XI 1979

1 4 0

ТУ-19-241-77

8

I

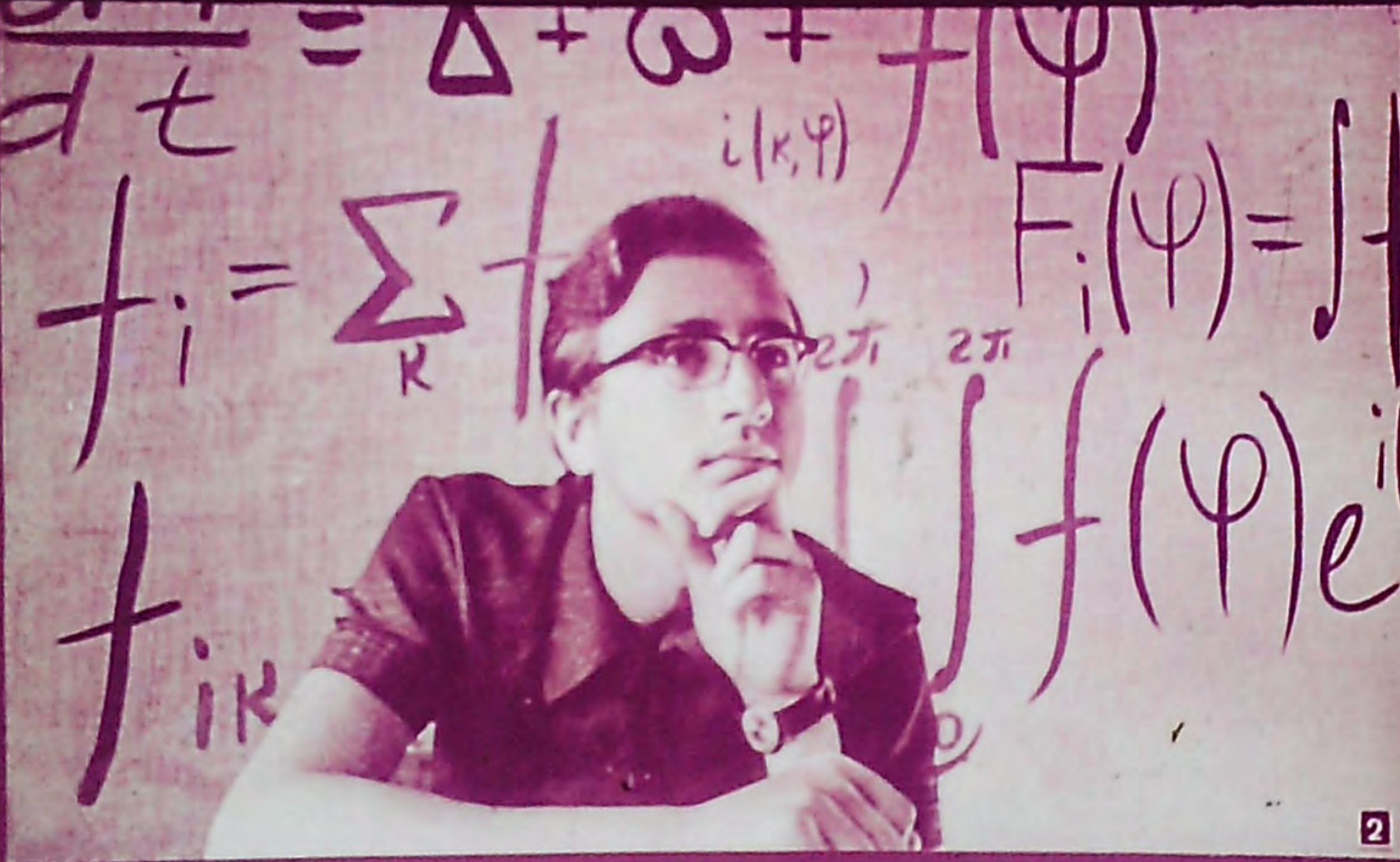
студия
ДИАФИЛЬМ

07-3-154

ИНТЕГРАЛ

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

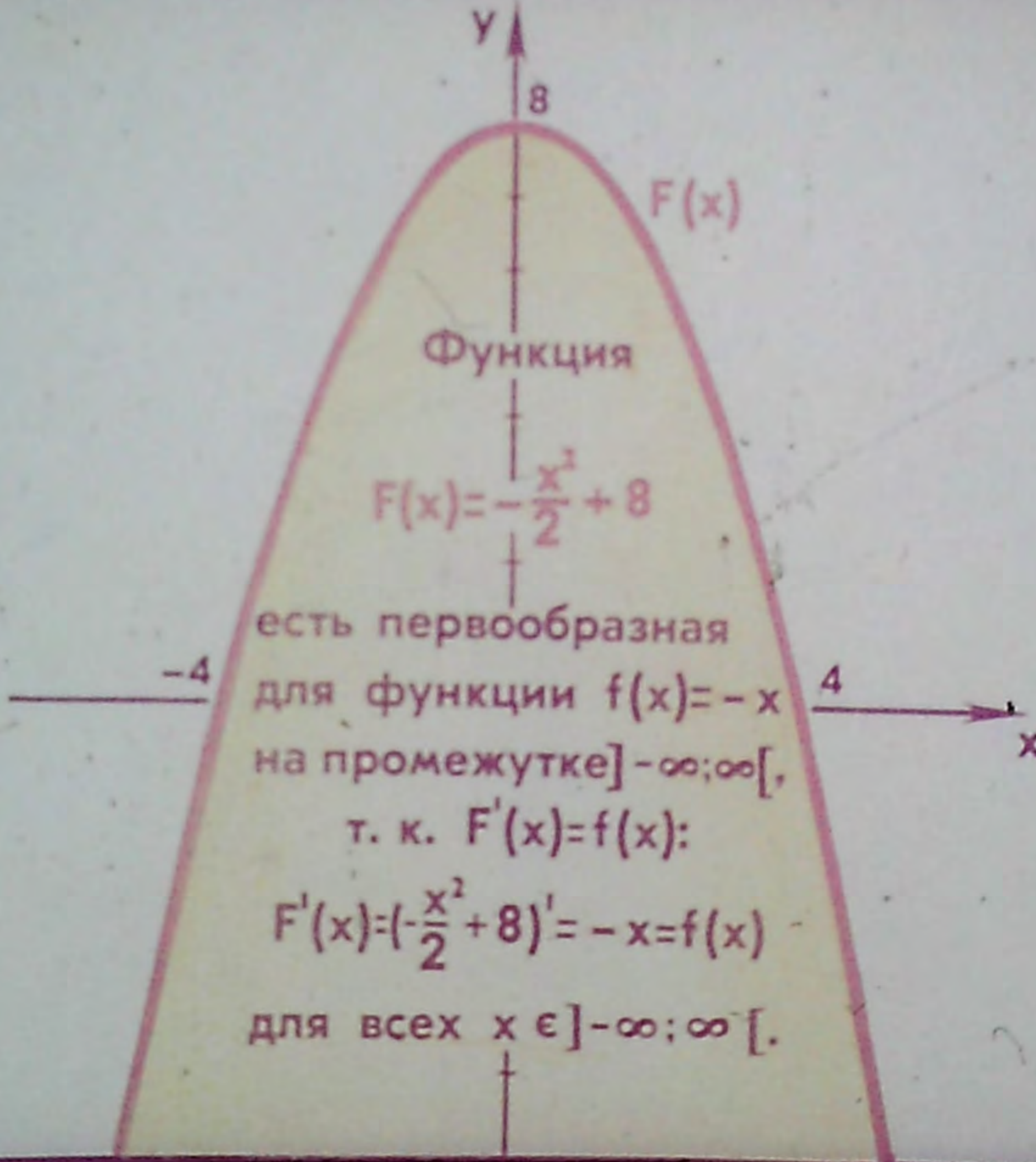
Диафильм по математике
для 10 класса



„Открытие дифференциального и интегрального исчислений невозможно было бы без фантазии“.

В. И. Ленин

ПЕРВООБРА́ЗНАЯ ФУНКЦИИ



y
8
$F(x)$
Функция
$F(x) = -\frac{x^2}{2} + 8$
есть первообразная
для функции $f(x) = -x$
на промежутке $]-\infty; \infty[$,
т. к. $F'(x) = f(x)$:
$F'(x) = (-\frac{x^2}{2} + 8)' = -x = f(x)$
для всех $x \in]-\infty; \infty[$.
-4
4
x

$\sin x$

$\cos x$

$\sin x$

$-\cos x$

$\frac{1}{\cos^2 x}$

$\operatorname{tg} x$

$4x^3$

x^4+3

$-\operatorname{ctg} x$

$\frac{1}{\sin^2 x}$

Какая из двух функций является первообразной для другой?

Укажите первообразную для каждой данной функции f

$F(x)=\frac{x^2}{2}-11$ $\quad$ $F(x)=\frac{x^2}{2}$ $\quad$ $F(x)=\frac{x^2}{2}+2$

$f(x)=x$

$F(x)=\sin x+1$

$f(x)=\cos x$

$F(x)=\sin x$

$F(x)=\sin x-4$

$F(x)=-\cos x$

$f(x)=\sin x$

$F(x)=1-\cos x$

$F(x)=-\cos x-4$

$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$

$F(x)=2\sqrt{x}$ $\quad$ $F(x)=2\sqrt{x}+5$ $\quad$ $F(x)=2\sqrt{x}-3$

Любая первообразная
для функции $f(x)$ на промежутке
может быть заменена в виде
$F(x)+C$,
где C–постоянная.

$F(x)=\operatorname{tg} x+1$; $F(x)=\operatorname{tg} x-1$; $F(x)=\operatorname{tg} x+\pi$

$f(x)=\frac{1}{\cos^2 x}$

$F(x)=\operatorname{tg} x+2$

$F(x)=\operatorname{tg} x-5$

$F(x)=\operatorname{tg} x$

$F(x)=1-\cos x$; $F(x)=-\cos x$; $F(x)=-\cos x-4$; $F(x)=-\cos x+\pi$

$F(x)=-\cos x+$

$f(x)=\cos x$

$F(x)=\sin x-1$; $F(x)=s$

$F(x)=\sin x$

$F(x)=\sin x-4$

$f(x)=x$

$F(x)=\frac{x^2}{2}+5$

$F(x)=\frac{x^2}{2}-0{,}4$

$F(x)=\frac{x^2}{2}$; $F(x)=\frac{x^2}{2}-11$; $F(x)=\frac{x^2}{2}+2$; $F(x)$

$-1{,}7$; $F(x)=\frac{x^2}{2}$

$F(x)=\operatorname{ctg} x-7$

$F(x)=\pi-\operatorname{ctg} x$; $F(x)=-\operatorname{ctg} x+1$

$f(x)=\frac{1}{\sin^2 x}$

$F(x)=-\operatorname{ctg} x$

Какие **из этих функций** являются первообразными для функции $4x^3$?

$x^4 - 4$

x^{-4}

$x^4 + 4$

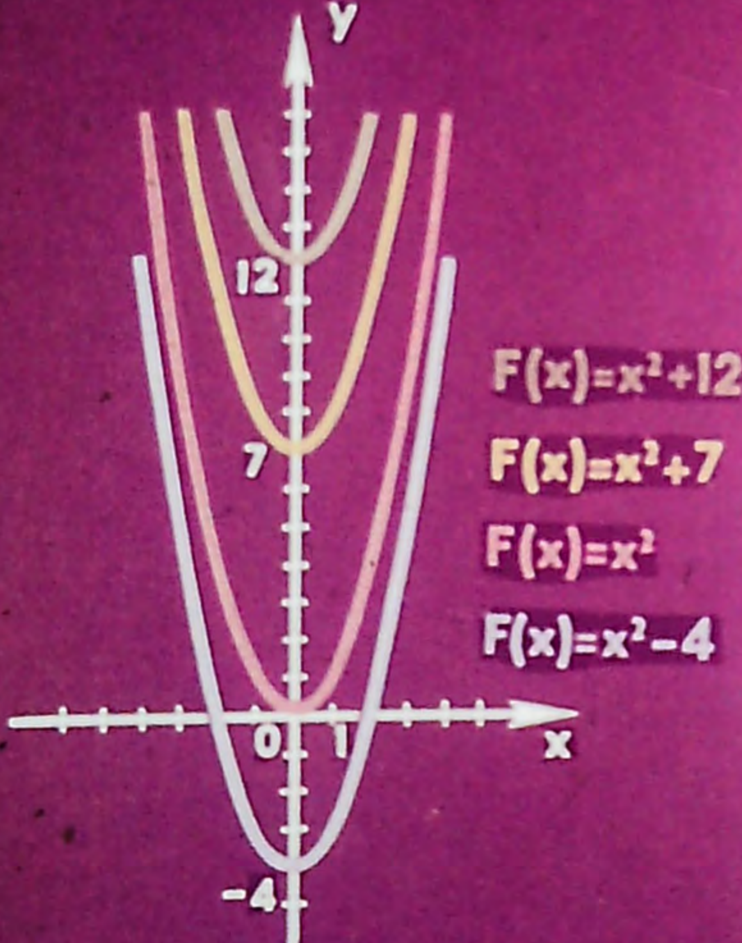
$-x^4$

x^4

$x^4 + \frac{1}{4}$

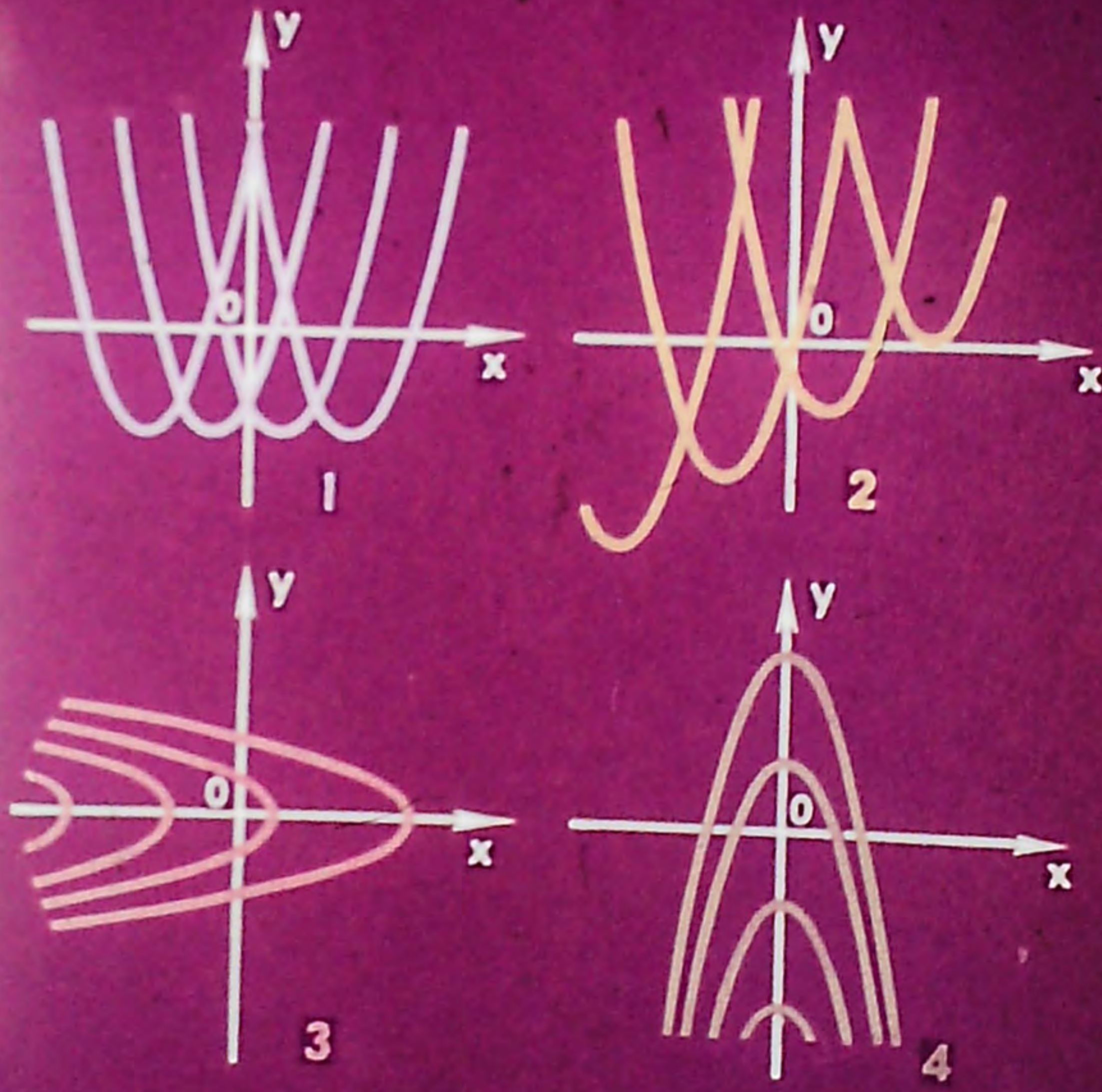
$4x^3$

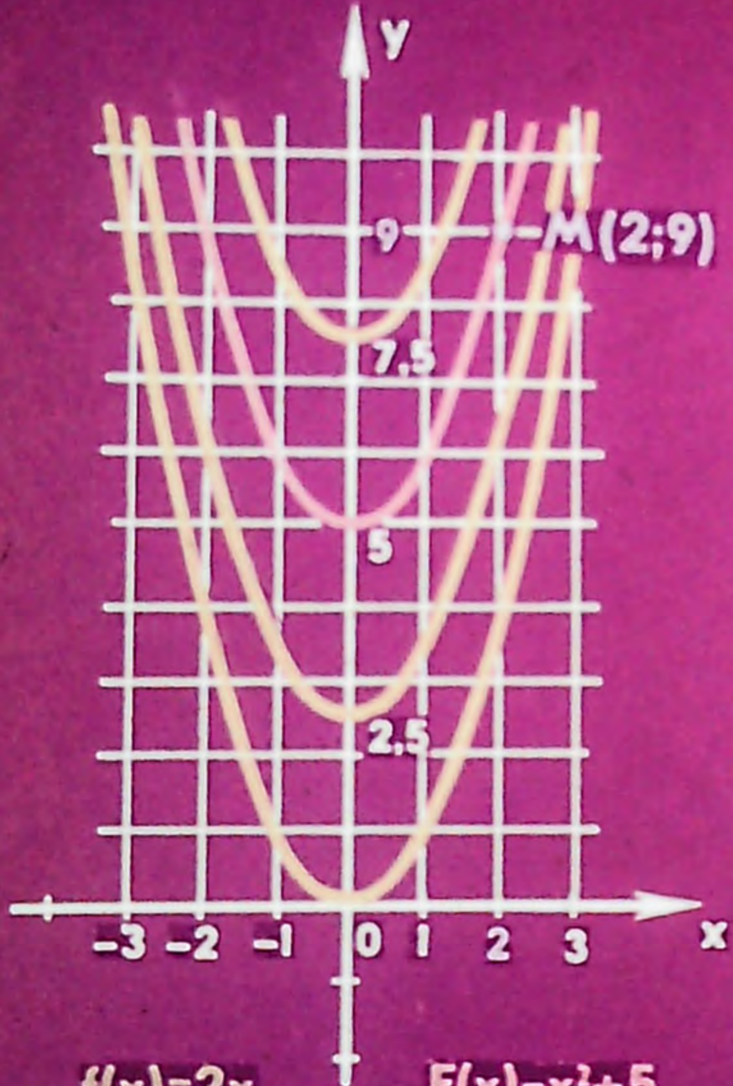
$12x^2$



Графики
всех первообразных F
функции f
получаются
параллельным переносом
любого из них
вдоль оси ординат

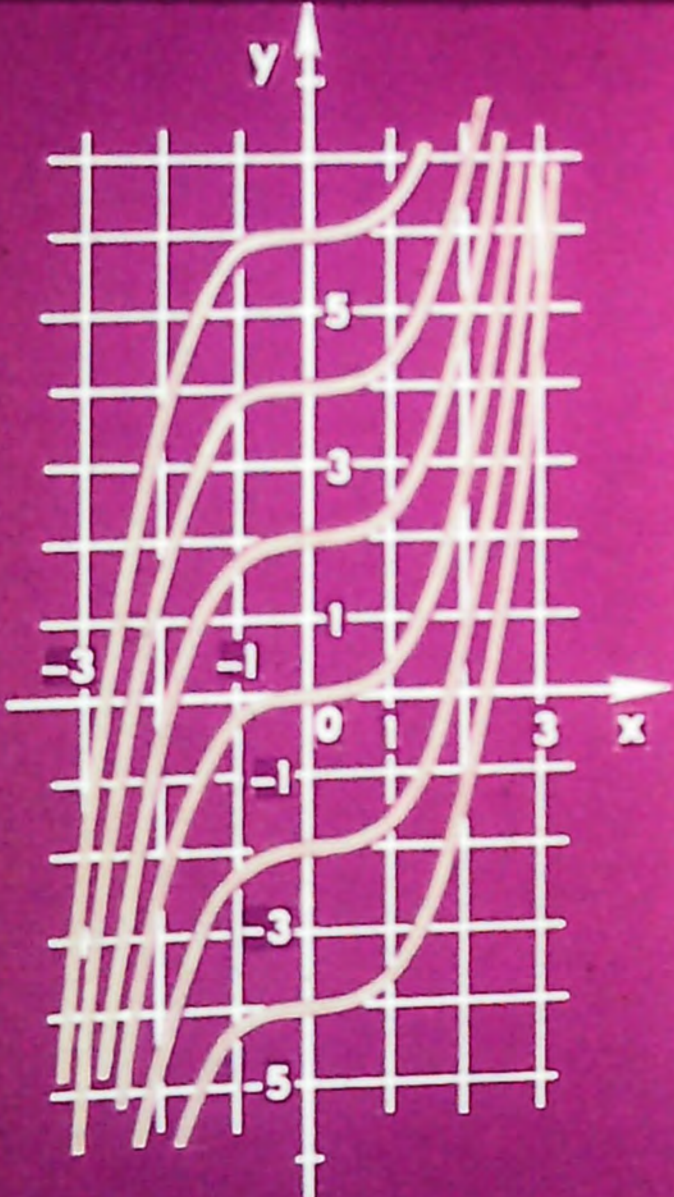
Укажите, на каких рисунках изображены графики первообразных для одной и той же функции (все эти параболы конгруэнтны).





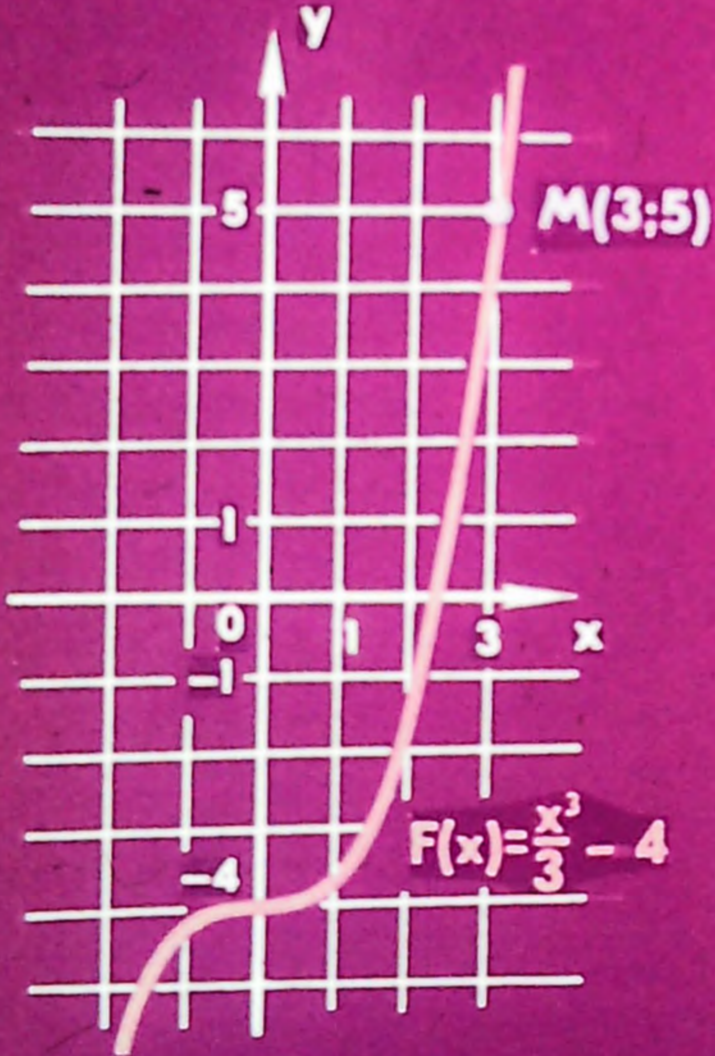
$f(x)=2x$ $F(x)=x^2+5$

Через
указанную точку
проходит график
единственной
для данной функции
первообразной



Задача.

Найти для функции $y = x^2$ первообразную, график которой проходит через точку $M(3;5)$.



Решение:

$f(x)=x^2,$

$F(x)=\frac{x^3}{3}+C,$

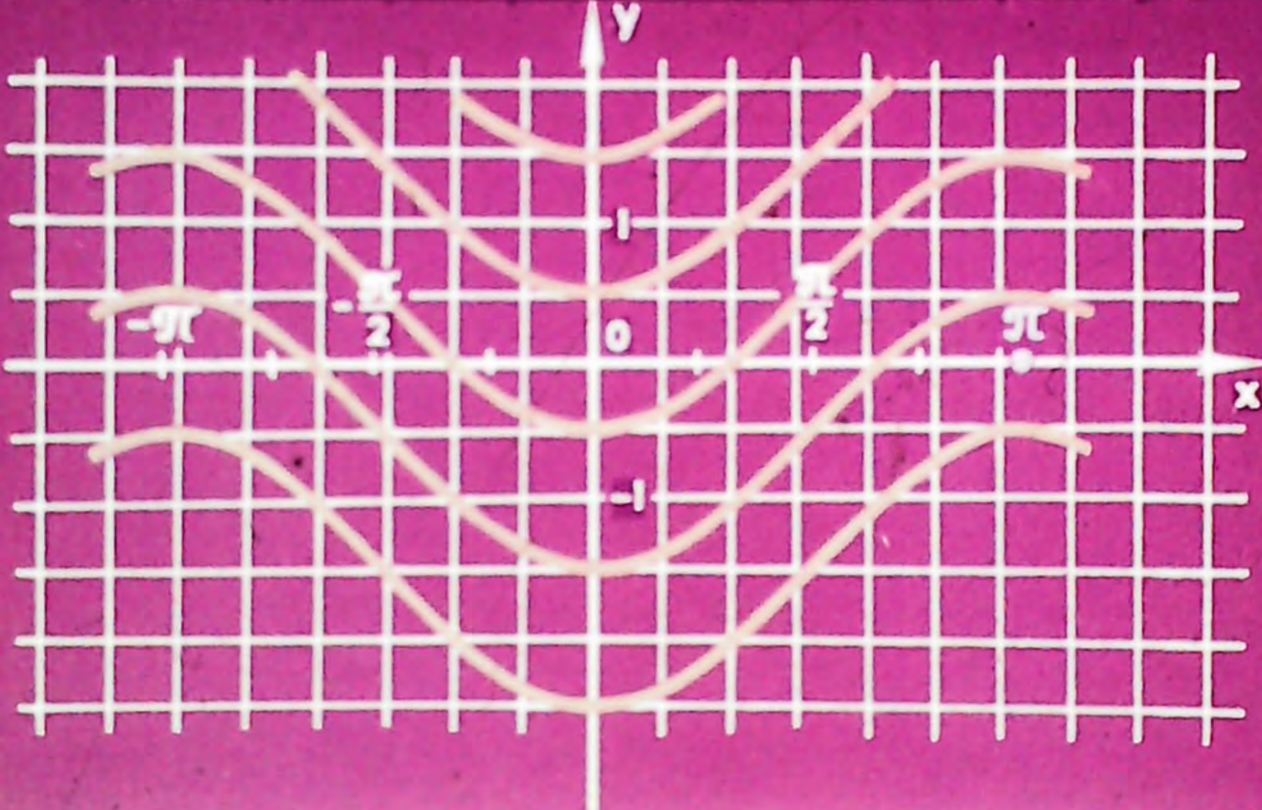
$y=\frac{x^3}{3}+C,$

$5=\frac{3^3}{3}+C,$

$C=-4$

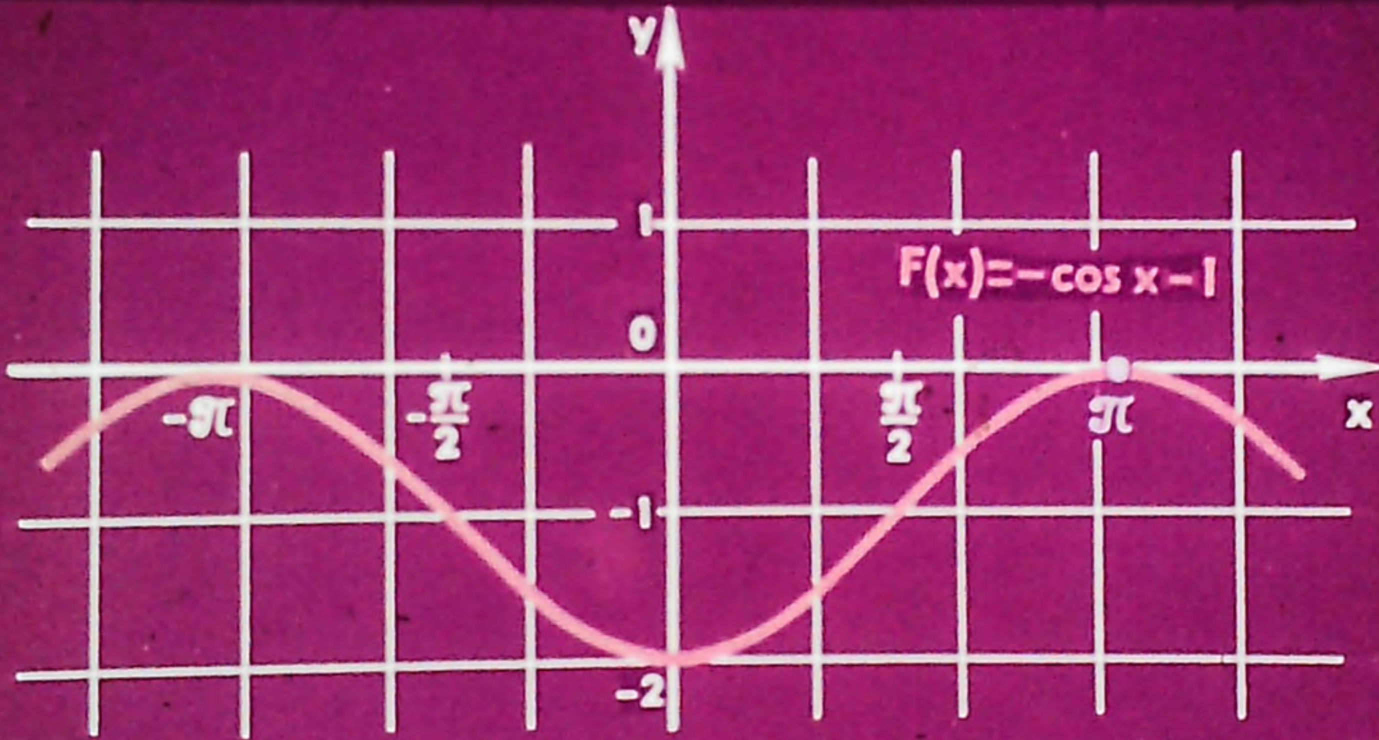
Ответ:

$F(x)=\frac{x^3}{3}-4$



Задача.

Найти функцию, производная которой равна $\sin x$, зная, что при $x=\pi$ функция принимает значение, равное 0.



Решение:

$f(x) = \sin x,$

$F(x) = -\cos x + C,$

$y = -\cos x + C,$

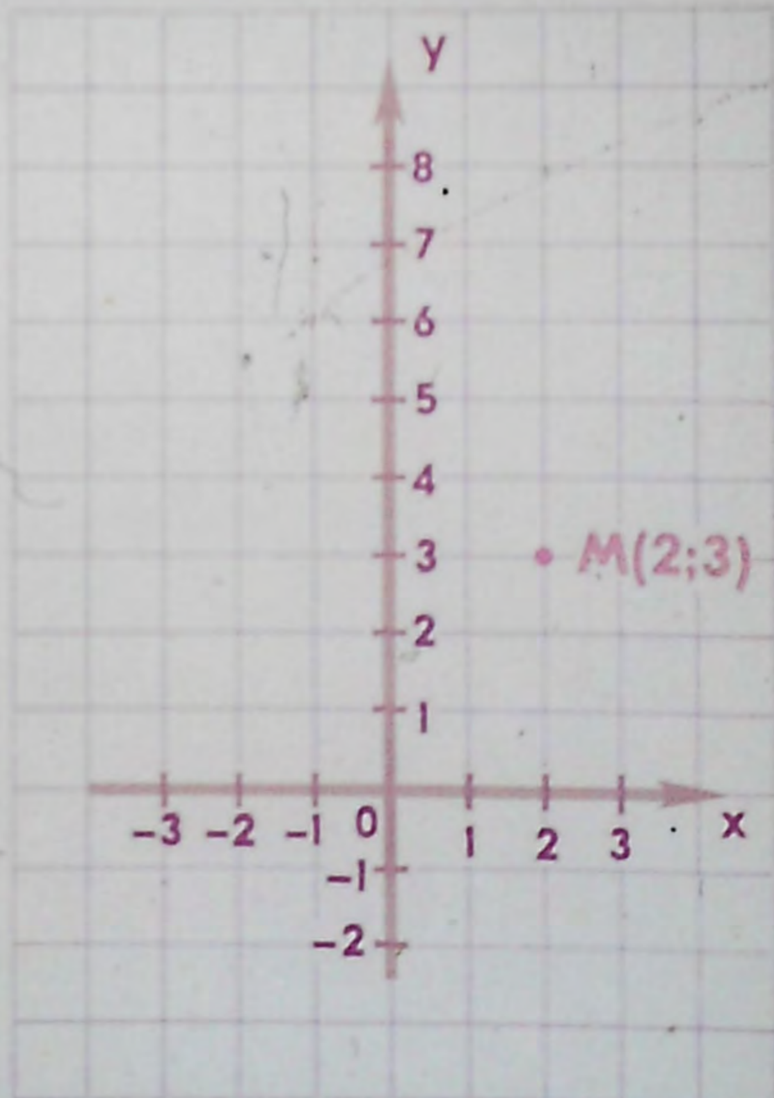
$0 = -\cos \pi + C,$

$C = -1.$

Ответ:

$F(x) = -\cos x - 1$

Постройте график первообразной функции $2x$, проходящей через точку $M(2;3)$.



Задача: **Найти одну из первообразных для функции x^2+x.**

1 правило нахождения первообразных

$$\left(\begin{array}{l} F \text{ — первообразная для } f \\ G \text{ — первообразная для } g \end{array}\right) \Rightarrow \left(F+G \text{ — первообразная для } f+g \right)$$

Решение:

$$\left(\begin{array}{l} \dfrac{x^3}{3} \text{ — первообразная для } x^2 \\ \dfrac{x^2}{2} \text{ — первообразная для } x \end{array}\right) \Rightarrow \left(\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2} \text{ — первообразная для } x^2+x \right)$$

Задача: **Найти одну из первообразных для функции $\frac{6}{\cos^2 x}$.**

II правило нахождения первообразных

$$\left(F\text{—первообразная для } f\right) \Rightarrow \left(kF\text{—первообразная для } kf\right)$$

Решение:

$$\left(\operatorname{tg} x - \begin{matrix}\text{первообразная} \\ \text{для } \frac{1}{\cos^2 x}\end{matrix}\right) \Rightarrow \left(6\operatorname{tg} x - \begin{matrix}\text{первообразная} \\ \text{для } \frac{6}{\cos^2 x}\end{matrix}\right)$$

Задача: **Найти одну из первообразных для функции $(5x+1)^2$.**

III правило нахождения первообразных

$$\left(F(x) - \begin{matrix}\text{первообразная}\\ \text{для } f(x)\end{matrix}\right) \Rightarrow \left(\frac{1}{k}F(kx+b) - \begin{matrix}\text{первообразная}\\ \text{для } f(kx+b)\end{matrix}\right)$$

Решение:

$$\left(\frac{x^3}{3} - \begin{matrix}\text{первообразная}\\ \text{для } x^2\end{matrix}\right) \Rightarrow \left(\frac{1}{5}\cdot\frac{(5x+1)^3}{3} - \begin{matrix}\text{первообразная}\\ \text{для } (5x+1)^2\end{matrix}\right)$$

$$f(x) = (5x+1)^2 =$$

$$= 25x^2 + 10x + 1.$$

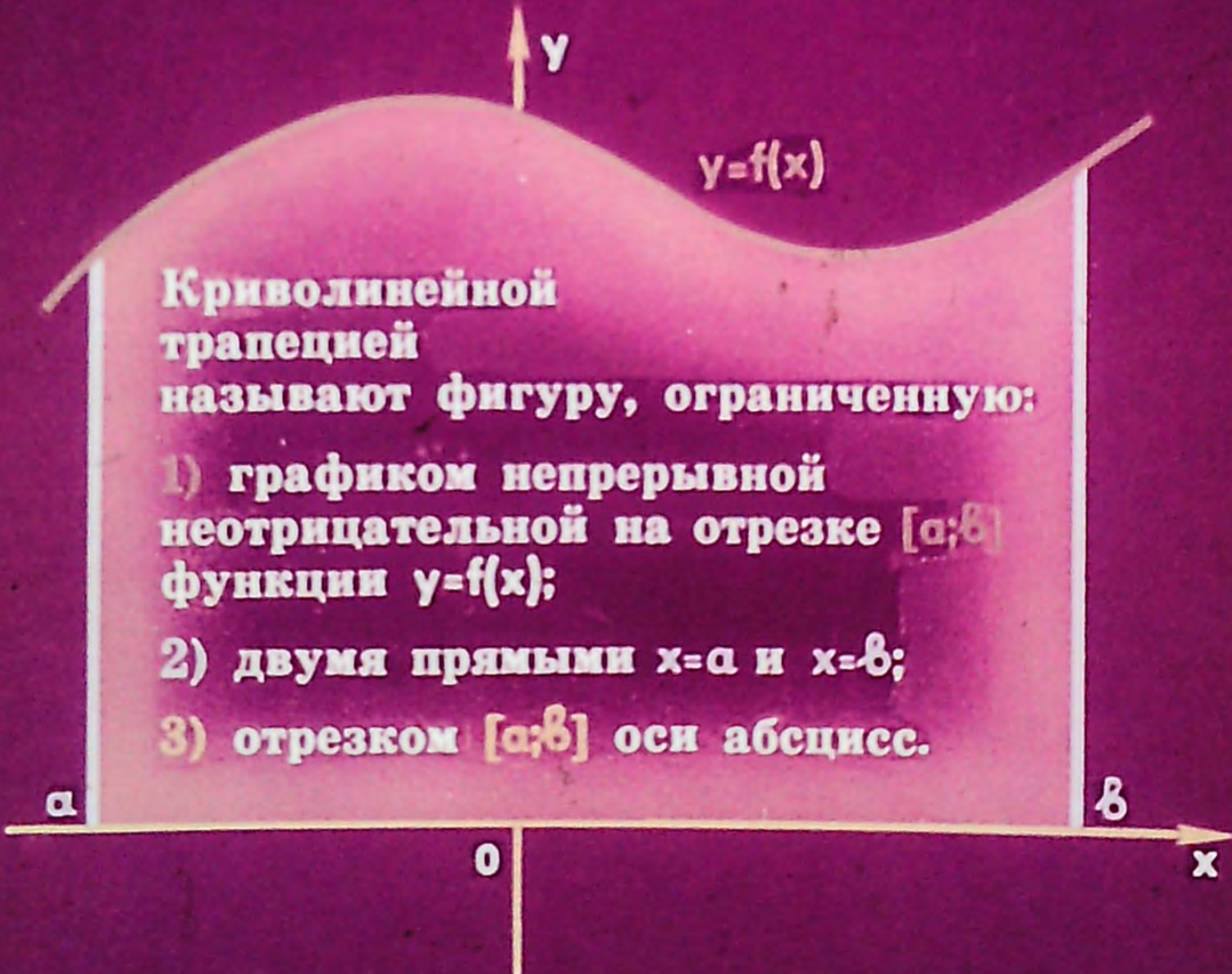
$$F(x) = \frac{25}{3}x^3 + 5x^2 + x$$

$$f(x) = (5x+1)^2$$

$$F(x) = \frac{25}{3}x^3 + 5x^2 + x + \frac{1}{15}$$

Первообразные одной и той же функции могут отличаться друг от друга только на постоянное слагаемое.


ИНТЕГРАЛ

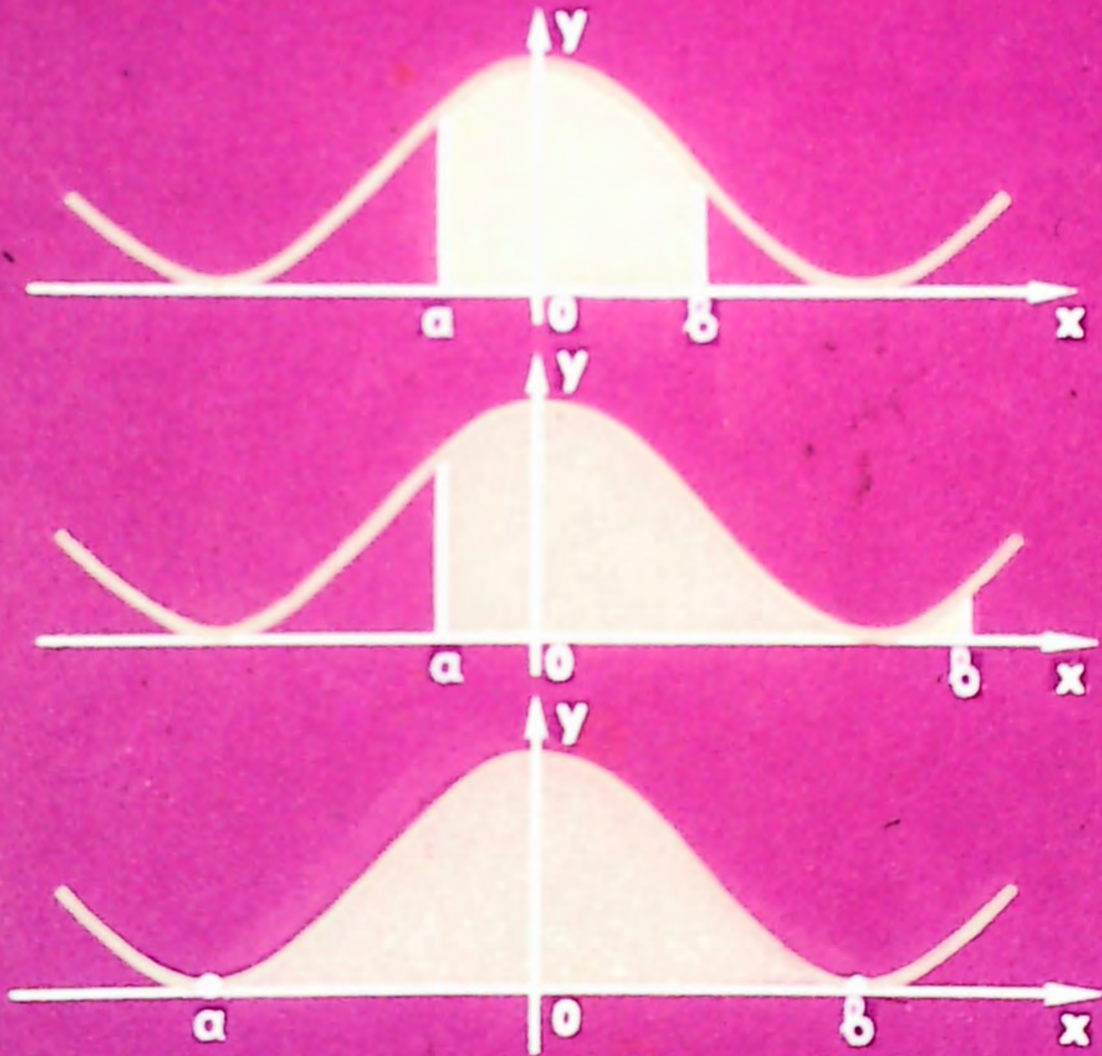


Криволинейной трапецией называют фигуру, ограниченную:

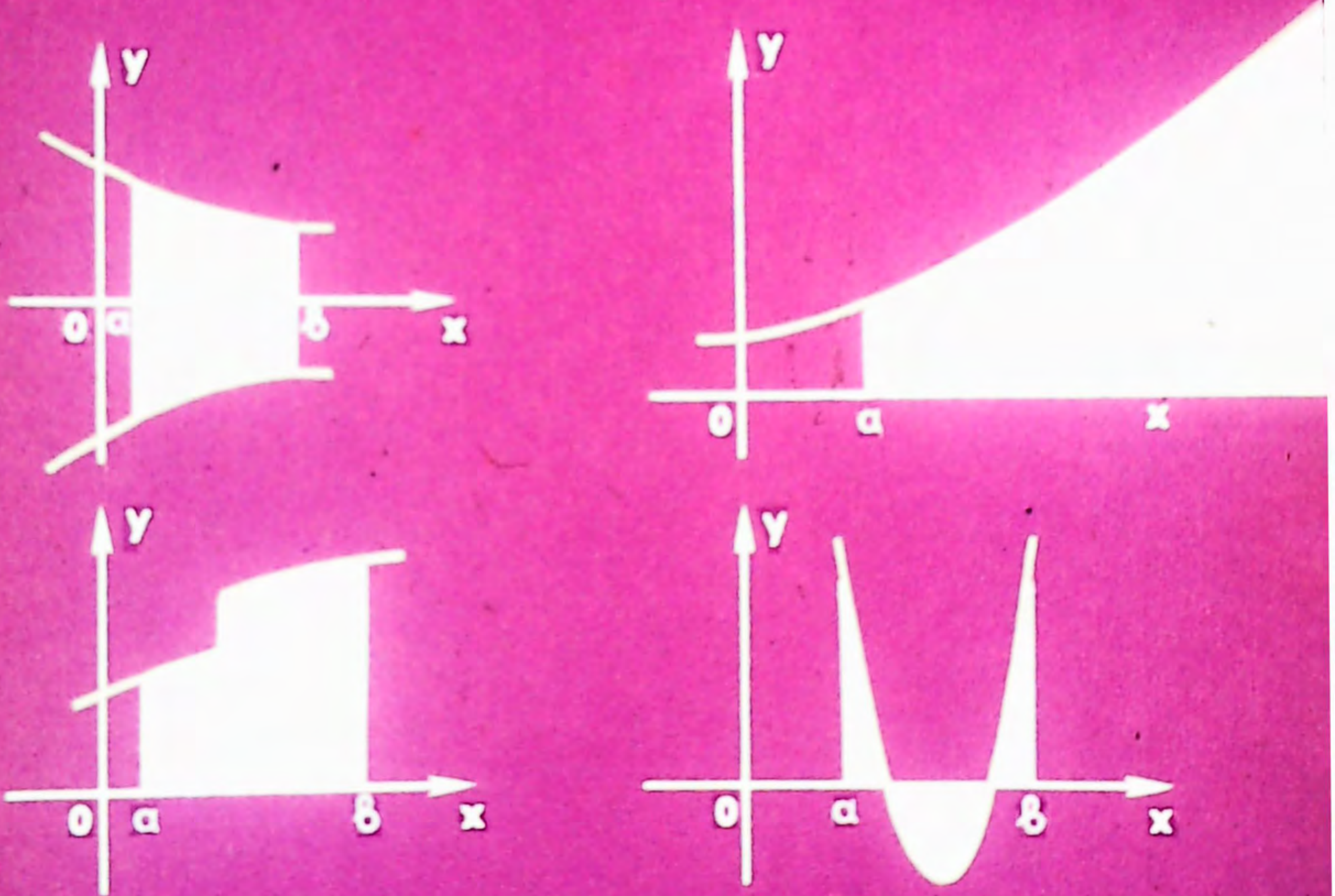
1) **графиком непрерывной неотрицательной на отрезке [a;в] функции y=f(x);**

2) **двумя прямыми x=a и x=в;**

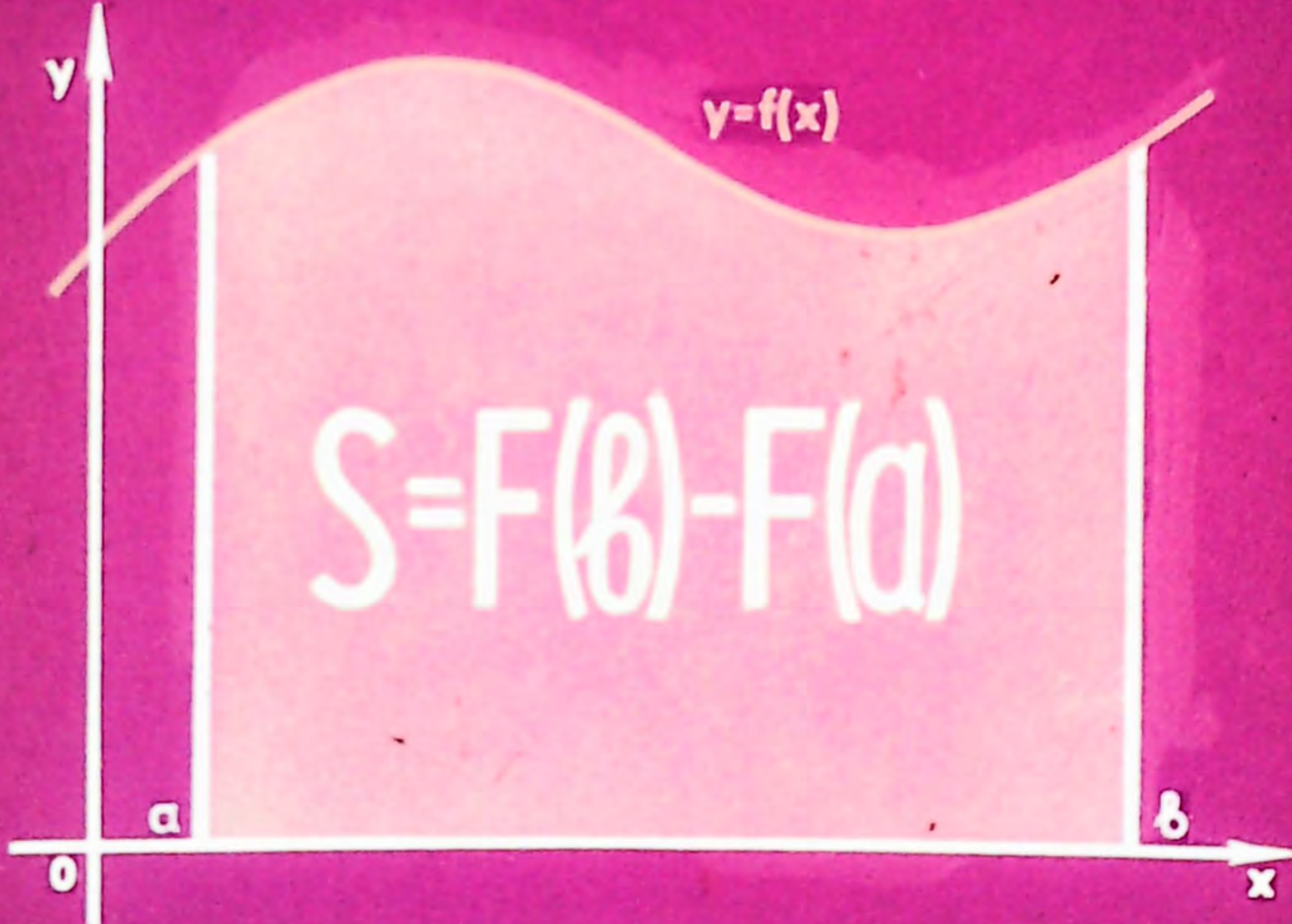
3) **отрезком [a;в] оси абсцисс.**



Это криволинейные трапеции.

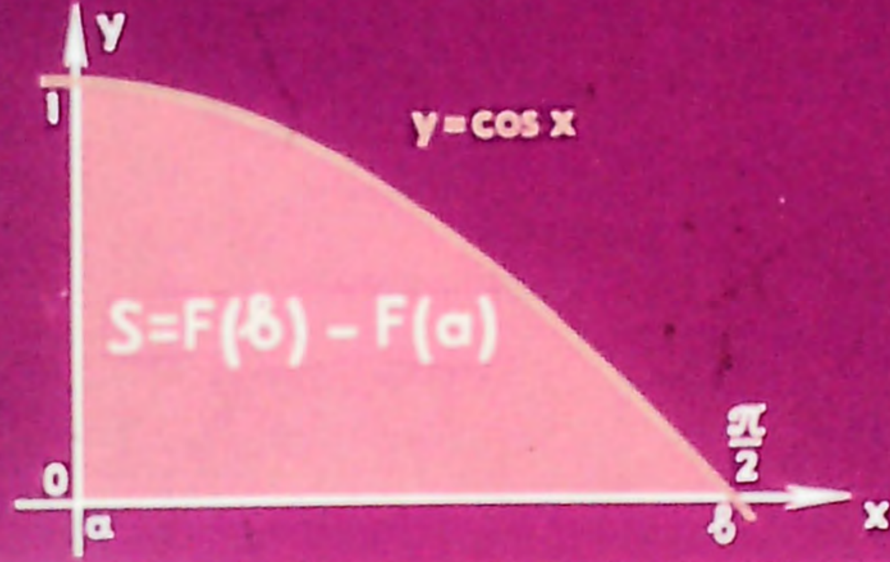


Эти фигуры нельзя назвать криволинейными трапециями.



S – площадь криволинейной трапеции.

F(x) – первообразная для f(x) на интервале, содержащем отрезок [a;b].



Задача:

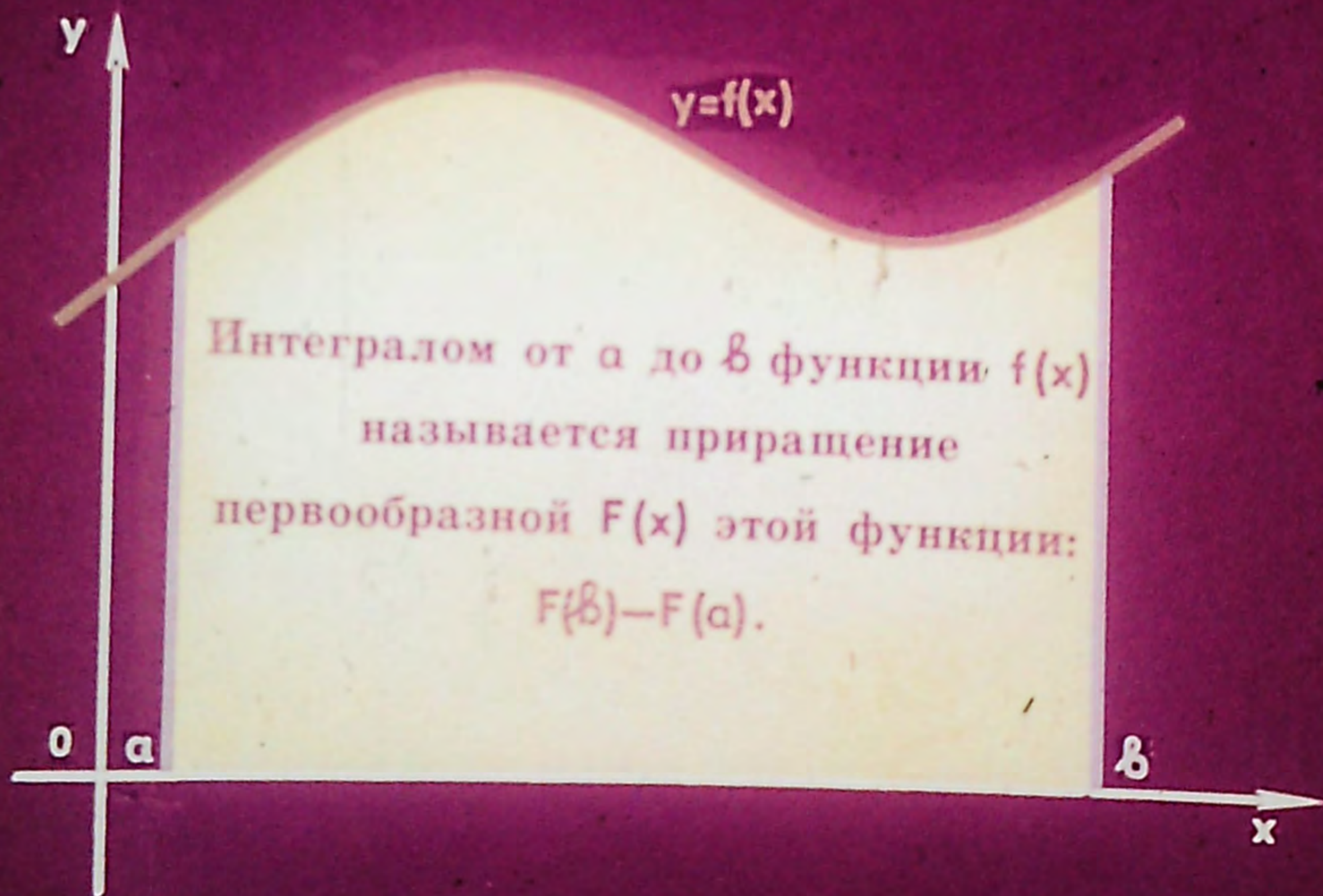
Найти площадь фигуры, ограниченной линиями
$y=\cos x$,
$y=0$,
$x=0$,
$x=\frac{\pi}{2}$.

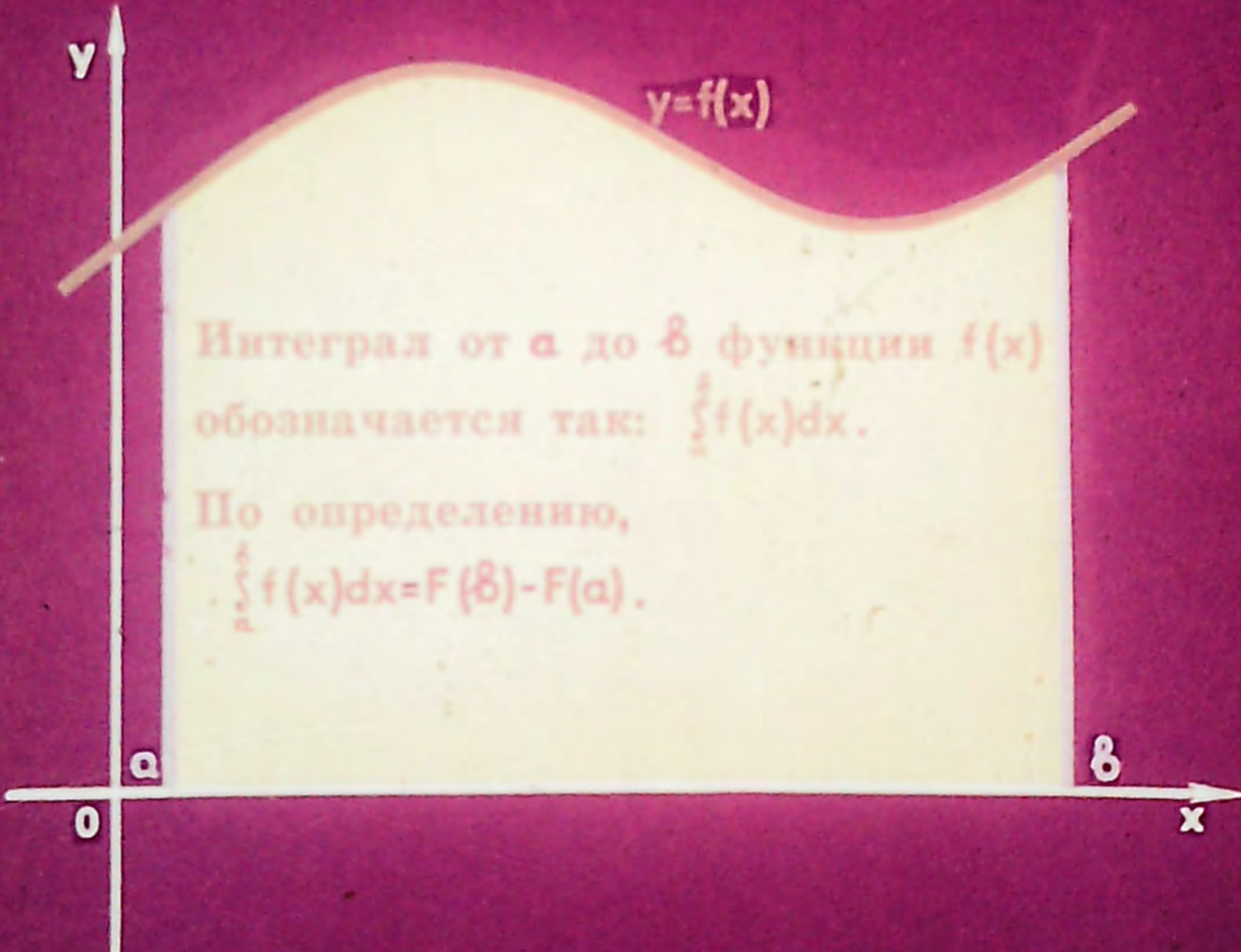
Решение:

Для $y=\cos x$ одна из первообразных есть $F(x)=\sin x$.

Поэтому
$S=F(\frac{\pi}{2})-F(0)=\sin\frac{\pi}{2}-\sin 0=1-0=1$.

Ответ: $S=1$


y
y=f(x)
Интегралом от a до b функции $f(x)$ называется приращение первообразной $F(x)$ этой функции:
$F(b)-F(a)$.
0
a
b
x
27


y
y=f(x)
Интеграл от a до b функции $f(x)$
обозначается так: $\int_a^b f(x)dx$.
По определению,
$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.
a
b
0
x

Исаак Ньютон
(1643–1727)

Формула
Ньютона-Лейбница

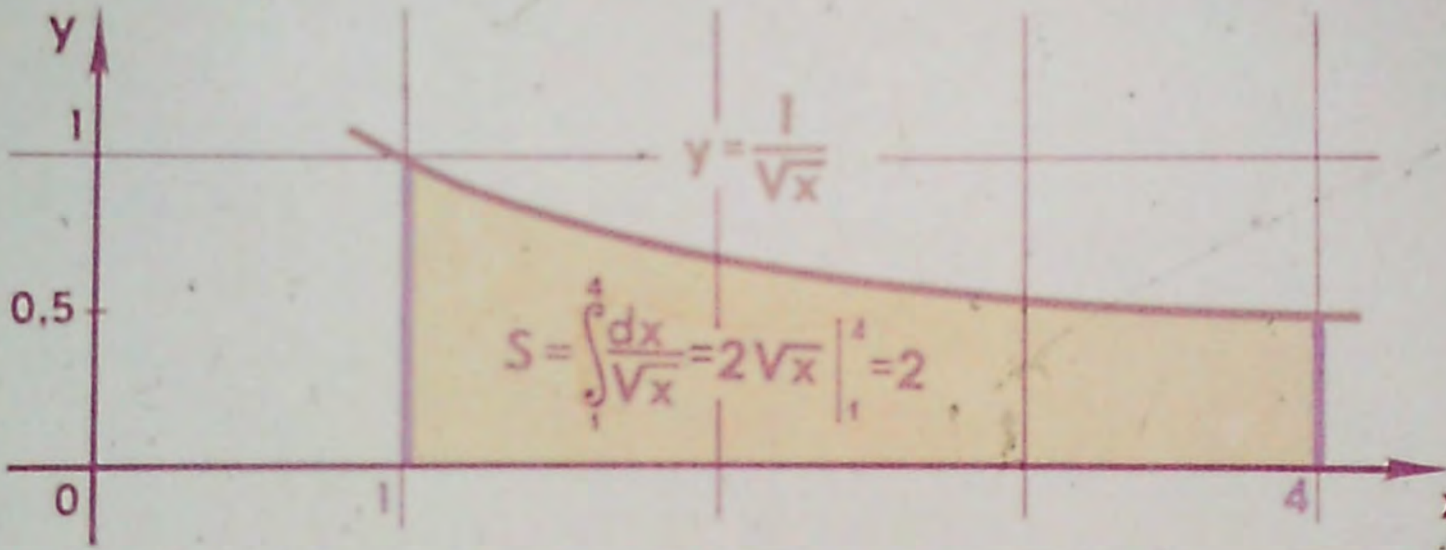
$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Готфрид Вильгельм Лейбниц
(1646–1716)

29

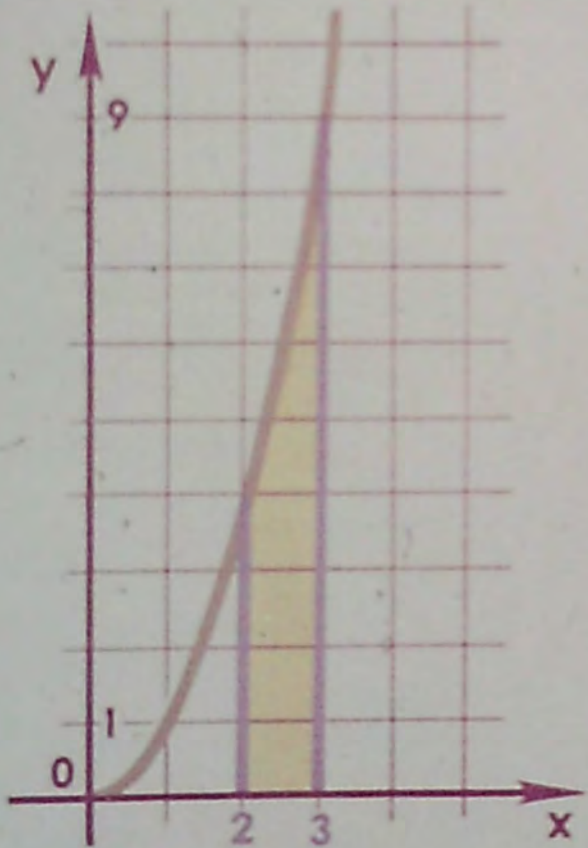
„...Дифференциальное и интегральное исчисление... было в общем и целом завершено, а не изобретено Ньютоном и Лейбницем".

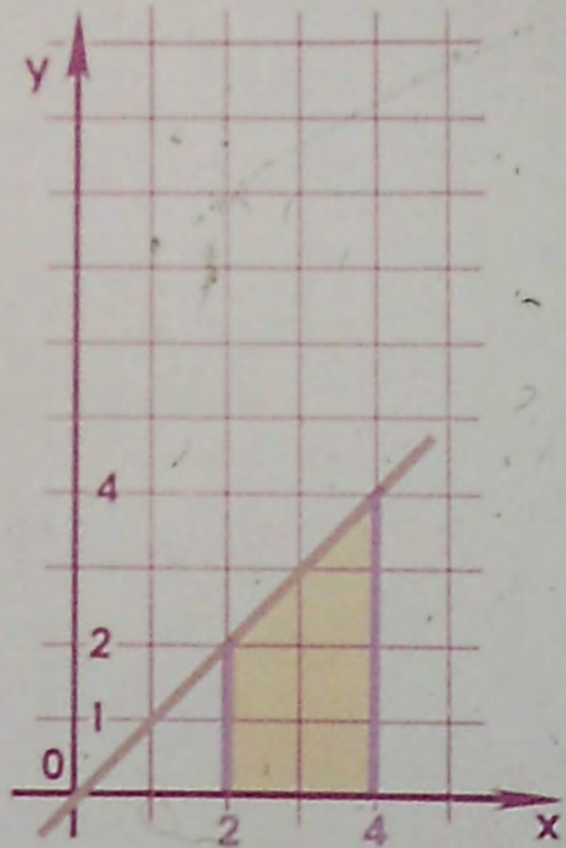
Ф. Энгельс.



Интеграл от непрерывной неотрицательной функции есть площадь соответствующей криволинейной трапеции.

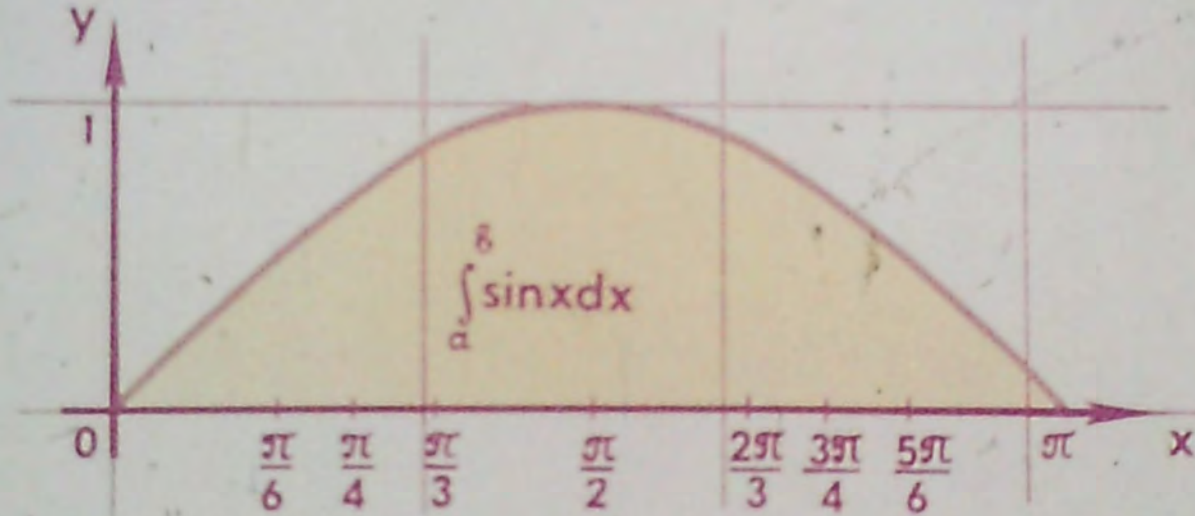
Сравните площади криволинейных трапеций.



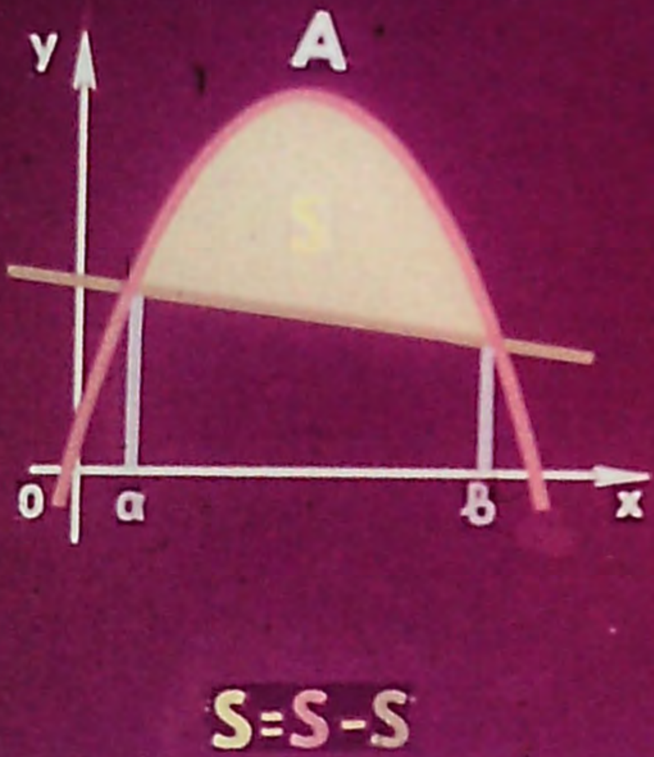


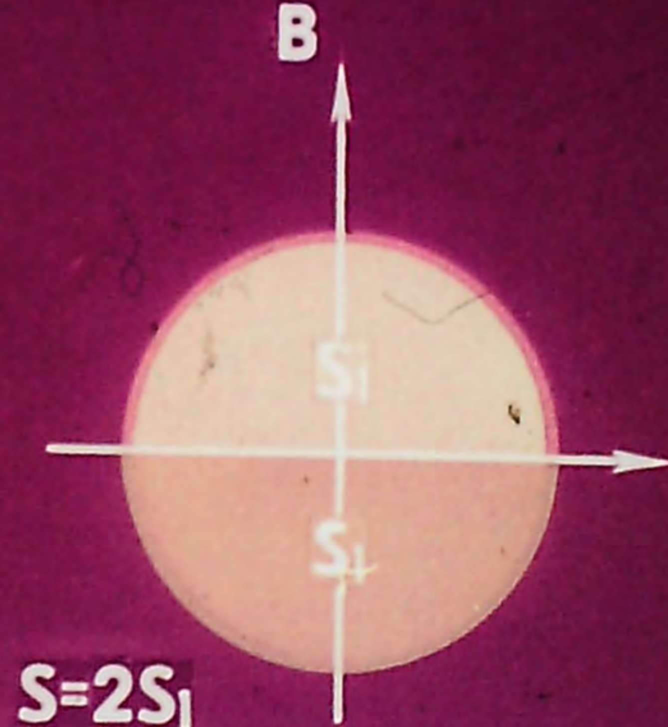
$$\int_2^3 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_2^3 =$$

$$\int_2^4 x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_2^4 =$$



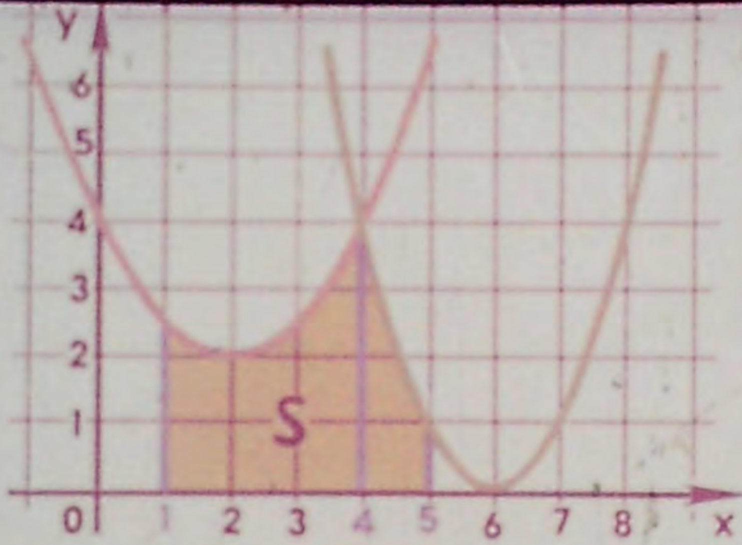
Укажите три отрезка интегрирования, на которых данный интеграл равен 1.





Интегрированием можно вычислить площади некоторых фигур, не являющихся криволинейными трапециями.

$y=0{,}5(x-2)^2+2$

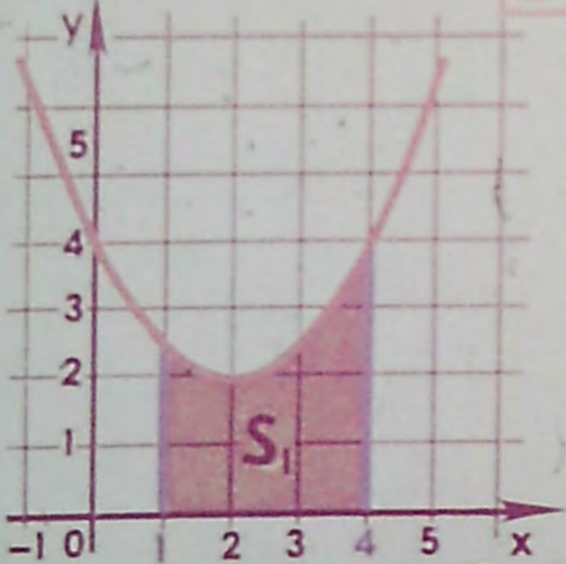


A

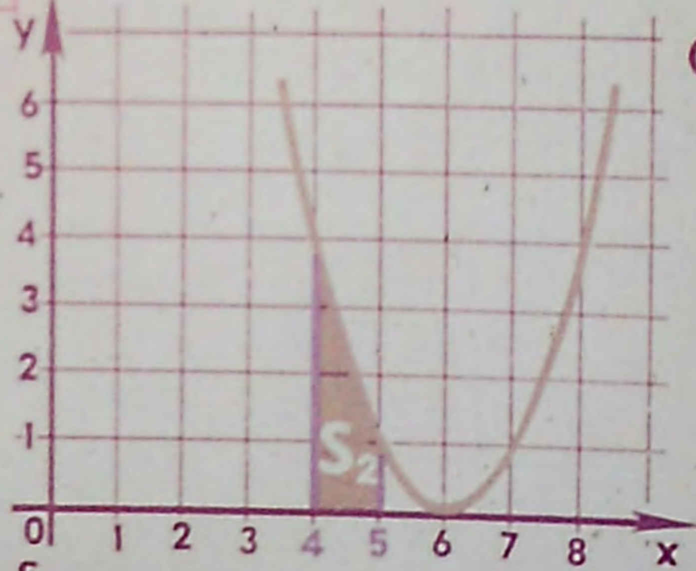
$y=(x-6)^2$

$$\boxed{S=S_1+S_2}$$

B



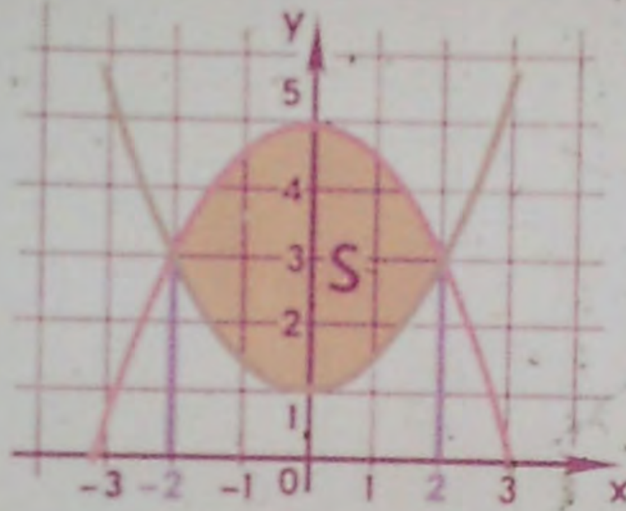
C



Вычислите S.

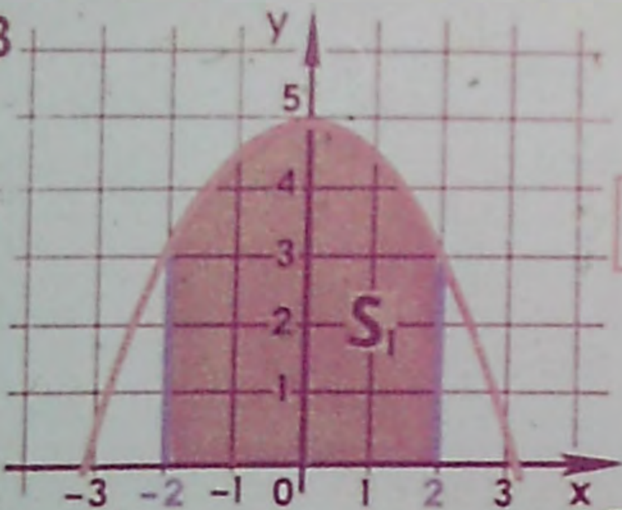
$y = -\frac{x^2}{2} + 5$

A



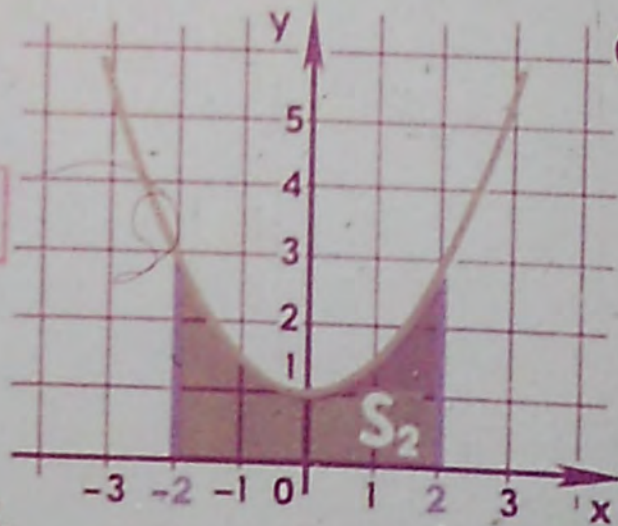
$y = \frac{x^2}{2} + 1$

B



$\boxed{S = S_1 - S_2}$

C



Вычислите S.

К сведению учителя

Кадры № 9, 11–16, 30–35 советуем проецировать на классную доску.

Ответы:

30. 2. 31. $6\frac{1}{3} > 6$. 32. $[0; \frac{\pi}{2}]$; $[\frac{\pi}{2}; \pi]$; $[\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}]$.

34. $S = \int_1^4 [0{,}5(x-2)^2+2]\,dx + \int_4^5 (x-6)^2\,dx = \frac{x^3-6x^2+24x}{6}\Big|_1^4 + \frac{x^3-18x^2+108x}{3}\Big|_4^5 =$

$= 7\frac{1}{2} + 2\frac{1}{3} = 9\frac{5}{6}$.

35. $S = \int_{-2}^{2}\left(-\frac{x^2}{2}+5\right)dx - \int_{-2}^{2}\left(\frac{x^2}{2}+1\right)dx = \frac{-x^3+30x}{6}\Big|_{-2}^{2} - \frac{x^3+6x}{6}\Big|_{-2}^{2} = 17\frac{1}{3} - 6\frac{2}{3} = 10\frac{2}{3}$.

КОНЕЦ

Диафильм по математике для 10 класса сделан по заказу Министерства просвещения СССР

Автор Э. КРАСС

Консультант Г. ЛЕВИТАС

Художник-оформитель И. ИЩЕНКО

Редактор В. ЧЕРНИНА

Студия «Диафильм» Госкино СССР, 1978 г.
101000, Москва, Центр, Старосадский пер., д. № 7

Д-028-78

Цветной 0-30