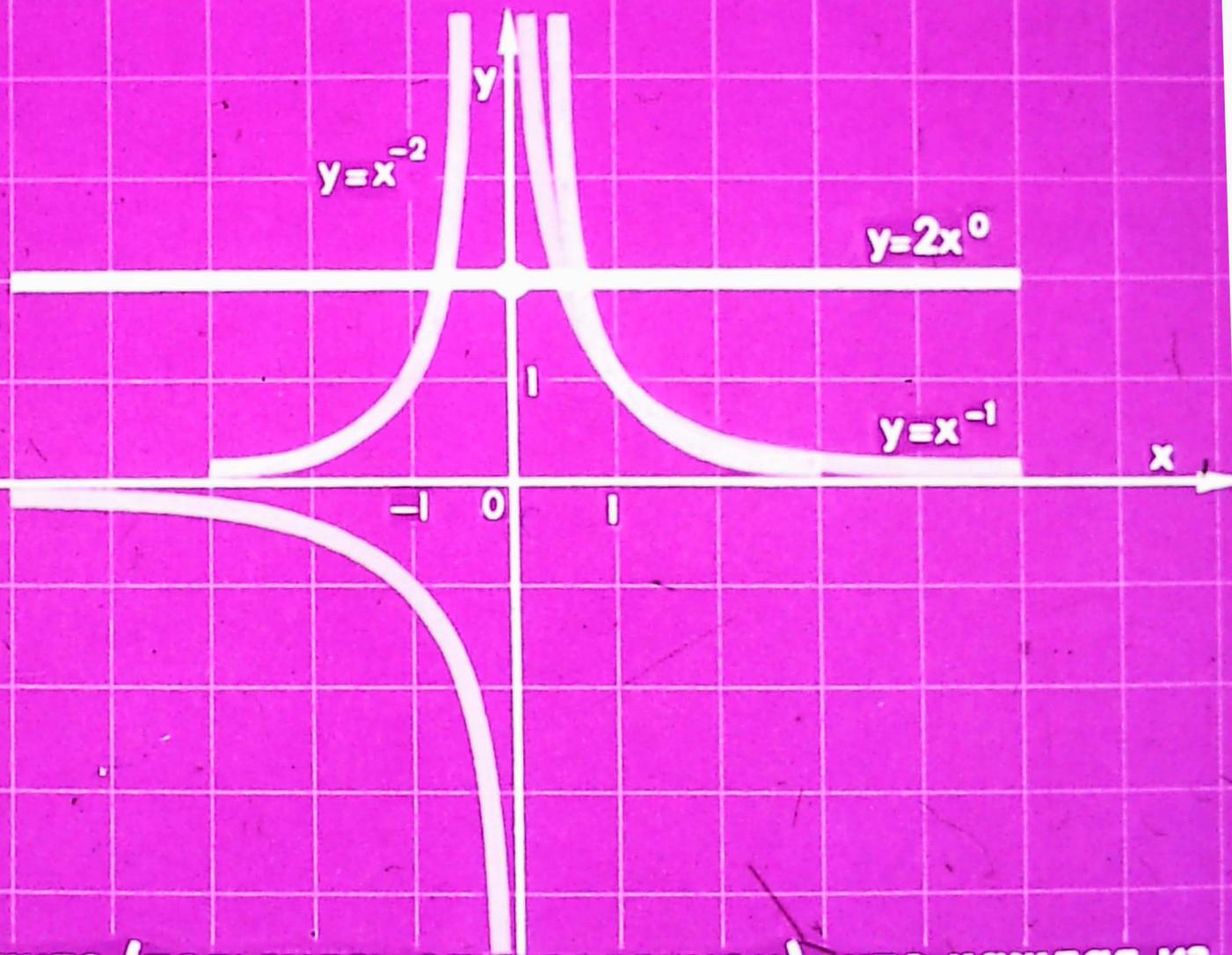


Какой из графиков проходит через точку  $P(1\frac{1}{2}; 3\frac{1}{2})$ ,  $K(\frac{1}{3}; \frac{1}{3})$ ,  $M(1, 1)$ ? В какой (красной, жёлтой, зелёной) области (при  $x \geq 0$ ) расположен график функции  $y=x^n$  с натуральным показателем  $n$ ?

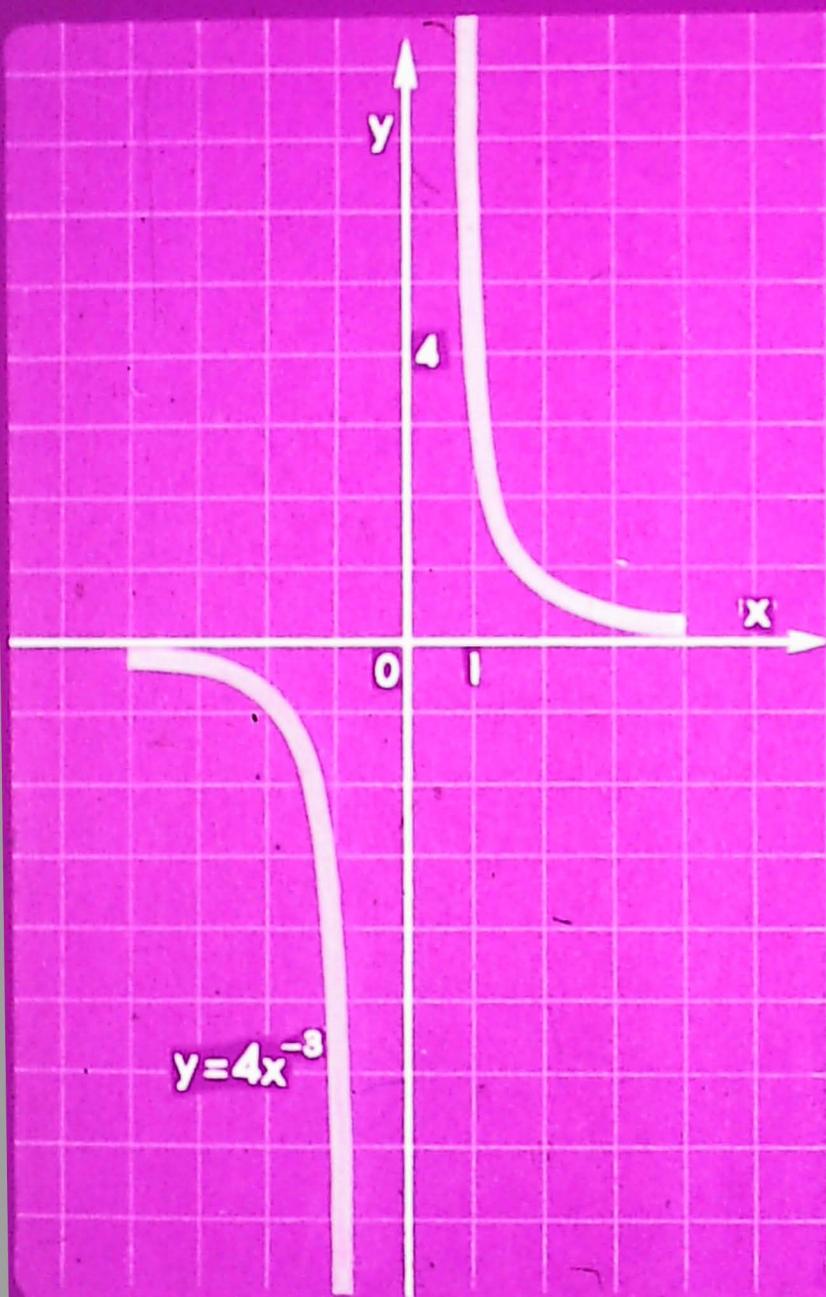


Если  $y = x^n$ , где целое  $n > 0$ , то: а) при  $0 < x < 1$  всегда  $y \leq x$ ; б) при  $x > 1$  всегда  $y \geq x$ . Объясните это.

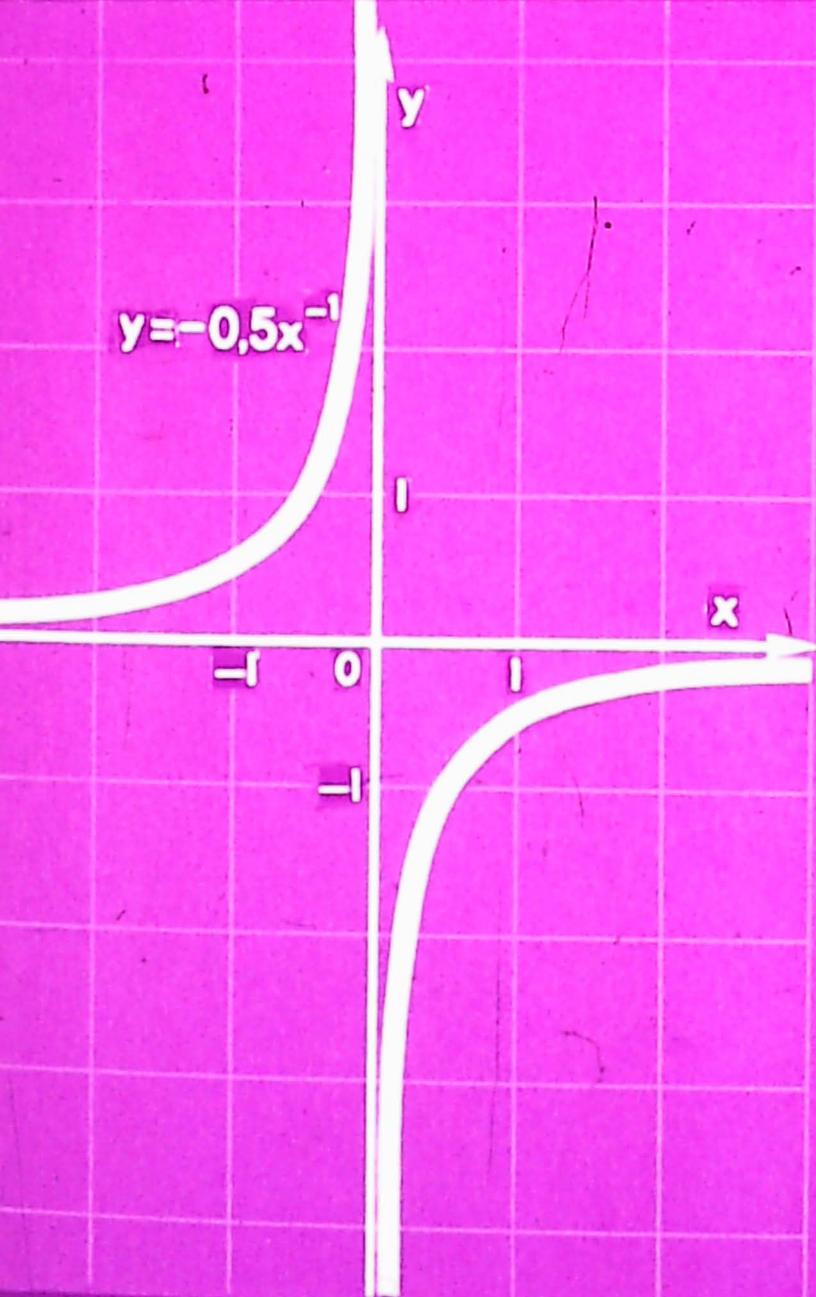
**III. Свойства  
степенной функции  
с целым  
отрицательным  
показателем**



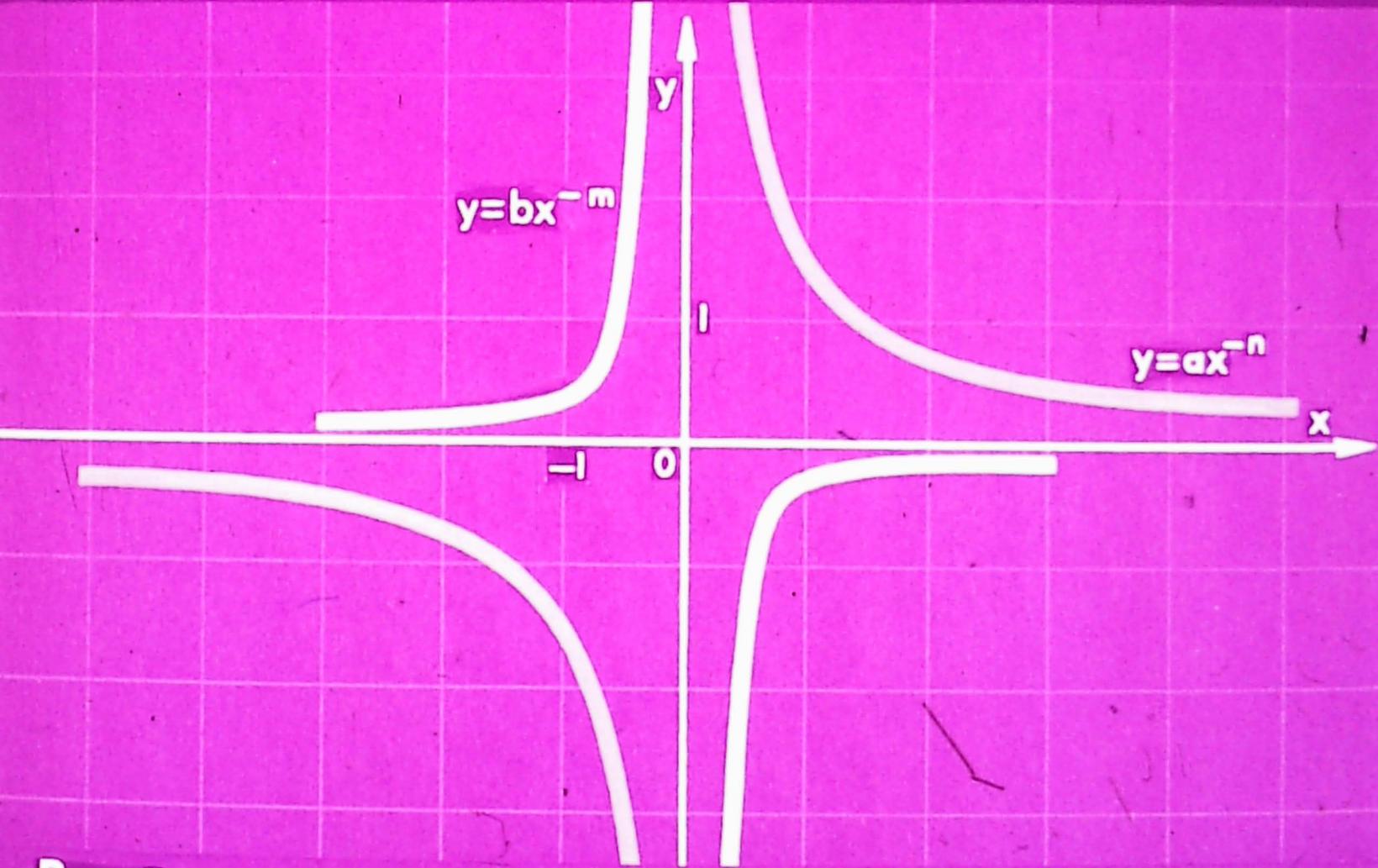
Докажите (пользуясь определением), что каждая из этих функций степенная. Какая из них чётная и какая нечётная?



Найдите промежутки или точки, в которых функция  $y = 4x^{-3}$  не определена; положительна; отрицательна; возрастает или убывает.



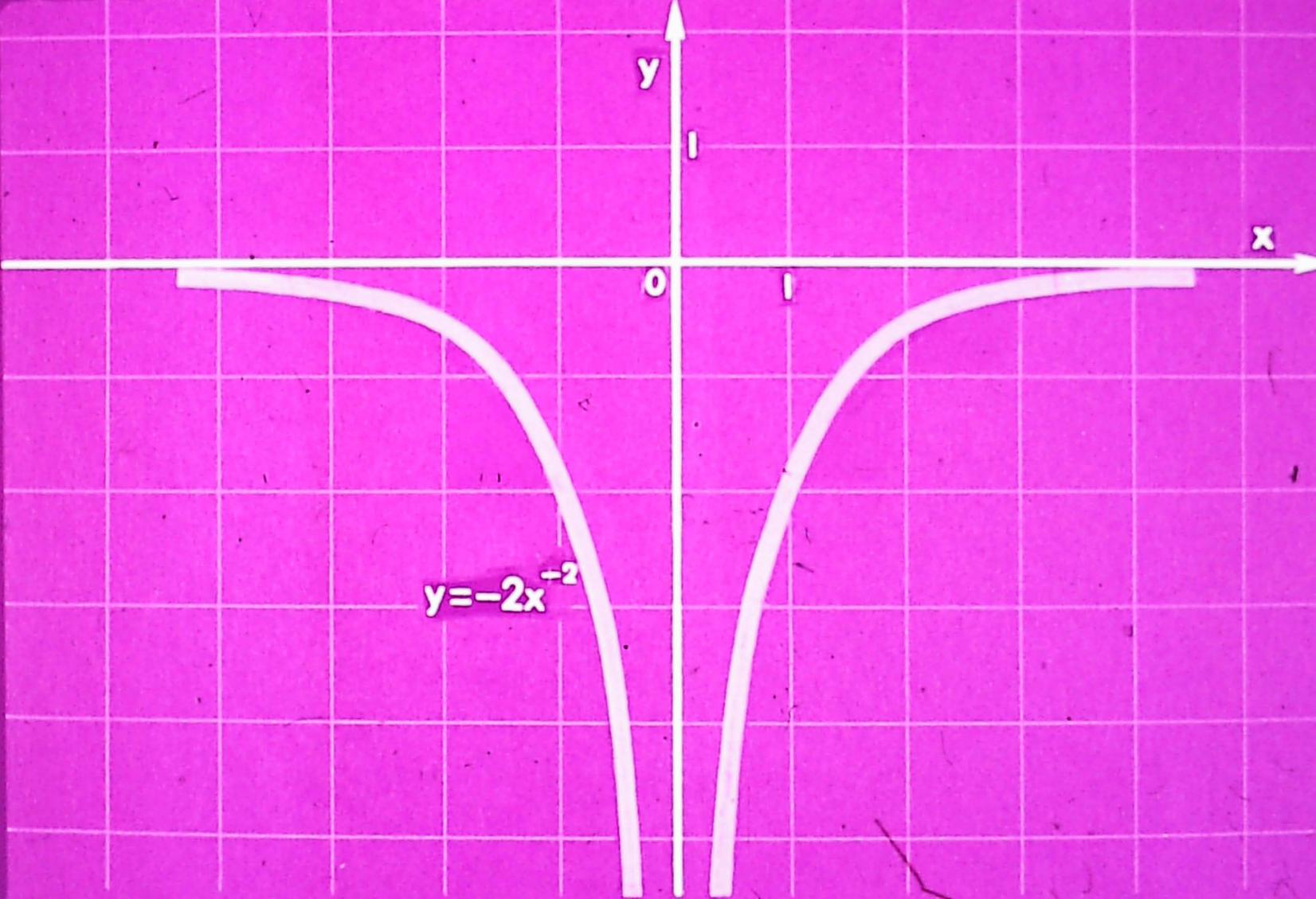
Перечислите основные свойства функции  $y = -0,5x^{-1}$ .



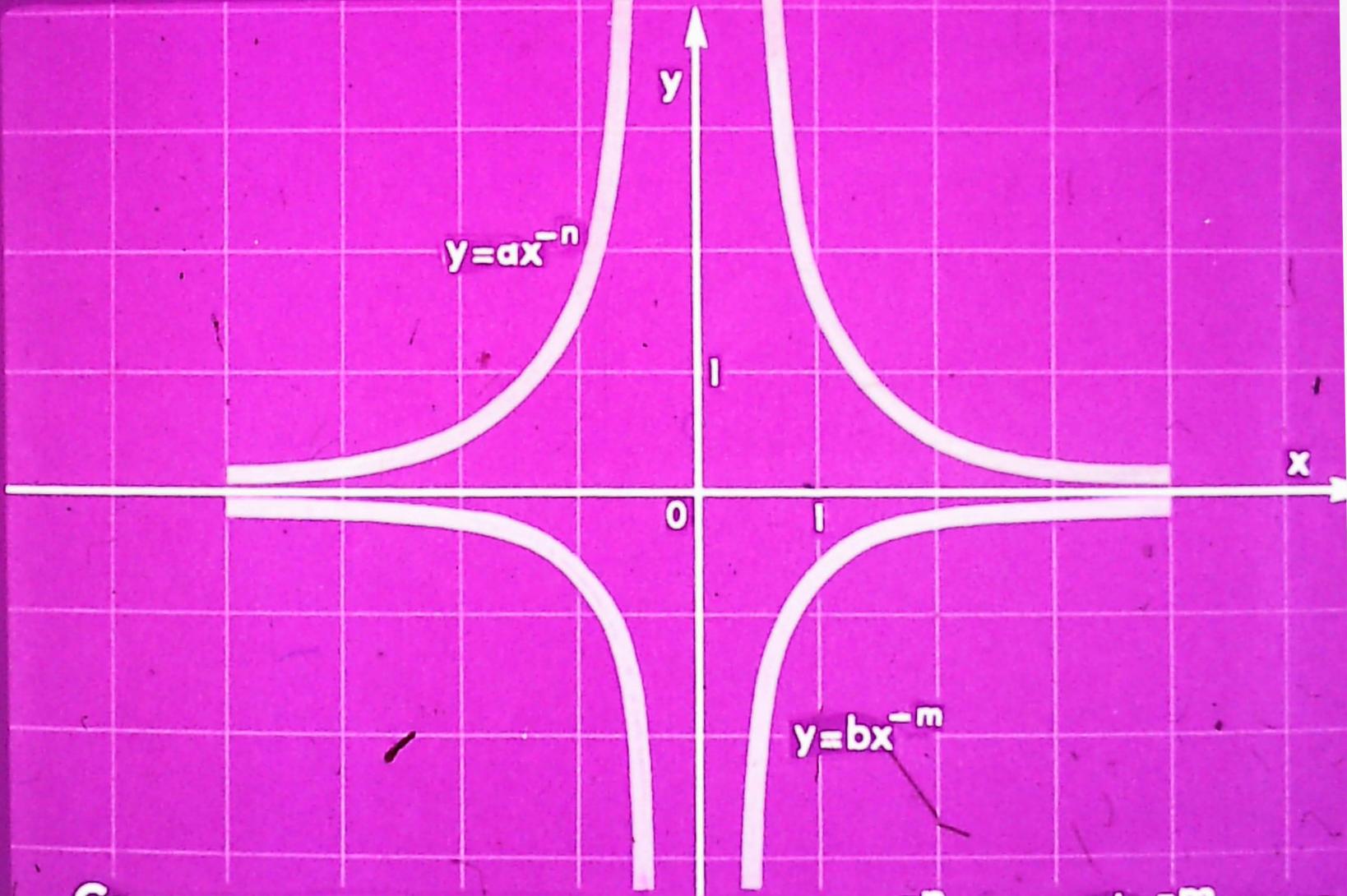
В чём сходство и различие свойств функций  $y = ax^{-n}$  и  $y = bx^{-m}$ , где  $a > 0$ ,  $b < 0$ ,  $n$  и  $m$  — нечётные натуральные числа, и расположения их графиков?



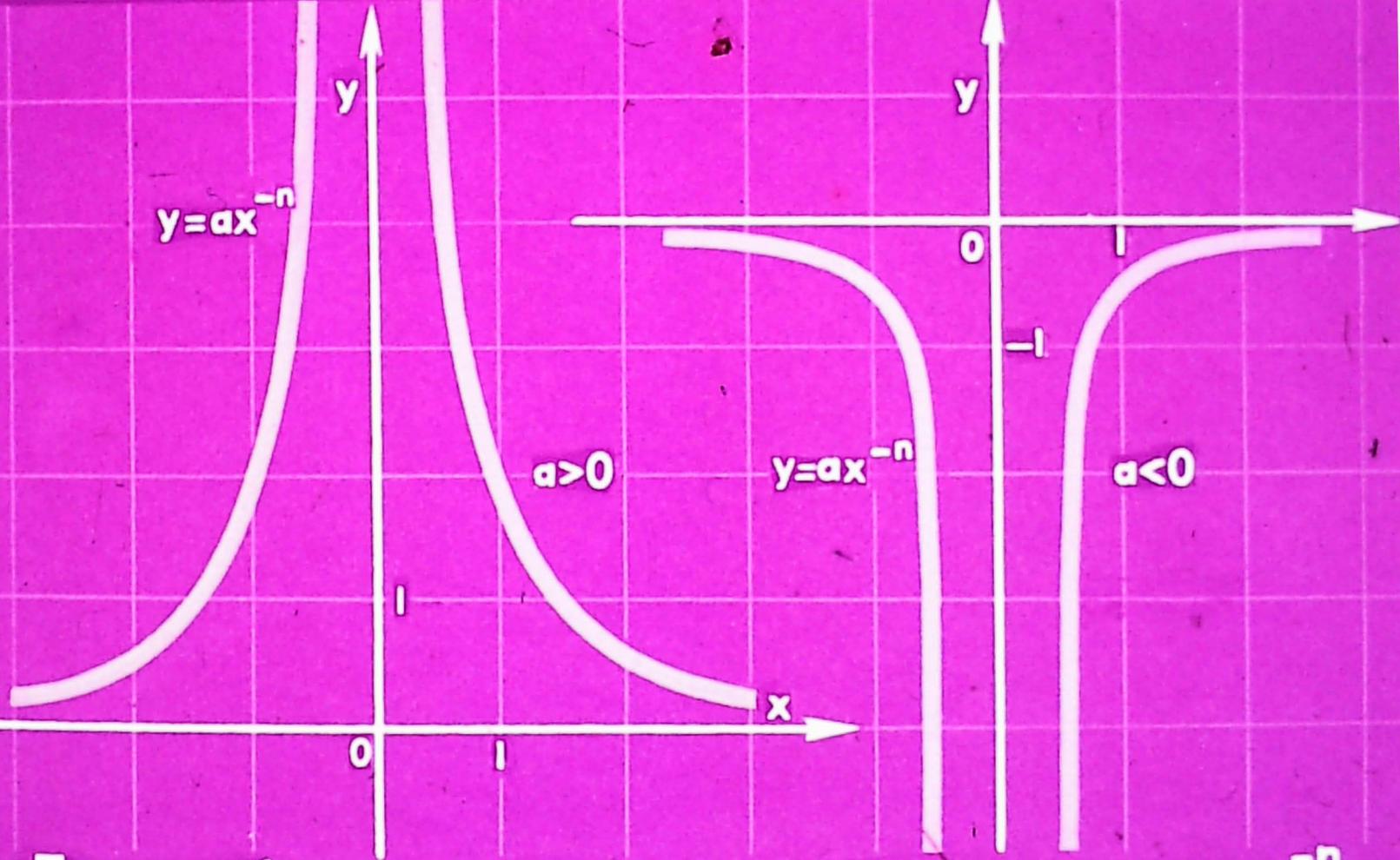
Выясните свойства функции  $y = 4x^{-2}$ .



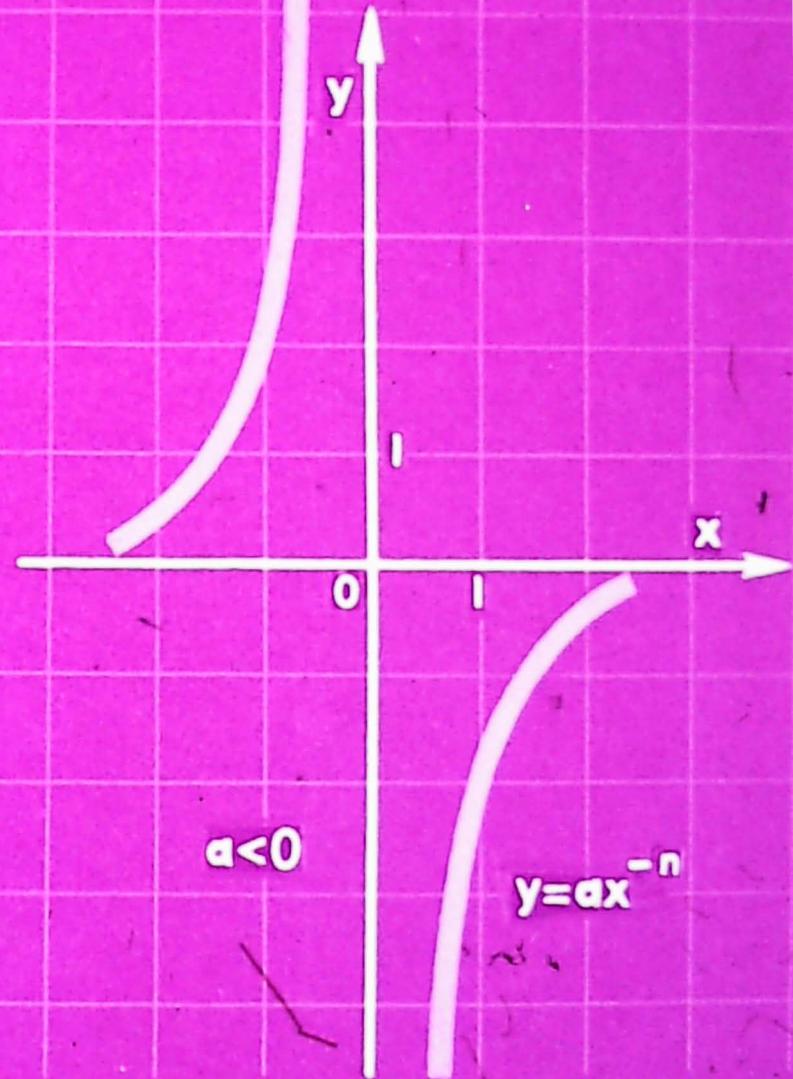
Выясните свойства функции  $y = -2x^{-2}$ .



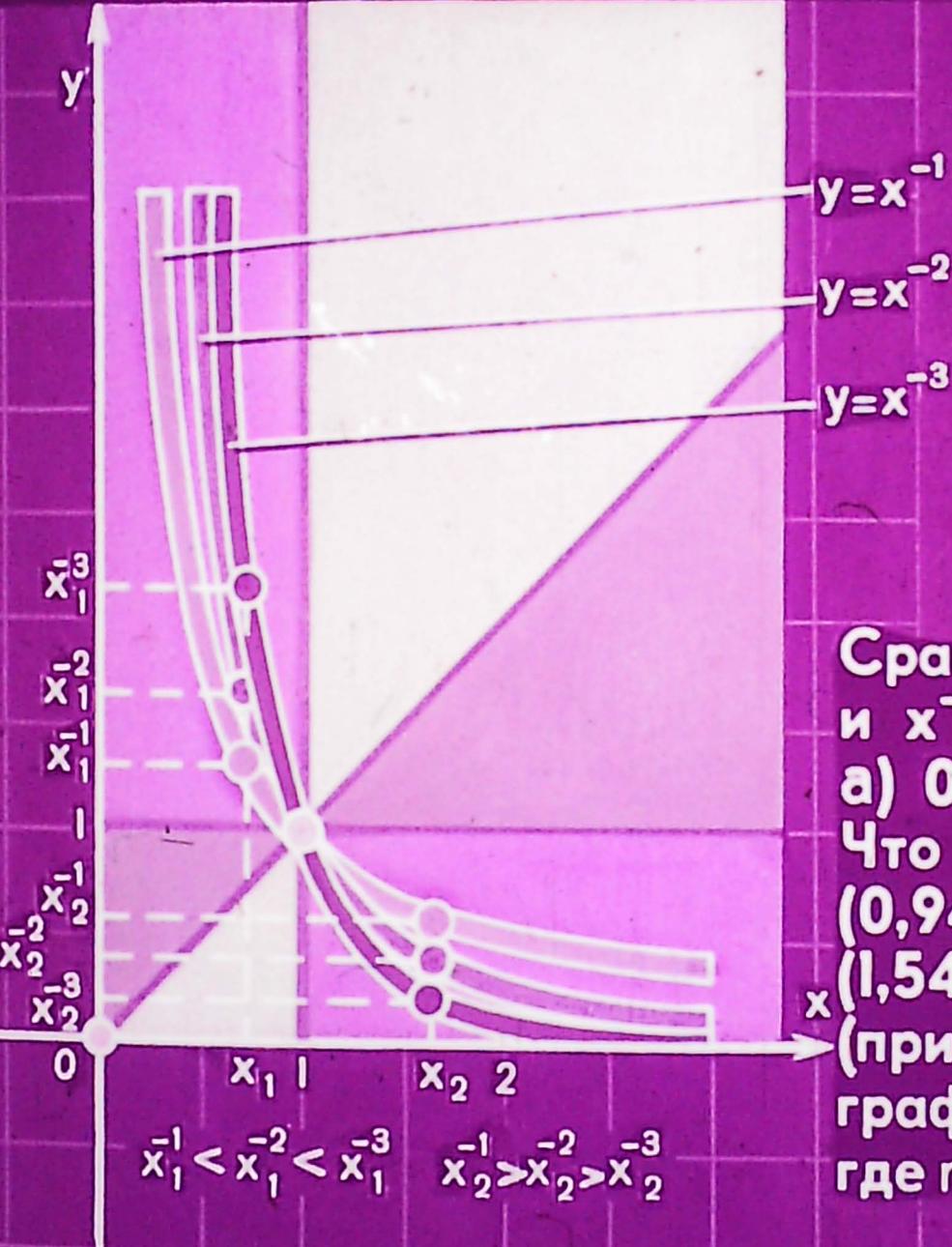
Сравните свойства функций  $y = ax^{-n}$  и  $y = bx^{-m}$ , где  $a > 0$ ,  $b < 0$ ,  $n$  и  $m$  — чётные натуральные числа, и расположение их графиков.



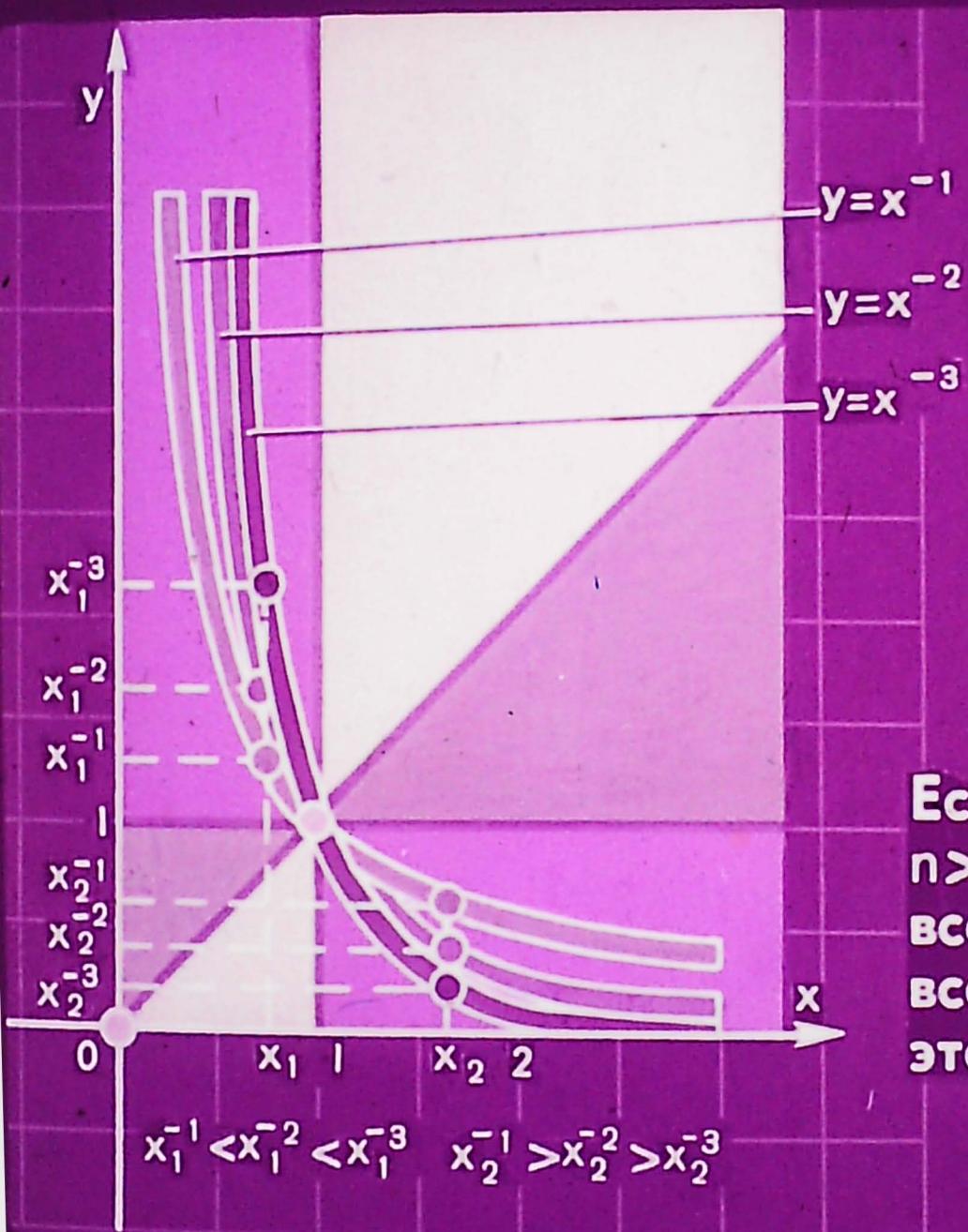
Таким образом, график степенной функции  $y = ax^{-n}$ , где  $n$  – натуральное число, расположен: а) при чётном  $n$  в I и II четвертях, если  $a > 0$ , и в III и IV четвертях, если  $a < 0$ ;



б) при нечётном  $n$  в I и III четвертях, если  $a > 0$ , и во II и IV четвертях, если  $a < 0$ .



Сравните значения  $x^{-1}$ ,  $x^{-2}$  и  $x^{-3}$ , рассмотрев случаи:  
 а)  $0 \leq x \leq 1$ ; б)  $x = 1$ ; в)  $x > 1$ .  
 Что больше:  $(0,943)^{-1}$  или  $(0,943)^{-2}$ ;  $(1,542)^{-2}$  или  $(1,542)^{-1}$ ? В какой области (при  $x > 0$ ) расположен график функции  $y = x^{-n}$ , где  $n$  — натуральное число?

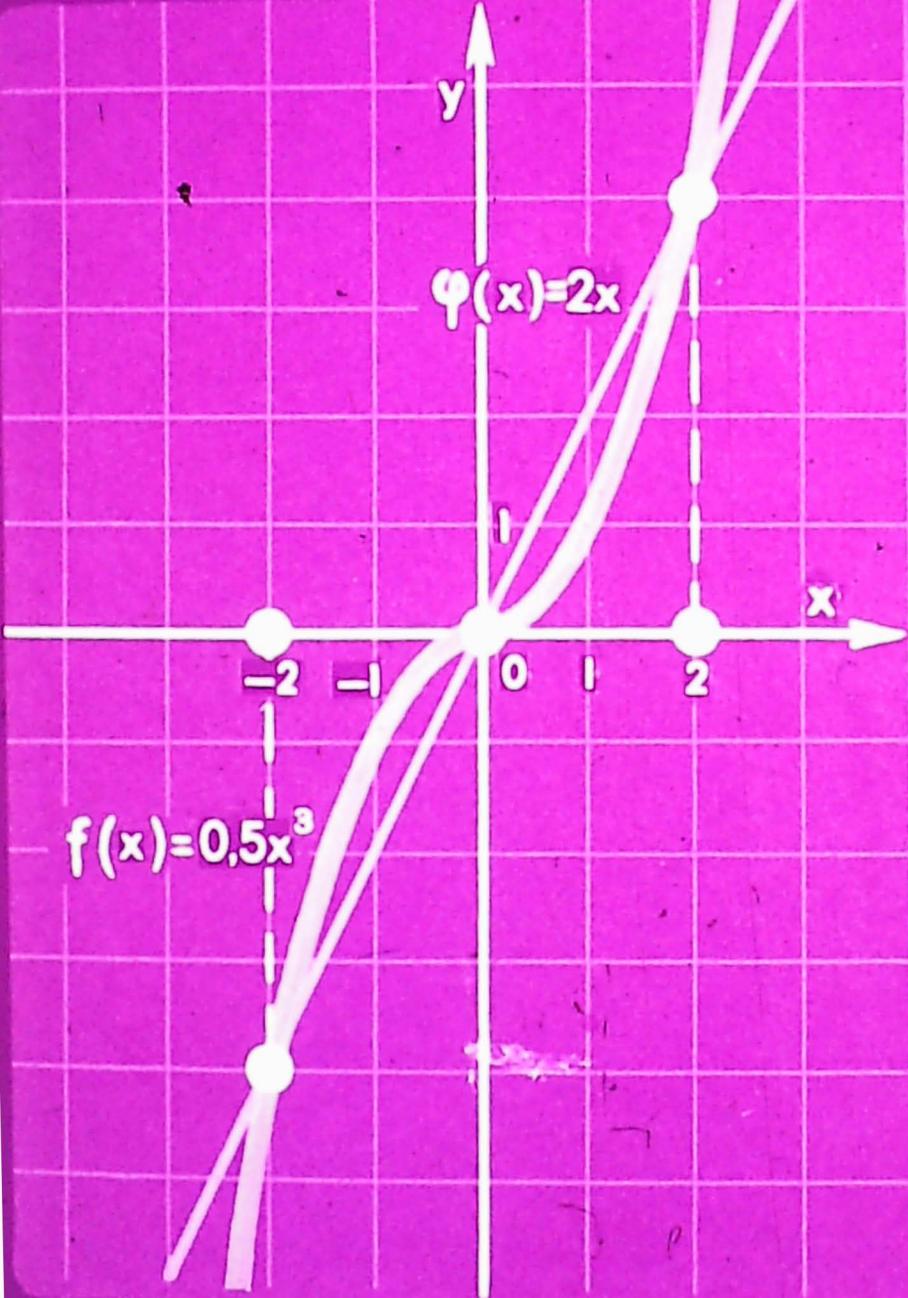


Если  $y = x^{-n}$ , где целое  $n > 0$ , то: а) при  $0 < x < 1$  всегда  $y > x$ ; б) при  $x > 1$  всегда  $y < x$ . Объясните это.

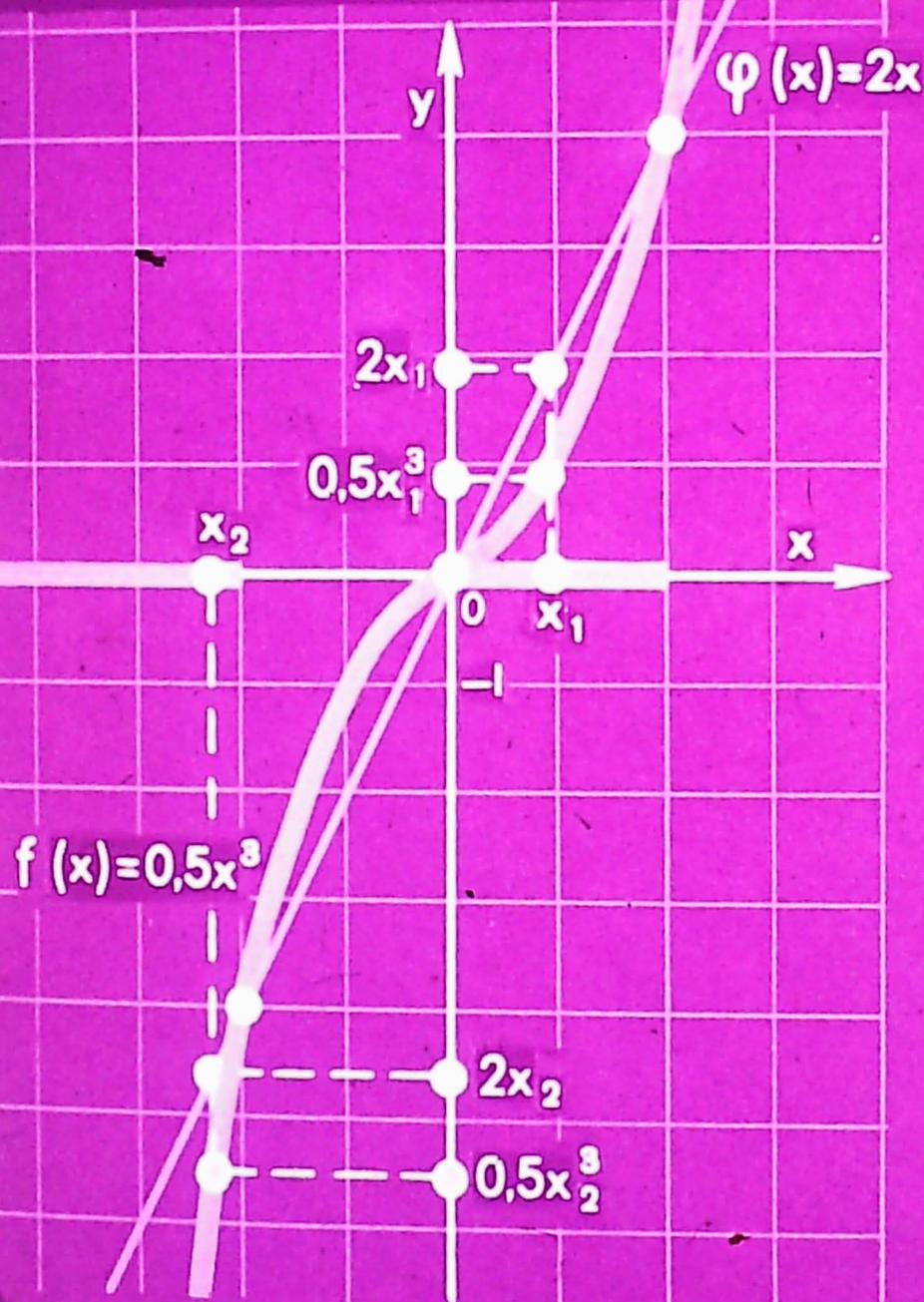


Какой знак имеет коэффициент  $a$  и целый показатель  $n$ , если известно, что график степенной функции  $y = ax^n$  проходит через точку А; В; С; D; E; К? Рассмотрите возможные случаи.

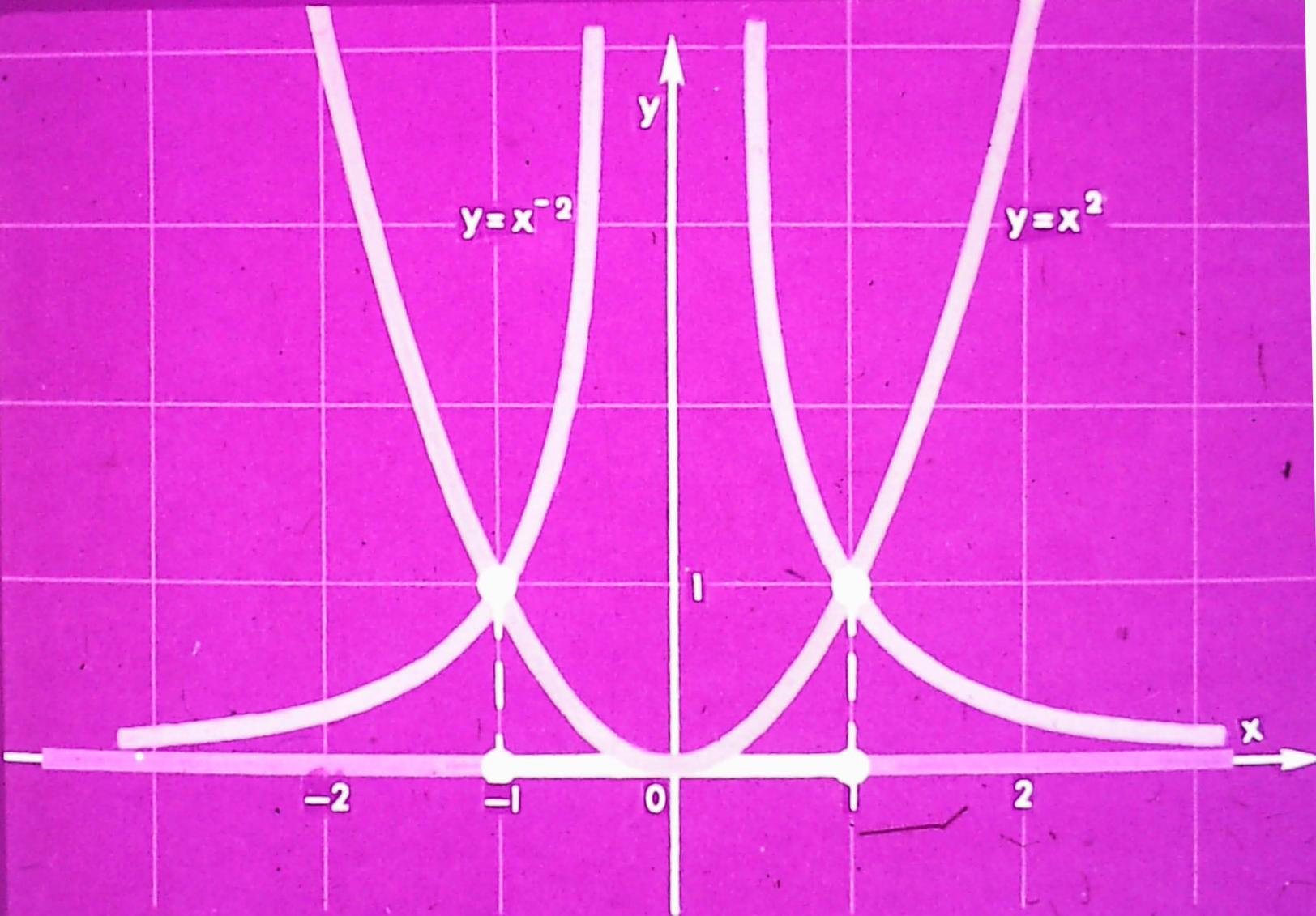
# **IV. Решение уравнений и неравенств**



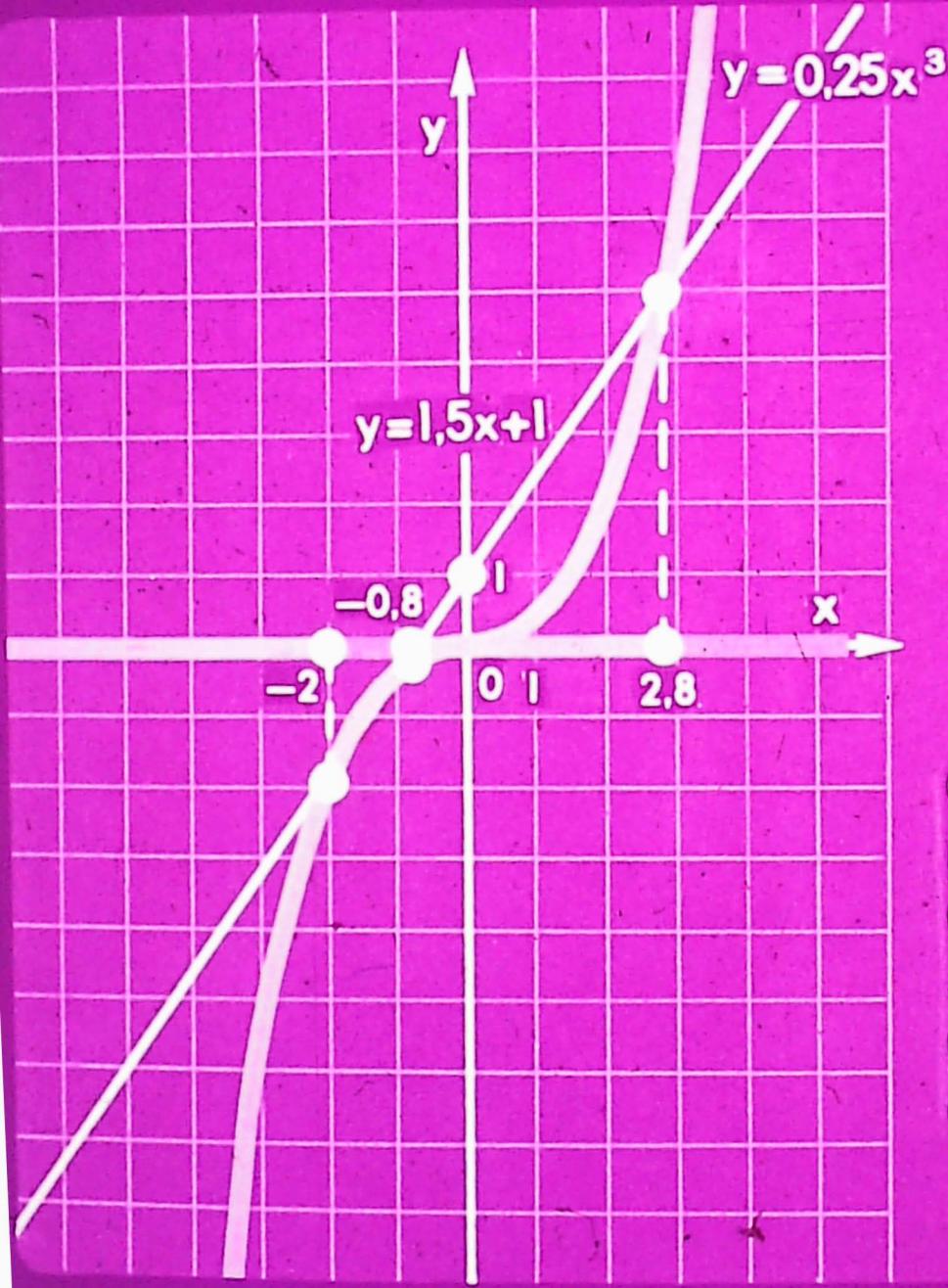
Решим графически уравнение  $0,5x^3 = 2x$ .  
Графики функций  $f(x) = 0,5x^3$  и  $\varphi(x) = 2x$  имеют три общие точки. Абсциссы этих точек (числа  $-2; 0; 2$ ) служат решением данного уравнения.



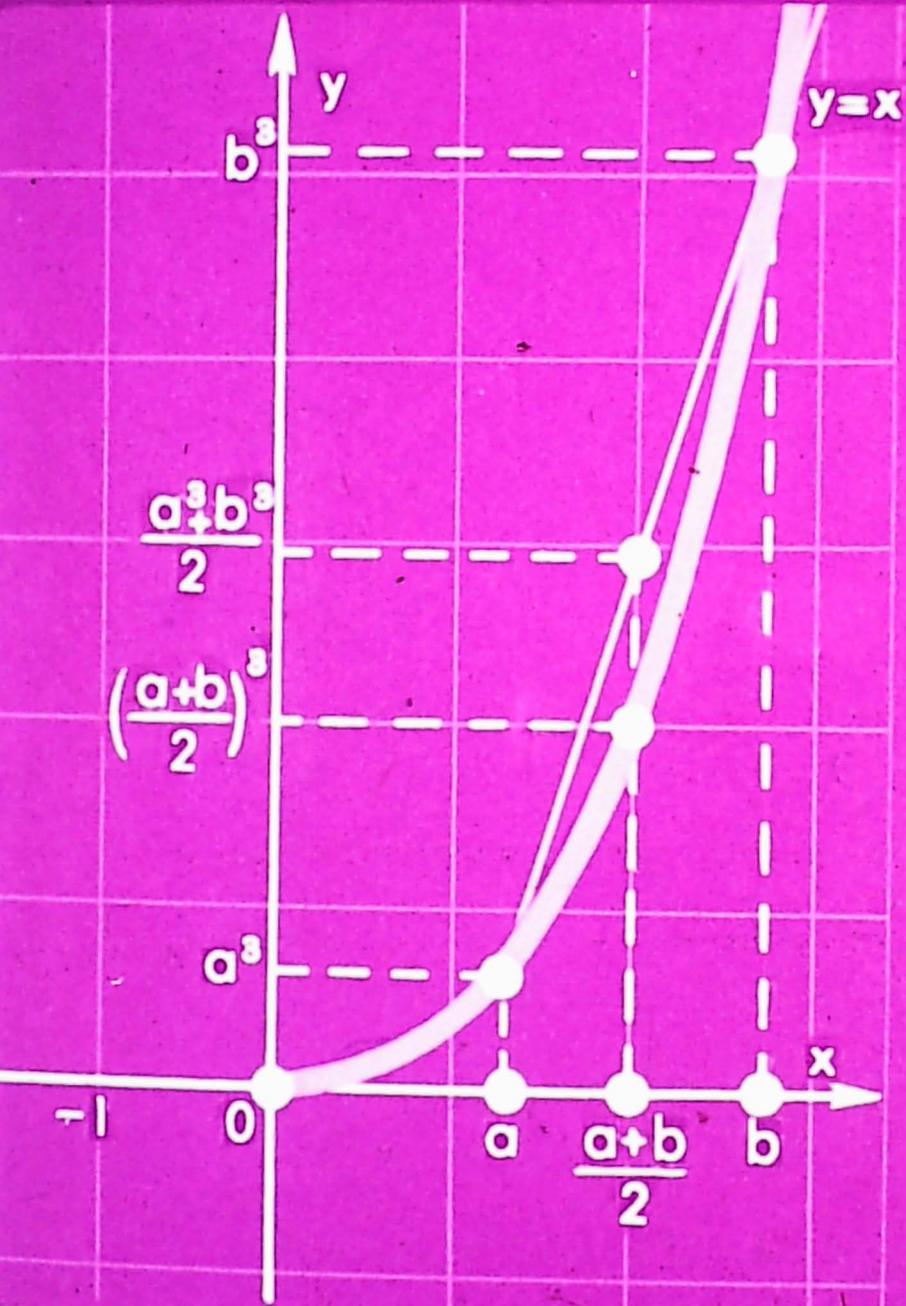
Решим неравенство  $0,5x^3 < 2x$ . Значение  $f(x)$  меньше соответствующих значений  $\varphi(x)$  при тех значениях  $x$ , где график  $f(x)$  ниже графика  $\varphi(x)$ . Множество решений данного неравенства состоит из двух промежутков:  $x < -2$  и  $0 < x < 2$ .



Объясните графическое решение уравнения  $x^2 - x^{-2} = 0$  и неравенств  $x^2 - x^{-2} < 0$ ;  $x^2 - x^{-2} > 0$ .



Объясните по графику решение уравнения  $0,25x^3 - 1,5x - 1 = 0$  и решение неравенств  $0,25x^3 > 1,5x + 1$ ;  $0,25x^3 - 1,5x - 1 < 0$ .



Докажите неравенство  $\frac{a^3+b^3}{2} > (\frac{a+b}{2})^3$ , если  $a \neq b$ ;  $a > 0$  и  $b > 0$ , и объясните его геометрический смысл.

# Конец

Автор Ю. Н. Макарычев

Чертежи и оформление Г. Г. Рожковского

Редактор Л. Б. Книжникова

Студия «Диафильм», 1967 г.

Москва, Центр, Старосадский пер., д. № 7

Цветной 0-30

Д-270-67